Linearno programiranje s dvije varijable

Matematika za ekonomiste 1

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Zadatak 1

Poduzeće se bavi prodajom igračaka. Na tržište želi plasirati dvije nove igračke A i B. Obje igračke trebaju proći završnu fazu montaže. U jednom satu napravi se 10 igrački A i 24 igrački B. Poduzeće ima na raspolaganju samo 45 radnih sati. Istraživanje tržišta je pokazalo da je potrebno najviše 400 komada igrački A, dok je igrački B potrebno napraviti u količini ne većoj od 960 komada. Prihod po igrački A je 20 €, a po igrački B 18 €. Odredite u kojem slučaju poduzeće ostvaruje maksimalni prihod uz navedena ograničenja.

Rješenje

Oznake

$x \longrightarrow$ broj komada igrački A

$y \longrightarrow$ broj komada igrački B

Funkcija prihoda

$$P = 20x + 18y$$

Ograničenja

- broj komada igrački je broj $\geqslant 0$

$$\boxed{x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0}$$

- potrebno je najviše 400 komada igrački A

$$\boxed{x \leqslant 400}$$

- igrački B ne treba više od 960 komada

$$\boxed{y \leqslant 960}$$

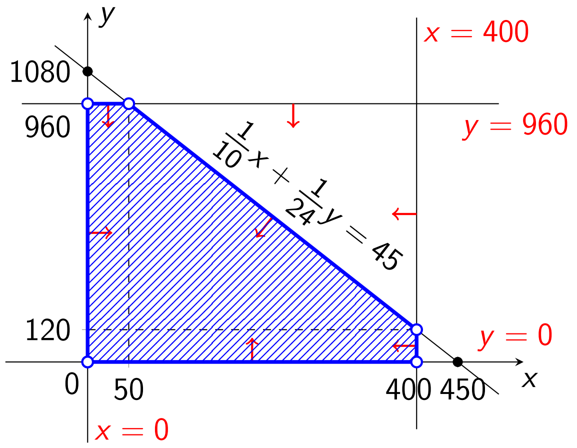
- poduzeće ima na raspolaganju 45 sati

$$1 \text{ sat} \leftrightsquigarrow 10 \text{ igrački } A \;/:10$$
$$1 \text{ sat} \leftrightsquigarrow 24 \text{ igrački } B \;/:24$$

$$\frac{1}{10} \text{ sati} \leftrightsquigarrow 1 \text{ igračka } A \;/\cdot x$$
$$\frac{1}{24} \text{ sati} \leftrightsquigarrow 1 \text{ igračka } B \;/\cdot y$$

$$\frac{1}{10}x \text{ sati} \leftrightsquigarrow x \text{ igrački } A$$
$$\frac{1}{24}y \text{ sati} \leftrightsquigarrow y \text{ igrački } B$$

$$\boxed{\frac{1}{10}x + \frac{1}{24}y \leqslant 45}$$



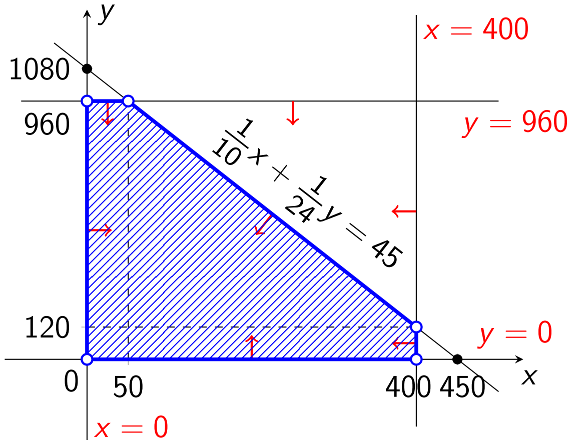
$$x \geqslant 0$$
$$y \geqslant 0$$
$$x \leqslant 400$$
$$y \leqslant 960$$
$$\frac{1}{10}x + \frac{1}{24}y \leqslant 45$$

$$\frac{1}{10}x + \frac{1}{24}y = 45$$

$$x = 0 \rightsquigarrow y = 1080$$
$$y = 0 \rightsquigarrow x = 450$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{10}x + \frac{1}{24}y &= 45 \\ y &= 960 \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow \frac{1}{10}x + \frac{1}{24} \cdot 960 = 45 \rightsquigarrow x = 50$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{10}x + \frac{1}{24}y &= 45 \\ x &= 400 \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow \frac{1}{10} \cdot 400 + \frac{1}{24}y = 45 \rightsquigarrow y = 120$$



