



Što je geometrija

Damir Horvat

FOI, Varaždin



- 1 Peti postulat
- 2 Neeuklidske geometrije
- 3 Projektivna geometrija
- 4 Cayley-Kleinove geometrije
- 5 Riemannova geometrija

- Kakvu ćemo geometriju raditi na Odabranim poglavljima matematike?

- Kakvu ćemo geometriju raditi na Odabranim poglavljima matematike?
- Čemu uopće ovo pitanje? Zar ne postoji samo jedna jedina geometrija?

- Kakvu ćemo geometriju raditi na Odabranim poglavljima matematike?
- Čemu uopće ovo pitanje? Zar ne postoji samo jedna jedina geometrija?
- Iznenađenje, Euklidska geometrija nije jedina geometrija.

Euklidov peti postulat

Peti postulat

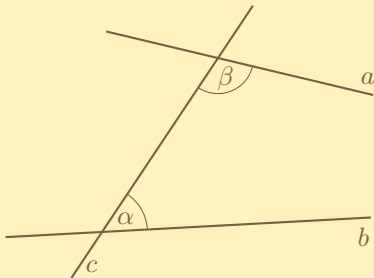
Neeuklidske geometrije

Projektivna geometrija

Cayley-Kleinove geometrije

Riemannova geometrija

Ako dužina koja siječe dvije dužine čini unutarnje kutove s iste strane manjima od dva prava kuta, te dvije dužine dovoljno produžene sastaju se s one strane na kojoj su kutovi manji od dva prava kuta.



Euklidov peti postulat

Peti postulat

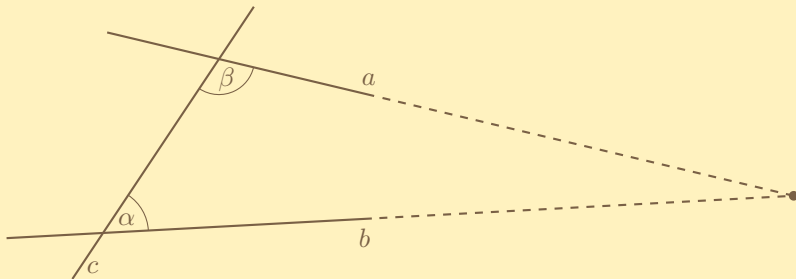
Neeuklidske geometrije

Projektivna geometrija

Cayley-Kleinove geometrije

Riemannova geometrija

Ako dužina koja siječe dvije dužine čini unutarnje kutove s iste strane manjima od dva prava kuta, te dvije dužine dovoljno produžene sastaju se s one strane na kojoj su kutovi manji od dva prava kuta.



$\alpha + \beta < 180^\circ \Rightarrow$ pravci a i b se sijeku

Aksiom o paralelama

Peti postulat

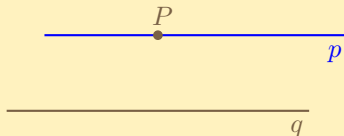
Neeuklidske geometrije

Projektivna geometrija

Cayley-Kleinove geometrije

Riemannova geometrija

Kroz danu točku P izvan danog pravca q u danoj ravнини prolazi točno jedan pravac p koji se ne siječe s pravcem q .



Aksiom o paralelama je ekvivalentan s petim postulatom.

Problem paralela (problem 5. postulata)

Peti postulat Neeuklidske geometrije Projektivna geometrija Cayley-Kleinove geometrije Riemannova geometrija

- **"Prihvatljiv aksiom"**. Kroz zadane dvije različite točke prolazi jedan i samo jedan pravac.

Problem paralela (problem 5. postulata)

Peti postulat Neeuklidske geometrije Projektivna geometrija Cayley-Kleinove geometrije Riemannova geometrija

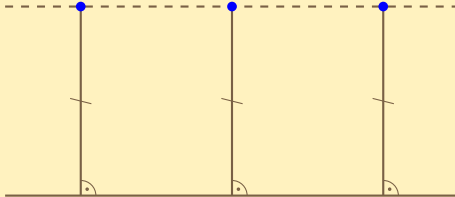
- **"Prihvatljiv aksiom"**. Kroz zadane dvije različite točke prolazi jedan i samo jedan pravac.
- Peti postulat nije toliko očit i ljudi su vjerovali da se on može dokazati iz preostalih aksioma i da to zapravo nije aksiom.

- Zbroj kutova u trokutu jednak je 180° .
- Postoji pravokutnik, tj. četverokut s četiri prava kuta.
- Skup točaka ravnine jednako udaljenih od nekog pravca je par pravaca paralelnih sa zadanim pravcem.
- Postoje slični trokuti.

Neki pokušaji dokazivanja petog postulata

Peti postulat Neeuklidske geometrije Projektivna geometrija Cayley-Kleinove geometrije Riemannova geometrija

Vitale, 1680. Kada bi znali da tri "plave" točke leže na jednom pravcu, tada bi znali dokazati 5. postulat.



Neki pokušaji dokazivanja petog postulata

Peti postulat

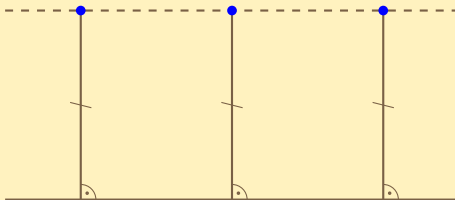
Neeuklidske geometrije

Projektivna geometrija

Cayley-Kleinove geometrije

Riemannova geometrija

Vitale, 1680. Kada bi znali da tri "plave" točke leže na jednom pravcu, tada bi znali dokazati 5. postulat.



Ova tvrdnja je također ekvivalentna s petim postulatom.

