Neke primjene derivacija realnih funkcija realne varijable

MATEMATIKA ZA EKONOMISTE 1

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Zadatak 1

Zadana je funkcija prihoda

$$P(x) = 200 - \frac{1600}{x+8} - x$$

u ovisnosti o broju proizvoda x.

a) *Odredite sve količine proizvodnje za koje je prihod jednak* 0.
b) *Odredite količinu proizvodnje za koju se postiže maksimalni prihod.*
c) *Odredite intervale monotonosti funkcije P na* $[0, +\infty\rangle$.
d) *Odredite količinu proizvodnje nakon koje prihod postaje negativan.*

$$\boxed{P(x) = 200 - \frac{1600}{x+8} - x}$$

Rješenje

a) Treba pronaći nultočke funkcije P na segmentu $[0, +\infty\rangle$.

$$200 - \frac{1600}{x+8} - x = 0 \;\Big/ \cdot (x+8)$$

$$200(x+8) - 1600 - x(x+8) = 0$$

$$200x + 1600 - 1600 - x^2 - 8x = 0$$

$$-x^2 + 192x = 0$$

$$x \cdot (-x + 192) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 192$$

$$\boxed{P(x) = 200 - \frac{1600}{x+8} - x}$$

b) Treba pronaći globalne ekstreme funkcije P na segmentu $[0, +\infty\rangle$.

$$P(x) = 200 - \frac{1600}{x+8} - x$$

$$P(x) = 200 - 1600(x+8)^{-1} - x$$

$$P'(x) = 0 - 1600 \cdot (-1) \cdot (x+8)^{-2} \cdot (x+8)' - 1$$

$$P'(x) = 1600(x+8)^{-2} \cdot 1 - 1$$

$$P'(x) = \frac{1600}{(x+8)^2} - 1$$

$\boxed{\left((\text{nešto})^n\right)' = n(\text{nešto})^{n-1} \cdot (\text{nešto})'}$ $\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$

$$P'(x) = \frac{1600}{(x+8)^2} - 1 \qquad P(x) = 200 - \frac{1600}{x+8} - x$$

$$\frac{1600}{(x+8)^2} - 1 = 0 \Big/ \cdot (x+8)^2$$

$$1600 - (x+8)^2 = 0$$

$$1600 - x^2 - 16x - 64 = 0$$

$$-x^2 - 16x + 1536 = 0$$

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1536}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm 80}{-2}$$

$x \in [0, +\infty\rangle$

$$x_1 = -48, \quad \boxed{x_2 = 32}$$

stacionarna točka na $[0, +\infty\rangle$

$$P'(x) = \frac{1600}{(x+8)^2} - 1 \qquad P(x) = 200 - \frac{1600}{x+8} - x$$

- Ispitivanje karaktera stacionarne točke pomoću druge derivacije

$$P'(x) = 1600(x+8)^{-2} - 1$$

$$P''(x) = 1600 \cdot (-2) \cdot (x+8)^{-3} \cdot (x+8)' - 0$$

$$P''(x) = -3200(x+8)^{-3} \cdot 1$$

$$P''(x) = \frac{-3200}{(x+8)^3} \qquad P''(32) = \frac{-3200}{(32+8)^3} = \frac{-1}{20} < 0$$

$$P(32) = 200 - \frac{1600}{32+8} - 32 = 128$$

lokalni maksimum

- Kako je $P''(32) < 0$, maksimalni (lokalni) prihod se postiže za 32 proizvoda i iznosi 128 novčanih jedinica.
- Iz ovog računa općenito ne možemo zaključiti je li taj maksimum ujedno i globalni na $[0, +\infty\rangle$.

