Seminari 2

Matematika za ekonomiste 2

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Zadatak 1

Zadana je funkcija troškova $T = 0.001x^3 + 10x + 2000$.

a) *Odredite funkcije prosječnih i graničnih troškova i nacrtajte njihove grafove na istoj slici na segmentu* $[0, 250]$.

b) *Odredite za koju količinu proizvodnje su prosječni troškovi minimalni. U kakvom su odnosu granični i prosječni troškovi za tu količinu proizvodnje? Kako se taj odnos može vidjeti na grafu?*

$\boxed{T = 0.001x^3 + 10x + 2000}$

Rješenje

- Funkcija prosječnih troškova

$$T_p(x) = \frac{T(x)}{x} = \frac{0.001x^3 + 10x + 2000}{x}$$

$$T_p(x) = 0.001x^2 + 10 + \frac{2000}{x}$$

- Funkcija graničnih troškova

$$T_g(x) = T'(x)$$

$$T_g(x) = 0.003x^2 + 10$$

$$T_p(x) = 0.001x^2 + 10 + \frac{2000}{x}$$

$$T_p(x) = 0.001x^2 + 10 + 2000x^{-1}$$

$$T_p'(x) = 0.002x - 2000x^{-2}$$

$$\boxed{T_g(x) = 0.003x^2 + 10}$$

$$0.002x - 2000x^{-2} = 0 \,/\cdot x^2$$

$$0.002x^3 - 2000 = 0$$

$$0.002x^3 = 2000 \,/ : 0.002$$

$$x^3 = 1\,000\,000$$

$$x = 100$$

	0	100	$+\infty$
T_p'	$-$	$+$	
T_p	$\searrow$	$\nearrow$	

minimum

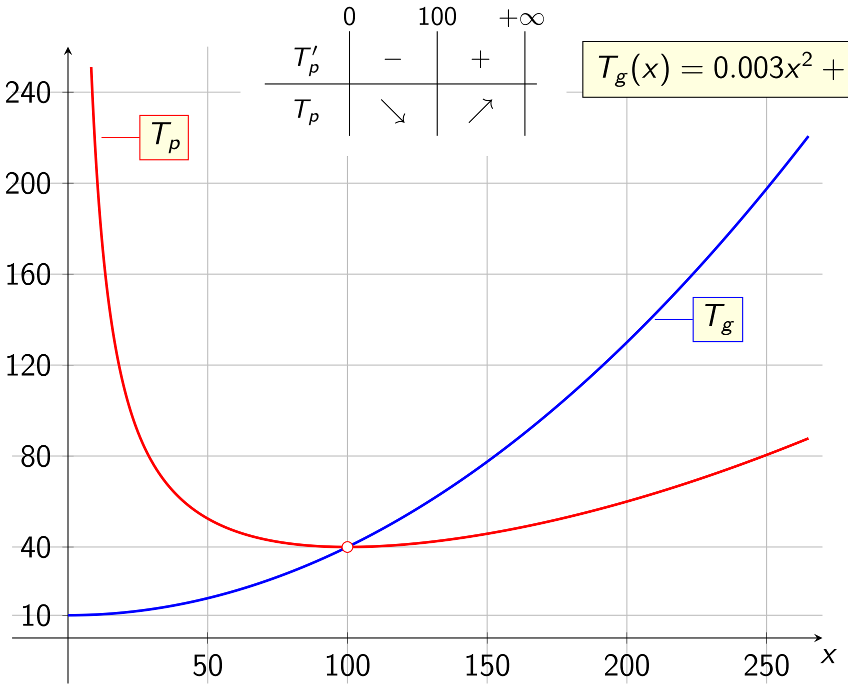
$$T_p(100) = 0.001 \cdot 100^2 + 10 + \frac{2000}{100}$$

$$T_p(100) = 40$$

$$T_g(100) = 0.003 \cdot 100^2 + 10$$

$$T_g(100) = 40$$

Prosječni troškovi su minimalni za 100 proizvoda. Za ovu količinu proizvodnje granični troškovi su jednaki prosječnim troškovima i iznose 40 novčanih jedinica.



