# Seminari 8

## MATEMATIKA ZA EKONOMISTE 2

Damir Horvat

FOI, Varaždin

---

### Zadatak 1

*Zadana je funkcija proizvodnje*

$$Q(L,K) = 0.24L^{0.45}K^{0.37}$$

*u ovisnosti o radu $L$ i kapitalu $K$.*

a) *Provjerite da je $Q$ homogena funkcija i odredite njezin stupanj homogenosti.*

b) *Koristeći Eulerov teorem odredite sumu parcijalnih elastičnosti proizvodnje u odnosu na rad i kapital.*

c) *Odredite sumu parcijalnih elastičnosti direktno bez korištenja Eulerovog teorema.*

d) *Kakav tip prinosa određuje zadana funkcija proizvodnje?*

e) *Za koliko se promijeni količina proizvodnje ako rad i kapital povećamo za 10%?*



---

### Rješenje

$\boxed{Q(\lambda L, \lambda K) = \lambda^{\alpha} Q(L,K)}$ $\boxed{Q(L,K) = 0.24L^{0.45}K^{0.37}}$

a)

$$\begin{aligned} Q(\lambda L, \lambda K) &= 0.24 \cdot (\lambda L)^{0.45} \cdot (\lambda K)^{0.37} = \\ &= 0.24 \cdot \lambda^{0.45} L^{0.45} \cdot \lambda^{0.37} K^{0.37} = \\ &= \lambda^{0.82} \cdot 0.24 L^{0.45} K^{0.37} = \\ &= \lambda^{0.82} \cdot Q(L,K) \end{aligned}$$

$Q$ je homogena funkcija stupnja homogenosti $\alpha = 0.82$.

b)

$$E_{Q,L} + E_{Q,K} = \alpha$$

$$E_{Q,L} + E_{Q,K} = 0.82$$



---

$\boxed{Q(L,K) = 0.24L^{0.45}K^{0.37}}$

c) $E_{Q,L} + E_{Q,K} = 0.45 + 0.37 = 0.82$

$$E_{Q,L} = \frac{L}{Q} \cdot Q_L = \frac{L}{0.24L^{0.45}K^{0.37}} \cdot 0.24K^{0.37} \cdot 0.45L^{-0.55}$$

$$E_{Q,L} = 0.45$$

$$E_{Q,K} = \frac{K}{Q} \cdot Q_K = \frac{K}{0.24L^{0.45}K^{0.37}} \cdot 0.24L^{0.45} \cdot 0.37K^{-0.63}$$

$$E_{Q,K} = 0.37$$

d) Stupanj homogenosti: $\alpha = 0.82, \quad 0 < \alpha < 1$

Kako je stupanj homogenosti između 0 i 1, zadana funkcija proizvodnje ima padajuće prinose.

e)

$$\boxed{Q(\lambda L, \lambda K) = \lambda^{0.82} Q(L, K)}$$

$$L \xrightarrow{\text{10\% povećanja rada}} L + 0.1L = 1.1L$$

$$K \xrightarrow{\text{10\% povećanja kapitala}} K + 0.1K = 1.1K$$

$$Q(1.1L, 1.1K) = 1.1^{0.82} \cdot Q(L, K)$$

- Promjena proizvodnje: $Q(1.1L, 1.1K) - Q(L, K)$
- Promjena proizvodnje u postocima:

$$\boxed{p = \frac{100y}{x}}$$

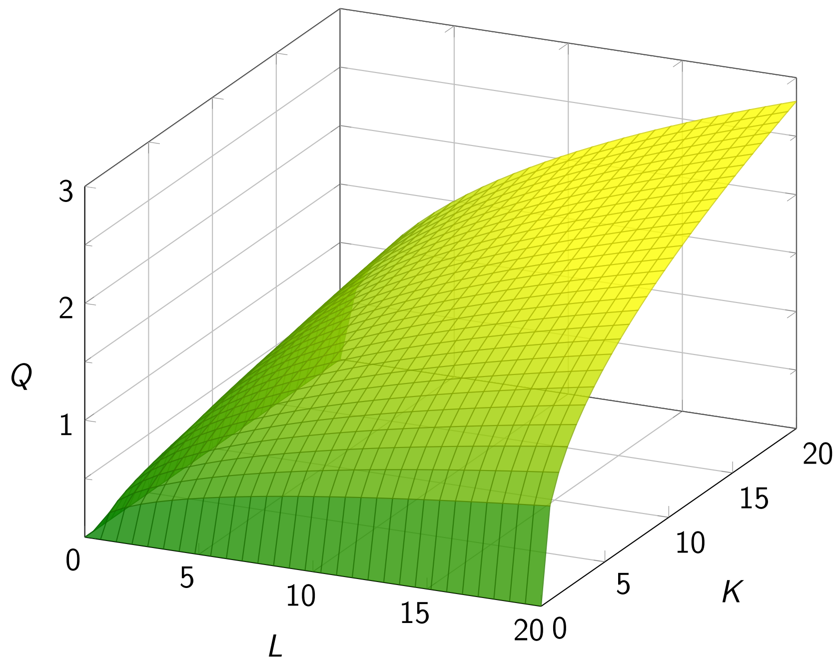
$$\frac{Q(1.1L, 1.1K) - Q(L, K)}{Q(L, K)} = \frac{1.1^{0.82} \cdot Q(L, K) - Q(L, K)}{Q(L, K)} =$$

