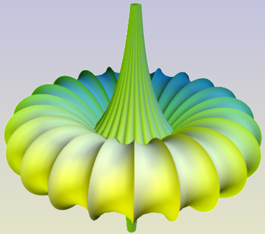
Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak



FOI, Varaždin

Sadržaj

Dio I
Dio II
Dio III
Dio IV
Dio V
Dio VI
Dio VII

Sadržaj prvog dijela

- Klasična algebra vektora
  - Uvod
  - Orijentirana dužina
  - Vektor
  - Zbrajanje vektora
  - Množenje vektora skalarom
  - Pojam baze u V^1
  - Pojam baze u V^2
  - Pojam baze u V^3
  - Lijeva i desna baza
  - Skalarni produkt vektora
  - Koordinatni prikaz skalarnog produkta
  - Vektorski produkt vektora
  - Koordinatni prikaz vektorskog produkta
  - Mješoviti produkt vektora
  - Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Sadržaj drugog dijela

- Analitička geometrija prostora
  - Stereometrija. Euklidski prostor
  - Kartezijev koordinatni sustav
  - Jednadžba ravnine
  - Udaljenost točke od ravnine
  - Geometrijska interpretacija koeficijenata A, B, C, D
  - Segmentni oblik jednadžbe ravnine
  - Položaj dviju ravnina
  - Jednadžba pravca
  - Položaj dvaju pravaca
  - Položaj pravca i ravnine
  - Udaljenost točke od pravca
  - Mimosmjerni pravci
  - Udaljenost mimosmjernih pravaca
  - Pramen ravnina
  - Snop ravnina

Sadržaj trećeg dijela

- Vektorski prostori
  - Grupoid
  - Polugrupa
  - Monoid
  - Grupa
  - Prsten
  - Polje
  - Vektorski ili linearni prostor
  - Primjeri vektorskih prostora
  - Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
  - Linearni omotač skupa
  - Baza vektorskog prostora
  - Egzistencija baze i dimenzija
  - Potprostor vektorskog prostora
  - Rang matrice
  - Koordinatizacija vektorskog prostora
  - Transformacija koordinata

Sadržaj četvrtog dijela

- Linearni operatori
  - Definicija linearnog operatora
  - Primjeri linearnih operatora
  - Zadavanje linearnog operatora
  - Izomorfizam vektorskih prostora
  - Rang i defekt
  - Matrični zapis linearnog operatora
  - Primjeri matričnih zapisa
  - Računanje slike vektora
  - Odnos matričnih zapisa istog operatora
  - Izomorfizam matrica i linearnih operatora
  - Karakteristični polinom
  - Minimalni polinom
  - Problem svojstvenih vrijednosti

Sadržaj petog dijela

- Polinomi
  - Definicija polinoma
  - Prsten polinoma
  - Jednakost polinoma
  - Određenost polinoma
  - Dijeljenje polinoma
  - Hornerov algoritam
  - Razvoj polinoma po potencijama od $x - a$
  - Najveća zajednička mjera polinoma
  - Kompleksni brojevi
  - Nultočke polinoma
  - Cjelobrojne nultočke
  - Racionalne nultočke
  - Cjelobrojne kompleksne nultočke
  - Simetrične jednadžbe
  - Cardanova formula
  - Ferrarijeva metoda

Sadržaj šestog dijela

- Funkcije više varijabli
  - Osnovne definicije
  - Nivo-linije
  - Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
  - Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
  - Limes funkcije više varijabli
  - Parcijalne derivacije
  - Parcijalne derivacije višeg reda
  - Diferencijabilnost funkcije
  - Parcijalno deriviranje složenih funkcija
  - Usmjerena derivacija
  - Teorem srednje vrijednosti
  - Derivacija implicitno zadane funkcije
  - Ekstremi funkcija dvije varijable
  - Uvjetni ekstremi

Sadržaj sedmog dijela

- Plohe u prostoru
  - Zadavanje plohe
  - Sfera i elipsoid
  - Torus
  - Rotacijske plohe
  - Pravčaste plohe
  - Tangencijalna ravnina i normala plohe

Sadržaj
Dio I
Dio II
Dio III
Dio IV
Dio V
Dio VI
Dio VII

Dio I

Klasična algebra vektora

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Sadržaj

- Klasična algebra vektora
  - Uvod
  - Orijentirana dužina
  - Vektor
  - Zbrajanje vektora
  - Množenje vektora skalarom
  - Pojam baze u V^1
  - Pojam baze u V^2
  - Pojam baze u V^3
  - Lijeva i desna baza
  - Skalarni produkt vektora
  - Koordinatni prikaz skalarnog produkta
  - Vektorski produkt vektora
  - Koordinatni prikaz vektorskog produkta
  - Mješoviti produkt vektora
  - Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvod

Veličine poput duljine, površine, volumena, mase određene su sa jednim podatkom, brojem, i zovemo ih **skalarima**. S druge strane, veličine poput brzine, sile, akceleracije nisu određene samo jednim brojem, nego je potrebno znati i njihov smjer da bi bile u potpunosti određene. Takve veličine zovemo **vektorima**. Na primjer, ako se vozite brzinom od 60 km/h, to je samo iznos te brzine, ali nekog može zanimati i u kojem smjeru se krećete, a to se samo iz ovog podatka ne može saznati.

Dvije vrste veličina

- skalari – određeni jednim brojem (površina, masa)
- vektori – iznos i smjer (sila, brzina)

Klasična algebra vektora

Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Kao što provodimo razne računske operacije sa skalarima, tako ćemo ovdje vidjeti da i sa vektorskim veličinama možemo isto provoditi razne računske operacije (zbrajanje vektora, oduzimanje vektora, skalarni produkt vektora, vektorski produkt vektora, ...) koje ćemo sve kasnije detaljno obraditi.

Utemeljitelj **vektorske algebre** je Simon Stevin (1548 - 1620), a kasnije su ju razvili Grassman (1809 - 1877) i Hamilton (1805 - 1865) i ima veoma široku primjenu u matematici, informatici, fizici i inženjerstvu.

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

Koordinatni prikaz skalarnog produkta

Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Orijentirana dužina

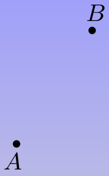
S E^3 označit ćemo naš prostor u kojem živimo, a kojeg u matematici zovemo standardni trodimenzionalni euklidski prostor.

Definicija orijentirane dužine

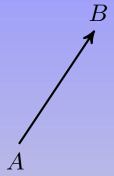
Neka su $A, B \in E^3$ bilo koje dvije točke. Uređeni par (A, B) tih točaka zovemo orijentirana dužina koju označavamo s $\overrightarrow{AB}$. Točku A zovemo početak, a B kraj orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$.

Po definiciji je orijentirana dužina uređeni par dvije točke pa to u stvarnosti nije nikakva dužina (barem ne u onom smislu što mi pod dužinom smatramo). Međutim, želimo li zorno predočiti orijentiranu dužinu, onda ju stvarno crtamo kao dužinu s time da stavimo strelicu na drugi kraj kako bismo naglasili koja je od njezinih krajnjih točaka početak, a koja kraj.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

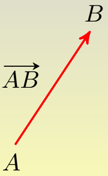


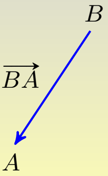
po definiciji



zorni prikaz

Kod dužina je jasno da vrijedi $\overline{AB} = \overline{BA}$ (preciznije je reći *"kongruentne dužine"* umjesto *"jednake dužine"*), ali kako je orijentirana dužina po definiciji uređeni par točaka, slijedi da je $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ jer je kod uređenog para bitno tko je prvi, a tko drugi.





Sjetimo se da za dva pravca u ravnini kažemo da su **paralelni** ako se podudaraju ili ako nemaju zajedničkih točaka. Međutim, u E^3 to neće biti dobra definicija jer tu postoje i mimosmjerni pravci (to su oni pravci koji nemaju zajedničkih točaka i nisu paralelni). O njima ćemo govoriti kasnije, ali je intuitivno jasno o čemu se radi. Stoga za dva pravca u E^3 kažemo da su paralelni ako se podudaraju ili ako nemaju zajedničkih točaka i postoji ravnina koja sadrži oba pravca. Relacija "biti paralelan" je relacija ekvivalencije na skupu svih pravaca iz E^3. Klase ekvivalencije te relacije nazivamo **smjerovima** u E^3 i govorimo da paralelni pravci određuju isti smjer, što nam je i intuitivno jasno.

Definicija smjera u E^3

Smjer u E^3 je klasa ekvivalencije međusobno paralelnih pravaca. Bilo koji pravac iz te klase određuje isti smjer.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Definicija duljine orijentirane dužine

Duljina orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ jednaka je duljini dužine $\overline{AB}$, tj. $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$.

Iz definicije slijedi da iako je $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$, ipak je $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$. Dakle, orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ imaju iste duljine, što nam je opet na intuitivnom nivou jasno i možemo prihvatiti.

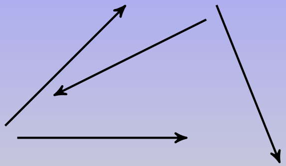
Definicija smjera orijentirane dužine

Smjer orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ određen je pravcem AB na kojemu ta orijentirana dužina leži. Ukoliko je $A = B$, smjer se ne definira.

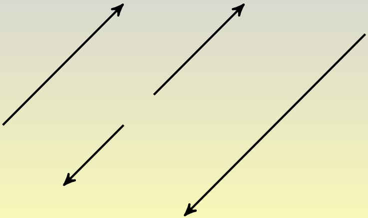
Iz definicije slijedi da dvije orijentirane dužine imaju isti smjer jedino ako leže na paralelnim pravcima. Smjer orijentirane dužine $\overrightarrow{AA}$ (kod koje je početak jednak kraju) nije definiran jer postoji beskonačno mnogo pravaca koji prolaze kroz točku A.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Na donjoj slici su nacrtane orijentirane dužine jednakih duljina, ali nikoje dvije nemaju isti smjer.

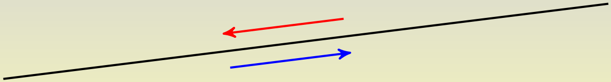


Na sljedećoj slici su nacrtane orijentirane dužine od kojih svake dvije imaju isti smjer, ali nikoje dvije nisu istih duljina.



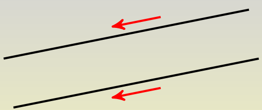
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Sada još trebamo definirati pojam **orijentacije**. To ćemo pokušati objasniti "na prste" bez prevelike matematičke strogosti. Inače se pojam orijentacije može strogo definirati na realnom vektorskom prostoru i općenitije na mnogostrukostima, ali to nama ovdje nije potrebno. Čak i na ovom elementarnom nivou mogli bismo to napraviti na razumljiv način, ali bi nas to predaleko odvelo u aksiome Euklidske geometrije, što nam ovdje nije cilj. U biti, nama samo treba pojam **orijentacije pravca**. O čemu se radi? Na zadanom pravcu se možemo kretati u dvije bitno različite strane kao što je prikazano na slici.

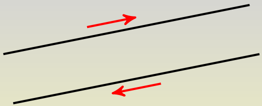


Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Odaberemo li jednu od tih strana prema kojoj ćemo se kretati, kažemo da smo na pravcu zadali orijentaciju, tj. da smo pravac orijentirali i onda takav pravac zovemo orijentirani pravac. Jasno je da svaki pravac možemo orijentirati na dva različita načina. Da bude lakše za shvatiti, o orijentiranom pravcu možete razmišljati kao o jednosmjernoj ulici, a o neorijentiranom pravcu kao o dvosmjernoj ulici. Nadalje, za dva paralelna pravca kažemo da su iste orijentacije ako određuju jednosmjernu ulicu, a suprotnih su orijentacija ako određuju dvosmjernu ulicu.



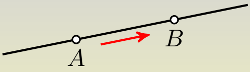
paralelni pravci
istih orijentacija



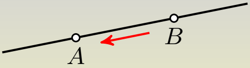
paralelni pravci
suprotnih orijentacija

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Ako pogledamo pravac kroz dvije različite točke A i B, tada je pravac AB jednak pravcu BA (nije bitan raspored točaka). Kada govorimo o orijentiranom pravcu AB, tada mislimo na pravac kroz točke A i B na kojemu je orijentacija takva da se krećemo od točke A prema točki B. Ako govorimo o orijentiranom pravcu BA, tada mislimo na pravac kroz točke A i B na kojemu je orijentacija takva da se krećemo od točke B prema točki A. Uz takav dogovor nam je bitno koja je točka prva, a koja druga jer nam taj raspored točaka odmah određuje i orijentaciju na danom pravcu.



orijentirani pravac AB

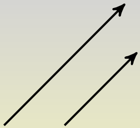


orijentirani pravac BA

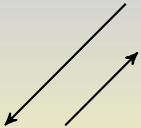
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Definicija orijentacije orijentiranih dužina

Za dvije orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ koje imaju isti smjer kažemo da su istih orijentacija ako su orijentirani pravci AB i CD istih orijentacija. Ako su orijentirani pravci AB i CD suprotnih orijentacija, tada kažemo da su orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ suprotnih orijentacija.



orijentirane dužine
istih orijentacija



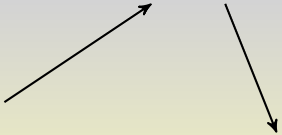
orijentirane dužine
suprotnih orijentacija

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Napomena

O orijentaciji dviju orijentiranih dužina ima smisla govoriti jedino ako one imaju isti smjer. Ukoliko su orijentirane dužine različitog smjera, tada nema smisla govoriti o njihovim orijentacijama.

Dakle, ako vas netko pita kakvih su orijentacija orijentirane dužine na donjoj slici, vaš bi odgovor trebao biti sljedeći:

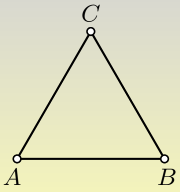


Kako su zadane orijentirane dužine različitog smjera, nema smisla govoriti o njihovim orijentacijama.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Vektor

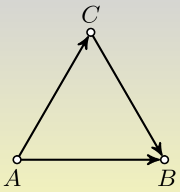
Sjetimo se da za dvije dužine kažemo da su jednake (preciznije, kongruentne) ako imaju jednake duljine. Dakle, sve dužine jednakih duljina na neki način smatramo jednakima, jedino što se one možda razlikuju svojim položajem u ravnini ili prostoru. Na primjer, stranice jednakostraničnog trokuta se sastoje od triju dužina koje su različito položene u ravnini, ali sve su one jednakih duljina pa zato kažemo da su te dužine jednake. Dakle, nije nam važno kako su te dužine nacrtane, samo su nam važne njihove duljine.



dužine $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ su međusobno jednake

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Kada ćemo za dvije orijentirane dužine reći da su jednake? Situacija neće biti ista kao i kod dužina jer orijentirane dužine nose u sebi puno više informacija od običnih dužina. Sigurno ćete se složiti da jedan od uvjeta da dvije orijentirane dužine budu jednake jest da budu jednakih duljina. Međutim, to nije i dovoljno. Trebamo još paziti da imaju isti smjer i orijentaciju. Stoga ćemo za dvije orijentirane dužine reći da su jednake ako imaju jednaku duljinu, smjer i orijentaciju. Vjerujemo da je ovo prihvatljiva i razumna definicija.



orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{CB}$ su međusobno različite

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Evo i precizne definicije u kojoj ćemo umjesto *jednake orijentirane dužine* govoriti *ekvivalentne orijentirane dužine*.

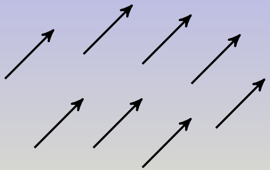
Definicija ekvivalentnih orijentiranih dužina (DEF 1)

Neka je $\mathcal{D} = E^3 \times E^3$ skup svih orijentiranih dužina u prostoru. Na skupu $\mathcal{D}$ definiramo relaciju $\equiv$ (čitaj "biti ekvivalentan") na sljedeći način:

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{AB} \text{ i } \overrightarrow{CD} \text{ imaju istu duljinu, smjer i orijentaciju}$$

Možemo zaključiti da kod jednakih orijentiranih dužina, osim na duljinu, moramo paziti da leže na paralelnim pravcima i da gledaju na istu stranu. Dakle, važno nam je i kako su položene u ravnini ili prostoru, dok nam kod običnih dužina to nije bilo bitno.

Na sljedećoj slici su nacrtane međusobno ekvivalentne (jednake) orijentirane dužine.



Sve te orijentirane dužine imaju jednake duljine, isti smjer i istu orijentaciju (strelice gledaju na istu stranu).

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Definicija ◂ DEF 1 intuitivno jasna i prihvatljiva. Međutim, postoji još jedan način na koji možemo reći kada su dvije orijentirane dužine jednake. Taj način je malo kompliciraniji, ali vidjet ćemo da na kraju dobivamo opet istu stvar. Čemu onda kompliciramo? Naime, ova prva definicija je više intuitivna i bolja što se tiče razumijevanja, a pomoću druge definicije (koju ćemo uskoro izreći) lakše dokazujemo matematičke tvrdnje. Jasno, nama nije ovdje cilj dokazivati teoreme, nego samo želimo pokazati kako se u matematici ista stvar može ponekad definirati na više različitih načina. U tome i jest ljepota matematike da možemo na različite načine razmišljati o istoj stvari.

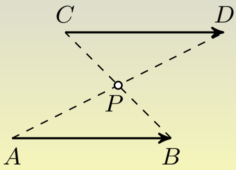
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Definicija ekvivalentnih orijentiranih dužina (DEF 2)

Neka je $\mathcal{D} = E^3 \times E^3$ skup svih orijentiranih dužina u prostoru. Na skupu $\mathcal{D}$ definiramo relaciju $\equiv$ (čitaj "biti ekvivalentan") na sljedeći način:

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \overline{AD} \text{ i } \overline{BC} \text{ imaju isto polovište}$$

Na prvi pogled izgleda komplicirano, no pogledamo li sliku bit će nam odmah jasnije o čemu se radi.



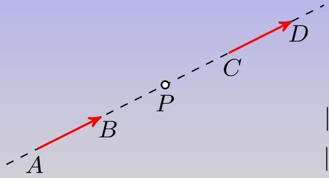
$$|AP| = |DP|$$
$$|BP| = |CP|$$

Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Ako su sve četiri točke A, B, C, D na istom pravcu, tada slika izgleda



$$|AP| = |DP|$$
$$|BP| = |CP|$$

Jasno, na slici je nacrtan samo jedan mogući raspored točaka A, B, C, D na pravcu. Nacrtajte još neke slike s drukčijim rasporedom točaka, npr. da je točka C između točaka A i B, i slično.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Sada želimo pokazati sljedeće dvije stvari.

- Ako orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ imaju istu duljinu, smjer i orijentaciju, tada dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju isto polovište.
- Ako dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju isto polovište, tada orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ imaju istu duljinu, smjer i orijentaciju.

Ako uspijemo pokazati te dvije stvari, to će značiti da su definicije ◂ DEF 1 i ◂ DEF 2 ekvivalentne, tj. da je svejedno po kojoj od njih provjeravamo jednakost orijentiranih dužina jer ćemo u svakom slučaju dobiti isti rezultat. Drugim riječima, ako su po nekoj od tih definicija dvije orijentirane dužine jednake, tada će biti jednake i po onoj drugoj definiciji, i obrnuto, ako nisu jednake po nekoj od tih definicija, tada neće biti jednake ni po onoj drugoj definiciji.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

U dokazu će nam trebati dvije karakterizacije paralelograma koje još znamo iz škole pa ćemo ih ovdje navesti jer ćemo ih naveliko koristiti i kasnije u rješavanju zadataka. Nećemo ovdje dokazivati te karakterizacije jer dokazi nisu teški i koriste teoreme o sukladnosti trokuta pa ih možete sami dokazati za vježbu.

Karakterizacija paralelograma (PAR 1)

Četverokut je paralelogram ako i samo ako ima jedan par paralelnih stranica jednakih duljina.

Karakterizacija paralelograma (PAR 2)

Četverokut je paralelogram ako i samo ako mu se dijagonale raspolavljaju.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

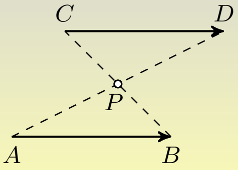
Propozicija 1.1.

Definicije DEF 1 *i* DEF 2 *su ekvivalentne.*

Dokaz.

$\boxed{\text{(DEF 1)} \Rightarrow \text{(DEF 2)}}$

Pretpostavimo da orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ imaju istu duljinu, smjer i orijentaciju. Želimo dokazati da tada dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju isto polovište. Kako po pretpostavci orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ imaju isti smjer, to znači da one leže na paralelnim pravcima AB i CD. Pretpostavimo da su ti pravci različiti pa imamo situaciju kao na slici.



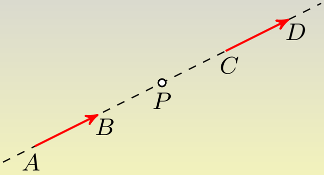
Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Promotrimo četverokut $ABDC$. U tom je četverokutu po pretpostavci $AB \parallel CD$ i $|AB| = |CD|$. Dakle, $ABDC$ je četverokut s parom paralelnih stranica jednakih duljina. Prema PAR 1 je $ABDC$ paralelogram. No, tada se prema PAR 2 dijagonale paralelograma raspolavljaju, tj. dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju isto polovište P.

Pogledajmo još slučaj da se pravci AB i CD podudaraju. Tada točke A, B, C, D leže na jednom pravcu i pretpostavimo da je raspored točaka kao na donjoj slici.



Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Neka je točka P polovište dužine $\overline{BC}$. Tada je $|BP| = |CP|$. Tvrdimo da je točka P također polovište dužine $\overline{AD}$.

Zbog $|AB| = |CD|$ i $|BP| = |CP|$ dobivamo

$$|AP| = |AB| + |BP| = |CD| + |CP| = |DP|$$

pa je P zaista polovište i od dužine $\overline{AD}$. Stoga dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju i u ovom slučaju isto polovište. Analogno se provjeri da tvrdnja vrijedi i za drukčiji raspored točaka A, B, C, D na pravcu. Napravite to za vježbu.

$\boxed{\text{(DEF 2)} \Rightarrow \text{(DEF 1)}}$

Pretpostavimo da dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju isto polovište P. Tvrdimo da orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ imaju istu duljinu, smjer i orijentaciju. Pretpostavimo najprije da su pravci AD i BC različiti. Tada imamo situaciju kao na sljedećoj slici.

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

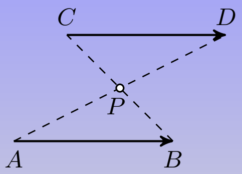
Koordinatni prikaz skalarnog produkta

Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

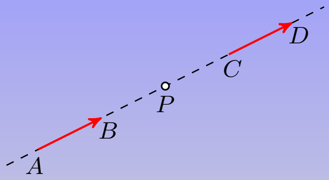
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Promotrimo li četverokut $ABDC$, uočavamo da je to četverokut kojemu se dijagonale raspolavljaju pa je on prema PAR 2 paralelogram. Tada je $AB \parallel CD$ i $|AB| = |CD|$. Stoga orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ imaju isti smjer i jednaku duljinu. Sa slike je jasno da su i istih orijentacija.

Pogledajmo još slučaj kad se pravci AD i BC podudaraju. Tada točke A, B, C, D leže na jednom pravcu i pretpostavimo da je raspored točaka kao na sljedećoj slici.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Tada orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ imaju isti smjer, a sa slike je jasno da imaju istu orijentaciju. Treba još vidjeti da imaju i jednake duljine. Znamo da je $|AP| = |DP|$ i $|BP| = |CP|$ pa iz toga slijedi

$$|AB| = |AP| - |BP| = |DP| - |CP| = |CD|.$$

Stoga orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ imaju i istu duljinu. Analogno se vidi da tvrdnja vrijedi i za drugačije rasporede točaka A, B, C, D na pravcu. Napravite to za vježbu. ♡

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Iz definicije DEF 1 je jasno da je relacija $\equiv$ refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija pa je to onda jedna relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{D}$ svih orijentiranih dužina u prostoru. Klase te relacije zovemo vektorima.

Propozicija 1.2.

Relacija $\equiv$ je relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{D} = E^3 \times E^3$ svih orijentiranih dužina u prostoru.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Definicija vektora

Neka je $\overrightarrow{AB} \in \mathcal{D}$ orijentirana dužina. Vektor $\left[\overrightarrow{AB}\right]$ je skup svih orijentiranih dužina iz $\mathcal{D}$ koje su ekvivalentne s orijentiranom dužinom $\overrightarrow{AB}$, tj.

$$\left[\overrightarrow{AB}\right] = \left\{\overrightarrow{CD} \in \mathcal{D} : \overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{AB}\right\}.$$

Dakle, vektor je element kvocijentnog skupa $\mathcal{D}/_{\equiv}$ kojeg ćemo kratko označavati s V^3.

Definicija vektora na prvi pogled izgleda komplicirano pa ćemo ju sada malo intuitivno približiti. O čemu se radi? Naime, odaberemo li neku orijentiranu dužinu $\overrightarrow{AB}$, tada postoji još beskonačno mnogo orijentiranih dužina koje su ekvivalentne (jednake) s orijentiranom dužinom $\overrightarrow{AB}$. Umjesto da radimo s beskonačno mnogo takvih

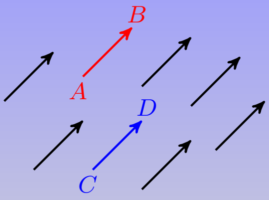
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

ekvivalentnih objekata, mi ih jednostavno poistovjećujemo i gledamo na njih kao na jedan objekt kojeg onda zovemo vektor i označavamo ga s $\left[\overrightarrow{AB}\right]$. Uglate zagrade označavaju da se radi o vektoru, tj. o skupu svih orijentiranih dužina koje su ekvivalentne s orijentiranom dužinom $\overrightarrow{AB}$. Složit ćete se da je lakše raditi s jednim objektom, nego s beskonačno mnogo njih.

Za orijentiranu dužinu $\overrightarrow{AB}$ kažemo daje **predstavnik vektora** $\left[\overrightarrow{AB}\right]$. Jasno, predstavnik vektora $\left[\overrightarrow{AB}\right]$ može biti i bilo koja druga orijentirana dužina $\overrightarrow{CD}$ koja je ekvivalentna s $\overrightarrow{AB}$.

Kada ne želimo eksplicitno naglasiti niti jednog predstavnika, tada vektor označavamo najčešće s malim slovima iznad kojih pišemo strelice, npr. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$, $\vec{u}, \ldots$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



$$\vec{v} = \left[\overrightarrow{AB}\right] = \left[\overrightarrow{CD}\right]$$

Na slici je prikazan vektor $\vec{v}$. To su sve nacrtane orijentirane dužine. Naravno, nacrtane su samo neke ekvivalentne orijentirane dužine jer ih ima beskonačno mnogo takvih. Jedan predstavnik tog vektora je orijentirana dužina $\overrightarrow{AB}$, ali isto tako predstavnik tog vektora je i orijentirana dužina $\overrightarrow{CD}$. Jasno, za predstavnika tog vektora možemo uzeti i bilo koju drugu orijentiranu dužinu koja ima istu duljinu, smjer i orijentaciju kao i orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Važno je zapamtiti sljedeće.

Važna napomena

Kada govorimo orijentirana dužina $\overrightarrow{AB}$, tada mislimo samo na tu jednu jedinu spomenutu orijentiranu dužinu. Kada govorimo o vektoru $\left[\,\overrightarrow{AB}\,\right]$, tada mislimo na orijentiranu dužinu $\overrightarrow{AB}$ i na sve ostale orijentirane dužine koje imaju istu duljinu, smjer i orijentaciju kao i orijentirana dužina $\overrightarrow{AB}$.

Iako pokušavamo biti pedantni oko pojmova orijentirana dužina i vektor, često vektor poistovjećujemo s orijentiranom dužinom, tj. vektor poistovjećujemo s njegovim predstavnikom. Stoga kod označavanja vektora ispuštamo uglate zagrade i govorimo vektor $\overrightarrow{AB}$ i na taj način vektor poistovjećujemo s orijentiranom dužinom (njegovim predstavnikom).

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

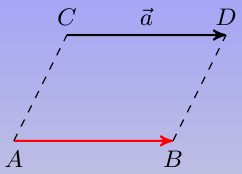
Propozicija 1.3.

Neka je $\vec{a} \in V^3$ *bilo koji vektor i* $A \in E^3$ *bilo koja točka. Tada postoji jedinstvena točka* $B \in E^3$ *takva da je* $\vec{a} = \left[\,\overrightarrow{AB}\,\right]$.

Dokaz.

Neka je $\overrightarrow{CD}$ neki predstavnik vektora $\vec{a}$, tj. $\overrightarrow{CD} \in \vec{a}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da točka A ne leži na pravcu CD (u protivnom uzmemo nekog drugog predstavnika vektora $\vec{a}$). Konstruiramo paralelogram sa susjednim stranicama $\overline{CD}$ i $\overline{CA}$. Tada je četvrti vrh tog paralelograma tražena točka B. ♡

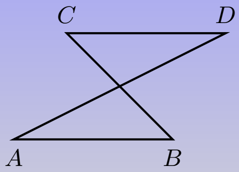
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



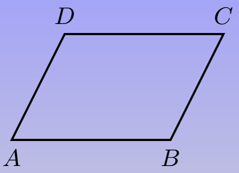
Kažemo još da smo vektor $\vec{a}$ **nanijeli** iz točke A.

U ovom trenutku je dobro da raščistimo jednu stvar vezano uz poredak vrhova. Naviknuti smo govoriti "četverokut $ABCD$ je paralelogram". Međutim, pogledamo li gornju sliku, tada $ABCD$ nije paralelogram. Naime, na gornjoj slici je zapravo četverokut $ABDC$ paralelogram. Dakle, bitan je poredak kojim navodimo vrhove. Ako uz gornji položaj točaka navedemo raspored točaka $ABCD$, tada slika izgleda

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



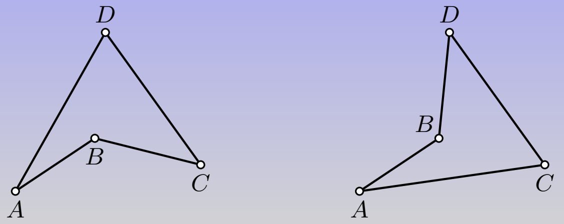
pa $ABCD$ sigurno ne bismo zvali četverokutom, a niti paralelogramom. Dakle, s rasporedom točaka propisujemo kojim ćemo redoslijedom spajati točke. Jasno, neki od različitih rasporeda točaka mogu određivati isti paralelogram, a neki od njih ne određuju uopće četverokut u što smo se upravo i uvjerili.



Kako je prikazano na slici, ispravno je reći: paralelogram $ABCD$, paralelogram $BCDA$, paralelogram $CDAB$, paralelogram $DABC$, paralelogram $ADCB$, paralelogram $DCBA$, paralelogram $CBAD$, paralelogram $BADC$.

Dakle, sve ovisi o tome s kojim ćemo vrhom početi i u kojem ćemo smjeru obilaziti vrhove (u smjeru suprotnom od kazaljke na satu – **pozitivni smjer**, ili u smjeru kazaljke na satu – **negativni smjer**). Uglavnom se preferira pozitivni smjer, ali nije to neko pisano pravilo.

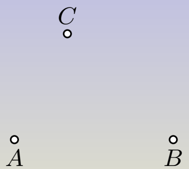
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Uočite da su na obje slike točke A, B, C i D u istim položajima, ali četverokuti $ABCD$ i $ACDB$ su međusobno različiti.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

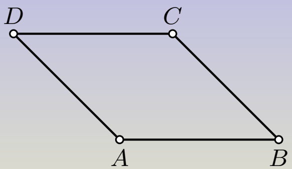
Točke $A, B, C, \ldots$



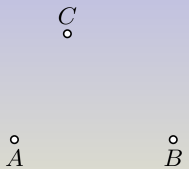
prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Paralelogram $ABCD$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

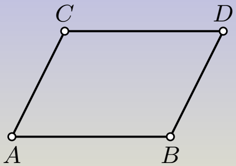


Točke $A, B, C, \ldots$



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Paralelogram $ABDC$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Definicija duljine vektora

Duljina ili modul vektora $\vec{v} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$ iz V^3 jednaka je duljini orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$. Duljinu vektora $\vec{v}$ označavamo s $|\vec{v}|$.

Definicija smjera vektora

Smjer vektora $\vec{v} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$ iz V^3 jednak je smjeru orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$. Ukoliko je $\vec{v} = \vec{0}$ smjer se ne definira.

Definicija orijentacije vektora

Orijentacija vektora $\vec{v} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$ iz V^3 jednaka je orijentaciji orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$. Dva vektora $\vec{v} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$ i $\vec{w} = \left[\overrightarrow{CD}\right]$ koji su istog smjera su istih orijentacija ako su orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ istih orijentacija, u protivnom su suprotnih orijentacija.

Iz definicije DEF 1 je jasno da duljina, smjer i orijentacija vektora $\vec{v} \in V^3$ ne ovisi o izboru njegovog predstavnika. Također, vrijedi sljedeća tvrdnja.

Propozicija 1.4.

Svaki vektor iz V^3 jednoznačno je određen svojom duljinom, smjerom i orijentacijom.

Drugim riječima, dva su vektora jednaka ako i samo ako imaju istu duljinu, smjer i orijentaciju.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

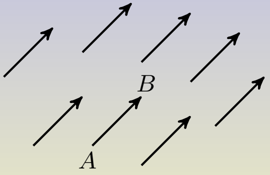
Iz bilo koje od definicija DEF 1 ili DEF 2 slijedi da je $\overrightarrow{AA} \equiv \overrightarrow{BB}$ za svake dvije točke $A, B \in E^3$. Dakle, sve orijentirane dužine kojima je početak jednak kraju su međusobno ekvivalentne, tj. pripadaju istoj klasi ekvivalencije koju zovemo **nulvektor** i označavamo s $\vec{0}$. Lako se geometrijski uvjeriti da u toj klasi nema drukčijih orijentiranih dužina, tj. ako je $\overrightarrow{AB} \in \vec{0}$, tada mora biti $A = B$. Isto tako je jasno da je duljina nulvektora jednaka nula i to je jedini vektor duljine nula.

Definicija nulvektora

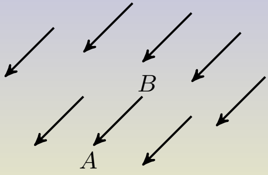
$$\vec{0} = \left[\overrightarrow{TT}\right] = \left\{\overrightarrow{XX} : X \in E^3\right\}$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Neka je $\vec{a} \in V^3$ bilo koji vektor. Ako svim orijentiranim dužinama koje pripadaju vektoru $\vec{a}$ zamijenimo početak i kraj, dobit ćemo opet klasu ekvivalentnih orijentiranih dužina, tj. dobit ćemo opet vektor kojeg zovemo **suprotni vektor** vektora $\vec{a}$ i označavamo ga s $-\vec{a}$. Ako je $\vec{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$, tada je $-\vec{a} = \left[\overrightarrow{BA}\right]$.



$\vec{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$



$-\vec{a} = \left[\overrightarrow{BA}\right]$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Definicija suprotnog vektora

Suprotni vektor vektora $\vec{a}$ je vektor $-\vec{a}$ koji ima istu duljinu i smjer kao i vektor $\vec{a}$, ali suprotnu orijentaciju od vektora $\vec{a}$.

Kao što smo već rekli, ako je $\overrightarrow{AB}$ predstavnik vektora $\vec{a}$, tada je $\overrightarrow{BA}$ predstavnik vektora $-\vec{a}$. Također pišemo $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ i govorimo da su orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ suprotne.

Isto tako je jasno sljedeće: vektor $-\vec{a}$ je suprotni vektor vektora $\vec{a}$, a vektor $\vec{a}$ je suprotni vektor vektora $-\vec{a}$. Dakle, vrijedi

$$-(-\vec{a}) = \vec{a}$$

Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Zbrajanje vektora

Došlo je vrijeme da konačno definiramo i neke operacije s vektorima. Prva od tih operacija je zbrajanje vektora. Prije nego krenemo na definiciju zbrajanja vektora, uvest ćemo pojam binarne operacije.

Definicija binarne operacije

Neka je S neprazan skup. Binarna operacija na skupu S je svako preslikavanje $f : S \times S \to S$.

Jednostavno rečeno, binarna operacija uzima dva elementa iz nekog skupa i pridružuje im opet neki element iz tog istog skupa (bitno je da se sve događa unutar istog skupa).

Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Da bude jasnije, sjetimo se npr. zbrajanja prirodnih brojeva. Zbrajanje prirodnih brojeva je binarna operacija

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

koja dvama prirodnim brojevima pridružuje opet neki prirodni broj. Na primjer, $+(5,3) = 8$, tj. prirodnim brojevima 5 i 3 se pridružuje prirodni broj 8. Jasno, nismo naviknuti pisati to na taj način, nego kao $5 + 3 = 8$, tj. binarnu operaciju stavljamo između ta dva elementa na koje ona djeluje. To radimo i za bilo koju drugu binarnu operaciju pa ćemo tako i raditi za sve binarne operacije koje ćemo definirati na vektorima iz V^3. Riječ "binarna" nam govori da operacija djeluje na dva elementa iz nekog skupa i njima pridružuje opet element iz tog skupa. Postoje i n-arne operacije koje djeluju na n elemenata iz nekog skupa i njima pridružuju neki element iz tog skupa.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

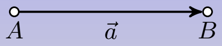
Definicija zbrajanja vektora (pravilo trokuta)

Zbrajanje vektora je binarna operacija $+ : V^3 \times V^3 \to V^3$ definirana s

$$\vec{a} + \vec{b} = [\,\overrightarrow{AB}\,] + [\,\overrightarrow{BC}\,] \stackrel{\text{def}}{=} [\,\overrightarrow{AC}\,]$$

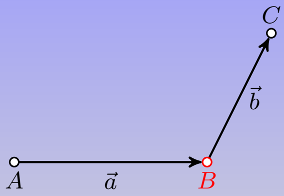
Vidimo da je zbrajanje vektora definirano preko njihovih predstavnika i to tako da uzmemo neki predstavnik prvog vektora, a za drugi vektor uzmemo onaj predstavnik koji ima početak u točki u kojoj je kraj odabranog predstavnika za prvi vektor (to je moguće napraviti prema propoziciji 1.3) i tada samo ispustimo "srednju točku" te na taj način dobivamo predstavnika za zbroj zadana dva vektora. Ovo pravilo za zbrajanje vektora se zove pravilo trokuta, a samo ime će biti jasnije sa sljedeće slike.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



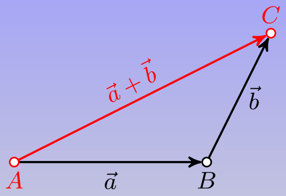
Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Na kraj vektora $\vec{a}$ nanesemo vektor $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Zbrajanje vektora (pravilo paralelograma)

Neka su $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$ i $\vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$ vektori čiji predstavnici imaju početak u istoj točki O. Neka je C točka takva da je $OACB$ paralelogram. Tada je

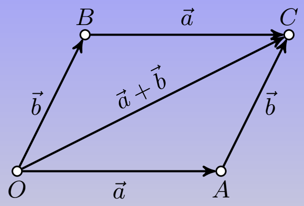
$$\vec{a} + \vec{b} = [\overrightarrow{OA}] + [\overrightarrow{OB}] = [\overrightarrow{OC}].$$

Naime, kako je $OACB$ paralelogram, tada je $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$ pa onda iz pravila trokuta slijedi

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}.$$

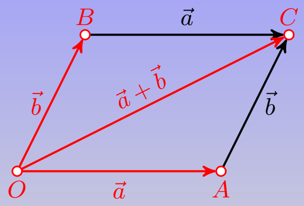
Zaključujemo da je ovo ispravno pravilo za zbrajanje vektora čiji predstavnici imaju početak u istoj točki.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



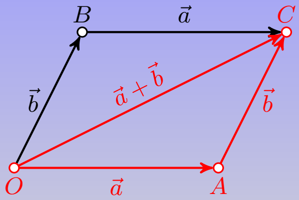
Četverokut $OACB$ je paralelogram.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



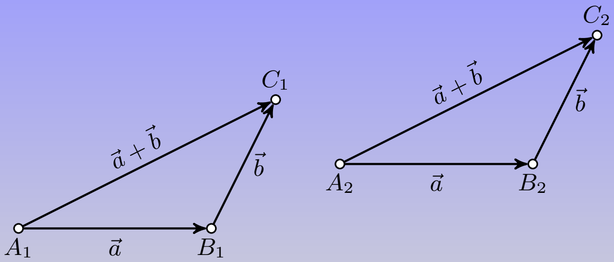
Pravilo paralelograma: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Pravilo trokuta: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



$$\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{A_1C_1}$$

$$\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{B_2C_2} = \overrightarrow{A_2C_2}$$

Trokuti $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ su sukladni, $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$, pa su orijentirane dužine $\overrightarrow{A_1C_1}$ i $\overrightarrow{A_2C_2}$ ekvivalentne, tj. to su predstavnici istog vektora. Dakle, **zbrajanje vektora je dobro definirano, tj. ne ovisi o izboru njihovih predstavnika.**

Spomenuli smo pravilo trokuta i pravilo paralelograma za zbrajanje vektora. Međutim, što ako vektori koje zbrajamo imaju isti smjer? Tada se sve događa na jednom pravcu pa nemamo trokut, niti paralelogram, odnosno govorimo da se radi o **degeneriranom trokutu** i **degeneriranom paralelogramu**.

Pravilo trokuta se odvija na isti način kod degeneriranog trokuta kao i kod "pravog" trokuta, a kod degeneriranog paralelograma je situacija nešto drukčija od opisanog pravila za "pravi" paralelogram. Međutim, konstrukcija koju ćemo opisati za degenerirani paralelogram može se bez problema primijeniti i na "pravi" paralelogram.

Ako vektori imaju isti smjer, tada ima smisla gledati i njihove orijentacije. Stoga ćemo na sljedećih nekoliko primjera ilustrirati zbrajanje takvih vektora pravilom trokuta i pravilom paralelograma u slučaju kad oni imaju iste, odnosno suprotne orijentacije.

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

Koordinatni prikaz skalarnog produkta

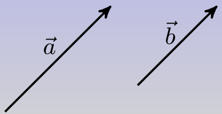
Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

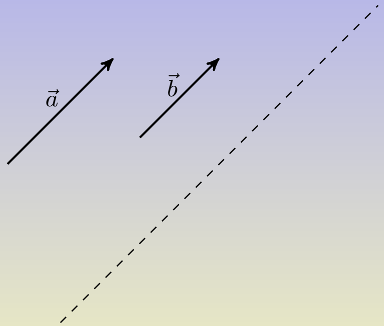
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pravilo trokuta. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i iste orijentacije



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pravilo trokuta. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i iste orijentacije



Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

Koordinatni prikaz skalarnog produkta

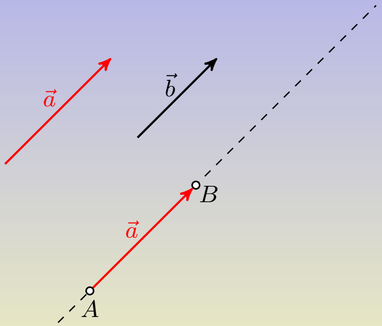
Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

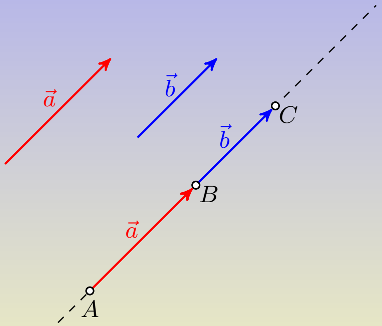
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pravilo trokuta. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i iste orijentacije

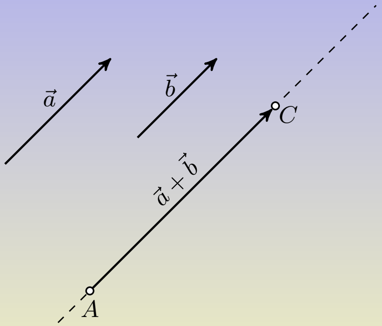


Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pravilo trokuta. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i iste orijentacije

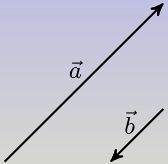


Pravilo trokuta. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i iste orijentacije

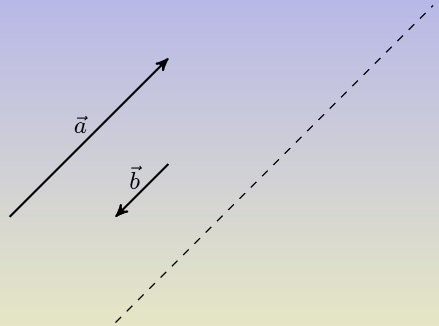


Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pravilo trokuta. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i suprotne orijentacije



Pravilo trokuta. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i suprotne orijentacije



Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

Koordinatni prikaz skalarnog produkta

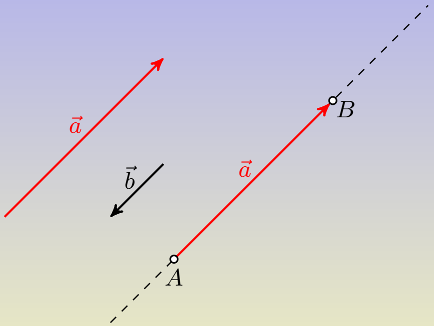
Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

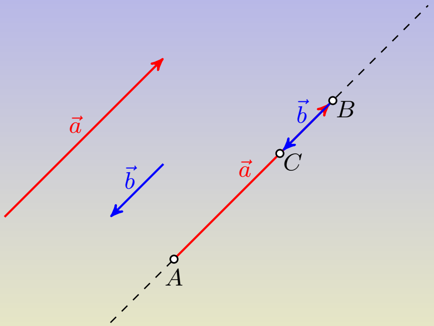
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pravilo trokuta. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i suprotne orijentacije



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pravilo trokuta. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i suprotne orijentacije



Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

Koordinatni prikaz skalarnog produkta

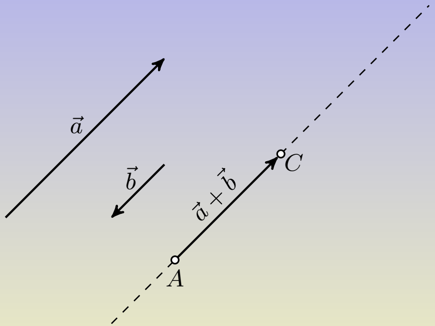
Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pravilo trokuta. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i suprotne orijentacije



Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

Koordinatni prikaz skalarnog produkta

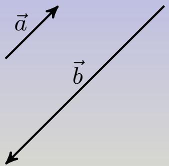
Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

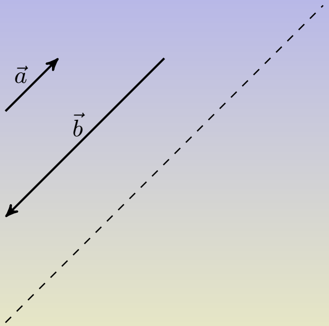
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pravilo trokuta. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i suprotne orijentacije



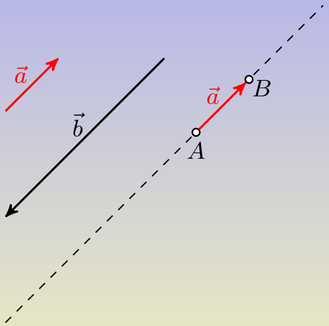
Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pravilo trokuta. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i suprotne orijentacije



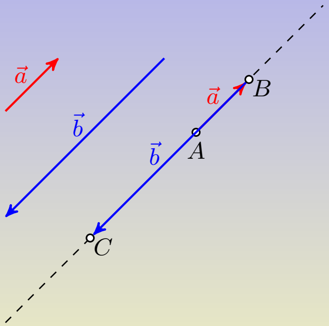
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pravilo trokuta. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i suprotne orijentacije

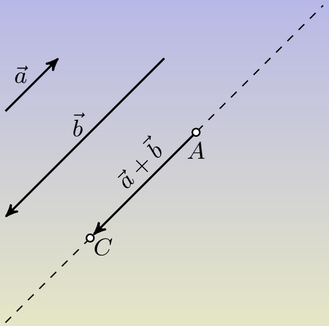


Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

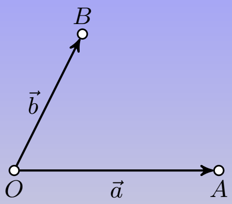
Pravilo trokuta. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i suprotne orijentacije



Pravilo trokuta. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i suprotne orijentacije

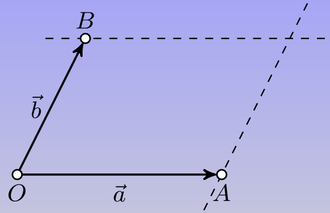


Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



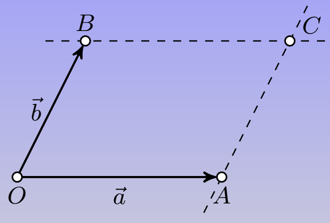
Prisjetimo se prije opisanog pravila paralelograma. Da bismo zbrojili vektore $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ koji imaju početak u istoj točki O,

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



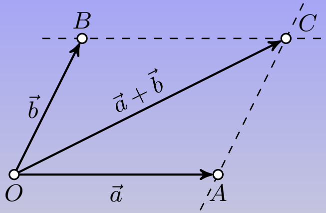
Prisjetimo se prije opisanog pravila paralelograma. Da bismo zbrojili vektore $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ koji imaju početak u istoj točki O, točkama A i B povučemo paralele s pravcima OA i OB.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Prisjetimo se prije opisanog pravila paralelograma. Da bismo zbrojili vektore $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ koji imaju početak u istoj točki O, točkama A i B povučemo paralele s pravcima OA i OB. Te paralele se sijeku u točki C.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

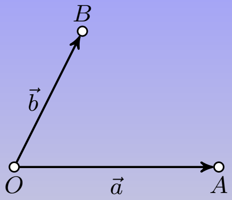


Prisjetimo se prije opisanog pravila paralelograma. Da bismo zbrojili vektore $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ koji imaju početak u istoj točki O, točkama A i B povučemo paralele s pravcima OA i OB. Te paralele se sijeku u točki C. Tada je $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OC}$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

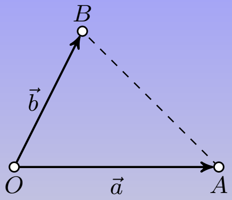
Ovakva konstrukcija neće proći ako su vektori istog smjera jer se pravci OA i OB podudaraju pa se i paralele s tim pravcima podudaraju i nemoguće je na taj način doći do točke C. Međutim, možemo do točke C doći i bez povlačenja paralela ako se sjetimo jedne ranije spomenute karakterizacije paralelograma. Po toj karakterizaciji, četverokut je paralelogram ako i samo ako mu se dijagonale raspolavljaju. PAR 2 Ova karakterizacija nam omogućuje sljedeću konstrukciju zbroja dva vektora pravilom paralelograma.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Opišimo novu konstrukciju zbroja vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ pravilom paralelograma.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

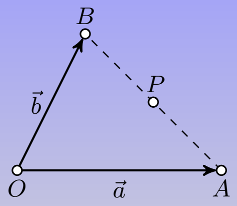


Opišimo novu konstrukciju zbroja vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ pravilom paralelograma. Spojimo točke A i B

Odabrana poglavlja matematike

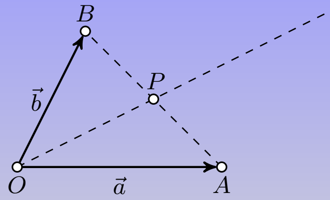
prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



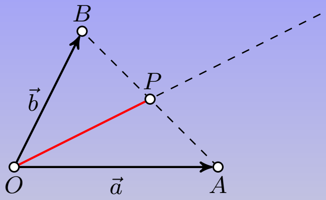
Opišimo novu konstrukciju zbroja vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ pravilom paralelograma. Spojimo točke A i B te pronađemo polovište P dužine $\overline{AB}$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



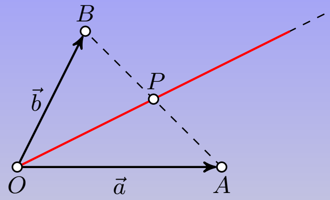
Opišimo novu konstrukciju zbroja vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ pravilom paralelograma. Spojimo točke A i B te pronađemo polovište P dužine $\overline{AB}$. Povučemo polupravac OP s početkom u točki O.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



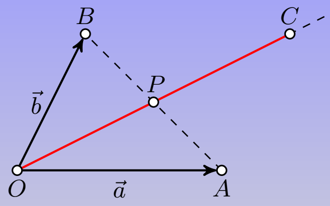
Opišimo novu konstrukciju zbroja vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ pravilom paralelograma. Spojimo točke A i B te pronađemo polovište P dužine $\overline{AB}$. Povučemo polupravac OP s početkom u točki O. Dužinu $\overline{OP}$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



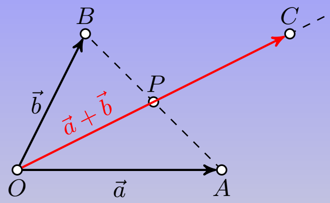
Opišimo novu konstrukciju zbroja vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ pravilom paralelograma. Spojimo točke A i B te pronađemo polovište P dužine $\overline{AB}$. Povučemo polupravac OP s početkom u točki O. Dužinu $\overline{OP}$ nanesemo na povučeni polupravac od točke P

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Opišimo novu konstrukciju zbroja vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ pravilom paralelograma. Spojimo točke A i B te pronađemo polovište P dužine $\overline{AB}$. Povučemo polupravac OP s početkom u točki O. Dužinu $\overline{OP}$ nanesemo na povučeni polupravac od točke P pa dobivamo traženu točku C.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Opišimo novu konstrukciju zbroja vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ pravilom paralelograma. Spojimo točke A i B te pronađemo polovište P dužine $\overline{AB}$. Povučemo polupravac OP s početkom u točki O. Dužinu $\overline{OP}$ nanesemo na povučeni polupravac od točke P pa dobivamo traženu točku C. Tada je $\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{OC}$.

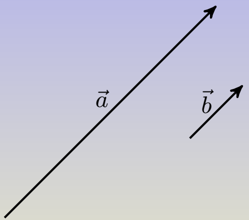
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Opisana konstrukcija može se primijeniti na vektore koji imaju isti smjer. Postupak je potpuno isti, jedino što se sve događa na jednom pravcu pa imamo degenerirani paralelogram. Pogledajmo na primjerima kako to izgleda.

Uzet ćemo dva primjera, u prvom su vektori istog smjera i iste orijentacije, a u drugom su istog smjera i suprotnih orijentacija. Možemo još razlikovati slučajeve da prvi ima veću ili manju duljinu od drugog, ali nećemo pretjerivati jer u svakom slučaju konstrukcija je ista, jedino slika može drukčije izgledati, tj. raspored točaka može biti malo drukčiji. Za vježbu možete sami napraviti sve te slučajeve da vidite da li ste shvatili opisanu konstrukciju.

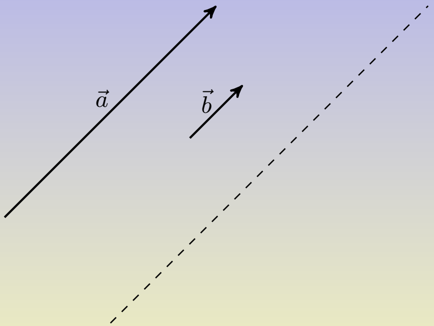
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pravilo paralelograma. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i iste orijentacije



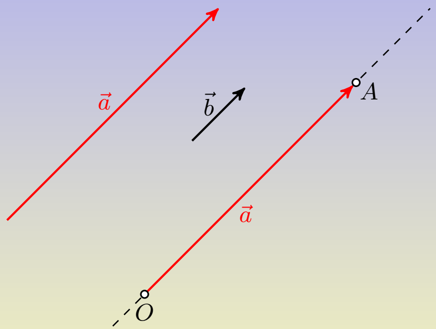
Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pravilo paralelograma. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i iste orijentacije



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pravilo paralelograma. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i iste orijentacije

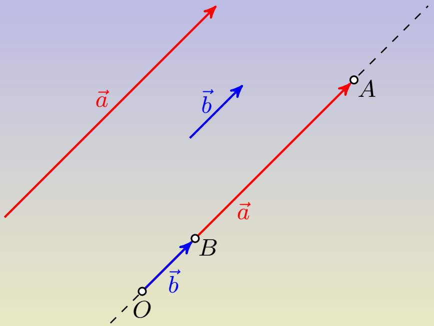


Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pravilo paralelograma. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i iste orijentacije

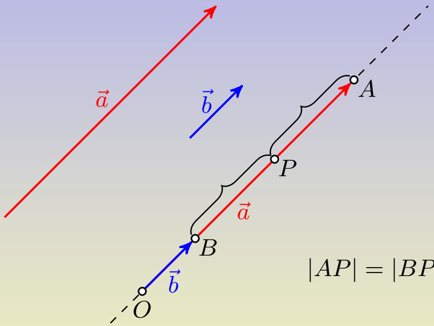


Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

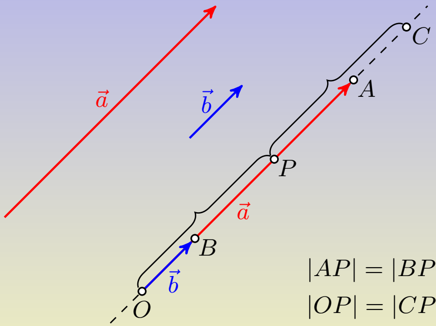
Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pravilo paralelograma. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i iste orijentacije



$$|AP| = |BP|$$

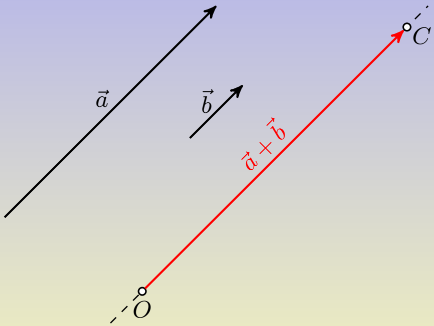
Pravilo paralelograma. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i iste orijentacije



$$|AP| = |BP|$$
$$|OP| = |CP|$$

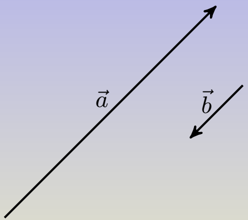
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pravilo paralelograma. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i iste orijentacije



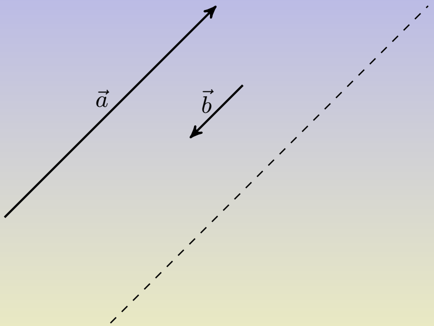
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pravilo paralelograma. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i suprotne orijentacije



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pravilo paralelograma. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i suprotne orijentacije

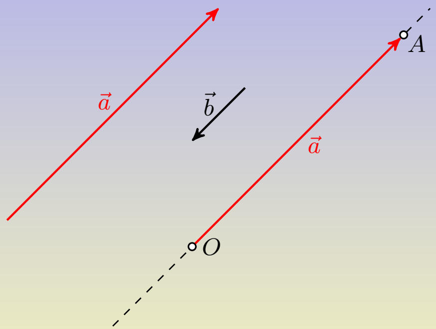


Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

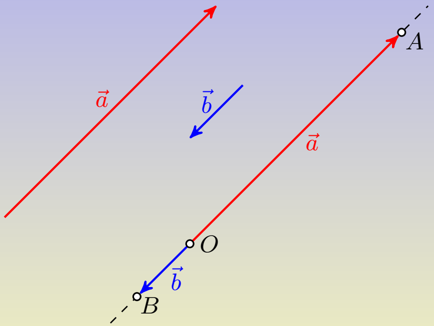
Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pravilo paralelograma. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i suprotne orijentacije



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pravilo paralelograma. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i suprotne orijentacije

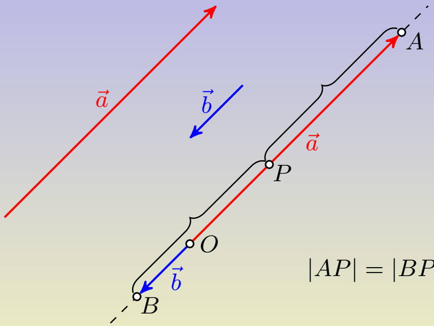


Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

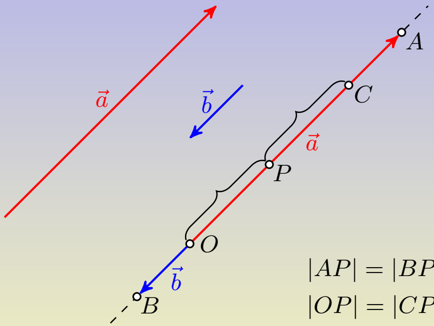
Pravilo paralelograma. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i suprotne orijentacije



$$|AP| = |BP|$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

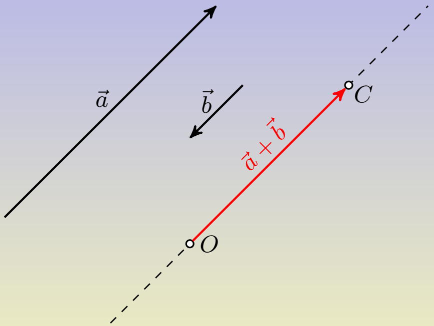
Pravilo paralelograma. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i suprotne orijentacije



$$|AP| = |BP|$$
$$|OP| = |CP|$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pravilo paralelograma. $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera i suprotne orijentacije



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Zadatak 1.1 (Riješite ga u GeoGebri).