	0		100		$+\infty$
T_p'		$-$		$+$	
T_p		$\searrow$		$\nearrow$	

$T_g(x) = 0.003x^2 + 10$

Općeniti odnos graničnih i prosječnih troškova

$$T_p(x) = \frac{T(x)}{x}$$

$$T_p'(x) = \frac{T'(x) \cdot x - T(x) \cdot 1}{x^2}$$

$$T_p'(x) = \frac{x \cdot \left(T'(x) - \frac{T(x)}{x}\right)}{x^2}$$

$$T_p'(x) = \frac{T_g(x) - T_p(x)}{x}$$

- Ako su granični troškovi veći od prosječnih troškova, tada prosječni troškovi rastu.
- Ako su granični troškovi manji od prosječnih troškova, tada prosječni troškovi padaju.

- Kako na grafu funkcije troškova uočiti, ako postoji, točku proizvodnje x_0 u kojoj su prosječni troškovi minimalni?

$$T_p'(x) = \frac{T'(x) \cdot x - T(x)}{x^2} = \frac{T_g(x) - T_p(x)}{x}$$

- Iz $T_p'(x_0) = 0$ slijedi

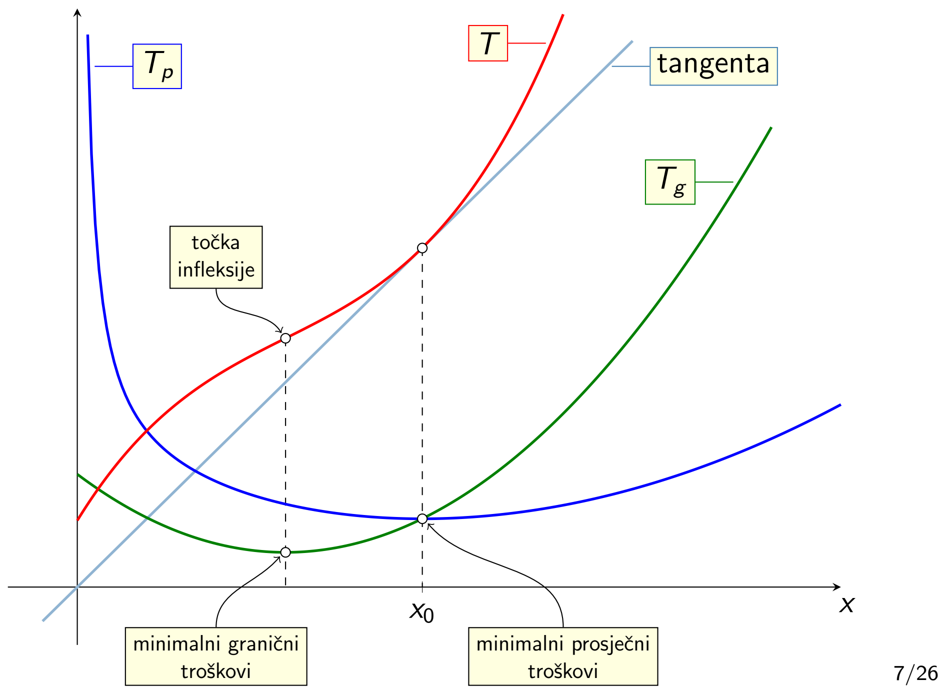
$$T'(x_0) = \frac{T(x_0)}{x_0}.$$

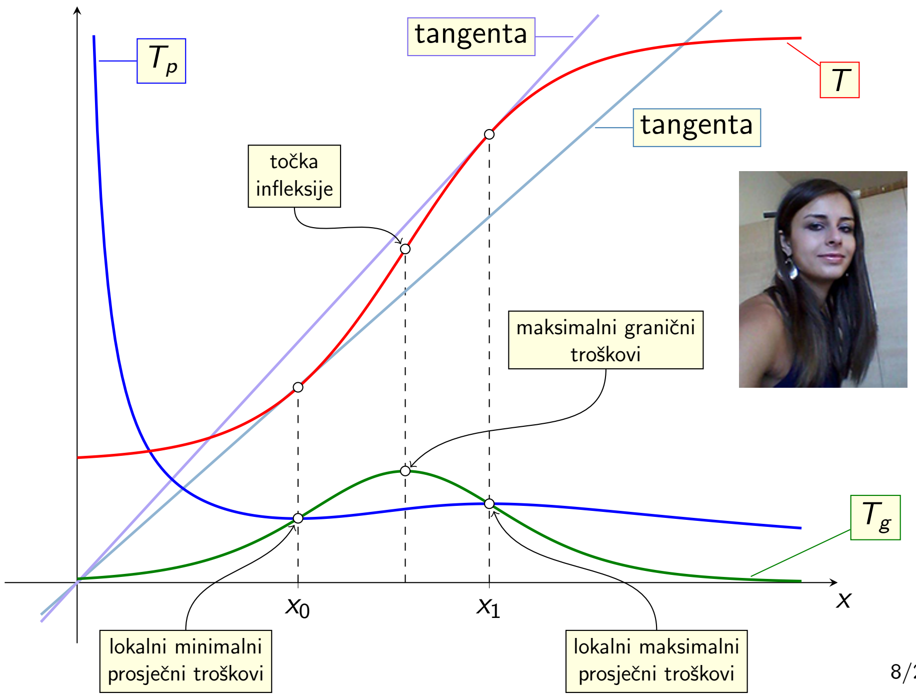
- Jednadžba tangente na graf funkcije troškova u točki x_0

$$t \ldots y - T(x_0) = T'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$t \ldots y = \frac{T(x_0)}{x_0} \cdot x$$

tangenta prolazi kroz ishodište koordinatnog sustava





Neka svojstva funkcije troškova

- Funkcija troškova je u pravilu rastuća funkcija na $[0, +\infty\rangle$.
