Seminari 1

Matematika za ekonomiste 2

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Zadatak 1

Zadane su funkcija potražnje $q_1 = -3p^2 + 14p - 10$ i funkcija ponude $q_2 = p + 2$.

a) *Prikažite grafički zadane funkcije.*

b) *Odredite cijene ekvilibrija i označite ih na grafu. Kolike su ponuda i potražnja u pojedinim cijenama ekvilibrija?*

$q_1 = -3p^2 + 14p - 10$

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Rješenje

a) Za crtanje parabole odredimo nultočke i tjeme.

$$-3p^2 + 14p - 10 = 0$$
$$p_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-10)}}{2 \cdot (-3)}$$
$$p_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{76}}{-6}$$

nultočke

$$\boxed{p_1 \approx 0.88, \quad p_2 \approx 3.79}$$

$$q_1' = -6p + 14$$
$$-6p + 14 = 0$$
$$-6p = -14$$
$$p = \frac{7}{3}$$
$$\boxed{T\left(\frac{7}{3}, \frac{19}{3}\right)}$$

tjeme

$$q_1\left(\frac{7}{3}\right) = -3 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^2 + 14 \cdot \frac{7}{3} - 10 = \frac{19}{3}$$

Za crtanje pravca je dovoljno odrediti neke dvije njegove točke.

$$q_2(0) = 0 + 2 = 2 \longrightarrow T_1(0, 2)$$
$$q_2(1) = 1 + 2 = 3 \longrightarrow T_2(1, 3)$$

$q_2 = p + 2$

b) Cijena ekvilibrija

$q_1 = -3p^2 + 14p - 10$

$$q_1 = q_2$$
$$-3p^2 + 14p - 10 = p + 2$$
$$-3p^2 + 13p - 12 = 0$$
$$p_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-12)}}{2 \cdot (-3)}$$
$$p_{1,2} = \frac{-13 \pm 5}{-6}$$
$$p_1 = \frac{4}{3}, \quad p_2 = 3$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\boxed{q_1 = -3p^2 + 14p - 10}$ $\boxed{q_2 = p + 2}$

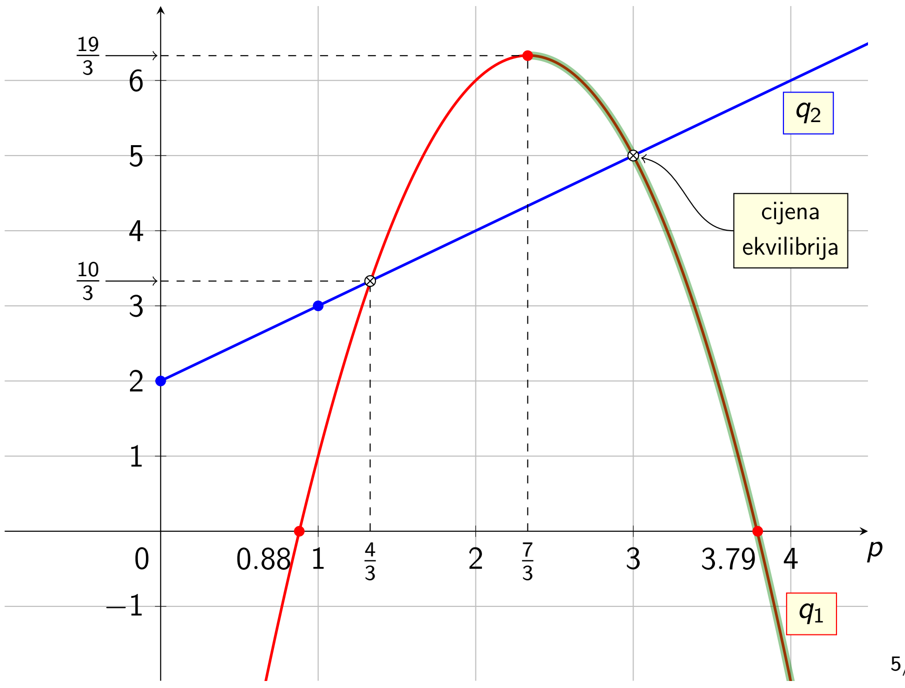
Ponuda i potražnja u cijenama ekvilibrija su međusobno jednake.

$$q_1\left(\frac{4}{3}\right) = q_2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$$

$$q_1(3) = q_2(3) = 3 + 2 = 5$$

Napomena

Kako je funkcija potražnje u pravilu padajuća funkcija, možemo reći da imamo samo jednu cijenu ekvilibrija $p = 3$.



