Domena i svojstva realnih funkcija realne varijable

Matematika za ekonomiste 1

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Zadatak 1

Odredite domene i nultočke sljedećih funkcija:

a) $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x-3}{x+2}-2}-1$ b) $g(x)=(2+x-x^2)^{\frac{1}{5}}$

c) $h(x)=\log\left(10^{x-1}-5\right)$ d) $k(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x+2)}$

$f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x-3}{x+2}-2}-1$

Rješenje

a) domena

$x+2\neq 0$

uključeno u ovom uvjetu

$$\frac{x-3}{x+2}-2\geqslant 0$$

$$\frac{x-3-2(x+2)}{x+2}\geqslant 0$$

$$\frac{-x-7}{x+2}\geqslant 0$$

$-x-7=0$ $x+2=0$

$x=-7$ $x=-2$

	$-\infty$ do -7	-7 do -2	-2 do $+\infty$
$-x-7$	$+$	$-$	$-$
$x+2$	$-$	$-$	$+$
$\frac{-x-7}{x+2}$	$-$	$+$	$-$

RJEŠENJE: $x\in[-7,-2\rangle$

$D_f=[-7,-2\rangle$

$f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x-3}{x+2}-2}-1$

nultočke

$$\sqrt[4]{\frac{x-3}{x+2}-2}-1=0$$

$$\sqrt[4]{\frac{x-3}{x+2}-2}=1 \quad /^4$$

$$\frac{x-3}{x+2}-2=1$$

$$\frac{x-3}{x+2}=3 \quad /\cdot(x+2)$$

$$x-3=3x+6$$

$$-2x=9$$

$$\boxed{x=-\frac{9}{2}}$$

$D_f=[-7,-2\rangle$

jest nultočka jer pripada domeni

$g(x) = (2+x-x^2)^{\frac{1}{5}}$

b) domena

$g(x) = \sqrt[5]{2+x-x^2}$

$D_g = \mathbb{R}$ ⟿ neparni korijen je definiran za sve realne brojeve

nultočke

$$ax^2+bx+c=0$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\sqrt[5]{2+x-x^2} = 0 \;/^5$$
$$-x^2+x+2=0$$
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4\cdot(-1)\cdot 2}}{2\cdot(-1)}$$
$$x_{1,2} = \frac{-1\pm 3}{-2}$$
$$\boxed{x_1=-1, \quad x_2 = 2}$$

Ako je $a>1$

$\log_a x > \log_a y \;\Leftrightarrow\; x>y$

$\log_a a^x = x$

$k(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x+2)}$

d) domena

- $x+2>0$ ⟿ zbog $\log_{\frac{1}{2}}$
- $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geqslant 0$ ⟿ zbog $\sqrt{\ }$

$$x+2>0$$
$$\boxed{x>-2}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geqslant 0$$
$$\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geqslant \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^0$$
$$x+2 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0$$
$$x+2 \leqslant 1$$
$$\boxed{x \leqslant -1}$$

presjek rješenja

$\boxed{x \in \langle -2, -1]}$

Ako je $0<a<1$

$\log_a x > \log_a y \;\Leftrightarrow\; x<y$

$D_k = \langle -2, -1]$

c) domena

$a^{\log_a x} = x$

$\log = \log_{10}$

$h(x) = \log\left(10^{x-1}-5\right)$

$$10^{x-1}-5>0$$
$$10^{x-1}>5$$
$$10^{x-1}>10^{\log 5}$$
$$x-1>\log 5$$
$$x>1+\log 5$$

$$\boxed{D_h = \langle 1+\log 5, +\infty\rangle}$$

Ako je $a>1$

$a^x > a^y \;\Leftrightarrow\; x>y$

Ako je $0<a<1$

$a^x > a^y \;\Leftrightarrow\; x<y$

nultočke

$$\log\left(10^{x-1}-5\right)=0$$
$$10^{x-1}-5=10^0$$
$$10^{x-1}=6$$
$$x-1=\log 6$$
$$\boxed{x=1+\log 6}$$

jest nultočka jer pripada domeni

$\log_a x = b \rightsquigarrow x = a^b$

$a^x = b \rightsquigarrow x = \log_a b$

$k(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x+2)}$

nultočke

$D_k = \langle -2, -1]$

$$\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x+2)} = 0 \;/^2$$
$$\log_{\frac{1}{2}}(x+2) = 0$$
$$x+2 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$$
$$x+2=1$$
$$\boxed{x=-1}$$

jest nultočka jer pripada domeni

$\log_a x = b \rightsquigarrow x = a^b$

Zadatak 2

Zadane su funkcije $f(x) = \ln(x-3)$ i $g(x) = x^2 + x + 1$.

a) *Odredite pravila pridruživanja funkcija $f \circ g$ i $g \circ f$.*

b) *Na kojim su domenama od funkcija f i g kompozicije $f \circ g$ i $g \circ f$ dobro definirane?*

$\boxed{g(x) = x^2 + x + 1}$ $\boxed{f(x) = \ln(x-3)}$

$\boxed{\ln = \log_e}$

Rješenje

a)