$$= \frac{(1.1^{0.82} - 1) \cdot Q(L, K)}{Q(L, K)} = 1.1^{0.82} - 1 \approx 0.08129$$

Ako rad i kapital povećamo za 10%, proizvodnja će se povećati za 8.129%.

padajući prinosi








## Zadatak 2

*Zadana je funkcija proizvodnje*

$$Q(L, K) = 2L^{0.25}K^{0.5}$$

*u ovisnosti o radu $L$ i kapitalu $K$.*

a) *Odredite funkciju granične produktivnosti rada i interpretirajte rezultat na nivou $L = 10$, $K = 5$.*

b) *Odredite funkciju granične produktivnosti kapitala i interpretirajte rezultat na nivou $L = 10$, $K = 5$.*

c) *Izvedite jednadžbu izokvante $L = L(K)$ na nivou proizvodnje $Q = 30$.*



## Rješenje

$$\boxed{Q(L, K) = 2L^{0.25}K^{0.5}}$$

a)

$$Q_L = 2K^{0.5} \cdot 0.25L^{-0.75} = 0.5L^{-0.75}K^{0.5}$$

$$Q_L(\overset{L}{10}, \overset{K}{5}) = 0.5 \cdot 10^{-0.75} \cdot 5^{0.5} = 0.1988\cdots \approx 0.2$$

Ako na nivou $L = 10$, $K = 5$ rad povećamo za jednu jedinicu, proizvodnja će se povećati za 0.2 jedinice.

b)

$$Q_K = 2L^{0.25} \cdot 0.5K^{-0.5} = L^{0.25}K^{-0.5}$$

$$Q_K(\overset{L}{10}, \overset{K}{5}) = 10^{0.25} \cdot 5^{-0.5} = 0.79527\cdots \approx 0.8$$

Ako na nivou $L = 10$, $K = 5$ kapital povećamo za jednu jedinicu, proizvodnja će se povećati za 0.8 jedinica.

$$Q(L,K) = 2L^{0.25}K^{0.5}$$

c)