Neki pokušaji dokazivanja petog postulata

Peti postulat

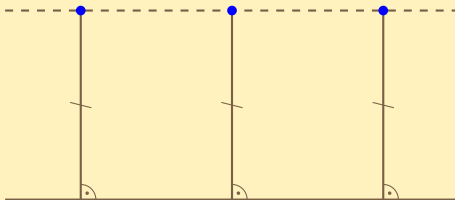
Neeuklidske geometrije

Projektivna geometrija

Cayley-Kleinove geometrije

Riemannova geometrija

Vitale, 1680. Kada bi znali da tri "plave" točke leže na jednom pravcu, tada bi znali dokazati 5. postulat.



Ova tvrdnja je također ekvivalentna s petim postulatom.

U hiperboličkoj geometriji "plave" točke uopće ne leže na pravcu, nego na jednoj krivulji koja se zove **hipercikl**.

Neki pokušaji dokazivanja petog postulata

Peti postulat Neeuklidske geometrije Projektivna geometrija Cayley-Kleinove geometrije Riemannova geometrija

Proklo, 5. stoljeće. U svom "dokazu" petog postulata koristi se činjenicom da paralelni pravci imaju ograničeni razmak, ali to nije dokazao. U hiperboličkoj geometriji paralele nemaju ograničeni razmak.

Neki pokušaji dokazivanja petog postulata

Peti postulat Neeuklidske geometrije Projektivna geometrija Cayley-Kleinove geometrije Riemannova geometrija

Proklo, 5. stoljeće. U svom "dokazu" petog postulata koristi se činjenicom da paralelni pravci imaju ograničeni razmak, ali to nije dokazao. U hiperboličkoj geometriji paralele nemaju ograničeni razmak.

John Wallis, 1693. U svom "dokazu" koristi se činjenicom da nad zadanom dužinom postoji trokut koji je sličan sa zadanim trokutom, ali to nije dokazao. Naime, bez petog postulata nema sličnih trokuta.

Neki pokušaji dokazivanja petog postulata

Peti postulat Neeuklidske geometrije Projektivna geometrija Cayley-Kleinove geometrije Riemannova geometrija

U 18. stoljeću su Saccheri i Lambert, neovisno jedan od drugog, pokušali dati indirektni dokaz.

Koristili su činjenicu da je postojanje četverokuta s četiri prava kuta ekvivalentno s petim postulatom. Pretpostavili su da vrijedi negacija petog postulata, tj. da ne postoji četverokut s četiri prava kuta. Cilj im je bio pobiti dvije hipoteze:

- **Hipoteza tupog kuta.** U četverokutu s tri prava kuta, četvrti kut je tupi.
- **Hipoteza šiljastog kuta.** U četverokutu s tri prava kuta, četvrti kut je šiljasti.

U želji da pobiju hipoteze tupog i šiljastog kuta, Saccheri i Lambert su izveli niz teorema od kojih ovdje navodimo samo neke najvažnije.

- Ako vrijedi hipoteza tupog kuta, zbroj unutarnjih kutova u trokutu je veći od 180° .
- Ako vrijedi hipoteza šiljastog kuta, zbroj unutarnjih kutova u trokutu je manji od 180° .
- Ako vrijedi hipoteza tupog kuta, površina trokuta proporcionalna je s **ekscesom** $(\alpha + \beta + \gamma) - 180^\circ$.
- Ako vrijedi hipoteza šiljastog kuta, površina trokuta proporcionalna je s **defektom** $180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$.
- Ako vrijedi hipoteza šiljastog kuta, tada postoji apsolutna jedinica duljine.

Neki pokušaji dokazivanja petog postulata

Peti postulat Neeuklidske geometrije Projektivna geometrija Cayley-Kleinove geometrije Riemannova geometrija

Hipoteza tupog kuta je bila pobijena zbog toga jer se mislilo da pravci ne mogu imati konačnu duljinu. Međutim, i tu su pogriješili jer u tom trenutku ljudi nisu došli na ideju da bi mogla postojati geometrija u kojoj pravci imaju konačnu duljinu. Takva geometrija postoji i u njoj vrijedi hipoteza tupog kuta umjesto petog postulata. Tu geometriju zovemo **eliptička geometrija** i ona se može realizirati na sferi s poistovjećenim antipodalnim točkama, gdje su pravci glavne kružnice.

Neki pokušaji dokazivanja petog postulata

Peti postulat Neeuklidske geometrije Projektivna geometrija Cayley-Kleinove geometrije Riemannova geometrija

Saccheri i Lambert su bili svjesni činjenice da nisu uspjeli do kraja vjerno pobiti hipotezu šiljastog kuta.

"Dokazi Euklidovog petog postulata mogu se dovesti tako daleko da očigledno preostaje neznatna sitnica. Pri pažljivoj analizi ispostavlja se da baš u toj prividnoj sitnici leži sva suština pitanja; ona obično sadrži teorem koji treba dokazati ili njemu ekvivalentni postulat." Lambert

- 1816. godine Gauss je došao do uvjerenja da se može izgraditi geometrija u kojoj ne vrijedi peti postulat. Svoj rad nije objavio jer je bio svjestan da ga matematičari tog vremena ne bi mogli razumijeti i prihvatiti.
- 1829. godine Bolyai je završio svoja istraživanja o petom postulatu koja su se uvelike podudarala s rezultatima Lobačevskog. Njegov otac taj rad šalje Gaussu koji mu odgovara da i on već zna za takve rezultate.
- Bolyai je razočaran Gaussovom odgovorom i zna za Lobačevskog i njegov rad "Geometrijsko istraživanje teorije paralela". Sumnja da je njegov rad preko Gaussa došao u ruke Lobačevskog koji ga je vješto preradio. Sumnjao je čak da Gauss objavljuje svoj rad pod imenom Lobačevski.