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(x^2 + x + 1\big) = $$
$$= \ln\big((x^2 + x + 1) - 3\big) = \ln\big(x^2 + x - 2\big)$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\big(\ln(x-3)\big) = $$
$$= \big(\ln(x-3)\big)^2 + \ln(x-3) + 1 = $$
$$= \ln^2(x-3) + \ln(x-3) + 1$$

Budite jako oprezni

$$\big(\log_a x\big)^k \neq \log_a x^k$$

$$\log_a^k x = \big(\log_a x\big)^k$$

$\boxed{f(x) = \ln(x-3)}$ $\boxed{(g \circ f)(x) = \ln^2(x-3) + \ln(x-3) + 1}$

$\boxed{g(x) = x^2 + x + 1}$ $\boxed{(f \circ g)(x) = \ln(x^2 + x - 2)}$

$\boxed{\operatorname{Im} f \subseteq D_g}$

$\boxed{\operatorname{Im} g \subseteq D_f}$

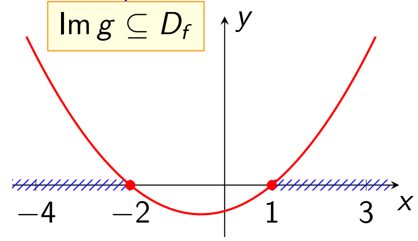
b) $\boxed{\text{domena funkcije } g \circ f}$

$x - 3 > 0 \rightsquigarrow x > 3$

$D_{g\circ f} = \langle 3, +\infty\rangle$

$\boxed{\text{domena funkcije } f \circ g}$

$$x^2 + x - 2 > 0$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$
$$x_1 = 1, \ x_2 = -2$$



$D_{f\circ g} = \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$

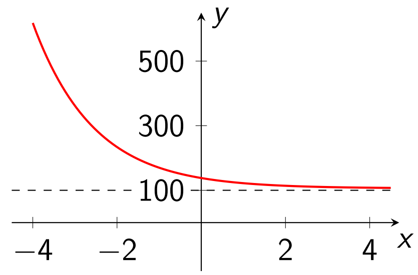
Funkcije f i g moramo gledati na sljedeći način:

$f : \langle 3, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$

$g : \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$

Zadatak 3

Zadana je funkcija h svojim grafom na donjoj slici.

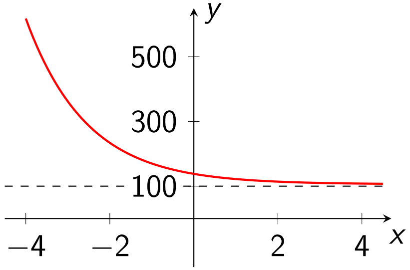


Ispitajte monotonost, omeđenost i parnost funkcije h na temelju njezinog grafa.

Rješenje

monotonost

Funkcija h je monotona funkcija jer strogo pada.



omeđenost $\quad m \leqslant h(x) \leqslant M$

Funkcija h nije omeđena odozgo jer je

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty.$$

Funkcija h je omeđena odozdo jer je $h(x) \geqslant 100$, tj. $m = 100$ je jedna donja međa funkcije h.

Funkcija h nije omeđena jer nije omeđena odozgo.

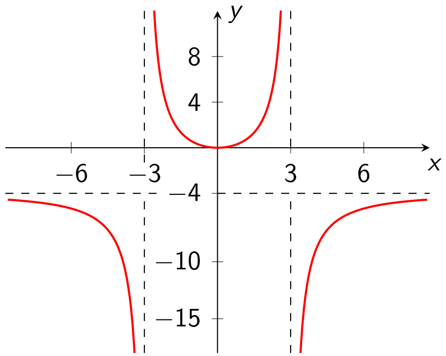
parnost/neparnost

Funkcija h nije parna jer njezin graf nije simetričan s obzirom na os y.

Funkcija h nije neparna jer njezin graf nije simetričan s obzirom na ishodište koordinatnog sustava.

Zadatak 4

Zadana je funkcija f svojim grafom na donjoj slici.



Ispitajte monotonost, omeđenost i parnost funkcije f na temelju njezinog grafa.

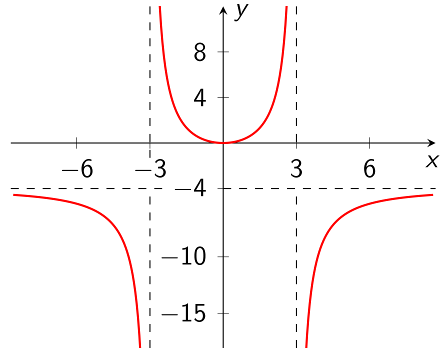
Rješenje

monotonost

Funkcija f raste na intervalima $\langle 0, 3\rangle$ i $\langle 3, +\infty\rangle$.

Funkcija f pada na intervalima $\langle -\infty, -3\rangle$ i $\langle -3, 0\rangle$.