Zadatak 2

Da bi nešto zaradio, student kroz ljetne mjesece prodaje ogrlice na plaži. Prošlo ljeto je prodavao ogrlice po 10€ i dnevno je prodao 20 ogrlica. Međutim, kada je povećao cijenu ogrlice za 1€, prodaja se smanjila za dvije ogrlice dnevno.

a) *Pronađite funkciju potražnje za ogrlicama uz pretpostavku da se radi o linearnoj funkciji.*

b) *Ako za izradu svake ogrlice student treba uložiti 6€, po kojoj cijeni treba prodavati ogrlice da bi ostvario maksimalni profit? Koliko iznosi maksimalni profit i koliko ogrlica će prodati u tom slučaju?*

c) *Nacrtajte grafove funkcija potražnje, troškova, prihoda i profita u ovisnosti o cijeni proizvoda.*

Rješenje

a) $q = ap + b, \qquad \Delta p = 1, \quad \Delta q = -2$

$$a = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{-2}{1} = -2$$

$q = -2p + b$

$$\begin{aligned} q(10) &= 20 \\ -2 \cdot 10 + b &= 20 \\ b &= 40 \end{aligned}$$

Funkcija potražnje za ogrlicama: $q = -2p + 40$

b) PROFIT (ili DOBIT) = PRIHOD − TROŠKOVI

PRIHOD = CIJENA · POTRAŽNJA

- Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) = p \cdot (-2p + 40) = -2p^2 + 40p$$

- Troškovi kao funkcija cijene

$$T(p) = 6 \cdot (-2p + 40) = -12p + 240$$

- Profit kao funkcija cijene

$$D(p) = P(p) - T(p) = \left(-2p^2 + 40p\right) - \left(-12p + 240\right)$$

$$D(p) = -2p^2 + 52p - 240$$

Tražimo ekstreme funkcije $D(p) = -2p^2 + 52p - 240$.

$$D'(p) = -4p + 52$$

$$-4p + 52 = 0$$

$$-4p = -52 \;/ : (-4)$$

$$p = 13$$

$$D''(p) = -4, \qquad D''(13) = -4 < 0$$

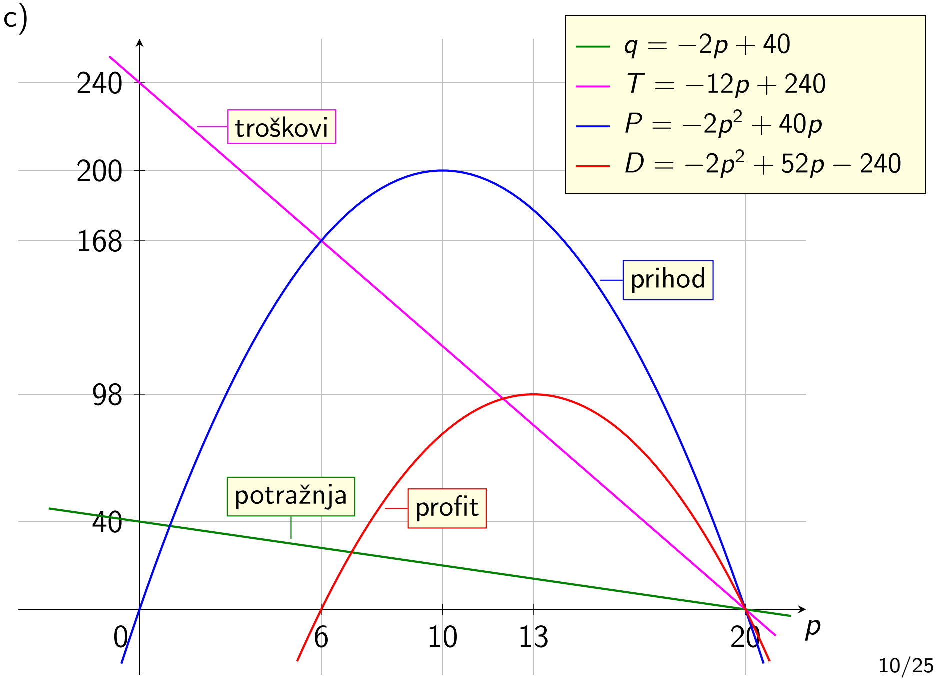
$$D(13) = -2 \cdot 13^2 + 52 \cdot 13 - 240 = 98$$