$$P'(x) = \frac{1600}{(x+8)^2} - 1 \qquad P(x) = 200 - \frac{1600}{x+8} - x$$

- Ispitivanje karaktera stacionarne točke pomoću prve derivacije

	0		32		$+\infty$
P'		$+$		$-$	
P		$\nearrow$		$\searrow$	

$$P(32) = 200 - \frac{1600}{32+8} - 32 = 128$$

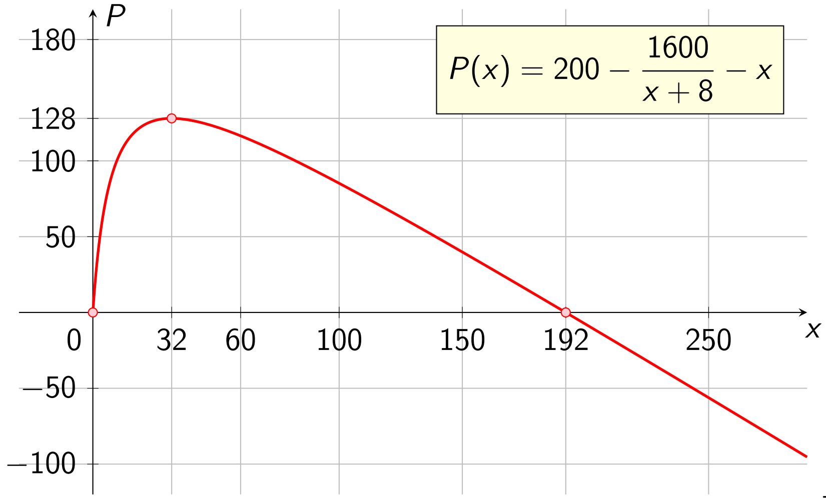
- Na $[0, +\infty\rangle$ postiže se globalni maksimalni prihod za 32 proizvoda i on iznosi 128 novčanih jedinica.

c) Funkcija prihoda raste na intervalu $\langle 0, 32\rangle$.
Funkcija prihoda pada na intervalu $\langle 32, +\infty\rangle$.

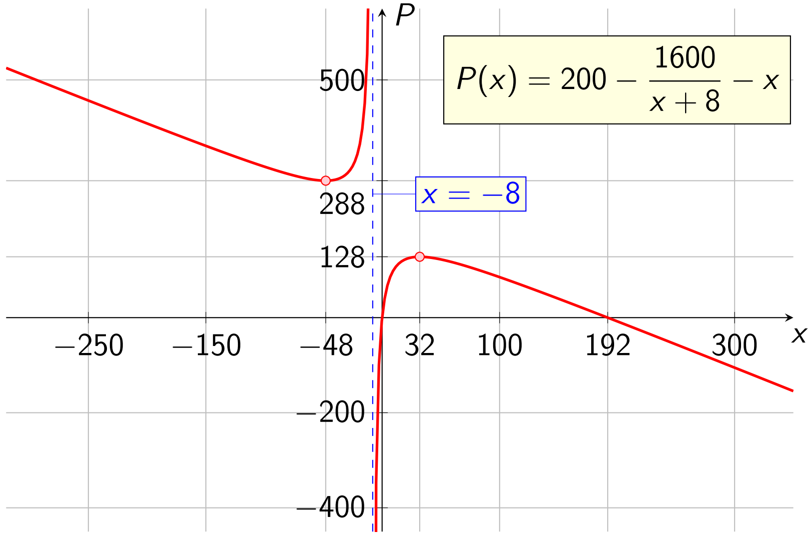
d)

	0		32		$+\infty$
P'		$+$		$-$	
P		$\nearrow$		$\searrow$	

Kako prihod pada na $\langle 32, +\infty\rangle$ i jednak je nula za $x = 192$, zaključujemo da je prihod negativan ukoliko je broj proizvoda veći od 192.



Graf funkcije P na prirodnoj domeni



Zadatak 2

Neka je p cijena jednog proizvoda, a količina q prodanih proizvoda ovisi o cijeni p i dana je funkcijom $q(p) = 1200 - 4p$.

a) *Odredite funkciju prihoda u ovisnosti o cijeni.*

b) *Odredite funkciju prihoda u ovisnosti o količini prodanih proizvoda.*

c) *Odredite za koju cijenu se ostvaruje maksimalni prihod.*

d) *Koliko iznosi maksimalni prihod i koliko se proizvoda proda u tom slučaju?*

e) *U kojim granicama cijene i količine je prihod pozitivan?*

Rješenje

$$\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}, \qquad P = p \cdot q$$

a) Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) = p \cdot (1200 - 4p) = -4p^2 + 1200p$$

b) Prihod kao funkcija količine proizvodnje: $P(q) = p(q) \cdot q$

$$q = 1200 - 4p$$
$$4p = 1200 - q \ / : 4$$
$$p = 300 - \frac{1}{4}q$$

$$P(q) = \left(300 - \frac{1}{4}q\right) \cdot q = -\frac{1}{4}q^2 + 300q$$

$$\boxed{q(p) = 1200 - 4p}$$

c) Treba pronaći ekstreme funkcije $P(p) = -4p^2 + 1200p$.