$\boxed{P = 20x + 18y}$

Vršna rješenja

$(\overset{x}{0}, \overset{y}{0})$, $(\overset{x}{400}, \overset{y}{0})$, $(\overset{x}{0}, \overset{y}{960})$,

$(\overset{x}{400}, \overset{y}{120})$, $(\overset{x}{50}, \overset{y}{960})$

$\boxed{P(x,y) = 20x + 18y}$

$P(0,0) = 20 \cdot 0 + 18 \cdot 0 = 0$ ⟿ MINIMUM

$P(400,0) = 20 \cdot 400 + 18 \cdot 0 = 8\,000$

$P(0,960) = 20 \cdot 0 + 18 \cdot 960 = 17\,280$

$P(400,120) = 20 \cdot 400 + 18 \cdot 120 = 10\,160$

$P(50,960) = 20 \cdot 50 + 18 \cdot 960 = 18\,280$ ⟿ MAKSIMUM

Maksimalni prihod iznosi 18 280 € ako se proizvede 50 igrački *A* i 960 igrački *B*.

Zadatak 2

Vitamini A i B nalaze se u dvije vrste tableta P i Q. Tableta P ima jednu jedinicu vitamina A i četiri jedinice vitamina B. Tableta Q ima tri jedinice vitamina A i četiri jedinice vitamina B. Cijena jedne tablete P je 10 novčanih jedinica, a jedne tablete Q je 12 novčanih jedinica. Koliko tableta P i koliko tableta Q treba kupiti da bi se dobilo najmanje 10 jedinica vitamina A i najmanje 24 jedinice vitamina B tako da su troškovi nabave najmanji?

Rješenje

Oznake

$p \longrightarrow$ broj komada tableti P

$q \longrightarrow$ broj komada tableti Q

Funkcija troškova

$$T = 10p + 12q$$

Ograničenja

- broj komada tableti je broj $\geqslant 0$

$$\boxed{p \geqslant 0, \quad q \geqslant 0}$$

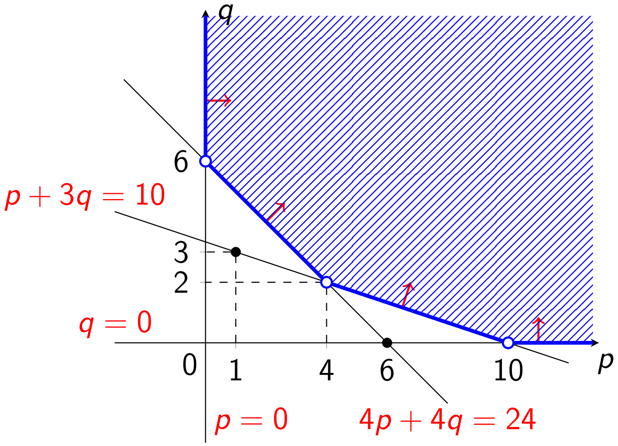
	P	Q	Σ
A	1	3	$\geqslant 10$
B	4	4	$\geqslant 24$
	$/\cdot p$	$/\cdot q$	

- potrebno je barem 10 jedinica vitamina A

$$\boxed{p + 3q \geqslant 10}$$

- potrebno je barem 24 jedinica vitamina B

$$\boxed{4p + 4q \geqslant 24}$$



$$\begin{aligned} p &\geqslant 0 \\ q &\geqslant 0 \\ p + 3q &\geqslant 10 \\ 4p + 4q &\geqslant 24 \end{aligned}$$