- Ako je funkcija troškova konveksna, tada se granični troškovi povećavaju s porastom proizvodnje.
- Ako je funkcija troškova konkavna, tada se granični troškovi smanjuju s porastom proizvodnje.
- Tangenta na graf funkcije troškova u točki u kojoj su prosječni troškovi minimalni prolazi kroz ishodište koordinatnog sustava, a funkcija troškova je konveksna u toj točki.
- Razina proizvodnje za koju su prosječni troškovi minimalni, prosječni troškovi su jednaki graničnim troškovima.
- Prosječni troškovi padaju ako su veći od graničnih troškova. Prosječni troškovi rastu ako su manji od graničnih troškova.

Zadatak (Domaća zadaća)

Zadana je linearna funkcija troškova $T = 2x + 5$.

a) *Odredite funkcije prosječnih i graničnih troškova.*
b) *Nacrtajte grafove funkcije troškova, prosječnih troškova i graničnih troškova na istoj slici.*
c) *Za koju razinu proizvodnje su prosječni troškovi minimalni? Objasnite što se događa u ovom slučaju.*
d) *Kako se odmah mogao donijeti zaključak o minimalnim prosječnim troškovima na temelju zadane funkcije troškova? Koristite svojstvo tangente koje smo ranije spomenuli.*

Zadatak 2

Zadana je funkcija troškova $T = 45\sqrt{3Q + 2209}$.