Nacrtajte dva vektora koji imaju različiti smjer i zatim konstruirajte njihovu sumu pravilom trokuta i pravilom paralelograma te njihovu razliku. Isto tako nacrtajte dva vektora istog smjera i zatim konstruirajte njihovu sumu pravilom trokuta i pravilom paralelograma. Napravite različite slučajeve u ovisnosti o orijentacijama i duljinama zadanih vektora. Pogledajte koje sve naredbe pruža `GeoGebra` *i razmislite na koji način ih možete iskoristiti kod svojih konstrukcija. Na primjer, kako prenijeti neku zadanu dužinu na neki drugi pravac iz zadane točke, kako konstruirati paralelu sa zadanim pravcem kroz zadanu točku i slično. Neke od tih temeljnih konstrukcija je moguće izvesti na više načina u* `GeoGebri`*. Pokušajte malo promijeniti početne vektore. Ako ste sve ispravno radili, tada će vam se automatski promijeniti i konstruirane sume i razlike. Poigrajte se malo s time.*

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Teorem 1.1 (Svojstva zbrajanja vektora).

Zbrajanje vektora ima sljedeća svojstva:

1. **Asocijativnost**

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}), \quad \forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$$

2. **Postoji neutralni element, nulvektor**

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}, \quad \forall\, \vec{a} \in V^3$$

3. **Svaki vektor ima suprotni vektor**

$$\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$$

4. **Komutativnost**

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}, \quad \forall\, \vec{a}, \vec{b} \in V^3$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Dokaz.

1. **Asocijativnost**

   Kako prema propoziciji 1.3 svaki vektor možemo nanijeti iz proizvoljne točke, tada za vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ biramo predstavnike $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$. Iz pravila trokuta slijedi

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

   pa je asocijativnost zbrajanja vektora dokazana.

2. **Postoji neutralni element, nulvektor**

   Uzmemo da je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, a $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$ pa prema pravilu trokuta imamo

$$\vec{a} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$$
$$\vec{0} + \vec{a} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$$

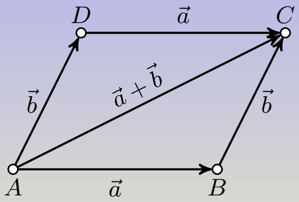
3. **Svaki vektor ima suprotni vektor**

   Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Tada je $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$. Prema pravilu trokuta je

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$
$$(-\vec{a}) + \vec{a} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$$

4. **Komutativnost**

Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Tada je prema pravilu trokuta $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$. S druge strane, neka je točka D takva da je $ABCD$ paralelogram.



Tada je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ i $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ iz čega slijedi

$$\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}.$$

♡

Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Napomena.

Ako je binarna operacija na skupu S asocijativna, komutativna, ima neutralni element i svaki element ima suprotni element, tada kažemo da je skup S uz tu binarnu operaciju **Abelova** ili **komutativna grupa**. Kasnije ćemo preciznije i detaljnije govoriti o grupama kao i o ostalim matematičkim strukturama.

Korolar 1.1.

Skup V^3 je uz zbrajanje vektora Abelova grupa.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Kako vrijedi asocijativnost zbrajanja vektora, kod zbrajanja više vektora ne treba pisati zagrade jer je svejedno na koji ćemo ih način grupirati i tako grupirane zbrojiti. Zbog komutativnosti im smijemo čak i mijenjati redoslijed. Postavlja se pitanje na koji način možemo zbrojiti brzo više vektora. Radi jednostavnosti pokazat ćemo to na primjeru četiri vektora, a taj se postupak može primijeniti i na bilo koji konačni broj vektora.

Pretpostavimo da želimo odrediti zbroj $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$. Odaberimo predstavnike vektora na sljedeći način:

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}, \quad \vec{b}=\overrightarrow{BC}, \quad \vec{c}=\overrightarrow{CD}, \quad \vec{d}=\overrightarrow{DE}.$$

Takav odabir predstavnika je moguć zbog ◂ propozicije 1.3.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Višestrukom primjenom pravila trokuta dobivamo

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} =$$

$$= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} =$$

$$= \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right) + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Višestrukom primjenom pravila trokuta dobivamo

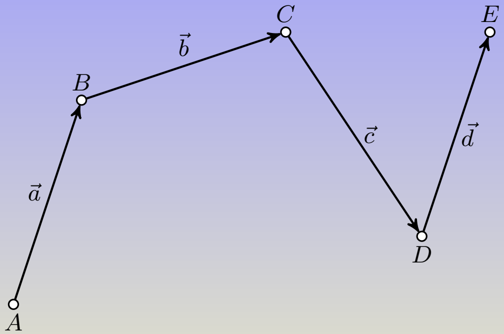
$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=$$

$$=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=$$

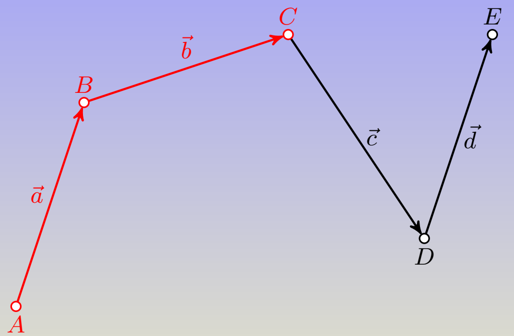
$$=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$$

Ako malo bolje pogledamo, predstavnik vektora $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ ima početak u početnoj točki predstavnika prvog vektora iz zbroja, a kraj u krajnjoj točki predstavnika posljednjeg vektora iz zbroja.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

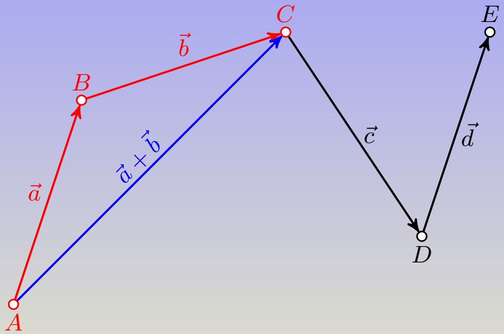
Koordinatni prikaz skalarnog produkta

Vektorski produkt vektora

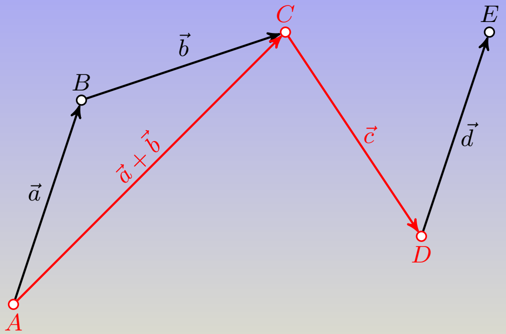
Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

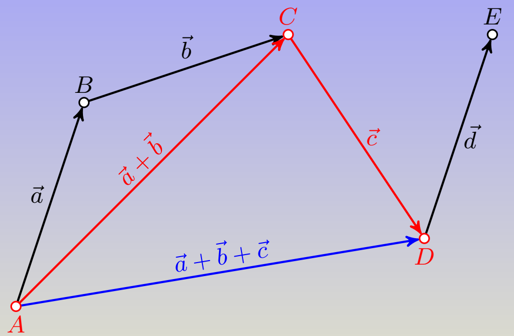
Koordinatni prikaz skalarnog produkta

Vektorski produkt vektora

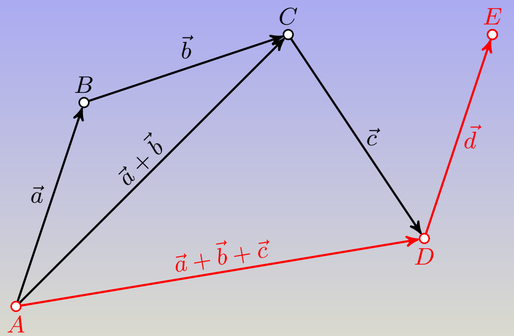
Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

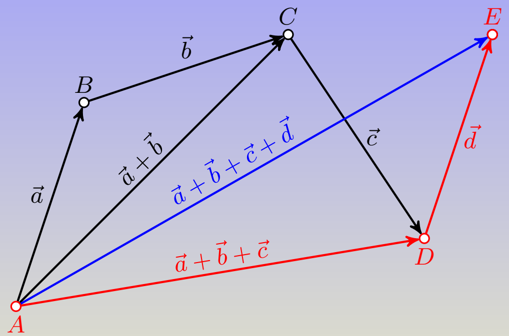
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

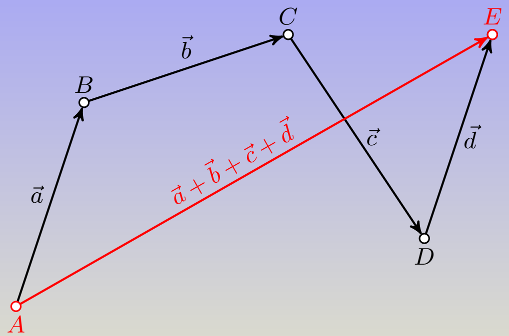
Koordinatni prikaz skalarnog produkta

Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Sjetimo se, kod brojeva oduzimanje predstavlja dodavanje suprotnog broja, tj. $a - b = a + (-b)$. Slično je i kod vektora.

Definicija oduzimanja vektora

Za $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ definiramo njihovu razliku s

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right).$$

Dakle, kod vektora oduzimanje predstavlja dodavanje suprotnog vektora. Postavlja se pitanje da li postoji neko pravilo pomoću kojeg možemo brzo oduzeti dva vektora bez da ih svodimo na zbrajanje vektora. Odgovor na to pitanje daje sljedeća propozicija.

Propozicija 1.5.

Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$. *Ako je* $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$ *i* $\vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$, *tada je* $\vec{a} - \vec{b} = [\overrightarrow{BA}]$.

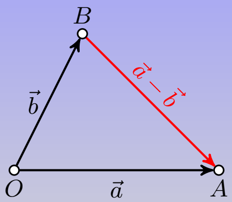
Dokaz.

Kako je $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, tada je $-\vec{b} = \overrightarrow{BO}$. Zbog komutativnosti zbrajanja vektora i pravila trokuta slijedi

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}.$$

♡

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

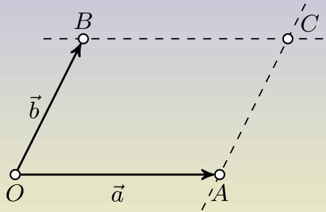


Pravilo za oduzimanje vektora

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$$

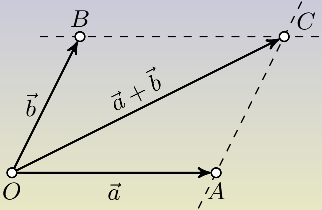
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Prisjetimo se pravila paralelograma za zbrajanje vektora i pravila oduzimanja vektora. Pogledajmo ta pravila na jednoj slici. Nadamo se da će vam ta slika pomoći da lakše zapamtite spomenuta pravila. U biti, jedna dijagonala paralelograma je suma vektora, a na drugoj dijagonali su obje razlike vektora.



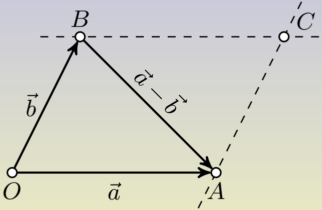
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Prisjetimo se pravila paralelograma za zbrajanje vektora i pravila oduzimanja vektora. Pogledajmo ta pravila na jednoj slici. Nadamo se da će vam ta slika pomoći da lakše zapamtite spomenuta pravila. U biti, jedna dijagonala paralelograma je suma vektora, a na drugoj dijagonali su obje razlike vektora.



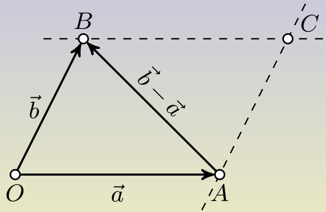
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Prisjetimo se pravila paralelograma za zbrajanje vektora i pravila oduzimanja vektora. Pogledajmo ta pravila na jednoj slici. Nadamo se da će vam ta slika pomoći da lakše zapamtite spomenuta pravila. U biti, jedna dijagonala paralelograma je suma vektora, a na drugoj dijagonali su obje razlike vektora.



Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Prisjetimo se pravila paralelograma za zbrajanje vektora i pravila oduzimanja vektora. Pogledajmo ta pravila na jednoj slici. Nadamo se da će vam ta slika pomoći da lakše zapamtite spomenuta pravila. U biti, jedna dijagonala paralelograma je suma vektora, a na drugoj dijagonali su obje razlike vektora.



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Množenje vektora skalarom

Sljedeća operacija s vektorima kojoj ćemo sada posvetiti pažnju je množenje vektora skalarom (realnim brojem). Naime, javlja se potreba da u pojedinim situacijama neki vektor produljimo ili skratimo za neki faktor, a da mu pritom ne promijenimo smjer. Na primjer, zamislimo da na računalu radimo animaciju kretanja automobila koji se kreće određenom brzinom u nekom smjeru. Tada on ima svoj vektor brzine. Želimo li u određenom trenutku da se on kreće dvostruko brže u istom smjeru, moramo njegov vektor brzine produljiti za faktor 2, tj. njegov vektor brzine moramo pomnožiti s 2. Dakle, ako je na početku vektor brzine bio $\vec{v}$, želimo li da se automobil kreće dvostruko brže u istom smjeru, tada njegov vektor brzine mora biti $2\vec{v}$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Isto tako, želimo li da se automobil kreće istom brzinom u istom smjeru, ali na suprotnu stranu, tada njegov vektor brzine mora biti suprotni vektor vektora $\vec{v}$, tj. za njegov vektor brzine moramo uzeti vektor $-\vec{v}$. Ukoliko želimo da se automobil kreće u istom smjeru, ali na suprotnu stranu dvostruko većom brzinom, tada njegov vektor brzine moramo pomnožiti s -2, tj. njegov vektor brzine mora biti $-2\vec{v}$. Želimo li da se automobil kreće dvostruko sporije u istom smjeru, tada za njegov vektor brzine trebamo uzeti vektor $\frac{1}{2}\vec{v}$, a ako pritom želimo da se kreće na suprotnu stranu, tada za njegov vektor brzine trebamo uzeti vektor $-\frac{1}{2}\vec{v}$.

Ovdje smo samo naveli jedan jednostavni primjer iz svakodnevnog života koji nam služi kao motivacija i opravdanje za uvođenje spomenute operacije s vektorima. Navedite još nekoliko sličnih primjera iz drugih područja.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Evo i precizne matematičke definicije.

Definicija množenja vektora skalarom

Množenje vektora realnim brojem je preslikavanje

$$m : \mathbb{R} \times V^3 \to V^3$$

pri čemu vektor $m(\lambda, \vec{a})$ kratko zapisujemo kao $\lambda\vec{a}$, a duljina, smjer i orijentacija su mu definirani na sljedeći način:

1. **Duljina:** $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$
2. **Smjer:** Smjer vektora $\lambda\vec{a}$ jednak je smjeru vektora $\vec{a}$.
3. **Orijentacija:** Ako je $\lambda > 0$, tada su vektori $\lambda\vec{a}$ i $\vec{a}$ istih orijentacija. Ako je $\lambda < 0$, tada su vektori $\lambda\vec{a}$ i $\vec{a}$ suprotnih orijentacija.

U prethodnoj definiciji u relaciji $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ su $|\lambda\vec{a}|$ i $|\vec{a}|$ duljine vektora $\lambda\vec{a}$ i $\vec{a}$, a $|\lambda|$ je apsolutna vrijednost realnog broja λ.

Ukoliko je $|\lambda| < 1$, tada je duljina vektora $\lambda\vec{a}$ manja od duljine vektora $\vec{a}$ pa govorimo o **skraćivanju**, **stezanju** ili **kontrakciji vektora** $\vec{a}$.

Ukoliko je $|\lambda| > 1$, tada je duljina vektora $\lambda\vec{a}$ veća od duljine vektora $\vec{a}$ pa govorimo o **produljivanju**, **rastezanju** ili **dilataciji vektora** $\vec{a}$.

Suprotni vektor vektora $\vec{a}$ dobijemo tako da taj vektor pomnožimo brojem -1, tj. $-\vec{a} = -1 \cdot \vec{a}$.

Isto tako, iz definicije je jasno da je $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Napomena.

Pazite, množenje vektora skalarom nije binarna operacija jer ne djeluje na elementima iz istog skupa. Ona uzima dva elementa i pridružuje im treći, ali jedan od njih je realni broj, a drugi je vektor, dok je treći opet vektor. Dakle, množenje vektora skalarom realnom broju i vektoru pridružuje vektor. Sjetimo se, binarna operacija uvijek uzima dva elementa iz istog skupa i opet im pridružuje element iz tog skupa.

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

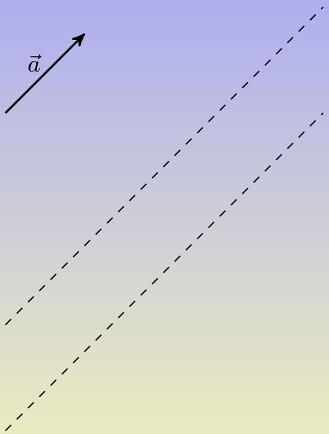
Koordinatni prikaz skalarnog produkta

Vektorski produkt vektora

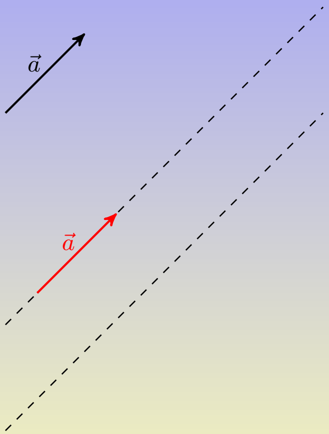
Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

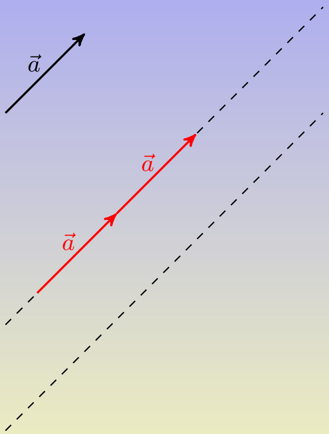
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



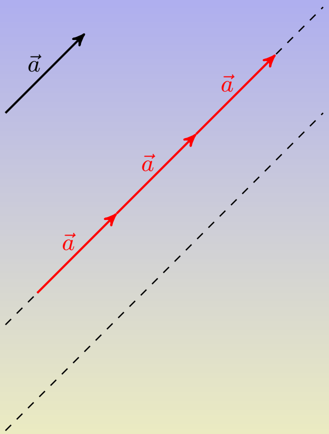
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



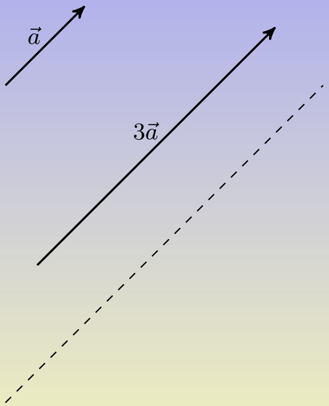
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



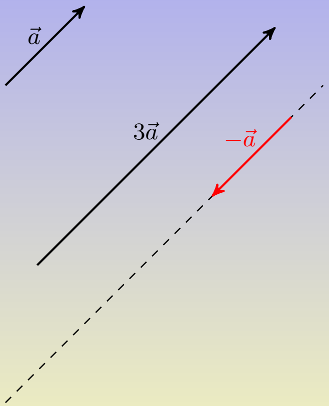
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



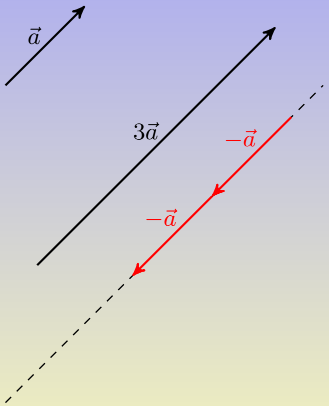
$\vec{a}$
$\vec{a}$
$\vec{a}$
$\vec{a}$



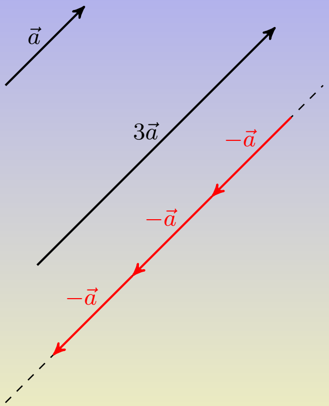
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

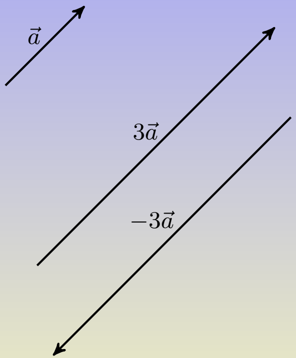


Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

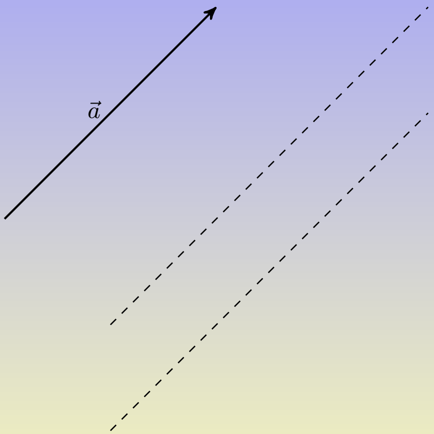


Klasična algebra vektora

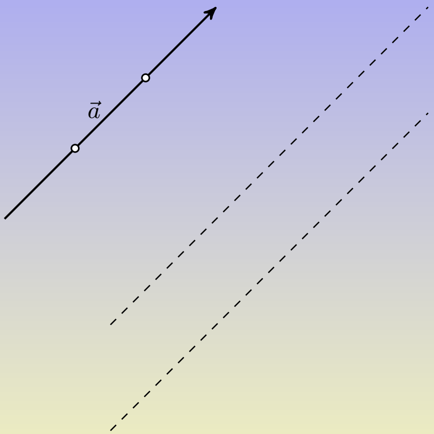
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



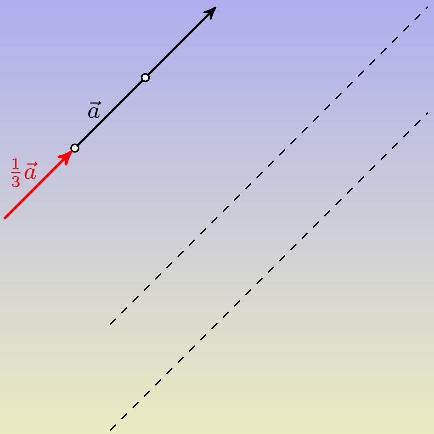
Odabrana poglavlja matematike
prof.dr.sc. Blaženka Divjak
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



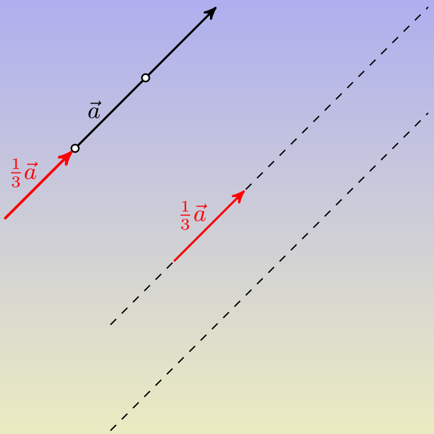
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



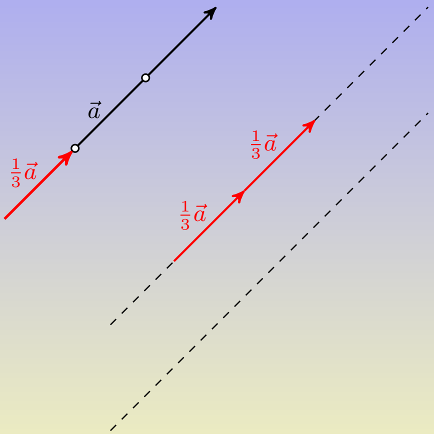
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



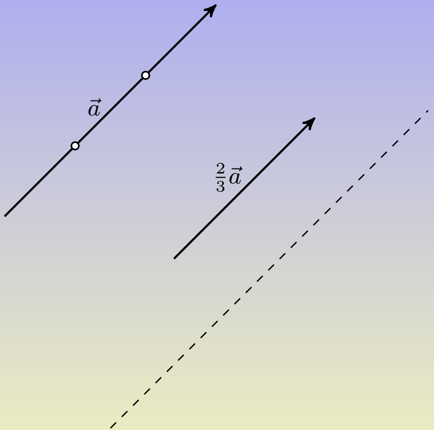
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



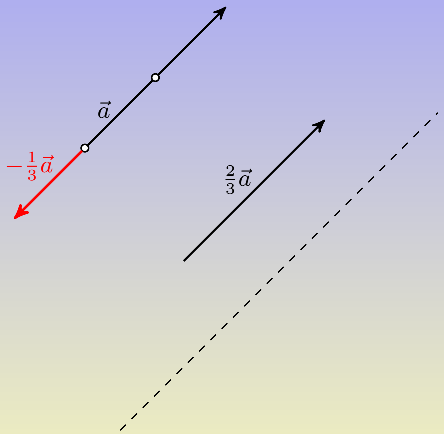
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



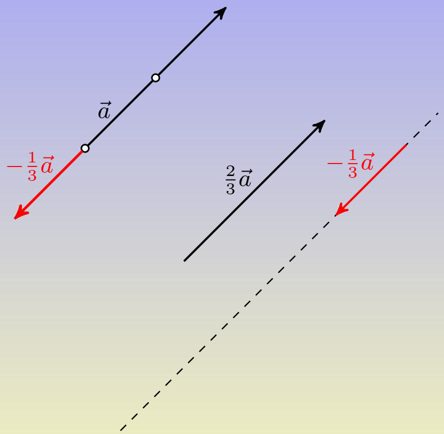
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



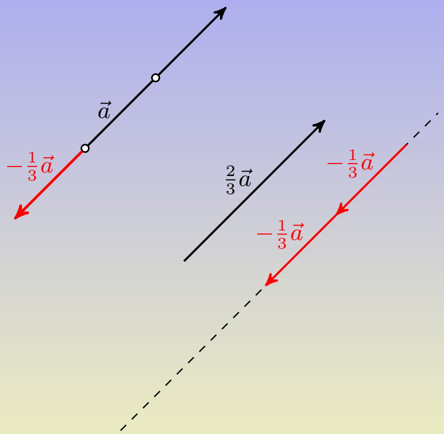
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



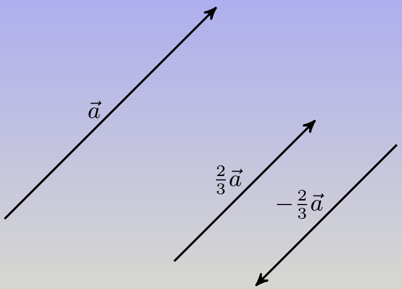
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



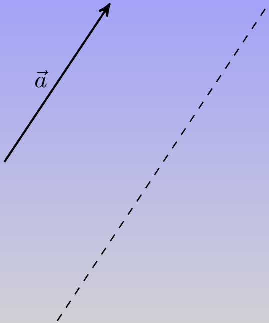
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

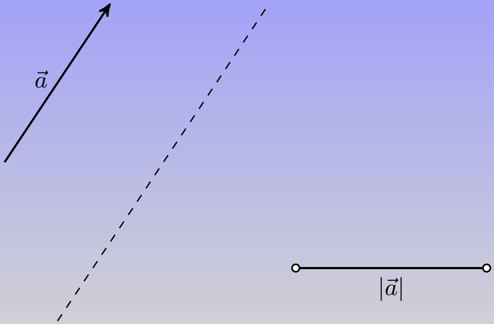


Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



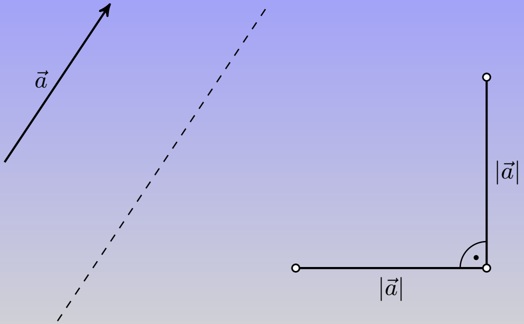
Pogledajmo sada na jednom primjeru kako konstruirati vektor $\sqrt{2}\,\vec{a}$ ako je zadan vektor $\vec{a}$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



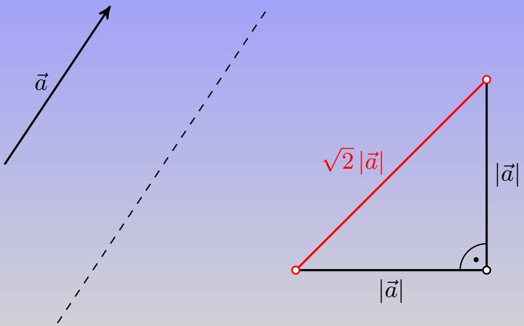
Pogledajmo sada na jednom primjeru kako konstruirati vektor $\sqrt{2}\,\vec{a}$ ako je zadan vektor $\vec{a}$. Konstruiramo

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



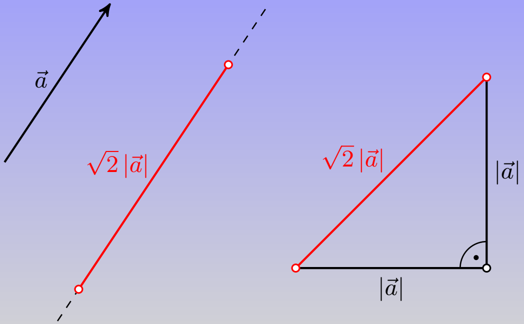
Pogledajmo sada na jednom primjeru kako konstruirati vektor $\sqrt{2}\,\vec{a}$ ako je zadan vektor $\vec{a}$. Konstruiramo jednakokračni pravokutni trokut s duljinama kateta $|\vec{a}|$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



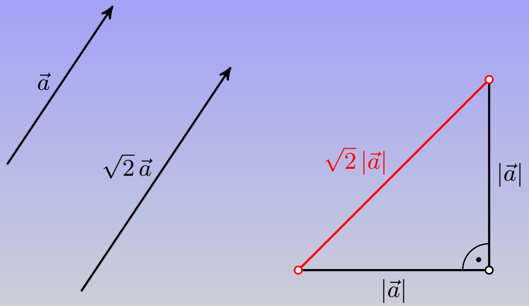
Pogledajmo sada na jednom primjeru kako konstruirati vektor $\sqrt{2}\,\vec{a}$ ako je zadan vektor $\vec{a}$. Konstruiramo jednakokračni pravokutni trokut s duljinama kateta $|\vec{a}|$. Duljina njegove hipotenuze je $\sqrt{2}\,|\vec{a}|$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Pogledajmo sada na jednom primjeru kako konstruirati vektor $\sqrt{2}\,\vec{a}$ ako je zadan vektor $\vec{a}$. Konstruiramo jednakokračni pravokutni trokut s duljinama kateta $|\vec{a}|$. Duljina njegove hipotenuze je $\sqrt{2}\,|\vec{a}|$. Nanesemo tu hipotenuzu na neki pravac paralelan s vektorom $\vec{a}$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Pogledajmo sada na jednom primjeru kako konstruirati vektor $\sqrt{2}\,\vec{a}$ ako je zadan vektor $\vec{a}$. Konstruiramo jednakokračni pravokutni trokut s duljinama kateta $|\vec{a}|$. Duljina njegove hipotenuze je $\sqrt{2}\,|\vec{a}|$. Nanesemo tu hipotenuzu na neki pravac paralelan s vektorom $\vec{a}$. Orijentiramo tu dužinu da ima istu orijentaciju kao i vektor $\vec{a}$ i dobivamo vektor $\sqrt{2}\,\vec{a}$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Zadatak 1.2 (Riješite ga u GeoGebri).

Nacrtajte najprije jednu dužinu koju proglasite jediničnom, a zatim još nacrtajte dvije proizvoljne dužine duljina a *i* b. *Iz zadanih dužina konstruirajte dužine duljina*

$$a+b, \quad |a-b|, \quad 5a, \quad \frac{a}{5}, \quad ab, \quad \frac{a}{b}, \quad \sqrt{a}, \quad \sqrt{\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a+b}}.$$

Opišite svoje konstrukcije i pokažite da su zaista ispravne. Probajte malo mijenjati duljine početnih dužina. Ako ste sve ispravno radili, tada će vam se automatski mijenjati i duljine konstruiranih dužina. Kod većine konstrukcija potrebno je koristiti teoreme o sličnosti trokuta, Talesov teorem o proporcionalnosti dužina i Pitagorin poučak.

Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pitamo se u kojim će sve slučajevima vektor $\lambda\vec{a}$ biti nulvektor. Odgovor daje sljedeća propozicija.

Propozicija 1.6.

Neka je $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{a} \in V^3$. Tada vrijedi:

$$\lambda\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \textit{ ili } \vec{a} = \vec{0}.$$

Dokaz.

$\boxed{\Leftarrow}$

Ako je $\lambda = 0$, iz definicije slijedi da je

$$|0 \cdot \vec{a}| = |0| \cdot |\vec{a}| = 0 \cdot |\vec{a}| = 0.$$

Dobili smo da vektor $0 \cdot \vec{a}$ ima duljinu nula. Jedini vektor duljine nula je nulvektor pa je $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$. Analogno, ako je $\vec{a} = \vec{0}$, tada imamo

$$|\lambda \cdot \vec{0}| = |\lambda| \cdot |\vec{0}| = |\lambda| \cdot 0 = 0.$$

Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Dobili smo da vektor $\lambda \cdot \vec{0}$ ima duljinu nula pa je $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

$\boxed{\Rightarrow}$

Ako je $\lambda\vec{a} = \vec{0}$, tada je $|\lambda\vec{a}| = 0$. Iz definicije slijedi da je $|\lambda| \cdot |\vec{a}| = 0$. Kako su $|\lambda|, |\vec{a}| \in \mathbb{R}$ čiji produkt je nula, barem jedan od tih brojeva mora biti jednak nula. Dakle, mora biti $|\lambda| = 0$ ili $|\vec{a}| = 0$. Stoga je $\lambda = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$. ♡

Definicija kolinearnih vektora

Za dva vektora iz V^3 kažemo da su **kolinearni** ako imaju isti smjer. Po dogovoru je nulvektor kolinearan sa svakim vektorom iz V^3.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Iz definicije množenja vektora skalarom slijedi da su vektori $\vec{a}$ i $\lambda\vec{a}$ uvijek kolinearni za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ i svaki $\vec{a} \in V^3$. Dakle, ako za vektore $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ vrijedi $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, tada su ti vektori kolinearni. Međutim, vrijedi i ovaj obrat.

Propozicija 1.7.

Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ kolinearni vektori i $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tada postoji jedinstveni $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Dokaz.

Neka su $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Kako su po pretpostavci vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, slijedi da točke O, A i B leže na istom pravcu. Neka je $k = \frac{|OB|}{|OA|}$. Tada je $k \geqslant 0$. Također, broj k je dobro definiran jer je $|OA| \neq 0$ zbog pretpostavke da je $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Ako je $k=0$, tada je $\vec{b}=\vec{0}$ pa je $\vec{b}=0\cdot\vec{a}$, tj. $\lambda=0$. Pretpostavimo da je $k>0$. Stavimo $\lambda=k$ ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ istih orijentacija, a ako su suprotnih orijentacija stavimo $\lambda=-k$. Tada su vektori $\vec{b}$ i $\lambda\vec{a}$ istih orijentacija. Kako su po pretpostavci $\vec{a}$ i $\vec{b}$ istog smjera, tada su i vektori $\vec{b}$ i $\lambda\vec{a}$ istog smjera. Što se tiče duljina, imamo

$$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|=k\cdot|\vec{a}|=\frac{|OB|}{|OA|}\cdot|\vec{a}|=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot|\vec{a}|=|\vec{b}|.$$

Zaključujemo da vektori $\vec{b}$ i $\lambda\vec{a}$ imaju istu duljinu, smjer i orijentaciju pa su onda oni jednaki, tj. $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. Iz konstrukcije je jasno da je realni broj λ jedinstven. ♡

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Napomena.

Ako su oba vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednaki nulvektoru, tada svaki realni broj λ zadovoljava jednakost $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ pa u tom slučaju broj λ nije jedinstven. Zato je u prethodnoj propoziciji bilo važno da je barem jedan od vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ različit od nulvektora jer nam je taj uvjet osigurao jedinstvenost broja λ, a egzistenciju nam je osigurala kolinearnost vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Nadalje, ukoliko su oba kolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ različiti od nulvektora, tada iz $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ slijedi da je $\lambda \neq 0$ pa je $\vec{a} = \frac{1}{\lambda}\vec{b}$. Dakle, u slučaju da su oba vektora različiti od nulvektora i ako su istog smjera, tada bilo kojeg od njih možemo prikazati kao neki broj puta onaj drugi vektor i to možemo napraviti na jedinstveni način. To će biti jako važno kod rješavanja zadataka.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Ukoliko je jedan od vektora jednak nulvektoru, npr. $\vec{b} = \vec{0}$, a $\vec{a} \neq \vec{0}$, tada je $\vec{b} = 0 \cdot \vec{a}$. Međutim, ne možemo i vektor $\vec{a}$ prikazati pomoću vektora $\vec{b}$, tj. nije moguće zbog propozicije 1.6 vektor različit od nulvektora prikazati kao neki broj puta nulvektor. Za rješavanje zadataka je važno zapamtiti sljedeće.

Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ različiti od nulvektora. Tada

$$\vec{a} \text{ i } \vec{b} \text{ imaju isti smjer } \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{b} = \lambda \vec{a}.$$

U tom je slučaju $\lambda \neq 0$ i vrijedi da je $\vec{a} = \frac{1}{\lambda}\vec{b}$. Nadalje, takav λ je jedinstven.

Množenje vektora skalarom ima neka lijepa svojstva koja ćemo navesti u sljedećem teoremu. Važno je zapamtiti ta svojstva jer će se kasnije sva ta svojstva pojavljivati kao aksiomi vektorskog prostora.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Teorem 1.2 (Svojstva množenja vektora skalarom).

Množenje vektora realnim brojevima ima sljedeća svojstva:

1. **Kvaziasocijativnost:** $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
2. **Posjedovanje jedinice:** $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
3. **Distributivnost u odnosu na zbrajanje skalara:**
$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$$
4. **Distributivnost u odnosu na zbrajanje vektora:**
$$\lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *i* $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Dokaz.

1. **Kvaziasocijativnost**

Ako je $\lambda = 0$ ili $\mu = 0$, tada su lijeva i desna strana jednake nulvektoru pa tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo stoga da su $\lambda \neq 0$ i $\mu \neq 0$. Promatrana jednakost je zapravo jednakost dva vektora. Da bismo dokazali da je ona istinita, moramo dokazati da vektori $\lambda(\mu\vec{a})$ i $(\lambda\mu)\vec{a}$ imaju istu duljinu, smjer i orijentaciju. Krenimo redom. Iz definicije množenja vektora skalarom ◂ i asocijativnosti množenja realnih brojeva slijedi

$$\big|\lambda(\mu\vec{a})\big| = |\lambda| \cdot |\mu\vec{a}| = |\lambda|\big(|\mu| \cdot |\vec{a}|\big) = \big(|\lambda| \cdot |\mu|\big)|\vec{a}| =$$
$$= |\lambda\mu| \cdot |\vec{a}| = \big|(\lambda\mu)\vec{a}\big|.$$

Pritom smo koristili da je $|xy| = |x| \cdot |y|$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Dobili smo da je $\big|\lambda(\mu\vec{a})\big| = \big|(\lambda\mu)\vec{a}\big|$, tj. vektori $\lambda(\mu\vec{a})$ i $(\lambda\mu)\vec{a}$ su zaista istih duljina.

Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Nadalje, iz definicije množenja vektora skalarom slijedi da vektori $\lambda(\mu\vec{a})$ i $(\lambda\mu)\vec{a}$ imaju isti smjer kao i vektor $\vec{a}$ pa su oni istog smjera. Ostaje nam još provjeriti da imaju istu orijentaciju. Razlikujemo četiri slučaja:

- $\lambda > 0$, $\mu > 0$

  Vektor $\mu\vec{a}$ ima istu orijentaciju kao i vektor $\vec{a}$ pa onda i vektor $\lambda(\mu\vec{a})$ ima istu orijentaciju kao i vektor $\vec{a}$. Zbog $\lambda\mu > 0$ vektor $(\lambda\mu)\vec{a}$ ima istu orijentaciju kao i vektor $\vec{a}$. Dakle, u ovom slučaju vektori $\lambda(\mu\vec{a})$ i $(\lambda\mu)\vec{a}$ imaju orijentacije jednake orijentaciji vektora $\vec{a}$ pa su onda istih orijentacija.

Odabrana poglavlja matematike
prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

- $\lambda > 0$, $\mu < 0$

  Vektor $\mu\vec{a}$ ima suprotnu orijentaciju od vektora $\vec{a}$, pa onda i vektor $\lambda(\mu\vec{a})$ ima suprotnu orijentaciju od vektora $\vec{a}$ zbog $\lambda > 0$. Kako je $\lambda\mu < 0$, tada i vektor $(\lambda\mu)\vec{a}$ ima suprotnu orijentaciju od vektora $\vec{a}$. Dakle, u ovom slučaju vektori $\lambda(\mu\vec{a})$ i $(\lambda\mu)\vec{a}$ imaju orijentacije suprotne orijentaciji vektora $\vec{a}$ pa su onda istih orijentacija.

- $\lambda < 0$, $\mu > 0$

  Vektor $\mu\vec{a}$ ima istu orijentaciju kao i vektor $\vec{a}$, a zbog $\lambda < 0$ vektor $\lambda(\mu\vec{a})$ ima suprotnu orijentaciju od vektora $\vec{a}$. Kako je $\lambda\mu < 0$, tada i vektor $(\lambda\mu)\vec{a}$ ima suprotnu orijentaciju od vektora $\vec{a}$. Dakle, u ovom slučaju vektori $\lambda(\mu\vec{a})$ i $(\lambda\mu)\vec{a}$ imaju orijentacije suprotne orijentaciji vektora $\vec{a}$ pa su onda istih orijentacija.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

- $\lambda < 0,\ \mu < 0$

  Vektor $\mu\vec{a}$ ima suprotnu orijentaciju od vektora $\vec{a}$, a zbog $\lambda < 0$ vektor $\lambda(\mu\vec{a})$ ima tada istu orijentaciju kao i vektor $\vec{a}$. Kako je $\lambda\mu > 0$, tada i vektor $(\lambda\mu)\vec{a}$ ima istu orijentaciju kao i vektor $\vec{a}$. Dakle, u ovom slučaju vektori $\lambda(\mu\vec{a})$ i $(\lambda\mu)\vec{a}$ imaju orijentacije jednake orijentaciji vektora $\vec{a}$ pa su onda istih orijentacija.

U svakom slučaju, vektori $\lambda(\mu\vec{a})$ i $(\lambda\mu)\vec{a}$ su uvijek istih orijentacija. Time je kvaziasocijativnost dokazana.

2. **Posjedovanje jedinice**

Tvrdnja je očigledna. Po definiciji množenja vektora skalarom vektori $1 \cdot \vec{a}$ i $\vec{a}$ su istog smjera, a zbog $1 > 0$ su i istih orijentacija. Nadalje, zbog $|1 \cdot \vec{a}| = |1| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|$ su istih duljina. Dakle, vektori $1 \cdot \vec{a}$ i $\vec{a}$ imaju istu duljinu, smjer i orijentaciju pa su onda oni jednaki, tj. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

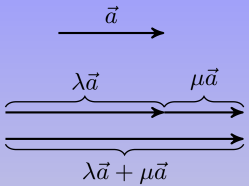
3. **Distributivnost u odnosu na zbrajanje skalara**

Iz definicije slijedi da vektori $(\lambda+\mu)\vec{a}$ i $\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ imaju isti smjer. Trebamo još vidjeti da imaju istu duljinu i orijentaciju. Nadalje, ako je $\lambda = 0$ ili $\mu = 0$ ili $\lambda + \mu = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$, tada tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo stoga da je $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\lambda + \mu \neq 0$ i $\vec{a} \neq \vec{0}$. Sada razlikujemo šest slučajeva.

- $\lambda > 0$, $\mu > 0$

  Vektori $\lambda\vec{a}$ i $\mu\vec{a}$ imaju istu orijentaciju kao i vektor $\vec{a}$ pa onda iz definicije zbrajanja vektora slijedi da i vektor $\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ ima istu orijentaciju kao i vektor $\vec{a}$. S druge strane, kako je $\lambda+\mu > 0$, vektor $(\lambda + \mu)\vec{a}$ ima istu orijentaciju kao i vektor $\vec{a}$. Dakle, vektori $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ i $(\lambda + \mu)\vec{a}$ imaju iste orijentacije kao i vektor $\vec{a}$ pa su onda istih orijentacija.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Kako su $\lambda > 0$, $\mu > 0$ i $\lambda+\mu > 0$, tada je $|\lambda| = \lambda$, $|\mu| = \mu$ i $|\lambda+\mu| = \lambda+\mu$. Dobivamo da je $|\lambda+\mu| = |\lambda|+|\mu|$ iz čega slijedi

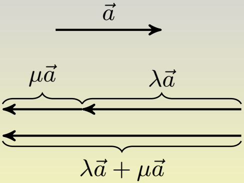
$$|\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}| = |\lambda\vec{a}|+|\mu\vec{a}| = |\lambda|\cdot|\vec{a}|+|\mu|\cdot|\vec{a}| = \big(|\lambda|+|\mu|\big)|\vec{a}| =$$
$$= |\lambda+\mu|\cdot|\vec{a}| = \big|(\lambda+\mu)\vec{a}\big|.$$

Dobili smo da je $|\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}| = \big|(\lambda+\mu)\vec{a}\big|$ pa su vektori $\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ i $(\lambda+\mu)\vec{a}$ istih duljina.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

- $\lambda < 0$, $\mu < 0$

  Vektori $\lambda\vec{a}$ i $\mu\vec{a}$ imaju suprotne orijentacije od vektora $\vec{a}$ pa onda iz definicije zbrajanja vektora slijedi da i vektor $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ ima suprotnu orijentaciju od vektora $\vec{a}$. S druge strane, kako je $\lambda + \mu < 0$, vektor $(\lambda + \mu)\vec{a}$ ima suprotnu orijentaciju od vektora $\vec{a}$. Dakle, vektori $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ i $(\lambda + \mu)\vec{a}$ imaju suprotne orijentacije od vektora $\vec{a}$ pa su onda istih orijentacija.



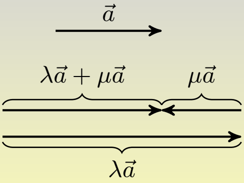
Kako su $\lambda < 0$, $\mu < 0$ i $\lambda + \mu < 0$, tada je $|\lambda| = -\lambda$, $|\mu| = -\mu$ i $|\lambda + \mu| = -\lambda - \mu$. Dobivamo da je $|\lambda + \mu| = |\lambda| + |\mu|$ iz čega slijedi

$$|\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}| = |\lambda\vec{a}| + |\mu\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}| + |\mu| \cdot |\vec{a}| = \big(|\lambda| + |\mu|\big)|\vec{a}| =$$
$$= |\lambda + \mu| \cdot |\vec{a}| = \big|(\lambda + \mu)\vec{a}\big|.$$

Dobili smo da je $|\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}| = \big|(\lambda + \mu)\vec{a}\big|$ pa su vektori $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ i $(\lambda + \mu)\vec{a}$ istih duljina.

- $\lambda > 0$, $\mu < 0$, $|\lambda| > |\mu|$

  Vektor $\lambda\vec{a}$ je iste orijentacije kao i vektor $\vec{a}$, dok je vektor $\mu\vec{a}$ suprotne orijentacije od vektora $\vec{a}$. Zbog $|\lambda| > |\mu|$ i $\lambda > 0$ slijedi da vektor $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ ima istu orijentaciju kao i vektor $\vec{a}$. S druge strane, zbog $|\lambda| > |\mu|$ i $\lambda > 0$ je $\lambda + \mu > 0$ pa vektor $(\lambda + \mu)\vec{a}$ ima istu orijentaciju kao i vektor $\vec{a}$. Dakle, vektori $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ i $(\lambda + \mu)\vec{a}$ imaju iste orijentacije kao i vektor $\vec{a}$ pa su onda istih orijentacija.



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Kako su $\lambda > 0$, $\mu < 0$ i $\lambda + \mu > 0$, tada je $|\lambda| = \lambda$, $|\mu| = -\mu$ i $|\lambda+\mu| = \lambda+\mu$. Dobivamo da je $|\lambda+\mu| = |\lambda| - |\mu|$ iz čega slijedi

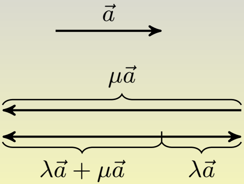
$$|\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}| = |\lambda\vec{a}| - |\mu\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}| - |\mu| \cdot |\vec{a}| = \big(|\lambda| - |\mu|\big)|\vec{a}| =$$
$$= |\lambda + \mu| \cdot |\vec{a}| = \big|(\lambda + \mu)\vec{a}\big|.$$

Dobili smo da je $|\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}| = \big|(\lambda + \mu)\vec{a}\big|$ pa su vektori $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ i $(\lambda + \mu)\vec{a}$ istih duljina.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

- $\lambda > 0$, $\mu < 0$, $|\lambda| < |\mu|$

  Vektor $\lambda\vec{a}$ je iste orijentacije kao i vektor $\vec{a}$, dok je vektor $\mu\vec{a}$ suprotne orijentacije od vektora $\vec{a}$. Zbog $|\lambda| < |\mu|$ i $\mu < 0$ slijedi da vektor $\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ ima suprotnu orijentaciju od vektora $\vec{a}$. S druge strane, zbog $|\lambda| < |\mu|$ i $\mu < 0$ je $\lambda + \mu < 0$ pa vektor $(\lambda + \mu)\vec{a}$ ima suprotnu orijentaciju od vektora $\vec{a}$. Dakle, vektori $\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ i $(\lambda+\mu)\vec{a}$ imaju suprotne orijentacije od vektora $\vec{a}$ pa su onda istih orijentacija.



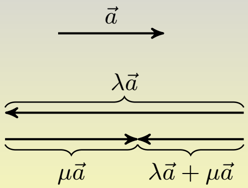
Kako su $\lambda > 0$, $\mu < 0$ i $\lambda + \mu < 0$, tada je $|\lambda| = \lambda$, $|\mu| = -\mu$ i $|\lambda + \mu| = -\lambda - \mu$. Dobivamo da je $|\lambda + \mu| = -|\lambda| + |\mu|$ iz čega slijedi

$$|\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}| = |\mu\vec{a}| - |\lambda\vec{a}| = |\mu| \cdot |\vec{a}| - |\lambda| \cdot |\vec{a}| = \big(|\mu| - |\lambda|\big)|\vec{a}| =$$
$$= |\lambda + \mu| \cdot |\vec{a}| = \big|(\lambda + \mu)\vec{a}\big|.$$

Dobili smo da je $|\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}| = \big|(\lambda + \mu)\vec{a}\big|$ pa su vektori $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ i $(\lambda + \mu)\vec{a}$ istih duljina.

- $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $|\lambda| > |\mu|$

  Vektor $\lambda\vec{a}$ je suprotne orijentacije od vektora $\vec{a}$, dok je vektor $\mu\vec{a}$ iste orijentacije kao i vektor $\vec{a}$. Zbog $|\lambda| > |\mu|$ i $\lambda < 0$ slijedi da vektor $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ ima suprotnu orijentaciju od vektora $\vec{a}$. S druge strane, zbog $|\lambda| > |\mu|$ i $\lambda < 0$ je $\lambda + \mu < 0$ pa vektor $(\lambda + \mu)\vec{a}$ ima suprotnu orijentaciju od vektora $\vec{a}$. Dakle, vektori $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ i $(\lambda + \mu)\vec{a}$ imaju suprotne orijentacije od vektora $\vec{a}$ pa su onda istih orijentacija.



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Kako su $\lambda < 0$, $\mu > 0$ i $\lambda + \mu < 0$, tada je $|\lambda| = -\lambda$, $|\mu| = \mu$ i $|\lambda + \mu| = -\lambda - \mu$. Dobivamo da je $|\lambda + \mu| = |\lambda| - |\mu|$ iz čega slijedi

$$|\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}| = |\lambda\vec{a}| - |\mu\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}| - |\mu| \cdot |\vec{a}| = \big(|\lambda| - |\mu|\big)|\vec{a}| =$$

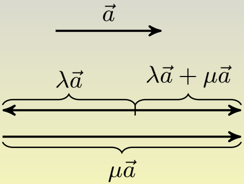
$$= |\lambda + \mu| \cdot |\vec{a}| = \big|(\lambda + \mu)\vec{a}\big|.$$

Dobili smo da je $|\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}| = \big|(\lambda + \mu)\vec{a}\big|$ pa su vektori $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ i $(\lambda + \mu)\vec{a}$ istih duljina.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

- $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $|\lambda| < |\mu|$

  Vektor $\lambda\vec{a}$ je suprotne orijentacije od vektora $\vec{a}$, dok je vektor $\mu\vec{a}$ iste orijentacije kao i vektor $\vec{a}$. Zbog $|\lambda| < |\mu|$ i $\mu > 0$ slijedi da vektor $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ ima istu orijentaciju kao i vektor $\vec{a}$. S druge strane, zbog $|\lambda| < |\mu|$ i $\mu > 0$ je $\lambda + \mu > 0$ pa vektor $(\lambda + \mu)\vec{a}$ ima istu orijentaciju kao i vektor $\vec{a}$. Dakle, vektori $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ i $(\lambda + \mu)\vec{a}$ imaju iste orijentacije kao i vektor $\vec{a}$ pa su onda istih orijentacija.



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Kako su $\lambda < 0$, $\mu > 0$ i $\lambda + \mu > 0$, tada je $|\lambda| = -\lambda$, $|\mu| = \mu$ i $|\lambda + \mu| = \lambda + \mu$. Dobivamo da je $|\lambda + \mu| = -|\lambda| + |\mu|$ iz čega slijedi

$$|\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}| = |\mu\vec{a}| - |\lambda\vec{a}| = |\mu| \cdot |\vec{a}| - |\lambda| \cdot |\vec{a}| = \big(|\mu| - |\lambda|\big)|\vec{a}| =$$
$$= |\lambda + \mu| \cdot |\vec{a}| = \big|(\lambda + \mu)\vec{a}\big|.$$

Dobili smo da je $|\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}| = \big|(\lambda + \mu)\vec{a}\big|$ pa su vektori $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ i $(\lambda + \mu)\vec{a}$ istih duljina.

Dakle, u svakom slučaju, vektori $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ i $(\lambda + \mu)\vec{a}$ su uvijek iste duljine, istog smjera i istih orijentacija pa su onda oni jednaki, tj. zaista je $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i svaki $\vec{a} \in V^3$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

4. **Distributivnost u odnosu na zbrajanje vektora**

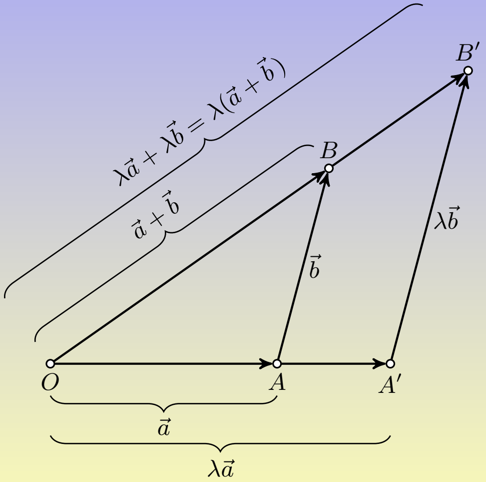
Ako je $\lambda = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$, tada tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo stoga da je $\lambda \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$. Razlikujemo dva slučaja.

- Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su različitog smjera

Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. Prema pravilu trokuta je $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Neka je $\lambda\vec{a} = \overrightarrow{OA'}$. Tada su točke O, A i A' na istom pravcu. Sada točkom A' povučemo paralelu s pravcem AB. Ta paralela siječe pravac OB u točki B'. Sada uočimo trokute OAB i $OA'B'$. Kutovi $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle A'OB'$ se podudaraju ako je $\lambda > 0$, a ako je $\lambda < 0$, tada su to vršni kutovi. U svakom slučaju su kutovi $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle A'OB'$ jednaki. Nadalje, po konstrukciji su kutovi $\sphericalangle OAB$ i $\sphericalangle OA'B'$ jednaki jer je $AB \parallel A'B'$. Dakle, trokuti OAB i $OA'B'$ imaju dva odgovarajuća kuta jednaka pa su slični. Pišemo, $\triangle OAB \simeq \triangle OA'B'$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Jedan primjer slike kada je $\lambda > 0$. U ovom slučaju se kutovi $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle A'OB'$ podudaraju.



Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

Koordinatni prikaz skalarnog produkta

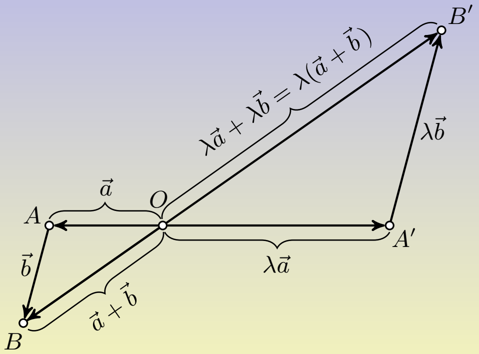
Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Jedan primjer slike kada je $\lambda < 0$. U ovom slučaju su kutovi $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle A'OB'$ vršni kutovi.