Definicija paralela – Lobačevski

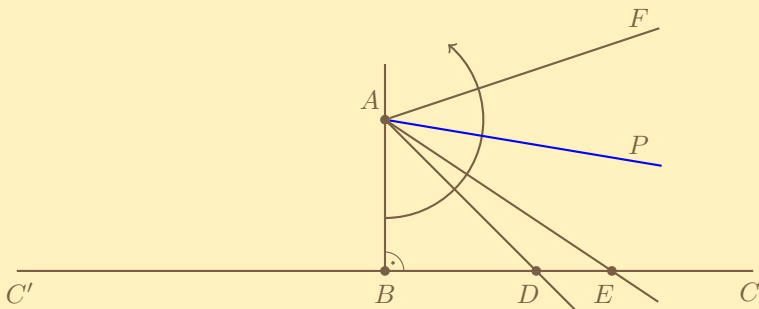
Peti postulat

Neeuklidske geometrije

Projektivna geometrija

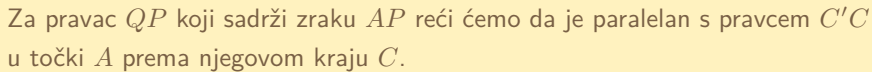
Cayley-Kleinove geometrije

Riemannova geometrija



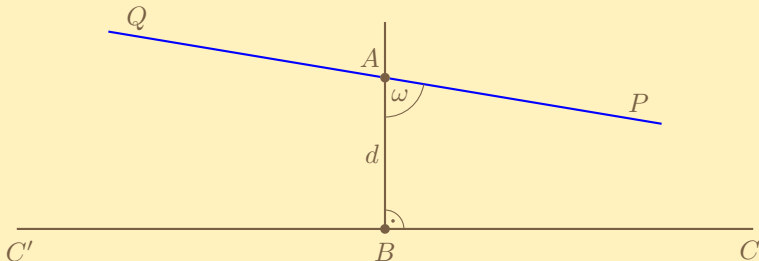
Za onu "prvu" zraku AP na koju naiđemo kretajući se od okomice AB u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, a koja ne siječe pravac $C'C$, reći ćemo da je paralelna s pravcem $C'C$.

Peti postulat Neeuklidske geometrije Projektivna geometrija Cayley-Kleinove geometrije Riemannova geometrija



Definicija paralela – Lobačevski

Peti postulat Neeuklidske geometrije Projektivna geometrija Cayley-Kleinove geometrije Riemannova geometrija



Prikloni kut $\omega = \angle BAP$ paralele AP prema normali AB zovemo **kut paralelnosti**, a duljinu $d = |AB|$ **distanca paralelnosti** za taj kut.

$\omega < \frac{\pi}{2}$ – hiperbolička geometrija

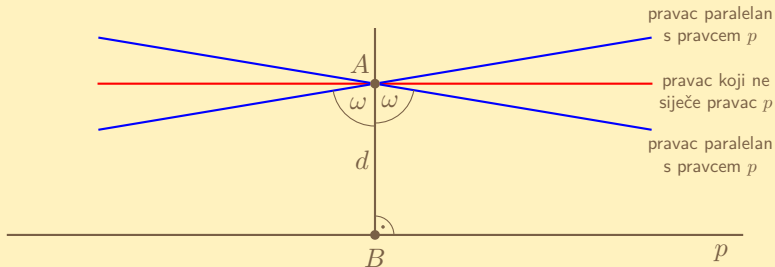
Peti postulat

Neeuklidske geometrije

Projektivna geometrija

Cayley-Kleinove geometrije

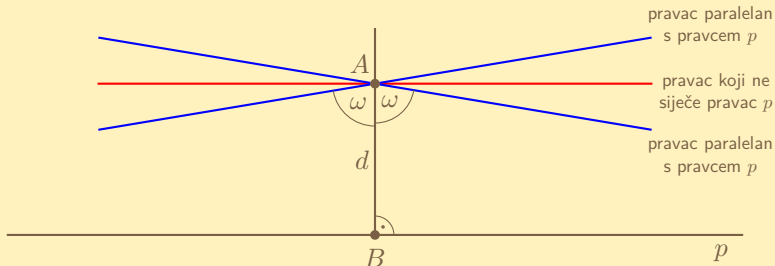
Riemannova geometrija



U hiperboličkoj geometriji je kut paralelnosti za svaku točku A izvan zadanog pravca p uvijek šiljasti kut. Stoga postoje točno dvije paralele i isto tako još beskonačno mnogo pravaca kroz točku A koji ne sijeku pravac p .

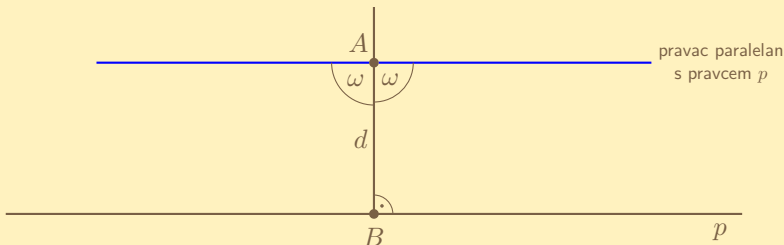
$\omega < \frac{\pi}{2}$ – hiperbolička geometrija

Peti postulat Neeuklidske geometrije Projektivna geometrija Cayley-Kleinove geometrije Riemannova geometrija

