Seminari 13

Matematika za ekonomiste 2

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Oznake

- ${}_n p_x$ $\to$ vjerojatnost da će x-godišnjak živjeti narednih n godina

$$ {}_n p_x = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} $$

- ${}_n q_x$ $\to$ vjerojatnost da će x-godišnjak umrijeti u narednih n godina

$$ {}_n q_x = 1 - {}_n p_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+n}}{\ell_x} $$

Oznake

- ℓ_x $\to$ broj živih x-godišnjaka
- d_x $\to$ broj x-godišnjaka umrlih tijekom $(x+1)$-ve godine

$$ d_x = \ell_x - \ell_{x+1} $$

- q_x $\to$ vjerojatnost da osoba stara x godina umre tijekom naredne godine

$$ q_x = \frac{d_x}{\ell_x} = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x} $$

- p_x $\to$ vjerojatnost da osoba stara x godina bude živa naredne godine

$$ p_x = 1 - q_x = \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x} $$

Zadatak 1

Kolika je vjerojatnost da ženska osoba starosti 20 godina doživi 21. rođendan? Kolika je vjerojatnost da muška osoba starosti 50 godina doživi 51. rođendan?

Rješenje

$$ \boxed{p_x = \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x}} $$

$$ p_{20}(f) = \frac{\ell_{21}(f)}{\ell_{20}(f)} = \frac{99\,499}{99\,519} = 0.999799 $$

$$ p_{50}(m) = \frac{\ell_{51}(m)}{\ell_{50}(m)} = \frac{93\,761}{94\,320} = 0.994073 $$

Vjerojatnost da ženska osoba starosti 20 godina doživi 21. rođendan jednaka je 99.9799%.

Vjerojatnost da muška osoba starosti 50 godina doživi 51. rođendan jednaka je 99.4073%.

Zadatak 2

Je li vjerojatnije da ženska osoba starosti 40 godina ili muška osoba starosti 30 godina ne doživi idući rođendan?

$$q_x = \frac{d_x}{\ell_x} = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x}$$

Rješenje

$$q_{40}(f) = \frac{d_{40}(f)}{\ell_{40}(f)} = \frac{81}{98\,796} = 0.00082$$

$$q_{30}(m) = \frac{d_{30}(m)}{\ell_{30}(m)} = \frac{86}{98\,496} = 0.000873$$

Vjerojatnost da ženska osoba starosti 40 godina ne doživi 41. rođendan jednaka je 0.082%.

Vjerojatnost da muška osoba starosti 30 godina ne doživi 31. rođendan jednaka je 0.0873%.

Zadatak 3

Je li vjerojatnije da ženska osoba starosti 30 godina doživi 65. rođendan ili da muška osoba starosti 25 godina doživi 60. rođendan?

Rješenje

$$_{n}p_x = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}$$

$$_{35}p_{30}(f) = \frac{\ell_{65}(f)}{\ell_{30}(f)} = \frac{90\,405}{99\,271} = 0.910689$$

$$_{35}p_{25}(m) = \frac{\ell_{60}(m)}{\ell_{25}(m)} = \frac{85\,449}{98\,904} = 0.863959$$

Vjerojatnost da ženska osoba starosti 30 godina doživi 65. rođendan jednaka je 91.0689%.

Vjerojatnost da muška osoba starosti 25 godina doživi 60. rođendan jednaka je 86.3959%.

Zadatak 4

Je li vjerojatnije da ženska osoba starosti 18 godina ne doživi 65. rođendan ili da muška osoba starosti 25 godina ne doživi 55. rođendan?

Rješenje

$$_{n}q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+n}}{\ell_x}$$

$$_{47}q_{18}(f) = \frac{\ell_{18}(f) - \ell_{65}(f)}{\ell_{18}(f)} = \frac{99\,559 - 90\,405}{99\,559} = 0.091945$$

$$_{30}q_{25}(m) = \frac{\ell_{25}(m) - \ell_{55}(m)}{\ell_{25}(m)} = \frac{98\,904 - 90\,843}{98\,904} = 0.081503$$

Vjerojatnost da ženska osoba starosti 18 godina ne doživi 65. rođendan jednaka je 9.1945%.

Vjerojatnost da muška osoba starosti 25 godina ne doživi 55. rođendan jednaka je 8.1503%.

Zadatak 5

Kolika je vjerojatnost da će supruga starosti 28 godina biti udovica tijekom idućih 10 godina ako joj suprug ima 76 godina?

Rješenje

Definiramo sljedeća dva događaja:

$$A = \{\text{supruga starosti 28 godina će živjeti idućih 10 godina}\}$$

$$B = \{\text{suprug starosti 76 godina će umrijeti u narednih 10 godina}\}$$

Nas zanima vjerojatnost događaja $A \cap B$. Kako su A i B nezavisni događaji, slijedi

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = {}_{10}p_{28}(f) \cdot {}_{10}q_{76}(m)$$

$$\boxed{{}_n p_x = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}} \qquad \boxed{{}_n q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+n}}{\ell_x}}$$

$${}_{10}p_{28}(f) = \frac{\ell_{38}(f)}{\ell_{28}(f)} = \frac{98\,933}{99\,325} = 0.996053$$

$${}_{10}q_{76}(m) = \frac{\ell_{76}(m) - \ell_{86}(m)}{\ell_{76}(m)} = \frac{51\,940 - 18\,298}{51\,940} = 0.647709$$

$$P(A \cap B) = 0.996053 \cdot 0.647709 = 0.645152$$

Vjerojatnost da supruga postane udovica tijekom idućih 10 godina jednaka je 64.5152%.