$$Q = 30$$

$$2L^{0.25}K^{0.5} = 30 \;/ : 2$$

$$L^{0.25}K^{0.5} = 15 \;/^{4}$$

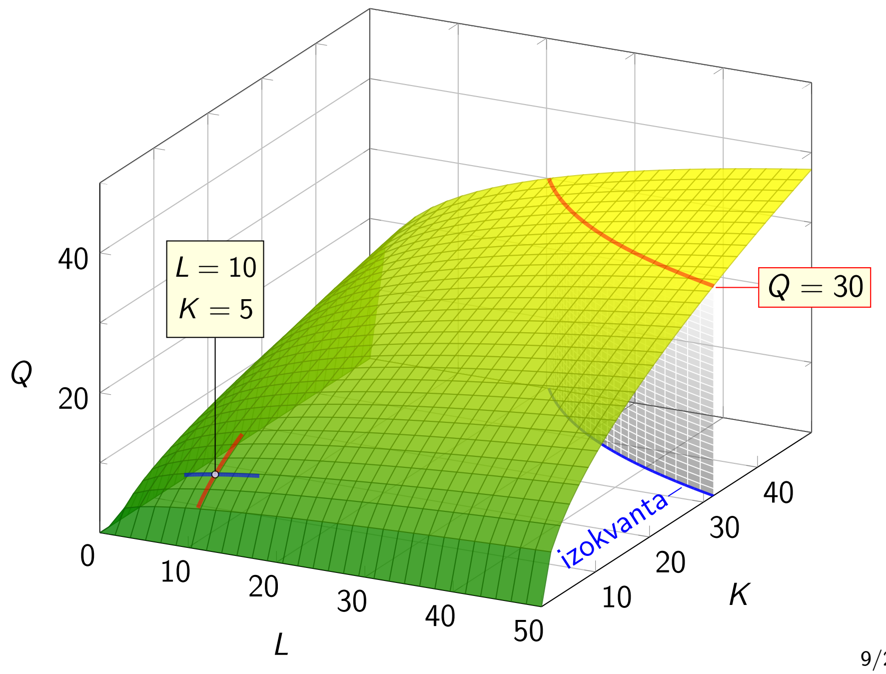
$$LK^2 = 50\,625$$

$L = L(K)$

$$\boxed{L = \frac{50\,625}{K^2}}$$

jednadžba izokvante








## Zadatak 3

*Zadana je funkcija proizvodnje*

$$Q(L,K) = 3L^{\frac{1}{2}}K$$

*u ovisnosti o radu $L$ i kapitalu $K$.*

a) *Jedna jedinica rada košta 10 €, a jedna jedinica kapitala košta 15 €. Ako poduzeće ima na raspolaganju 20 000 €, pronađite kombinaciju rada i kapitala za koje se uz maksimalno iskorištenje kapaciteta ostvaruje maksimalna proizvodnja. Koliko iznosi maksimalna proizvodnja?*

b) *Na istoj slici prikažite budžetsko ograničenje i izokvantu na nivou maksimalne proizvodnje. Što možete reći o njihovom odnosu?*



## Rješenje

$$Q(L,K) = 3L^{\frac{1}{2}}K$$

a) budžetsko ograničenje: $10L + 15K = 20\,000$

$$10L + 15K = 20\,000 \;/ : 5$$

$$2L + 3K = 4000$$

$$2L = 4000 - 3K \;/ : 2$$

$$\boxed{L = 2000 - \frac{3}{2}K}$$

$$Q\left(2000 - \frac{3}{2}K, K\right) = 3\left(2000 - \frac{3}{2}K\right)^{\frac{1}{2}} K$$

$$f(K) = 3K\left(2000 - \frac{3}{2}K\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(K) = 3K\left(2000 - \frac{3}{2}K\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(K) = 3\left(2000 - \frac{3}{2}K\right)^{\frac{1}{2}} + 3K \cdot \frac{1}{2}\left(2000 - \frac{3}{2}K\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-3}{2}$$

$$f'(K) = 3\left(2000 - \frac{3}{2}K\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{9}{4}K\left(2000 - \frac{3}{2}K\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(K) = \left(2000 - \frac{3}{2}K\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[3\left(2000 - \frac{3}{2}K\right) - \frac{9}{4}K\right]$$

$$f'(K) = \left(2000 - \frac{3}{2}K\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(6000 - \frac{27}{4}K\right)$$



$$f'(K) = \left(2000 - \frac{3}{2}K\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(6000 - \frac{27}{4}K\right)$$

$$\left(2000 - \frac{3}{2}K\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(6000 - \frac{27}{4}K\right) = 0$$

$$6000 - \frac{27}{4}K = 0 \Big/ \cdot 4$$

$$24\,000 - 27K = 0$$

$$\boxed{K = \frac{8000}{9}} \qquad K \approx 888.89$$

$$L = 2000 - \frac{3}{2}K$$

$$L = 2000 - \frac{3}{2} \cdot \frac{8000}{9}$$

$$\boxed{L = \frac{2000}{3}} \qquad L \approx 666.67$$

| | $0$ … $\frac{8000}{9}$ | $\frac{8000}{9}$ … $\frac{4000}{3}$ |
|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $-$ |
| $f$ | ↗ | ↘ |

globalni maksimum



$$Q(L, K) = 3L^{\frac{1}{2}}K$$

- Maksimalna proizvodnja

$$Q\left(\underset{L}{\frac{2000}{3}}, \underset{K}{\frac{8000}{9}}\right) = 3 \cdot \left(\frac{2000}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{8000}{9} \approx 68\,853.04$$