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

U svakom slučaju je koeficijent sličnosti trokuta OAB i $OA'B'$ jednak

$$\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|\lambda\vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{|\lambda| \cdot |\vec{a}|}{|\vec{a}|} = |\lambda|.$$

Tada za preostala dva para odgovarajućih stranica promatranih trokuta također (zbog sličnosti) vrijedi

$$\frac{|OB'|}{|OB|} = |\lambda|, \quad \frac{|A'B'|}{|AB|} = |\lambda|,$$

odnosno za pripadne vektore vrijedi

$$\overrightarrow{OB'} = \lambda\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}.$$

Kako je $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, slijedi da je $\lambda\vec{b} = \overrightarrow{A'B'}$.

Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Konačno dobivamo

$$\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} = \lambda\overrightarrow{OB} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$$

pa je $\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$ u slučaju da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ imaju različiti smjer.

- Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su istog smjera

Ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ istog smjera, tada prema propoziciji 1.7 postoji $\mu \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{b} = \mu\vec{a}$. Koristeći već dokazana svojstva kvaziasocijativnosti i distributivnosti u odnosu na zbrajanje skalara dobivamo

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

$$\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} = \lambda\vec{a} + \lambda(\mu\vec{a}) = \text{ (kvaziasocijativnost)}$$

$$= \lambda\vec{a} + (\lambda\mu)\vec{a} = \text{ (distributivnost u odnosu na zbrajanje skalara)}$$

$$= (\lambda + \lambda\mu)\vec{a} =$$

$$= \big(\lambda(1+\mu)\big)\vec{a} = \text{ (kvaziasocijativnost)}$$

$$= \lambda\big((1+\mu)\vec{a}\big) = \text{ (distributivnost u odnosu na zbrajanje skalara)}$$

$$= \lambda(\vec{a} + \mu\vec{a}) =$$

$$= \lambda\big(\vec{a} + \vec{b}\big)$$

pa je $\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} = \lambda\big(\vec{a} + \vec{b}\big)$ i u slučaju da su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ istog smjera. $\heartsuit$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Definicija

Za vektor $\vec{e} \in V^3$ kažemo da je **jedinični vektor** ili **ort** ako je $|\vec{e}| = 1$. Svakom vektoru $\vec{a} \neq \vec{0}$ možemo pridružiti vektor

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

kojeg zovemo **jedinični vektor u smjeru vektora** $\vec{a}$.

Vektor $\vec{a}_0$ očito ima isti smjer kao i vektor $\vec{a}$, a zbog $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$ vektori $\vec{a}_0$ i $\vec{a}$ su istih orijentacija. Nadalje,

$$|\vec{a}_0| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \right| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1$$

pa vektor $\vec{a}_0$ zaista ima duljinu 1.

Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

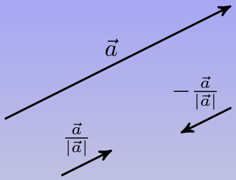
Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Napomena.

Najčešće umjesto $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ kraće pišemo $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ pa to sugerira da smo vektor podijelili s njegovom duljinom i na taj način dobili jedinični vektor u smjeru tog vektora. Budimo svjesni činjenice da nigdje nismo definirali dijeljenje vektora s realnim brojem, nego samo množenje vektora realnim brojem. Stoga na zapis $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ trebamo gledati na način da smo vektor $\vec{a}$ pomnožili s brojem $\frac{1}{|\vec{a}|}$, a ne da smo ga podijelili s brojem $|\vec{a}|$.

Kao što smo vidjeli, vektor $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ je vektor duljine 1 koji ima isti smjer i orijentaciju kao i vektor $\vec{a}$. S druge strane, vektor $-\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ je vektor duljine 1 koji ima isti smjer kao i vektor $\vec{a}$, ali je suprotne orijentacije od vektora $\vec{a}$. Zapravo, vektor $-\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ je suprotni vektor vektora $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Postoje dva različita jedinična vektora koji imaju isti smjer kao i vektor $\vec{a}$. Jedan od tih vektora je vektor $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ i to je po definiciji jedinični vektor u smjeru vektora $\vec{a}$. Drugi od tih vektora je vektor $-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ i to je zapravo jedinični vektor u smjeru vektora $-\vec{a}$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Napomena.

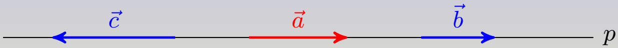
Sigurno se pitate zašto vektor $-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ne zovemo jedinični vektor u smjeru vektora $\vec{a}$ iako on ima isti smjer kao i vektor $\vec{a}$. Ne trebate se previše uzbuđivati zbog toga, to je samo stvar našeg dogovora. Kao što smo vidjeli, postoje dva različita jedinična vektora u smjeru nekog vektora pa stoga jedinični vektor u smjeru nekog vektora nije jedinstveno određen. Jedan od tih jediničnih vektora $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ima istu orijentaciju kao i vektor $\vec{a}$, a drugi $-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ima suprotnu orijentaciju. Odlučili smo se da ćemo onog koji ima istu orijentaciju kao i vektor $\vec{a}$ zvati jedinični vektor u smjeru vektora $\vec{a}$. Jasno, prema tom dogovoru je onda $-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ jedinični vektor u smjeru vektora $-\vec{a}$. Uz ovakav dogovor jedinični vektor u smjeru nekog vektora je jedinstveno određen.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pojam baze u V^1

Neka je V^1 skup svih vektora na nekom pravcu p. Kako su svaka dva vektora iz V^1 kolinearni, prema propoziciji 1.7 vrijedi sljedeće:

Ako je $\vec{a} \neq \vec{0}$ *bilo koji vektor iz* V^1, *tada se svaki vektor iz* V^1 *može na jedinstveni način prikazati pomoću vektora* $\vec{a}$.



$$\exists! \lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad \vec{b} = \lambda_1 \vec{a}, \quad \lambda_1 > 0$$
$$\exists! \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \vec{c} = \lambda_2 \vec{a}, \quad \lambda_2 < 0$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Definicija baze za V^1

Svaki skup $\mathcal{B} = \{\vec{a}\}$ koji se sastoji od nekog vektora $\vec{a} \in V^1$ različitog od nulvektora zovemo bazom za V^1.

Korolar 1.2.

Svaki vektor iz V^1 može se na jedinstveni način prikazati u bilo kojoj odabranoj bazi za V^1.

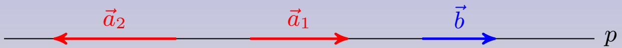
Zadatak 1.3.

Objasnite zbog čega skup $\mathcal{B} = \{\vec{0}\}$ ne zovemo bazom za V^1 ako želimo sačuvati istinitost prethodnog korolara.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Neka je $\mathcal{B} = \{\vec{a}\}$ neka baza za V^1 i $\vec{b} \in V^1$ proizvoljni vektor.

- Postoji jedinstveni $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.
- U tom slučaju kratko pišemo $\vec{b} = (\lambda)$.
- Broj λ zovemo **koordinata** vektora $\vec{b}$ u bazi $\mathcal{B}$.
- U različitim bazama isti vektor ima općenito različite koordinate.



$$\mathcal{B}_1 = \{\vec{a}_1\},\ \mathcal{B}_2 = \{\vec{a}_2\}, \quad \vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1,\ \vec{b} = \lambda_2\vec{a}_2$$

Također kratko pišemo $\vec{b} = (\lambda_1)$ i $\vec{b} = (\lambda_2)$, ali moramo imati na umu i baze $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ s obzirom na koje vektor $\vec{b}$ ima te koordinate.

- Svake dvije baze za V^1 imaju uvijek jedan element pa zbog toga kažemo da je dimenzija od V^1 jednaka 1 i kratko pišemo $\dim V^1 = 1$. Intuitivno, pravac je jednodimenzionalni objekt.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Neka je $\mathcal{B} = \{\vec{a}\}$ neka baza za V^1. Tada svaki vektor $\vec{b} \in V^1$ ima jedinstveni prikaz u bazi $\mathcal{B}$, tj. postoji jedinstveni $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Stoga je dobro definirano preslikavanje

$$k : V^1 \to \mathbb{R}, \quad k(\vec{b}\,) = k(\lambda\vec{a}) = (\lambda)$$

kojeg zovemo **koordinatizacija** prostora V^1 s obzirom na bazu $\mathcal{B}$.

Preslikavanje k je bijekcija pa preko njega vršimo identifikaciju vektora $\vec{b}$ s realnim brojem λ tako da umjesto $k(\vec{b}\,) = (\lambda)$ kratko pišemo $\vec{b} = (\lambda)$. Ta identifikacija bitno ovisi o odabranoj bazi $\mathcal{B}$. Stoga bazu $\mathcal{B}$ nikad ne smijemo u potpunosti zaboraviti jer bez nje se nećemo moći vratiti natrag s realnog broja λ na vektor $\vec{b}$. Isto tako, bez odabrane baze $\mathcal{B}$ nismo u mogućnosti identificirati vektor iz V^1 s realnim brojem.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Propozicija 1.8.

Neka je $\mathcal{B} = \{\vec{a}\}$ baza za V^1. Neka su $\vec{b} = (\beta)$ i $\vec{c} = (\gamma)$ vektori iz V^1 zadani svojim koordinatama u bazi $\mathcal{B}$. Tada je

$$\vec{b} + \vec{c} = (\beta + \gamma), \quad \lambda\vec{b} = (\lambda\beta).$$

Dokaz.

Prema pretpostavci je $\vec{b} = \beta\vec{a}$ i $\vec{c} = \gamma\vec{a}$ pa zbog distributivnosti u odnosu na zbrajanje skalara vrijedi

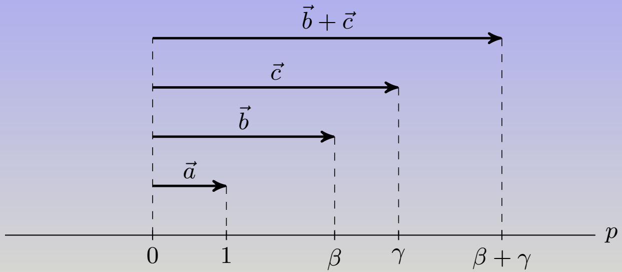
$$\vec{b} + \vec{c} = \beta\vec{a} + \gamma\vec{a} = (\beta + \gamma)\vec{a}.$$

Stoga je $\vec{b}+\vec{c} = (\beta+\gamma)$. Nadalje, zbog kvaziasocijativnosti vrijedi

$$\lambda\vec{b} = \lambda\big(\beta\vec{a}\big) = (\lambda\beta)\vec{a}$$

pa je $\lambda\vec{b} = (\lambda\beta)$. ♡

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



$$\mathcal{B}=\{\vec{a}\}, \quad \vec{a}=1\cdot\vec{a}, \quad \vec{b}=\beta\vec{a}, \quad \vec{c}=\gamma\vec{a}, \quad \vec{b}+\vec{c}=(\beta+\gamma)\vec{a}$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava na pravac

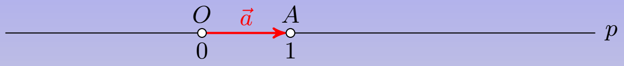
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava na pravac

- Odaberemo neku točku O na pravcu p. Točka O je izabrani fiksni predstavnik za nulvektor i određuje ishodište koordinatnog sustava.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

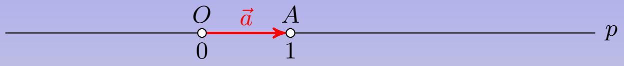
Uvođenje koordinatnog sustava na pravac



- Odaberemo neku točku O na pravcu p. Točka O je izabrani fiksni predstavnik za nulvektor i određuje ishodište koordinatnog sustava.
- Odaberemo neku bazu $\mathcal{B} = \{\vec{a}\}$ za V^1, tj. neki vektor različit od nulvektora na pravcu p i nanesemo ga iz točke O. Vektor $\vec{a}$ određuje jediničnu dužinu na pravcu p.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava na pravac

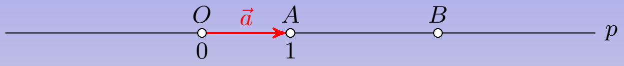


- Odaberemo neku točku O na pravcu p. Točka O je izabrani fiksni predstavnik za nulvektor i određuje ishodište koordinatnog sustava.
- Odaberemo neku bazu $\mathcal{B} = \{\vec{a}\}$ za V^1, tj. neki vektor različit od nulvektora na pravcu p i nanesemo ga iz točke O. Vektor $\vec{a}$ određuje jediničnu dužinu na pravcu p.
- Uređeni par $(O, \mathcal{B})$ zovemo koordinatni sustav na pravcu p.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava na pravac

Kako pridružiti koordinatu nekoj točki B na pravcu p?

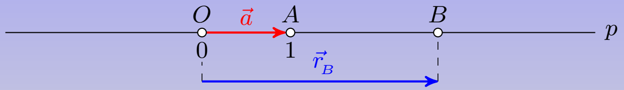


- Odaberemo neku točku O na pravcu p. Točka O je izabrani fiksni predstavnik za nulvektor i određuje ishodište koordinatnog sustava.
- Odaberemo neku bazu $\mathcal{B} = \{\vec{a}\}$ za V^1, tj. neki vektor različit od nulvektora na pravcu p i nanesemo ga iz točke O. Vektor $\vec{a}$ određuje jediničnu dužinu na pravcu p.
- Uređeni par $(O, \mathcal{B})$ zovemo koordinatni sustav na pravcu p.

Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava na pravac

Pogledamo vektor $\vec{r}_B = \overrightarrow{OB}$ kojeg zovemo radijvektor točke B.

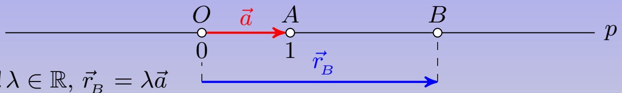


- Odaberemo neku točku O na pravcu p. Točka O je izabrani fiksni predstavnik za nulvektor i određuje ishodište koordinatnog sustava.
- Odaberemo neku bazu $\mathcal{B} = \{\vec{a}\}$ za V^1, tj. neki vektor različit od nulvektora na pravcu p i nanesemo ga iz točke O. Vektor $\vec{a}$ određuje jediničnu dužinu na pravcu p.
- Uređeni par $(O, \mathcal{B})$ zovemo koordinatni sustav na pravcu p.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava na pravac

Vektor $\vec{r}_B$ ima jedinstveni prikaz u bazi $\mathcal{B}$.



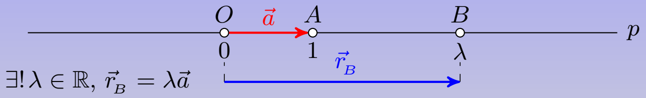
$\exists!\,\lambda \in \mathbb{R},\ \vec{r}_B = \lambda\vec{a}$

- Odaberemo neku točku O na pravcu p. Točka O je izabrani fiksni predstavnik za nulvektor i određuje ishodište koordinatnog sustava.
- Odaberemo neku bazu $\mathcal{B} = \{\vec{a}\}$ za V^1, tj. neki vektor različit od nulvektora na pravcu p i nanesemo ga iz točke O. Vektor $\vec{a}$ određuje jediničnu dužinu na pravcu p.
- Uređeni par $(O, \mathcal{B})$ zovemo koordinatni sustav na pravcu p.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava na pravac

Točki B pridružimo koordinatu λ i pišemo $B(\lambda)$.

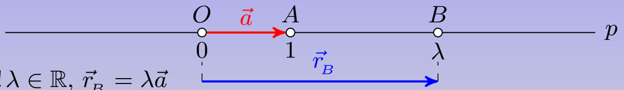


- Odaberemo neku točku O na pravcu p. Točka O je izabrani fiksni predstavnik za nulvektor i određuje ishodište koordinatnog sustava.
- Odaberemo neku bazu $\mathcal{B} = \{\vec{a}\}$ za V^1, tj. neki vektor različit od nulvektora na pravcu p i nanesemo ga iz točke O. Vektor $\vec{a}$ određuje jediničnu dužinu na pravcu p.
- Uređeni par $(O, \mathcal{B})$ zovemo koordinatni sustav na pravcu p.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava na pravac

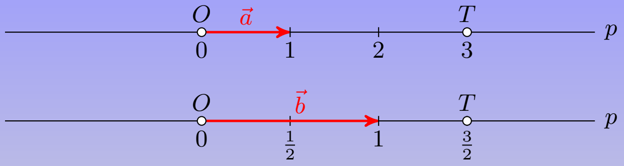
Koordinata točke podudara se s koordinatom radijvektora te točke.



$\exists!\, \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{r}_B = \lambda \vec{a}$

- Odaberemo neku točku O na pravcu p. Točka O je izabrani fiksni predstavnik za nulvektor i određuje ishodište koordinatnog sustava.
- Odaberemo neku bazu $\mathcal{B} = \{\vec{a}\}$ za V^1, tj. neki vektor različit od nulvektora na pravcu p i nanesemo ga iz točke O. Vektor $\vec{a}$ određuje jediničnu dužinu na pravcu p.
- Uređeni par $(O, \mathcal{B})$ zovemo koordinatni sustav na pravcu p.
- $O(0)$ jer je $\vec{r}_O = \overrightarrow{OO} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{a}$
- $A(1)$ jer je $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA} = \vec{a} = 1 \cdot \vec{a}$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



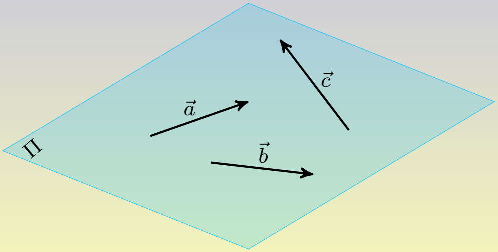
- $(O,\{\vec{a}\})$ i $(O,\{\vec{b}\})$ dva različita koordinatna sustava na pravcu p s istim ishodištem pri čemu je $\vec{b}=2\vec{a}$.
- U koordinatnom sustavu $(O,\{\vec{a}\})$ točka T ima koordinatu $T(3)$ jer je $\vec{r}_{_T}=3\vec{a}$.
- U koordinatnom sustavu $(O,\{\vec{b}\})$ točka T ima koordinatu $T\left(\frac{3}{2}\right)$ jer je $\vec{r}_{_T}=\frac{3}{2}\vec{b}$.
- Veza između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ daje vezu između koordinatnih sustava: $\vec{b}=2\vec{a}, \quad \vec{a}=\frac{1}{2}\vec{b}$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pojam baze u V^2

Definicija komplanarnih vektora

Kažemo da je vektor $\vec{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$ paralelan s ravninom $\Pi \subset E^3$ i pišemo $\vec{a} \parallel \Pi$ ako je pravac AB paralelan s ravninom Π. Kažemo da su vektori iz V^3 komplanarni ako su paralelni s istom ravninom.



Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Napomena.

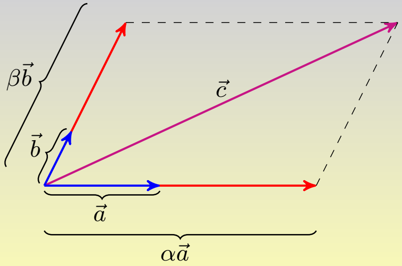
Svaka dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ uvijek su komplanarni.

Propozicija 1.9.

Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Neka je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Tada su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni.

Dokaz.

Tvrdnja direktno slijedi iz definicije zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom.



♡

Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Teorem 1.3.

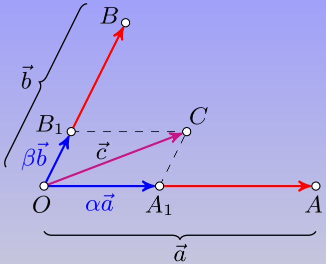
Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ nekolinearni vektori, a $\vec{c} \in V^3$ bilo koji vektor komplanaran s vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Tada postoje jedinstveni skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Dokaz.

$\boxed{\text{Egzistencija}}$

Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Zbog komplanarnosti vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ točke O, A, B, C leže u istoj ravnini. Nadalje, kako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni, točke O, A, B ne leže na istom pravcu. Točkom C povučemo paralele s pravcima OA i OB te dobivamo točke A_1 i B_1 kako je prikazano na slici.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



- Vektori $\overrightarrow{OA_1}$ i $\overrightarrow{OA}$ su kolinearni pa postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{OA_1} = \alpha\,\overrightarrow{OA}$.
- Vektori $\overrightarrow{OB_1}$ i $\overrightarrow{OB}$ su kolinearni pa postoji $\beta \in \mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{OB_1} = \beta\,\overrightarrow{OB}$.

Konačno imamo

$$\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = \alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Jedinstvenost

Pretpostavimo da postoje $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$
$$\vec{c} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b}$$

Oduzimanjem gornjih jednakosti slijedi

$$(\alpha - \alpha')\vec{a} + (\beta - \beta')\vec{b} = \vec{0}. \qquad (\spadesuit)$$

Ako pretpostavimo da je $\beta' \neq \beta$, tada dobivamo

$$\vec{b} = \frac{\alpha' - \alpha}{\beta - \beta'}\vec{a}$$

iz čega slijedi da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, što je kontradikcija s pretpostavkom. Stoga mora biti $\beta' = \beta$.

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

Koordinatni prikaz skalarnog produkta

Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvrštavanjem $\beta' = \beta$ u (♠) slijedi

$$(\alpha - \alpha')\vec{a} = \vec{0}.$$

Kako je $\vec{a} \neq \vec{0}$ (u protivnom bi vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ bili kolinearni), mora biti i $\alpha' = \alpha$. ♡

Napomena.

Ako vrijedi $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, tada kažemo da je vektor $\vec{c}$ prikazan kao **linearna kombinacija** vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Neka je V^2 skup svih vektora u nekoj ravnini π. Kako su svaka tri vektora iz V^2 komplanarni, prema prethodnom teoremu vrijedi sljedeće:

Ako su $\vec{a}, \vec{b} \in V^2$ bilo koji nekolinearni vektori, tada se svaki vektor iz V^2 može na jedinstveni način prikazati kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Definicija baze za V^2

Svaki uređeni par $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$ koji se sastoji od dva nekolinearna vektora iz V^2 zovemo bazom za V^2.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Korolar 1.3.

Svaki vektor iz V^2 može se na jedinstveni način prikazati u bilo kojoj odabranoj bazi za V^2.

Zadatak 1.4.

Objasnite zbog čega uređeni par $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$ od dva kolinearna vektora iz V^2 ne zovemo bazom za V^2 ako želimo sačuvati istinitost prethodnog korolara.

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

Koordinatni prikaz skalarnog produkta

Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Neka je $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$ neka baza za V^2 i $\vec{c} \in V^2$ proizvoljni vektor.

- Postoje jedinstveni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.
- U tom slučaju kratko pišemo $\vec{c} = (\alpha, \beta)$.
- Uređeni par (α, β) zovemo **koordinatama** vektora $\vec{c}$ u bazi $\mathcal{B}$.
- U različitim bazama $\mathcal{B}_1 = (\vec{a}_1, \vec{b}_1)$ i $\mathcal{B}_2 = (\vec{a}_2, \vec{b}_2)$ isti vektor ima općenito različite koordinate.

$$\vec{c} = \alpha_1\vec{a}_1 + \beta_1\vec{b}_1, \quad \vec{c} = \alpha_2\vec{a}_2 + \beta_2\vec{b}_2$$

  Također kratko pišemo $\vec{c} = (\alpha_1, \beta_1)$ i $\vec{c} = (\alpha_2, \beta_2)$, ali moramo imati na umu i baze $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ s obzirom na koje vektor $\vec{c}$ ima te koordinate.
- Svake dvije baze za V^2 imaju uvijek dva elementa pa zbog toga kažemo da je dimenzija od V^2 jednaka 2 i kratko pišemo $\dim V^2 = 2$. Intuitivno, ravnina je dvodimenzionalni objekt.

Napomena.

Važan je poredak vektora u bazi. Na primjer, neka su $\mathcal{B}_1 = (\vec{a}, \vec{b})$ i $\mathcal{B}_2 = (\vec{b}, \vec{a})$ dvije baze za V^2 s istim vektorima, ali u različitom poretku. Ako je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, tada su

- $\vec{c} = (\alpha, \beta)$ koordinate vektora $\vec{c}$ u bazi $\mathcal{B}_1$,
- $\vec{c} = (\beta, \alpha)$ koordinate vektora $\vec{c}$ u bazi $\mathcal{B}_2$,
- $\vec{a} = (1, 0)$ koordinate vektora $\vec{a}$ u bazi $\mathcal{B}_1$,
- $\vec{a} = (0, 1)$ koordinate vektora $\vec{a}$ u bazi $\mathcal{B}_2$,
- $\vec{b} = (0, 1)$ koordinate vektora $\vec{b}$ u bazi $\mathcal{B}_1$,
- $\vec{b} = (1, 0)$ koordinate vektora $\vec{b}$ u bazi $\mathcal{B}_2$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Neka je $\mathcal{B} = \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ neka baza za V^2. Tada svaki vektor $\vec{c} \in V^2$ ima jedinstveni prikaz u bazi $\mathcal{B}$, tj. postoje jedinstveni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Stoga je dobro definirano preslikavanje

$$k : V^2 \to \mathbb{R}^2, \quad k(\vec{c}) = k(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = (\alpha, \beta)$$

kojeg zovemo **koordinatizacija** prostora V^2 s obzirom na bazu $\mathcal{B}$.

Preslikavanje k je bijekcija pa preko njega vršimo identifikaciju vektora $\vec{c}$ s uređenim parom (α, β) realnih brojeva tako da umjesto $k(\vec{c}) = (\alpha, \beta)$ kratko pišemo $\vec{c} = (\alpha, \beta)$. Ta identifikacija bitno ovisi o odabranoj bazi $\mathcal{B}$. Stoga bazu $\mathcal{B}$ nikad ne smijemo u potpunosti zaboraviti jer bez nje se nećemo moći vratiti natrag s uređenog para (α, β) realnih brojeva na vektor $\vec{c}$. Isto tako, bez odabrane baze $\mathcal{B}$ nismo u mogućnosti identificirati vektor iz V^2 s uređenim parom realnih brojeva.

Propozicija 1.10.

Neka je $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$ *baza za* V^2. *Neka su*

$$\vec{c} = (\alpha_1, \beta_1) \quad i \quad \vec{d} = (\alpha_2, \beta_2)$$

vektori iz V^2 *zadani svojim koordinatama u bazi* $\mathcal{B}$. *Tada je*

$$\vec{c} + \vec{d} = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2), \quad \lambda\vec{c} = (\lambda\alpha_1, \lambda\beta_1).$$

Dokaz.

Prema pretpostavci je

$$\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}, \quad \vec{d} = \alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b}$$

pa zbog komutativnosti zbrajanja vektora i distributivnosti u odnosu na zbrajanje skalara vrijedi

$$\vec{c} + \vec{d} = \left(\alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}\right) + \left(\alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b}\right) = (\alpha_1 + \alpha_2)\vec{a} + (\beta_1 + \beta_2)\vec{b}$$

iz čega slijedi $\vec{c} + \vec{d} = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

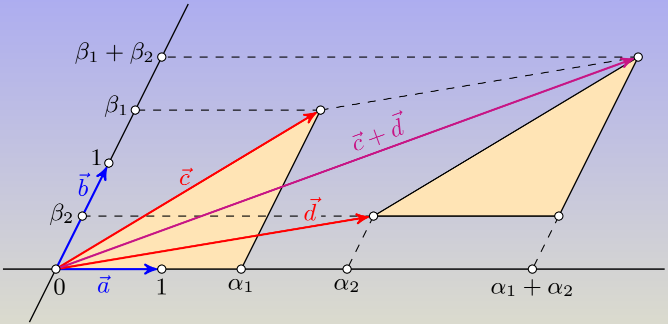
Zbog distributivnosti u odnosu na zbrajanje vektora i kvaziasocijativnosti vrijedi

$$\lambda\vec{c} = \lambda\big(\alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}\big) = \lambda\big(\alpha_1\vec{a}\big) + \lambda\big(\beta_1\vec{b}\big) = \big(\lambda\alpha_1\big)\vec{a} + \big(\lambda\beta_1\big)\vec{b}$$

pa je $\lambda\vec{c} = (\lambda\alpha_1, \lambda\beta_1)$. ♡

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Opustite se uz donji tihi dokaz. Slika sve govori. Svaka riječ je suvišna.



$$\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}$$

$$\vec{d} = \alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b}$$

$$\vec{c} + \vec{d} = (\alpha_1 + \alpha_2)\vec{a} + (\beta_1 + \beta_2)\vec{b}$$

Odabrana poglavlja matematike

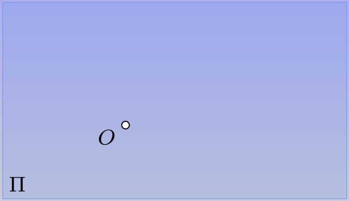
prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava u ravninu

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava u ravninu



Odaberemo neku točku O u ravnini Π. Točka O je izabrani fiksni predstavnik za nulvektor i određuje ishodište koordinatnog sustava.

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

Koordinatni prikaz skalarnog produkta

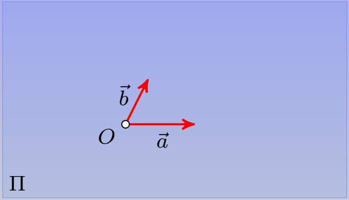
Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava u ravninu

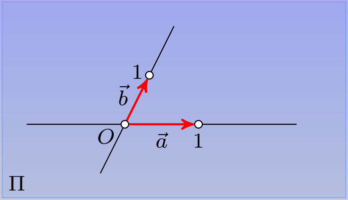


Odaberemo neku točku O u ravnini Π. Točka O je izabrani fiksni predstavnik za nulvektor i određuje ishodište koordinatnog sustava.

Odaberemo neku bazu $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$ za V^2, tj. dva nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u ravnini Π i nanesemo ih iz točke O.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava u ravninu



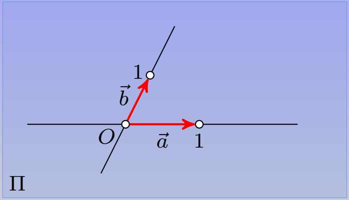
Odaberemo neku točku O u ravnini Π. Točka O je izabrani fiksni predstavnik za nulvektor i određuje ishodište koordinatnog sustava.

Odaberemo neku bazu $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$ za V^2, tj. dva nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u ravnini Π i nanesemo ih iz točke O.

Odabrani vektori određuju smjerove koordinatnih osi i jedinične dužine na tim osima.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava u ravninu



Odaberemo neku točku O u ravnini Π. Točka O je izabrani fiksni predstavnik za nulvektor i određuje ishodište koordinatnog sustava.

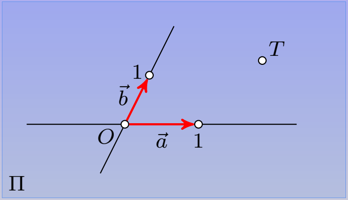
Odaberemo neku bazu $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$ za V^2, tj. dva nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u ravnini Π i nanesemo ih iz točke O.

Odabrani vektori određuju smjerove koordinatnih osi i jedinične dužine na tim osima.

Uređeni par $(O, \mathcal{B})$ zovemo koordinatni sustav u ravnini Π.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava u ravninu



Kako pridružiti koordinate nekoj točki T u ravnini Π?

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

Koordinatni prikaz skalarnog produkta

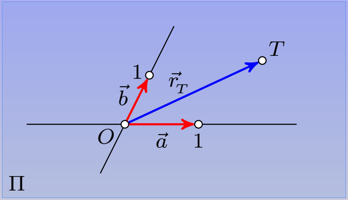
Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava u ravninu

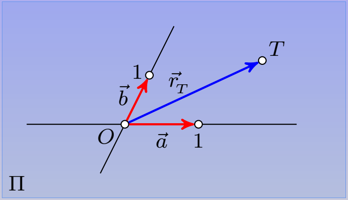


Kako pridružiti koordinate nekoj točki T u ravnini Π?

Pogledamo vektor $\vec{r}_T = \overrightarrow{OT}$ kojeg zovemo radijvektor točke T.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava u ravninu



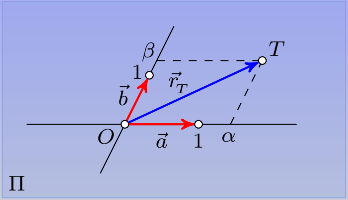
Kako pridružiti koordinate nekoj točki T u ravnini Π?

Pogledamo vektor $\vec{r}_T = \overrightarrow{OT}$ kojeg zovemo radijvektor točke T.

Vektor $\vec{r}_T$ ima jedinstveni prikaz u bazi $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$, tj. postoje jedinstveni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{r}_T = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava u ravninu



Kako pridružiti koordinate nekoj točki T u ravnini Π?

Pogledamo vektor $\vec{r}_T = \overrightarrow{OT}$ kojeg zovemo radijvektor točke T.

Vektor $\vec{r}_T$ ima jedinstveni prikaz u bazi $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$, tj. postoje jedinstveni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{r}_T = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Točki T pridružujemo koordinate (α, β) i pišemo $T(\alpha, \beta)$.

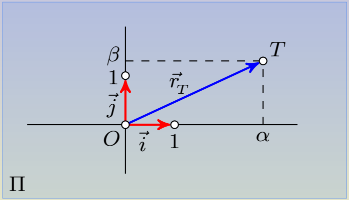
Koordinate točke podudaraju se s koordinatama radijvektora te točke.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Ako uzmemo **ortonormiranu bazu** $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ za V^2, tj. bazu za koju vrijedi

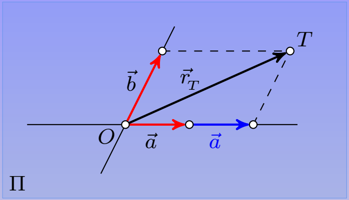
- $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$,
- $\vec{i} \perp \vec{j}$,

tada dobivamo Kartezijev koordinatni sustav u ravnini.



$$\vec{r}_T = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}, \quad T(\alpha, \beta)$$

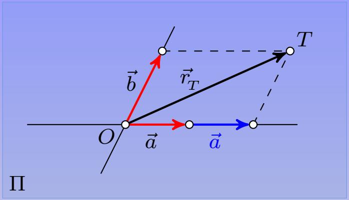
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



$$\mathcal{B}_1 = (\vec{a}, \vec{b}), \quad \mathcal{B}_2 = (\vec{b}, \vec{a}), \quad \mathcal{B}_3 = (2\vec{a}, \vec{b})$$

- U koordinatnom sustavu $(O, \mathcal{B}_1)$ točka T ima koordinate $(2, 1)$ jer je $\vec{r}_T = 2 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b}$.
- U koordinatnom sustavu $(O, \mathcal{B}_2)$ točka T ima koordinate $(1, 2)$ jer je $\vec{r}_T = 1 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{a}$.
- U koordinatnom sustavu $(O, \mathcal{B}_3)$ točka T ima koordinate $(1, 1)$ jer je $\vec{r}_T = 1 \cdot (2\vec{a}) + 1 \cdot \vec{b}$.
- Veza između dvije baze od V^2 daje vezu između pripadnih koordinatnih sustava s istim ishodištem.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



$$\mathcal{B}_1 = (\vec{a}, \vec{b}), \quad \mathcal{B}_2 = (\vec{b}, \vec{a}), \quad \mathcal{B}_3 = (2\vec{a}, \vec{b})$$

- U koordinatnom sustavu $(O, \mathcal{B}_1)$ točka T ima koordinate $(2, 1)$ jer je $\vec{r}_T = 2 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b}$.
- U koordinatnom sustavu $(O, \mathcal{B}_2)$ točka T ima koordinate $(1, 2)$ jer je $\vec{r}_T = 1 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{a}$.
- Detaljnije o vezi između različitih baza bit će više riječi kod vektorskih prostora gdje ćemo uvesti pojam matrice prijelaza.
- Veza između dvije baze od V^2 daje vezu između pripadnih koordinatnih sustava s istim ishodištem.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pojam baze u V^3

Jasno je da u V^3 postoje tri vektora koji nisu komplanarni, tj. nisu paralelni s istom ravninom. Pomoću takva tri vektora moguće je izraziti sve preostale vektore iz V^3. Preciznije, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 1.4.

Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ nekomplanarni vektori. Ako je $d \in V^3$ bilo koji vektor, onda postoje jedinstveni skalari $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Dokaz.

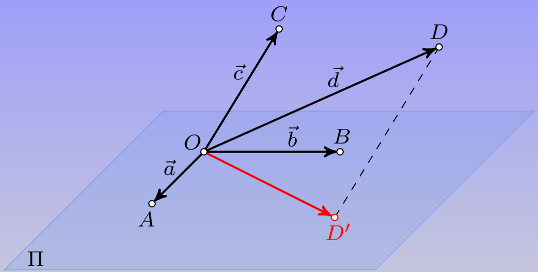
Egzistencija

Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$. Kako vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ nisu komplanarni

- točke O, A, B, C ne leže u istoj ravnini,
- točke O, A, B ne leže na istom pravcu.

Kako točke O, A, B ne leže na istom pravcu, tada određuju neku ravninu Π. Paralela točkom D s pravcem OC siječe ravninu Π u točki D' kako je prikazano na sljedećoj slici.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Vektori $\overrightarrow{OD'}, \vec{a}, \vec{b}$ su komplanarni pa postoje skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\overrightarrow{OD'} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Nadalje, kako je $OC \parallel DD'$, vektori $\overrightarrow{D'D}$ i $\vec{c}$ su kolinearni pa postoji $\gamma \in \mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{D'D} = \gamma\vec{c}$. Konačno je

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{D'D}$$
$$\vec{d} = \left(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\right) + \gamma\vec{c}$$
$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Jedinstvenost

Pretpostavimo da je

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$
$$\vec{d} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b} + \gamma'\vec{c}.$$

Oduzimanjem gornjih dviju jednakosti dobivamo

$$(\alpha - \alpha')\vec{a} + (\beta - \beta')\vec{b} + (\gamma - \gamma')\vec{c} = \vec{0}. \qquad (\spadesuit)$$

Ako je $\gamma' \neq \gamma$, tada je

$$\vec{c} = \frac{\alpha' - \alpha}{\gamma - \gamma'} \cdot \vec{a} + \frac{\beta' - \beta}{\gamma - \gamma'} \cdot \vec{b}$$

pa bi vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bili komplanarni, što je kontradikcija s pretpostavkom. Dakle, mora biti $\gamma' = \gamma$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvrstimo li $\gamma' = \gamma$ u (♠), dobivamo

$$(\alpha - \alpha')\vec{a} + (\beta - \beta')\vec{b} = \vec{0}. \qquad (\clubsuit)$$

Ako je $\beta' \neq \beta$, tada je

$$\vec{b} = \frac{\alpha' - \alpha}{\beta - \beta'} \cdot \vec{a}$$

pa bi vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ bili kolinearni, što je nemoguće jer su po pretpostavci vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nekomplanarni. Dakle, mora biti $\beta' = \beta$. Konačno, uvrstimo li u (♣) $\beta' = \beta$ dobivamo da mora biti i $\alpha' = \alpha$.

♡

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Napomena.

Ako vrijedi $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, tada kažemo da je vektor $\vec{d}$ prikazan kao **linearna kombinacija** vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$.

Prethodni teorem možemo izreći na sljedeći način:

Ako su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ nekomplanarni vektori, tada se svaki vektor iz V^3 može prikazati na jedinstveni način kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Definicija baze za V^3

Svaku uređenu trojku $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ koja se sastoji od tri nekomplanarna vektora iz V^3 zovemo bazom za V^3.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Korolar 1.4.

Svaki vektor iz V^3 može se na jedinstveni način prikazati u bilo kojoj odabranoj bazi za V^3.

Zadatak 1.5.

Objasnite zbog čega uređenu trojku $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ od tri komplanarna vektora iz V^3 ne zovemo bazom za V^3 ako želimo sačuvati istinitost prethodnog korolara.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Neka je $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ neka baza za V^3 i $\vec{d} \in V^3$ proizvoljni vektor.

- Postoje jedinstveni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.
- U tom slučaju kratko pišemo $\vec{d} = (\alpha, \beta, \gamma)$.
- Uređenu trojku (α, β, γ) zovemo **koordinatama** vektora $\vec{d}$ u bazi $\mathcal{B}$.
- U različitim bazama $\mathcal{B}_1 = (\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1)$ i $\mathcal{B}_2 = (\vec{a}_2, \vec{b}_2, \vec{c}_2)$ isti vektor ima općenito različite koordinate.

$$\vec{d} = \alpha_1\vec{a}_1 + \beta_1\vec{b}_1 + \gamma_1\vec{c}_1, \quad \vec{d} = \alpha_2\vec{a}_2 + \beta_2\vec{b}_2 + \gamma_2\vec{c}_2$$

  Također kratko pišemo $\vec{d} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ i $\vec{d} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, ali moramo imati na umu i baze $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ s obzirom na koje vektor $\vec{d}$ ima te koordinate.
- Svake dvije baze za V^3 imaju uvijek tri elementa pa zbog toga kažemo da je dimenzija od V^3 jednaka 3 i kratko pišemo $\dim V^3 = 3$. Intuitivno, prostor u kojem živimo je trodimenzionalni objekt.

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

Koordinatni prikaz skalarnog produkta

Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Napomena.

Važan je poredak vektora u bazi. Na primjer, neka su

$$\mathcal{B}_1 = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \quad \text{i} \quad \mathcal{B}_2 = (\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$$

dvije baze za V^3 s istim vektorima, ali u različitom poretku. Ako je $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, tada su

- $\vec{d} = (\alpha, \beta, \gamma)$ koordinate vektora $\vec{d}$ u bazi $\mathcal{B}_1$,
- $\vec{d} = (\beta, \alpha, \gamma)$ koordinate vektora $\vec{d}$ u bazi $\mathcal{B}_2$,
- $\vec{a} = (1, 0, 0)$ koordinate vektora $\vec{a}$ u bazi $\mathcal{B}_1$,
- $\vec{a} = (0, 1, 0)$ koordinate vektora $\vec{a}$ u bazi $\mathcal{B}_2$,
- $\vec{b} = (0, 1, 0)$ koordinate vektora $\vec{b}$ u bazi $\mathcal{B}_1$,
- $\vec{b} = (1, 0, 0)$ koordinate vektora $\vec{b}$ u bazi $\mathcal{B}_2$,
- $\vec{c} = (0, 0, 1)$ koordinate vektora $\vec{c}$ u bazi $\mathcal{B}_1$,
- $\vec{c} = (0, 0, 1)$ koordinate vektora $\vec{c}$ u bazi $\mathcal{B}_2$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Neka je $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ neka baza za V^3. Tada svaki vektor $\vec{d} \in V^3$ ima jedinstveni prikaz u bazi $\mathcal{B}$, tj. postoje jedinstveni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Stoga je dobro definirano preslikavanje

$$k : V^3 \to \mathbb{R}^3, \quad k(\vec{d}) = k(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) = (\alpha, \beta, \gamma)$$

kojeg zovemo **koordinatizacija** prostora V^3 s obzirom na bazu $\mathcal{B}$.

Preslikavanje k je bijekcija pa preko njega vršimo identifikaciju vektora $\vec{d}$ s uređenom trojkom (α, β, γ) realnih brojeva tako da umjesto $k(\vec{d}) = (\alpha, \beta, \gamma)$ kratko pišemo $\vec{d} = (\alpha, \beta, \gamma)$. Ta identifikacija bitno ovisi o odabranoj bazi $\mathcal{B}$. Stoga bazu $\mathcal{B}$ nikad ne smijemo u potpunosti zaboraviti jer bez nje se nećemo moći vratiti natrag s uređene trojke (α, β, γ) realnih brojeva na vektor $\vec{d}$. Isto tako, bez odabrane baze $\mathcal{B}$ nismo u mogućnosti identificirati vektor iz V^3 s uređenom trojkom realnih brojeva.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Propozicija 1.11.

Neka je $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *baza za* V^3. *Neka su*

$$\vec{d}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \quad i \quad \vec{d}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$$

vektori iz V^3 *zadani svojim koordinatama u bazi* $\mathcal{B}$. *Tada je*

$$\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2), \quad \lambda\vec{d}_1 = (\lambda\alpha_1, \lambda\beta_1, \lambda\gamma_1).$$

Dokaz.

Prema pretpostavci je

$$\vec{d}_1 = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}, \quad \vec{d}_2 = \alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b} + \gamma_3\vec{c}$$

pa zbog komutativnosti zbrajanja vektora i distributivnosti u odnosu na zbrajanje skalara vrijedi

Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

$$\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = \big(\alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}\big) + \big(\alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b} + \gamma_2\vec{c}\big) =$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2)\vec{a} + (\beta_1 + \beta_2)\vec{b} + (\gamma_1 + \gamma_2)\vec{c}$$

iz čega slijedi $\vec{c} + \vec{d} = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2)$.

Zbog distributivnosti u odnosu na zbrajanje vektora i kvaziasocijativnosti vrijedi

$$\begin{aligned}\lambda\vec{d}_1 &= \lambda\big(\alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}\big) = \\ &= \lambda\big(\alpha_1\vec{a}\big) + \lambda\big(\beta_1\vec{b}\big) + \lambda\big(\gamma_1\vec{c}\big) = \\ &= \big(\lambda\alpha_1\big)\vec{a} + \big(\lambda\beta_1\big)\vec{b} + \big(\lambda\gamma_1\big)\vec{c}\end{aligned}$$

pa je $\lambda\vec{d}_1 = (\lambda\alpha_1, \lambda\beta_1, \lambda\gamma_1)$. ♡

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Korolar 1.5.

Neka su $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *i* $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *vektori iz* V^3 *različiti od nulvektora zadani svojim koordinatama u nekoj bazi. Vektori* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *su kolinearni ako i samo ako imaju proporcionalne koordinate, tj. vrijedi*

$$\alpha_1 : \beta_1 = \alpha_2 : \beta_2 = \alpha_3 : \beta_3.$$

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

Koordinatni prikaz skalarnog produkta

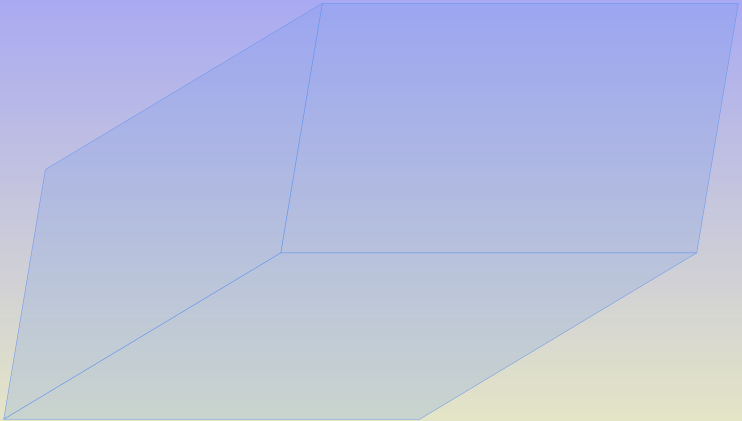
Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava u prostor



Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

Koordinatni prikaz skalarnog produkta

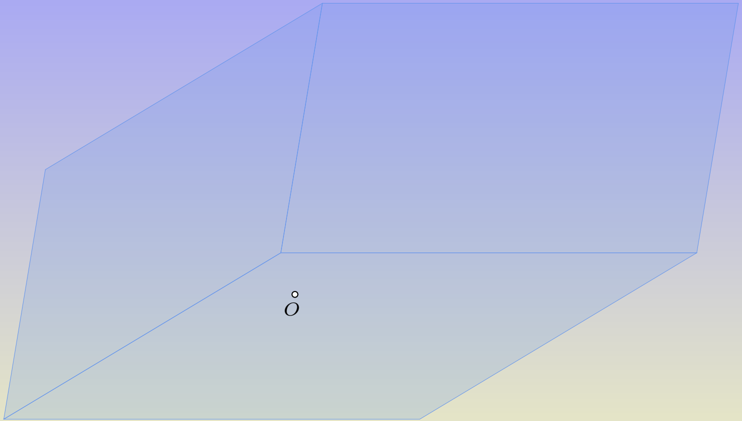
Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava u prostor



Odaberemo neku točku O u prostoru E^3. Točka O je izabrani fiksni predstavnik za nulvektor i određuje ishodište koordinatnog sustava.

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

Koordinatni prikaz skalarnog produkta

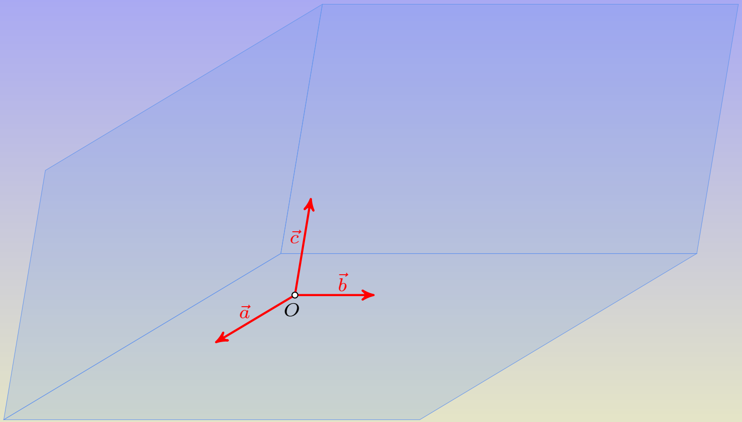
Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

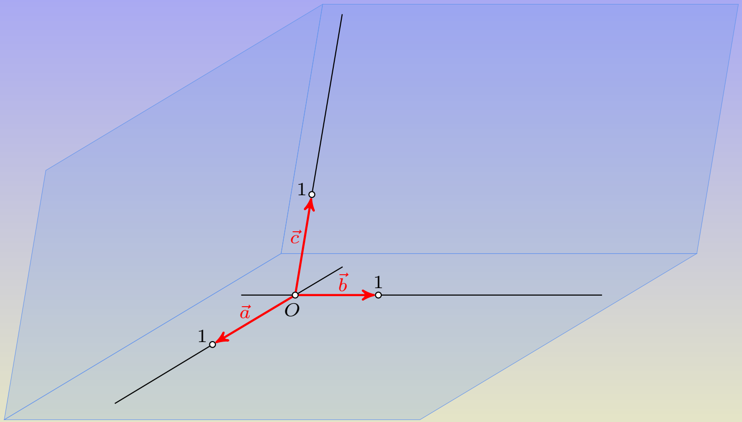
Uvođenje koordinatnog sustava u prostor



Odaberemo neku bazu $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ za V^3, tj. tri nekomplanarna vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ u prostoru i nanesemo ih iz točke O.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava u prostor



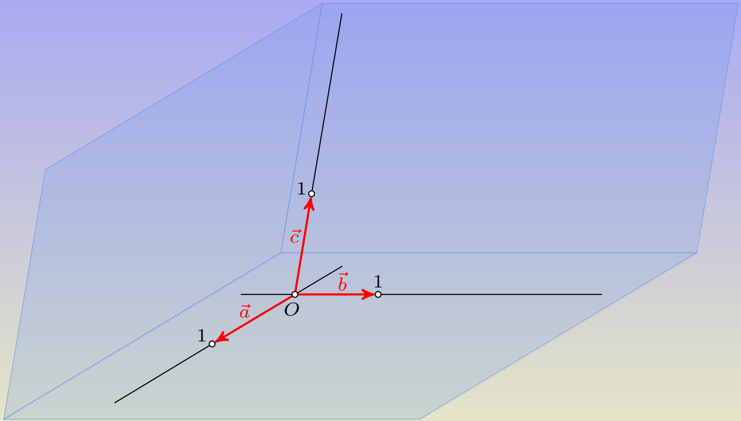
Odabrani vektori određuju smjerove koordinatnih osi i jedinične dužine na tim osima.

Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava u prostor

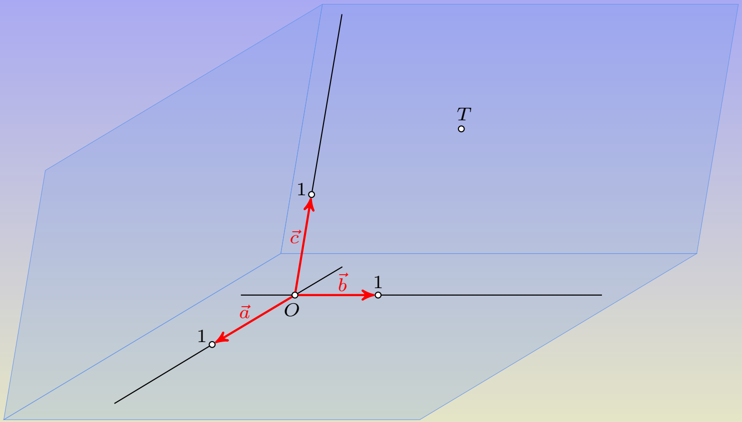


Uređeni par $(O, \mathcal{B})$ zovemo koordinatni sustav u prostoru E^3.

$$\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava u prostor



Kako pridružiti koordinate nekoj točki T u prostoru E^3?

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

Koordinatni prikaz skalarnog produkta

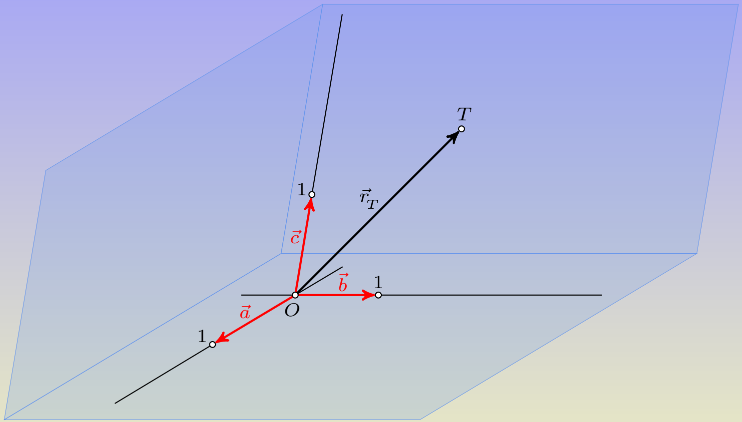
Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

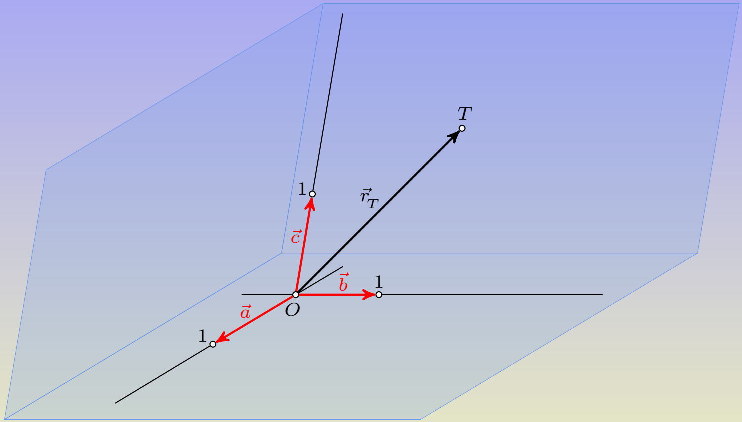
Uvođenje koordinatnog sustava u prostor



Pogledamo vektor $\vec{r}_T = \overrightarrow{OT}$ kojeg zovemo radijvektor točke T.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava u prostor



Vektor $\vec{r}_{_T}$ ima jedinstveni prikaz u bazi $\mathcal{B} = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$, tj. postoje jedinstveni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{r}_{_T} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

Koordinatni prikaz skalarnog produkta

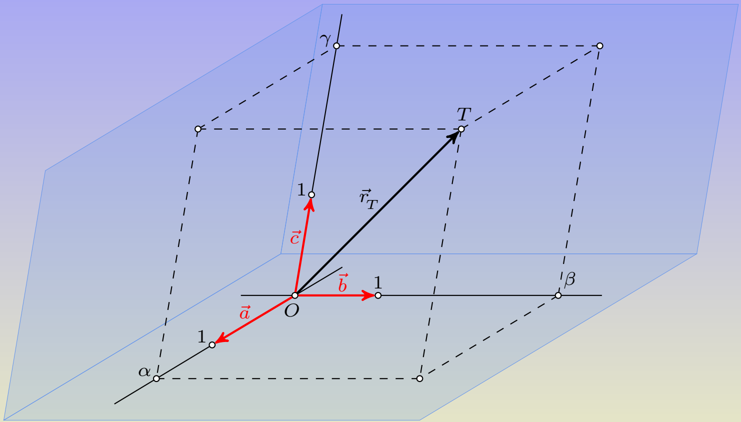
Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava u prostor

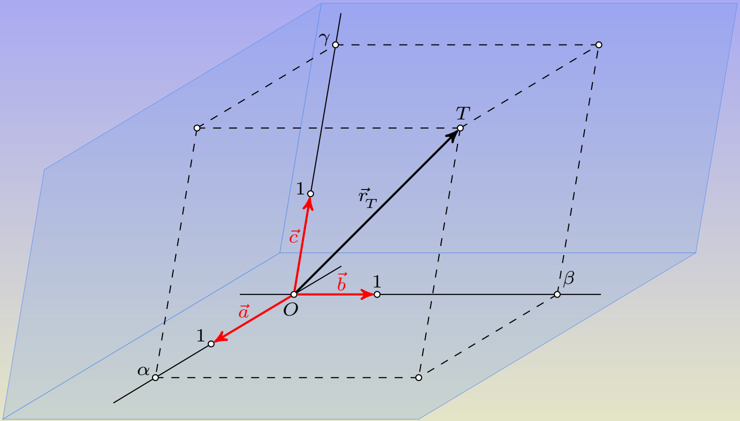


Vektor $\vec{r}_T$ ima jedinstveni prikaz u bazi $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, tj. postoje jedinstveni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{r}_T = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Točki T pridružujemo koordinate (α, β, γ) i pišemo $T(\alpha, \beta, \gamma)$.

Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Uvođenje koordinatnog sustava u prostor



Koordinate točke podudaraju se s koordinatama radijvektora te točke.

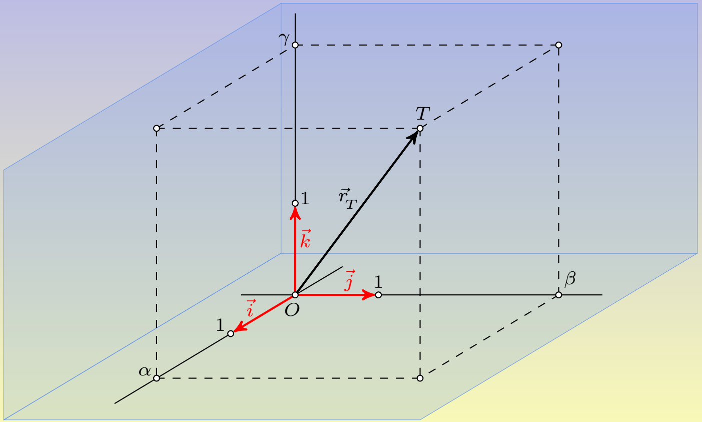
$$\vec{r}_T = (\alpha, \beta, \gamma), \quad T(\alpha, \beta, \gamma)$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Ako uzmemo **ortonormiranu bazu** $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ za V^3, tj. bazu za koju vrijedi

- $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$,
- $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$,

tada dobivamo Kartezijev koordinatni sustav u prostoru.



Neka su $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ dvije baze za V^3 i O proizvoljna odabrana točka u prostoru E^3.