$p + 3q = 10$

$p = 1$ ⟿ $q = 3$

$q = 0$ ⟿ $p = 10$

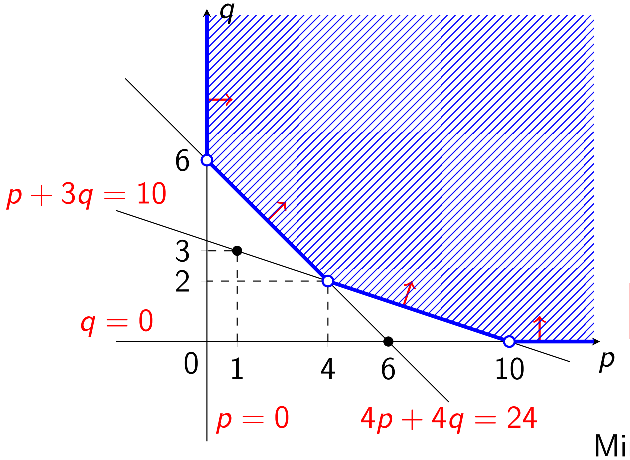
$4p + 4q = 24$

$p = 0$ ⟿ $q = 6$

$q = 0$ ⟿ $p = 6$

$$\left.\begin{aligned} p + 3q &= 10 \\ 4p + 4q &= 24 \end{aligned}\right\} \quad p = \frac{-32}{-8} = 4 \qquad q = \frac{-16}{-8} = 2$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -8 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 24 & 4 \end{vmatrix} = -32 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 4 & 24 \end{vmatrix} = -16$$



$\boxed{T = 10p + 12q}$

Vršna rješenja

$$\begin{array}{ccc} p\ \ q & p\ \ q & p\ \ q \\ (0,6), & (4,2), & (10,0) \end{array}$$

$$\boxed{T(p,q) = 10p + 12q}$$

$$T(0,6) = 10 \cdot 0 + 12 \cdot 6 = 72$$

$$T(4,2) = 10 \cdot 4 + 12 \cdot 2 = 64 \leftsquigarrow \boxed{\text{MINIMUM}}$$

$$T(10,0) = 10 \cdot 10 + 12 \cdot 0 = 100$$

Minimalni troškovi iznose 64 novčane jedinice ako se kupe četiri tablete P i dvije tablete Q.

MAKSIMUM NE POSTOJI

Zadatak 3

Novčani iznos od 12 000 € može se investirati u tri različita fonda. U prvom fondu godišnja zarada je 7%, u drugom fondu 8%, a u trećem visokorizičnom fondu 12%. Kako bi se smanjio rizik, u visokorizični fond uložit će se najviše 2000 €. Iz određenih ekonomskih razloga bolje je uložiti barem tri puta veći novčani iznos u prvi fond u odnosu na uloženi iznos u drugom fondu. Koje je optimalno ulaganje navedenog iznosa u spomenuta tri fonda kako bi se ostvarila maksimalna godišnja zarada? Koliko iznosi maksimalna godišnja zarada?

Rješenje

Oznake

$x \longrightarrow$ novčani iznos u tisućama eura koji je uložen u 1. fond

$y \longrightarrow$ novčani iznos u tisućama eura koji je uložen u 2. fond

$12 - x - y \longrightarrow$ novčani iznos u tisućama eura koji je uložen u 3. fond