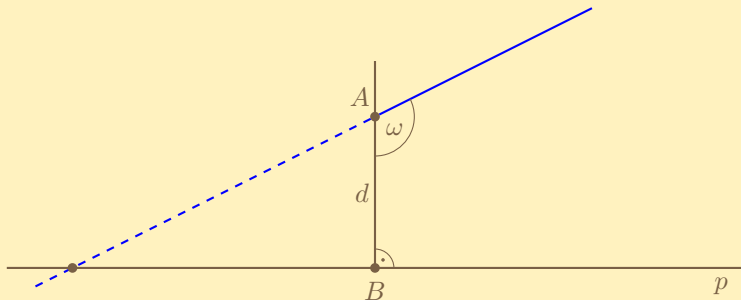


Svakoj distanci paralelnosti odgovara točno jedan kut paralelnosti i obrnuto, svakom kutu paralelnosti odgovara točno jedna distanca paralelnosti. Nadalje,

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \omega = 0, \quad \lim_{d \rightarrow 0} \omega = \frac{\pi}{2}$$



U euklidskoj geometriji je kut paralelnosti za svaku točku A izvan zadanog pravca p uvijek jednak pravom kutu. Stoga postoji točno jedna paralela kroz točku A s pravcem p i to je jedini pravac kroz A koji ne siječe pravac p .



U eliptičkoj geometriji je kut paralelnosti za svaku točku A izvan zadanog pravca p uvijek tupi kut. Stoga ne postoji niti jedna paralela kroz točku A s pravcem p , tj. svaka dva pravca se sijeku.

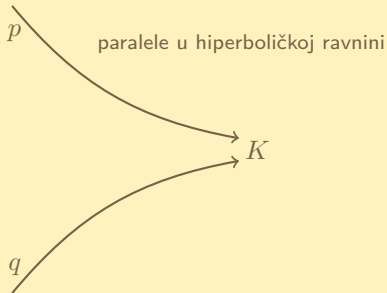
- Suma unutarnjih kutova u svakom trokutu je manja od 180° .
- Vanjski kut trokuta veći je od zbroja dvaju nesusjednih unutarnjih kutova trokuta.
- Suma unutarnjih kutova u svakom četverokutu je manja od 360° .
- Suma unutarnjih kutova trokuta nije ista za sve trokute.
- Ako dva trokuta imaju jednake odgovarajuće unutarnje kutove, tada su oni sukladni. Drugim riječima, u hiperboličkoj geometriji nema sličnih trokuta.
- Obodni kut nad promjerom kružnice je šiljasti kut.

Neki teoremi u hiperboličkoj geometriji

Peti postulat Neeuklidske geometrije Projektivna geometrija Cayley-Kleinove geometrije Riemannova geometrija

- Ako je $p \parallel_K q$, tada udaljenost varijabilne točke Q na pravcu q od pravca p konvergira k nuli ako $Q \rightarrow K$, a neograničeno raste ako Q teži prema drugom kraju pravca q .

paralele u euklidskoj ravnini

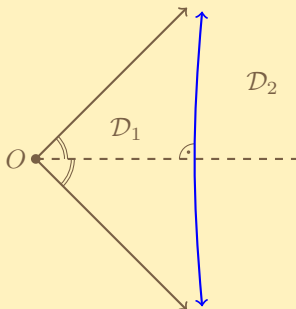


- Sve pruge u hiperboličkoj ravnini su međusobno sukladne.

Neki teoremi u hiperboličkoj geometriji

Peti postulat Neeuklidske geometrije Projektivna geometrija Cayley-Kleinove geometrije Riemannova geometrija

- Unutar svakog kuta manjeg od 180° postoji jedinstveni pravac koji ne siječe krakove kuta i paralelan je s oba kraka tog kuta. Taj pravac se zove **granični pravac**. Granični pravac dijeli kut na dva disjunktne dijela $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$. Svakom točkom iz skupa $\mathcal{D}_1$ se može povući pravac koji siječe oba kraka kuta, a bilo kojom točkom skupa $\mathcal{D}_2$ ne može se povući takav pravac.



- Euklidov sustav aksioma je nepotpun jer nema ništa o neprekidnosti, izometrijama i poretku. Euklid se previše služio zorom.
- Zahvaljujući Lobačevskom, stvorili su se uvjeti da se Euklidska geometrija strogo aksiomatski izgradi. Taj zadatak je prvi uspješno napravio Hilbert 1899. godine u svojem djelu **Osnove geometrije**.

- **Osnovni pojmovi:** točka, pravac, ravnina
- **Osnovne relacije:** incidentnost, poredak, kongruentnost
- **Pet skupina aksioma:**
 - ◆ Aksiomi incidencije
 - ◆ Aksiomi poretka
 - ◆ Aksiomi kongruentnosti
 - ◆ Aksiomi neprekidnosti
 - ◆ Aksiom o paralelama

Apsolutna geometrija je geometrija bez aksioma o paralelama.

- Konstrukcije se izvode samo ravnalom.
- U projektivnoj geometriji nema metrike. Umjesto toga jedan skup točaka pridružujemo drugom skupu pomoću projektiviteta.
- Projektivna geometrija se bavi trokutima, četverokutima, ali se ne bavi pravokutnim trokutima, paralelogramima, . . .
- Projektivna geometrija ne razlikuje kružnicu, elipsu, parabolu i hiperbolu. Te krivulje se u toj geometriji zovu jednim imenom konike.
- Poncelet je 1822. objavio osnove projektivne geometrije. Razdvojio je projektivna i metrička svojstva objekata i uspostavio vezu između njih.
- *"Metrička geometrija je dio projektivne geometrije, a projektivna geometrija je sva geometrija."* – Cayley

Postoje različite verzije aksioma projektivne ravnine. Ovdje navodimo tri najosnovnija koji se u biti javljaju u svim verzijama.

- Kroz svake dvije točke prolazi točno jedan pravac.
- Svaka dva pravca se sijeku u točno jednoj točki.
- Postoje barem četiri točke od kojih nikoje tri ne leže na istom pravcu, tj. nikoje tri nisu kolinearne.