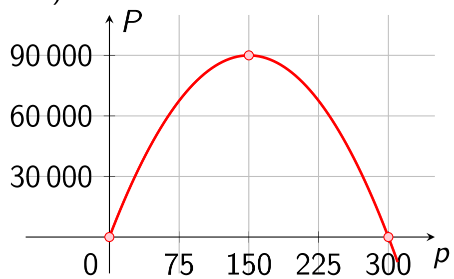
$$P'(p) = -8p + 1200$$
$$-8p + 1200 = 0$$
$$-8p = -1200 \ / : (-8)$$
$$p = 150$$
$$P''(p) = -8, \qquad P''(150) = -8 < 0$$

Maksimalni prihod se postiže po cijeni od 150 novčanih jedinica.

d) Maksimalni prihod iznosi 90 000 novčanih jedinica i pritom se proda ukupno 600 proizvoda.

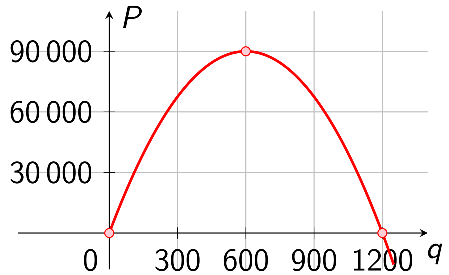
$$P(150) = -4 \cdot 150^2 + 1200 \cdot 150 = 90\,000$$
$$q(150) = 1200 - 4 \cdot 150 = 600$$

e)



$$P(p) = -4p^2 + 1200p$$
$$-4p^2 + 1200p = 0$$
$$p_1 = 0, \;\; p_2 = 300$$

Prihod je pozitivan za cijene $p \in \langle 0, 300 \rangle$.



$$P(q) = -\frac{1}{4}q^2 + 300q$$
$$-\frac{1}{4}q^2 + 300q = 0$$
$$q_1 = 0, \;\; q_2 = 1200$$

Prihod je pozitivan za količine $q \in \langle 0, 1200 \rangle$.

Zadatak 3

Ovisnost cijene o potražnji dana je funkcijom

$$p(x) = \frac{1}{12}x^2 - 10x + 300, \quad 0 \leqslant x \leqslant 60.$$

a) *Nacrtajte graf funkcije p.*

b) *Izrazite prihod u ovisnosti o potražnji.*

c) *Uz koju potražnju se ostvaruje maksimalni prihod i koliko on iznosi?*

d) *Uz koju cijenu se postiže maksimalni prihod?*

e) *Skicirajte funkciju prihoda i odredite njegove točke infleksije.*

$$p(x) = \frac{1}{12}x^2 - 10x + 300$$

Rješenje

a) Za crtanje parabole odredimo nultočke i tjeme.

$$\frac{1}{12}x^2 - 10x + 300 = 0 \;\Big/ \cdot 12$$
$$x^2 - 120x + 3600 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-(-120) \pm \sqrt{(-120)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3600}}{2 \cdot 1}$$
$$x_{1,2} = \frac{120 \pm 0}{2}$$
$$\boxed{x_1 = x_2 = 60}$$

dvostruka nultočka

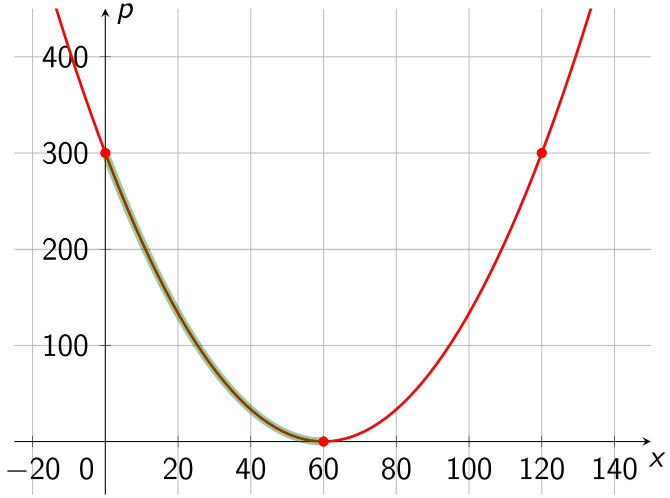
$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$p(x) = \frac{1}{12}x^2 - 10x + 300$$