a) *Odredite fiksne, varijabilne i prosječne troškove.*
b) *Koliko je proizvoda proizvedeno ako su troškovi jednaki 5000?*
c) *Odredite granične troškove za 10 proizvoda i interpretirajte rezultat.*
d) *Odredite funkciju elastičnosti troškova.*
e) *Odredite elastičnost troškova za 10 proizvoda i interpretirajte rezultat.*

$$\boxed{T = 45\sqrt{3Q + 2209}}$$

Rješenje

a) Fiksni troškovi

$$T_F = T(0) = 45\sqrt{3 \cdot 0 + 2209} = 45 \cdot 47 = 2115$$

Varijabilni troškovi

$$T_V = T - T_F = 45\sqrt{3Q + 2209} - 2115$$

Prosječni troškovi

$$T_p = \frac{T}{Q} = \frac{45\sqrt{3Q + 2209}}{Q}$$

b)

$$T = 5000$$

$$45\sqrt{3Q + 2209} = 5000 \;\Big/ : 5$$

$$9\sqrt{3Q + 2209} = 1000 \;\Big/^2$$

$$81 \cdot (3Q + 2209) = 1\,000\,000$$

$$243Q + 178\,929 = 1\,000\,000$$

$$243Q = 821\,071$$

$$Q = \frac{821\,071}{243}$$

$$Q \approx 3378.89$$

Proizvedeno je približno 3379 proizvoda.

$$\boxed{T = 45\sqrt{3Q + 2209}}$$

c)

$$T' = \frac{45}{2\sqrt{3Q + 2209}} \cdot (3Q + 2209)' = \frac{45}{2\sqrt{3Q + 2209}} \cdot 3 = \frac{135}{2\sqrt{3Q + 2209}}$$

$$T'(10) = \frac{135}{2\sqrt{3 \cdot 10 + 2209}} = \frac{135}{2\sqrt{2239}} \approx 1.43$$

Ako na razini proizvodnje od 10 proizvoda proizvodnju povećamo za jedan proizvod, troškovi će se povećati za 1.43 novčane jedinice.

$$\boxed{\left(\sqrt{\text{nešto}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\text{nešto}}} \cdot (\text{nešto})'} \qquad \boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$\boxed{T' = \frac{135}{2\sqrt{3Q + 2209}}} \qquad \boxed{T = 45\sqrt{3Q + 2209}}$$

d)

$$E_{T,Q} = \frac{Q}{T} \cdot T' = \frac{Q}{45\sqrt{3Q + 2209}} \cdot \frac{135}{2\sqrt{3Q + 2209}} = \frac{3Q}{2(3Q + 2209)} = \frac{3Q}{6Q + 4418}$$

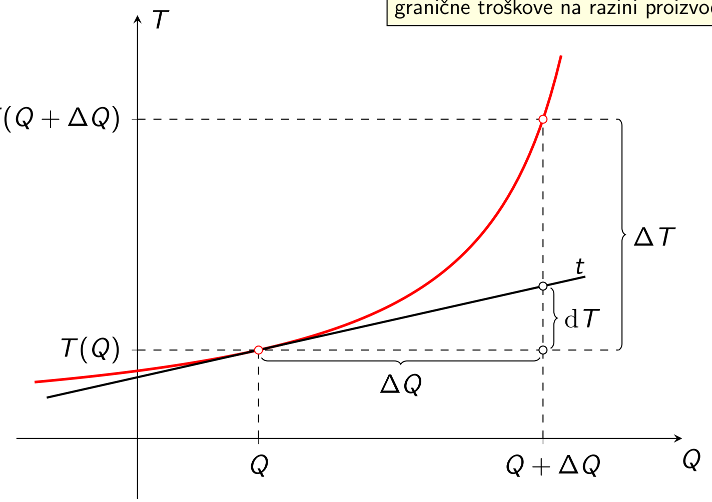
e)

$$E_{T,Q}(10) = \frac{3 \cdot 10}{6 \cdot 10 + 4418} = \frac{15}{2239} \approx 0.0067$$

Ako na razini proizvodnje od 10 proizvoda proizvodnju povećamo za 1%, troškovi će se povećati za 0.0067%.

Vizualizacija graničnih troškova

Kada je $\Delta Q = 1$, tada $\mathrm{d}T$ predstavlja granične troškove na razini proizvodnje Q.