- U koordinatnim sustavima $(O, \mathcal{B}_1)$ i $(O, \mathcal{B}_2)$ s istim ishodištem točka $T \in E^3$ ima općenito različite koordinate.
- Veza između baza $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ daje vezu između pripadnih koordinatnih sustava s istim ishodištem.
- Detaljnije o vezi između dviju baza na nivou vektorskih prostora bit će više riječi kasnije gdje će od iznimne važnosti biti pojam **matrice prijelaza** između dviju baza u danom vektorskom prostoru.
- Pomoću matrice prijelaza možemo povezati koordinate jedne te iste točke u dva različita koordinatna sustava s istim ishodištem: na pravcu, u ravnini, u prostoru E^3 i općenitije u bilo kojem n-dimenzionalnom afinom prostoru (vektorskom prostoru s točkovnom strukturom).

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Lijeva i desna baza

Pojam lijeve i desne baze može se definirati u proizvoljnom realnom vektorskom prostoru. Ovdje ćemo te pojmove uvesti na intuitivni način za baze u prostorima V^1, V^2 i V^3.

Vektore iz V^1 možemo poistovjetiti s vektorima na nekom odabranom pravcu p. Pojam lijeve i desne baze u V^1 je zapravo povezan s odabirom orijentacije na pravcu p. Znamo od ranije da svaki pravac možemo orijentirati na dva različita načina.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Neka je $\mathcal{B} = \{\vec{a}\}$ baza za V^1.

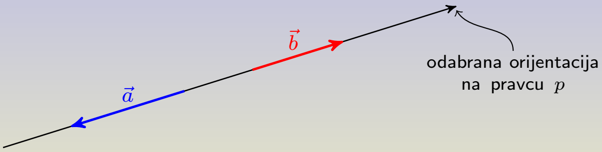
- Ako se orijentacija vektora $\vec{a}$ podudara s orijentacijom pripadnog orijentiranog pravca p, tada kažemo da je $\mathcal{B}$ **desna baza**.
- Ako se orijentacija vektora $\vec{a}$ ne podudara s orijentacijom pripadnog orijentiranog pravca p, tj. vektor $\vec{a}$ je suprotne orijentacije od odabrane orijentacije na pravcu p, tada kažemo da je $\mathcal{B}$ **lijeva baza**.

Intuitivno:

- Ako vektor $\vec{a}$ na pravcu p gleda na "desnu stranu", tada je $\mathcal{B}$ desna baza.
- Ako vektor $\vec{a}$ na pravcu p gleda na "lijevu stranu", tada je $\mathcal{B}$ lijeva baza.

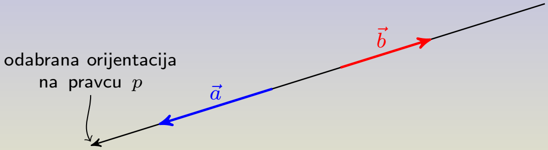
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pojam lijeve i desne strane na pravcu treba ovdje shvatiti čisto formalno. U biti, odabrana orijentacija na pravcu određuje lijevu i desnu stranu pravca. Desna strana pravca je ona strana na koju pokazuje odabrana orijentacija na pravcu, dok je lijeva strana pravca ona strana na koju ne pokazuje odabrana orijentacija na pravcu.



- $\mathcal{B}_1 = \{\vec{a}\}$ je lijeva baza.
- $\mathcal{B}_2 = \{\vec{b}\}$ je desna baza.

Pojam lijeve i desne strane na pravcu treba ovdje shvatiti čisto formalno. U biti, odabrana orijentacija na pravcu određuje lijevu i desnu stranu pravca. Desna strana pravca je ona strana na koju pokazuje odabrana orijentacija na pravcu, dok je lijeva strana pravca ona strana na koju ne pokazuje odabrana orijentacija na pravcu.



- $\mathcal{B}_1 = \{\vec{a}\}$ je desna baza.
- $\mathcal{B}_2 = \{\vec{b}\}$ je lijeva baza.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

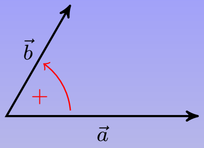
Vektore iz V^2 možemo poistovjetiti s vektorima u nekoj odabranoj ravnini Π. Pojam lijeve i desne baze u V^2 je povezan sa smjerom obilaska od prvog vektora prema drugom vektoru baze pri čemu se obilazak odvija unutar ravnine Π.

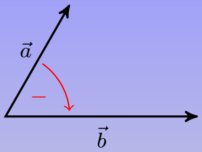
Neka je $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$ baza za V^2.

- Ako je smjer obilaska od vektora $\vec{a}$ prema vektoru $\vec{b}$ suprotan od smjera gibanja kazaljke na satu (pozitivni smjer), tada kažemo da je $\mathcal{B}$ **desna baza**.
- Ako je smjer obilaska od vektora $\vec{a}$ prema vektoru $\vec{b}$ jednak smjeru gibanja kazaljke na satu (negativni smjer), tada kažemo da je $\mathcal{B}$ **lijeva baza**.

Pritom podrazumijevamo da se obilazak od vektora $\vec{a}$ prema vektoru $\vec{b}$ odvija unutar kuta kojeg zatvaraju ta dva vektora.

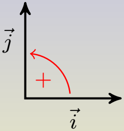
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta





$\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$ je desna baza $\qquad$ $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$ je lijeva baza

Standardna ortonormirana baza $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ za V^2 je desna baza.



Napomena.

Ako je $\mathcal{B}_1 = (\vec{a}, \vec{b})$ desna baza za V^2, tada je $\mathcal{B}_2 = (\vec{b}, \vec{a})$ lijeva baza za V^2.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Propozicija 1.12.

Neka je $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$ *baza za* V^2*. Neka su*

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{i} + \beta_1 \vec{j} \quad \text{i} \quad \vec{b} = \alpha_2 \vec{i} + \beta_2 \vec{j}$$

prikazi vektora $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *u standardnoj ortonormiranoj bazi. Neka je*

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

- $\mathcal{B}$ *je desna baza za* V^2 *ako i samo ako je* $D > 0$.
- $\mathcal{B}$ *je lijeva baza za* V^2 *ako i samo ako je* $D < 0$.

Vrijedi i općenitija tvrdnja. Naime, ne moraju se nužno gledati koordinate vektora u ortonormiranoj bazi, već se mogu gledati koordinate u bilo kojoj drugoj bazi za koju unaprijed znamo je li lijeva ili desna baza. Za naše potrebe je dovoljna gornja tvrdnja.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Primjer 1.1.

Zadane su baze $\mathcal{B}_1 = (\vec{a}, \vec{b})$ *i* $\mathcal{B}_2 = (\vec{c}, \vec{d})$ *za* V^2 *pri čemu je*

$$\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}, \quad \vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j}, \quad \vec{d} = 3\vec{i} - 2\vec{j}.$$

Koja je od zadanih baza lijeva, a koja desna?

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

Koordinatni prikaz skalarnog produkta

Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Primjer 1.1.

Zadane su baze $\mathcal{B}_1 = (\vec{a}, \vec{b})$ *i* $\mathcal{B}_2 = (\vec{c}, \vec{d})$ *za* V^2 *pri čemu je*

$$\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}, \quad \vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j}, \quad \vec{d} = 3\vec{i} - 2\vec{j}.$$

Koja je od zadanih baza lijeva, a koja desna?

Rješenje.

Kako je

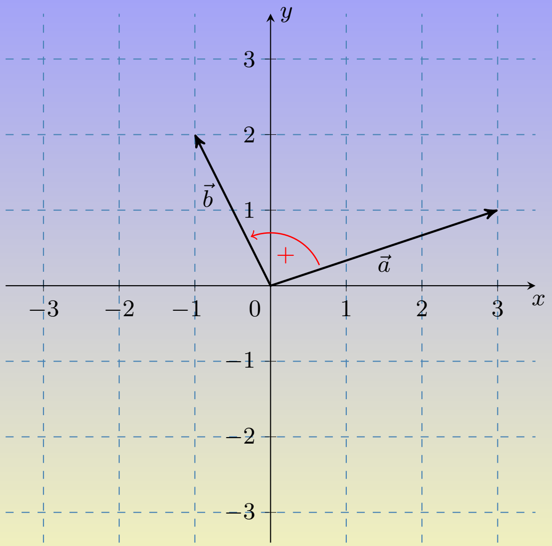
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 > 0,$$

baza $\mathcal{B}_1 = (\vec{a}, \vec{b})$ je desna baza za V^2. Nadalje, kako je

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0,$$

baza $\mathcal{B}_2 = (\vec{c}, \vec{d})$ je lijeva baza za V^2.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

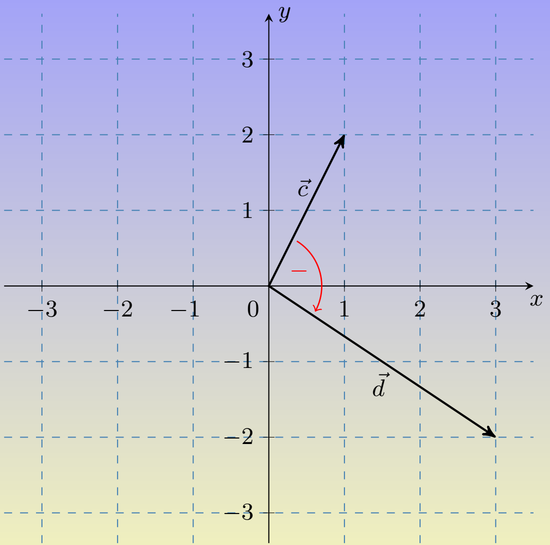
Koordinatni prikaz skalarnog produkta

Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



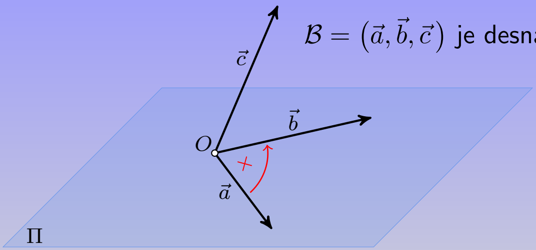
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Neka je $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ baza za V^3.

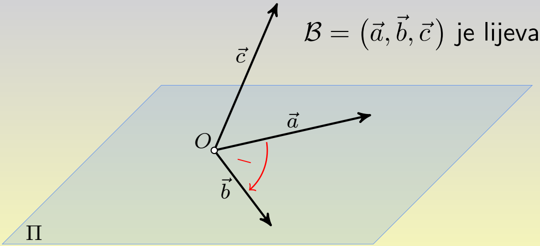
- Vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nanesemo iz iste točke O.
- Kako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni, određuju jedinstvenu ravninu Π kroz točku O.
- Ravnina Π dijeli prostor E^3 na dva poluprostora.
- Gledamo ravninu Π iz poluprostora u kojemu leži predstavnik vektora $\vec{c}$ nanešen iz točke O.
- Ako je smjer obilaska od vektora $\vec{a}$ prema vektoru $\vec{b}$ unutar kuta kojeg zatvaraju ta dva vektora suprotan od smjera gibanja kazaljke na satu (pozitivni smjer), tada kažemo da je $\mathcal{B}$ **desna baza** za V^3.
- Ako je smjer obilaska od vektora $\vec{a}$ prema vektoru $\vec{b}$ unutar kuta kojeg zatvaraju ta dva vektora jednak smjeru gibanja kazaljke na satu (negativni smjer), tada kažemo da je $\mathcal{B}$ **lijeva baza** za V^3.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

$\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je desna baza

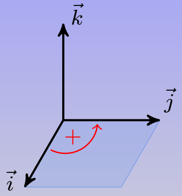


$\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je lijeva baza



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Standardna ortonormirana baza $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ za V^3 je desna baza.



Napomena.

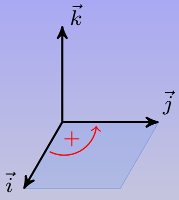
Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ desna baza za V^3. Tada vrijedi:

- $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ i $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ su također desne baze za V^3,
- $(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$, $(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$ i $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ su lijeve baze za V^3.

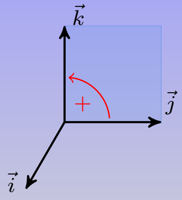
Drugim riječima, parnom permutacijom trojke vektora se čuva orijentacija baze, dok se neparnom permutacijom trojke vektora mijenja orijentacija baze.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

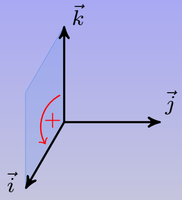
$\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ je desna baza



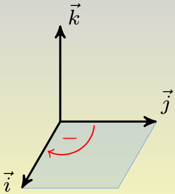
$\left(\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}\right)$ je desna baza



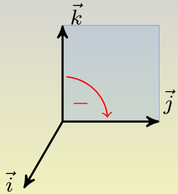
$\left(\vec{k}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ je desna baza



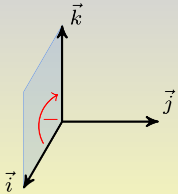
$\left(\vec{j}, \vec{i}, \vec{k}\right)$ je lijeva baza



$\left(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}\right)$ je lijeva baza



$\left(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}\right)$ je lijeva baza



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Propozicija 1.13.

Neka je $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *baza za* V^3. *Neka su*

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{i} + \beta_1\vec{j} + \gamma_1\vec{k},\ \vec{b} = \alpha_2\vec{i} + \beta_2\vec{j} + \gamma_2\vec{k},\ \vec{c} = \alpha_3\vec{i} + \beta_3\vec{j} + \gamma_3\vec{k}$$

prikazi vektora $\vec{a}, \vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *u standardnoj ortonormiranoj bazi. Neka je*

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

- $\mathcal{B}$ *je desna baza za* V^3 *ako i samo ako je* $D > 0$.
- $\mathcal{B}$ *je lijeva baza za* V^3 *ako i samo ako je* $D < 0$.

Vrijedi i općenitija tvrdnja. Naime, ne moraju se nužno gledati koordinate vektora u ortonormiranoj bazi, već se mogu gledati koordinate u bilo kojoj drugoj bazi za koju unaprijed znamo je li lijeva ili desna baza. Za naše potrebe je dovoljna gornja tvrdnja.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Primjer 1.2.

Zadani su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ *svojim koordinatama u standardnoj ortonormiranoj bazi:*

$$\vec{a} = \vec{i}, \quad \vec{b} = \vec{j}, \quad \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}.$$

Ispitajte je li $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *lijeva ili desna baza za* V^3.

Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Primjer 1.2.

Zadani su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ *svojim koordinatama u standardnoj ortonormiranoj bazi:*

$$\vec{a} = \vec{i}, \quad \vec{b} = \vec{j}, \quad \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}.$$

Ispitajte je li $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *lijeva ili desna baza za* V^3*.*

Rješenje.

Kako je

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

zaključujemo da je $\mathcal{B}$ lijeva baza za V^3.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Skalarni produkt vektora

Definicija kuta između vektora

Neka su $\vec{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ i $\vec{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ vektori iz V^3 različiti od nulvektora. Kut $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je mjerni broj neorijentiranog kuta $\sphericalangle AOB$ koji je u intervalu $[0, \pi]$.

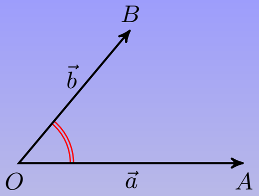
Ako je barem jedan od vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nulvektor, pojam kuta se ne definira.

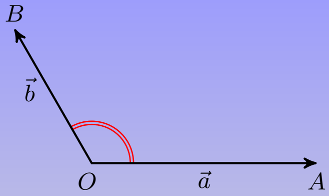
Pojam kuta između vektora je dobro definiran, tj. ne ovisi o izboru predstavnika jer su kutovi s paralelnim kracima sukladni.

Iz definicije slijedi $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{b}, \vec{a})$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

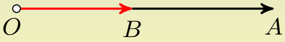


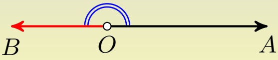


Ako je $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ kažemo da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ **okomiti** i pišemo $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako vrijedi jedan od sljedeća dva uvjeta:

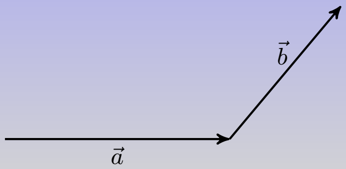
- $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 0$. U tom slučaju su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ istih orijentacija.
- $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi$. U tom slučaju su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ suprotnih orijentacija.





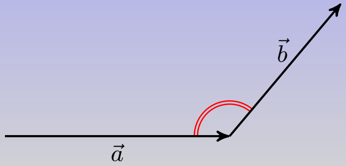
$$\sphericalangle\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = 0 \qquad \sphericalangle\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = \pi$$

Označite na slici kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

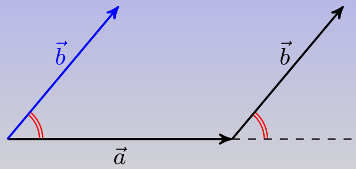
Označite na slici kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



Označeni kut na slici nije kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
Oprez: vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu nanešeni iz iste točke.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Označite na slici kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



Oba označena kuta na slici predstavljaju kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Definicija skalarnog produkta vektora

Skalarno množenje vektora je preslikavanje

$$u : V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$$

koje je definirano na sljedeći način:

- Ako je barem jedan od vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nulvektor, onda je $u(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.
- Ako je $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$, onda je

$$u(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

Realni broj $u(\vec{a}, \vec{b})$ zovemo **skalarni produkt** vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Najčešće koristimo kraće oznake:

- $u(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}\,\vec{b}$
- $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos(\vec{a}, \vec{b})$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Propozicija 1.14 (Karakterizacija okomitih vektora).

Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ vektori različiti od nulvektora. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su okomiti ako i samo ako je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Neka je $\vec{a} \perp \vec{b}$. Tada je $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ pa zbog $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$ slijedi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\frac{\pi}{2} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$

Neka je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Tada zbog $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$ slijedi

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0, \quad |\vec{a}| \neq 0, \quad |\vec{b}| \neq 0$$

pa mora biti $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Kako je $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$, zaključujemo da je $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ pa je $\vec{a} \perp \vec{b}$. ♡

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Propozicija 1.15.

Za svaki vektor $\vec{a} \in V^3$ *vrijedi* $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Dokaz.

Ako je $\vec{a} = \vec{0}$, tada vrijedi $\vec{0}^2 = \vec{0} \cdot \vec{0} = 0 = |\vec{0}|^2$.

Ako je $\vec{a} \neq \vec{0}$, tada vrijedi

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 \cdot 1 = |\vec{a}|^2.$$

♡

Propozicija 1.16.

Za svaki izbor $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ *vrijedi*

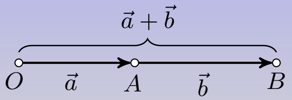
$$\left(\vec{a} \pm \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 \pm 2\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^2.$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Dokaz.

Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. Tada je $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Razlikujemo više slučajeva.

- Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni i istih su orijentacija.



$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \;/^2$$

$$\boxed{\cos 0 = 1}$$

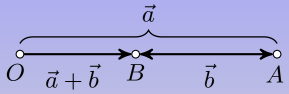
$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos 0 + |\vec{b}|^2$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^{\,2} + 2\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^{\,2}$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

- Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni i suprotnih su orijentacija.



$$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi$$

$$|\vec{a}+\vec{b}| = \big||\vec{a}| - |\vec{b}|\big| \ /^2$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = \left(|\vec{a}| - |\vec{b}|\right)^2$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2$$

$$\boxed{\cos\pi = -1}$$

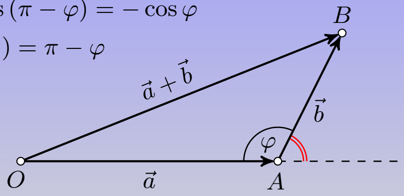
$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos\pi + |\vec{b}|^2$$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^{\,2} + 2\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^{\,2}$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

- Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni.

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$$
$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi - \varphi$$



Primjenom kosinusovog poučka na trokut OAB dobivamo:

$$|OB|^2 = |OA|^2 + |AB|^2 - 2|OA| \cdot |AB| \cos\varphi$$
$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$$
$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$
$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^2$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Konačno, prema upravo dokazanom vrijedi

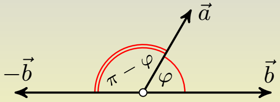
$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a}+(-\vec{b})\right)^2 = \vec{a}^{\,2} + 2\vec{a}\cdot(-\vec{b}) + (-\vec{b})^2.$$

Kako su suprotni vektori istih duljina, vrijedi

$$(-\vec{b})^2 = |-\vec{b}|^2 = |\vec{b}|^2 = \vec{b}^{\,2}.$$

Isto tako, kako je $\sphericalangle\left(\vec{a},-\vec{b}\right) = \pi - \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ slijedi

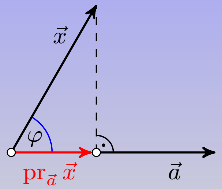
$$\vec{a}\cdot(-\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\vec{a},-\vec{b}\right) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\pi-\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right) =$$
$$= -|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = -\vec{a}\cdot\vec{b}\,.$$

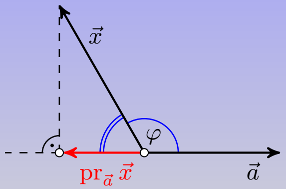


Stoga je zaista $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^{\,2} - 2\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^{\,2}$. ♡

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Ortogonalna projekcija vektora na vektor





$$\cos\varphi = \frac{|\,\mathrm{pr}_{\vec{a}}\,\vec{x}|}{|\vec{x}|} \qquad\qquad \cos(\pi-\varphi) = \frac{|\,\mathrm{pr}_{\vec{a}}\,\vec{x}|}{|\vec{x}|}$$

Zbog $\cos(\pi-\varphi) = -\cos\varphi$ vrijedi

$$\pm\cos\varphi = \frac{|\,\mathrm{pr}_{\vec{a}}\,\vec{x}|}{|\vec{x}|} \tag{$\spadesuit$}$$

pri čemu uzimamo pozitivni predznak ako je $\sphericalangle(\vec{a},\vec{x}) < \frac{\pi}{2}$, a negativni predznak ako je $\sphericalangle(\vec{a},\vec{x}) > \frac{\pi}{2}$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Kako iz definicije skalarnog produkta slijedi

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\,\vec{x}}{|\vec{a}||\vec{x}|}$$

uvrštavanjem u (♠) dalje dobivamo

$$\pm\frac{\vec{a}\,\vec{x}}{|\vec{a}||\vec{x}|} = \frac{|\operatorname{pr}_{\vec{a}}\vec{x}|}{|\vec{x}|}$$

odnosno nakon sređivanja

$$|\operatorname{pr}_{\vec{a}}\vec{x}| = \pm\frac{\vec{a}\,\vec{x}}{|\vec{a}|}.$$

Stoga je

$$\operatorname{pr}_{\vec{a}}\vec{x} = \pm|\operatorname{pr}_{\vec{a}}\vec{x}|\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}\,\vec{x}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a}.$$

Ortogonalna projekcija vektora na vektor

$$\mathrm{pr}_{\vec{a}}\,\vec{x} = \frac{\vec{a}\,\vec{x}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a}$$

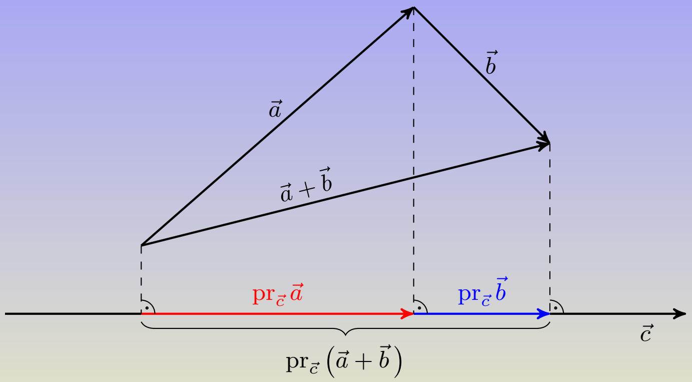
Vektor $\mathrm{pr}_{\vec{a}}\,\vec{x}$ zovemo **ortogonalna projekcija** vektora $\vec{x}$ na vektor $\vec{a}$.

Aditivnost ortogonalne projekcije

$$\mathrm{pr}_{\vec{c}}\,(\vec{a}+\vec{b}) = \mathrm{pr}_{\vec{c}}\,\vec{a} + \mathrm{pr}_{\vec{c}}\,\vec{b}$$

Kratko riječima rečeno: *Projekcija sume vektora jednaka je sumi projekcija pojedinih vektora.* U ovo prekrasno svojstvo ortogonalne projekcije vektora uvjerit ćemo se zorno na sljedećoj slici. Prepustite slici svoje misli jer slika sve govori. Svaka riječ je suvišna.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



$$\mathrm{pr}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\mathrm{pr}_{\vec{c}}\,\vec{a}+\mathrm{pr}_{\vec{c}}\,\vec{b}$$

Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Teorem 1.5 (Svojstva skalarnog produkta).

Za svaki izbor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$ *vrijedi:*

1. *komutativnost:* $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$
2. *kvaziasocijativnost:* $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\,\vec{b})$
3. *distributivnost prema zbrajanju:* $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$
4. *pozitivna definitnost:*
   - $\vec{a}^{\,2} \geqslant 0$
   - $\vec{a}^{\,2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a} = \vec{0}$

Dokaz.

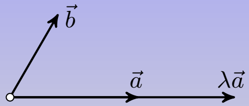
1. Komutativnost slijedi direktno iz definicije skalarnog produkta.

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{b}, \vec{a}) = \vec{b}\,\vec{a}$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

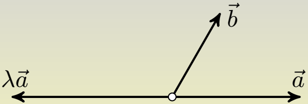
2. Ako je $\lambda = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$, tada tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo stoga da je $\lambda \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Ako je $\lambda > 0$, tada je $|\lambda\vec{a}| = \lambda|\vec{a}|$ i $\sphericalangle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ pa je



$$(\lambda\vec{a})\vec{b} = |\lambda\vec{a}||\vec{b}|\cos(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}\,\vec{b})$$

Ako je $\lambda < 0$, tada je $|\lambda\vec{a}| = -\lambda|\vec{a}|$ i $\sphericalangle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \pi - \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ pa je



$$(\lambda\vec{a})\vec{b} = |\lambda\vec{a}||\vec{b}|\cos(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = -\lambda|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi - \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) =$$
$$= \lambda|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}\,\vec{b})$$

Odabrana poglavlja matematike
prof.dr.sc. Blaženka Divjak
Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

3. Ako je $\vec{c} = \vec{0}$, tvrdnja očito vrijedi. Ako je $\vec{c} \neq \vec{0}$, iz aditivnosti ortogonalne projekcije slijedi

$$\text{pr}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \text{pr}_{\vec{c}}\,\vec{a} + \text{pr}_{\vec{c}}\,\vec{b}$$

$$\frac{(\vec{a}+\vec{b}\,)\vec{c}}{|\vec{c}\,|^2}\cdot\vec{c} = \frac{\vec{a}\,\vec{c}}{|\vec{c}\,|^2}\cdot\vec{c} + \frac{\vec{b}\,\vec{c}}{|\vec{c}\,|^2}\cdot\vec{c}$$

$$\frac{(\vec{a}+\vec{b}\,)\vec{c}}{|\vec{c}\,|^2}\cdot\vec{c} = \frac{\vec{a}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}}{|\vec{c}\,|^2}\cdot\vec{c}$$

$$\frac{(\vec{a}+\vec{b}\,)\vec{c}}{|\vec{c}\,|^2} = \frac{\vec{a}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}}{|\vec{c}\,|^2}$$

$$(\vec{a}+\vec{b}\,)\vec{c} = \vec{a}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}$$

4. Zbog $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$ slijedi $\vec{a}^{\,2} \geqslant 0$. Nadalje, kako je nulvektor jedini vektor duljine nula, slijedi

$$\vec{a}^{\,2} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; |\vec{a}|^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; |\vec{a}| = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a} = \vec{0}.$$

♡

Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Korolar 1.6.

Za svaki izbor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$ *vrijedi:*

5. $\vec{a}(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\,\vec{b})$
6. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\,\vec{b} + \vec{a}\,\vec{c}$

Dokaz.

$$\vec{a}(\lambda\vec{b}) = (\lambda\vec{b})\vec{a} = \lambda(\vec{b}\,\vec{a}) = \lambda(\vec{a}\,\vec{b})$$

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{b}+\vec{c})\,\vec{a} = \vec{b}\,\vec{a} + \vec{c}\,\vec{a} = \vec{a}\,\vec{b} + \vec{a}\,\vec{c}$$

$\heartsuit$

Koordinatni prikaz skalarnog produkta

Definicija ortonormirane baze za V^3

Koordinatna baza $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ u V^3 je ortonormirana ako vrijedi:

a) $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1,$

b) $\vec{i} \perp \vec{j}, \quad \vec{j} \perp \vec{k}, \quad \vec{k} \perp \vec{i}$

Koordinate vektora s obzirom na ortonormiranu bazu zovemo **ortogonalne** ili **pravokutne** koordinate.

$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Propozicija 1.17.

Neka su $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *i* $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *vektori iz* V^3 *dani svojim pravokutnim koordinatama. Onda je*

$$\vec{a}\,\vec{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

Dokaz.

U dokazu koristimo distributivnost skalarnog množenja u odnosu na zbrajanje vektora i skalarne produkte vektora iz ortonormirane baze.

$$\begin{aligned}\vec{a}\,\vec{b} &= \left(\alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{k}\right)\left(\beta_1\vec{i} + \beta_2\vec{j} + \beta_3\vec{k}\right) = \\ &= \alpha_1\beta_1\vec{i}^{\,2} + \alpha_1\beta_2\vec{i}\,\vec{j} + \alpha_1\beta_3\vec{i}\,\vec{k} + \alpha_2\beta_1\vec{j}\,\vec{i} + \alpha_2\beta_2\vec{j}^{\,2} + \\ &\qquad + \alpha_2\beta_3\vec{j}\,\vec{k} + \alpha_3\beta_1\vec{k}\,\vec{i} + \alpha_3\beta_2\vec{k}\,\vec{j} + \alpha_3\beta_3\vec{k}^{\,2} = \\ &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3\end{aligned}$$

♡

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Korolar 1.7.

Neka je $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *vektor iz* V^3 *dan svojim pravokutnim koordinatama. Onda je*

$$|\vec{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\,.$$

Korolar 1.8.

Neka su $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *i* $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *vektori iz* V^3 *dani svojim pravokutnim koordinatama različiti od nulvektora. Tada je*

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}\,) = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} \cdot \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}.$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Korolar 1.9.

Vektori $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *i* $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *iz* V^3 *dani svojim pravokutnim koordinatama su okomiti akko vrijedi*

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0.$$

Neka je $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ortonormirana baza u V^3 te $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ vektor iz V^3 različit od nulvektora zadan svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi. Neka su

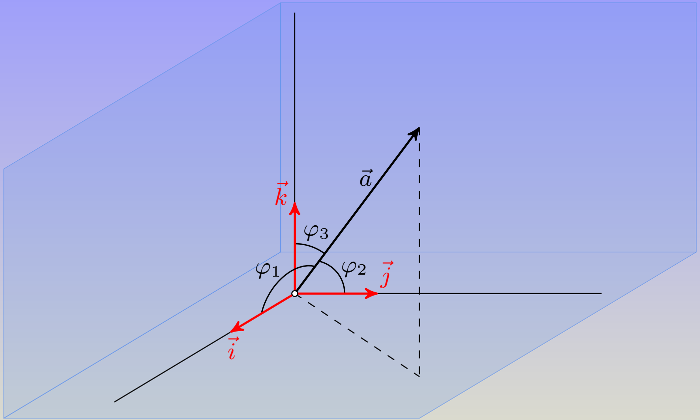
$$\varphi_1 = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{i}), \quad \varphi_2 = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{j}), \quad \varphi_3 = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{k}).$$

Tada je

$$\cos\varphi_1 = \frac{\alpha_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos\varphi_2 = \frac{\alpha_2}{|\vec{a}|}, \quad \cos\varphi_3 = \frac{\alpha_3}{|\vec{a}|}.$$

Brojeve $\cos\varphi_1, \cos\varphi_2, \cos\varphi_3$ zovemo kosinusi smjera vektora $\vec{a}$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k}$$

$$\varphi_1 = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{i}\,), \quad \varphi_2 = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{j}\,), \quad \varphi_3 = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{k}\,)$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{\alpha_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos\varphi_2 = \frac{\alpha_2}{|\vec{a}|}, \quad \cos\varphi_3 = \frac{\alpha_3}{|\vec{a}|}$$

Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Propozicija 1.18.

Za kosinuse smjera bilo kojeg vektora $\vec{a} \in V^3 \setminus \{\vec{0}\}$ *vrijedi*

$$\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1.$$

Korolar 1.10.

Kosinusi smjera vektora $\vec{a} \in V^3$ *jednaki su pravokutnim koordinatama jediničnog vektora* $\vec{a}_0$ *u smjeru tog vektora.*

Napomena.

Ukoliko je vektor zadan svojim koordinatama i ako nije eksplicitno naglašeno s obzirom na koju bazu, tada se podrazumijeva da su to njegove pravokutne koordinate, tj. koordinate s obzirom na ortonormiranu bazu $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Primjer 1.3.

Pronađite ortogonalnu projekciju vektora $\vec{x} = (1, 1, 1)$ *na vektor* $\vec{a} = (2, 3, -1)$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Primjer 1.3.

Pronađite ortogonalnu projekciju vektora $\vec{x} = (1,1,1)$ *na vektor* $\vec{a} = (2,3,-1)$.

Rješenje.

$$\vec{a}\,\vec{x} = (2,3,-1)\cdot(1,1,1) = 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + (-1)\cdot 1 = 4$$

$$|\vec{a}|^2 = 2^2 + 3^2 + (-1)^2 = 14$$

$$\mathrm{pr}_{\vec{a}}\,\vec{x} = \frac{\vec{a}\,\vec{x}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a} = \tfrac{4}{14}\cdot(2,3,-1) = \left(\tfrac{4}{7},\tfrac{6}{7},-\tfrac{2}{7}\right)$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Vektorski produkt vektora

Definicija vektorskog produkta

Neka je $v : V^3 \times V^3 \to V^3$ preslikavanje kod kojeg je za svaki izbor $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ vektor $v(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{c}$ definiran na sljedeći način:

1. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni vektori, tada je $\vec{c} = \vec{0}$.
2. Ako $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni vektori, tada:
   - a) duljina od $\vec{c}$ dana je s $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$,
   - b) smjer od $\vec{c}$ je okomit na smjer od $\vec{a}$ i na smjer od $\vec{b}$,
   - c) orijentacija od $\vec{c}$ je takva da uređena trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ predstavlja jednu desnu bazu u V^3.

Preslikavanje v se zove **vektorsko množenje**, a $v(\vec{a}, \vec{b}) \in V^3$ **vektorski produkt** vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Kratko pišemo: $v(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b}$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Propozicija 1.19.

Vektorsko množenje je antikomutativno, tj. vrijedi

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$$

za sve $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$.

Dokaz.

Iz definicije vektorskog produkta je jasno da vektori $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{b} \times \vec{a}$ imaju istu duljinu i isti smjer.

Nadalje, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ je desna baza za V^3 pa je $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b})$ lijeva baza za V^3.

Iz svega navedenog slijedi da mora biti $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$. ♡

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Propozicija 1.20 (Karakterizacija kolinearnih vektora).

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, tada je po definiciji $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Neka je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Tada je

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

što povlači da je $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$ ili $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \in \{0, \pi\}$. Dakle, u svakom slučaju, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni. ♡

Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Propozicija 1.21.

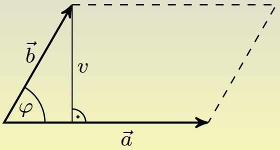
Za svaki vektor $\vec{a} \in V^3$ je $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Propozicija 1.22 (Geometrijska interpretacija vektorskog produkta).

Ako vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni, tada je $|\vec{a} \times \vec{b}|$ jednak površini paralelograma razapetog tim vektorima.

Dokaz.

$$P = |\vec{a}|v = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a} \times \vec{b}|$$



$$\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$v = |\vec{b}| \sin \varphi$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Teorem 1.6.

Za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ *i sve* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ *vrijedi:*

1. *kvaziasocijativnost:*

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$$

2. *distributivnost:*

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$$

Dokaz.

Distributivnost ćemo dokazati lakše kasnije nakon što obradimo mješoviti produkt vektora.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Dokažimo najprije jednakost $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$. Trebamo zapravo dokazati jednakost dva vektora. Dva su vektora jednaka ako imaju istu duljinu, smjer i orijentaciju.

Za $\lambda = 0$ tvrdnja očito vrijedi.

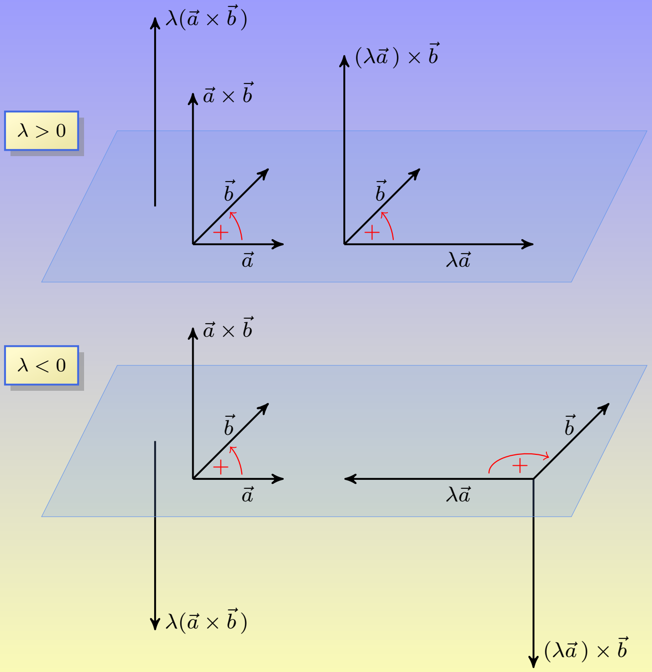
Ako je $\lambda > 0$, tada su vektori $\lambda\vec{a}$ i $\vec{a}$ iste orijentacije pa je $\sphericalangle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ i $|\lambda| = \lambda$. Stoga je

$$\left|(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}\right| = |\lambda\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}) =$$

$$= \lambda|\vec{a} \times \vec{b}| = |\lambda||\vec{a} \times \vec{b}| = \left|\lambda(\vec{a} \times \vec{b})\right|$$

pa su vektori $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ i $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ istih duljina. Očito vektori $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ i $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ imaju isti smjer i istu orijentaciju kao i vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ iz čega slijedi da je zaista $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Ako je $\lambda < 0$, tada su vektori $\lambda\vec{a}$ i $\vec{a}$ suprotnih orijentacija pa je $\sphericalangle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \pi - \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ i $|\lambda| = -\lambda$. Stoga je

$$\begin{aligned}\left|(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}\right| &= |\lambda\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \\ &= -\lambda \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\left(\pi - \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\right) = \\ &= -\lambda \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}) = \\ &= -\lambda|\vec{a} \times \vec{b}| = |\lambda||\vec{a} \times \vec{b}| = \left|\lambda(\vec{a} \times \vec{b})\right|\end{aligned}$$

pa su vektori $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ i $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ istih duljina. Jasno je da vektori $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ i $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ imaju isti smjer kao i vektor $\vec{a} \times \vec{b}$. Nadalje, vektori $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$ imaju suprotne orijentacije, a isto tako i vektori $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ i $\vec{a} \times \vec{b}$ imaju suprotne orijentacije. Stoga vektori $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ i $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ imaju istu orijentaciju. Iz svega navedenog slijedi da je i u ovom slučaju $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

Konačno, jednakost $\vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ slijedi iz upravo dokazane jednakosti $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ i antikomutativnosti vektorskog množenja.

$$\vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = -\left[(\lambda\vec{b}) \times \vec{a}\right] = -\left[\lambda(\vec{b} \times \vec{a})\right] =$$

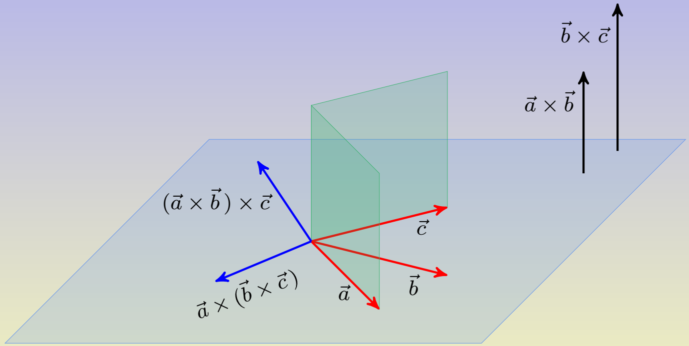
$$= -\left[-\lambda(\vec{a} \times \vec{b})\right] = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$$

♡

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Vektorsko množenje nije asocijativno, tj. općenito je

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$



Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Zadatak 1.6.

Objasnite zbog čega vektorsko množenje ne posjeduje jedinicu, tj. ne postoji vektor $\vec{e} \in V^3$ takav da je

$$\vec{e} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{e} = \vec{a}$$

za svaki $\vec{a} \in V^3$.

Teorem 1.7.

Za svaki izbor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ vrijedi:

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}\,\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\,\vec{c})\vec{a}$
2. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\,\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\,\vec{b})\vec{c}$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Korolar 1.11 (Jacobijev identitet).

Za svaki izbor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ vrijedi

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Dokaz.

Prema prethodnom teoremu vrijedi

$$\begin{tikzcd} & \vec{a} \arrow[dl, bend right] & \\ \vec{b} \arrow[rr, bend right] & & \vec{c} \arrow[ul, bend right] \end{tikzcd}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}\,\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\,\vec{c})\vec{a}$$

$$(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{b}\,\vec{a})\vec{c} - (\vec{c}\,\vec{a})\vec{b}.$$

$$(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = (\vec{c}\vec{b})\vec{a} - (\vec{a}\,\vec{b})\vec{c}$$

Zbrajanjem gornjih jednakosti slijedi tvrdnja. ♡

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Propozicija 1.23 (Lagrangeov identitet).

Za svaki izbor $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ vrijedi

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,)^2 + (\vec{a} \times \vec{b}\,)^2 = \vec{a}^{\,2} \cdot \vec{b}^{\,2}.$$

Dokaz.

Korištenjem definicija vektorskog i skalarnog produkta dobivamo

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,)^2 + (\vec{a} \times \vec{b}\,)^2 = (\vec{a}\,\vec{b}\,)^2 + \left|\vec{a} \times \vec{b}\,\right|^2 =$$

$$= \left(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}\,)\right)^2 + \left(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}\,)\right)^2 =$$

$$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2(\vec{a}, \vec{b}\,) + |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2(\vec{a}, \vec{b}\,) =$$

$$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \underbrace{\left(\cos^2(\vec{a}, \vec{b}\,) + \sin^2(\vec{a}, \vec{b}\,)\right)}_{=1} = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 = \vec{a}^{\,2} \cdot \vec{b}^{\,2}$$

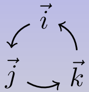
♡

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Neka je $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ortonormirana baza u V^3.

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$



Propozicija 1.24.

Neka su $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ i $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ vektori zadani svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi $\mathcal{B}$ u V^3. Tada je

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1\right).$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Dokaz.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k}\,) \times (\beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k}\,) =$$

$$= \alpha_1\beta_1 \underbrace{(\vec{i} \times \vec{i}\,)}_{\vec{0}} + \alpha_1\beta_2 \underbrace{(\vec{i} \times \vec{j}\,)}_{\vec{k}} + \alpha_1\beta_3 \underbrace{(\vec{i} \times \vec{k}\,)}_{-\vec{j}} +$$

$$+ \alpha_2\beta_1 \underbrace{(\vec{j} \times \vec{i}\,)}_{-\vec{k}} + \alpha_2\beta_2 \underbrace{(\vec{j} \times \vec{j}\,)}_{\vec{0}} + \alpha_2\beta_3 \underbrace{(\vec{j} \times \vec{k}\,)}_{\vec{i}} +$$

$$+ \alpha_3\beta_1 \underbrace{(\vec{k} \times \vec{i}\,)}_{\vec{j}} + \alpha_3\beta_2 \underbrace{(\vec{k} \times \vec{j}\,)}_{-\vec{i}} + \alpha_3\beta_3 \underbrace{(\vec{k} \times \vec{k}\,)}_{\vec{0}} =$$

$$= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\vec{i} + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\vec{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\vec{k}$$

♡

Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Korolar 1.12.

Neka su $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ i $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ vektori zadani svojim koordinatama u nekoj ortonormiranoj bazi u V^3. Tada je

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Dokaz.

Razvije se determinanta po prvom retku i usporedi se dobiveni rezultat s prethodnom propozicijom. ♡

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Zadatak 1.7.

Dokažite teorem 1.7 *preko koordinata vektora u ortonormiranoj bazi.*

Primjer 1.4.

Zadani su vektori $\vec{a} = (3, -1, -2)$ *i* $\vec{b} = (1, 2, -5)$ *svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi. Odredite koordinate sljedećih vektora:*

- a $\vec{a} \times \vec{b}$,
- b $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$,
- c $(3\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{b} - 7\vec{a})$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Rješenje.

a

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -5\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -5\end{vmatrix}+$$

$$+\vec{j}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -5\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=9\vec{i}+13\vec{j}+7\vec{k}=(9,13,7)$$

b $(2\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}=(2\vec{a})\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{b}=2(\vec{a}\times\vec{b})+\vec{0}=$

$$=2(\vec{a}\times\vec{b})=2\cdot(9,13,7)=(18,26,14)$$

Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

c

$$(3\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{b} - 7\vec{a}) =$$

$$= (3\vec{a}) \times (2\vec{b}) - (3\vec{a}) \times (7\vec{a}) - \vec{b} \times (2\vec{b}) + \vec{b} \times (7\vec{a}) =$$

$$= 6(\vec{a} \times \vec{b}) - \vec{0} - \vec{0} + 7(\vec{b} \times \vec{a}) =$$

$$= 6(\vec{a} \times \vec{b}) - 7(\vec{a} \times \vec{b}) = -(\vec{a} \times \vec{b}) =$$

$$= -(9, 13, 7) = (-9, -13, -7)$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

Definicija mješovitog produkta

Neka je

$$m : V^3 \times V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$$

preslikavanje definirano sa

$$m(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

za sve $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$. Preslikavanje m zovemo **mješovito** ili **vektorskoskalarno množenje** u V^3, a $m(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ **mješoviti produkt** vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Kratko pišemo $m(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

Koordinatni prikaz skalarnog produkta

Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Propozicija 1.25 (Karakterizacija komplanarnih vektora).

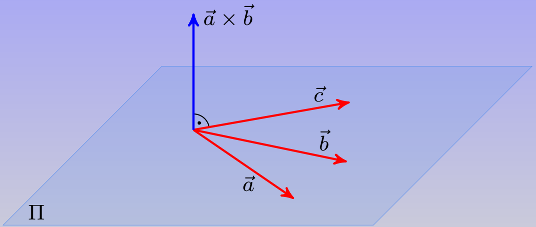
Vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ su komplanarni ako i samo ako je njihov mješoviti produkt jednak nula.

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ komplanarni. Ako je neki od vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{c}$ nulvektor, tada je očito $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Ako to nije slučaj, onda su dani vektori paralelni s istom ravninom Π. Tada je $\vec{a} \times \vec{b} \perp \Pi$ pa je $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}$. Stoga je $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$, tj. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



$\Leftarrow$

Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Tada je $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$. Stoga je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ili $\vec{c} = \vec{0}$ ili je $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}$, tj. vektor $\vec{c}$ je paralelan s ravninom razapetom vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. U svakom slučaju, vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su komplanarni. ♡

Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Propozicija 1.26.

Neka su

$$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad \vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

vektori dani svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi. Tada je

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Dokaz.

Kako je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, koristimo formule za koordinatni zapis vektorskog i skalarnog produkta u ortonormiranoj bazi i na kraju se uoči da je dobiveni zapis jednak navedenoj determinanti. ♡

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Korolar 1.13.

Neka su

$$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad \vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

vektori dani svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi. Vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ *su komplanarni ako i samo ako je*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Propozicija 1.27.

Parnom permutacijom trojke vektora mješoviti produkt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ se ne mijenja, dok neparnom permutacijom mješoviti produkt mijenja predznak.

Dokaz.

Dokaz slijedi iz činjenice da determinanta pri zamjeni dvaju redaka mijenja predznak.

$$\begin{tikzcd} & \vec{a} \arrow[dl, bend right] & \\ \vec{b} \arrow[rr, bend right] & & \vec{c} \arrow[ul, bend right] \end{tikzcd}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) =$$

$$= -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$$

♡

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Korolar 1.14.

Za sve vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ *vrijedi*

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\,(\vec{b} \times \vec{c}).$$

Dokaz.

Zbog komutativnosti skalarnog produkta i prethodne propozicije vrijedi

$$\vec{a}\,(\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}.$$

♡

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Teorem 1.8 (Geometrijska interpretacija).

Volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jednak je mješovitom produktu $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ tih vektora ili njemu suprotan, već prema tome čine li vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ u tom poretku desnu ili lijevu bazu.

Dokaz.

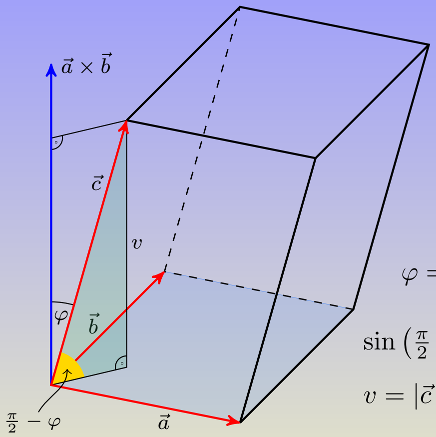
Neka da je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ desna baza. Kako je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}\}$ uvijek desna baza, vektori $\vec{c}$ i $\vec{a}\times\vec{b}$ nalaze se s iste strane ravnine razapete vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ pa je $\sphericalangle(\vec{a}\times\vec{b}, \vec{c}) < \frac{\pi}{2}$, tj. $\cos(\vec{a}\times\vec{b}, \vec{c}) > 0$. Tada prema oznaka sa slike (na sljedećem slajdu) dobivamo

$$V = B \cdot v = |\vec{a}\times\vec{b}| \cdot v = |\vec{a}\times\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\left(\vec{a}\times\vec{b}, \vec{c}\right) =$$

$$= (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0.$$

Ako je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ lijeva baza, tada je $\{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\}$ desna baza, pa prema dokazanom $V = (\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$. ♡

Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



$$\varphi = \sphericalangle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \frac{v}{|\vec{c}|}$$

$$v = |\vec{c}|\cos\varphi$$

$$V = B\cdot v = |\vec{a}\times\vec{b}|\cdot v = |\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right) =$$

$$= (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) > 0$$

Klasična algebra vektora
- Uvod
- Orijentirana dužina
- Vektor
- Zbrajanje vektora
- Množenje vektora skalarom
- Pojam baze u V^1
- Pojam baze u V^2
- Pojam baze u V^3
- Lijeva i desna baza
- Skalarni produkt vektora
- Koordinatni prikaz skalarnog produkta
- Vektorski produkt vektora
- Koordinatni prikaz vektorskog produkta
- Mješoviti produkt vektora
- Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Korolar 1.15.

Ako su vektori $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *i* $\vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ *koji razapinju paralelepiped dani svojim pravokutnim koordinatama, tada je volumen paralelepipeda jednak*

$$V = \pm \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Teorem 1.9.

Volumen tetraedra razapetog vektorima $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jednak je $\frac{1}{6}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ili $-\frac{1}{6}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, već prema tome čine li vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ u tom poretku desnu ili lijevu bazu.

Dokaz.

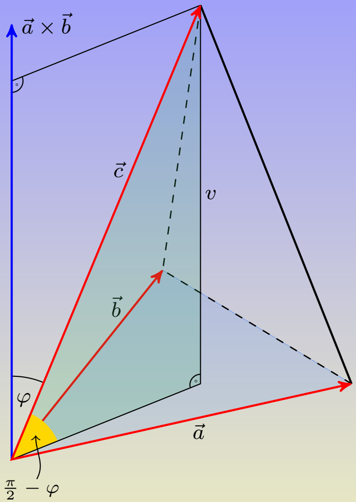
Neka da je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ desna baza. Kako je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ uvijek desna baza, vektori $\vec{c}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$ nalaze se s iste strane ravnine razapete vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ pa je $\sphericalangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) < \frac{\pi}{2}$, tj. $\cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) > 0$. Tada prema oznaka sa slike (na sljedećem slajdu) dobivamo

$$V = \frac{1}{3} B \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot v = \frac{1}{6} |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\left(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}\right) =$$

$$= \frac{1}{6} (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = \frac{1}{6} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0.$$

Ako je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ lijeva baza, tada je $\{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\}$ desna baza, pa prema dokazanom $V = \frac{1}{6}(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -\frac{1}{6}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0.$ ♡

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta



$$\varphi = \sphericalangle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \frac{v}{|\vec{c}|}$$

$$v = |\vec{c}|\cos\varphi$$

$$V = \frac{1}{3}B\cdot v = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot v = \frac{1}{6}|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = \frac{1}{6}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) > 0$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Korolar 1.16.

Ako su vektori $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *i* $\vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ *koji razapinju tetraedar dani svojim pravokutnim koordinatama, tada je volumen tetraedra jednak*

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Distributivnost vektorskog produkta u odnosu na zbrajanje vektora možemo vrlo jednostavno dokazati koristeći sljedeće činjenice:

1. Distributivnost skalarnog produkta u odnosu na zbrajanje
$$(\vec{a}+\vec{b}\,)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$
2. Svojstva mješovitog produkta koja lagano slijede iz njegove geometrijske interpretacije
$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,)=(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\,)=(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\,)$$
3. Ako je $\vec{u}\cdot\vec{x}=\vec{v}\cdot\vec{x}$ za svaki vektor $\vec{x}\in V^3$, tada je $\vec{u}=\vec{v}$.

Prve dvije tvrdnje smo već ranije dokazali, a na sljedećem slajdu dajemo dokaz treće tvrdnje.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Pretpostavimo da je $\vec{u} \cdot \vec{x} = \vec{v} \cdot \vec{x}$ za svaki vektor $\vec{x} \in V^3$. Tada je

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{x} = 0 \qquad (\clubsuit)$$

za svaki $\vec{x} \in V^3$. Kako ($\clubsuit$) vrijedi za svaki vektor $\vec{x} \in V^3$, tada ($\clubsuit$) specijalno vrijedi za vektor $\vec{x} = \vec{u} - \vec{v}$. Stoga dobivamo da je

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = 0$$

iz čega slijedi

$$|\vec{u} - \vec{v}| = 0.$$

Kako je nulvektor jedini vektor u V^3 duljine nula, zaključujemo da mora biti $\vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$, tj. $\vec{u} = \vec{v}$.

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Dokažimo sada da vrijedi jednakost

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Dovoljno je dokazati da za svaki $\vec{x} \in V^3$ vrijedi

$$[\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})] \cdot \vec{x} = [\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}] \cdot \vec{x}. \qquad (\spadesuit)$$

U nastavku dajemo dokaz jednakosti ($\spadesuit$).

Klasična algebra vektora
Uvod
Orijentirana dužina
Vektor
Zbrajanje vektora
Množenje vektora skalarom
Pojam baze u V^1
Pojam baze u V^2
Pojam baze u V^3
Lijeva i desna baza
Skalarni produkt vektora
Koordinatni prikaz skalarnog produkta
Vektorski produkt vektora
Koordinatni prikaz vektorskog produkta
Mješoviti produkt vektora
Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

$$
\begin{aligned}
\left[\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})\right] \cdot \vec{x} = (\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{x}) = (\vec{x}, \vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = \\
= (\vec{x} \times \vec{a}\,) \cdot (\vec{b} + \vec{c}\,) = \\
= (\vec{x} \times \vec{a}\,) \cdot \vec{b} + (\vec{x} \times \vec{a}\,) \cdot \vec{c} = \\
= (\vec{x}, \vec{a}, \vec{b}) + (\vec{x}, \vec{a}, \vec{c}) = \\
= (\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}) + (\vec{a}, \vec{c}, \vec{x}) = \\
= (\vec{a} \times \vec{b}\,) \cdot \vec{x} + (\vec{a} \times \vec{c}\,) \cdot \vec{x} = \\
= \left[\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}\,\right] \cdot \vec{x}
\end{aligned}
$$

Klasična algebra vektora

Uvod

Orijentirana dužina

Vektor

Zbrajanje vektora

Množenje vektora skalarom

Pojam baze u V^1

Pojam baze u V^2

Pojam baze u V^3

Lijeva i desna baza

Skalarni produkt vektora

Koordinatni prikaz skalarnog produkta

Vektorski produkt vektora

Koordinatni prikaz vektorskog produkta

Mješoviti produkt vektora

Dokaz distributivnosti vektorskog produkta

Dio II

Analitička geometrija prostora

Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Sadržaj

- Analitička geometrija prostora
  - Stereometrija. Euklidski prostor
  - Kartezijev koordinatni sustav
  - Jednadžba ravnine
  - Udaljenost točke od ravnine
  - Geometrijska interpretacija koeficijenata A, B, C, D
  - Segmentni oblik jednadžbe ravnine
  - Položaj dviju ravnina
  - Jednadžba pravca
  - Položaj dvaju pravaca
  - Položaj pravca i ravnine
  - Udaljenost točke od pravca
  - Mimosmjerni pravci
  - Udaljenost mimosmjernih pravaca
  - Pramen ravnina
  - Snop ravnina

Stereometrija. Euklidski prostor

Osnovni objekti euklidske geometrije su točke, pravci i ravnine. Oni se ne definiraju, nego su njihova svojstva i međusobni odnosi opisani pomoću aksioma.

Euklidski prostor je skup E^3 čije elemente zovemo točkama, a neke njegove istaknute podskupove zovemo pravcima, odnosno ravninama. Svojstva tih istaknutih podskupova su opisana preko sljedećih aksioma.

Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

1. **Aksiomi incidencije**

- Za svake dvije različite točke $A, B \in E^3$ postoji jedinstveni pravac iz E^3 koji prolazi tim točkama. Taj pravac označavamo s AB.
- Na svakom pravcu leže barem tri različite točke.
- Za svaki pravac $p \subset E^3$ postoje točke koje mu pripadaju i točke koje mu ne pripadaju.
- Za svaku ravninu $\alpha \subset E^3$ postoje točke prostora koje joj pripadaju i one koje joj ne pripadaju.
- Ako dvije ravnine imaju zajedničku točku, onda imaju zajednički cijeli pravac.
- Ako dva pravca imaju zajedničku točku, tada postoji jedinstvena ravnina koja sadrži te pravce.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

2. **Aksiomi uređaja**
   - Na svakom pravcu iz E^3 postoje točno dva međusobno suprotna linearna uređaja.
   - **Paschov aksiom.** Ako pravac siječe jednu stranicu trokuta i ne prolazi niti jednim vrhom trokuta na toj stranici, onda on siječe bar još jednu stranicu tog trokuta.
3. **Aksiomi metrike**

(E^3, d) je metrički prostor, tj. postoji funkcija $d : E^3 \times E^3 \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava:

- $d(A, B) \geqslant 0, \ \forall A, B \in E^3$
- $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- $d(A, B) = d(B, A), \ \forall A, B \in E^3$
- $d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, B), \ \forall A, B, C \in E^3$

Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

4. **Aksiomi simetrije**

- Za svaki pravac $p \subset \alpha$ u ravnini α postoji jedinstvena izometrija $s_p : \alpha \to \alpha$ različita od identitete za koju je $s_p(T) = T$ za svaku točku $T \in p$. Ta izometrija se zove osna simetrija s obzirom na pravac p.
- Za svaki par (Ox, Oy) polupravaca s vrhom u točki O postoji barem jedan pravac p takav da je $s_p(Ox) = Oy$.