Student mora ogrlice prodavati po cijeni od 13 € ukoliko želi ostvariti maksimalni profit. Maksimalni profit u tom slučaju iznosi 98 €, a proda se ukupno 14 ogrlica.

$$q(13) = -2 \cdot 13 + 40 = 14$$

$$\boxed{q = -2p + 40}$$

c)



Zadatak 3

Menadžer je utvrdio da je veza između prodajne cijene p robe i broja komada N dana s

$$N(p) = \frac{1500}{p^2 + 100}.$$

Prosječni troškovi za N komada robe jednaki su

$$T_p = 2 + \frac{14}{N}.$$

Odredite cijenu uz koju se ostvaruje maksimalni profit i izračunajte taj profit. Odredite za koje prodajne cijene robe je profit pozitivan.

$$N(p) = \frac{1500}{p^2+100}$$ $$T_p = 2 + \frac{14}{N}$$

Rješenje

- Funkcija prosječnih troškova

$$\text{prosječni troškovi} = \frac{\text{troškovi}}{\text{broj proizvoda}} \qquad T_p(N) = \frac{T(N)}{N}$$

- Funkcija troškova

$$T(N) = T_p(N)\cdot N = \left(2 + \frac{14}{N}\right)\cdot N = 2N + 14$$

$$T(p) = 2N(p) + 14 = 2\cdot\frac{1500}{p^2+100} + 14 = \frac{3000}{p^2+100} + 14$$

- Funkcija prihoda: PRIHOD $=$ CIJENA $\cdot$ POTRAŽNJA

$$P(p) = p\cdot N(p) = p\cdot\frac{1500}{p^2+100} = \frac{1500p}{p^2+100}$$

- Funkcija profita: PROFIT $=$ PRIHOD $-$ TROŠKOVI

$$D(p) = P(p) - T(p) = \frac{1500p}{p^2+100} - \left(\frac{3000}{p^2+100} + 14\right) =$$

$$= \frac{1500p - 3000}{p^2+100} - 14$$

$$N(p) = \frac{1500}{p^2+100} \qquad T(p) = \frac{3000}{p^2+100} + 14$$

$$D(p) = \frac{1500p - 3000}{p^2+100} - 14 \qquad \left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$D'(p) = \frac{1500\cdot(p^2+100) - (1500p-3000)\cdot 2p}{(p^2+100)^2} - 0$$

$$D'(p) = \frac{1500p^2 + 150\,000 - 3000p^2 + 6000p}{(p^2+100)^2}$$

$$D'(p) = \frac{-1500p^2 + 6000p + 150\,000}{(p^2+100)^2}$$

$$D'(p) = 0$$

$$\frac{-1500p^2 + 6000p + 150\,000}{(p^2+100)^2} = 0$$

$$-1500p^2 + 6000p + 150\,000 = 0 \;/ : (-1500)$$

$$p^2 - 4p - 100 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+400}}{2}$$

$$p_1 = 12.2, \quad p_2 = -8.2$$

	0		12.2		$+\infty$
D'		$+$		$-$	
D		$\nearrow$		$\searrow$	

$$D(12.2) = \frac{1500\cdot 12.2 - 3000}{12.2^2 + 100} - 14 = 47.49$$

Maksimalni profit jednak je 47.49 novčanih jedinica i ostvaruje se po cijeni od 12.2 novčanih jedinica.

Kada je profit pozitivan?

- Odredimo nultočke funkcije profita $D(p)$

$$D(p) = 0$$

$$\frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14 = 0 \,/\cdot (p^2 + 100)$$

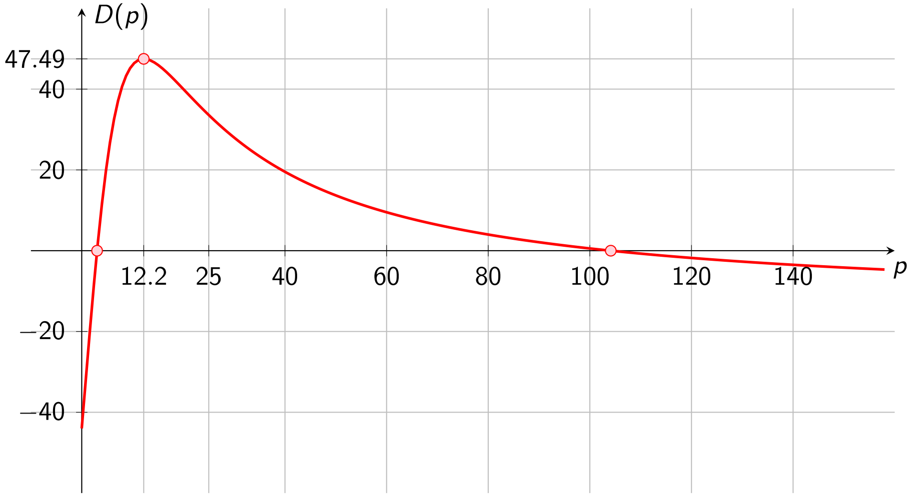
$$1500p - 3000 - 14 \cdot (p^2 + 100) = 0$$