Uočite da nema aksioma o paralelama (svaka dva pravca se sijeku), nema ništa o poretku (projektivna geometrija ne zna što to znači "ležati između",...), nema ništa o kongruentnosti (ne postoji pojam sukladnih trokuta,...).

Ostali aksiomi se dodaju po potrebi, ovisno o tome što želimo da vrijedi u našoj projektivnoj ravnini. Novi aksiom se dodaje ukoliko se on ne može dokazati na temelju postojećih aksioma, a potreban je za daljnje proučavanje. Na primjer,

- **Fanov aksiom.** Dijagonalne točke potpunog četverovrha su nekolinearne.
- **Paposov teorem.** Vrhovi P_1, P_3, P_5 običnog šesterovrha $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ neka leže na pravcu a , a vrhovi P_2, P_4, P_6 neka leže na pravcu b . Tada su sjecišta K, L, M parova suprotnih stranica tog običnog šesterovrha kolinearne točke.

Zamjenom riječi u nekom teoremu prema shemi

točka	$\leftrightarrow$	pravac
prolazi kroz	$\leftrightarrow$	leži na
siječenje	$\leftrightarrow$	spajanje

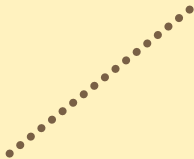
dobivamo opet valjani teorem projektivne geometrije ravnine.

Donje dvije tvrdnje su dualne jedna drugoj.

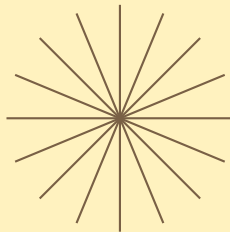
Tvrdnja 1. *Kroz dvije različite točke prolazi točno jedan pravac.*

Tvrdnja 2. *Dva različita pravca sijeku se u točno jednoj točki.*

pravac kao skup točaka



točka kao skup pravaca



Teorem (Pappusov teorem)

Ako vrhovi P_1, P_3, P_5 običnog šesterovrha $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ leže na pravcu a , a vrhovi P_2, P_4, P_6 na pravcu b , tada su sjecišta K, L, M parova nasuprotnih stranica tog šesterovrha kolinearne točke.

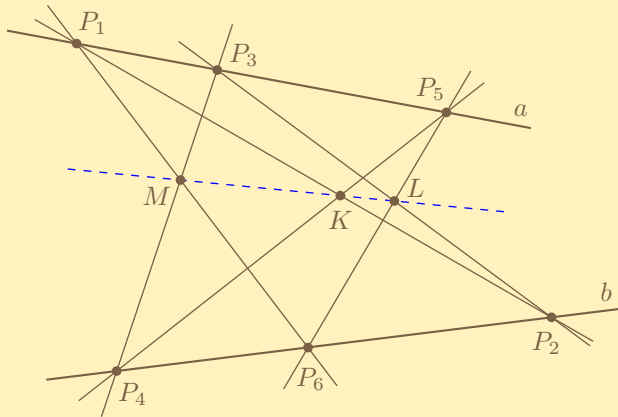
Teorem (Desarguesov teorem)

Dva su trovrha $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ u projektivnom prostoru perspektivna s obzirom na neku točku O akko su oni perspektivni s obzirom na neki pravac p .

Napomena. Desarguesov teorem ne mora vrijediti u svakoj projektivnoj ravnini. U realnoj projektivnoj ravnini vrijedi Desarguesov teorem. Općenito, ako u nekoj projektivnoj ravnini vrijedi Pappusov teorem, tada vrijedi i Desarguesov teorem. Obrnuto ne vrijedi.

Pappus

Peti postulat Neeuklidske geometrije Projektivna geometrija Cayley-Kleinove geometrije Riemannova geometrija



Desargues

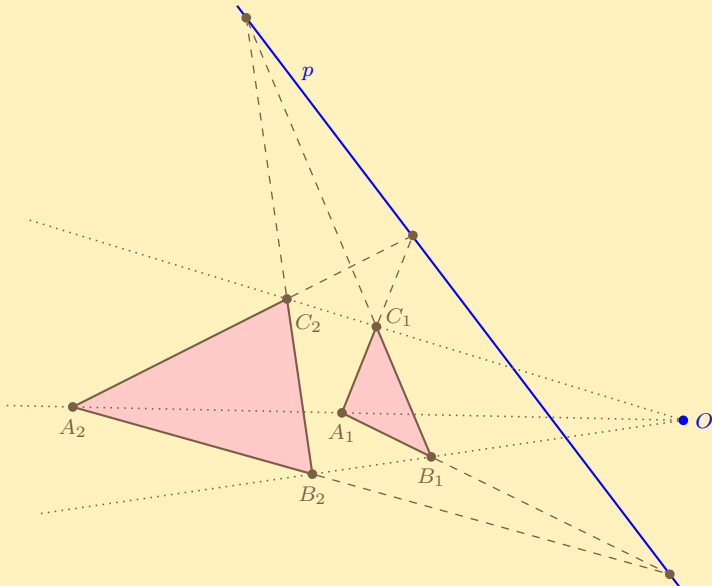
Peti postulat

Neeuklidske geometrije

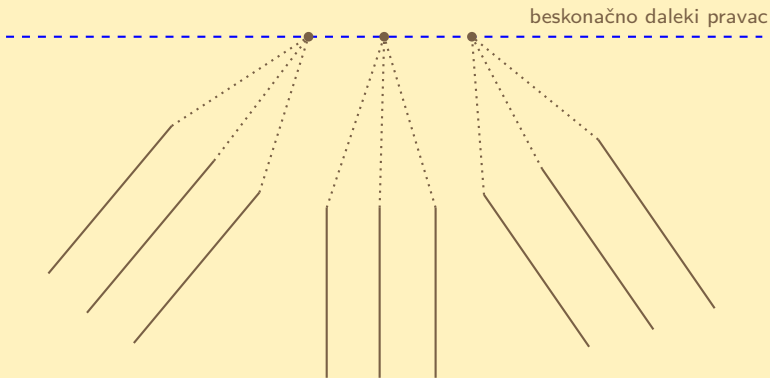
Projektivna geometrija

Cayley-Kleinove geometrije

Riemannova geometrija



- Svakoj klasi paralelnih pravaca pridružimo jednu beskonačno daleku točku.
- Sve beskonačno daleke točke leže na jednom beskonačno dalekom pravcu.