- Tjeme parabole: $T(60, 0)$

$$p'(x) = \frac{1}{6}x - 10$$
$$\frac{1}{6}x - 10 = 0 \;\Big/ \cdot 6$$
$$x - 60 = 0$$
$$x = 60$$
$$p(60) = \frac{1}{12} \cdot 60^2 - 10 \cdot 60 + 300$$
$$p(60) = 0$$

$$p(x) = \frac{1}{12}x^2 - 10x + 300$$



$T(60, 0)$

$p(0) = 300$

$p(120) = 300$

- Funkcija potražnje $x(p)$ je u pravilu padajuća funkcija pa je i funkcija $p(x)$ u pravilu padajuća. Zato gledamo $x \in [0, 60]$.

$$\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}, \qquad P = p \cdot x$$

b) Prihod kao funkcija potražnje: $P(x) = p(x) \cdot x$

$$P(x) = \left(\frac{1}{12}x^2 - 10x + 300\right) \cdot x$$

$$P(x) = \frac{1}{12}x^3 - 10x^2 + 300x$$

Nultočke funkcije prihoda: $x_1 = x_2 = 60$, $x_3 = 0$

$$P(x) = \frac{1}{12}x^3 - 10x^2 + 300x$$

c) Derivacija funkcije prihoda

$$P'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 20x + 300$$

Tražimo nultočke prve derivacije.

$$\frac{1}{4}x^2 - 20x + 300 = 0 \Big/ \cdot 4$$

$$x^2 - 80x + 1200 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-80) \pm \sqrt{(-80)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1200}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{80 \pm 40}{2}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boxed{x_1 = 60, \quad x_2 = 20}$$

stacionarne točke

$$P'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 20x + 300 \qquad P(x) = \frac{1}{12}x^3 - 10x^2 + 300x$$

- Druga derivacija funkcije prihoda

$$P''(x) = \frac{1}{2}x - 20$$

$$P''(60) = \frac{1}{2} \cdot 60 - 20 = 10 > 0 \quad \text{lokalni minimum}$$

$$P''(20) = \frac{1}{2} \cdot 20 - 20 = -10 < 0 \quad \text{lokalni maksimum}$$

$$P(60) = \frac{1}{12} \cdot 60^3 - 10 \cdot 60^2 + 300 \cdot 60 = 0$$

$$P(20) = \frac{1}{12} \cdot 20^3 - 10 \cdot 20^2 + 300 \cdot 20 = \frac{8000}{3} \approx 2666.67$$

- Maksimalni (lokalni) prihod se postiže za količinu od 20 proizvoda i iznosi 2666.67 novčanih jedinica.

$$p(x) = \frac{1}{12}x^2 - 10x + 300 \qquad P(x) = \frac{1}{12}x^3 - 10x^2 + 300x$$

d) Maksimalni (lokalni) prihod se postiže za količinu od $x = 20$ proizvoda i iznosi 2666.67 novčanih jedinica.

$$p(20) = \frac{1}{12} \cdot 20^2 - 10 \cdot 20 + 300$$

$$p(20) = \frac{400}{3}$$

$$p(20) \approx 133.33$$

Maksimalni prihod se postiže za cijenu proizvoda od 133.33 novčane jedinice.

$$P'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 20x + 300 \qquad P(x) = \frac{1}{12}x^3 - 10x^2 + 300x$$

e) Za crtanje grafa svakako treba odrediti intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije P.

	$-\infty$	20	60	$+\infty$
P'	$+$	$-$	$+$	
P	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

- Funkcija P pada na intervalu $\langle 20, 60\rangle$.
- Funkcija P raste na intervalima $\langle -\infty, 20\rangle$ i $\langle 60, +\infty\rangle$.

$$P''(x) = \frac{1}{2}x - 20 \qquad P(x) = \frac{1}{12}x^3 - 10x^2 + 300x$$

Za preciznije nacrtani graf možemo još odrediti intervale konveksnosti i konkavnosti.