$$-14p^2 + 1500p - 4400 = 0 \,/ : 2$$

$$-7p^2 + 750p - 2200 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-750 \pm \sqrt{750^2 - 4 \cdot (-7) \cdot (-2200)}}{-14}$$

$$p_1 = 3.02, \quad p_2 = 104.12$$



	0		12.2		$+\infty$
D'		$+$		$-$	
D		$\nearrow$		$\searrow$	

nultočke: $3.02,\ 104.12$

Profit je pozitivan za $p \in \langle 3.02, 104.12 \rangle$.

Zadatak 4

Analizom tržišta zapaženo je da potrošači dnevno kupuju sljedeće količine jakni uz navedene cijene u kunama.

cijena	*200*	*150*	*120*	*100*
količina	*15*	*22*	*25*	*30*

Odredite linearnu funkciju potražnje koja najbolje aproksimira zadanu funkciju tablicom i nacrtajte na slici tablične podatke i dobivenu funkciju.

Koristeći se dobivenim linearnim modelom procijenite:

a) *Koliko se maksimalno jakni traži dnevno? Koliko se jakni traži po cijeni od 110 kn? Po kojoj cijeni se traži 35 jakni dnevno?*

b) *Za koliko se treba smanjiti cijena jakne da bi se prodale dvije jakne više dnevno ako se jakne prodaju po cijeni od 110 kn.*

c) *Za koliko posto se smanji potražnja za jaknama ako se cijena na razini 110 kn poveća za 1 %? Što se u tom slučaju dogodi s ukupnim prihodom?*

p	cijena	200	150	120	100
q	količina	15	22	25	30

Rješenje

- Linearna funkcija potražnje: $q = ap + b$
- Na početku promatramo sustav linearnih jednadžbi $AX = B$.

$$A = \begin{bmatrix} 200 & 1 \\ 150 & 1 \\ 120 & 1 \\ 100 & 1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 15 \\ 22 \\ 25 \\ 30 \end{bmatrix}$$

- Sustav $AX = B$ je preodređen i općenito nema rješenja.
- Umjesto sustava $AX = B$ rješavamo sustav normalnih jednadžbi

$$A^T AX = A^T B.$$

$A^T AX = A^T B$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 200 & 150 & 120 & 100 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 & 1 \\ 150 & 1 \\ 120 & 1 \\ 100 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 86\,900 & 570 \\ 570 & 4 \end{bmatrix}$$

$(2, \boxed{4)\ (4}, 2)$

$=$

$$A^T B = \begin{bmatrix} 200 & 150 & 120 & 100 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 22 \\ 25 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12\,300 \\ 92 \end{bmatrix}$$

$(2, \boxed{4)\ (4}, 1)$

$=$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 86\,900 & 570 \\ 570 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^T B = \begin{bmatrix} 12\,300 \\ 92 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(A^T A\right) = 86\,900 \cdot 4 - 570 \cdot 570 = 22\,700$$

$$\left(A^T A\right)^{-1} = \frac{1}{22\,700} \begin{bmatrix} 4 & -570 \\ -570 & 86\,900 \end{bmatrix}$$

$A^T AX = A^T B$

$$\left(A^T A\right)^{-1} \cdot \Big/ A^T AX = A^T B$$

$$X = \left(A^T A\right)^{-1} \cdot \left(A^T B\right)$$

$=$

$(2, \boxed{2)\ (2}, 1)$

$$X = \frac{1}{22\,700} \begin{bmatrix} 4 & -570 \\ -570 & 86\,900 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12\,300 \\ 92 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{22\,700} \begin{bmatrix} -3240 \\ 983\,800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{162}{1135} \\ \frac{9838}{227} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow a \\ \leftarrow b \end{matrix}$$

$q = ap + b$

$$\boxed{q = -\frac{162}{1135} p + \frac{9838}{227}}$$

$a \approx -0.1427$

$b \approx 43.3392$

$$q = -\frac{162}{1135} p + \frac{9838}{227}$$

a) Dnevno se maksimalno traži oko 43 jakne (kada je $p = 0$).

$$q(110) = -\frac{162}{1135} \cdot 110 + \frac{9838}{227} = \frac{6274}{227} \approx 27.64$$

Po cijeni od 110 kn traži se 27.64 jakni, dakle oko 28 jakni.