5. **Aksiom o paralelama**

- Neka su p i T pravac i točka iz ravnine α takvi da točka T ne pripada pravcu p. Tada točkom T prolazi točno jedan pravac q u ravnini α koji ne siječe pravac p.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Neke posljedice aksioma

Propozicija 2.1.

Postoji jedinstvena ravnina incidentna sa zadanim pravcem i točkom izvan njega.

Propozicija 2.2.

Postoji jedinstvena ravnina incidentna sa tri nekolinearne točke.

Propozicija 2.3.

Svakom točkom ravnine moguće je položiti samo jedan pravac okomit na tu ravninu.

Propozicija 2.4.

Pravci okomiti na istu ravninu su paralelni.

Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Kartezijev koordinatni sustav

Prostor radijvektora

Neka je $O \in E^3$ proizvoljna točka. Prostor radijvektora u točki O je skup

$$V^3(O) = \left\{ \overrightarrow{OX} \;\middle|\; X \in E^3 \right\}$$

pri čemu umjesto $\overrightarrow{OX}$ kratko pišemo $\vec{r}_X$ i zovemo ga radijvektor točke X.

Kako su u V^3 sve operacije na vektorima definirane preko njihovih predstavnika, tada se te operacije mogu prirodno prenijeti na skup $V^3(O)$. Naime, skup $V^3(O)$ je zapravo skup svih orijentiranih dužina koje imaju početak u točki O.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Kartezijev koordinatni sustav u E^3

Neka je $O \in E^3$ proizvoljna točka, a $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ortonormirana baza za $V^3(O)$. Uređeni par $\left(O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\right)$ zovemo pravokutni ili Kartezijev koordinatni sustav u E^3.

Točku O zovemo ishodište koordinatnog sustava, a vektore $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ zovemo koordinatnim vektorima.

Točka O sa svakim od vektora $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ određuje tri međusobno okomita pravca koje zovemo koordinatne osi:

- x-os ili os apscisa: prolazi točkom O u smjeru vektora $\vec{i}$
- y-os ili os ordinata: prolazi točkom O u smjeru vektora $\vec{j}$
- z-os ili os aplikata: prolazi točkom O u smjeru vektora $\vec{k}$

Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

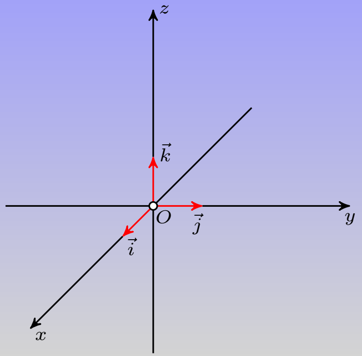
Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

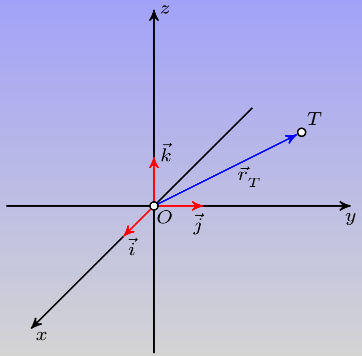
Nadalje, točka O zajedno s vektorima $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ određuje tri međusobno okomite ravnine koje zovemo koordinatne ravnine:

- xy-ravnina: prolazi točkom O i određena je s vektorima $\vec{i}$ i $\vec{j}$
- xz-ravnina: prolazi točkom O i određena je s vektorima $\vec{i}$ i $\vec{k}$
- yz-ravnina: prolazi točkom O i određena je s vektorima $\vec{j}$ i $\vec{k}$

Koordinatne ravnine dijele E^3 na 8 "jednakih" dijelova koje zovemo oktanti.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina





Radijvektor točke T ima jedinstveni prikaz u bazi $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Točke iz E^3 poistovjećujemo s njihovim radijvektorima na sljedeći način:

$$T \mapsto \vec{r}_T = x_T\vec{i} + y_T\vec{j} + z_T\vec{k} \mapsto (x_T, y_T, z_T)$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Koordinatizacija prostora E^3

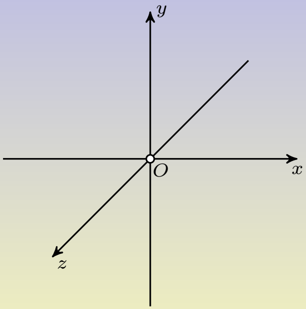
Neka je $T \in E^3$ proizvoljna točka i $\vec{r}_T = x_T\vec{i} + y_T\vec{j} + z_T\vec{k}$. Preslikavanje $k : E^3 \to \mathbb{R}^3$ dano s $k(T) = (x_T, y_T, z_T)$ zovemo koordinatizacija prostora E^3. Uređenu trojku realnih brojeva (x_T, y_T, z_T) zovemo pravokutne ili Kartezijeve koordinate točke T s obzirom na dani koordinatni sustav.

Kako je preslikavanje k bijekcija, točku T poistovjećujemo s njezinim koordinatama $k(T)$ i pišemo $T\,(x_T, y_T, z_T)$. Isto tako, prema našoj konstrukciji se koordinate točke podudaraju s koordinatama radijvektora te točke.

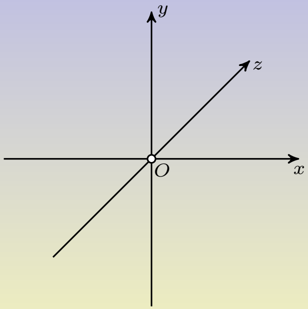
Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Lijevi i desni koordinatni sustav u E^3

Za Kartezijev koordinatni sustav $\left(O, \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)\right)$ kažemo da je lijevi odnosno desni, već prema tome da li je $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ lijeva ili desna baza.



desni koordinatni sustav



lijevi koordinatni sustav

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Propozicija 2.5.

Ako su $A(x_1, y_1, z_1)$ *i* $B(x_2, y_2, z_2)$ *točke iz* E^3*, tada je*

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Dokaz.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A =$$

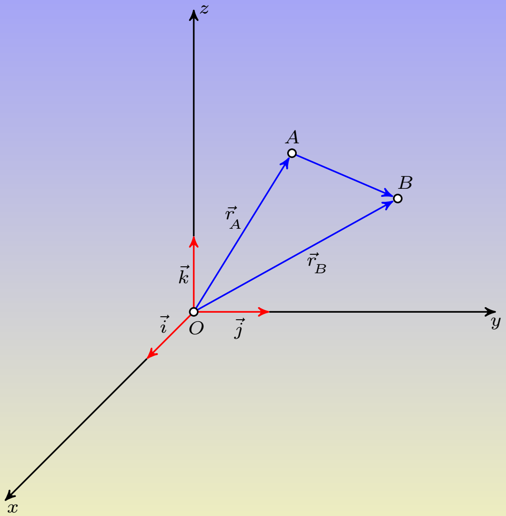
$$= \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) - \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) =$$

$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

Dakle, $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Stoga je

$$d(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina



Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

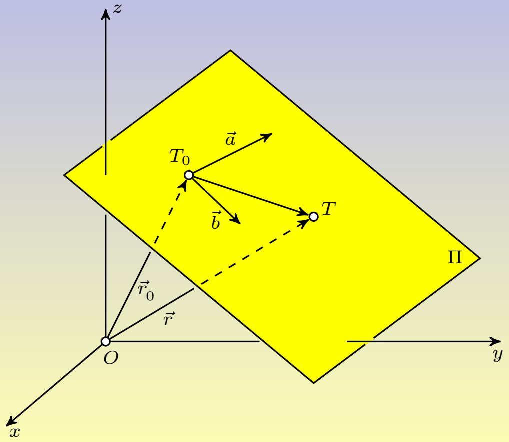
Pramen ravnina

Snop ravnina

Jednadžba ravnine

Neka je Π ravnina zadana s točkom T_0 i dva nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

$$\Pi \ldots \; T_0(x_0, y_0, z_0), \;\; \vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \;\; \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$



Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Vektori $\overrightarrow{T_0T}, \vec{a}, \vec{b}$ su komplanarni pa postoje $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\overrightarrow{T_0T} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b},$$

odnosno

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$$

pa konačno dobivamo

Vektorski oblik jednadžbe ravnine

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Mijenjamo li parametre λ i μ, dobit ćemo sve točke ravnine Π i samo te točke.

Raspišemo li vektorski oblik jednadžbe ravnine po koordinatama, dobivamo

Parametarske jednadžbe ravnine

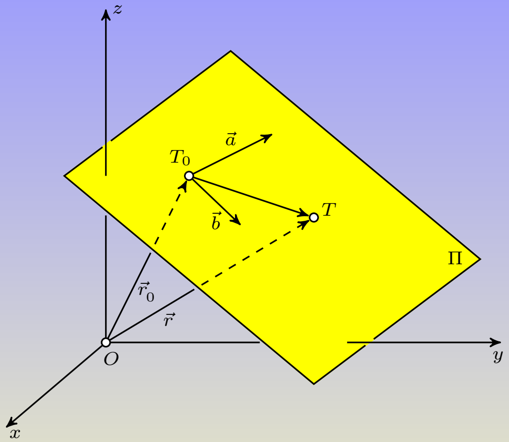
$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a_x + \mu b_x \\ y = y_0 + \lambda a_y + \mu b_y, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \lambda a_z + \mu b_z \end{cases}$$

Eliminiramo li parametre λ i μ iz parametarskih jednadžbi ravnine, dobivamo

Implicitni (opći) oblik jednadžbe ravnine

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina



Parametre λ i μ iz parametarskih jednadžbi ravnine možemo eliminirati na jednostavniji način bez rješavanja sustava. Kako su vektori $\vec{r} - \vec{r}_0$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ komplanarni, njihov mješoviti produkt mora biti nula.

Stoga iz $(\vec{r}-\vec{r}_0, \vec{a}, \vec{b}) = 0$ računanjem mješovitog produkta vektora u ortonormiranoj bazi, dobivamo

Jednadžba ravnine određena točkom i dva nekolinearna vektora

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Primjer 2.1.

Ravnina je zadana točkom $A(1,-2,5)$ *i vektorima* $\vec{a}=(3,1,1)$ *i* $\vec{b}=(1,-3,1)$. *Odredite vektorski, parametarski i opći oblik jednadžbe ravnine.*

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Primjer 2.1.

Ravnina je zadana točkom $A(1,-2,5)$ *i vektorima* $\vec{a}=(3,1,1)$ *i* $\vec{b}=(1,-3,1)$. *Odredite vektorski, parametarski i opći oblik jednadžbe ravnine.*

Rješenje.

$\vec{r}_0$ je radijvektor točke A pa je $\vec{r}_0=(1,-2,5)$. Stoga vektorski oblik jednadžbe ravnine glasi

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$$
$$\vec{r}=(1,-2,5)+\lambda(3,1,1)+\mu(1,-3,1)$$
$$\vec{r}=\big(1+3\lambda+\mu,-2+\lambda-3\mu,5+\lambda+\mu\big)$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Stavimo li $\vec{r} = (x, y, z)$, raspisivanjem po koordinatama dobivamo parametarske jednadžbe ravnine.

$$\begin{cases} x = 1 + 3\lambda + \mu \\ y = -2 + \lambda - 3\mu \\ z = 5 + \lambda + \mu \end{cases}$$

Eliminacijom parametara λ i μ iz parametarskih jednadžbi možemo dobiti opći oblik jednadžbe ravnine. Pokažimo ovdje na konkretnom primjeru kako možemo eliminirati parametre rješavanjem sustava linearnih jednadžbi.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Uzmimo na primjer drugu i treću jednadžbu

$$y = -2 + \lambda - 3\mu$$
$$z = 5 + \lambda + \mu$$

iz parametarskih jednadžbi ravnine i promatrajmo ih kao sustav

$$\lambda - 3\mu = y + 2$$
$$\lambda + \mu = z - 5$$

s nepoznanicama λ i μ. Rješavanjem tog sustava dobivamo

$$\lambda = \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z - \frac{13}{4}$$
$$\mu = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z - \frac{7}{4}$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Uvrstimo dobivena rješenja za λ i μ u preostalu parametarsku jednadžbu

$$x = 1 + 3\lambda + \mu$$

koju nismo koristili kod rješavanja sustava. Dobivamo

$$x = 1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z - \frac{13}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z - \frac{7}{4}\right)$$

$$x = 1 + \frac{3}{4}y + \frac{9}{4}z - \frac{39}{4} - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z - \frac{7}{4}$$

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}z - \frac{21}{2} \Big/ \cdot 2$$

$$2x = y + 5z - 21$$

iz čega slijedi da je $2x - y - 5z + 21 = 0$ opći oblik jednadžbe ravnine.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Opći oblik jednadžbe ravnine možemo dobiti jednostavnije preko formule

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0.$$

Uvrstimo li u gornju formulu poznate podatke iz zadatka $A(1, -2, 5)$, $\vec{a} = (3, 1, 1)$ i $\vec{b} = (1, -3, 1)$, dobivamo

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y + 2 & z - 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

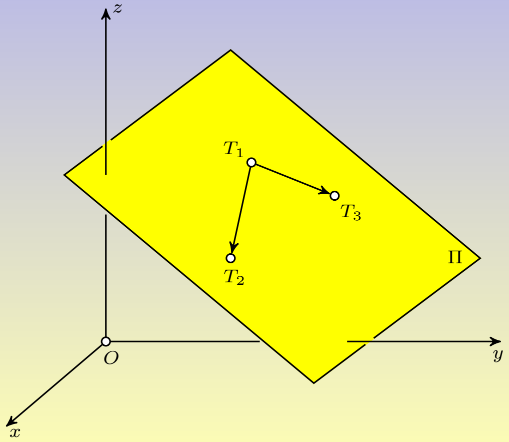
Računanjem determinante ponovo dobivamo opći oblik jednadžbe ravnine

$$2x - y - 5z + 21 = 0.$$

Ravnina kroz tri točke

Neka je ravnina Π zadana s tri nekolinearne točke T_1, T_2, T_3.

$$\Pi \ldots T_1(x_1, y_1, z_1),\ T_2(x_2, y_2, z_2),\ T_3(x_3, y_3, z_3)$$



Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Kako su točke T_1, T_2, T_3 nekolinearne, slijedi da su vektori $\overrightarrow{T_1T_2}$ i $\overrightarrow{T_1T_3}$ nekolinearni. Stoga na ravninu Π možemo gledati kao na ravninu koja prolazi točkom T_1 i razapeta je s vektorima $\overrightarrow{T_1T_2}$ i $\overrightarrow{T_1T_3}$. Kako je $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i

$$\overrightarrow{T_1T_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\overrightarrow{T_1T_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

uvrštavanjem ovih podataka u formulu

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$

dobivamo jednadžbu ravnine kroz tri nekolinearne točke.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Jednadžba ravnine kroz tri nekolinearne točke

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Primjer 2.2.

Odredite jednadžbu ravnine koja prolazi točkama $T_1(1, 1, -1)$, $T_2(3, -4, -2)$, $T_3(-3, 0, 1)$.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Jednadžba ravnine kroz tri nekolinearne točke

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Primjer 2.2.

Odredite jednadžbu ravnine koja prolazi točkama $T_1(1,1,-1)$, $T_2(3,-4,-2)$, $T_3(-3,0,1)$.

Rješenje.

Uvrstimo li koordinate danih točaka u jednadžbu ravnine kroz tri nekolinearne točke, nakon računanja pripadne determinante dobivamo opći oblik jednadžbe ravnine $x+2z+1=0$. Što bi se dogodilo s gornjom formulom za jednadžbu ravnine u slučaju da su zadane točke kolinearne? Kakvu bismo jednakost dobili?

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Jednadžba ravnine kroz tri nekolinearne točke

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

može se zapisati u ekvivalentnom obliku

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (\spadesuit)$$

Do ovog ekvivalentnog oblika možemo doći korištenjem svojstava determinanti, ali možemo i na jedan jednostavniji način bez puno raspisivanja.

Kako točke $T(x,y,z), T_1(x_1,y_1,z_1), T_2(x_2,y_2,z_2), T_3(x_3,y_3,z_3)$ pripadaju istoj ravnini, njihove koordinate moraju zadovoljavati homogeni sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D &= 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D &= 0 \end{aligned}$$

s nepoznanicama A, B, C, D. Barem jedna od nepoznanica A, B, C mora biti različita od nule jer u protivnom ravnina ne bi postojala, a znamo da postoji jer su točke T, T_1, T_2, T_3 takve da leže u istoj ravnini. Stoga promatrani homogeni sustav linearnih jednadžbi ima i netrivijalnih rješenja pa prema Roucheovom teoremu determinanta matrice tog sustava mora biti jednaka 0, tj. mora vrijediti ($\spadesuit$).

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

O (♠) možemo razmišljati kao o uvjetu komplanarnosti za četiri točke u prostoru.

Propozicija 2.6 (Uvjet komplanarnosti točaka).

Točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$, $T_3(x_3, y_3, z_3)$, $T_4(x_4, y_4, z_4)$ *su komplanarne, tj. leže u istoj ravnini akko vrijedi*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Udaljenost točke od ravnine

Normala ravnine

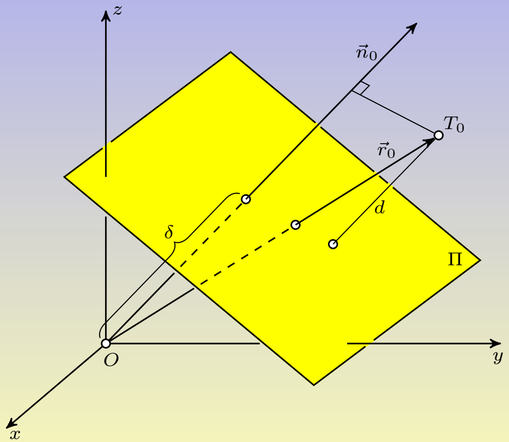
Bilo koji vektor različit od nulvektora koji je okomit na ravninu Π zovemo normala ravnine Π.

Neka je ravnina Π zadana u prostoru svojom jediničnom normalom $\vec{n}_0$ i udaljenošću δ od ishodišta. Intuitivno, od ishodišta se u smjeru vektora $\vec{n}_0$ pomaknemo za δ i u dobivenoj točki postavimo ravninu okomitu na vektor $\vec{n}_0$. U tom smislu je ravnina Π na taj način jednoznačno određena.

Pazite, s $-\vec{n}_0$ i δ je određena ravnina koja je centralno simetrična s ravninom Π s obzirom na ishodište koordinatnog sustava. Važno je da se od ishodišta pomičemo za δ na onu stranu na koju pokazuje "strelica" zadanog jediničnog vektora.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Neka je T_0 proizvoljna točka u prostoru i neka je d njezina udaljenost od ravnine Π.



Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

$\vec{n}_0$ ... jedinični vektor normale ravnine Π

$\vec{r}_0$ ... radijvektor točke T_0

δ ... udaljenost ravnine od ishodišta

d ... udaljenost točke T_0 od ravnine Π

Sa slike vidimo da vrijedi

$$\vec{r}_0\,\vec{n}_0 = |\vec{r}_0|\cdot|\vec{n}_0|\cdot\cos\left(\vec{r}_0,\vec{n}_0\right) = |\vec{r}_0|\cdot\cos\left(\vec{r}_0,\vec{n}_0\right) = d+\delta,$$

pa dobivamo formulu za orijentiranu udaljenost točke od ravnine.

Orijentirana udaljenost točke od ravnine

$$d = \vec{r}_0\,\vec{n}_0 - \delta$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Ako su vektor $\vec{n}_0$ i točka T_0 zadani svojim Kartezijevim koordinatama

$$\vec{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma), \quad T_0(x_0, y_0, z_0),$$

tada iz prethodne formule računanjem skalarnog produkta u ortonormiranoj bazi dobivamo

Orijentirana udaljenost točke od ravnine – raspisano u koordinatama

$$d = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - \delta$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Napomena.

Na temelju prethodnih razmatranja možemo donijeti sljedeće zaključke:

- Udaljenost $d = \vec{r}_0\,\vec{n}_0 - \delta$ je pozitivna za točke prostora koje se nalaze s one strane ravnine na koju pokazuje njezina jedinična normala $\vec{n}_0$. Ukoliko ravnina ne prolazi kroz ishodište koordinatnog sustava, tada se zapravo radi o točkama prostora koje se nalaze s one strane ravnine u kojoj nije ishodište koordinatnog sustava.
- Udaljenost $d = \vec{r}_0\,\vec{n}_0 - \delta$ je negativna za točke prostora koje se nalaze s one strane ravnine na koju ne pokazuje njezina jedinična normala $\vec{n}_0$. Ukoliko ravnina ne prolazi kroz ishodište koordinatnog sustava, tada se zapravo radi o točkama prostora koje se nalaze s one strane ravnine u kojoj se nalazi ishodište koordinatnog sustava.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Točka T se nalazi u ravnini Π ako i samo ako je njezina udaljenost od te ravnine jednaka 0, tj. ako i samo ako vrijedi

$$\vec{r}\,\vec{n}_0 - \delta = 0.$$

Ako je $T(x, y, z)$ i $\vec{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, raspisivanjem prethodne jednakosti u koordinatama dobivamo

Normalni ili Hesseov oblik jednadžbe ravnine

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \delta = 0$$

Analitička geometrija prostora
- Stereometrija
- Koordinatni sustav
- Jednadžba ravnine
- Udaljenost točke od ravnine
- Koeficijenti A, B, C, D
- Segmentni oblik jednadžbe ravnine
- Položaj dviju ravnina
- Jednadžba pravca
- Položaj dvaju pravaca
- Položaj pravca i ravnine
- Udaljenost točke od pravca
- Mimosmjerni pravci
- Udaljenost mimosmjernih pravaca
- Pramen ravnina
- Snop ravnina

Geometrijska interpretacija koeficijenata A, B, C, D

Opći oblik jednadžbe ravnine nije jedinstven. Naime, ako je

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

opći oblik jednadžbe ravnine Π, tada su i

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda Cz + \lambda D = 0$$

također opći oblici jednadžbe te iste ravnine za svaki $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Normalni ili Hesseov oblik jednadžbe ravnine je samo jedan specijalni opći oblik jednadžbe ravnine. Ovdje želimo pronaći vezu između normalnog oblika jednadžbe ravnine i bilo kojeg njezinog općeg oblika. Drugim riječima, pitamo se kako iz općeg oblika jednadžbe ravnine možemo dobiti njezin normalni oblik.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Neka je Π ravnina koja ima opći oblik jednadžbe

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (\blacktriangle)$$

Nadalje, neka je

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - \delta = 0 \qquad (\blacktriangledown)$$

njezin normalni oblik jednadžbe.

Kako $(\blacktriangle)$ i $(\blacktriangledown)$ predstavljaju istu ravninu, postoji $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takav da je

$$\cos\alpha = \lambda A, \quad \cos\beta = \lambda B, \quad \cos\gamma = \lambda C, \quad -\delta = \lambda D.$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Kako su $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ kosinusi smjera, kvadriranjem i zbrajanjem prvih triju jednakosti dobivamo

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \lambda^2 A^2 + \lambda^2 B^2 + \lambda^2 C^2$$

$$1 = \lambda^2\left(A^2 + B^2 + C^2\right)$$

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Kako je uvijek $\delta \geqslant 0$, iz $-\delta = \lambda D$ slijedi $\operatorname{sign}\lambda = -\operatorname{sign} D$. Stoga je konačno

$$\lambda = \frac{1}{-\operatorname{sign} D \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Ako je $Ax + By + Cz + D = 0$ opći oblik jednadžbe ravnine, tada normalni oblik dobijemo tako da njezin opći oblik pomnožimo brojem $\frac{1}{-\operatorname{sign} D \cdot \sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Dobivanje normalnog oblika jednadžbe ravnine iz općeg oblika

opći oblik: $$Ax + By + Cz + D = 0$$

normalni oblik: $$\frac{Ax + By + Cz + D}{-\operatorname{sign} D \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Iz dosadašnjeg razmatranja možemo zaključiti sljedeće. Ako je $Ax + By + Cz + D = 0$ opći oblik jednadžbe ravnine, tada vektor $\vec{n} = (A, B, C)$ predstavlja normalu ravnine koja ne mora biti nužno jedinične duljine kao što je to slučaj u normalnom obliku jednadžbe ravnine.

Nadalje, broj D daje informaciju o udaljenosti ravnine od ishodišta. Ako je $D = 0$, tada ravnina prolazi kroz ishodište. Ako pak je $D \neq 0$, tada ravnina ne prolazi kroz ishodište. Međutim, broj D u tom slučaju ne mora predstavljati stvarnu udaljenost ravnine od ishodišta ukoliko normala (A, B, C) nije jedinične duljine. Stvarna udaljenost ravnine od ishodišta jednaka je $\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Ako je $\vec{n} = (A, B, C)$ i $\vec{r} = (x, y, z)$, tada opći oblik jednadžbe ravnine $Ax + By + Cz + D = 0$ možemo kratko zapisati u obliku

Vektorski oblik opće jednadžbe ravnine

$$\vec{n}\,\vec{r} + D = 0$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Da bi se odredila orijentirana udaljenost točke $T_0(x_0, y_0, z_0)$ od ravnine Π, treba u normalni oblik jednadžbe ravnine uvrstiti koordinate zadane točke. Ako je $Ax + By + Cz + D = 0$ opći oblik jednadžbe ravnine Π, tada je $\frac{Ax+By+Cz+D}{-\operatorname{sign} D\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$ njezin normalni oblik. Stoga je orijentirana udaljenost točke T_0 od ravnine Π jednaka

$$d(T_0, \Pi) = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{-\operatorname{sign} D \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ako želimo samo klasičnu (pozitivnu) udaljenost, tada je

Udaljenost točke od ravnine

$$d(T_0, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

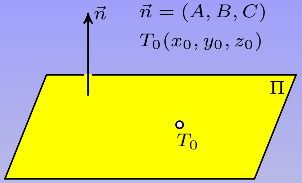
Ravninu u prostoru možemo zadati preko jedne točke $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i normale $\vec{n} = (A, B, C)$. Pitamo se kako na temelju ovih podataka doći do jednadžbe ravnine. Znamo da svaka ravnina ima opći oblik jednadžbe $Ax+By+Cz+D=0$. Kako su nam A, B, C poznati, preostaje nam još odrediti koeficijent D. S obzirom da točka T_0 leži u ravnini, njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu te ravnine. Stoga vrijedi

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

iz čega se dobiva

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina



Konačno dobivamo

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$$

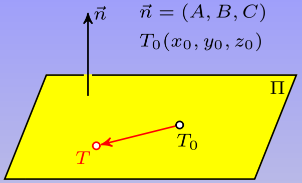
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

pa jednadžba ravnine glasi

Jednadžba ravnine zadane s točkom i normalom

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina



Jednadžbu ravnine Π zadane s točkom $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i normalom $\vec{n} = (A, B, C)$ možemo izvesti na još jedan elegantniji način. Neka je $T(x, y, z)$ bilo koja druga točka u ravnini Π. Tada su vektori $\overrightarrow{T_0T}$ i $\vec{n}$ okomiti pa je njihov skalarni produkt jednak 0. Kako je $\overrightarrow{T_0T} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, dobivamo

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{T_0T} = 0$$
$$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Napomena.

Normala $\vec{n} = (A, B, C)$ ravnine $Ax+By+Cz+D=0$ daje jednu orijentaciju ravnine u sljedećem smislu. Ako točka $T_0(x_0, y_0, z_0)$ ne leži u ravnini, tada je izraz $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$ različit od nule i vrijedi sljedeće:

- $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D > 0$ akko točka T_0 leži s one strane ravnine na koju pokazuje njezina normala $\vec{n} = (A, B, C)$
- $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D < 0$ akko točka T_0 leži s one strane ravnine na koju ne pokazuje njezina normala $\vec{n} = (A, B, C)$

Napomena.

Izbor normale ravnine daje jednu orijentaciju ravnine u prostoru. Svaku ravninu možemo orijentirati na dva bitno različita načina. Naime, ukoliko su $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ dvije normale ravnine Π, tada postoji $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takav da je $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$.

- Ako je $\lambda > 0$, tada normale $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ daju istu orijentaciju ravnine Π u prostoru.
- Ako je $\lambda < 0$, tada normale $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ daju različite orijentacije ravnine Π u prostoru.

Normala ravnine i općenito pojam normale plohe ima važnu primjenu u računalnoj grafici gdje se pomoću normale plohe postiže određeno osvjetljenje objekta unutar 3D scene.

O orijentaciji ravnine intuitivno možemo razmišljati kao o odabiru dijela prostora unutar kojeg se namjeravamo "šetati" po ravnini, a taj odabir je zapravo zadan preko normale ravnine.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Napomena.

U normalnom obliku jednadžbe ravnine normala je uvijek jedinične duljine i pokazuje na onu stranu ravnine u kojoj se ne nalazi ishodište koordinatnog sustava.

Ukoliko ravnina prolazi kroz ishodište, tada normalni oblik jednadžbe ravnine nije jedinstveno određen jer obje njezine jedinične normale $\vec{n}_0$ i $-\vec{n}_0$ pokazuju na one strane ravnine u kojima se ne nalazi ishodište. Dakle, možemo reći da ravnina kroz ishodište ima dva normalna oblika jednadžbe.

U općem obliku jednadžbe ravnine njezina normala ne mora nužno biti jedinične duljine i ne mora nužno pokazivati na onu stranu u kojoj se ne nalazi ishodište.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Napomena.

Ukoliko je u općem obliku jednadžbe ravnine normala ravnine jediniče duljine, tada taj opći oblik ne mora nužno biti i normalni oblik jer je moguće da jedinična normala ne pokazuje na onu stranu ravnine u kojoj nije ishodište.

Ako je $Ax + By + Cz + D = 0$ opći oblik jednadžbe ravnine u kojemu je normala jedinične duljine, tj. vrijedi $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, tada je taj oblik ujedno i normalni oblik jednadžbe ravnine ako i samo ako je $D \leqslant 0$.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Primjer 2.3.

Zadana je ravnina $\Pi \ldots 2x - y + 3z - 10 = 0.$

a. *Nađite udaljenost točke* $T(1, -2, 4)$ *od ravnine* Π.
b. *S obzirom na normalu* $\vec{n} = (2, -1, 3)$ *ravnine* Π, *na kojoj se strani ravnine* Π *nalazi točka* T*?*
c. *Da li se točka* T *i ishodište nalaze s iste strane ravnine* Π*?*

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Primjer 2.3.

Zadana je ravnina $\Pi \ldots 2x - y + 3z - 10 = 0$.

- (a) *Nađite udaljenost točke* $T(1,-2,4)$ *od ravnine* Π.
- (b) *S obzirom na normalu* $\vec{n} = (2,-1,3)$ *ravnine* Π*, na kojoj se strani ravnine* Π *nalazi točka* T*?*
- (c) *Da li se točka* T *i ishodište nalaze s iste strane ravnine* Π*?*

Rješenje.

- (a) Prema formuli za udaljenost točke od ravnine dobivamo

$$d(T,\Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$d(T,\Pi) = \frac{|2\cdot 1 - (-2) + 3\cdot 4 - 10|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}$$

$$d(T,\Pi) = \frac{6}{\sqrt{14}}$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

- b) Uvrstimo li koordinate točke T u izraz $2x - y + 3z - 10$, dobivamo

$$2 \cdot 1 - (-2) + 3 \cdot 4 - 10 = 6 > 0$$

iz čega zaključujemo da se točka T nalazi s one strane ravnine Π na koju pokazuje njezina normala $\vec{n} = (2, -1, 3)$.

- c) Uvrstimo ishodište $O(0, 0, 0)$ u izraz $2x - y + 3z - 10$, dobivamo

$$2 \cdot 0 - 0 + 3 \cdot 0 - 10 = -10 < 0$$

iz čega zaključujemo da se ishodište O nalazi s one strane ravnine Π na koju ne pokazuje njezina normala $\vec{n} = (2, -1, 3)$. Stoga se točka T i ishodište O nalaze s različitih strana ravnine Π.

Kakvi bi bili zaključci ako za ravninu Π uzmemo njezin opći oblik $-2x + y - 3z + 10 = 0$ i pripadnu normalu $\vec{n}_1 = -\vec{n} = (-2, 1, -3)$?

Analitička geometrija prostora
- Stereometrija
- Koordinatni sustav
- Jednadžba ravnine
- Udaljenost točke od ravnine
- Koeficijenti A, B, C, D
- Segmentni oblik jednadžbe ravnine
- Položaj dviju ravnina
- Jednadžba pravca
- Položaj dvaju pravaca
- Položaj pravca i ravnine
- Udaljenost točke od pravca
- Mimosmjerni pravci
- Udaljenost mimosmjernih pravaca
- Pramen ravnina
- Snop ravnina

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Neka su m, n, p segmenti koje ravnina Π odsijeca na koordinatnim osima. Tada ravnina Π prolazi točkama $M(m, 0, 0)$, $N(0, n, 0)$ i $P(0, 0, p)$. Iskoristimo li jednadžbu ravnine kroz tri točke, slijedi

$$\begin{vmatrix} x-m & y-0 & z-0 \\ 0-m & n-0 & 0-0 \\ 0-m & 0-0 & p-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-m & y & z \\ -m & n & 0 \\ -m & 0 & p \end{vmatrix} = 0$$

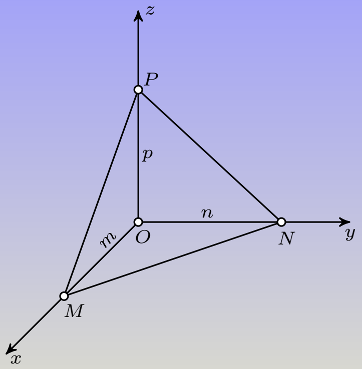
Laplaceovim razvojem po prvom retku dobivamo

$$np(x-m) + mpy + mnz = 0$$

$$npx + mpy + mnz = mnp \,/ : mnp$$

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina



Segmentni oblik jednadžbe ravnine

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$$

Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Pogledajmo koja je veza između općeg i segmentnog oblika jednadžbe ravnine. Uočimo najprije da ravnina $Ax+By+Cz+D=0$ ima segmentni oblik jedino ako ne prolazi kroz ishodište i ako nije paralelna s koordinatnim osima i koordinatnim ravninama. Da bi se to dogodilo, mora biti $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$. U tom slučaju segmentni oblik iz općeg oblika možemo dobiti na sljedeći način.

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$Ax + By + Cz = -D \Big/ \cdot \tfrac{-1}{D}$$

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z = 1$$

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1$$

Zaključujemo da su odsječci ravnine $Ax + By + Cz + D = 0$ na koordinatnim osima jednaki

$$m = -\frac{D}{A}, \quad n = -\frac{D}{B}, \quad p = -\frac{D}{C}.$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Položaj dviju ravnina

Položaj dviju ravnina u prostoru

Dvije različite ravnine u prostoru mogu biti u sljedeća dva položaja:

- Ravnine su paralelne.
- Ravnine se sijeku po pravcu. Pritom mogu biti okomite ili se mogu sijeći pod nekim kutom.

Kut između ravnina – definicija

Neka su Π_1 i Π_2 dvije ravnine s normalama $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$. Kut između ravnina se definira na sljedeći način.

$$\sphericalangle(\Pi_1, \Pi_2) = \begin{cases} \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2), & \text{ako je } \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \pi - \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2), & \text{ako je } \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Stavimo li $\varphi = \sphericalangle(\Pi_1, \Pi_2)$, iz definicije slijedi

Računanje kuta između ravnina

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Ako su ravnine zadane svojim jednadžbama

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

u općem obliku, tada je $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ i $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ pa dobivamo

Računanje kuta između ravnina – raspisano u koordinatama

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Uvjet okomitosti dviju ravnina

$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Uvjet paralelnosti dviju ravnina

$$\Pi_1 \parallel \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}, \vec{n}_1 = \lambda\vec{n}_2$$
$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Analitička geometrija prostora
- Stereometrija
- Koordinatni sustav
- Jednadžba ravnine
- Udaljenost točke od ravnine
- Koeficijenti A, B, C, D
- Segmentni oblik jednadžbe ravnine
- Položaj dviju ravnina
- Jednadžba pravca
- Položaj dvaju pravaca
- Položaj pravca i ravnine
- Udaljenost točke od pravca
- Mimosmjerni pravci
- Udaljenost mimosmjernih pravaca
- Pramen ravnina
- Snop ravnina

Primjer 2.4.

Izračunajte kut između ravnina

$$2x + 3y - 4z + 5 = 0 \quad i \quad x - 2y + 2z - 1 = 0$$

i kut između njihovih normali.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Primjer 2.4.

Izračunajte kut između ravnina

$$2x + 3y - 4z + 5 = 0 \quad i \quad x - 2y + 2z - 1 = 0$$

i kut između njihovih normali.

Rješenje.

Iz jednadžbi ravnina očitamo njihove normale $\vec{n}_1 = (2, 3, -4)$ i $\vec{n}_2 = (1, -2, 2)$.

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + (-4) \cdot 2 = 2 - 6 - 8 = -12$$

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{29}$$

$$|\vec{n}_2| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Neka je α kut između normali. Tada je

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{-12}{3\sqrt{29}} = \frac{-4}{\sqrt{29}}$$

pa je $\alpha = \arccos\frac{-4}{\sqrt{29}}$, odnosno $\alpha = 137^\circ 58' 8''$.

Neka je φ kut između ravnina. Tada je

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|-12|}{3\sqrt{29}} = \frac{12}{3\sqrt{29}} = \frac{4}{\sqrt{29}}$$

pa je $\varphi = \arccos\frac{4}{\sqrt{29}}$, odnosno $\varphi = 42^\circ 1' 52''$.

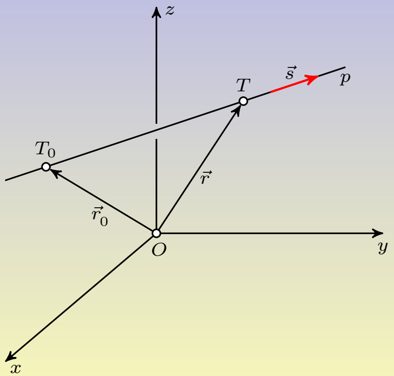
U ovom slučaju normale zadanih ravnina zatvaraju tupi kut, no kut između samih ravnina po definiciji uvijek mora biti manji ili jednak od pravog kuta. To nam osigurava apsolutna vrijednost skalarnog produkta u formuli za računanje kuta između dvije ravnine.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Jednadžba pravca

Neka je p pravac zadan s točkom T_0 i vektorom smjera $\vec{s}$.

$$p \ldots T_0(x_0, y_0, z_0), \;\; \vec{s} = (\alpha, \beta, \gamma)$$



Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Neka je T proizvoljna točka na pravcu p. Tada je

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_0} + \overrightarrow{T_0T}.$$

Kako su $\overrightarrow{T_0T}$ i $\vec{s}$ kolinearni vektori, postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\overrightarrow{T_0T} = \lambda \vec{s}.$$

Konačno dobivamo

Vektorski oblik jednadžbe pravca

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{s}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Mijenjamo li parametar λ, dobivamo sve točke pravca p i samo te točke.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Raspišemo li vektorski oblik jednadžbe pravca po koordinatama, dobivamo

Parametarske jednadžbe pravca

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases}$$

Eliminacijom parametra λ iz parametarskih jednadžbi pravca dobivamo

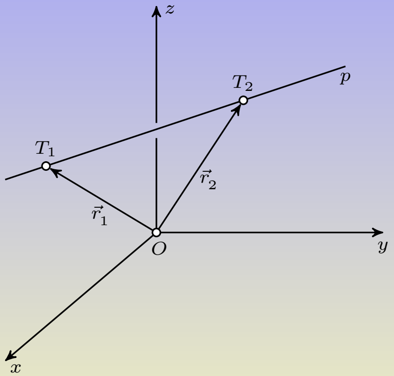
Kanonski oblik jednadžbe pravca

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Neka je p pravac zadan s dvije različite točke T_1 i T_2.

$$p \ldots T_1(x_1, y_1, z_1),\ T_2(x_2, y_2, z_2)$$



Za vektor smjera pravca p možemo uzeti vektor

$$\vec{s} = \overrightarrow{T_1T_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Sada na pravac p možemo gledati kao na pravac zadan s točkom T_1 i vektorom smjera $\vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Uvrstimo li ove podatke u već ranije izvedeni vektorski oblik jednadžbe pravca

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{s},$$

dobivamo

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1),$$

odnosno

Vektorska jednadžba pravca kroz dvije zadane točke

$$\vec{r} = (1 - \lambda)\vec{r}_1 + \lambda \vec{r}_2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Raspišemo li vektorsku jednadžbu pravca kroz dvije zadane točke po koordinatama, dobivamo

Parametarske jednadžbe pravca kroz dvije točke

$$\begin{cases} x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \\ y = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2 \end{cases}$$

Eliminacijom parametra λ dobivamo

Kanonska jednadžba pravca kroz dvije točke

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Primjer 2.5.

Napišite vektorski, parametarski i kanonski oblik jednadžbe pravca koji prolazi točkom $A(-2, 4, 3)$ i paralelan je s y-osi.

Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Primjer 2.5.

Napišite vektorski, parametarski i kanonski oblik jednadžbe pravca koji prolazi točkom $A(-2,4,3)$ i paralelan je s y-osi.

Rješenje.

Ako je pravac paralelan s y-osi, tada za njegov vektor smjera možemo uzeti vektor $\vec{s} = (0,1,0)$. Vektorska jednadžba pravca glasi

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_0 + \lambda\vec{s}\\ \vec{r} &= (-2,4,3) + \lambda(0,1,0)\\ \vec{r} &= (-2,4+\lambda,3)\end{aligned}$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Parametarske jednadžbe pravca glase

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 + \lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

Konačno, kanonski oblik jednadžbe pravca glasi

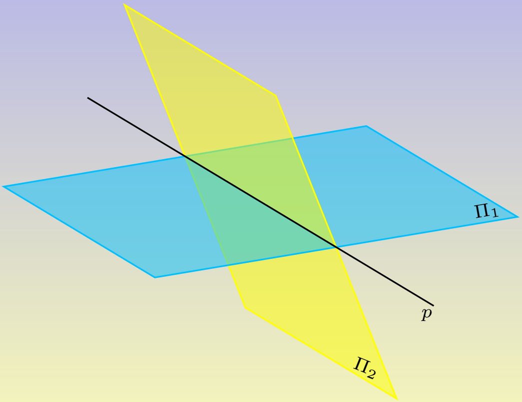
$$\frac{x+2}{0} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{0}.$$

Uočite da nula u nazivniku kod kanonske jednadžbe pravca ne znači dijeljenje s nulom, nego je to samo "šminkerski" zapis pravca kod kojeg se u nazivniku piše odgovarajuća koordinata vektora smjera tog pravca, a ona može biti na nekom mjestu jednaka nula. Jedino nije moguće da u nazivnicima na svim mjestima budu nule jer nulvektor ne može biti vektor smjera niti jednog pravca.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Pravac p u prostoru može se zadati kao presječnica dviju neparalelnih ravnina Π_1 i Π_2.

$$\Pi_1 \ldots \vec{n}_1\vec{r} + D_1 = 0, \qquad \Pi_2 \ldots \vec{n}_2\vec{r} + D_2 = 0$$



Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Vektorski oblik općih jednadžbi pravca

$$p \ldots \begin{cases} \vec{n}_1 \vec{r} + D_1 &= 0 \\ \vec{n}_2 \vec{r} + D_2 &= 0 \end{cases}$$

Ako je $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ i $\vec{r} = (x, y, z)$, u koordinatnom zapisu dobivamo

Opće jednadžbe pravca

$$p \ldots \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0 \end{cases}$$

pri čemu je $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$.

Ako je $A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$, tada su ravnine Π_1 i Π_2 paralelne pa možemo razmišljati da se sijeku u beskonačno dalekom pravcu.

Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Već je u aksiomima navedeno kako se dvije ravnine u trodimenzionalnom prostoru ne mogu siječi samo u jednoj točki, nego se moraju siječi po pravcu. Pogledajmo kako to možemo zaključiti iz njihovih općih jednadžbi. Točke koje pripadaju ravninama $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ moraju biti rješenje sustava

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z &= -D_2 \end{aligned}$$

Radi se o sustavu od dvije linearne jednadžbe s tri nepoznanice. Prema Kronecker-Capellijevom teoremu mogu nastupiti sljedeći slučajevi.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

1. Rang matrice sustava je različit od ranga proširene matrice sustava. U tom slučaju sustav nema rješenja, tj. ravnine su paralelne.
2. Rang matrice sustava jednak je rangu proširene matrice sustava. U tom slučaju sustav ima rješenje.
   - Ako je rang matrice sustava jednak 1, tada imamo samo jednu nezavisnu jednadžbu i opće rješenje ima dva parametra. Geometrijski to znači da se zadane dvije ravnine podudaraju.
   - Ako je rang matrice sustava jednak 2, tada opće rješenje ima jedan parametar. Geometrijski to znači da se zadane ravnine sijeku po pravcu.

Kako je matrica sustava tipa $(2, 3)$, njezin rang ne može biti veći od 2 iz čega zaključujemo da se dvije ravnine u trodimenzionalnom prostoru ne mogu siječi u samo jednoj točki.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Primjer 2.6.

Odredite parametarske jednadžbe pravca koji je zadan kao presječnica dviju ravnina

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z + 13 = 0 \\ 5x - 3y + 2z - 2 = 0 \end{cases}.$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Primjer 2.6.

Odredite parametarske jednadžbe pravca koji je zadan kao presječnica dviju ravnina

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z + 13 = 0 \\ 5x - 3y + 2z - 2 = 0 \end{cases}.$$

Rješenje.

Prvi način

Riješimo li sustav Gaussovim postupkom tako da na primjer varijabla x bude parametar, dobivamo parametarske jednadžbe pravca

$$p \ldots \begin{cases} x = t \\ y = \frac{13}{4}t + \frac{9}{4} \\ z = \frac{19}{8}t + \frac{35}{8} \end{cases}$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Drugi način

Za vektor smjera pravca možemo uzeti vektorski produkt normali zadanih ravnina. Nakon toga trebamo još jednu točku na tom pravcu koju dobijemo tako da pronađemo jedno rješenje zadanog sustava.

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (3, 2, -4) \times (5, -3, 2) = (-8, -26, -19)$$

Ako uzmemo na primjer $x = 0$, tada iz sustava dobijemo da mora biti $y = \frac{9}{4}$, $z = \frac{35}{8}$. Stoga su parametarske jednadžbe pravca

$$p \dots \begin{cases} x = -8t \\ y = -26t + \frac{9}{4} \\ z = -19t + \frac{35}{8} \end{cases}$$

Parametarske jednadžbe pravca nisu jedinstvene.

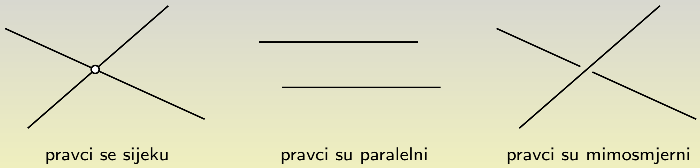
Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Položaj dvaju pravaca

Položaj dvaju pravaca u prostoru

Dva različita pravca u prostoru mogu biti u sljedeća tri položaja:

- Pravci se sijeku.
- Pravci su paralelni.
- Pravci su mimosmjerni, tj. ne sijeku se i nisu paralelni.



Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Kut između pravaca – definicija

Neka su p_1 i p_2 dva pravca s vektorima smjera $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$. Kut između pravaca se definira na sljedeći način.

$$\sphericalangle(p_1, p_2) = \begin{cases} \sphericalangle(\vec{s}_1, \vec{s}_2), & \text{ako je } \sphericalangle(\vec{s}_1, \vec{s}_2) \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \pi - \sphericalangle(\vec{s}_1, \vec{s}_2), & \text{ako je } \sphericalangle(\vec{s}_1, \vec{s}_2) > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Stavimo li $\varphi = \sphericalangle(p_1, p_2)$, iz definicije slijedi

Računanje kuta između pravaca

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Ako je $\vec{s}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ i $\vec{s}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, dobivamo

Računanje kuta između pravaca – raspisano u koordinatama

$$\cos\varphi = \frac{|\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} \cdot \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}$$

Uvjet okomitosti dvaju pravaca

$$p_1 \perp p_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$$

Uvjet paralelnosti dvaju pravaca

$$p_1 \parallel p_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 = 0 \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R},\ \vec{s}_1 = \lambda\vec{s}_2$$
$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Primjer 2.7.

Odredite kut između pravaca

$$p_1 \ldots \begin{cases} x = 2t+5 \\ y = -t+2 \\ z = t-7 \end{cases} \quad i \quad p_2 \ldots \begin{cases} x = t-1 \\ y = 2t+1 \\ z = 4t-3 \end{cases} .$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Primjer 2.7.

Odredite kut između pravaca

$$p_1 \ldots \begin{cases} x = 2t+5 \\ y = -t+2 \\ z = t-7 \end{cases} \quad i \quad p_2 \ldots \begin{cases} x = t-1 \\ y = 2t+1 \\ z = 4t-3 \end{cases}.$$

Rješenje.

Iz parametarskih jednadžbi pravaca očitamo njihove vektore smjerova $\vec{s}_1 = (2, -1, 1)$ i $\vec{s}_2 = (1, 2, 4)$.

$$\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 2 - 2 + 4 = 4$$

$$|\vec{s}_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{s}_2| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Neka je φ kut između pravaca. Tada je

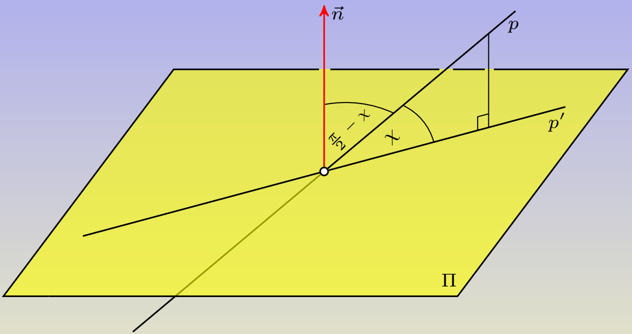
$$\cos\varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{|4|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{21}} = \frac{4}{3\sqrt{14}}$$

pa je $\varphi = \arccos \frac{4}{3\sqrt{14}}$, odnosno $\varphi = 69°7'26''$.

Uočite da je kut između pravaca u ovom slučaju jednak kutu između njihovih vektora smjerova jer je $\vec{s}_1\vec{s}_2 > 0$.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Položaj pravca i ravnine



$$\chi = \sphericalangle(p, \Pi) \stackrel{\text{def}}{=} \sphericalangle(p, p')$$

Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Položaj pravca i ravnine u prostoru

Pravac i ravnina u prostoru mogu biti u sljedećim položajima:

- Pravac i ravnina se sijeku.
- Pravac i ravnina su paralelni.
- Pravac leži u ravnini.

Kut između pravca i ravnine – definicija

Kut između pravca p i ravnine Π jednak je kutu između pravca p i njegove ortogonalne projekcije p' na ravninu Π. Specijalno, ako je pravac p paralelan s normalom ravnine Π, tada je kut između njih jednak $\frac{\pi}{2}$, tj. pravac i ravnina su okomiti.

$$\sphericalangle(p,\Pi) \stackrel{\text{def}}{=} \sphericalangle(p,p')$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Neka su pravac p i ravnina Π zadani svojim jednadžbama.

$$p \ldots \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{s}$$
$$\Pi \ldots \vec{n}\,\vec{r} + D = 0$$

Gledajući sliku uočavamo da vrijedi

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) = |\cos(\vec{s}, \vec{n})| = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|}$$

pa konačno dobivamo formulu za

Računanje kuta između pravca i ravnine

$$\sin \chi = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|}$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Ako je $\vec{s} = (\alpha, \beta, \gamma)$ i $\vec{n} = (A, B, C)$, dobivamo

Kut između pravca i ravnine – raspisano u koordinatama

$$\sin\chi = \frac{|\alpha A + \beta B + \gamma C|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Uvjet paralelnosti pravca i ravnine

$$p \parallel \Pi \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \vec{s} \cdot \vec{n} = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha A + \beta B + \gamma C = 0$$

Uvjet okomitosti pravca i ravnine

$$p \perp \Pi \Leftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{s} = \lambda \vec{n}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}$$

Analitička geometrija prostora
- Stereometrija
- Koordinatni sustav
- Jednadžba ravnine
- Udaljenost točke od ravnine
- Koeficijenti A, B, C, D
- Segmentni oblik jednadžbe ravnine
- Položaj dviju ravnina
- Jednadžba pravca
- Položaj dvaju pravaca
- Položaj pravca i ravnine
- Udaljenost točke od pravca
- Mimosmjerni pravci
- Udaljenost mimosmjernih pravaca
- Pramen ravnina
- Snop ravnina

Primjer 2.8.

Odredite kut između pravca $p \ldots \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-2}{0}$ *i ravnine* $\Pi \ldots -2x+3y-z+7=0.$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Primjer 2.8.

Odredite kut između pravca $p \ldots \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-2}{0}$ *i ravnine* $\Pi \ldots -2x + 3y - z + 7 = 0$*.*

Rješenje.

Vektor smjera pravca p je $\vec{s} = (2, -1, 0)$, a normala ravnine Π je $\vec{n} = (-2, 3, -1)$.

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot (-1) = -4 - 3 + 0 = -7$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

Neka je χ kut između pravca p i ravnine Π. Tada je

$$\sin\chi = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|-7|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{70}}$$

pa je $\chi = \arcsin\frac{7}{\sqrt{70}}$, odnosno $\chi = 56^\circ 47' 21''$.

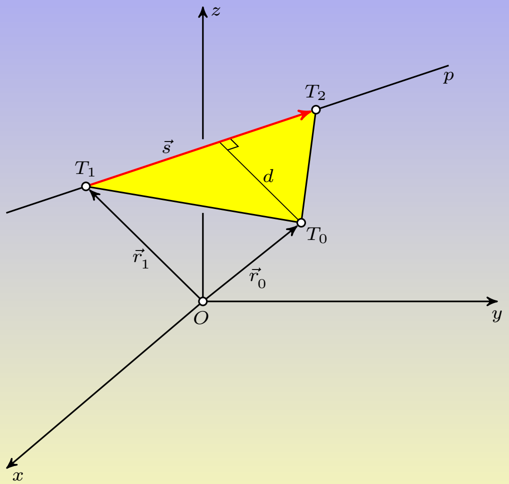
Kut između vektora $\vec{s}$ i $\vec{n}$ u ovom slučaju je tupi jer je $\vec{s}\cdot\vec{n} < 0$. Naime, neka je φ kut između spomenutih vektora. Tada je

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}\cdot\vec{n}}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{-7}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{14}} = \frac{-7}{\sqrt{70}}$$

pa je $\varphi = \arccos\frac{-7}{\sqrt{70}}$, odnosno $\varphi = 146^\circ 47' 21''$. Uočite da je u ovom slučaju $\chi = \varphi - 90^\circ$. Objasnite ovu situaciju geometrijski na slici.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Udaljenost točke od pravca



Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Tražimo udaljenost točke T_0 od pravca p. Neka je pravac p zadan jednadžbom

$$p \ldots \vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{s}.$$

Neka je T_2 točka na pravcu p takva da je $\overrightarrow{T_1T_2} = \vec{s}$.

Računamo površinu trokuta $\triangle T_0T_1T_2$ na dva načina.

$$P = \frac{1}{2}|\vec{s}| \cdot d$$

$$P = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{T_1T_0} \times \overrightarrow{T_1T_2}\right| = \frac{1}{2}|(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{s}\,|$$

Konačno dobivamo

Udaljenost točke od pravca

$$d(T_0, p) = \frac{|(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{s}\,|}{|\vec{s}\,|}$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Primjer 2.9.

Odredite udaljenost točke $T(2,1,3)$ *od pravca* p *koji prolazi točkama* $A(1,1,1)$ *i* $B(2,3,4)$.

Primjer 2.9.

Odredite udaljenost točke $T(2,1,3)$ *od pravca* p *koji prolazi točkama* $A(1,1,1)$ *i* $B(2,3,4)$.

Rješenje.

Za vektor smjera pravca p možemo uzeti vektor

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (2,3,4) - (1,1,1) = (1,2,3).$$

Na pravac p možemo gledati kao na pravac koji prolazi točkom A i ima vektor smjera $\vec{s}$. Stoga je $\vec{r}_0 = (2,1,3)$, $\vec{r}_1 = (1,1,1)$.

Duljina vektora $\vec{s}$ jednaka je

$$|\vec{s}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

$$(\vec{r}_0-\vec{r}_1)\times\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2-1 & 1-1 & 3-1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=(-4,-1,2)$$

$$\left|(\vec{r}_0-\vec{r}_1)\times\vec{s}\right|=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{21}$$

Stoga je udaljenost točke T od pravca p jednaka

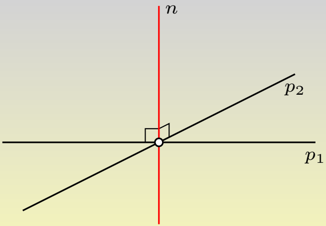
$$d(T,p)=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

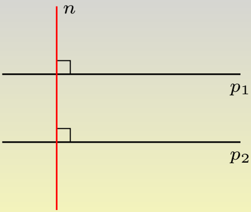
Mimosmjerni pravci

Zajednička normala dvaju pravaca

Zajednička normala dvaju pravaca p_1 i p_2 u prostoru je svaki pravac n koji siječe oba pravca i okomit je na njih.

Jasno je da pravci koji se sijeku i paralelni pravci imaju zajedničku normalu.





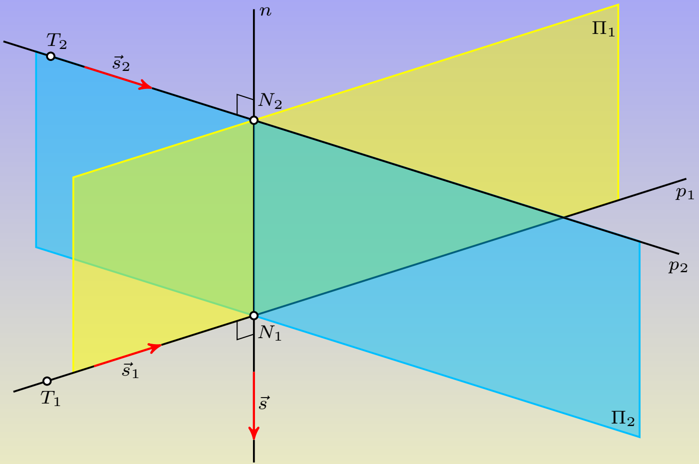
Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Zadatak 2.1.

1. *Objasnite geometrijski kako se može pronaći zajednička normala dvaju pravaca koji se sijeku.*
2. *Objasnite geometrijski kako se može pronaći zajednička normala dvaju paralelnih pravaca.*
3. *Da li pravci koji se sijeku imaju jedinstvenu zajedničku normalu?*
4. *Da li paralelni pravci imaju jedinstvenu zajedničku normalu?*

U nastavku pokazujemo da mimosmjerni pravci p_1 i p_2 imaju jedinstvenu zajedničku normalu n.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina



Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Neka su mimosmjerni pravci p_1 i p_2 zadani jednadžbama

$$p_i \ldots \vec{r} = \vec{r}_i + \lambda \vec{s}_i, \quad i = 1, 2.$$

Kako pravac n mora biti okomit na oba pravca p_1 i p_2, za njegov vektor smjera možemo uzeti vektor $\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$.

Pravci p_1 i n se sijeku pa određuju neku ravninu Π_1. Ravnina Π_1 prolazi točkom T_1 i razapeta je vektorima $\vec{s}_1$ i $\vec{s}$ pa ima jednadžbu

$$\Pi_1 \ldots (\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}) = 0.$$

Pravci p_2 i n se sijeku pa određuju neku ravninu Π_2. Ravnina Π_2 prolazi točkom T_2 i razapeta je vektorima $\vec{s}_2$ i $\vec{s}$ pa ima jednadžbu

$$\Pi_2 \ldots (\vec{r} - \vec{r}_2, \vec{s}_2, \vec{s}) = 0.$$

Tada je očito $n = \Pi_1 \cap \Pi_2$. Time smo dokazali egzistenciju zajedničke normale dvaju mimosmjernih pravaca.

Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

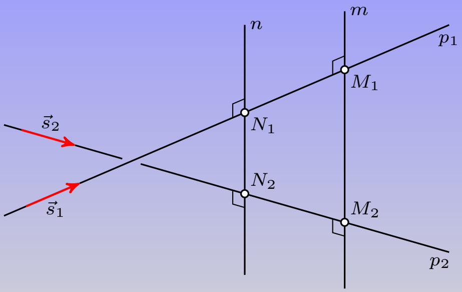
Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina



Dokažimo još i jedinstvenost. Pretpostavimo suprotno, tj. da mimosmjerni pravci p_1 i p_2 imaju dvije različite zajedničke normale n i m kako je prikazano na slici.

Kako je pravac n okomit na oba pravca p_1 i p_2, za vektor smjera pravca n možemo uzeti vektor $\vec{s}_n = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$.

Kako je pravac m okomit na oba pravca p_1 i p_2, za vektor smjera pravca m možemo uzeti vektor $\vec{s}_m = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Stoga su pravci n i m paralelni pa postoji ravnina Π koja sadrži pravce n i m.

Kako dvije različite točke N_1 i M_1 pravca p_1 leže u ravnini Π, onda prema aksiomu i pravac p_1 leži u ravnini Π.

Kako dvije različite točke N_2 i M_2 pravca p_2 leže u ravnini Π, onda prema aksiomu i pravac p_2 leži u ravnini Π.

Zaključujemo da pravci p_1 i p_2 leže u istoj ravnini Π, što je kontradikcija s pretpostavkom da su pravci p_1 i p_2 mimosmjerni. Dakle, zajednička normala dvaju mimosmjernih pravaca je jedinstvena.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Time smo dokazali sljedeću propoziciju.

Propozicija 2.7 (Zajednička normala mimosmjernih pravaca).

Neka su p_1 i p_2 mimosmjerni pravci u prostoru zadani svojim jednadžbama

$$p_i \ldots \vec{r} = \vec{r}_i + \lambda \vec{s}_i, \quad i = 1, 2.$$

Tada je zajednička normala n pravaca p_1 i p_2 jedinstvena i određena je kao presjek ravnina

$$n \ldots \begin{cases} (\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_1 \times \vec{s}_2) = 0 \\ (\vec{r} - \vec{r}_2, \vec{s}_2, \vec{s}_1 \times \vec{s}_2) = 0 \end{cases}.$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Primjer 2.10.

Odredite zajedničku normalu mimosmjernih pravaca

$$p_1 \ldots \frac{x+2}{3} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z-2}{4}, \quad p_2 \ldots \frac{x+5}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{5}.$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Primjer 2.10.

Odredite zajedničku normalu mimosmjernih pravaca

$$p_1 \dots \frac{x+2}{3} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z-2}{4}, \quad p_2 \dots \frac{x+5}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{5}.$$

Rješenje.

Pravac p_1 ima vektor smjera $\vec{s}_1 = (3, -4, 4)$ i prolazi točkom s radijvektorom $\vec{r}_1 = (-2, 7, 2)$.

Pravac p_2 ima vektor smjera $\vec{s}_2 = (-1, 1, 5)$ i prolazi točkom s radijvektorom $\vec{r}_2 = (-5, 0, -3)$.

$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-24, -19, -1)$$

Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Tražimo ravninu $\Pi_1 \ldots (\vec{r}-\vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_1 \times \vec{s}_2) = 0.$

$$(\vec{r}-\vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_1 \times \vec{s}_2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-7 & z-2 \\ 3 & -4 & 4 \\ -24 & -19 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$80x - 93y - 153z + 1117 = 0$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Tražimo ravninu $\Pi_1 \ldots (\vec{r}-\vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_1 \times \vec{s}_2) = 0.$

$$(\vec{r}-\vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_1 \times \vec{s}_2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-7 & z-2 \\ 3 & -4 & 4 \\ -24 & -19 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$80x - 93y - 153z + 1117 = 0$$

Tražimo ravninu $\Pi_2 \ldots (\vec{r}-\vec{r}_2, \vec{s}_2, \vec{s}_1 \times \vec{s}_2) = 0.$

$$(\vec{r}-\vec{r}_2, \vec{s}_2, \vec{s}_1 \times \vec{s}_2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x+5 & y & z+3 \\ -1 & 1 & 5 \\ -24 & -19 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$94x - 121y + 43z + 599 = 0$$

Analitička geometrija prostora
- Stereometrija
- Koordinatni sustav
- Jednadžba ravnine
- Udaljenost točke od ravnine
- Koeficijenti A, B, C, D
- Segmentni oblik jednadžbe ravnine
- Položaj dviju ravnina
- Jednadžba pravca
- Položaj dvaju pravaca
- Položaj pravca i ravnine
- Udaljenost točke od pravca
- Mimosmjerni pravci
- Udaljenost mimosmjernih pravaca
- Pramen ravnina
- Snop ravnina

Konačno, zajednička normala mimosmjernih pravaca p_1 i p_2 određena je kao presjek ravnina Π_1 i Π_2, tj.

$$n \ldots \begin{cases} 80x - 93y - 153z + 1117 = 0 \\ 94x - 121y + 43z + 599 = 0 \end{cases} .$$

Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Udaljenost dvaju pravaca u prostoru

Udaljenost dvaju pravaca p_1 i p_2 u prostoru je broj $d = d(p_1, p_2)$ definiran kao

$$d(p_1, p_2) = \inf \left\{ d(P_1, P_2) \mid P_1 \in p_1, P_2 \in p_2 \right\}$$

Vrijedi sljedeća tvrdnja.

Propozicija 2.8.

Neka je n zajednička normala pravaca p_1 i p_2, a N_1 i N_2 njezina nožišta redom na pravcima p_1 i p_2. Tada je

$$d(p_1, p_2) = d(N_1, N_2).$$

Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

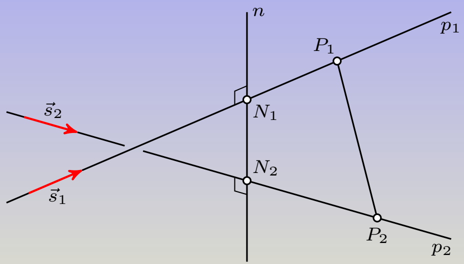
Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Dokaz.

Neka su P_1 i P_2 bilo koje dvije točke redom na pravcima p_1 i p_2. Neka je $\vec{r}_3$ radijvektor točke N_1, a $\vec{r}_4$ radijvektor točke N_2.



Tada postoje $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{ON_1} + \overrightarrow{N_1P_1} = \vec{r}_3 + \lambda_1 \vec{s}_1$$

$$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{ON_2} + \overrightarrow{N_2P_2} = \vec{r}_4 + \lambda_2 \vec{s}_2$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Stoga je

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (\vec{r}_4 + \lambda_2\vec{s}_2) - (\vec{r}_3 + \lambda_1\vec{s}_1)$$

pa slijedi

$$d(P_1, P_2) = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \left|(\vec{r}_4 - \vec{r}_3) + (\lambda_2\vec{s}_2 - \lambda_1\vec{s}_1)\right|.$$

Kvadriranjem posljednje jednakosti dobivamo

$$d(P_1, P_2)^2 = (\vec{r}_4 - \vec{r}_3)^2 + 2\lambda_2(\vec{r}_4 - \vec{r}_3)\vec{s}_2 - \\ - 2\lambda_1(\vec{r}_4 - \vec{r}_3)\vec{s}_1 + (\lambda_2\vec{s}_2 - \lambda_1\vec{s}_1)^2.$$

Zbog $\vec{r}_4 - \vec{r}_3 = \overrightarrow{N_1N_2} \perp \vec{s}_1, \vec{s}_2$ vrijedi

$$(\vec{r}_4 - \vec{r}_3)\vec{s}_1 = 0, \quad (\vec{r}_4 - \vec{r}_3)\vec{s}_2 = 0$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

iz čega slijedi

$$d(P_1,P_2)^2 = d(N_1,N_2)^2 + \underbrace{(\lambda_2\vec{s}_2 - \lambda_1\vec{s}_1)^2}_{\geqslant 0}$$

pa je zaista $d(P_1,P_2) \geqslant d(N_1,N_2)$. Zbog toga je

$$d(p_1,p_2) = \inf\left\{d(P_1,P_2) \mid P_1 \in p_1, P_2 \in p_2\right\} = d(N_1,N_2),$$

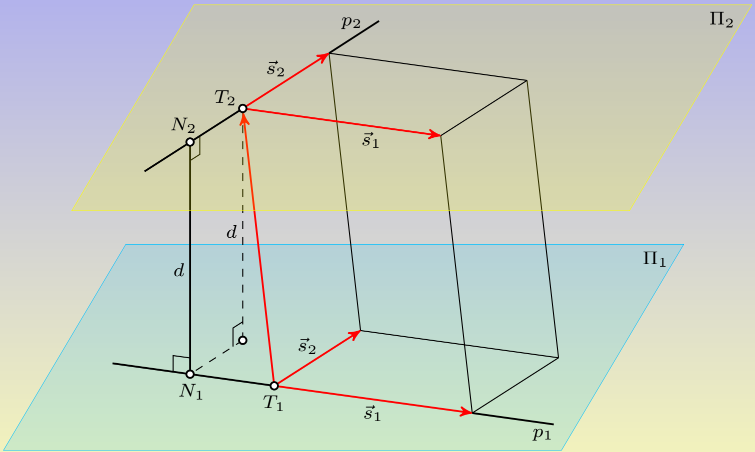
tj. gornji infimum se upravo postiže u točkama N_1 i N_2 pa zapravo imamo minimum. ♡

Napomena.

Ako se pravci p_1 i p_2 sijeku u točki S, tada je $N_1 = N_2 = S$ pa je $d(p_1,p_2) = 0$.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Izvedimo sada formulu za udaljenost $d = d(p_1, p_2)$ dvaju mimosjernih pravaca p_1 i p_2.



Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Neka su mimosmjerni pravci p_1 i p_2 zadani svojim jednadžbama

$$p_i \ldots \vec{r} = \vec{r}_i + \lambda \vec{s}_i, \quad i = 1, 2.$$

Neka su N_1 i N_2 nožišta njihove zajedničke normale n redom na pravcima p_1 i p_2. Znamo da je $d(p_1, p_2) = d(N_1, N_2)$.

Sa slike možemo primijetiti da je udaljenost d zapravo jednaka duljini visine paralelepipeda razapetog s vektorima

$$\vec{s}_1, \ \vec{s}_2, \ \overrightarrow{T_1T_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Sada računamo volumen promatranog paralelepipeda na dva različita načina. Paralelepiped je zapravo prizma kojoj je baza paralelogram, a volumen bilo koje prizme jednak je $V = Bv$, tj. produktu površine baze i duljine visine prizme spuštene na tu bazu.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Kako je baza paralelogram razapet s vektorima $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$, tada je $B = |\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|$. Nadalje, duljina visine prizme je jednaka d. Stoga je

$$V = |\vec{s}_1 \times \vec{s}_2| \cdot d. \qquad (*)$$

S druge strane, volumen paralelepipeda jednak je apsolutnoj vrijednosti mješovitog produkta vektora $\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2$.

$$V = \left|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2)\right| \qquad (\star)$$

Konačno, iz $(*)$ i $(\star)$ dobivamo

Formula za udaljenost mimosmjernih pravaca

$$d(p_1, p_2) = \frac{\left|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2)\right|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Zadatak 2.2.

Gledajući direktno formulu za udaljenost dvaju mimosmjernih pravaca u prostoru i geometrijski izvod te formule, odgovorite na sljedeća pitanja.

a. *Objasnite zbog čega je spomenuta formula dobra i u slučaju kada se pravci p_1 i p_2 sijeku. Što se u tom slučaju zbiva u geometrijskom izvodu te formule? U kakvom su položaju vektori $\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2$ u tom slučaju?*
b. *Objasnite zbog čega spomenuta formula nije dobra u slučaju kada su pravci p_1 i p_2 paralelni. Gdje se javlja problem u samoj formuli? Što se zbiva s geometrijskim izvodom te formule? U kakvom su položaju vektori $\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2$ i usporedite gdje je bitna razlika s obzirom na slučaj kada se pravci sijeku.*
c. *Opišite na koji način možemo izračunati udaljenost dvaju paralelnih pravaca u prostoru.*

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Primjer 2.11.

Odredite udaljenost pravaca

$$p_1 \ldots \frac{x+2}{3} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z-2}{4}, \quad p_2 \ldots \frac{x+5}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{5}.$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Primjer 2.11.

Odredite udaljenost pravaca

$$p_1 \ldots \frac{x+2}{3} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z-2}{4}, \quad p_2 \ldots \frac{x+5}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{5}.$$

Rješenje.

Pravac p_1 ima vektor smjera $\vec{s}_1 = (3, -4, 4)$ i prolazi točkom s radijvektorom $\vec{r}_1 = (-2, 7, 2)$.

Pravac p_2 ima vektor smjera $\vec{s}_2 = (-1, 1, 5)$ i prolazi točkom s radijvektorom $\vec{r}_2 = (-5, 0, -3)$.

Kako vektori $\vec{s}_1$ i $\vec{s}_2$ nemaju proporcionalne koordinate, zaključujemo da pravci p_1 i p_2 nisu paralelni pa slobodno primijenimo formulu za udaljenost dvaju mimosmjernih pravaca. U slučaju da se pravci p_1 i p_2 možda sijeku, formula će dati ispravni rezultat 0.

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Kako je $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (-5, 0, -3) - (-2, 7, 2) = (-3, -7, -5)$, slijedi

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = \begin{vmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 3 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 210.$$

Nadalje,

$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-24, -19, -1)$$

$$|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2| = \sqrt{(-24)^2 + (-19)^2 + (-1)^2} = \sqrt{938}$$

Stoga je

$$d(p_1, p_2) = \frac{\left|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2)\right|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} = \frac{|210|}{\sqrt{938}} = \frac{210}{\sqrt{938}} = \frac{15}{67}\sqrt{938}$$

Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Komplanarni pravci

Komplanarni pravci

Kažemo da su pravci p_1 i p_2 komplanarni ako postoji ravnina Π koja sadrži oba pravca p_1 i p_2.

Iz izvoda formule za udaljenost mimosmjernih pravaca slijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 2.9.

Neka su p_1 i p_2 dva pravca u prostoru zadani svojim jednadžbama

$$p_i \ldots \vec{r} = \vec{r}_i + \lambda \vec{s}_i, \quad i = 1, 2.$$

Pravci p_1 i p_2 su komplanarni akko vrijedi $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0$.

Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Pretpostavimo da su pravci p_1 i p_2 komplanarni. Tada postoji ravnina Π koja sadrži oba pravca. Stoga su moguća dva slučaja:

- Pravci p_1 i p_2 se sijeku. Tada je $d(p_1, p_2) = 0$ pa mora biti $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0$.
- Pravci p_1 i p_2 su paralelni. Tada postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{s}_2 = \lambda \vec{s}_1$ pa opet mora biti $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Pretpostavimo da vrijedi $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0$. Tada su vektori $\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2$ komplanarni iz čega odmah slijedi da pravci p_1 i p_2 leže u istoj ravnini. ♡

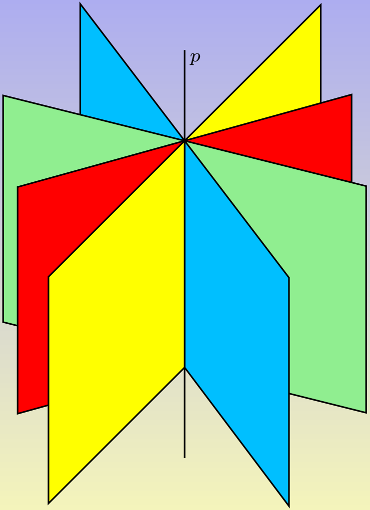
Ako stavimo $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{s}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ i $\vec{s}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, tada uvjet komplanarnosti pravaca p_1 i p_2 raspisan u koordinatama glasi

Uvjet komplanarnosti pravaca raspisan u koordinatama

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Pramen ravnina



Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Pramen ravnina

Pramen ili svezak ravnina je skup svih ravnina prostora koje prolaze istim pravcem kojeg zovemo os pramena.

Svaki pramen ravnina je određen s dvije svoje ravnine Π_1 i Π_2. Neka su te ravnine dane jednadžbama

$$\Pi_i \ldots \; A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, \;\; i = 1, 2.$$

Tada jednadžba pramena određenog tim ravninama glasi

$$\lambda_1(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \lambda_2(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0,$$

gdje su $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ varijabilni parametri takvi da je

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0.$$

Analitička geometrija prostora
Stereometrija
Koordinatni sustav
Jednadžba ravnine
Udaljenost točke od ravnine
Koeficijenti A, B, C, D
Segmentni oblik jednadžbe ravnine
Položaj dviju ravnina
Jednadžba pravca
Položaj dvaju pravaca
Položaj pravca i ravnine
Udaljenost točke od pravca
Mimosmjerni pravci
Udaljenost mimosmjernih pravaca
Pramen ravnina
Snop ravnina

Zadatak 2.3.

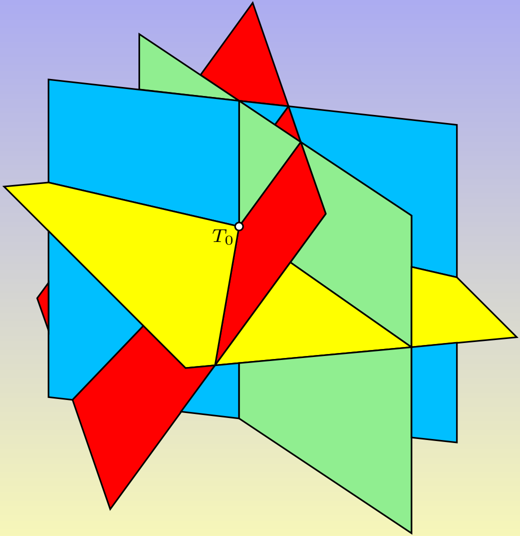
Navedite nekoliko različitih ideja pomoću kojih možemo ispitati da li tri zadane ravnine

$$\Pi_1 \ldots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\Pi_2 \ldots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$
$$\Pi_3 \ldots A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

pripadaju istom pramenu.

Analitička geometrija prostora
- Stereometrija
- Koordinatni sustav
- Jednadžba ravnine
- Udaljenost točke od ravnine
- Koeficijenti A, B, C, D
- Segmentni oblik jednadžbe ravnine
- Položaj dviju ravnina
- Jednadžba pravca
- Položaj dvaju pravaca
- Položaj pravca i ravnine
- Udaljenost točke od pravca
- Mimosmjerni pravci
- Udaljenost mimosmjernih pravaca
- Pramen ravnina
- Snop ravnina

Snop ravnina



Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Snop ravnina

Snop ili svežanj ravnina je skup svih ravnina prostora koje prolaze istom točkom T_0 koju zovemo vrh snopa.

Jednadžba snopa koji prolazi točkom $T_0(x_0, y_0, z_0)$ glasi

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0\,,$$

gdje su $A, B, C \in \mathbb{R}$ varijabilni i $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Analitička geometrija prostora
- Stereometrija
- Koordinatni sustav
- Jednadžba ravnine
- Udaljenost točke od ravnine
- Koeficijenti A, B, C, D
- Segmentni oblik jednadžbe ravnine
- Položaj dviju ravnina
- Jednadžba pravca
- Položaj dvaju pravaca
- Položaj pravca i ravnine
- Udaljenost točke od pravca
- Mimosmjerni pravci
- Udaljenost mimosmjernih pravaca
- Pramen ravnina
- Snop ravnina

Snop ravnina određen je također sa svoje tri ravnine. Ako su

$$\Pi_i \ldots A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, \; i = 1, 2, 3$$

jednadžbe tih ravnina, tada jednadžba snopa glasi

$$\begin{aligned} &\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \\ &\qquad + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \\ &\qquad\qquad + \lambda_3(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0 \end{aligned}$$

gdje su $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ varijabilni parametri takvi da je

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0.$$

Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Zadatak 2.4.

Navedite nekoliko ideja pomoću kojih možemo ispitati da li četiri zadane ravnine

$$\begin{aligned}\Pi_1 \ldots\ & A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\\ \Pi_2 \ldots\ & A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\\ \Pi_3 \ldots\ & A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0\\ \Pi_4 \ldots\ & A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0\end{aligned}$$

pripadaju istom snopu.

Analitička geometrija prostora

Stereometrija

Koordinatni sustav

Jednadžba ravnine

Udaljenost točke od ravnine

Koeficijenti A, B, C, D

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Položaj dviju ravnina

Jednadžba pravca

Položaj dvaju pravaca

Položaj pravca i ravnine

Udaljenost točke od pravca

Mimosmjerni pravci

Udaljenost mimosmjernih pravaca

Pramen ravnina

Snop ravnina

Dio III

Vektorski ili linearni prostori

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Sadržaj

- Vektorski prostori
  - Grupoid
  - Polugrupa
  - Monoid
  - Grupa
  - Prsten
  - Polje
  - Vektorski ili linearni prostor
  - Primjeri vektorskih prostora
  - Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
  - Linearni omotač skupa
  - Baza vektorskog prostora
  - Egzistencija baze i dimenzija
  - Potprostor vektorskog prostora
  - Rang matrice
  - Koordinatizacija vektorskog prostora
  - Transformacija koordinata

Grupoid

Binarna operacija

Neka je G neprazni skup. Binarna operacija na skupu G je svako preslikavanje

$$\circ : G \times G \to G$$

koje dvama elementima skupa G pridružuje opet neki element iz tog skupa. Umjesto $\circ(a, b)$ kratko pišemo $a \circ b$.

Grupoid

Grupoid je uređeni par $(G, \circ)$ koji se sastoji od nepraznog skupa G i binarne operacije $\circ$ definirane na tom skupu.

Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

- $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{C},+)$ su grupoidi uz standardno zbrajanje.
- $(\mathbb{Z},-),(\mathbb{Q},-),(\mathbb{R},-),(\mathbb{C},-)$ su grupoidi uz standardno oduzimanje.
- $(\mathbb{Z},\cdot),(\mathbb{Q},\cdot),(\mathbb{R},\cdot),(\mathbb{C},\cdot)$ su grupoidi uz standardno množenje.
- $(V^3,+)$ i $(V^3,-)$ su grupoidi uz standardno zbrajanje i oduzimanje vektora.
- $(M_{mn}(\mathbb{R}),+)$ i $(M_{mn}(\mathbb{R}),-)$ su grupoidi uz standardno zbrajanje i oduzimanje realnih matrica istog tipa.

Zadatak 3.1.

a. *Da li su $+$ i $-$ binarne operacije na skupu $\mathbb{N}$? Da li je $(\mathbb{N},\cdot)$ grupoid? Da li je $(M_{mn}(\mathbb{N}),-)$ grupoid? Objasnite!*
b. *Da li su $(V^3,\cdot)$ i $(V^3,\times)$ grupoidi uz skalarno i vektorsko množenje vektora? Objasnite!*

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Polugrupa

Polugrupa

Grupoid $(G, \circ)$ kod kojeg je binarna operacija $\circ$ asocijativna, tj. vrijedi

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \quad \forall a, b, c \in G$$

zove se polugrupa.

- $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ su polugrupe.
- $(\mathbb{Z}, -), (\mathbb{Q}, -), (\mathbb{R}, -), (\mathbb{C}, -)$ nisu polugrupe.
- $(\mathbb{Z}, \cdot), (\mathbb{Q}, \cdot), (\mathbb{R}, \cdot), (\mathbb{C}, \cdot)$ su polugrupe.
- $(V^3, +)$ i $(M_{mn}(\mathbb{R}), +)$ su polugrupe.
- $(V^3, -)$ i $(M_{mn}(\mathbb{R}), -)$ nisu polugrupe.

$(\mathbb{Z}, -)$ nije polugrupa jer oduzimanje cijelih brojeva nije asocijativna operacija, tj. općenito je

$$(a-b)-c \neq a-(b-c).$$

Na primjer, ako uzmemo $a = 2$, $b = 5$ i $c = -1$, dobivamo

$$\begin{aligned}
(2-5)-(-1) &\neq 2-(5-(-1)) \\
-3-(-1) &\neq 2-6 \\
-2 &\neq -4
\end{aligned}$$

Zadatak 3.2.

- a) *Da li su $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, -)$ i $(\mathbb{N}, \cdot)$ polugrupe? Objasnite!*
- b) *Da li je $(V^3, \times)$ polugrupa uz vektorsko množenje vektora?*

Monoid

Monoid

Grupoid $(G, \circ)$ kod kojeg je binarna operacija $\circ$ asocijativna i posjeduje jedinicu (neutralni element), tj. postoji $e \in G$ takav da je

$$e \circ a = a \circ e = a, \quad \forall a \in G$$

zove se monoid.

- $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ su monoidi s jedinicom 0.
- $(\mathbb{Z}, \cdot), (\mathbb{Q}, \cdot), (\mathbb{R}, \cdot), (\mathbb{C}, \cdot)$ su monoidi s jedinicom 1.
- $(V^3, +)$ je monoid s neutralnim elementom $\vec{0}$.
- $(M_{mn}(\mathbb{R}), +)$ je monoid s neutralnim elementom O (nulmatrica tipa (m, n)).

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Zadatak 3.3.

- (a) *Da li je* $(\mathbb{N}, \cdot)$ *monoid? Da li je* $(\mathbb{N}, +)$ *monoid? Objasnite!*
- (b) *Neka je* $\mathbb{R}[x]$ *skup svih polinoma jedne varijable* x *s realnim koeficijentima. Da li su* $(\mathbb{R}[x], +)$, $(\mathbb{R}[x], -)$ *i* $(\mathbb{R}[x], \cdot)$ *monoidi uz standardno zbrajanje, oduzimanje i množenje polinoma? Da li je* $(\mathbb{R}[x], \circ)$ *monoid uz kompoziciju polinoma? Objasnite!*

Propozicija 3.1.

U svakom monoidu $(G, \circ)$ *neutralni element je jedinstven.*

Dokaz.

Pretpostavimo da postoje dva neutralna elementa $e_1, e_2 \in G$ u monoidu $(G, \circ)$.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Kako je $e_1 \in G$ neutralni element, vrijedi

$$e_1 \circ a = a \circ e_1 = a, \;\; \forall a \in G. \qquad (*)$$

Kako je $e_2 \in G$ neutralni element, vrijedi

$$e_2 \circ a = a \circ e_2 = a, \;\; \forall a \in G. \qquad (\star)$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Kako je $e_1 \in G$ neutralni element, vrijedi

specijalno za $a = e_2$

$$e_1 \circ a = a \circ e_1 = a, \ \forall a \in G. \qquad (*)$$

Kako je $e_2 \in G$ neutralni element, vrijedi

$$e_2 \circ a = a \circ e_2 = a, \ \forall a \in G. \qquad (\star)$$

Specijalno, uvrstimo li $a = e_2$ u $(*)$, dobivamo $e_1 \circ e_2 = e_2$.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Kako je $e_1 \in G$ neutralni element, vrijedi

$$e_1 \circ a = a \circ e_1 = a, \ \forall a \in G. \qquad (*)$$

Kako je $e_2 \in G$ neutralni element, vrijedi

specijalno za $a = e_1$

$$e_2 \circ a = a \circ e_2 = a, \ \forall a \in G. \qquad (\star)$$

Specijalno, uvrstimo li $a = e_2$ u $(*)$, dobivamo $e_1 \circ e_2 = e_2$.

Specijalno, uvrstimo li $a = e_1$ u $(\star)$, dobivamo $e_1 \circ e_2 = e_1$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Kako je $e_1 \in G$ neutralni element, vrijedi

$$e_1 \circ a = a \circ e_1 = a, \ \forall a \in G. \qquad (*)$$

Kako je $e_2 \in G$ neutralni element, vrijedi

$$e_2 \circ a = a \circ e_2 = a, \ \forall a \in G. \qquad (\star)$$

Specijalno, uvrstimo li $a = e_2$ u $(*)$, dobivamo $e_1 \circ e_2 = e_2$.

Specijalno, uvrstimo li $a = e_1$ u $(\star)$, dobivamo $e_1 \circ e_2 = e_1$.

Iz $e_1 \circ e_2 = e_2$ i $e_1 \circ e_2 = e_1$ slijedi $e_1 = e_2$. ♡

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Grupa

Grupa. Abelova grupa

Grupoid $(G, \circ)$ je grupa ako vrijedi:

- Operacija $\circ$ je asocijativna, tj.

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \quad \forall a, b, c \in G.$$

- Postoji neutralni element, tj. postoji $e \in G$ takav da je

$$e \circ a = a \circ e = a, \quad \forall a \in G.$$

- Svaki element iz G ima inverzni element, tj. za svaki $a \in G$ postoji $a^{-1} \in G$ takav da je $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.
- Ukoliko je pritom operacija $\circ$ još i komutativna, tj.

$$a \circ b = b \circ a, \quad \forall a, b \in G$$

tada se $(G, \circ)$ zove komutativna ili Abelova grupa.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Napomena.

Dokazali smo ranije da je neutralni element u svakom monoidu jedinstven. Kako je svaka grupa ujedno i monoid, zaključujemo da je u svakoj grupi neutralni element jedinstven. Isto tako, u svakoj grupi je inverz svakog elementa jedinstven. O tome govori sljedeća propozicija.

Propozicija 3.2.

Neka je $(G, \circ)$ grupa. Tada svaki element $a \in G$ ima jedinstveni inverz $a^{-1} \in G$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Dokaz.

Neka je $(G, \circ)$ grupa. Tada postoji neutralni element $e \in G$.

Neka je $a \in G$ proizvoljni element. Kako je $(G, \circ)$ grupa, element a ima barem jedan inverzni element u G. Pretpostavimo da $a \in G$ ima dva inverzna elementa $a_1, a_2 \in G$. Tada je

$$a \circ a_1 = a_1 \circ a = e$$

$$a \circ a_2 = a_2 \circ a = e$$

U tom slučaju vrijedi

$$(a_1 \circ a) \circ a_2 = e \circ a_2 = a_2$$

$$a_1 \circ (a \circ a_2) = a_1 \circ e = a_1$$

Kako je $\circ$ asocijativna operacija, slijedi da je $a_1 = a_2$. ♡

Napomena.

Kako je inverz svakog elementa a u grupi jedinstven, time je opravdana oznaka a^{-1} za jedinstveni inverzni element elementa a. Tu oznaku većinom koristimo u slučaju kad je binarna operacija zapisana multiplikativno, tj. preko "množenja".

Ukoliko je binarna operacija zapisana aditivno, tj. preko "zbrajanja", tada inverzni element elemeta a zovemo **suprotni element** i označavamo ga s $-a$.

Kao primjer, sjetite se samo oznaka za suprotnu i inverznu matricu.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Propozicija 3.3.

Neka je $(G, \cdot)$ grupa i neka su $a, b \in G$ proizvoljni elementi. Tada jednadžbe $ax = b$ i $xa = b$ imaju jedinstveno rješenje u grupi G.

Dokaz.

Kako je $(G, \cdot)$ grupa, postoji neutralni element $e \in G$, a element $a \in G$ ima svoj inverz $a^{-1} \in G$. Stoga su također $a^{-1}b \in G$ i $ba^{-1} \in G$.

Pokažimo da je $x = a^{-1}b$ rješenje jednadžbe $ax = b$. Zbog asocijativnosti binarne operacije slijedi

$$ax = a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = eb = b.$$

Pokažimo da je $x = ba^{-1}$ rješenje jednadžbe $xa = b$. Zbog asocijativnosti binarne operacije slijedi

$$xa = (ba^{-1})a = b(a^{-1}a) = be = b.$$

Dakle, do sada smo dokazali da svaka od jednadžbi $ax = b$ i $xa = b$ ima barem jedno rješenje u grupi $(G, \cdot)$. Preostaje još dokazati da su to zapravo i jedina rješenja tih jednadžbi u grupi $(G, \cdot)$.

Pretpostavimo da su $x_1, x_2 \in G$ dva rješenja jednadžbe $ax = b$. Tada je $ax_1 = b$ i $ax_2 = b$. Stoga je $ax_1 = ax_2$. Zbog asocijativnosti binarne operacije imamo sljedeći niz zaključaka:

$$ax_1 = ax_2 \;\Rightarrow\; a^{-1}(ax_1) = a^{-1}(ax_2) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (a^{-1}a)x_1 = (a^{-1}a)x_2 \;\Rightarrow\; ex_1 = ex_2 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$$

Pretpostavimo da su $x_1, x_2 \in G$ dva rješenja jednadžbe $xa = b$. Tada je $x_1a = b$ i $x_2a = b$. Stoga je $x_1a = x_2a$. Zbog asocijativnosti binarne operacije imamo sljedeći niz zaključaka:

$$x_1a = x_2a \;\Rightarrow\; (x_1a)a^{-1} = (x_2a)a^{-1} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; x_1(aa^{-1}) = x_2(aa^{-1}) \;\Rightarrow\; x_1e = x_2e \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$$

♡

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Napomena.

Ukoliko je $(G, \cdot)$ Abelova grupa, tada su jednadžbe $ax = b$ i $xa = b$ ekvivalentne, tj. predstavljaju istu jednadžbu.

U monoidu $(G, \cdot)$ jednadžbe $ax = b$ i $xa = b$ ne moraju uopće imati rješenje ili mogu imati i više rješenja.

Na primjer, znamo da je $(\mathbb{Z}, \cdot)$ monoid, ali nije grupa uz standardno množenje cijelih brojeva. Jednadžba $2x = 5$ nema rješenja u monoidu $(\mathbb{Z}, \cdot)$, dok jednadžba $2x = 6$ ima jedinstveno rješenje $x = 3$. Isto tako, jednadžba $0 \cdot x = 0$ ima beskonačno mnogo rješenja u monoidu $(\mathbb{Z}, \cdot)$.

S druge strane, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa uz standardno množenje. U toj grupi jednadžba $2x = 5$ ima jedinstveno rješenje $x = 2^{-1} \cdot 5$, tj. $x = \frac{5}{2}$.

Nadalje, $(\mathbb{Q}, \cdot)$ nije grupa uz standardno množenje jer element 0 nema inverz. Za $a \neq 0$ jednadžba $ax = b$ ima jedinstveno rješenje $x = a^{-1}b$ u monoidu $(\mathbb{Q}, \cdot)$. Jednadžba $0 \cdot x = b$ ima beskonačno mnogo rješenja ili nema uopće rješenja u monoidu $(\mathbb{Q}, \cdot)$, ovisno o tome da li je $b = 0$ ili je $b \neq 0$.

$(\mathbb{Z}, +)$ je grupa uz standardno zbrajanje cijelih brojeva i jednadžba $a + x = b$ ima jedinstveno rješenje $x = -a + b$ u toj grupi.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Primjer 3.1.

Neka je $M_n(\mathbb{R})$ *skup svih kvadratnih matrica reda* n *s realnim elementima. Pokažite da je* $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ *monoid, ali nije grupa uz standardno množenje matrica. Komentirajte egzistenciju rješenja jednadžbi* $AX = B$ *i* $XA = B$ *u tom monoidu.*

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.1.

Neka je $M_n(\mathbb{R})$ skup svih kvadratnih matrica reda n s realnim elementima. Pokažite da je $(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ monoid, ali nije grupa uz standardno množenje matrica. Komentirajte egzistenciju rješenja jednadžbi $AX = B$ i $XA = B$ u tom monoidu.

Rješenje.

$(M_n(\mathbb{R}), \cdot)$ je monoid jer su zadovoljena sljedeća svojstva.

- Standardno množenje matrica jest binarna operacija na skupu kvadratnih matrica reda n jer je produkt dvije kvadratne matrice reda n ponovo kvadratna matrica reda n.
- Množenje matrica je asocijativna operacija.
- Jedinična matrica I reda n je neutralni element za množenje i ona pripada skupu $M_n(\mathbb{R})$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

$(M_n(\mathbb{R}),\cdot)$ nije grupa jer nema svaka kvadratna matrica reda n svoj inverz, tj. inverznu matricu. Kvadratna matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ ima inverz jedino u slučaju ako je $\det A \neq 0$.

Jednadžbe $AX = B$ i $XA = B$ u monoidu $(M_n(\mathbb{R}),\cdot)$ imaju jedinstvena rješenja $X = A^{-1}B$ i $X = BA^{-1}$ jedino u slučaju ako je $\det A \neq 0$.

Ako je $\det A = 0$, tada jednadžbe $AX = B$ i $XA = B$ nemaju uopće rješenje ili imaju beskonačno mnogo rješenja u monoidu $(M_n(\mathbb{R}),\cdot)$.

Zadatak 3.4.

Neka je $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. *Pronađite rješenja jednadžbi* $A_1X = B_1$, $XA_1 = B_1$, $A_2X = B_1$, $XA_2 = B_1$, $A_2X = B_2$ *i* $XA_2 = B_2$ *u monoidu* $(M_2(\mathbb{R}),\cdot)$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Zadatak 3.5.

$(V^3, \times)$ je samo grupoid uz vektorsko množenje vektora. $(V^3, \times)$ nije polugrupa jer vektorsko množenje vektora nije asocijativna operacija. Međutim, možemo promatrati strukturu rješenja jednadžbi $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ i $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$ u grupoidu $(V^3, \times)$.

- a *Objasnite geometrijski kako izgledaju sva rješenja jednadžbi $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ i $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$ u grupoidu $(V^3, \times)$.*
- b *U kojim slučajevima navedene jednadžbe imaju beskonačno mnogo rješenja, a u kojim slučajevima nemaju uopće rješenja?*
- c *Opišite geometrijski detaljnije kako sve mogu izgledati rješenja navedenih jednadžbi u slučaju kad one imaju beskonačno mnogo rješenja ovisno o zadanim vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.*
- d *Da li je moguće da promatrane jednadžbe imaju jedinstveno rješenje za neki izbor vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$? Objasnite!*
- e *U kakvoj su međusobnoj vezi rješenja jednadžbi $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ i $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$?*

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjeri grupa

1. Najpoznatiji primjeri grupa su različiti skupovi brojeva uz operacije **množenja i zbrajanja**. Komutativne grupe su

$$(\mathbb{Z},+),\ (\mathbb{Q},+),\ (\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot),$$
$$(\mathbb{R},+),\ (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot),\ (\mathbb{C},+),\ (\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot).$$

2. Neka je S_n skup svih bijekcija na skupu $\{1,2,3,\ldots,n\}$. Tada je $(S_n,\circ)$ grupa uz kompoziciju funkcija koju zovemo **grupa permutacija** ili **simetrična grupa**. Ovo je konačna grupa koja ima $n!$ elemenata i nije Abelova jer kompozicija funkcija nije komutativna operacija.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

3. Općenito, neka je T bilo koji neprazni skup, a

$$F = \{ f : T \to T \mid f \text{ je bijekcija} \}$$

skup svih bijekcija na skupu T. Tada je $(F, \circ)$ grupa uz kompoziciju funkcija. Neutralni element u toj grupi je funkcija id_T definirana s

$$\mathrm{id}_T : T \to T, \quad \mathrm{id}_T(x) = x$$

koju zovemo identiteta na skupu T. Budući da su elementi skupa F bijekcije, za svaku funkciju $f \in F$ postoji inverzna funkcija $f^{-1} \in F$ takva da je $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_T$.

$(F, \circ)$ nije Abelova grupa jer kompozicija funkcija nije komutativna operacija.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

4. $(V^3, +)$ je Abelova grupa uz zbrajanje vektora.
5. $\big(M_{mn}(\mathbb{R}), +\big)$ je Abelova grupa uz standardno zbrajanje matrica.
6. Neka je $GL(n, \mathbb{R})$ skup svih regularnih kvadratnih matrica reda n. Tada je $\big(GL(n, \mathbb{R}), \cdot\big)$ grupa uz standardno množenje matrica. Naime, standardno množenje matrica jest binarna operacija na skupu $GL(n, \mathbb{R})$ jer iz Binet-Cauchyjevog teorema $\det(AB) = \det A \det B$ slijedi da je produkt regularnih matrica ponovo regularna matrica. Ovu grupu zovemo **opća linearna grupa** matrica reda n nad poljem realnih brojeva.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

7. Neka je $O(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : A^{-1} = A^T\}$ skup ortogonalnih matrica reda n.

   Tada je $(O(n,\mathbb{R}),\cdot)$ grupa uz standardno množenje matrica. Tu grupu zovemo **ortogonalna grupa** matrica reda n nad poljem realnih brojeva.

   Ako su $A, B \in O(n,\mathbb{R})$, tada je $A^{-1} = A^T$ i $B^{-1} = B^T$. Iz svojstava invertiranja i transponiranja matrica slijedi

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T$$

   iz čega slijedi da je množenje matrica binarna operacija na skupu ortogonalnih matrica. Isto tako, inverz ortogonalne matrice je ponovo ortogonalna matrica zbog

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

8. Neka je $UM(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A = \pm 1\}$

   Tada je $(UM(n, \mathbb{R}), \cdot)$ grupa uz standardno množenje matrica. Tu grupu zovemo **unimodularna grupa** matrica reda n nad poljem realnih brojeva.

9. Neka je $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$

   Tada je $(SL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ grupa uz standardno množenje matrica. Tu grupu zovemo **specijalna linearna grupa** matrica reda n nad poljem realnih brojeva.

10. Neka je $SO(n, \mathbb{R}) = O(n, \mathbb{R}) \cap SL(n, \mathbb{R})$.

    Tada je $(SO(n, \mathbb{R}), \cdot)$ grupa uz standardno množenje matrica. Tu grupu zovemo **specijalna ortogonalna grupa** matrica reda n nad poljem realnih brojeva.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Ako $\rightarrow$ predstavlja relaciju "biti podskup", odnosno preciznije u ovom slučaju "biti podgrupa", tada vrijede sljedeći odnosi prikazani na donjoj slici.

$$\begin{tikzcd}
 & O(n,\mathbb{R}) \arrow[dr] & & \\
SO(n,\mathbb{R}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & UM(n,\mathbb{R}) \arrow[r] & GL(n,\mathbb{R}) \\
 & SL(n,\mathbb{R}) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

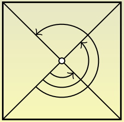
Navedene matrične grupe igraju iznimno važnu ulogu u geometriji euklidskog prostora.

11. Neka je $I_2 = \{-1, 1, -i, i\}$ pri čemu je $i = \sqrt{-1}$. Tada je $(I_2, \cdot)$ Abelova grupa uz standardno množenje koju zovemo **kompleksna grupa**. Tablica množenja u toj grupi izgleda

$\cdot$	-1	1	$-i$	i
-1	1	-1	i	$-i$
1	-1	1	$-i$	i
$-i$	i	$-i$	-1	1
i	$-i$	i	1	-1

Grupu I_2 možemo prirodno poistovjetiti s rotacijama oko središta kvadrata koje kvadrat preslikavaju u njega samog tako da kompoziciji tih rotacija odgovara množenje u I_2.

$$\begin{aligned} 1 &\to \text{rotacija za } 0^\circ \\ i &\to \text{rotacija za } 90^\circ \\ -1 &\to \text{rotacija za } 180^\circ \\ -i &\to \text{rotacija za } 270^\circ \end{aligned}$$



Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

12. Neka je $I_4 = \{-1, 1, -i, i, -j, j, -k, k\}$ uz množenje

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k = -ji,$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & i \arrow[dl, bend right] & \\ j \arrow[rr, bend right] & & k \arrow[ul, bend right] \end{tikzcd}$$

i dalje ciklički. Tada je $(I_4, \cdot)$ grupa koju zovemo **kvaternionska grupa**. Očito nije komutativna, a cjelokupna tablica množenja u toj grupi izgleda

$\cdot$	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
-1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
$-i$	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
i	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
$-j$	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
j	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
$-k$	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
k	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

13. Neka je $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Definiramo

$$\underset{n}{+} : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n, \quad a \underset{n}{+} b = (a + b) \mod n.$$

Tada je $(\mathbb{Z}_n, \underset{n}{+})$ Abelova grupa s n elemenata. Na primjer, za $n = 4$ imamo

$\underset{4}{+}$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Ovaj primjer ujedno pokazuje da postoje grupe svakog konačnog reda.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

14. Neka je $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Definiramo

$$\underset{n}{\cdot} : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n, \quad a \underset{n}{\cdot} b = (a \cdot b) \bmod n.$$

Tada je $\left(\mathbb{Z}_n, \underset{n}{\cdot}\right)$ za $n > 1$ samo komutativni monoid.

Međutim, ako je p prosti broj, tada je $\left(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \underset{p}{\cdot}\right)$ Abelova grupa. Na primjer, za $n = 4$ i $p = 5$ imamo

$\left(\mathbb{Z}_4, \underset{4}{\cdot}\right)$

$\underset{4}{\cdot}$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$\left(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \underset{5}{\cdot}\right)$

$\underset{5}{\cdot}$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.2.

Neka je $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_3, a \neq 0 \right\}$.

- a) *Pokažite da je skup* M *uz množenje matrica grupa. Pritom operacije množenja i zbrajanja radimo modulo* 3.
- b) *Ispišite sve matrice koje pripadaju grupi* M.
- c) *Napravite tablicu množenja u grupi* M.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Primjer 3.2.

Neka je $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_3, a \neq 0 \right\}$.

- (a) *Pokažite da je skup* M *uz množenje matrica grupa. Pritom operacije množenja i zbrajanja radimo modulo* 3.
- (b) *Ispišite sve matrice koje pripadaju grupi* M.
- (c) *Napravite tablicu množenja u grupi* M.

Rješenje.

- (a) Kako je

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

iz $a_1 \neq 0$ i $a_2 \neq 0$ slijedi da je $a_1 a_2 \neq 0$ u $\mathbb{Z}_3$. Stoga je skup M zatvoren s obzirom na množenje matrica modulo 3.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Množenje matrica modulo 3 je asocijativna operacija, a jedinična matrica $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ je očito neutralni element i pripada skupu M jer se dobije za $a = 1$ i $b = 0$.

Znamo da je $\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}$ grupa uz množenje modulo 3 jer je 3 prosti broj. Nadalje uočavamo da je $a^{-1} = a$ za svaki $a \in \mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}$.

Na temelju toga lako se dobije da za $a \in \mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}$ i $b \in \mathbb{Z}_3$ vrijedi

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & -ab \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

iz čega slijedi da svaki element iz M ima inverz u M. Stoga je M zaista grupa uz množenje matrica modulo 3.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

- Kako je $a \in \{1,2\}$ i $b \in \{0,1,2\}$, grupa M ima ukupno 6 elemenata.

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- Uvedemo li sugestivnu oznaku $M_{ab} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, direktnim računanjem dobivamo sljedeću tablicu množenja u grupi M.

$\cdot$	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{20}	M_{21}	M_{22}
M_{10}	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{20}	M_{21}	M_{22}
M_{11}	M_{11}	M_{12}	M_{10}	M_{21}	M_{22}	M_{20}
M_{12}	M_{12}	M_{10}	M_{11}	M_{22}	M_{20}	M_{21}
M_{20}	M_{20}	M_{22}	M_{21}	M_{10}	M_{12}	M_{11}
M_{21}	M_{21}	M_{20}	M_{22}	M_{11}	M_{10}	M_{12}
M_{22}	M_{22}	M_{21}	M_{20}	M_{12}	M_{11}	M_{10}

Uočite kako iz tablice možemo lagano "pročitati" sva svojstva grupe osim asocijativnosti.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Prsten

Na danom nepraznom skupu moguće je definirati više različitih binarnih operacija. Pri tome te operacije mogu, ali i ne moraju imati strukturu grupe.

Na primjer, na skupu $\mathbb{Z}$ imamo definirane dvije standardne operacije: zbrajanje i množenje. Pritom je $(\mathbb{Z}, +)$ Abelova grupa, dok je $(\mathbb{Z}, \cdot)$ samo komutativni monoid.

Isto tako, operacije zbrajanja i množenja na skupu $\mathbb{Z}$ nisu dvije nezavisne operacije, nego su povezane zakonom distributivnosti:

$$a(b+c) = ab + ac, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Takvu strukturu s navedenim svojstvima općenito zovemo prsten.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Prsten

Prsten je uređena trojka $(S, +, \cdot)$ koja se sastoji od nepraznog skupa S i dviju binarnih operacija $+$ i $\cdot$ na tom skupu koje zadovoljavaju sljedeća svojstva:

- $(S, +)$ je komutativna grupa.
- $(S, \cdot)$ je monoid.
- Vrijede svojstva distributivnosti, tj.

$$a(b+c) = ab + ac, \quad \forall a, b, c \in S$$
$$(a+b)c = ac + bc, \quad \forall a, b, c \in S$$

Ako je $(S, \cdot)$ komutativni monoid, tada govorimo o **komutativnom prstenu**.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Napomena.

U prstenu $(S, +, \cdot)$ neutralni element s obzirom na operaciju $+$ standardno označavamo s 0 i zovemo ga **nula prstena**, a neutralni element s obzirom na operaciju $\cdot$ standardno označavamo s 1 i zovemo ga **jedinica prstena**.

Napomena.

Često se u definiciji prstena uzima slabiji zahtjev na drugu operaciju, tj. traži se da je $(S, \cdot)$ samo polugrupa. U tom slučaju prsten ne mora imati neutralni element s obzirom na drugu operaciju, tj. prsten ne mora imati jedinicu. U slučaju da prsten ima jedinicu, tj. u slučaju da je $(S, \cdot)$ monoid, tada ga zovemo prsten s jedinicom.

Po našoj definiciji svaki prsten ima jedinicu. Odlučili smo se za tu definiciju iz razloga što ovdje nećemo ulaziti duboko u teoriju prstenova, a svi prstenovi koji će nama ovdje biti od nekog interesa uvijek će imati jedinicu.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Propozicija 3.4.

U svakom prstenu $(S, +, \cdot)$ *vrijedi*

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0, \quad \forall a \in S.$$

Dokaz.

Koristeći svojstvo distributivnosti i svojstvo nule prstena, dobivamo

$$0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$$

odnosno

$$0 \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a.$$

Dodavanjem suprotnog elementa $-(0 \cdot a)$ na obje strane posljednje jednakosti dobivamo $0 \cdot a = 0$.

Potpuno analogno se dokaže i druga jednakost $a \cdot 0 = 0$. ♡

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Propozicija 3.5.

Ako prsten $(S, +, \cdot)$ ima barem dva elementa, tada je $0 \neq 1$.

Dokaz.

Iz prethodne propozicije i svojstva jedinice prstena slijedi da je

$$0 \cdot a = 0$$
$$1 \cdot a = a$$

za svaki $a \in S$. Kad bi bilo $0 = 1$, dobili bismo da je $a = 0$ za svaki $a \in S$, što je kontradikcija s pretpostavkom da S ima barem dva elementa. ♡

Propozicija 3.6.

U svakom prstenu $(S, +, \cdot)$ *vrijedi:*

- $(-a)b = -(ab) = a(-b)$
- $(-a)(-b) = ab$

za svaki $a, b \in S$.

Dokaz.

Zbog svojstva nule prstena i distributivnosti vrijedi

$$(-a + a)b = 0 \cdot b = 0$$
$$(-a + a)b = (-a)b + ab$$

iz čega slijedi da je

$$(-a)b + ab = 0.$$

Iz posljednje jednakosti zaključujemo da je $(-a)b$ suprotni element od ab, tj. $(-a)b = -(ab)$.

Analogno, zbog svojstva nule prstena i distributivnosti vrijedi

$$a(-b+b) = a \cdot 0 = 0$$
$$a(-b+b) = a(-b) + ab$$

iz čega slijedi da je

$$a(-b) + ab = 0.$$

Iz posljednje jednakosti zaključujemo da je $a(-b)$ suprotni element od ab, tj. $a(-b) = -(ab)$.

Konačno, posljednja jednakost slijedi uzastopnom primjenom prve dvije jednakosti koje smo upravo dokazali.

$$(-a)(-b) = -\big(a(-b)\big) = -\big(-(ab)\big) = ab$$

Pritom koristimo činjenicu da je $-(-a) = a$ koja slijedi iz definicije suprotnog elementa. Naime, iz $(-a)+a = 0$ slijedi da je a suprotni element od $-a$, tj. vrijedi $-(-a) = a$. ♡

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Propozicija 3.7.

U svakom prstenu $(S, +, \cdot)$ *vrijedi:*

$$(a - b)c = ac - bc$$

$$a(b - c) = ab - ac$$

za svaki $a, b, c \in S$.

Dokaz.

Korištenjem distributivnosti i prethodne propozicije odmah lagano slijede obje jednakosti.

$$(a - b)c = \big(a + (-b)\big)c = ac + (-b)c = ac - bc$$

$$a(b - c) = a\big(b + (-c)\big) = ab + a(-c) = ab - ac$$

♡

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjeri prstena

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je komutativni prsten cijelih brojeva uz standardne operacije zbrajanja i množenja.
2. $\left(\mathbb{Z}_n, \underset{n}{+}, \underset{n}{\cdot}\right)$ je komutativni prsten.
3. Neka je $(S, +, \cdot)$ prsten, a $M_n(S)$ skup svih kvadratnih matrica reda n s elementima iz prstena S. Tada je $(M_n(S), +, \cdot)$ prsten uz standardno zbrajanje i množenje matrica pri čemu prilikom zbrajanja i množenja pojedinih elemenata matrica koristimo operacije iz prstena S. Najpoznatiji primjeri takvih prstenova su $M_n(\mathbb{Z})$, $M_n(\mathbb{Q})$, $M_n(\mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{C})$, $M_n(\mathbb{Z}_n)$.

   Bez obzira na komutativnost ili nekomutativnost prstena S, prsten $M_n(S)$ općenito nije komutativni prsten.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

4. Neka je T neprazni skup, a $\mathbb{R}^T = \{f \mid f : T \to \mathbb{R}\}$ skup svih realnih funkcija definiranih na skupu T. Tada uz operacije zbrajanja i množenja funkcija po točkama

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

skup $\mathbb{R}^T$ postaje komutativni prsten kojeg zovemo **prsten realnih funkcija na skupu** T.

5. Neka je $(R, +, \cdot)$ komutativni prsten i neka je $R[x]$ skup svih polinoma u varijabli x s koeficijentima iz komutativnog prstena R. Tada je $R[x]$ komutativni prsten uz standardno zbrajanje i množenje polinoma. Najpoznatiji primjeri takvih prstenova su $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{Z}_n[x]$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

U proizvoljnom prstenu može se pojaviti sljedeća "anomalija".

Djelitelji nule

Neka je $(S, +, \cdot)$ prsten. Za elemente $a, b \in S$ kažemo da su djelitelji nule u prstenu S ako je $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i vrijedi $ab = 0$.

- U prstenu $\mathbb{Z}_6$ je $2 \neq 0$ i $3 \neq 0$, ali je ipak $2 \cdot_6 3 = 0$. Stoga su 2 i 3 djelitelji nule u prstenu $\mathbb{Z}_6$. Analogne situacije se javljaju u prstenu $\mathbb{Z}_m$ za bilo koji složeni prirodni broj m.
- U prstenu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ ne postoje djelitelji nule.
- U prstenima $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$ ne postoje djelitelji nule.
- Polinomi $2x + 2$ i $3x + 3$ su djelitelji nule u prstenu $\mathbb{Z}_6[x]$ jer je $2x + 2 \neq 0$ i $3x + 3 \neq 0$, ali je ipak $(2x + 2)(3x + 3) = 0$.
- Za prosti broj p u prstenu $\mathbb{Z}_p[x]$ ne postoje djelitelji nule.

Primjer 3.3.

Pronađite neke djelitelje nule u prstenu $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *uz standardno zbrajanje i množenje funkcija po točkama.*

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.3.

Pronađite neke djelitelje nule u prstenu $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ uz standardno zbrajanje i množenje funkcija po točkama.

Rješenje.

Neka su $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sljedeće dvije funkcije.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 5x - 3, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Tada su očito f i g različite od nulfunkcije, ali je ipak $f \cdot g = 0$. Stoga su f i g djelitelji nule u prstenu $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Ovakvih primjera djelitelja nule u ovom prstenu ima beskonačno mnogo. Pronađite sami još neke djelitelje nule u ovom prstenu.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Polje

Kao što smo vidjeli, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je prsten uz standardno zbrajanje i množenje cijelih brojeva. Skup $\mathbb{Z}$ je Abelova grupa s obzirom na zbrajanje, dok je uz množenje komutativni monoid. Ako iz skupa $\mathbb{Z}$ izbacimo nulu, $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ i dalje ostaje komutativni monoid uz množenje cijelih brojeva.

Kod skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ situacija je ipak nešto drugačija. Skup $\mathbb{R}$ je Abelova grupa uz standardno zbrajanje, dok je uz standardno množenje isto samo komutativni monoid. Međutim, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ uz množenje također postaje Abelova grupa. Takvu strukturu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ zovemo polje realnih brojeva.

Polje realnih brojeva jedan je od najpoznatijih primjera polja. Ova predivna svojstva polja realnih brojeva daju motivaciju za sljedeću općenitu definiciju polja.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Polje

Polje je uređena trojka $(S, +, \cdot)$ koja se sastoji od nepraznog skupa S i dviju binarnih operacija $+$ i $\cdot$ na tom skupu koje zadovoljavaju sljedeća svojstva:

- $(S, +)$ je komutativna grupa.
- $(S \setminus \{0\}, \cdot)$ je komutativna grupa.
- Vrijedi svojstvo distributivnosti, tj.

$$a(b + c) = ab + ac, \quad \forall a, b, c \in S$$

Zadatak 3.6.

Objasnite zbog čega u definiciji polja nije potrebno navoditi obje distributivnosti. Dokažite na temelju gornje definicije polja da u polju vrijedi i ona druga distributivnost koja nije navedena u definiciji.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Ako u definiciji polja oslabimo uvjet na strukturu $(S \setminus \{0\}, \cdot)$ tako da izostavimo komutativnost, tada dobivamo strukturu koju zovemo tijelo.

Tijelo

Tijelo je uređena trojka $(S, +, \cdot)$ koja se sastoji od nepraznog skupa S i dviju binarnih operacija $+$ i $\cdot$ na tom skupu koje zadovoljavaju sljedeća svojstva:

- $(S, +)$ je komutativna grupa.
- $(S \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa.
- Vrijede svojstva distributivnosti, tj.

$$a(b+c) = ab + ac, \quad \forall a, b, c \in S$$
$$(a+b)c = ac + bc, \quad \forall a, b, c \in S$$

Kratko govorimo: tijelo je nekomutativno polje ili polje je komutativno tijelo.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Propozicija 3.8.

U tijelu i polju ne postoje djelitelji nule.

Dokaz.

Neka je $(S, +, \cdot)$ tijelo. Neka su $a, b \in S$ takvi da je $ab = 0$. Pretpostavimo da je $a \neq 0$. Kako je $(S \setminus \{0\}, \cdot)$ grupa, slijedi da element a ima svoj inverzni element a^{-1}. Sada imamo

$$a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0$$
$$a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1 \cdot b = b$$

iz čega slijedi da mora biti $b = 0$. Dakle, ako je u tijelu produkt dva elementa jednak 0, tada barem jedan od tih elemenata mora biti jednak 0. Stoga u tijelu ne postoje djelitelji nule.