- Umjesto dvije koordinate koriste se tri koordinate

$$(x, y) \leftrightarrow (x, y, 1)$$

- Za svaki $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ uređena trojka (kx, ky, kz) predstavlja istu točku, preciznije točku $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$. Uređena trojka $(0, 0, 0)$ nije dozvoljena i ne predstavlja niti jednu točku.
- Beskonačno daleke točke su oblika $(x, y, 0)$, a $z = 0$ je jednačba beskonačno dalekog pravca.
- Beskonačno daleka točka $(x, y, 0)$ pripada onoj klasi paralelnih pravaca čiji je vektor smjera $x\vec{i} + y\vec{j}$. Drukčije gledano, beskonačno daleke točke zapravo predstavljaju smjerove, tj. jednodimenzionalne vektorske potprostore u $\mathbb{R}^3$.

Homogene koordinate u ravnini

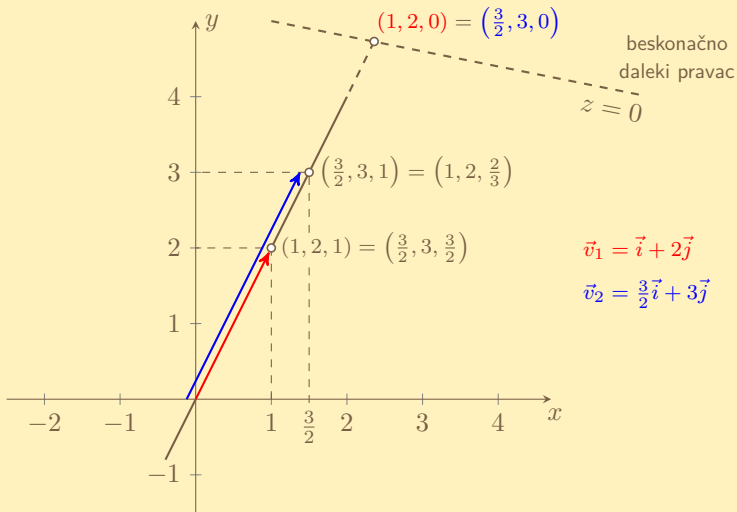
Peti postulat

Neeuklidske geometrije

Projektivna geometrija

Cayley-Kleinove geometrije

Riemannova geometrija



- Točka u realnoj projektivnoj ravnini je određena s uređenim trojkama (kx, ky, kz) realnih brojeva za $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Pravac je također određen s uređenim trojkama $[kx, ky, kz]$ realnih brojeva za $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Točka (x, y, z) i pravac $[X, Y, Z]$ su incidentni akko vrijedi

$$xX + yY + zZ = 0.$$

- O relaciji $xX + yY + zZ = 0$ možemo razmišljati kao o točkastoj jednadžbi pravca (uz fiksne X, Y, Z) ili kao o pravčastoj jednadžbi točke (uz fiksne x, y, z).

- Pravac koji prolazi točkama $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$ ima koordinate

$$\left[\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array} \right| \end{array} \right]$$

- Gornja formula se lakše pamti preko vektorskog produkta

$$[X, Y, Z] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

- Sjecište dvaju pravaca $p[X_1, Y_1, Z_1]$ i $q[X_2, Y_2, Z_2]$ ima koordinate

$$\left(\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \right)$$

- Gornja formula se lakše pamti preko vektorskog produkta

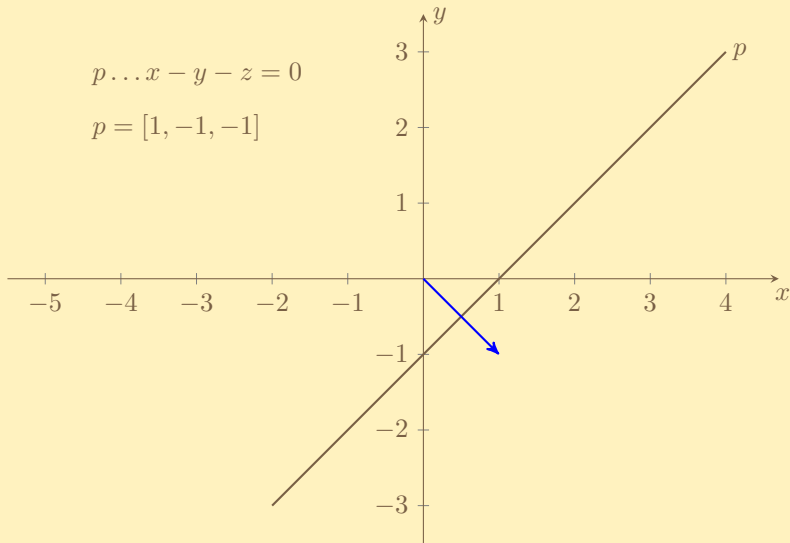
$$(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

Točkasta jednadžba pravca

Peti postulat Neeuklidske geometrije Projektivna geometrija Cayley-Kleinove geometrije Riemannova geometrija