Funkcija f nije monotona funkcija na svojoj domeni.



parnost/neparnost

Funkcija f je parna jer je njezin graf simetričan s obzirom na os y.

Budite iznimno oprezni

Funkcija f ne raste na skupu $\langle 0, 3\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$.

Budite iznimno oprezni

Funkcija f ne pada na skupu $\langle -\infty, -3\rangle \cup \langle -3, 0\rangle$.

omeđenost $\quad m \leqslant f(x) \leqslant M$

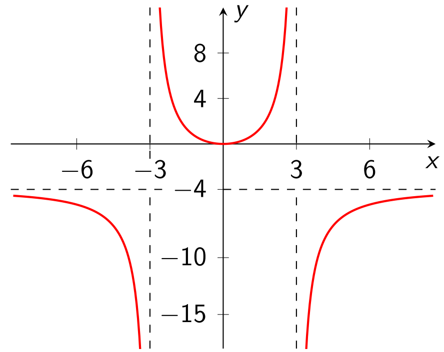
Funkcija f nije omeđena odozgo jer u okolini broja 3 poprima beskonačno velike pozitivne vrijednosti, tj.

$$\lim_{x \to 3-} f(x) = +\infty.$$

Funkcija f nije omeđena odozdo jer u okolini broja 3 poprima beskonačno velike negativne vrijednosti, tj.

$$\lim_{x \to 3+} f(x) = -\infty.$$

Funkcija f nije omeđena jer nije omeđena niti odozgo niti odozdo.



Slično je u okolini broja -3

$$\lim_{x \to -3-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -3+} f(x) = +\infty$$

Zadatak 5

Ispitajte parnost sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2}{3 - x^2}$

b) $h(x) = 2^{5-x} + 50$

c) $g(x) = \log_4 \dfrac{3+2x}{3-2x}$

Parna funkcija

- $x \in D_f \;\Rightarrow\; -x \in D_f$
- $f(-x) = f(x),\; \forall x \in D_f$

Neparna funkcija

- $x \in D_f \;\Rightarrow\; -x \in D_f$
- $f(-x) = -f(x),\; \forall x \in D_f$

Rješenje

$f(x) = \dfrac{2x^2}{3 - x^2}$

a) domena $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

$3 - x^2 \neq 0 \rightsquigarrow x^2 \neq 3 \rightsquigarrow x \neq \pm\sqrt{3}$

$$f(-x) = \frac{2 \cdot (-x)^2}{3 - (-x)^2} = \frac{2x^2}{3 - x^2} = f(x)$$

Funkcija f je parna funkcija.

$h(x) = 2^{5-x} + 50$

b) domena $D_h = \mathbb{R}$

$$h(-x) = 2^{5-(-x)} + 50 = 2^{5+x} + 50 \neq \pm h(x)$$

Funkcija h nije niti parna niti neparna.

Protuprimjer $h(-1) \neq \pm h(1)$

$$h(1) = 2^4 + 50 = 66, \quad h(-1) = 2^6 + 50 = 114$$

$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$

$\boxed{D_g = \left\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle}$

$g(x) = \log_4 \dfrac{3+2x}{3-2x}$

c) domena

$$\frac{3+2x}{3-2x} > 0$$

$3 + 2x = 0 \qquad 3 - 2x = 0$

$x = -\dfrac{3}{2} \qquad x = \dfrac{3}{2}$

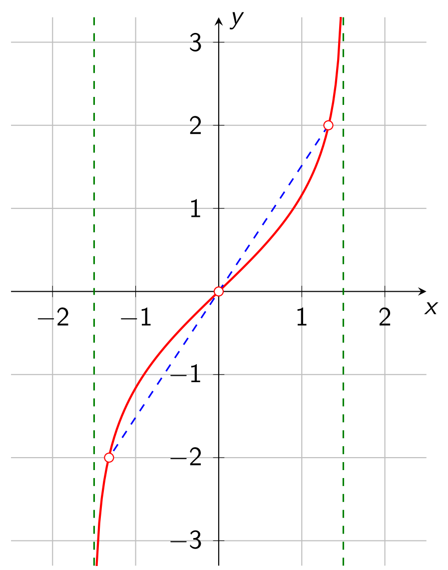
	$-\infty$ do $-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$ do $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ do $+\infty$
$3+2x$	$-$	$+$	$+$
$3-2x$	$+$	$+$	$-$
$\frac{3+2x}{3-2x}$	$-$	$+$	$-$

$$g(-x) = \log_4 \frac{3 + 2\cdot(-x)}{3 - 2\cdot(-x)} = \log_4 \frac{3-2x}{3+2x} = \log_4 \left(\frac{3+2x}{3-2x}\right)^{-1} =$$

$$= -\log_4 \frac{3+2x}{3-2x} = -g(x)$$

g je neparna funkcija

Graf funkcije g



$g(x) = \log_4 \dfrac{3+2x}{3-2x}$

$D_g = \left\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}-} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\frac{3}{2}+} g(x) = -\infty$$