$$\frac{1}{2}x - 20 = 0 \;\Big/ \cdot 2$$

$$x - 40 = 0$$

$$\boxed{x = 40}$$

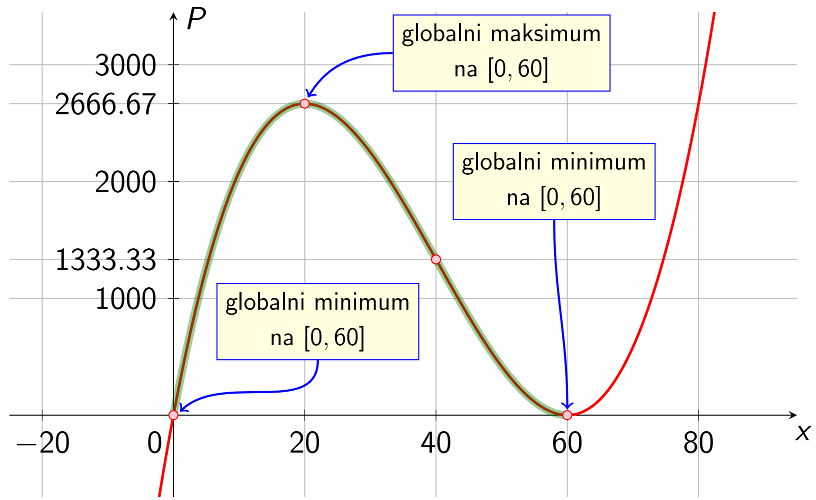
točka infleksije

	$-\infty$	40	$+\infty$
P''	$-$	$+$	
P	$\cap$	$\cup$	

- $P(40) = \dfrac{4000}{3} \approx 1333.33$
- Funkcija P je konveksna na intervalu $\langle 40, +\infty\rangle$.
- Funkcija P je konkavna na intervalu $\langle -\infty, 40\rangle$.

	$-\infty$	40	$+\infty$
P''	$-$	$+$	
P	$\cap$	$\cup$	

	$-\infty$	20	60	$+\infty$
P'	$+$	$-$	$+$	
P	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	



Zadatak 4

Zadana je funkcija troškova $T(x) = 0.01x^2 + 4x + 680$. *Cijena* p *jednog proizvoda u ovisnosti o broju prodanih proizvoda dana je funkcijom* $p(x) = 12 - \frac{1}{500}x$.

a) *Odredite funkciju profita u ovisnosti o broju proizvoda.*

b) *Odredite za koju količinu proizvodnje se ostvaruje maksimalni profit i koliko on iznosi.*

c) *Koliki su troškovi u slučaju maksimalnog profita?*

d) *Odredite za koje količine proizvodnje je profit pozitivan.*

Rješenje

a)

$$\text{PROFIT (ili DOBIT)} = \text{PRIHOD} - \text{TROŠKOVI}$$

$$\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}$$

- Prihod kao funkcija potražnje

$$P(x) = p(x) \cdot x = \left(12 - \frac{1}{500}x\right) \cdot x = -\frac{1}{500}x^2 + 12x$$

- Profit kao funkcija potražnje

$$\begin{aligned} D(x) &= P(x) - T(x) = \\ &= \left(-\frac{1}{500}x^2 + 12x\right) - \left(0.01x^2 + 4x + 680\right) = \\ &= -0.012x^2 + 8x - 680 \end{aligned}$$

b) Treba pronaći ekstreme funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

$$D'(x) = -0.024x + 8$$

$$-0.024x + 8 = 0$$

$$-0.024x = -8 \;/ : (-0.024)$$

$$x = 333.33$$

$\boxed{T(x) = 0.01x^2 + 4x + 680}$

$$D''(x) = -0.024, \qquad D''(333.33) = -0.024 < 0$$

$$D(333.33) = -0.012 \cdot 333.33^2 + 8 \cdot 333.33 - 680 = 653.33$$

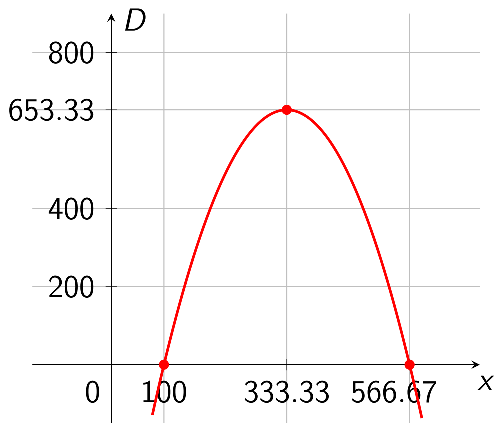
Maksimalni profit se postiže za približno 333 proizvoda i iznosi 653.33 novčane jedinice.

c) Troškovi kod maksimalnog profita iznose 3124.41 novčanih jedinica.

$$T(333.33) = 0.01 \cdot (333.33)^2 + 4 \cdot 333.33 + 680$$

$$T(333.33) = 3124.41$$

d) Tražimo nultočke funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.



$$-0.012x^2 + 8x - 680 = 0$$

$$x_1 = 100, \quad x_2 = 566.67$$

tjeme: $(333.33, 653.33)$

Profit je pozitivan za količinu proizvodnje $x \in \langle 100, 566.67 \rangle$.