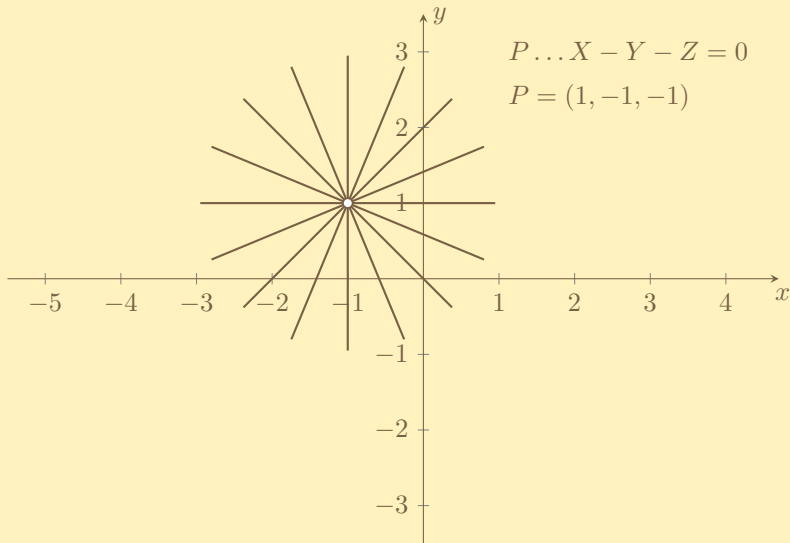
$$p \dots x - y - z = 0$$

$$p = [1, -1, -1]$$



Pravčasta rovnice bodu

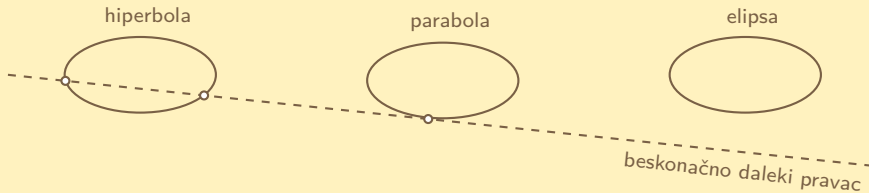
Peti postulát Neeuklidiske geometrije Projektivna geometrije Cayley-Kleinove geometrije Riemannova geometrije



- Točke u realnoj projektivnoj ravnini su jednodimenzionalni potprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Geometrijski su to zapravo pravci u prostoru koji prolaze kroz ishodište.
- Pravci u realnoj projektivnoj ravnini su dvodimenzionalni potprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Geometrijski su to ravnine u prostoru koje prolaze kroz ishodište.
- Pravac i točka su incidentni akko je pripadni jednodimenzionalni potprostor sadržan u pripadnom dvodimenzionalnom potprostoru.
- Sad su jasnije formule za presjek dva pravca i spojnicu dviju točaka preko vektorskog produkta. Sjetite se toga kod analitičke geometrije prostora.
- Zanimljivo, ovdje smo pravce zvali točkama, a ravnine smo zvali pravcima. Strašna stvar. No, moramo se opustiti.

- Korelacija projektivne ravnine je preslikavanje koje točke preslikava u pravce, pravce preslikava u točke i pritom se čuva incidencija.
- Polaritet je involutorna korelacija. Ako je $f(P) = p$, tada je $f(p) = P$. Točka P je pol pravca p , a pravac p je polara točke P .
- Konika je skup svih točaka projektivne ravnine koje su incidentne sa svojom polarom u danom polaritetu. Dualno, konika (omotaljka) je skup svih pravaca projektivne ravnine koji su incidentni sa svojim polom u danom polaritetu.
- U projektivnoj ravni sve su konike iste. Projektivna geometrija ne razlikuje elipsu, hiperbolu, parabolu i kružnicu.

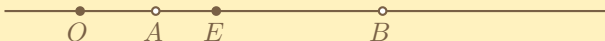
- Elipsa u afinoj ravnini je konika koja nema niti jednu zajedničku točku s beskonačno dalekim pravcem.
- Hiperbola u afinoj ravnini je konika koja ima dvije zajedničke točke s beskonačno dalekim pravcem.
- Parabola u afinoj ravnini je konika koja dira beskonačno daleki pravac.



- *"Metrička geometrija je dio projektivne geometrije, a projektivna geometrija je sva geometrija."* – Cayley
- Metrička svojstva nisu svojstva figure prema njoj samoj, nego su to svojstva figure s obzirom na apsolutnu figuru C drugog stupnja u kompleksnoj projektivnoj ravnini.
- **Erlanger Program, 1872.** Kleinova definicija geometrije: Geometrija je teorija invarijanata neke grupe transformacija na nekom prostoru.

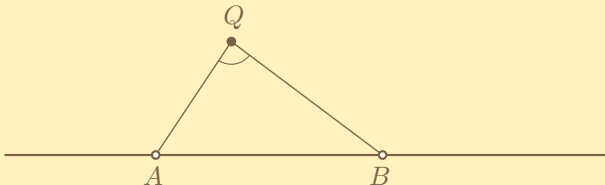
1 Paraboličko mjerenje – na pravcu se odabere jedinična dužina $\overline{OE}$ pa se parabolička udaljenost točaka A i B na pravcu definira kao

$$d_{AB}^{(P)} = \frac{AB}{OE}$$



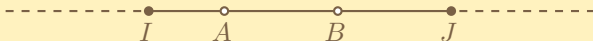
- 2 Eliptičko mjerenje** – odabere se točka Q izvan promatranog pravca pa se eliptička udaljenost točaka A i B na pravcu definira kao euklidska mjera kuta $\angle AQB$, tj.

$$d_{AB}^{(E)} = \angle AQB$$



- 3 Hiperboličko mjerenje** – na pravcu se odaberu dvije fiksne točke I i J pa se hiperbolička udaljenost točaka A i B na pravcu definira kao

$$d_{AB}^{(H)} = k \log (A, B; I, J), \quad (A, B; I, J) = \frac{AI}{AJ} : \frac{BI}{BJ}$$