Kako je svako polje ujedno i tijelo, zaključujemo da u polju također ne postoje djelitelji nule. ♡

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjeri polja

1. Skupovi brojeva $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ uz standardne operacije zbrajanja i množenja su najpoznatiji primjeri polja s beskonačno mnogo elemenata.
2. Za prosti broj p su $\left(\mathbb{Z}_p, \underset{p}{+}, \underset{p}{\cdot}\right)$ najpoznatiji primjeri polja s konačno mnogo elemenata. U informatici je posebno važno polje $\mathbb{Z}_2$ sa sljedećim tablicama množenja i zbrajanja.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

3. Neka je

$$A_2(\mathbb{Z}_3) = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix} \right] : a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$$

skup antisimetričnih matrica drugog reda s elementima iz polja $\mathbb{Z}_3$. Uz standardno zbrajanje i množenje matrica modulo 3 skup $A_2(\mathbb{Z}_3)$ je polje koje ima ukupno 9 elemenata. Elementi tog polja su sljedeće matrice.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Na prvi pogled se čini da na sporednoj dijagonali nisu suprotni brojevi. No, ne zaboravimo da elementi matrice pripadaju polju $\mathbb{Z}_3$ u kojemu je $-0 = 0$, $-1 = 2$ i $-2 = 1$. Pripadne tablice množenja i zbrajanja za ovo polje nalaze se na sljedeća dva slajda.

$+$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1\\2&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&2\\1&2\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1\\2&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&2\\1&2\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1\\2&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&2\\1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&2\\1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1\\2&2\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1\\2&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&2\\1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1\\2&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&2\\1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&2\\1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1\\2&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1\\2&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&2\\1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}2&1\\2&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1\\2&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&2\\1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}2&2\\1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&2\\1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1\\2&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

$\cdot$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1\\2&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&2\\1&2\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1\\2&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&2\\1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&2\\1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1\\2&2\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1\\2&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&2\\1&2\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1\\2&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&2\\1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&2\\1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1\\2&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&2\\1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1\\2&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}2&1\\2&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&2\\1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1\\2&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}2&2\\1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1\\2&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&2\\1&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}$

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Tijelo kvaterniona

Najpoznatije i jedno od najvažnijih tijela u povijesti matematike jest tijelo kvaterniona $\mathbb{H}$. Kvaternioni su brojevi oblika

$$a + bi + cj + dk, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

i predstavljaju jedno poopćenje skupa kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Pomoću njih se na vrlo elegantni način mogu reprezentirati sve rotacije u prostoru oko bilo koje osi.

Zbrajanje i množenje kvaterniona se definira na potpuno analogni način kao i zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva. Jedina bitna razlika jest ta što je $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ polje, dok je $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ tijelo, tj. množenje kvaterniona nije komutativna operacija. Sva ostala svojstva zbrajanja i množenja koja vrijede za kompleksne brojeve, vrijede također za zbrajanje i množenje kvaterniona.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Neka su zadani kvaternioni

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1 i + u_2 j + u_3 k \quad \text{i} \quad \mathbf{v} = v_0 + v_1 i + v_2 j + v_3 k.$$

Suma kvaterniona $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ jednaka je

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = u_0 + v_0 + (u_1 + v_1)i + (u_2 + v_2)j + (u_3 + v_3)k.$$

Množenje kvaterniona se definira na sličan način kao i množenje kompleksnih brojeva tako da se pojedini dijelovi kvaterniona $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ međusobno pomnože uvažavajući sljedeća pravila:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$
$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j$$

$$\begin{tikzcd} & i \arrow[dl] & \\ j \arrow[rr] & & k \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Već iz ovih pravila uočavamo da množenje kvaterniona nije komutativna operacija pa treba paziti na poredak članova i, j, k za vrijeme množenja.

Nakon množenja svaki sa svakim i uvažavanja spomenutih pravila dobiva se

$$\begin{aligned}\mathbf{uv} &= (u_0 + u_1 i + u_2 j + u_3 k)(v_0 + v_1 i + v_2 j + v_3 k) = \\ &= p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3 + \\ &\quad + (p_1 q_0 + p_0 q_1 + p_2 q_3 - p_3 q_2)\, i + \\ &\quad + (p_2 q_0 + p_0 q_2 + p_3 q_1 - p_1 q_3)\, j + \\ &\quad + (p_3 q_0 + p_0 q_3 + p_1 q_2 - p_2 q_1)\, k\end{aligned}$$

Općenito, ako za kvaternion $\mathbf{u} = u_0 + u_1 i + u_2 j + u_3 k$ njegov "vektorski" dio označimo s $\vec{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$, tada ga možemo zapisati u obliku $\mathbf{u} = u_0 + \vec{u}$. Koristeći ovaj zapis, formulu za produkt dva kvaterniona možemo napisati u jednom elegantnijem obliku.

Neka su $\mathbf{u} = u_0 + \vec{u}$ i $\mathbf{v} = v_0 + \vec{v}$ dva kvaterniona. Tada je njihov produkt jednak

$$\mathbf{uv} = u_0 v_0 - \vec{u} \cdot \vec{v} + u_0 \vec{v} + v_0 \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v}.$$

Specijalno, ako množimo dva kvaterniona čiji su skalarni dijelovi jednaki 0, tj. $u_0 = v_0 = 0$, vrijedi

$$\mathbf{uv} = -\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v}.$$

Iz posljednje relacije vidimo zaista snažnu povezanost kvaterniona s vektorima u prostoru. Na taj način kvaternioni postaju izuzetno važni objekti u geometriji.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Primjer 3.4.

Odredite produkt kvaterniona

$$\mathbf{u} = 3 - i + 2j + k \quad i \quad \mathbf{v} = -2 + 3i - 4j - 7k.$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.4.

Odredite produkt kvaterniona

$$\mathbf{u} = 3 - i + 2j + k \quad i \quad \mathbf{v} = -2 + 3i - 4j - 7k.$$

Rješenje.

U ovom slučaju je

$$u_0 = 3,\ v_0 = -2,\ \vec{u} = -i + 2j + k,\ \vec{v} = 3i - 4j - 7k$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-7) = -18$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \end{vmatrix} = -10i - 4j - 2k$$

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Konačno, korištenjem formule

$$\mathbf{uv} = u_0 v_0 - \vec{u} \cdot \vec{v} + u_0 \vec{v} + v_0 \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v}$$

dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbf{uv} = 3 \cdot (-2) - (-18) + 3 \cdot (3i - 4j - 7k) + \\ + (-2) \cdot (-i + 2j + k) - 10i - 4j - 2k = \\ = 12 + i - 20j - 25k \end{aligned}$$

Pomnožite za vježbu kvaternione $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ tako da množite njihove dijelove svaki sa svakim i koristite pravila za množenje elemenata i, j, k.

Slično kao i kod kompleksnih brojeva za kvaternione definiramo konjugirani kvaternion i modul.

Modul kvaterniona $\mathbf{u} = u_0 + u_1 i + u_2 j + u_3 k$ je realni broj

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2},$$

a njegov konjugirani kvaternion je

$$\overline{\mathbf{u}} = u_0 - u_1 i - u_2 j - u_3 k.$$

Zadatak 3.7.

Provjerite da je $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ *uz definirane operacije zbrajanja i množenja zaista tijelo. Pritom je za kvaternion* $\mathbf{u} \neq 0$ *njegov inverz dan formulom* $\mathbf{u}^{-1} = \frac{\overline{\mathbf{u}}}{|\mathbf{u}|^2}$. *Uočite da se inverz kompleksnog broja također računa po istoj formuli.*

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Vektorski ili linearni prostor

Vektorski prostor nad poljem F je uređena četvorka $(V, F, \oplus, \odot)$ sastavljena od

- nepraznog skupa V čije elemente zovemo vektori,
- nepraznog skupa F čije elemente zovemo skalari, a $(F, +, \cdot)$ je polje s obzirom na operacije $+$ i $\cdot$,
- binarne operacije $\oplus : V \times V \to V$ koju zovemo zbrajanje vektora,
- operacije $\odot : F \times V \to V$ koju zovemo množenje vektora skalarom.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Pritom moraju vrijediti sljedeći aksiomi vektorskog prostora:

1. $(V, \oplus)$ je Abelova grupa s obzirom na zbrajanje vektora.
2. Operacija $\odot$ mora imati sljedeća svojstva:
   - posjedovanje jedinice
   $$1 \odot x = x, \quad \forall x \in V$$
   - kvaziasocijativnost
   $$\alpha \odot (\beta \odot x) = (\alpha \cdot \beta) \odot x, \quad \forall \alpha, \beta \in F, \ \forall x \in V$$
   - distributivnost u odnosu na zbrajanje vektora
   $$\alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y), \quad \forall \alpha \in F, \ \forall x, y \in V$$
   - distributivnost u odnosu na zbrajanje skalara
   $$(\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x), \quad \forall \alpha, \beta \in F, \ \forall x \in V$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Nulvektor u vektorskom prostoru

Nulvektor u vektorskom prostoru V nad poljem F je neutralni element Θ u Abelovoj grupi $(V, \oplus)$. Drugim riječima, uvijek vrijedi

$$a \oplus \Theta = \Theta \oplus a = a, \quad \forall a \in V.$$

Suprotni vektor u vektorskom prostoru

Suprotni vektor vektora $a \in V$ u vektorskom prostoru V nad poljem F je vektor $-a \in V$ za kojeg vrijedi

$$a \oplus (-a) = -a \oplus a = \Theta.$$

Napomena.

Često radi jednostavnosti pišemo

- $x + y$ umjesto $x \oplus y$,
- αx umjesto $\alpha \odot x$.

U tom slučaju uvijek moramo imati na umu da tako zapisane operacije razlikujemo od pripadnih operacija $+$ i $\cdot$ u polju F. Od sada koristimo dalje ove jednostavnije oznake.

Napomena.

Najčešći primjeri polja nad kojima se definira vektorski prostor su polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ i polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.

Vektorski prostor definiran nad poljem realnih brojeva zovemo realni vektorski prostor, a vektorski prostor definiran nad poljen kompleksnih brojeva zovemo kompleksni vektorski prostor.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Propozicija 3.9.

U svakom vektorskom prostoru V nad poljem F vrijedi

$$0 \cdot a = \Theta, \quad \forall a \in V.$$

Dokaz.

U polju F element 0 je neutralni element s obzirom na zbrajanje. Specijalno je $0 = 0 + 0$. Zbog svojstva distributivnosti s obzirom na zbrajanje skalara u vektorskom prostoru V vrijedi

$$0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a,$$

odnosno

$$0 \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a.$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Kako je $(V, +)$ grupa, vektor $0 \cdot a$ ima suprotni vektor $-(0 \cdot a)$. Dodavanjem tog suprotnog vektora lijevoj i desnoj strani posljednje jednakosti i korištenjem asocijativnosti u grupi $(V, +)$ dobivamo

$$
\begin{aligned}
0 \cdot a &= 0 \cdot a + 0 \cdot a \\
\underbrace{-(0 \cdot a) + 0 \cdot a}_{=\Theta} &= \underbrace{-(0 \cdot a) + 0 \cdot a}_{=\Theta} + 0 \cdot a \\
\Theta &= \Theta + 0 \cdot a \\
\Theta &= 0 \cdot a
\end{aligned}
$$

♡

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Propozicija 3.10.

U svakom vektorskom prostoru V nad poljem F vrijedi

$$\alpha \cdot \Theta = \Theta, \quad \forall \alpha \in F.$$

Dokaz.

U grupi V element Θ je neutralni element s obzirom na zbrajanje. Specijalno je $\Theta = \Theta + \Theta$. Zbog svojstva distributivnosti s obzirom na zbrajanje vektora u vektorskom prostoru V vrijedi

$$\alpha \cdot \Theta = \alpha \cdot (\Theta + \Theta) = \alpha \cdot \Theta + \alpha \cdot \Theta,$$

odnosno

$$\alpha \cdot \Theta = \alpha \cdot \Theta + \alpha \cdot \Theta.$$

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Kako je $(V,+)$ grupa, vektor $\alpha\cdot\Theta$ ima suprotni vektor $-(\alpha\cdot\ \Theta)$. Dodavanjem tog suprotnog vektora lijevoj i desnoj strani posljednje jednakosti i korištenjem asocijativnosti u grupi $(V,+)$ dobivamo

$$\alpha\cdot\Theta=\alpha\cdot\Theta+\alpha\cdot\Theta$$

$$\underbrace{-(\alpha\cdot\Theta)+\alpha\cdot\Theta}_{=\Theta}=\underbrace{-(\alpha\cdot\Theta)+\alpha\cdot\Theta}_{=\Theta}+\alpha\cdot\Theta$$

$$\Theta=\Theta+\alpha\cdot\Theta$$

$$\Theta=\alpha\cdot\Theta$$

♡

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Propozicija 3.11.

U svakom vektorskom prostoru V nad poljem F vrijedi

$$\alpha a = \Theta \;\Rightarrow\; \alpha = 0 \text{ ili } a = \Theta.$$

Dokaz.

Pretpostavimo da je $\alpha a = \Theta$. Ako je $\alpha = 0$, dokaz je gotov.

Pretpostavimo stoga da je $\alpha \neq 0$. U tom slučaju $\alpha \in F$ ima svoj multiplikativni inverz $\alpha^{-1} \in F$. Koristeći kvaziasocijativnost, posjedovanje jedinice i prethodnu propoziciju dobivamo

$$\alpha a = \Theta \;\Rightarrow\; \alpha^{-1}(\alpha a) = \alpha^{-1} \cdot \Theta \;\Rightarrow\; (\alpha^{-1}\alpha)a = \Theta \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 1 \cdot a = \Theta \;\Rightarrow a = \Theta$$

♡

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Iz prethodne tri propozicije slijedi sljedeća tvrdnja koja nam je poznata još iz V^3, a koja zapravo vrijedi u svakom vektorskom prostoru.

Korolar 3.1.

U svakom vektorskom prostoru V nad poljem F vrijedi

$$\alpha a = \Theta \;\Leftrightarrow\; \alpha = 0 \text{ ili } a = \Theta.$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Propozicija 3.12.

U svakom vektorskom prostoru V nad poljem F vrijedi

$$-(\alpha a) = (-\alpha)a, \quad \forall \alpha \in F, \ \forall a \in V.$$

Dokaz.

Koristeći $0 \cdot a = \Theta$, $-\alpha + \alpha = 0$ i distributivnost u odnosu na zbrajanje skalara dobivamo

$$\Theta = 0 \cdot a = (-\alpha + \alpha)a = (-\alpha)a + \alpha a$$

iz čega zaključujemo da je $(-\alpha)a$ suprotni vektor vektora αa, odnosno $-(\alpha a) = (-\alpha)a$. ♡

Primjeri vektorskih prostora

1. Svako polje F je vektorski prostor nad samim sobom. U tom slučaju se operacije zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom podudaraju s operacijama zbrajanja i množenja u polju.
2. Svako polje je vektorski prostor nad svakim svojim potpoljem.
   - $\mathbb{R}$ je vektorski prostor nad $\mathbb{Q}$
   - $\mathbb{C}$ je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$
   - $\mathbb{C}$ je vektorski prostor nad $\mathbb{Q}$
3. Nad svakim poljem F postoji jedinstveni vektorski prostor $V = \{\Theta\}$ koji se sastoji samo od nulvektora i zovemo ga **trivijalni vektorski prostor** nad poljem F.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

4. Skup V^3 je realni vektorski prostor uz standardno zbrajanje vektora i množenje vektora realnim brojem.

5. Neka je F polje. Tada je skup svih uređenih n-torki

$$F^n = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in F\right\}$$

elemenata iz polja F vektorski prostor nad poljem F uz sljedeće operacije zbrajanja i množenja skalarom.

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = \\ = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)\end{aligned}$$

$$\alpha\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

F^n zovemo n-**dimenzionalni koordinatni prostor nad poljem** F.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

- Specijalno za $F = \mathbb{R}$, skup svih uređenih n-torki realnih brojeva $\mathbb{R}^n$ je realni vektorski prostor kojeg zovemo **realni n-dimenzionalni koordinatni prostor**.

- Specijalno za $F = \mathbb{C}$, skup svih uređenih n-torki kompleksnih brojeva $\mathbb{C}^n$ je kompleksni vektorski prostor kojeg zovemo **kompleksni n-dimenzionalni koordinatni prostor**.

- Specijalno za $F = \mathbb{Z}_p$ i p prosti broj,

$$\mathbb{Z}_p^n = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}_p\big\}$$

je primjer vektorskog prostora nad poljem $\mathbb{Z}_p$ s konačno mnogo vektora, tj. s p^n vektora. Za $p = 2$ dobivamo vektorski prostor $\mathbb{Z}_2^n$ uređenih n-torki nula i jedinica s 2^n vektora koji je važan u teoriji kodiranja.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

6. Neka je F polje. Tada je skup svih nizova u polju F

$$F^{\infty} = \{(a_i) : a_i \in F\}$$

vektorski prostor nad poljem F uz sljedeće operacije zbrajanja i množenja skalarom.

$$(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i)$$
$$\alpha\,(a_i) = (\alpha a_i)$$

- Specijalno za $F = \mathbb{R}$, skup svih nizova realnih brojeva $\mathbb{R}^{\infty}$ je realni vektorski prostor.
- Specijalno za $F = \mathbb{C}$, skup svih nizova kompleksnih brojeva $\mathbb{C}^{\infty}$ je kompleksni vektorski prostor.
- Specijalno za $F = \mathbb{Q}$, skup svih nizova racionalnih brojeva $\mathbb{Q}^{\infty}$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{Q}$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

7. Neka je F polje. Skup $M_{mn}(F)$ svih matrica tipa (m, n) s elementima iz polja F je vektorski prostor nad poljem F uz standardno zbrajanje matrica i množenje matrica skalarom. Zbrajanje matrica i množenje skalarom se obavlja preko operacija zbrajanja i množenja u polju F.

- Specijalno za $F = \mathbb{R}$, $M_{mn}(\mathbb{R})$ je realni vektorski prostor.
- Specijalno za $F = \mathbb{C}$, $M_{mn}(\mathbb{C})$ je kompleksni vektorski prostor.
- Specijalno za $F = \mathbb{Z}_p$ i p prosti broj, $M_{mn}(\mathbb{Z}_p)$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{Z}_p$.
- Specijalno za $m = n$, skup $M_n(F)$ svih kvadratnih matrica reda n s elementima iz polja F je vektorski prostor nad poljem F.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

8. Neka je F polje, a $\mathcal{P}(F,t)$ skup svih polinoma u varijabli t s koeficijentima iz polja F.

$$\mathcal{P}(F,t) = \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n : a_i \in F,\ n \in \mathbb{N}_0\}$$

Uz uobičajeno zbrajanje polinoma i množenje skalarom $\mathcal{P}(F,t)$ je vektorski prostor nad poljem F. Zbrajanje polinoma i množenje skalarom se obavlja preko operacija zbrajanja i množenja u polju F. Za $m \leqslant n$ i $\alpha \in F$ imamo

$$(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) + (b_0 + b_1 t + \cdots + b_m t^m) =$$
$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_m + b_m)t^m + \cdots + a_n t^n$$

$$\alpha \cdot (a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) = \alpha a_0 + \alpha a_1 t + \cdots + \alpha a_n t$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

- Specijalno za $F = \mathbb{R}$, skup svih polinoma $\mathcal{P}(\mathbb{R}, t)$ u varijabli t s realnim koeficijentima je realni vektorski prostor. U ovom slučaju umjesto $\mathcal{P}(\mathbb{R}, t)$ kratko ćemo pisati $\mathcal{P}(t)$ ili još kraće samo $\mathcal{P}$ ukoliko je varijabla poznata iz konteksta. Ukratko, $\mathcal{P}$ označava vektorski prostor svih polinoma u jednoj varijabli s realnim koeficijentima.
- Specijalno za $F = \mathbb{C}$, skup svih polinoma $\mathcal{P}(\mathbb{C}, t)$ u varijabli t s kompleksnim koeficijentima je kompleksni vektorski prostor.
- Specijalno za $F = \mathbb{Q}$, skup svih polinoma $\mathcal{P}(\mathbb{Q}, t)$ u varijabli t s racionalnim koeficijentima je vektorski prostor nad poljem racionalnih brojeva.
- Specijalno za $F = \mathbb{Z}_p$ i p prosti broj, skup svih polinoma $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_p, t)$ u varijabli t s koeficijentima iz polja $\mathbb{Z}_p$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{Z}_p$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

9. Neka je F polje, a $\mathcal{P}_n(F,t)$ skup svih polinoma stupnja $< n$ u varijabli t s koeficijentima iz polja F.

$$\mathcal{P}_n(F,t) = \left\{a_0 + a_1 t + \cdots + a_k t^k : a_i \in F, k \in \mathbb{N}_0, k < n\right\}$$

Uz prethodno definirano zbrajanje polinoma i množenje skalarom $\mathcal{P}_n(F,t)$ je vektorski prostor nad poljem F.

- Specijalno za $F = \mathbb{R}$, skup svih polinoma $\mathcal{P}_n(\mathbb{R},t)$ stupnja $< n$ u varijabli t s realnim koeficijentima je realni vektorski prostor. U ovom slučaju umjesto $\mathcal{P}_n(\mathbb{R},t)$ kratko ćemo pisati $\mathcal{P}_n(t)$ ili još kraće samo $\mathcal{P}_n$ ukoliko je varijabla poznata iz konteksta. Ukratko, $\mathcal{P}_n$ označava vektorski prostor svih polinoma u jednoj varijabli stupnja $< n$ s realnim koeficijentima.

- Specijalno za $F = \mathbb{C}$, skup svih polinoma $\mathcal{P}_n(\mathbb{C}, t)$ stupnja $< n$ u varijabli t s kompleksnim koeficijentima je kompleksni vektorski prostor.
- Specijalno za $F = \mathbb{Q}$, skup svih polinoma $\mathcal{P}_n(\mathbb{Q}, t)$ u varijabli t stupnja $< n$ s racionalnim koeficijentima je vektorski prostor nad poljem racionalnih brojeva.
- Specijalno za $F = \mathbb{Z}_p$ i p prosti broj, skup svih polinoma $\mathcal{P}_n(\mathbb{Z}_p, t)$ stupnja $< n$ u varijabli t s koeficijentima iz polja $\mathbb{Z}_p$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{Z}_p$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

10. Neka je T neprazni skup, a F bilo koje polje. Neka je

$$F^T = \{f \mid f : T \to F\}$$

skup svih funkcija sa skupa T u polje F. Tada uz operacije zbrajanja funkcija i množenja funkcija skalarom

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x), \quad \alpha \in F$$

skup F^T postaje vektorski prostor nad poljem F i zovemo ga **prostor funkcija** ili **funkcijski prostor**.

- Specijalno za $F = T = \mathbb{R}$ skup $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ svih realnih funkcija realne varijable je realni vektorski prostor.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Zadatak 3.8.

Na skupu $\mathbb{R}^2$ *definiramo operacije zbrajanja i množenja skalarom na sljedeći način:*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad \alpha \cdot (a, b) = (\alpha a, 0).$$

Dokažite da uz ovako definirane operacije $\mathbb{R}^2$ *nije realni vektorski prostor. Koji aksiomi vektorskog prostora nisu zadovoljeni?*

Zadatak 3.9.

Na skupu $\mathbb{R}^2$ *definiramo operacije zbrajanja i množenja skalarom na sljedeći način:*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad \alpha \cdot (a, b) = (\alpha a, b).$$

Dokažite da uz ovako definirane operacije $\mathbb{R}^2$ *nije realni vektorski prostor. Koji aksiomi vektorskog prostora nisu zadovoljeni?*

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Zadatak 3.10.

Na skupu $\langle 0, +\infty\rangle$ *definiramo operacije zbrajanja i množenja skalarom na sljedeći način:* $a \oplus b = ab,\ \alpha \odot a = a^{\alpha}$*. Dokažite da je uz ovako definirane operacije* $\langle 0, +\infty\rangle$ *realni vektorski prostor.*

Zadatak 3.11.

- a *Dokažite da je skup svih neprekidnih realnih funkcija realne varijable realni vektorski prostor uz uobičajeno zbrajanje funkcija i množenje funkcija skalarom po točkama.*
- b *Dokažite da je skup svih derivabilnih realnih funkcija realne varijable realni vektorski prostor uz uobičajeno zbrajanje funkcija i množenje funkcija skalarom po točkama.*
- c *Dokažite da je skup svih Riemann integrabilnih realnih funkcija na segmentu* $[a, b]$ *realni vektorski prostor uz uobičajeno zbrajanje funkcija i množenje funkcija skalarom po točkama.*

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Linearna kombinacija vektora

Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Neka su dani vektori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$ i skalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$. Vektor

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n \in V$$

zovemo linearna kombinacija vektora $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ s koeficijentima $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

- Za $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ vektor $2\vec{a} + 3\vec{b}$ je linearna kombinacija vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ s koeficijentima 2 i 3.
- Za $A, B, C \in M_{mn}(\mathbb{R})$ matrica $-2A + \frac{3}{4}B + 7C$ je linearna kombinacija matrica A, B i C s koeficijentima -2, $\frac{3}{4}$ i 7.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Linearna nezavisnost konačnog skupa vektora

Neka je $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ konačan skup vektora u vektorskom prostoru V nad poljem F. Kažemo da je S linearno nezavisni skup vektora ako se nulvektor $\Theta \in V$ može na jedinstveni način prikazati kao linearna kombinacija vektora iz S, tj. ako iz

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \Theta$$

slijedi $\alpha_i = 0$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$.

Neka je $S \subseteq V$ bilo koji skup vektora u vektorskom prostoru V nad poljem F. Kažemo da je skup S linearno nezavisan ako je svaki njegov konačni podskup linearno nezavisan.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Linearna zavisnost konačnog skupa vektora

Neka je $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ konačan skup vektora u vektorskom prostoru V nad poljem F. Kažemo da je S linearno zavisni skup vektora ako se nulvektor $\Theta \in V$ može prikazati barem na dva različita načina kao linearna kombinacija vektora iz S, tj. ako postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ takvi da vrijedi

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \Theta$$

i pritom je barem jedan skalar $\alpha_i \neq 0$ za neki $i = 1, 2, \ldots, n$.

Neka je $S \subseteq V$ bilo koji skup vektora u vektorskom prostoru V nad poljem F. Kažemo da je skup S linearno zavisan ako je barem jedan njegov konačni podskup linearno zavisan.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Napomena.

Linearna nezavisnost i linearna zavisnost su svojstva skupa vektora jer daju određenu informaciju o odnosu vektora u tom skupu. Zbog toga bi uvijek trebalo govoriti *"linearno nezavisni skup vektora"* odnosno *"linearno zavisni skup vektora"*. Međutim, često smo skloni neprecizno govoriti *"skup linearno nezavisnih (zavisnih) vektora"* ili još kraće *"vektori su linearno nezavisni (zavisni)"*.

Unatoč tome kako se izrazimo, uvijek trebamo imati na umu da su linearna zavisnost i linearna nezavisnost svojstva skupa vektora kao cjeline, a ne svojstva pojedinih vektora iz skupa.

Linearna zavisnost i nezavisnost u V^3

Pogledajmo sada nekoliko primjera linearne nezavisnosti i zavisnosti vektora u realnom vektorskom prostoru V^3. Neka je $S = \{\vec{a}\}$ skup od jednog vektora u V^3. Promatramo relaciju

$$\alpha\vec{a} = \vec{0}. \tag{$*$}$$

Ako je $\vec{a} = \vec{0}$, tada $(*)$ ima beskonačno mnogo rješenja jer znamo da je u V^3 uvijek $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$ za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$. Dakle, ako je $\vec{a} = \vec{0}$, postoji realni broj $\alpha \neq 0$ takav da vrijedi $(*)$. Iz toga zaključujemo da je skup $S = \{\vec{0}\}$ koji se sastoji samo od nulvektora uvijek linearno zavisan u V^3.

Ako je $\vec{a} \neq \vec{0}$, tada $(*)$ ima jedinstveno rješenje $\alpha = 0$. Iz toga zaključujemo da je skup $S = \{\vec{a}\}$ koji se sastoji od jednog vektora različitog od nulvektora uvijek linearno nezavisan u V^3.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Neka je $S = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ skup od dva vektora u V^3. Promatramo relaciju

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}. \qquad (\star)$$

Ako $(\star)$ ima barem jedno netrivijalno rješenje, tada je barem jedan od brojeva α i β različit od 0. Ako je $\alpha \neq 0$, iz $(\star)$ slijedi

$$\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{b}$$

iz čega zaključujemo da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni.

Na temelju gornjeg razmatranja imamo sljedeće zaključke:

- Dva vektora u V^3 su linearno zavisni ako i samo ako su kolinearni.
- Dva vektora u V^3 su linearno nezavisni ako i samo ako nisu kolinearni.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Neka je $S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ skup od tri vektora u V^3. Promatramo relaciju

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}. \qquad (\blacklozenge)$$

Ako ($\blacklozenge$) ima barem jedno netrivijalno rješenje, tada je barem jedan od brojeva α, β i γ različit od 0. Ako je $\alpha \neq 0$, iz ($\blacklozenge$) slijedi

$$\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{b} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{c}$$

iz čega zaključujemo da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni.

Na temelju gornjeg razmatranja imamo sljedeće zaključke:

- Tri vektora u V^3 su linearno zavisni ako i samo ako su komplanarni.
- Tri vektora u V^3 su linearno nezavisni ako i samo ako nisu komplanarni.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Neka je $S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ skup od četiri vektora u V^3. Promatramo relaciju

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d} = \vec{0}. \qquad (\blacktriangledown)$$

Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nekomplanarni, tada čine jednu bazu za V^3 pa se vektor $\vec{d}$ može prikazati u toj bazi, tj. postoje $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\vec{d} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{c}$$

odnosno

$$\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{c} - \vec{d} = \vec{0}.$$

Iz posljednje jednakosti zaključujemo da u tom slučaju relacija $(\blacktriangledown)$ ima netrivijalno rješenje $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \alpha_2$, $\gamma = \alpha_3$, $\delta = -1$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni, tada se barem jedan od njih može prikazati pomoću preostala dva. Na primjer

$$\vec{a} = \beta_1 \vec{b} + \beta_2 \vec{c}.$$

Tada je

$$-\vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \beta_2 \vec{c} = \vec{0},$$

a zbog $0 \cdot \vec{d} = \vec{0}$ sigurno vrijedi

$$-\vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \beta_2 \vec{c} + 0 \cdot \vec{d} = \vec{0}.$$

Iz posljednje jednakosti ponovo zaključujemo da relacija (▼) ima netrivijalno rješenje $\alpha = -1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \beta_2$, $\delta = 0$.

Dolazimo do sljedećeg zaključka:

- Svaki skup od četiri ili više vektora u V^3 je uvijek linearno zavisni skup.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Primjer 3.5.

Ispitajte linearnu nezavisnost skupa

$$S = \{\,(1,2,3)\,,(0,1,-1)\,,(2,0,1)\,\}$$

u realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.5.

Ispitajte linearnu nezavisnost skupa

$$S = \{ (1,2,3), (0,1,-1), (2,0,1) \}$$

u realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$.

Rješenje.

Tražimo sva rješenja jednadžbe

$$\alpha_1 \cdot (1,2,3) + \alpha_2 \cdot (0,1,-1) + \alpha_3 \cdot (2,0,1) = \Theta_{\mathbb{R}^3}.$$

Raspisivanjem slijedi

$$\big(\alpha_1 + 2\alpha_3,\ 2\alpha_1 + \alpha_2,\ 3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3\big) = (0,0,0)$$

iz čega dobivamo homogeni sustav linearnih jednadžbi

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

$$\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0$$
$$2\alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$
$$3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

Riješimo dobiveni sustav Gaussovim postupkom.

α_1	α_2	α_3		
1	0	2	0	
2	1	0	0	$+$
3	−1	1	0	
1	0	2	0	
2	1	0	0	$+$
5	0	1	0	$/\cdot(-2)$
−9	0	0	0	$/:(-9)$
2	1	0	0	
5	0	1	0	

α_1	α_2	α_3		
1	0	0	0	$/\cdot(-2)$ $/\cdot(-5)$
2	1	0	0	$+$
5	0	1	0	$+$
1	0	0	0	
0	1	0	0	
0	0	1	0	

Kako gornji homogeni sustav ima samo trivijalno rješenje $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, skup S je linearno nezavisan u $\mathbb{R}^3$.

Primjer 3.6.

Ispitajte linearnu nezavisnost skupa

$$S = \{ (1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1) \}$$

u realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.6.

Ispitajte linearnu nezavisnost skupa

$$S = \{\, (1,0,\ldots,0)\,,(0,1,\ldots,0)\,,\ldots,(0,0,\ldots,1)\,\}$$

u realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$*.*

Rješenje.

Tražimo sva rješenja jednadžbe

$$\alpha_1\cdot(1,0,\cdots,0)+\alpha_2\cdot(0,1,\ldots,0)+\cdots+\alpha_n\cdot(0,0,\ldots,1)=\Theta_{\mathbb{R}^n}.$$

Raspisivanjem dobivamo

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=(0,0,\ldots,0)$$

iz čega slijedi $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$. Stoga je S linearno nezavisni skup u $\mathbb{R}^n$.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Primjer 3.7.

Ispitajte linearnu nezavisnost skupa

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

u realnom vektorskom prostoru $M_2(\mathbb{R})$.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Primjer 3.7.

Ispitajte linearnu nezavisnost skupa

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

u realnom vektorskom prostoru $M_2(\mathbb{R})$.

Rješenje.

Tražimo sva rješenja jednadžbe

$$\alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \Theta_{M_2(\mathbb{R})}.$$

Raspisivanjem slijedi

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 & 5\alpha_2 + 5\alpha_3 \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 & 3\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

iz čega dobivamo homogeni sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ 5\alpha_2 + 5\alpha_3 &= 0 \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0 \\ 3\alpha_1 - 4\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Riješimo dobiveni sustav Gaussovim postupkom.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

α_1	α_2	α_3		
1	1	3	0	$/\cdot 2\ /\cdot(-3)$
0	5	5	0	
-2	4	0	0	$+$
3	-4	2	0	$+$
1	1	3	0	
0	5	5	0	$/:5$
0	6	6	0	$/:6$
0	-7	-7	0	$/:(-7)$

α_1	α_2	α_3		
1	1	3	0	
0	1	1	0	
0	1	1	0	
0	1	1	0	
1	1	3	0	$+$
0	1	1	0	$/\cdot(-1)$
1	0	2	0	
0	1	1	0	

Stoga je opće rješenje promatranog homogenog sustava dano s

$$\alpha_1 = -2p, \quad \alpha_2 = -p, \quad \alpha_3 = p, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Kako promatrani homogeni sustav ima i netrivijalnih rješenja, zaključujemo da je S linearno zavisni skup u $M_2(\mathbb{R})$.

Primjer 3.8.

Ispitajte linearnu nezavisnost polinoma

$$p_1(t) = t + 1, \quad p_2(t) = t - 1, \quad p_3(t) = t^2 - 2t + 1$$

u realnom vektorskom prostoru $\mathcal{P}_3(t)$.

Primjer 3.8.

Ispitajte linearnu nezavisnost polinoma

$$p_1(t) = t + 1, \quad p_2(t) = t - 1, \quad p_3(t) = t^2 - 2t + 1$$

u realnom vektorskom prostoru $\mathcal{P}_3(t)$.

Rješenje.

Tražimo sva rješenja jednadžbe

$$\alpha_1 \cdot p_1(t) + \alpha_2 \cdot p_2(t) + \alpha_3 \cdot p_3(t) = \Theta_{\mathcal{P}_3(t)}.$$

Raspisivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot (t + 1) + \alpha_2 \cdot (t - 1) + \alpha_3 \cdot (t^2 - 2t + 1) &= 0 \\ \alpha_3 t^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3)t + (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) &= 0 \end{aligned}$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Polinom je jednak nulpolinomu ako su svi njegovi koeficijenti jednaki 0, tj.

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0. \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Lagano se vidi da dobiveni homogeni sustav ima samo trivijalno rješenje $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Stoga su polinomi

$$p_1(t) = t + 1, \quad p_2(t) = t - 1, \quad p_3(t) = t^2 - 2t + 1$$

linearno nezavisni u $\mathcal{P}_3(t)$.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Primjer 3.9.

Ispitajte linearnu nezavisnost polinoma

$$e_0(t) = 1,\ e_1(t) = t,\ e_2(t) = t^2,\ \ldots,\ e_{n-1}(t) = t^{n-1}$$

u realnom vektorskom prostoru $\mathcal{P}_n(t)$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.9.

Ispitajte linearnu nezavisnost polinoma

$$e_0(t) = 1,\ e_1(t) = t,\ e_2(t) = t^2,\ \ldots,\ e_{n-1}(t) = t^{n-1}$$

u realnom vektorskom prostoru $\mathcal{P}_n(t)$.

Rješenje.

Tražimo sva rješenja jednadžbe

$$\alpha_0 \cdot e_0(t) + \alpha_1 \cdot e_1(t) + \alpha_2 \cdot e_2(t) + \cdots + \alpha_{n-1} e_{n-1}(t) = \Theta_{\mathcal{P}_n(t)}.$$

Uvrštavanjem zadanih polinoma u gornju relaciju dobivamo

$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_{n-1} t^{n-1} = 0,$$

iz čega odmah slijedi $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$. Stoga su zadani polinomi linearno nezavisni u $\mathcal{P}_n(t)$.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Napomena.

Ispitivanje linearne nezavisnosti konačnog skupa vektora u vektorskom prostoru V nad poljem F svodi se na rješavanje homogenog sustava linearnih jednadžbi u polju F. Pritom vrijedi:

- Ako pripadni homogeni sustav linearnih jednadžbi ima samo trivijalno rješenje u polju F, tada je promatrani skup vektora linearno nezavisan u vektorskom prostoru V nad poljem F.
- Ako pripadni homogeni sustav linearnih jednadžbi ima i netrivijalnih rješenja u polju F, tada je promatrani skup vektora linearno zavisan u vektorskom prostoru V nad poljem F.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Polje F nad kojim se promatra vektorski prostor V također utječe na linearnu nezavisnost vektora. Pogledajmo to na sljedećem jednostavnom primjeru.

Primjer 3.10.

a. *Dokažite da su vektori* $(1,1)$ *i* (i,i) *linearno nezavisni u realnom vektorskom prostoru* $\mathbb{C}^2$.
b. *Dokažite da su vektori* $(1,1)$ *i* (i,i) *linearno zavisni u kompleksnom vektorskom prostoru* $\mathbb{C}^2$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Rješenje.

Promatramo li $\mathbb{C}^2$ kao vektorski prostor nad poljem realnih brojeva, tada jednadžbu

$$\alpha \cdot (1,1) + \beta \cdot (i,i) = \Theta_{\mathbb{C}^2}$$

rješavamo u polju realnih brojeva. Drugim riječima, tražimo sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ koji zadovoljavaju gornju jednadžbu. Raspisivanjem dobivamo

$$(\alpha + \beta i, \alpha + \beta i) = (0,0)$$

iz čega slijedi da mora biti $\alpha + \beta i = 0$. Kako su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, iz jednakosti dva kompleksna broja slijedi $\alpha = 0$ i $\beta = 0$. Stoga su vektori $(1,1)$ i (i,i) linearno nezavisni u realnom vektorskom prostoru $\mathbb{C}^2$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Promatramo li $\mathbb{C}^2$ kao vektorski prostor nad poljem kompleksnih brojeva, tada jednadžbu

$$\alpha \cdot (1,1) + \beta \cdot (i,i) = \Theta_{\mathbb{C}^2}$$

rješavamo u polju kompleksnih brojeva. Drugim riječima, tražimo sve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ koji zadovoljavaju gornju jednadžbu. Raspisivanjem dobivamo

$$(\alpha + \beta i, \alpha + \beta i) = (0,0)$$

iz čega slijedi da mora biti $\alpha + \beta i = 0$. Međutim, posljednja jednadžba ima i netrivijalnih rješenja u polju $\mathbb{C}$ koja su dana s

$$\alpha = -ip, \quad \beta = p, \quad p \in \mathbb{C}.$$

Stoga su vektori $(1,1)$ i (i,i) linearno zavisni u kompleksnom vektorskom prostoru $\mathbb{C}^2$.

Intuitivno možemo razmišljati na sljedeći način. Jasno je da vrijedi

$$(i,i) = i \cdot (1,1), \quad (1,1) = -i \cdot (i,i)$$

iz čega odmah slijedi da su vektori $(1,1)$ i (i,i) linearno zavisni u kompleksnom vektorskom prostoru $\mathbb{C}^2$. Međutim, kako je

$$(i,i) \neq u \cdot (1,1), \quad (1,1) \neq v \cdot (i,i), \quad \forall u,v \in \mathbb{R}$$

vektori $(1,1)$ i (i,i) su linearno nezavisni u realnom vektorskom prostoru $\mathbb{C}^2$.

Zadatak 3.12.

a) *Dokažite da su vektori* $(1,1)$ *i* $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ *linearno zavisni u vektorskom prostoru* $\mathbb{R}^2$ *nad poljem* $\mathbb{R}$.

b) *Dokažite da su vektori* $(1,1)$ *i* $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ *linearno nezavisni u vektorskom prostoru* $\mathbb{R}^2$ *nad poljem* $\mathbb{Q}$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Navedimo i dokažimo sada neka osnovna svojstva linearno nezavisnih i linearno zavisnih skupova koja vrijede u svakom vektorskom prostoru.

Propozicija 3.13.

Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Svaki podskup linearno nezavisnog skupa vektora u V je linearno nezavisni skup.

Dokaz.

Neka je S linearno nezavisni skup vektora u vektorskom prostoru V nad poljem F. Tada razlikujemo dva slučaja.

- S je konačni skup.

Neka je T proizvoljni neprazni podskup od S. Stavimo da je

$$T = \{a_1, \ldots, a_l\}, \quad S = \{a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_k\}.$$

Pretpostavimo da je T linearno zavisni skup.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

U tom slučaju jednadžba

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_l a_l = \Theta_V$$

ima barem jedno rješenje u polju F takvo da je barem jedan $\alpha_i \neq 0$ za neki $i = 1, 2, \ldots, l$. Međutim, tada vrijedi

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_l a_l + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \cdots + 0 \cdot b_k = \Theta_V$$

iz čega slijedi da je $S = \{a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_k\}$ linearno zavisni skup, što je kontradikcija s pretpostavkom. Dakle, T je zaista linearno nezavisni skup.

- S je beskonačni skup.

Neka je T proizvoljni neprazni podskup od S. Ako je T konačni skup, tada iz definicije linearne nezavisnosti beskonačnih skupova slijedi da je T linearno nezavisni skup.

Pretpostavimo stoga da je T beskonačni podskup od S. Kad bi T bio linearno zavisni skup, tada bi postojao barem jedan konačni skup $T_0 \subseteq T$ koji je linearno zavisni. Međutim, tada je T_0 konačni linearno zavisni podskup od S, što je kontradikcija s pretpostavkom da je S linearno nezavisni skup. Stoga je T zaista linearno nezavisni skup.

Dakle, u svakom od mogućih slučajeva dobili smo da je svaki neprazni podskup bilo kojeg linearno nezavisnog skupa uvijek linearno nezavisni skup. Uz dogovor da je prazan skup po definiciji linearno nezavisni skup, slijedi tvrdnja. $\heartsuit$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Propozicija 3.14.

Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Svaki nadskup linearno zavisnog skupa vektora u V je linearno zavisni skup.

Dokaz.

Neka je S linearno zavisni skup vektora u vektorskom prostoru V nad poljem F. Tada razlikujemo dva slučaja.

- S je beskonačni skup.

Neka je T proizvoljni neprazni nadskup od S u vektorskom prostoru V. Tada je T također beskonačni skup. Kako je S linearno zavisni skup u V, tada postoji barem jedan konačni podskup $S_0 \subseteq S$ koji je linearno zavisni. No, tada je S_0 također konačni linearno zavisni podskup od T pa je T linearno zavisni skup.

- S je konačni skup.

Neka je T proizvoljni neprazni nadskup od S u vektorskom prostoru V. Ako je T beskonačni skup, tada je T linearno zavisni skup jer je S njegov konačni linearno zavisni podskup.

Preostaje tvrdnju još provjeriti za slučaj kad je T konačni nadskup od S. Neka je $S = \{a_1, \ldots, a_l\}$, $T = \{a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_k\}$. Kako je S linearno zavisni skup, jednadžba

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_l a_l = \Theta_V$$

ima barem jedno netrivijalno rješenje u F. Međutim, tada vrijedi

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_l a_l + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \cdots + 0 \cdot b_k = \Theta_V$$

iz čega slijedi da je T linearno zavisni skup.

Dakle, u svakom slučaju dobivamo da je nadskup linearno zavisnog skupa uvijek linearno zavisni skup. $\heartsuit$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Propozicija 3.15.

Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Skup $S = \{a\} \subseteq V$ je linearno zavisni ako i samo ako je $a = \Theta$.

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Neka je $S = \{a\}$ linearno zavisni skup u vektorskom prostoru V. To znači da postoji skalar $\alpha \neq 0$ iz polja F takav da je $\alpha a = \Theta$. Kako je $\alpha \neq 0$, tada mora biti $a = \Theta$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Ako je $a = \Theta$, tada je $\alpha a = \Theta$ za svaki $\alpha \in F$. Stoga je $S = \{a\}$ linearno zavisni skup. ♡

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Korolar 3.2.

Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Svaki skup vektora u V koji sadrži nulvektor je linearno zavisni skup.

Dokaz.

Neka je S proizvoljni skup vektora u V koji sadrži nulvektor. Prema prethodnoj propoziciji $\{\Theta\}$ je linearno zavisni skup u V. Kako je S nadskup linearno zavisnog skupa $\{\Theta\}$, zaključujemo da je S linearno zavisni skup. ♡

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Propozicija 3.16.

Neka je V vektorski prostor nad poljem F i $k > 1$ prirodni broj. Skup vektora $S = \{a_1, \ldots, a_k\}$ iz V je linearno zavisan ako i samo ako se barem jedan od vektora iz S može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz S.

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Neka je S linearno zavisni skup. Tada jednadžba

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i a_i + \cdots + \alpha_k a_k = \Theta$$

ima barem jedno netrivijalno rješenje u kojemu je barem jedan od skalara $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$ različit od nule. Pretpostavimo da je $\alpha_i \neq 0$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Tada je

$$\alpha_i a_i = -\alpha_1 a_1 - \cdots - \alpha_{i-1} a_{i-1} - \alpha_{i+1} a_{i+1} - \cdots - \alpha_k a_k.$$

Kako je $\alpha_i \neq 0$, element α_i ima u polju F svoj inverz α_i^{-1} pa množenjem prethodne jednakosti s α_i^{-1} dobivamo

$$\begin{aligned} a_i = \big(-\alpha_1\alpha_i^{-1}\big)a_1 + \cdots + \big(-\alpha_{i-1}\alpha_i^{-1}\big)a_{i-1} + \\ + \big(-\alpha_{i+1}\alpha_i^{-1}\big)a_{i+1} + \cdots + \big(-\alpha_k\alpha_i^{-1}\big)a_k. \end{aligned}$$

U posljednoj jednakosti je vektor $a_i \in S$ izražen kao linearna kombinacija preostalih vektora iz skupa S.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

$\Leftarrow$

Pretpostavimo da je neki od vektora iz skupa S izražen kao linearna kombinacija preostalih vektora iz skupa S. Na primjer,

$$a_i = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{i-1} a_{i-1} + \alpha_{i+1} a_{i+1} + \cdots + \alpha_k a_k.$$

Iz posljednje jednakosti dobivamo

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{i-1} a_{i-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} \cdot a_i + \alpha_{i+1} a_{i+1} + \cdots + \alpha_k a_k = \Theta$$

iz čega slijedi da je S linearno zavisni skup. $\heartsuit$

Napomena.

Iz prethodne propozicije i njezinog dokaza možemo zaključiti sljedeće stvari. Skup vektora $S = \{a_1, \dots, a_k\}$ je linearno nezavisan ako i samo ako se niti jedan vektor iz skupa S ne može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz skupa S. To je zbog toga što pripadni homogeni sustav linearnih jednadžbi ima samo trivijalno rješenje pa uz svaki vektor iz tog skupa u jednadžbi

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i a_i + \cdots + \alpha_k a_k = \Theta$$

može biti samo nula iz polja F. Činjenica da uz neki vektor a_i može u gornjoj jednadžbi biti samo nula iz polja F ima za posljedicu da se vektor a_i ne može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz skupa S s koeficijentima iz polja F. Kod linearno nezavisnog skupa to vrijedi za svaki njegov element.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Kod linearno zavisnog skupa vektora $S = \{a_1, \ldots, a_k\}$ barem jedan vektor a_i može se prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz skupa S. To znači da u jednadžbi

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i a_i + \cdots + \alpha_k a_k = \Theta$$

uz vektor a_i može osim nule iz polja F biti još barem jedan skalar iz polja F koji je različit od nule. Činjenica da uz neki vektor a_i u gornjoj jednadžbi može stajati neki skalar različit od nule ima za posljedicu da se vektor a_i može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz skupa S s koeficijentima iz polja F.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Napomena.

Ako je S linearno zavisni skup, tada se barem jedan vektor iz skupa S može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz skupa S.

Općenito, u linearno zavisnom skupu S ne mora se moći svaki vektor iz tog skupa prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz skupa S. Bitno je da to vrijedi za **barem jedan** vektor iz skupa S.

Kako možemo saznati koji se vektori mogu, a koji se eventualno ne mogu prikazati kao linearne kombinacije preostalih vektora u linearno zavisnom skupu $S = \{a_1, \ldots, a_k\}$?

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Odgovor na postavljeno pitanje je vrlo jednostavan. Odredimo u polju F sva rješenja jednadžbe

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i a_i + \cdots + \alpha_k a_k = \Theta.$$

Ako dobijemo $\alpha_i = 0$ kao jedino moguće rješenje za skalar α_i, tada se vektor a_i ne može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz skupa S s koeficijentima iz polja F.

Ako za α_i dobijemo barem dva različita rješenja u polju F, tada se vektor a_i može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz skupa S s koeficijentima iz polja F.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Intuitivno možemo reći sljedeće. Ako veći broj skalara u jednadžbi

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_i a_i + \cdots + \alpha_k a_k = \Theta$$

može biti različit od nule, tada je jače naglašena linearna zavisnost skupa $S = \{a_1, \ldots, a_k\}$ nad poljem F. Ako veći broj skalara mora nužno biti jednak nula, linearna zavisnost među vektorima iz skupa S je slabije naglašena i prestaje postojati u slučaju kad svi skalari moraju biti jednaki nula, tj. kad je S linearno nezavisni skup.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.11.

U realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ *ispitajte linearnu nezavisnost skupa*

$$S = \{(2,1,2,1),(6,3,6,3),(5,1,4,3)\}$$

i prikažite pojedini vektor iz skupa S *kao linearnu kombinaciju preostalih vektora kad god je to moguće.*

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.11.

U realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ ispitajte linearnu nezavisnost skupa

$$S = \{(2,1,2,1), (6,3,6,3), (5,1,4,3)\}$$

i prikažite pojedini vektor iz skupa S kao linearnu kombinaciju preostalih vektora kad god je to moguće.

Rješenje.

U polju $\mathbb{R}$ tražimo sva rješenja jednadžbe

$$\alpha_1 \cdot (2,1,2,1) + \alpha_2 \cdot (6,3,6,3) + \alpha_3 \cdot (5,1,4,3) = \Theta_{\mathbb{R}^4}.$$

Raspisivanjem dobivamo homogeni sustav linearnih jednadžbi

$$2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0$$
$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0$$
$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Riješimo dobiveni sustav Gaussovim postupkom.

α_1	α_2	α_3		
2	6	5	0	$\leftarrow +$
1	3	1	0	$/\cdot(-2)\ /\cdot(-1)$
2	6	4	0	$\leftarrow +$
1	3	3	0	$\leftarrow +$
0	0	3	0	$/:3$
1	3	1	0	
0	0	2	0	$/:2$
0	0	2	0	$/:2$

α_1	α_2	α_3		
0	0	1	0	
1	3	1	0	
0	0	1	0	
0	0	1	0	
0	0	1	0	$/\cdot(-1)$
1	3	1	0	$\leftarrow +$
0	0	1	0	
1	3	0	0	

Stoga je opće rješenje promatranog homogenog sustava dano s

$$\alpha_1 = -3p, \quad \alpha_2 = p, \quad \alpha_3 = 0, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Kako promatrani homogeni sustav ima i netrivijalnih rješenja, zaključujemo da je skup S linearno zavisni skup.

Nadalje, dobili smo

$$-3p \cdot (2,1,2,1) + p \cdot (6,3,6,3) + 0 \cdot (5,1,4,3) = \Theta_{\mathbb{R}^4}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Kako je uvijek $\alpha_3 = 0$, odmah zaključujemo da vektor $(5,1,4,3)$ ne možemo prikazati kao linearnu kombinaciju vektora $(2,1,2,1)$ i $(6,3,6,3)$.

Za $p = 1$ dobivamo prikaz vektora $(6,3,6,3)$ kao linearne kombinacije vektora $(2,1,2,1)$ i $(5,1,4,3)$.

$$(6,3,6,3) = 3 \cdot (2,1,2,1) + 0 \cdot (5,1,4,3)$$

Za $p = -\frac{1}{3}$ dobivamo prikaz vektora $(2,1,2,1)$ kao linearne kombinacije vektora $(6,3,6,3)$ i $(5,1,4,3)$.

$$(2,1,2,1) = \frac{1}{3} \cdot (6,3,6,3) + 0 \cdot (5,1,4,3)$$

Uočite da su oba prikaza jedinstvena bez obzira na odabir vrijednosti parametra $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

U primjeru 3.7 pokazali smo da je skup

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

linearno zavisan u $M_2(\mathbb{R})$ i dobili smo da vrijedi

$$-2p \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - p \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} + p \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \Theta_{M_2(\mathbb{R})}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

U ovom slučaju svaki vektor iz skupa S možemo prikazati kao linearnu kombinaciju preostalih vektora iz skupa S također na jedinstveni način bez obzira na vrijednost parametra $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Za $p = -\frac{1}{2}$ dobivamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Za $p = -1$ dobivamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Za $p = 1$ dobivamo

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Zadatak 3.13.

U realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ *zadan je skup vektora*

$$S = \{(2,1,2,1),(6,3,6,3),(-4,-2,-4,-2)\}.$$

- (a) *Rješavanjem jednadžbe*

  $$\alpha_1 \cdot (2,1,2,1) + \alpha_2 \cdot (6,3,6,3) + \alpha_3 \cdot (-4,-2,-4,-2) = \Theta_{\mathbb{R}^4}$$

  dokažite da je S *linearno zavisni skup.*
- (b) *Prikažite pojedini vektor iz skupa* S *kao linearnu kombinaciju preostalih vektora kad god je to moguće.*
- (c) *Da li su prikazi pojedinog vektora iz prethodnog dijela zadatka jedinstveni? Kako to možemo vidjeti na temelju pronađenog općeg rješenja promatrane jednadžbe?*

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Zadatak 3.14.

Promatramo realni vektorski prostor $\mathbb{R}^3$. *Navedite nekoliko primjera za linearno zavisni skup* S *u* $\mathbb{R}^3$ *za kojeg vrijedi:*

a) *Svaki vektor iz skupa* S *može se na jedinstveni način prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz skupa* S.

b) *Svaki vektor iz skupa* S *može se na više načina prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz skupa* S.

c) *Neki vektori iz skupa* S *mogu se na jedinstveni način prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz* S, *dok za ostale vektore iz* S *takvi prikazi ne postoje.*

d) *Neki vektori iz skupa* S *mogu se na jedinstveni način prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz* S, *dok za ostale vektore iz* S *postoji više takvih prikaza.*

Ideja je da u svakom od slučajeva razmislite o mogućem kardinalnom broju skupa S *i geometrijski opišete međusobni položaj vektora iz skupa* S.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Linearni omotač skupa

Linearni omotač skupa

Neka je V vektorski prostor nad poljem F, a $S \subseteq V$ proizvoljni podskup. Linearni omotač skupa S je skup $\mathcal{L}(S)$ definiran na sljedeći način:

- Ako je $S = \emptyset$, tada je $\mathcal{L}(S) = \{\Theta\}$.
- Ako je $S \neq \emptyset$, tada je $\mathcal{L}(S)$ skup svih linearnih kombinacija vektora iz skupa S.

Specijalno, ako je S konačni podskup, tj. $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$, tada je

$$\mathcal{L}(S) = \left\{\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F\right\}.$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Napomena.

U slučaju konačnog skupa $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$, često umjesto $\mathcal{L}(\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\})$ kraće pišemo $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$.

Iz definicije specijalno odmah slijede sljedeća vrlo važna svojstva linearnog omotača.

Propozicija 3.17.

Neka je V vektorski prostor nad poljem F, a $S \subseteq V$ proizvoljni podskup. Tada vrijedi:

- $\mathcal{L}(S) \neq \emptyset$ *jer je uvijek* $\Theta \in \mathcal{L}(S)$.
- $\mathbf{x} \in \mathcal{L}(S) \;\Rightarrow\; \alpha\mathbf{x} \in \mathcal{L}(S),\ \forall \alpha \in F$
- $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}(S) \;\Rightarrow\; \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \mathcal{L}(S),\ \forall \alpha, \beta \in F$

Primjeri linearnih omotača

- Neka je $a \in \mathbb{R}^3$ vektor različit od nulvektora. Tada je $\mathcal{L}(a)$ pravac kroz ishodište s vektorom smjera a.
- Neka su $a, b \in \mathbb{R}^3$ vektori različiti od nulvektora. Ako su a i b nekolinearni, tada je $\mathcal{L}(a, b)$ ravnina kroz ishodište razapeta s vektorima a i b. Ako su a i b kolinearni vektori, tada je $\mathcal{L}(a, b)$ pravac kroz ishodište i vrijedi $\mathcal{L}(a, b) = \mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(b)$.
- Ako su $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ nekomplanarni, tada je $\mathcal{L}(a, b, c) = \mathbb{R}^3$.
- Linearni omotač polinoma $p(t) = 1$, $q(t) = t$ i $r(t) = t^2$ nad poljem F je $\mathcal{L}(1, t, t^2) = \mathcal{P}_3(F, t)$.
- Linearni omotač polinoma $p(t) = 1$ i $q(t) = t$ nad poljem F jednak je linearnom omotaču polinoma $q(t) = t$ i $r(t) = 1 + t$ nad poljem F i vrijedi $\mathcal{L}(1, t) = \mathcal{L}(t, 1 + t) = \mathcal{P}_2(F, t)$.

Primjer 3.12.

Odredite linearni omotač skupa matrica $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ *u realnom vektorskom prostoru* $M_2(\mathbb{R})$.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.12.

Odredite linearni omotač skupa matrica $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ *u realnom vektorskom prostoru* $M_2(\mathbb{R})$*.*

Rješenje.

Trebamo odrediti skup svih linearnih kombinacija zadanih matrica nad poljem realnih brojeva.

$$\mathcal{L}(S) = \left\{ \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

Zaključujemo da je $\mathcal{L}(S)$ skup svih simetričnih matrica u $M_2(\mathbb{R})$.

Baza vektorskog prostora

Pojam baze jedan je od najvažnijih pojmova u teoriji vektorskih prostora i cjelokupnoj matematici. Ranije smo u V^3 bazu definirali kao uređenu trojku nekomplanarnih vektora. Svaka baza u V^3 imala je svojstvo da se svaki vektor iz V^3 mogao na jedinstveni način prikazati kao linearna kombinacija vektora iz baze.

Sada želimo taj pojam generalizirati za bilo koji vektorski prostor V nad poljem F tako da za bazu i dalje vrijede sva ona predivna svojstva koja su vrijedila u V^3.

Baza nam omogućuje uvođenje koordinatnog sustava u vektorski prostor V nad poljem F. Na taj način se u konačnodimenzionalnom slučaju apstraktni elementi iz V mogu identificirati s uređenim n-torkama skalara iz polja F , što je od izuzetne važnosti za primjene na računalu.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Skup izvodnica

Neka je V vektorski prostor nad poljem F i $Y \subseteq V$. Kažemo da je Y skup izvodnica za prostor V ako je svaki vektor iz V moguće prikazati kao linearnu kombinaciju (konačnog broja) vektora iz skupa Y. Drugim riječima, za svaki vektor $\mathbf{x} \in V$ postoje vektori $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_k \in Y$ i postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in F$ tako da vrijedi

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{y}_i.$$

Ukratko, Y je skup izvodnica za V ako je $\mathcal{L}(Y) = V$.