Zadatak 3

Zadana je funkcija ponude $q = 2.43\sqrt[4]{18+0.2p^2}$.

a) *Koliko se proizvoda nudi ako je cijena jednog proizvoda* 100 *kn.*

b) *Odredite funkciju elastičnosti ponude.*

c) *Odredite elastičnost ponude na razini cijene od* 30 *kn i interpretirajte rezultat.*

d) *Odredite cijenu za koju je elastičnost ponude jednaka* $\frac{1}{22}$.

Rješenje

a) $q(100) = 2.43\sqrt[4]{18+0.2\cdot 100^2} \approx 16.29$

Ako je cijena jednog proizvoda 100 kn, nudi se približno 16 proizvoda.

$$\boxed{q = 2.43\sqrt[4]{18+0.2p^2}}$$

b) $q = 2.43\cdot\left(18+0.2p^2\right)^{\frac{1}{4}}$

$$q' = 2.43\cdot\frac{1}{4}\left(18+0.2p^2\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(18+0.2p^2\right)' =$$

$$= 2.43\cdot\frac{1}{4}\left(18+0.2p^2\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot 0.4p =$$

$$= 0.243p\left(18+0.2p^2\right)^{-\frac{3}{4}}$$

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$$

$$E_{q,p} = \frac{p}{q}\cdot q' = \frac{p}{2.43\cdot\left(18+0.2p^2\right)^{\frac{1}{4}}}\cdot 0.243p\left(18+0.2p^2\right)^{-\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{p^2}{10\cdot\left(18+0.2p^2\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(18+0.2p^2\right)^{\frac{3}{4}}} = \frac{p^2}{10\cdot\left(18+0.2p^2\right)} =$$

$$= \frac{p^2}{2p^2+180}$$

$$\boxed{\left((\text{nešto})^n\right)' = n(\text{nešto})^{n-1}\cdot(\text{nešto})'}$$

c)

$$E_{q,p} = \frac{p^2}{2p^2+180}$$

$$E_{q,p}(30) = \frac{30^2}{2\cdot 30^2+180}$$

$$E_{q,p}(30) = \frac{5}{11} \approx 0.45$$

Ako na razini cijene od 30 kn cijenu povećamo za 1%, ponuda će porasti za 0.45%.

d)

$$E_{q,p} = \frac{1}{22}$$

$$\frac{p^2}{2p^2+180} = \frac{1}{22}$$

$$22p^2 = 2p^2 + 180$$

$$20p^2 = 180 \,/ : 20$$

$$p^2 = 9$$

$$p = 3$$

Na razini cijene $p = 3$ elastičnost ponude jednaka je $\frac{1}{22}$.

Zadatak 4

Zadana je funkcija ponude $q = (2p+1)\log_4(5p)$.

a) *Izračunajte elastičnost ponude za cijenu* $p = 10$ *i interpretirajte rezultat.*

b) *Odredite koliko se proizvoda nudi po cijeni* $p = 18$. *Da li je za tu cijenu ponuda elastična ili neelastična?*

Rješenje

$$\boxed{q = (2p+1)\log_4(5p)}$$

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a}}$$

a)

$$q' = (2p+1)' \cdot \log_4(5p) + (2p+1)\cdot\big(\log_4(5p)\big)' =$$

$$= 2\log_4(5p) + (2p+1)\cdot\frac{1}{5p\ln 4}\cdot 5 =$$

$$= 2\log_4(5p) + \frac{2p+1}{p\ln 4}$$

$$\boxed{\big(\log_a x\big)' = \frac{1}{x\ln a}}$$

$$E_{q,p}(10) = \frac{10}{q(10)}\cdot q'(10) = \frac{10}{59.26}\cdot 7.16 \approx 1.21$$

$$\boxed{E_{q,p} = \frac{p}{q}\cdot q'}$$

$$q(10) = (2\cdot 10+1)\cdot\log_4(5\cdot 10) = 21\log_4 50 \approx 59.26$$

$$q'(10) = 2\log_4(5\cdot 10) + \frac{2\cdot 10+1}{10\ln 4} = 2\log_4 50 + \frac{21}{10\ln 4} \approx 7.16$$