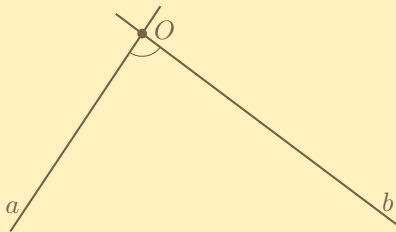


Tri načina mjerenja kutova između pravaca

Peti postulat Neeuklidske geometrije Projektivna geometrija Cayley-Kleinove geometrije Riemannova geometrija

1 Eliptičko mjerenje – standardna euklidska mjera kuta

$$\delta_{ab}^{(E)} = \angle aOb$$



Tri načina mjerenja kutova između pravaca

Peti postulat

Neeuklidske geometrije

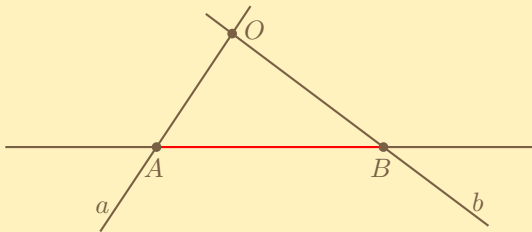
Projektivna geometrija

Cayley-Kleinove geometrije

Riemannova geometrija

- 2 Paraboličko mjerenje** – odabere se bilo koji pravac izvan točke O pa se parabolička mjera kuta između pravaca a i b definira kao

$$\delta_{ab}^{(P)} = \overline{AB}$$



Tri načina mjerenja kutova između pravaca

Peti postulat

Neeuklidske geometrije

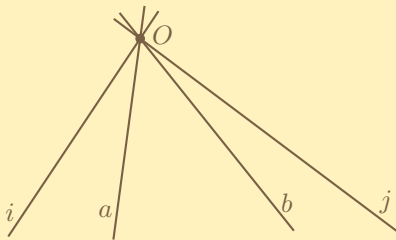
Projektivna geometrija

Cayley-Kleinove geometrije

Riemannova geometrija

- 3 Hiperboličko mjerenje** – fiksiraju se dva pravca i i j kroz točku O pa se hiperbolička mjera kuta između pravaca a i b definira kao

$$\delta_{ab}^{(H)} = k \log (a, b; i, j), \quad (a, b; i, j) = \frac{\sin \angle(a, i)}{\sin \angle(a, j)} : \frac{\sin \angle(b, i)}{\sin \angle(b, j)}$$



Cayley-Kleinove geometrije u ravni

Peti postulat Neeuklidske geometrije Projektivna geometrija Cayley-Kleinove geometrije Riemannova geometrija

mjerjenje kutova	mjerjenje duljina		
	eliptičko	paraboličko	hiperboličko
eliptičko	eliptička geometrija	euklidska geometrija	hiperbolička geometrija
paraboličko	ko-euklidska geometrija	Galilejeva geometrija	ko-Minkowski geometrija
hiperboličko	ko-hiperbolička geometrija	Minkowski geometrija	dvostruko hiperbolička geometrija

Broj pravaca koji prolaze točkom A i ne sijeku pravac a .

mjerjenje kutova	mjerjenje duljina		
	E	P	H
E	0	1	∞
P	0	1	∞
H	0	1	∞

Broj točaka na pravcu a koje se ne mogu spojiti s točkom A .

mjerjenje kutova	mjerjenje duljina		
	E	P	H
E	0	0	0
P	1	1	1
H	∞	∞	∞

- Moderni pristup pomoću vektorskog prostora, afinog prostora i "skalarnog" produkta
- Osnovni pojmovi su točka i vektor, a njihovi odnosi se navode preko aksioma.
- Aksiome možemo podijeliti u četiri skupine:
 - 1 aksiomi vektorskog prostora
 - 2 aksiom dimenzije - dimenzija prostora u kojem ćemo raditi geometriju
 - 3 aksiomi afinog prostora - povezivanje odnosa između točaka i vektora
 - 4 aksiomi skalarnog produkta

Euklidska geometrija

U ortonormiranoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}\}$: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y, \quad d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Galilejeva geometrija

U ortonormiranoj bazi $\{\vec{i}, \vec{o}\}$: $\vec{i}^2 = 1, \vec{o}^2 = 0, \vec{i} \cdot \vec{o} = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x, \quad d(T_1, T_2) = x_2 - x_1$$

Geometrija Minkowskog

U ortonormiranoj bazi $\{\vec{i}, \vec{m}\}$: $\vec{i}^2 = 1, \vec{m}^2 = -1, \vec{i} \cdot \vec{m} = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x - a_y b_y, \quad d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}$$

- Korištenje matematičke analize – diferencijalna geometrija
- Pojam glatke mnogostrukosti i tangencijalnog prostora
- Problem mjerenja duljine luka bilo koje glatke krivulje
- Pojam zakrivljenosti prostora
- Pojam geodetskih krivulja kao generalizacije pravaca

- Riemannova metrika g na glatkoj mnogostrukosti M je preslikavanje koje svakoj točki na mnogostrukosti pridružuje skalarni produkt na tangencijalnom prostoru u toj točki.
- Pomoću Riemannove metrike se definira duljina vektora, kut između vektora i duljina luka krivulje.

$$\|X\| = \sqrt{g(X, X)}, \quad \cos \theta = \frac{g(X, Y)}{\|X\| \cdot \|Y\|}, \quad l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

- Zakrivljenost – intuitivna interpretacija

$$K = \lim_{\text{diam } \Delta \rightarrow 0} \frac{(\alpha_\Delta + \beta_\Delta + \gamma_\Delta) - \pi}{P(\Delta)}$$