Zadatak 6

a) *Kolika je vjerojatnost da će muška osoba starosti* 28 *godina i ženska osoba starosti* 25 *godina, s tri godine bračnog staža, slaviti zlatni pir (*50 *godina braka)?*

b) *Kolika je vjerojatnost da će barem jedna osoba doživjeti* 50. *godišnjicu braka?*

c) *Kolika je vjerojatnost da će točno jedna osoba doživjeti* 50. *godišnjicu braka?*

Rješenje

- Neka je A događaj da će muška osoba starosti 28 godina s tri godine bračnog staža slaviti zlatni pir.
- Neka je B događaj da će ženska osoba starosti 25 godina s tri godine bračnog staža slaviti zlatni pir.

a) Zanima nas $P(A \cap B)$. Kako su A i B nezavisni događaji, vrijedi

$$\boxed{{}_n p_x = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = {}_{47}p_{28}(m) \cdot {}_{47}p_{25}(f)$$

$${}_{47}p_{28}(m) = \frac{\ell_{75}(m)}{\ell_{28}(m)} = \frac{54\,969}{98\,660} = 0.557156$$

$${}_{47}p_{25}(f) = \frac{\ell_{72}(f)}{\ell_{25}(f)} = \frac{82\,328}{99\,404} = 0.828216$$

$$P(A \cap B) = 0.557156 \cdot 0.828216 = 0.461446$$

Vjerojatnost da obje osobe dožive zlatni pir jednaka je 46.1446%.

b) Zanima nas $P(A \cup B)$.

1. način

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= {}_{47}p_{28}(m) + {}_{47}p_{25}(f) - P(A \cap B) = \\ &= 0.557156 + 0.828216 - 0.461446 = \\ &= 0.923926 \end{aligned}$$

Vjerojatnost da barem jedna osoba doživi zlatni pir jednaka je 92.3926%.

$\boxed{{}_np_x + {}_nq_x = 1}$ $\boxed{{}_nq_x = \dfrac{\ell_x - \ell_{x+n}}{\ell_x}}$

2. način

Odredimo najprije vjerojatnost suprotnog događaja $(A \cup B)^c$.

$$P\big((A\cup B)^c\big) = P(A^c \cap B^c) = P(A^c)\cdot P(B^c)$$

$$P(A^c) = {}_{47}q_{28}(m) = 1 - {}_{47}p_{28}(m) = 1 - 0.557156 = 0.442844$$

$$P(B^c) = {}_{47}q_{25}(f) = 1 - {}_{47}p_{25}(f) = 1 - 0.828216 = 0.171784$$

$$P\big((A\cup B)^c\big) = 0.442844 \cdot 0.171784 = 0.076074$$

Vjerojatnost da niti jedna osoba ne doživi zlatni pir jednaka je 7.6074%.

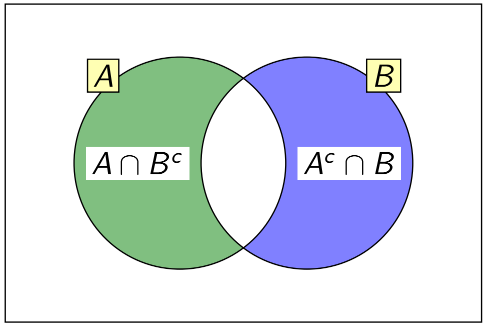
$$P(A\cup B) = 1 - P\big((A\cup B)^c\big) = 1 - 0.076074 = 0.923926$$

Vjerojatnost da barem jedna osoba doživi zlatni pir jednaka je 92.3926%.

$\boxed{(A\cup B)^c = A^c \cap B^c}$

c) **1. način**

Zanima nas vjerojatnost događaja $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$.



Uočite da je

$$(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

- $A \cap B^c$ i $A^c \cap B$ su disjunktni događaji
- A i B^c su nezavisni događaji
- A^c i B su nezavisni događaji

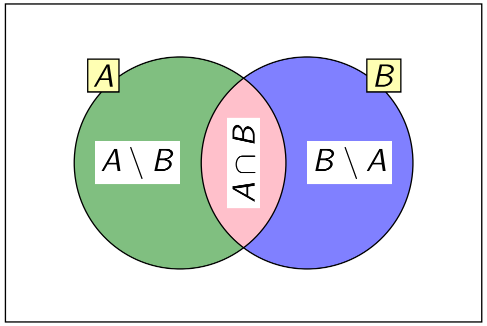
Stoga je

$$\begin{aligned} P\big((A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\big) &= P(A\cap B^c) + P(A^c \cap B) = \\ &= P(A)\cdot P(B^c) + P(A^c)\cdot P(B) = \\ &= 0.557156 \cdot 0.171784 + 0.442844 \cdot 0.828216 = \\ &= 0.462481 \end{aligned}$$

Vjerojatnost da točno jedna osoba doživi zlatni pir jednaka je 46.2481%.

2. način

Zanima nas vjerojatnost događaja $A \triangle B$.



$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

- Događaji $A \triangle B$ i $A \cap B$ su disjunktni događaji.
- $A \cup B = (A \triangle B) \cup (A \cap B)$

Stoga je

$$P(A \cup B) = P(A \triangle B) + P(A \cap B)$$

iz čega slijedi

$$P(A \triangle B) = P(A \cup B) - P(A \cap B).$$

Konačno dobivamo

$$P(A \triangle B) = 0.923926 - 0.461446 = 0.46248$$

Vjerojatnost da točno jedna osoba doživi zlatni pir jednaka je 46.248%.