Ograničenja

- novčani iznosi su $\geqslant 0$

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad 12 - x - y \geqslant 0$$

- U 3. fond je uloženo najviše 2000 €

$$12 - x - y \leqslant 2$$

- U 1. fond je uložen barem trostruko veći iznos u odnosu na 2. fond

$$x \geqslant 3y$$

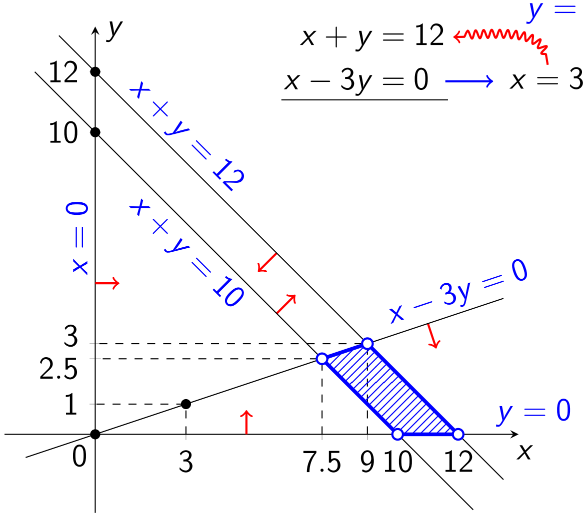
Ograničenja

$$\left.\begin{array}{r} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 12 - x - y \geqslant 0 \\ 12 - x - y \leqslant 2 \\ x \geqslant 3y \end{array}\right\} \rightsquigarrow \left.\begin{array}{r} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x + y \leqslant 12 \\ x + y \geqslant 10 \\ x - 3y \geqslant 0 \end{array}\right\}$$

Funkcija zarade (u tisućama eura)

$$K = 0.07x + 0.08y + 0.12 \cdot (12 - x - y)$$

$$\boxed{K = 1.44 - 0.05x - 0.04y}$$



$$\begin{tikzcd} x+y=12 & y=3 \arrow[l, squiggly] \arrow[r, bend left] & x=9 \\ \underline{x-3y=0} \arrow[r] & x=3y \arrow[u, squiggly] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} x &\geqslant 0 \\ y &\geqslant 0 \\ x+y &\leqslant 12 \\ x+y &\geqslant 10 \\ x-3y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

$x+y=12$

$x=0 \rightsquigarrow y=12$

$y=0 \rightsquigarrow x=12$

$x+y=10$

$x=0 \rightsquigarrow y=10$

$y=0 \rightsquigarrow x=10$

$x-3y=0$

$x=0 \rightsquigarrow y=0$

$y=1 \rightsquigarrow x=3$

$$\begin{tikzcd} x+y=10 & y=2.5 \arrow[l, squiggly] \arrow[r, bend left] & x=7.5 \\ \underline{x-3y=0} \arrow[r] & x=3y \arrow[u, squiggly] & \end{tikzcd}$$

MINIMUM

$K(10,0)=1.44-0.05\cdot 10-0.04\cdot 0=0.94$

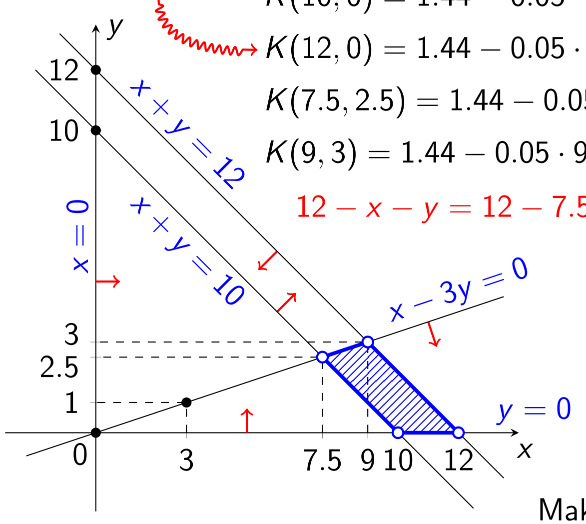
$K(12,0)=1.44-0.05\cdot 12-0.04\cdot 0=0.84$

$K(7.5,2.5)=1.44-0.05\cdot 7.5-0.04\cdot 2.5=0.965$

$K(9,3)=1.44-0.05\cdot 9-0.04\cdot 3=0.87$

$12-x-y=12-7.5-2.5=2$

MAKSIMUM



Vršna rješenja

x	y
10	0
12	0
7.5	2.5
9	3

$(10,0)$, $(12,0)$, $(7.5,2.5)$, $(9,3)$

$\boxed{K(x,y)=1.44-0.05x-0.04y}$

$\boxed{K=1.44-0.05x-0.04y}$

Maksimalna zarada iznosi 965 € ako se u 1. fond uloži 7500 €, u 2. fond 2500 €, a u 3. fond 2000 €.