b) Izokvanta na nivou maksimalne proizvodnje

$$Q = 68\,853.04$$

$$3L^{\frac{1}{2}}K = 68\,853.04$$

$$K = \frac{68\,853.04}{3L^{\frac{1}{2}}}$$

$$K = K(L)$$

Budžetsko ograničenje

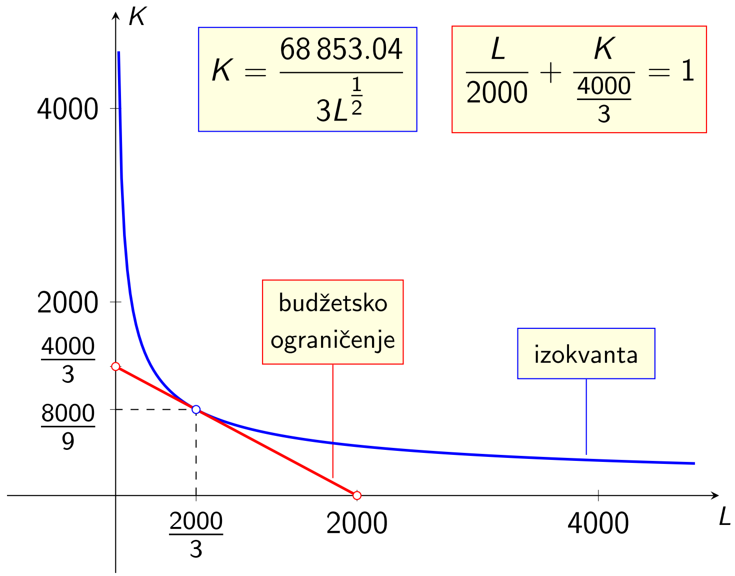
$$10L + 15K = 20\,000 \,/ : 5$$

$$2L + 3K = 4000 \,/ : 4000$$

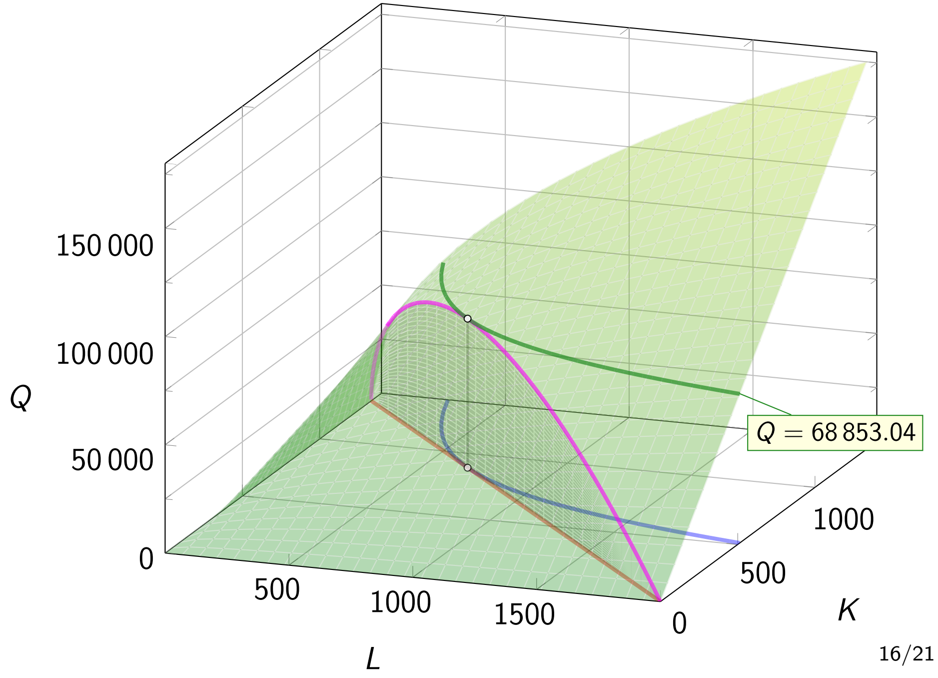
$$\frac{2L}{4000} + \frac{3K}{4000} = 1$$