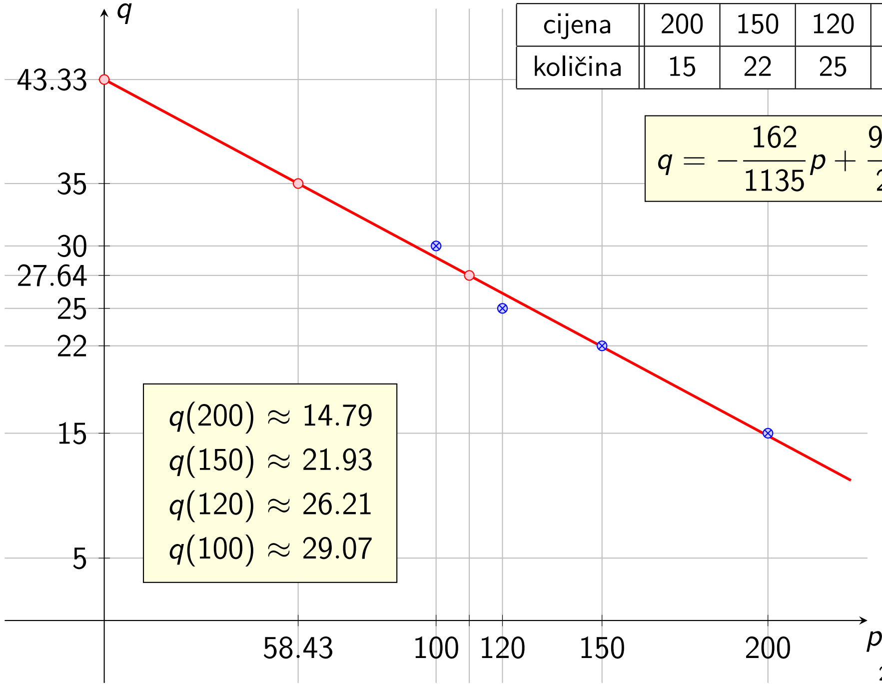
$$-\frac{162}{1135} p + \frac{9838}{227} = 35 \Big/ \cdot 1135$$

$$-162p + 49\,190 = 39\,725$$

$$-162p = -9465$$

$$p = \frac{3155}{54} \approx 58.43$$

Po cijeni od 58 kuna i 43 lipe dnevno se traži 35 jakni.



cijena	200	150	120	100
količina	15	22	25	30

$$q = -\frac{162}{1135}p + \frac{9838}{227}$$

$$q(200) \approx 14.79$$
$$q(150) \approx 21.93$$
$$q(120) \approx 26.21$$
$$q(100) \approx 29.07$$

b) $\Delta q = 2$

$$q' = -\frac{162}{1135} \qquad E_{q,p} = \frac{p}{q} \cdot q' \qquad q = -\frac{162}{1135}p + \frac{9838}{227}$$

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} = -\frac{162}{1135}$$

$$\frac{2}{\Delta p} = -\frac{162}{1135}$$

$$-162 \cdot \Delta p = 2270$$

$$\Delta p = -14.01$$

c)

$$E_{q,p}(110) = \frac{110}{q(110)} \cdot q'(110)$$

$$E_{q,p}(110) = \frac{110}{27.64} \cdot \frac{-162}{1135}$$

$$E_{q,p}(110) \approx -0.57$$

- Da bi se prodale dvije jakne više dnevno, cijenu jakne treba smanjiti za 14 kuna i jednu lipu. (ne ovisi o trenutnoj cijeni jakne)
- Ako se cijena jakne na razini $p = 110$ poveća za 1%, potražnja za jaknama se smanji za 0.57%.
- Kako je $|E_{q,p}(110)| < 1$, povećanjem cijene za 1% na razini $p = 110$, ukupni prihod će se povećati.