Ako na razini cijene $p = 10$ cijenu povećamo za 1%, ponuda će se povećati za 1.21%.

$$\boxed{q = (2p+1)\log_4(5p)}$$

$$\boxed{q' = 2\log_4(5p) + \frac{2p+1}{p\ln 4}}$$

b) $q(18) = (2\cdot 18+1)\log_4(5\cdot 18) = 37\log_4 90 \approx 120.099$

Po cijeni $p = 18$ nudi se oko 120 proizvoda.

$$\boxed{E_{q,p} = \frac{p}{q}\cdot q'}$$

$$E_{q,p}(18) = \frac{18}{q(18)}\cdot q'(18) = \frac{18}{120.099}\cdot 7.97 \approx 1.195$$

$$q'(18) = 2\log_4(5\cdot 18) + \frac{2\cdot 18+1}{18\ln 4} = 2\log_4 90 + \frac{37}{18\ln 4} \approx 7.97$$

Kako je $|E_{q,p}(18)| = |1.195| = 1.195 > 1$, zaključujemo da je ponuda elastična za cijenu $p = 18$.

Zadatak 5

Funkcija potražnje zadana je s $Q = 2005 + 25 \cdot 0.7^p$.

a) *Odredite elastičnost potražnje za* $p = 4$ *i interpretirajte rezultat.*

b) *Ako se cijena na razini* $p = 4$ *poveća za* 1%, *da li će prihod porasti ili će se smanjiti? Objasnite!*

c) *Odredite cijenu za koju je potražnja jednaka* 2010.

Rješenje

$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$ $\boxed{Q = 2005 + 25 \cdot 0.7^p}$

$\boxed{E_{Q,p} = \frac{p}{Q} \cdot Q'}$

a)

$$Q' = 0 + 25 \cdot 0.7^p \cdot \ln 0.7$$
$$Q' = 25 \cdot 0.7^p \cdot \ln 0.7$$
$$Q(4) = 2005 + 25 \cdot 0.7^4$$
$$Q(4) = 2011.0025$$
$$Q'(4) = 25 \cdot 0.7^4 \cdot \ln 0.7$$
$$Q'(4) = -2.14094$$

$$E_{Q,p}(4) = \frac{4}{Q(4)} \cdot Q'(4)$$
$$E_{Q,p}(4) = \frac{4}{2011.0025} \cdot (-2.14094)$$
$$E_{Q,p}(4) \approx -0.0043$$

Ako na razini cijene $p = 4$ cijenu povećamo za 1%, potražnja će se smanjiti za 0.0043%.

b) Ako se cijena na razini $p = 4$ poveća za 1%, prihod će se povećati jer je potražnja na toj razini cijene neelastična, tj. $|E_{q,p}(4)| < 1$.

$\boxed{Q = 2005 + 25 \cdot 0.7^p}$

c)

$\boxed{\text{prvi način}}$

$$2005 + 25 \cdot 0.7^p = 2010$$
$$25 \cdot 0.7^p = 5 \,/ : 25$$
$$0.7^p = 0.2$$
$$p = \log_{0.7} 0.2$$
$$p = \frac{\log 0.2}{\log 0.7}$$
$$p = 4.51$$

$\boxed{\text{drugi način}}$

$$2005 + 25 \cdot 0.7^p = 2010$$
$$25 \cdot 0.7^p = 5 \,/ : 25$$
$$0.7^p = 0.2 \,/ \log$$
$$\log 0.7^p = \log 0.2$$
$$p \cdot \log 0.7 = \log 0.2 \,/ : \log 0.7$$
$$p = \frac{\log 0.2}{\log 0.7}$$
$$p = 4.51$$