$$\frac{L}{2000} + \frac{K}{\frac{4000}{3}} = 1$$

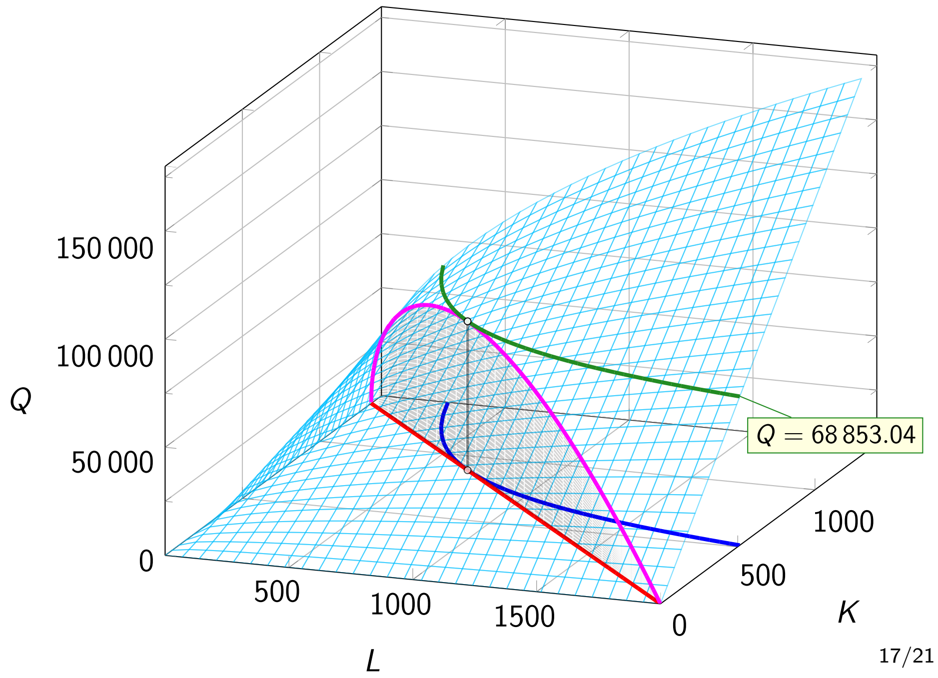





Budžetsko ograničenje je tangenta na izokvantu na nivou maksimalne proizvodnje u točki u kojoj se postiže maksimalna proizvodnja.








## Zadatak 4

*Cijena jedinice rada iznosi 1 €, cijena jedinice kapitala iznosi 2 €, a fiksni troškovi su 10 €. Funkcija proizvodnje u ovisnosti o radu $L$ i kapitalu $K$ dana je s*

$$Q(L,K) = \sqrt{0.5}LK^{\frac{1}{2}}.$$

*Na nivou proizvodnje $Q = 8$ pronađite optimalnu kombinaciju rada i kapitala tako da troškovi budu minimalni. Koliko iznose minimalni troškovi?*



## Rješenje

$$\boxed{Q(L,K) = \sqrt{0.5}LK^{\frac{1}{2}}}$$

- Funkcija troškova

$$T(L,K) = 1 \cdot L + 2 \cdot K + 10$$
$$T(L,K) = L + 2K + 10$$

- Uvjet

$$Q = 8$$
$$\sqrt{0.5}LK^{\frac{1}{2}} = 8$$
$$\boxed{L = \frac{8}{\sqrt{0.5}}K^{-\frac{1}{2}}}$$

$$T\left(\frac{8}{\sqrt{0.5}}K^{-\frac{1}{2}}, K\right) = \frac{8}{\sqrt{0.5}}K^{-\frac{1}{2}} + 2K + 10$$
$$f(K) = \frac{8}{\sqrt{0.5}}K^{-\frac{1}{2}} + 2K + 10$$

$\boxed{T(L,K) = L + 2K + 10}$

$$f(K) = \frac{8}{\sqrt{0.5}}K^{-\frac{1}{2}} + 2K + 10$$

$$f'(K) = \frac{8}{\sqrt{0.5}} \cdot \frac{-1}{2}K^{-\frac{3}{2}} + 2$$

$$f'(K) = -\frac{4}{\sqrt{0.5}}K^{-\frac{3}{2}} + 2$$

| | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

minimum

$$T(8,2) = 8 + 2 \cdot 2 + 10 = 22$$

$\boxed{L = \frac{8}{\sqrt{0.5}}K^{-\frac{1}{2}}}$

$$-\frac{4}{\sqrt{0.5}}K^{-\frac{3}{2}} + 2 = 0$$

$$-\frac{4}{\sqrt{0.5}}K^{-\frac{3}{2}} = -2 \Big/ \cdot \frac{-\sqrt{0.5}}{4}$$

$$K^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{0.5}}{2} \Big/^{-\frac{2}{3}}$$

$$K = \left(\frac{\sqrt{0.5}}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$\boxed{K = 2}$ $\boxed{L = 8}$

$$L = \frac{8}{\sqrt{0.5}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} = 8$$