Kažemo još da je Y skup generatora za prostor V, odnosno da Y razapinje ili generira prostor V.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Svaki vektorski prostor V ima skup izvodnica jer uvijek možemo uzeti $Y = V$.

Međutim, nas zanimaju minimalni skupovi izvodnica, što nas dovodi do pojma baze.

Definicija baze

Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Za uređeni podskup $\mathcal{B} \subseteq V$ kažemo da je baza za prostor V ako vrijedi:

- $\mathcal{B}$ je skup izvodnica za V.
- $\mathcal{B}$ je linearno nezavisni skup u V.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Neposredno iz definicije baze slijedi sljedeća karakterizacija baze.

Propozicija 3.18 (Karakterizacija baze).

Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

1. Y *je baza za* V.
2. Y *je minimalni skup generatora za* V.
3. Y *je maksimalni skup linearno nezavisnih vektora u* V.

Primjer 3.13.

Dokažite da $S = \{(1,1,0),(3,-1,0)\}$ *nije skup izvodnica za realni vektorski prostor* $\mathbb{R}^3$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.13.

Dokažite da $S = \{(1,1,0),(3,-1,0)\}$ *nije skup izvodnica za realni vektorski prostor* $\mathbb{R}^3$.

Rješenje.

Da bismo dokazali da S nije skup izvodnica za $\mathbb{R}^3$, dovoljno je pronaći barem jedan vektor iz $\mathbb{R}^3$ koji se ne može prikazati kao linearna kombinacija vektora iz skupa S. Na primjer, jedan takav vektor je $(0,3,2)$. Naime, iz

$$(0,3,2) = \alpha \cdot (1,1,0) + \beta \cdot (3,-1,0)$$

dobivamo kontradiktorni sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \alpha + 3\beta &= 0 \\ \alpha - \beta &= 3. \\ 0 &= 2 \end{aligned}$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Lako se provjeri da je S linearno nezavisni skup u $\mathbb{R}^3$.

Dakle, S je linearno nezavisni skup u $\mathbb{R}^3$, ali nije skup izvodnica za $\mathbb{R}^3$. Stoga S nije baza za $\mathbb{R}^3$.

Nadalje, $\mathcal{L}(S)$ jednak je xy-ravnini, tj. jedino se vektori u xy-ravnini mogu prikazati na jedinstveni način kao linearna kombinacija vektora iz skupa S. Tu jedinstvenost nam osigurava linearna nezavisnost skupa S.

Što nedostaje skupu S da bi bio baza za $\mathbb{R}^3$? Vektori u skupu S su ekonomično birani, tj. nema suvišnih vektora jer je S linearno nezavisni skup. Međutim, skup S ima premalo nezavisnih vektora da bi bio baza za $\mathbb{R}^3$.

Primjer 3.14.

Dokažite da $S = \{(1,1,0),(3,-1,0),(1,2,0)\}$ *nije skup izvodnica za realni vektorski prostor* $\mathbb{R}^3$.

Primjer 3.14.

Dokažite da $S = \{(1,1,0),(3,-1,0),(1,2,0)\}$ *nije skup izvodnica za realni vektorski prostor* $\mathbb{R}^3$.

Rješenje.

Da bismo dokazali da S nije skup izvodnica za $\mathbb{R}^3$, dovoljno je pronaći barem jedan vektor iz $\mathbb{R}^3$ koji se ne može prikazati kao linearna kombinacija vektora iz skupa S. Na primjer, jedan takav vektor je $(0,3,2)$. Naime, iz

$$(0,3,2) = \alpha \cdot (1,1,0) + \beta \cdot (3,-1,0) + \gamma \cdot (1,2,0)$$

dobivamo kontradiktorni sustav linearnih jednadžbi

$$\alpha + 3\beta + \gamma = 0$$
$$\alpha - \beta + 2\gamma = 3.$$
$$0 = 2$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Lako se provjeri da je S linearno zavisni skup u $\mathbb{R}^3$.

Dakle, S je linearno zavisni skup u $\mathbb{R}^3$ i nije skup izvodnica za $\mathbb{R}^3$. Stoga S nikako ne može biti baza za $\mathbb{R}^3$.

Nadalje, $\mathcal{L}(S)$ jednak je xy-ravnini, tj. jedino se vektori u xy-ravnini mogu prikazati kao linearna kombinacija vektora iz skupa S. U ovom slučaju nemamo jedinstvenost prikaza jer je S linearno zavisni skup.

Što nedostaje skupu S da bi bio baza za $\mathbb{R}^3$? Vektori u skupu S nisu ekonomično birani, tj. ima suvišnih vektora jer je S linearno zavisni skup. Isto tako, skup S ima premalo nezavisnih vektora da bi bio baza za $\mathbb{R}^3$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjeri baza

- $\{(1,2,3),(0,1,-1),(2,0,1)\}$ je jedna baza za $\mathbb{R}^3$.
- Svaki uređeni skup $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ od tri nekomplanarna vektora u V^3 je baza za V^3.
- $\{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$ je jedna baza za $\mathbb{R}^n$. Tu bazu zovemo kanonska baza za $\mathbb{R}^n$. Općenitije, to je također baza za F^n pri čemu je F bilo koje polje.
- $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$ je jedna baza za $\mathcal{P}_n(F,x)$. Tu bazu zovemo kanonska baza za $\mathcal{P}_n(F,x)$.
- $\{1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots\}$ je jedna baza za $\mathcal{P}(F,x)$. Tu bazu zovemo kanonska baza za $\mathcal{P}(F,x)$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

- Za $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ definiramo matricu $E_{ij} = [e_{kl}]$ tipa (m, n) na sljedeći način:

$$e_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } k = i \text{ i } l = j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

  Tada je $\{E_{ij} : i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ jedna baza za $M_{mn}(F)$ koju zovemo kanonska baza za $M_{mn}(F)$.

  Matrica E_{ij} je matrica tipa (m, n) u kojoj se na poziciji (i, j) nalazi jedinica, a na svim ostalim pozicijama se nalaze nule.

- $\{1\}$ je jedna baza za polje F koje promatramo kao vektorski prostor nad samim sobom.

- $\{1, i\}$ je jedna baza za vektorski prostor $\mathbb{C}$ nad poljem realnih brojeva pri čemu je $i = \sqrt{-1}$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.15.

Dokažite da je skup

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

baza za realni vektorski prostor $M_2(\mathbb{R})$. *Tu bazu zovemo kanonska baza za* $M_2(\mathbb{R})$.

Primjer 3.15.

Dokažite da je skup

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

baza za realni vektorski prostor $M_2(\mathbb{R})$. Tu bazu zovemo kanonska baza za $M_2(\mathbb{R})$.

Rješenje.

Skup $\mathcal{B}$ je baza za $M_2(\mathbb{R})$ ako su zadovoljena sljedeća dva uvjeta iz definicije baze:

- $\mathcal{B}$ je skup izvodnica za $M_2(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{B}$ je linearno nezavisni skup u $M_2(\mathbb{R})$.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Dokažimo najprije da je $\mathcal{B}$ linearno nezavisni skup u $M_2(\mathbb{R})$. Iz

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \delta \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \Theta_{M_2(\mathbb{R})}$$

slijedi

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa mora biti $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 0$. Stoga je $\mathcal{B}$ zaista linearno nezavisni skup u $M_2(\mathbb{R})$.

Nadalje, $\mathcal{B}$ je skup izvodnica za $M_2(\mathbb{R})$ jer se svaka matrica iz $M_2(\mathbb{R})$ može prikazati kao linearna kombinacija matrica iz skupa $\mathcal{B}$ na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Egzistencija baze i dimenzija

Teorem 3.1 (Egzistencija baze).

Svaki netrivijalni vektorski prostor ima bazu.

Trivijalni vektorski prostor $V = \{\Theta\}$ nad poljem F se sastoji samo od nulvektora koji je linearno zavisan pa nema bazu. To je jedini takav vektorski prostor nad poljem F koji nema bazu.

Teorem 3.2 (Steinitz).

Svake dvije baze danog vektorskog prostora V su ekvipotentne, tj. imaju isti kardinalni broj.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Dimenzija vektorskog prostora

Dimenzija netrivijalnog vektorskog prostora $V \neq \{\Theta_V\}$ nad poljem F je kardinalni broj neke njegove baze. Dimenzija trivijalnog vektorskog prostora je po definiciji jednaka nuli.

Dimenziju vektorskog prostora V označavamo s $\dim V$, odnosno s $\dim_F V$ kada želimo naglasiti i polje F nad kojim gledamo vektorski prostor.

Napomena.

Zbog Steinitzovog teorema pojam dimenzije vektorskog prostora je dobro definirani pojam.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Konačnodimenzionalni vektorski prostor

Za vektorski prostor V kažemo da je konačnodimenzionalni ako ima barem jedan konačni skup izvodnica, tj. ako je konačne dimenzije. U protivnom kažemo da je vektorski prostor V beskonačnodimenzionalni.

- $\dim V^3 = \dim \mathbb{R}^3 = 3$
- $\dim \mathbb{R}^n = \dim F^n = n$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2,\ \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$
- $\dim \mathcal{P}_n(F, x) = n,\ \dim \mathcal{P}(F, x) = \aleph_0$
- $\dim M_{mn}(F) = mn,\ \dim M_2(\mathbb{R}) = 4$
- $\dim \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = c$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Teorem 3.3 (O nadopuni do baze).

Neka je $S = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq V$ *linearno nezavisni skup vektora u vektorskom prostoru* V *nad poljem* F*. Tada je* S *podskup neke baze prostora* V*.*

Drugim riječima, svaki se linearno nezavisni skup u vektorskom prostoru V može nadopuniti do baze vektorskog prostora V i pritom ta nadopuna nije jedinstvena.

Na primjer, skup $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ je linearno nezavisan u realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ i razapinje xy-ravninu. Ako skupu S dodamo bilo koji vektor koji ne leži u xy-ravnini, dobit ćemo jednu bazu za $\mathbb{R}^3$. Dakle, skup S možemo na beskonačno mnogo načina nadopuniti do baze za $\mathbb{R}^3$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Iz svojstva baze i definicije dimenzije vektorskog prostora lagano slijedi sljedeća vrlo važna tvrdnja.

Korolar 3.3.

Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor. Tada je svaki linearno nezavisni skup u V koji se sastoji od n vektora baza za prostor V. Nadalje, bilo koji skup vektora iz V koji sadrži više od n vektora je linearno zavisan.

Dakle, dimenzija vektorskog prostora nam daje gornju ogradu za kardinalni broj linearno nezavisnog skupa. U konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru svaki njegov linearno nezavisni podskup može imati samo konačno mnogo vektora i broj tih vektora ne smije biti veći od dimenzije vektorskog prostora.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.16.

Napišite jedan podskup od $\mathbb{R}^3$ *koji se sastoji od* 4 *različita vektora i nije skup izvodnica za* $\mathbb{R}^3$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.16.

Napišite jedan podskup od $\mathbb{R}^3$ koji se sastoji od 4 različita vektora i nije skup izvodnica za $\mathbb{R}^3$.

Rješenje.

Kako je $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, svaka baza za $\mathbb{R}^3$ ima tri vektora. Ako želimo podskup od 4 vektora koji neće biti skup izvodnica, tada taj podskup ne smije sadržavati niti jednu bazu od $\mathbb{R}^3$ jer bi u protivnom bio skup izvodnica. Drugim riječima, linearni omotač takvog skupa mora biti potprostor dimenzije najviše 2. Jedan primjer takvog skupa je

$$\{(1,2,0),(3,1,0),(-5,2,0),(1,1,0)\}$$

čiji je linearni omotač xy-ravnina. Još jedan primjer je skup

$$\{(1,1,0),(2,2,0),(-3,-3,0),(5,5,0)\}$$

čiji je linearni omotač pravac kroz ishodište s vektorom smjera $(1,1,0)$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.17.

Napišite jedan podskup od $\mathbb{R}^3$ *koji je skup izvodnica za* $\mathbb{R}^3$*, ali nije baza za* $\mathbb{R}^3$*.*

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.17.

Napišite jedan podskup od $\mathbb{R}^3$ koji je skup izvodnica za $\mathbb{R}^3$, ali nije baza za $\mathbb{R}^3$.

Rješenje.

Kako je $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, svaka baza za $\mathbb{R}^3$ ima tri vektora. Ako želimo skup izvodnica koji nije baza, tada takav skup mora imati barem 4 vektora i unutar sebe mora sadržavati barem jedan podskup koji je baza za $\mathbb{R}^3$. Drugim riječima, odaberemo bilo koju bazu za $\mathbb{R}^3$ i dodamo joj još proizvoljni broj vektora. Dva primjera takvih skupova su skupovi

$$S_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(4,-2,1)\}$$

$$S_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(3,2,-1),(1,1,0),(8,-9,2)\}$$

Teorem 3.4 (Prikaz vektora u bazi).

Neka je V netrivijalni vektorski prostor nad poljem F, a $\mathcal{B} \subseteq V$ neka baza za V. Tada je prikaz svakog vektora iz V u bazi $\mathcal{B}$ jedinstven.

Dokaz.

Dokaz provodimo za konačnodimenzionalne vektorske prostore više iz metodičkih razloga da izbjegnemo "suvišne" tehničke detalje. Za beskonačnodimenzionalne vektorske prostore tvrdnja se dokazuje na sasvim analogni način jer se ionako prikaz vektora u bazi opet svodi na neki konačni podskup vektora baze.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Neka je $\mathcal{B} = \{a_1, \dots, a_n\}$ baza za V i neka je $x \in V$ proizvoljni vektor. Trebamo dokazati dvije stvari:

- egzistenciju prikaza vektora x u bazi $\mathcal{B}$,
- jedinstvenost prikaza vektora x u bazi $\mathcal{B}$.

Egzistencija prikaza. Kako je $\mathcal{B}$ skup izvodnica za V, vektor $x \in V$ se može prikazati kao linearna kombinacija vektora iz $\mathcal{B}$. Time je dokazana egzistencija prikaza vektora u bazi.

Jedinstvenost prikaza. Pretpostavimo da postoje dva prikaza vektora $x \in V$ u bazi $\mathcal{B}$, tj. da je

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \quad \text{i} \quad x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i$$

za neke $\alpha_i, \beta_i \in F, \quad i = 1, 2, \dots, n.$

Tada je

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) a_i = \Theta_V.$$

Kako je $\mathcal{B}$ baza za V, vektori $a_1, \ldots, a_n$ su linearno nezavisni pa mora biti

$$\alpha_i - \beta_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Stoga je $\alpha_i = \beta_i$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$ iz čega zaključujemo da je prikaz vektora u bazi jedinstven. ♡

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Potprostor vektorskog prostora

Potprostor

Neka je V vektorski prostor nad poljem F, a $Y \subseteq V$ neprazni podskup. Kažemo da je Y vektorski potprostor prostora V ako je Y i sam vektorski prostor nad poljem F s obzirom na iste operacije zbrajanja vektora i množenja skalarom koje su već definirane u V. U tom slučaju kratko pišemo $Y < V$.

Svaki netrivijalni vektorski prostor V nad poljem F ima dva trivijalna potprostora:

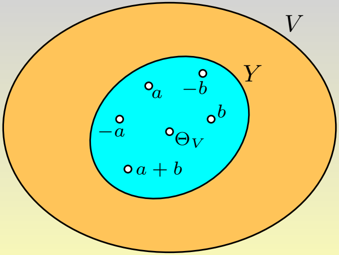
- $Y = \{\Theta_V\}$
- $Y = V$

Da bismo provjerili da li je $Y \subseteq V$ potprostor od V, nije potrebno provjeravati sve aksiome vektorskog prostora. Neki od aksioma vektorskog prostora koji vrijede na skupu V, automatski vrijede i na bilo kojem njegovom nepraznom podskupu Y. Na primjer, ako asocijativnost zbrajanja vektora vrijedi na skupu V, onda je jasno da vrijedi i na svakom njegovom podskupu Y. Isti argument vrijedi za komutativnost zbrajanja vektora kao i za sve aksiome vezane uz množenje vektora skalarom.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Da bismo dokazali da je $Y \subseteq V$ potprostor od V, dovoljno je samo provjeriti sljedeća tri aksioma vektorskog prostora na skupu Y:

- Za svaka dva vektora $a, b \in Y$ treba ispitati da li i njihova suma pripada skupu Y, tj. da li je $a + b \in Y$.
- Treba ispitati da li neutralni element s obzirom na zbrajanje vektora pripada skupu Y, tj. da li je $\Theta_V \in Y$.
- Za svaki vektor $a \in Y$ treba ispitati da li njegov suprotni vektor pripada skupu Y, tj. da li je $-a \in Y$.



Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Umjesto da svaki od spomenuta tri aksioma provjeravamo zasebno, možemo ih sve provjeriti u jednom koraku. O tome govori sljedeća propozicija.

Propozicija 3.19 (Karakterizacija potprostora).

Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Neprazan podskup $Y \subseteq V$ je potprostor od V akko za svaki izbor $a, b \in Y$ i $\alpha, \beta \in F$ je također $\alpha a + \beta b \in Y$.

Ukratko, neprazni podskup $Y \subseteq V$ je potprostor od V ako i samo ako je zatvoren na uzimanje linearnih kombinacija svojih elemenata.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Sjetimo se da je linearni omotač skupa $S \subseteq V$ zatvoren na uzimanje linearnih kombinacija iz čega odmah zaključujemo da je uvijek $\mathcal{L}(S)$ potprostor od V. Zapravo vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 3.20.

Neka je V vektorski prostor nad poljem F, a $S \subseteq V$ bilo koji podskup. Tada je $\mathcal{L}(S)$ najmanji potprostor od V koji sadrži skup S.

Specijalno, za $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k \in V$ je $\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k)$ najmanji potprostor od V koji sadrži vektore $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$.

Nadalje, $\mathcal{L}(S) = S$ ako i samo ako je $S < V$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjeri vektorskih potprostora

- Jednodimenzionalni potprostori od $\mathbb{R}^3$ su pravci kroz ishodište.
- Dvodimenzionalni potprostori od $\mathbb{R}^3$ su ravnine kroz ishodište.
- Uz standardnu identifikaciju

$$\mathbb{R}^{n-1} \ni (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \approx (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n$$

vrijedi

$$\mathbb{R} < \mathbb{R}^2 < \mathbb{R}^3 < \cdots < \mathbb{R}^n < \cdots < \mathbb{R}^\infty$$

- Općenitije, ako je F bilo koje polje, tada je

$$F < F^2 < F^3 < \cdots < F^n < \cdots < F^\infty$$

- Ako je F bilo koje polje, tada je

$$\mathcal{P}_1(F,x) < \mathcal{P}_2(F,x) < \cdots < \mathcal{P}_n(F,x) < \cdots < \mathcal{P}(F,x)$$

Primjer 3.18.

Dokažite da je skup

$$S = \{a + bt + bt^2 + at^3 : a, b \in \mathbb{R}\}$$

potprostor od $\mathcal{P}_4$ *i odredite mu neku bazu i dimenziju.*

Primjer 3.18.

Dokažite da je skup

$$S = \{a + bt + bt^2 + at^3 : a, b \in \mathbb{R}\}$$

potprostor od $\mathcal{P}_4$ i odredite mu neku bazu i dimenziju.

Rješenje.

U skupu S nalaze se simetrični polinomi stupnja najviše 3, tj. polinomi kod kojih su koeficijenti uz potencije t^3 i t^0 jednaki i koeficijenti uz potencije t^2 i t su također jednaki.

Da bismo dokazali da je $S < \mathcal{P}_4$, moramo provjeriti da je S zatvoren na uzimanje linearnih kombinacija svojih elemenata. Drugim riječima, moramo provjeriti da je linearna kombinacija dva simetrična polinoma stupnja najviše 3 ponovo simetrični polinom stupnja najviše 3.

Neka su

$$a_1 + b_1 t + b_1 t^2 + a_1 t^3 \quad \text{i} \quad a_2 + b_2 t + b_2 t^2 + a_2 t^3$$

dva polinoma iz skupa S. Tada za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ njihova linearna kombinacija izgleda

$$\alpha \cdot (a_1 + b_1 t + b_1 t^2 + a_1 t^3) + \beta \cdot (a_2 + b_2 t + b_2 t^2 + a_2 t^3) =$$
$$= (\alpha a_1 + \beta a_2) + (\alpha b_1 + \beta b_2)t + (\alpha b_1 + \beta b_2)t^2 + (\alpha a_1 + \beta a_2)t^3$$

Uočavamo da je linearna kombinacija ponovo simetrični polinom stupnja najviše 3 iz čega zaključujemo da je skup S zatvoren na uzimanje linearnih kombinacija svojih elemenata. Stoga je $S < \mathcal{P}_4$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Odredimo sada neku bazu za S. Neka je $a + bt + bt^2 + at^3$ proizvoljni polinom iz S. Tada je

$$a + bt + bt^2 + at^3 = a \cdot (1 + t^3) + b \cdot (t + t^2)$$

iz čega zaključujemo da je skup $\{1 + t^3, t + t^2\}$ skup izvodnica za S. Kako su polinomi $1 + t^3$ i $t + t^2$ linearno nezavisni, slijedi da je $\mathcal{B}_S = \{1 + t^3, t + t^2\}$ jedna baza za potprostor S. Stoga je $\dim S = 2$.

Vektorski prostori

Grupoid

Polugrupa

Monoid

Grupa

Prsten

Polje

Vektorski prostor

Primjeri vektorskih prostora

Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Linearni omotač skupa

Baza vektorskog prostora

Egzistencija baze i dimenzija

Potprostor

Rang matrice

Koordinatizacija

Transformacija koordinata

Primjer 3.19.

Ispitajte da li je skup $V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det A \geqslant 0\}$ *potprostor od* $M_2(\mathbb{R})$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.19.

Ispitajte da li je skup $V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det A \geqslant 0\}$ *potprostor od* $M_2(\mathbb{R})$.

Rješenje.

Uzmimo matrice

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je $\det C = 2$ i $\det D = 3$, slijedi da su $C, D \in V$.

S druge strane je $C + D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ i $\det(C + D) = -2$ pa $C + D \notin V$. Zaključujemo da skup V nije zatvoren na uzimanje linearnih kombinacija svojih elemenata pa stoga V nije potprostor od $M_2(\mathbb{R})$.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Rang matrice

Rang matrice po stupcima

Neka je F polje i $A \in M_{mn}(F)$. Rang po stupcima matrice A jednak je maksimalnom broju linearno nezavisnih stupaca matrice A koje promatramo kao vektore iz F^m.

Rang matrice po recima

Neka je F polje i $A \in M_{mn}(F)$. Rang po recima matrice A jednak je maksimalnom broju linearno nezavisnih redaka matrice A koje promatramo kao vektore iz F^n.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Teorem 3.5.

Za svaku matricu $A \in M_{mn}(F)$ rang po stupcima jednak je rangu po recima.

Zahvaljujući gornjem teoremu možemo kratko govoriti samo o rangu matrice jer je svejedno da li ga gledamo po recima ili stupcima. Rang matrice A označavamo s $r(A)$.

Napomena

Ako je $A \in M_{mn}(F)$, tada je $r(A) \leqslant \min\{m, n\}$. Ukoliko je $r(A) = \min\{m, n\}$, tada kažemo da je matrica A maksimalnog ranga.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Minora reda k

Neka je F polje, $A \in M_{mn}(F)$ i $k \leqslant \min\{m,n\}$. Minora reda k matrice A je determinanta bilo koje kvadratne podmatrice od A koja je reda k, tj. koja se iz matrice A dobiva uklanjanjem $m-k$ redaka i $n-k$ stupaca.

Teorem 3.6.

Matrica $A \in M_{mn}(F)$ ima rang r akko postoji barem jedna minora reda r te matrice koja je različita od nule, dok su sve ostale minore reda većeg od r jednake nula.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Nad recima i stupcima matrice A imamo tri tipa elementarnih transformacija:

- Zamjena dvaju redaka (stupaca) matrice A.
- Množenje nekog retka (stupca) matrice A skalarom različitim od nule.
- Dodavanje nekog retka (stupca) matrice A nekom drugom retku (stupcu) te matrice.

Propozicija 3.21.

Elementarne transformacije čuvaju rang matrice.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Kanonska matrica ranga r tipa (m, n) je matrica D_r oblika

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \overbrace{1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}^{r} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 \quad 1 \quad \cdots \quad 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{n}$$

(prvih r redaka označeno s r, ukupno m redaka)

Teorem 3.7.

Matrica $A \in M_{mn}(F)$ ima rang r akko se elementarnim transformacijama nad recima i stupcima može svesti na kanonsku matricu $D_r \in M_{mn}(F)$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Ekvivalentne matrice

Za dvije matrice $A, B \in M_{mn}(F)$ kažemo da su ekvivalentne i pišemo $A \sim B$ ako je $r(A) = r(B)$.

Prethodni teorem zapravo govori da je svaka matrica $A \in M_{mn}(F)$ ranga r ekvivalentna s kanonskom matricom $D_r \in M_{mn}(F)$ koja je ranga r. Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu $M_{mn}(F)$, a matrica D_r je tipični reprezentant klase svih matrica iz $M_{mn}(F)$ koje imaju rang r. Pritom je $0 \leqslant r \leqslant \min\{m, n\}$, tj. relacija $\sim$ particionira skup $M_{mn}(F)$ na ukupno $\min\{m, n\} + 1$ klasa.

Zadatak 3.15.

Od čega se sastoji klasa koja je reprezentirana matricom $D_0 \in M_{mn}(F)$, tj. klasa koja je reprezentirana nulmatricom O tipa (m, n)? Od čega se sastoji klasa koja je reprezentirana matricom $D_n \in M_n(F)$, tj. klasa koja je reprezentirana jediničnom matricom I reda n?

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.20.

Odredite rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.20.

Odredite rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

Rang matrice A odredit ćemo tako da matricu A elementarnim transformacijama nad recima i stupcima svedemo na kanonsku matricu D_r iz koje ćemo lako očitati rang, tj. odrediti r. Nakon konačno mnogo koraka dobivamo da je $A \sim D_2$, tj. $r(A) = 2$. Na sljedećem slajdu prikazan je detaljni postupak svođenja matrice A na kanonsku matricu D_2. Napominjemo da navedeni postupak nije jedinstven, tj. međukoraci tog postupka mogu se razlikovati, ali konačni rezultat jest jedinstven.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

$$
\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} /\cdot 2 \quad /\cdot(-3) \quad /\cdot(-1) \\ + \\ + \\ + \end{array}
\sim
\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \\ /\cdot \frac{1}{10} \\ /\cdot \frac{-1}{8} \\ /\cdot \frac{1}{3} \end{array}
\sim
$$

$$
\sim
\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} + \\ /\cdot(-3) \quad /\cdot(-1) \quad /\cdot(-1) \\ + \\ + \end{array}
\sim
\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} /\cdot \frac{1}{2} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\sim
$$

$$
\sim
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} /\cdot(-1) & & + \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
\sim
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & /\cdot(-1) & + \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
\sim
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Rang matrice $A \in M_{mn}(F)$ možemo odrediti na još jedan kraći način, svođenjem matrice A na neku njezinu retčanu ešalon formu.

Kako bismo mogli na jednostavni način definirati retčanu ešalon formu matrice A, uvodimo sljedeće pojmove.

Nulredak matrice A je svaki onaj redak matrice A čiji su svi elementi jednaki nula.

Nenul redak matrice A je svaki onaj redak matrice A koji ima barem jedan element različit od nule.

Gledano s lijeva na desno, prvi element različit od nule u nekom retku matrice A zovemo **pivot** tog retka. Nulreci nemaju pivota.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Retčana ešalon forma matrice

Kažemo da je matrica $E \in M_{mn}(F)$ u retčanoj ešalon formi ako vrijede sljedeći uvjeti:

- Svaki nulredak matrice E nalazi se ispod svakog njezinog nenul retka. Kratko rečeno, svi nulreci matrice E, ukoliko postoje, nalaze se na dnu matrice.
- Pivot svakog nenul retka matrice E mora se nalaziti strogo desno od pivota u retku iznad njega.

Iz definicije retčane ešalon forme matrice možemo zaključiti da su svi elementi nekog stupca koji se nalaze ispod pivota nekog retka jednaki nula. Na primjer, matrica E je u retčanoj ešalon formi.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Propozicija 3.22.

Svaka se matrica $A \in M_{mn}(F)$ može elementarnim transformacijama nad recima svesti na neku matricu $E \in M_{mn}(F)$ koja je u retčanoj ešalon formi.

Matricu E tada zovemo retčana ešalon forma matrice A. Uočite da matrica E nije jedinstvena. Naime, ako je matrica E retčana ešalon forma matrice A, tada su i matrice kE retčane ešalon forme matrice A za svaki $k \in F \setminus \{0\}$. Isto tako, ako samo jedan redak matrice E pomnožimo skalarom različitim od nule, dobivena matrica je ponovo retčana ešalon forma matrice A.

Iz gornje propozicije slijedi da matrica $A \in M_{mn}(F)$ i svaka njezina retčana ešalon forma $E \in M_{mn}(F)$ imaju isti rang. Rang matrice koja je u retčanoj ešalon formi lako se računa jer je taj rang jednak ukupnom broju nenul redaka matrice E.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Računanje ranga matrice preko retčane ešalon forme ima još jednu prednost. Naime, znamo da je rang matrice jednak maksimalnom broju linearno nezavisnih redaka, odnosno maksimalnom broju linearno nezavisnih stupaca matrice. Ako je rang matrice $A \in M_{mn}(F)$ jednak r, tada znamo sljedeće:

- Reci matrice A razapinju potprostor od F^n koji ima dimenziju jednaku r.
- Stupci matrice A razapinju potprostor od F^m koji ima dimenziju jednaku r.

Nas zanima kako da odredimo neke baze za navedene potprostore. Drugim riječima, zanima nas neki maksimalni linearno nezavisni skup redaka matrice A i zanima nas neki maksimalni linearno nezavisni skup stupaca matrice A. U rješavanju tih problema pomaže nam retčana ešalon forma matrice A.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Računanje ranga matrice preko retčane ešalon forme

- Zadana je matrica $A \in M_{mn}(F)$.
- Pronađemo neku retčanu ešalon formu $E \in M_{mn}(F)$ matrice $A \in M_{mn}(F)$.
- Rang matrice A jednak je ukupnom broju nenul redaka matrice E.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Određivanje jednog maksimalnog linearno nezavisnog skupa stupaca matrice

- Zadana je matrica $A \in M_{mn}(F)$.
- Pronađemo neku retčanu ešalon formu $E \in M_{mn}(F)$ matrice $A \in M_{mn}(F)$.
- Zaokružimo pivote svih nenul redaka matrice E.
- Pogledamo sve stupce u matrici E koji sadrže zaokružene pivote.
- Iz početne matrice A odaberemo sve stupce koji se nalaze na onim pozicijama na kojima se nalaze stupci u matrici E koji sadrže zaokružene pivote.
- Navedeni stupci matrice A predstavljaju jedan maksimalni linearno nezavisni skup stupaca matrice A, tj. predstavljaju jednu bazu za potprostor od F^m koji je razapet sa stupcima matrice A.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Određivanje jednog maksimalnog linearno nezavisnog skupa redaka matrice

- Zadana je matrica $A \in M_{mn}(F)$.
- Pronađemo neku retčanu ešalon formu $E \in M_{nm}(F)$ matrice $A^T \in M_{nm}(F)$.
- Zaokružimo pivote svih nenul redaka matrice E.
- Pogledamo sve stupce u matrici E koji sadrže zaokružene pivote.
- Iz matrice A^T odaberemo sve stupce koji se nalaze na onim pozicijama na kojima se nalaze stupci u matrici E koji sadrže zaokružene pivote.
- Navedeni stupci matrice A^T predstavljaju jedan maksimalni linearno nezavisni skup redaka matrice A, tj. predstavljaju jednu bazu za potprostor od F^n koji je razapet s recima matrice A.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.21.

Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

- a) *Odredite rang matrice* A.
- b) *Odredite dimenziju i jednu bazu potprostora od* $\mathbb{R}^4$ *koji je razapet sa stupcima matrice* A.
- c) *Odredite dimenziju i jednu bazu potprostora od* $\mathbb{R}^3$ *koji je razapet sa recima matrice* A.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Rješenje.

- Tražimo neku retčanu ešalon formu matrice A koristeći samo elementarne transformacije nad recima.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} /\cdot 2 \quad /\cdot(-3) \quad /\cdot(-1) \\ + \\ + \\ + \end{array} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ /\cdot \frac{1}{10} \\ /\cdot \frac{-1}{8} \\ /\cdot \frac{1}{3} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ /\cdot(-1) \quad /\cdot(-1) \\ + \\ + \end{array} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kako retčana ešalon forma matrice A ima ukupno dva nenul retka, zaključujemo da je $r(A) = 2$.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

- Pogledamo matricu A i njezinu retčanu ešalon formu E koju smo pronašli u prethodnom dijelu zadatka.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

U matrici E zaokružimo pivote svih nenul redaka. Nakon toga pogledamo u matrici E stupce koji imaju zaokružene pivote. To su prvi i drugi stupac. Stoga prvi i drugi stupac matrice A čine jednu bazu za potprostor od $\mathbb{R}^4$ koji je razapet sa stupcima matrice A. Dakle, jedna baza za taj potprostor je

$$\mathcal{B}_S = \{(2, -4, 6, 2), (3, 4, 1, 6)\}$$

pa je dimenzija tog potprostora jednaka 2.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

- Odredimo retčanu ešalon formu matrice A^T koristeći samo elementarne transformacije nad recima.

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix} /\cdot\frac{1}{2} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} /\cdot(-3) \quad /\cdot(-5) \\ + \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & -8 & 3 \\ 0 & 10 & -8 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ /\cdot(-1) \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Sada pogledamo matricu A^T i njezinu retčanu ešalon formu $\widetilde{E}$ koju smo pronašli.

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{E} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

U matrici $\widetilde{E}$ zaokružimo pivote svih nenul redaka. Nakon toga pogledamo u matrici $\widetilde{E}$ stupce koji imaju zaokružene pivote. To su prvi i drugi stupac. Stoga prvi i drugi stupac matrice A^T čine jednu bazu za potprostor od $\mathbb{R}^3$ koji je razapet sa recima matrice A. Dakle, jedna baza za taj potprostor je

$$\mathcal{B}_R = \{(2,3,5), (-4,4,0)\}$$

pa je dimenzija tog potprostora jednaka 2.

Napomena.

Ukoliko ne zahtijevamo da se baza za potprostor koji je razapet s recima matrice A mora sastojati od redaka matrice A, možemo jednu bazu za taj potprostor dobiti iz retčane ešalon forme matrice A. Ne moramo tražiti u tom slučaju retčanu ešalon formu matrice A^T. Naime, kako smo radili elementarne transformacije nad recima, u svakom koraku smo dobili jednu novu matricu čiji reci razapinju isti potprostor kao i reci početne matrice A. Stoga svi nenul reci u retčanoj ešalon formi matrice A zapravo čine jednu bazu za potprostor koji razapinju reci početne matrice A. Ta baza se općenito ne sastoji samo od redaka početne matrice A.

Pazite, stupci retčane ešalon forme matrice A, općenito ne razapinju isti potprostor kao i stupci početne matrice A. Za njih vrijedi jedno drugo svojstvo: neki stupci u retčanoj ešalon formi matrice A su linearno nezavisni akko su njima odgovarajući stupci u početnoj matrici A linearno nezavisni.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Konkretno, vratimo se na naš primjer matrice A i njezine retčane ešalon forme E koju smo pronašli.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jedna baza za potprostor od $\mathbb{R}^3$ koji je razapet sa recima matrice A sastoji se od nenul redaka matrice E, tj. možemo uzeti

$$\mathcal{B}_R = \{(2,3,5), (0,1,1)\}.$$

Vidimo da se ta baza ne sastoji samo od redaka matrice A, ali na taj način smo izbjegli traženje retčane ešalon forme matrice A^T. Jasno, ukoliko želimo da se u bazi nalaze samo reci matrice A, onda moramo tražiti retčanu ešalon formu matrice A^T kako smo to ranije i napravili.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Reducirana retčana ešalon forma matrice

Kažemo da je matrica $E \in M_{mn}(F)$ u reduciranoj retčanoj ešalon formi ako vrijede sljedeći uvjeti:

- Svaki nulredak matrice E nalazi se ispod svakog njezinog nenul retka. Kratko rečeno, svi nulreci matrice E, ukoliko postoje, nalaze se na dnu matrice.
- Pivot svakog nenul retka matrice E mora se nalaziti strogo desno od pivota u retku iznad njega.
- Svaki pivot u nenul retku jednak je 1 i jedini je element različit od nule u stupcu u kojemu se nalazi.

Na primjer, matrica E je u reduciranoj retčanoj ešalon formi.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Propozicija 3.23.

Svaka se matrica $A \in M_{mn}(F)$ može elementarnim transformacijama nad recima svesti na jedinstvenu matricu $E \in M_{mn}(F)$ koja je u reduciranoj retčanoj ešalon formi.

Matricu E tada zovemo reducirana retčana ešalon forma matrice A. Za razliku od retčane ešalon forme matrice A, reducirana retčana ešalon forma matrice A je jedinstvena i ne ovisi o međukoracima algoritma kojim ju tražimo.

Iz gornje propozicije slijedi da matrica $A \in M_{mn}(F)$ i njezina reducirana retčana ešalon forma $E \in M_{mn}(F)$ imaju isti rang. Rang matrice koja je u reduciranoj retčanoj ešalon formi lako se računa jer je taj rang jednak ukupnom broju nenul redaka matrice E.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Napomena.

Reducirana retčana ešalon forma matrice A može se dobiti iz neke retčane ešalon forme matrice A na sljedeći način:

- Svaki nenul redak u retčanoj ešalon formi matrice A pomnožimo onim skalarom tako da njegov pivot postane jednak 1.
- Nakon toga sa svakim pivotom pojedinog retka poništimo sve preostale nenul elemente u stupcu u kojemu se nalazi promatrani pivot.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Napomena.

Preko reducirane retčane ešalon forme matrice A možemo računati rang matrice, odrediti neki maksimalni linearno nezavisni skup stupaca matrice i neki maksimalni linearno nezavisni skup redaka matrice na potpuno isti način kako je to opisano preko retčane ešalon forme matrice A.

Iako retčana ešalon forma matrice A nije jedinstvena, ovdje smo joj dali prednost iz razloga što se ručnim računanjem u općenitom slučaju brže i jednostavnije nađe, tj. potreban je manji broj operacija i ne moramo trošiti vrijeme na poništavanje elemenata na mjestima gdje to nije nužno potrebno. Nadalje, preko retčane ešalon forme matrice A jednako lagano rješavamo gore spomenute probleme kao i preko reducirane retčane ešalon forme matrice A.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Koordinatizacija vektorskog prostora

Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem F, a $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ odabrana baza za V. Bazu $\mathcal{B}$ zovemo koordinatna baza ili koordinatni sustav u prostoru V.

Svaki vektor $a \in V$ ima jednoznačni prikaz u bazi $\mathcal{B}$.

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

Koeficijente $\alpha_i \in F$ zovemo koordinatama vektora a u bazi $\mathcal{B}$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Nadalje, uređenu n-torku

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \text{kraće} = (\alpha_i)$$

zovemo koordinatnim slogom vektora a u bazi $\mathcal{B}$, a matricu

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \text{kraće} = [\alpha_i]$$

zovemo koordinatnom matricom vektora a u bazi $\mathcal{B}$.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Neka je

$$k : V \to F^n$$

preslikavanje definirano s

$$k(a) = (\alpha_i).$$

Neka je

$$h : V \to M_{n1}(F)$$

preslikavanje definirano s

$$h(a) = [\alpha_i].$$

Svako od preslikavanja k i h zovemo koordinatizacija vektorskog prostora V s obzirom na odabranu bazu $\mathcal{B}$.

Propozicija 3.24.

Preslikavanja k i h imaju sljedeća svojstva:

- k *i* h *su bijekcije*
- $k(a+b) = k(a) + k(b), \quad h(a+b) = h(a) + h(b)$
- $k(\alpha a) = \alpha k(a), \quad h(\alpha a) = \alpha h(a)$

za sve $a, b \in V$ *i za svaki* $\alpha \in F$.

Preslikavanja k i h su bijekcije upravo zbog toga što se svaki vektor može na jedinstveni način prikazati u odabranoj bazi.

Nadalje, ako je $a = (\alpha_i)$, $b = (\beta_i)$, tada je

$$a + b = (\alpha_i + \beta_i), \quad \alpha a = (\alpha\alpha_i).$$

Isto tako, ako je $a = [\alpha_i]$, $b = [\beta_i]$, tada je

$$a + b = [\alpha_i + \beta_i], \quad \alpha a = [\alpha\alpha_i].$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Napomena.

Preko preslikavanja k i h vršimo identifikacije

$$a = k(a), \quad a = h(a)$$

i pišemo kratko

$$a = (\alpha_i), \quad a = [\alpha_i].$$

Drugim riječima, uz odabranu bazu $\mathcal{B}$ svaki vektor iz n-dimenzionalnog vektorskog prostora poistovjećujemo s uređenom n-torkom skalara iz polja F. Pritom ove identifikacije ovise o odabranoj bazi jer u različitim bazama jedan te isti vektor ima općenito različite prikaze.

Na primjer, neka su

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{(1,1,0),(0,1,3),(1,1,1)\}$$

dvije baze za realni vektorski prostor $\mathbb{R}^3$ i $a = (3,5,10)$ jedan vektor iz promatranog vektorskog prostora. U kanonskoj bazi $\mathcal{B}_1$ vektor a ima prikaz

$$a = 3 \cdot (1,0,0) + 5 \cdot (0,1,0) + 10 \cdot (0,0,1)$$

pa vektor a poistovjećujemo s uređenom trojkom $(3,5,10)$ s obzirom na bazu $\mathcal{B}_1$. U bazi $\mathcal{B}_2$ vektor a ima prikaz

$$a = -1 \cdot (1,1,0) + 2 \cdot (0,1,3) + 4 \cdot (1,1,1)$$

pa vektor a poistovjećujemo s uređenom trojkom $(-1,2,4)$ s obzirom na bazu $\mathcal{B}_2$.

Drugim riječima, vektor $a = (3, 5, 10)$ u koordinatnom sustavu $\mathcal{B}_1$ ima koordinate $(3, 5, 10)$, a u koordinatnom sustavu $\mathcal{B}_2$ ima koordinate $(-1, 2, 4)$.

U jednom i drugom slučaju pišemo $a = (3, 5, 10)$ i $a = (-1, 2, 4)$ što može dovesti do lagane zabune. Naime, možemo se pitati kako uređene trojke $(3, 5, 10)$ i $(-1, 2, 4)$ mogu predstavljati isti vektor kad im odgovarajuće komponente nisu jednake. Međutim, moramo imati na umu da te uređene trojke predstavljaju koordinate istog vektora, ali s obzirom na različite baze. U različitim bazama vektor ima općenito različite koordinate. U ovom slučaju uređena trojka skalara $(-1, 2, 4)$ ne predstavlja vektor

$$-1 \cdot (1, 0, 0) + 2 \cdot (0, 1, 0) + 4 \cdot (0, 0, 1) = (-1, 2, 4),$$

nego predstavlja vektor

$$-1 \cdot (1, 1, 0) + 2 \cdot (0, 1, 3) + 4 \cdot (1, 1, 1) = (3, 5, 10).$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Na ovom jednostavnom primjeru možemo vidjeti koliko je važno znati u kojoj bazi radimo jer ako zaboravimo bazu, nećemo moći "dešifrirati" koji vektor iz vektorskog prostora V predstavlja uređena n-torka skalara iz polja F. "Dešifriranje" se vrši tako da pojedinu koordinatu množimo s odgovarajućim vektorom iz baze i sve dobivene rezultate zbrojimo na način kako smo to napravili s uređenom trojkom $(-1, 2, 4)$ i bazom $\mathcal{B}_2$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Neka je $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ uređeni skup vektora u vektorskom prostoru V dimenzije n. Neka su

$$x_i = \left(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(n)}\right), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

koordinate tih vektora u odabranoj bazi $\mathcal{B}$. Skupu S tada pridružujemo matricu

$$M(S) = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_k^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_k^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \cdots & x_k^{(n)} \end{bmatrix}$$

tipa (n, k) kojoj se stupci podudaraju s koordinatama vektora $x_1, x_2, \dots, x_k$ u bazi $\mathcal{B}$. Matricu $M(S)$ zovemo matrica skupa vektora S s obzirom na bazu $\mathcal{B}$.

Primjer 3.22.

Odredite matricu skupa $S = \{t^3 + 2t^2 - 5t + 1,\, t + 2,\, t^2 + 3\}$ *u kanonskoj bazi vektorskog prostora* $\mathcal{P}_4$.

Vektorski prostori

Grupoid

Polugrupa

Monoid

Grupa

Prsten

Polje

Vektorski prostor

Primjeri vektorskih prostora

Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Linearni omotač skupa

Baza vektorskog prostora

Egzistencija baze i dimenzija

Potprostor

Rang matrice

Koordinatizacija

Transformacija koordinata

Primjer 3.22.

Odredite matricu skupa $S = \{t^3 + 2t^2 - 5t + 1,\, t + 2,\, t^2 + 3\}$ *u kanonskoj bazi vektorskog prostora* $\mathcal{P}_4$.

Rješenje.

Kanonska baza za $\mathcal{P}_4$ je $\mathcal{B}_{\mathrm{kan}} = \{1, t, t^2, t^3\}$. Polinomi iz skupa S u kanonskoj bazi imaju sljedeće koordinate.

$$\begin{aligned} t^3 + 2t^2 - 5t + 1 &= (1, -5, 2, 1) \\ t + 2 &= (2, 1, 0, 0) \\ t^2 + 3 &= (3, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

Stoga matrica skupa S u kanonskoj bazi izgleda

$$M(S) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primjer 3.23.

Odredite matricu skupa $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \right\}$ *u kanonskoj bazi vektorskog prostora* $M_2(\mathbb{R})$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.23.

Odredite matricu skupa $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \right\}$ *u kanonskoj bazi vektorskog prostora* $M_2(\mathbb{R})$.

Rješenje.

Kanonska baza za $M_2(\mathbb{R})$ je $\mathcal{B}_{\text{kan}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Matrice iz skupa S u kanonskoj bazi imaju sljedeće koordinate.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = (2, 1, -3, 4)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = (0, 5, 0, -6)$$

Stoga matrica skupa S u kanonskoj bazi izgleda

$$M(S) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \\ -3 & 0 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Dimenzija skupa

Neka je V vektorski prostor nad poljem F, a $S \subseteq V$ proizvoljni podskup. Dimenzija skupa S jednaka je maksimalnom broju linearno nezavisnih vektora iz skupa S. Drugim riječima, dimenzija skupa S jednaka je dimenziji njegovog linearnog omotača $\mathcal{L}(S)$.

Propozicija 3.25.

Neka je V vektorski prostor nad poljem F, a $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ konačni podskup od V. Neka je $M(S)$ matrica skupa S s obzirom na neku bazu od V. Tada je dimenzija skupa S jednaka rangu matrice $M(S)$.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Korolar 3.4.

Neka je V vektorski prostor nad poljem F, a $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ konačni podskup od V. Neka je $M(S)$ matrica skupa S s obzirom na neku bazu od V. Skup S je linearno nezavisan akko je rang matrice $M(S)$ jednak k.

Korolar 3.5.

Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem F, a $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ podskup od V s n elemenata. Neka je $M(S)$ matrica skupa S s obzirom na neku bazu od V. Tada je skup S baza za V akko $\det M(S) \neq 0$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.24.

Zadan je skup

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3 & -6\\ -9 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7 & 1\\ 4 & -3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}9 & 5\\ 10 & -5\end{bmatrix}\right\}$$

u realnom vektorskom prostoru $M_2(\mathbb{R})$. *Odredite dimenziju i jednu bazu za potprostor od* $M_2(\mathbb{R})$ *koji je razapet s vektorima iz skupa* S.

Primjer 3.24.

Zadan je skup

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 10 & -5 \end{bmatrix} \right\}$$

u realnom vektorskom prostoru $M_2(\mathbb{R})$. Odredite dimenziju i jednu bazu za potprostor od $M_2(\mathbb{R})$ koji je razapet s vektorima iz skupa S.

Rješenje.

1. način: ako želimo bazu koja će se sastojati od vektora iz S.

Odaberemo kanonsku bazu za $M_2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

i pronađemo matricu $M(S)$ skupa S u bazi $\mathcal{B}$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Koordinate vektora iz skupa S u bazi $\mathcal{B}$ su

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = (1, 2, 3, -1)$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -9 & 3 \end{bmatrix} = (-3, -6, -9, 3)$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = (7, 1, 4, -3)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = (0, 1, 1, -1)$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 10 & -5 \end{bmatrix} = (9, 5, 10, -5)$$

pa je

$$M(S) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 0 & 9 \\ 2 & -6 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & -9 & 4 & 1 & 10 \\ -1 & 3 & -3 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Sada pronađemo neku retčanu ešalon formu matrice $M(S)$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

$$
\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 0 & 9 \\ 2 & -6 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & -9 & 4 & 1 & 10 \\ -1 & 3 & -3 & -1 & -5 \end{bmatrix}
\begin{array}{lll} /\cdot(-2) & /\cdot(-3) & /\cdot 1 \\ + & & \\ & + & \\ & & + \end{array}
\sim
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -13 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & -17 & 1 & -17 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -17 & 1 & -17 \\ 0 & 0 & -13 & 1 & -13 \end{bmatrix}
\begin{array}{ll} & \\ /\cdot \frac{17}{4} & /\cdot \frac{13}{4} \\ + & \\ & + \end{array}
\sim
$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ /\cdot \frac{-4}{13} \\ /\cdot \frac{-4}{9} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ /\cdot(-1) \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pogledamo matricu $M(S)$ i njezinu retčanu ešalon formu.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 0 & 9 \\ 2 & -6 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & -9 & 4 & 1 & 10 \\ -1 & 3 & -3 & -1 & -5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

U retčanoj ešalon formi zaokružimo pivote svih nenul redaka i pogledamo stupce u kojima se nalaze zaokruženi pivoti. To su prvi, treći i četvrti stupac. Sada iz matrice $M(S)$ uzmemo prvi, treći i četvrti stupac. To su uređene četvorke

$$(1,2,3,-1),\ (7,1,4,-3),\ (0,1,1,-1)$$

koje predstavljaju matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Stoga je jedna baza za potprostor razapet vektorima iz skupa S skup

$$\mathcal{B}_{\mathcal{L}(S)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Taj potprostor je zapravo jednak najmanjem potprostoru koji sadrži skup S, tj. jednak je $\mathcal{L}(S)$. Nadalje, $\dim \mathcal{L}(S) = 3$.

Napomena.

Pazite, stupci u retčanoj ešalon formi matrice $M(S)$ koji sadrže zaokružene pivote općenito ne pripadaju potprostoru $\mathcal{L}(S)$, tj. u ovom slučaju pripadne matrice koje oni predstavljaju nisu nužno elementi iz $\mathcal{L}(S)$. Retčana ešalon forma nam samo pomaže da pomoću nje odaberemo "prave" stupce iz početne matrice, dok njezini stupci nisu u nekoj vezi s potprostorom $\mathcal{L}(S)$. Retčana ešalon forma matrice čuva linearnu nezavisnost stupaca u početnoj matrici. Drugim riječima, neki stupci u retčanoj ešalon formi matrice su linearno nezavisni akko su njima odgovarajući stupci u početnoj matrici također linearno nezavisni.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

2. način: ako želimo "kanonsku" bazu za $\mathcal{L}(S)$, tj. bazu u kojoj će vektori imati nule na što je moguće više mjesta.

Vektore iz skupa S prikažemo u kanonskoj bazi prostora $M_2(\mathbb{R})$, ali njihove koordinate smjestimo u retke jedne matrice. Nad dobivenom matricom provedemo Gaussov postupak na način kako to radimo kod rješavanja sustava linearnih jednadžbi. Na kraju u zadnjoj matrici svi nenul reci predstavljaju jednu "kanonsku" bazu za $\mathcal{L}(S)$. U našem slučaju Gaussov postupak radimo na matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & -6 & -9 & 3 \\ 7 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & 10 & -5 \end{bmatrix}.$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & -6 & -9 & 3 \\ 7 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & 10 & -5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} /\cdot 3 \quad /\cdot(-7) \quad /\cdot(-9) \\ + \\ + \\ \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & -17 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -13 & -17 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} + \\ \\ + \\ /\cdot 13 \quad /\cdot 13 \quad /\cdot(-2) \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -9 \end{bmatrix} \begin{matrix} /\cdot 4 \\ \\ \\ /\cdot 4 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -9 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \\ /\cdot 1 \quad /\cdot 1 \quad /\cdot(-1) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -9 \\ 0 & 4 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nenul reci u zadnjoj matrici su uređene četvorke

$$(4,0,0,-5),\ (0,0,-4,-9),\ (0,4,0,-13)$$

koje predstavljaju matrice

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & -9 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -13 \end{bmatrix}.$$

Stoga je jedna kanonska baza za $\mathcal{L}(S)$ skup

$$\mathcal{B}^{\text{kan}}_{\mathcal{L}(S)} = \left\{ \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -13 \end{bmatrix} \right\}$$

pa je $\dim \mathcal{L}(S) = 3$.

Napomena.

U drugom načinu smo vektore iz skupa S, tj. njihove koordinate s obzirom na kanonsku bazu, smjestili u retke jedne matrice. Gaussovim postupkom nad tom matricom radili smo zapravo linearne kombinacije vektora iz skupa S. Zbog toga svi reci u svakoj novodobivenoj matrici jesu vektori koji pripadaju potprostoru $\mathcal{L}(S)$ jer je svaki potprostor zatvoren na uzimanje linearnih kombinacija svojih elemenata. U zadnjoj matrici zapravo dobivamo minimalni broj vektora koji razapinju potprostor $\mathcal{L}(S)$, tj. dobivamo jednu bazu za $\mathcal{L}(S)$ čiji vektori imaju nule na što je moguće više mjesta.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.25.

U realnom vektorskom prostoru $\mathcal{P}_4$ *zadani su polinomi*

$$p(t) = t^3 + t^2 + t, \;\; q(t) = t^3 - t + 1, \;\; r(t) = 2t^3 - t^2 + t - 2.$$

- a) *Ispitajte linearnu nezavisnost polinoma* p, q *i* r.
- b) *Može li se polinom* $f(t) = t^3 + 3t^2 + 3$ *prikazati kao linearna kombinacija polinoma* p, q *i* r*?*
- c) *Može li se polinom* $g(t) = t^3 + 3t^2 + t + 3$ *prikazati kao linearna kombinacija polinoma* p, q *i* r*?*

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Rješenje.

Pronađemo najprije matricu skupa $S = \{p, q, r, f, g\}$ zadanih polinoma u kanonskoj bazi prostora $\mathcal{P}_4$. Kako u kanonskoj bazi $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ zadani polinomi imaju koordinate

$$
\begin{aligned}
p(t) &= (0, 1, 1, 1) & f(t) &= (3, 0, 3, 1)\\
q(t) &= (1, -1, 0, 1) & g(t) &= (3, 1, 3, 1)\\
r(t) &= (-2, 1, -1, 2) & &
\end{aligned}
$$

slijedi da je

$$
M(S) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Sada tražimo retčanu ešalon formu matrice $M(S)$.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} /\cdot(-1) \quad /\cdot(-1) \\ \\ + \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ /\cdot(-1) \quad /\cdot(-2) \\ + \\ + \end{array} \sim$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Sada pogledamo matricu $M(S)$ i njezinu retčanu ešalon formu u kojoj zaokružimo pivote svih nenul redaka.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Na temelju dobivene retčane ešalon forme matrice $M(S)$ imamo sljedeći niz zaključaka.

- Svi stupci u retčanoj ešalon formi matrice $M(S)$ koji sadrže zaokruženi pivot su međusobno linearno nezavisni. To su prvi, drugi, treći i peti stupac. Isti odnos tada vrijedi za pripadne stupce u početnoj matrici $M(S)$.
- Polinomi p, q i r su linearno nezavisni jer njima odgovaraju prva tri stupca u matrici $M(S)$ koji su linearno nezavisni iz gore navedenog razloga.
- Polinomi p, q, r i g su također linearno nezavisni jer su njihovi pripadni stupci u matrici $M(S)$ linearno nezavisni. Stoga se polinom g ne može prikazati kao linearna kombinacija polinoma p, q i r.
- Polinom f kojemu odgovara četvrti stupac ne sadrži zaokruženi pivot u retčanoj ešalon formi matrice $M(S)$, što je znak da se taj stupac može prikazati kao linearna kombinacija prethodnih stupaca. Drugim riječima, polinom f se može prikazati kao linearna kombinacija polinoma p, q i r.

Transformacija koordinata

Neka su $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ dvije koordinatne baze vektorskog prostora V nad poljem F. Neka su

$$X_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad X_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{bmatrix}$$

koordinatne matrice vektora $a \in V$ u bazi $\mathcal{B}_1$ odnosno $\mathcal{B}_2$.

Pitamo se u kakvom su odnosu matrice $X_{\mathcal{B}_1}$ i $X_{\mathcal{B}_2}$?

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Transformacija koordinata

Neka su $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ dvije koordinatne baze vektorskog prostora V nad poljem F. Neka su

$$X_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad X_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{bmatrix}$$

koordinatne matrice vektora $a \in V$ u bazi $\mathcal{B}_1$ odnosno $\mathcal{B}_2$.

Pitamo se u kakvom su odnosu matrice $X_{\mathcal{B}_1}$ i $X_{\mathcal{B}_2}$?

Kako bismo lakše shvatili odgovor na ovo pitanje u općenitom slučaju, pogledajmo prvo nekoliko jednostavnih primjera u realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Neka su

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0),(0,1)\} \quad \text{i} \quad \mathcal{B}_2 = \{(1,2),(-3,4)\}$$

dvije baze za $\mathbb{R}^2$ i neka je $a \in \mathbb{R}^2$ proizvoljni vektor. U svakoj od tih baza vektor a ima jedinstveni prikaz.

$$a = \alpha_1 \cdot (1,0) + \alpha_2 \cdot (0,1)$$
$$a = \alpha_1' \cdot (1,2) + \alpha_2' \cdot (-3,4)$$

Kako je $\mathcal{B}_1$ kanonska baza, nije problem vektore iz $\mathcal{B}_2$ prikazati u bazi $\mathcal{B}_1$.

$$(1,2) = 1 \cdot (1,0) + 2 \cdot (0,1)$$
$$(-3,4) = -3 \cdot (1,0) + 4 \cdot (0,1)$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Stoga je

$$a = \alpha_1' \cdot (1,2) + \alpha_2' \cdot (-3,4) =$$

$$= \alpha_1' \cdot \Big(1 \cdot (1,0) + 2 \cdot (0,1)\Big) + \alpha_2' \cdot \Big(-3 \cdot (1,0) + 4 \cdot (0,1)\Big) =$$

$$= \left(\alpha_1' - 3\alpha_2'\right) \cdot (1,0) + \left(2\alpha_1' + 4\alpha_2'\right) \cdot (0,1)$$

Sada imamo dva različita prikaza vektora a u bazi $\mathcal{B}_1$.

$$a = \alpha_1 \cdot (1,0) + \alpha_2 \cdot (0,1)$$
$$a = \left(\alpha_1' - 3\alpha_2'\right) \cdot (1,0) + \left(2\alpha_1' + 4\alpha_2'\right) \cdot (0,1)$$

Kako je prikaz svakog vektora u bilo kojoj bazi jedinstven, mora vrijediti

$$\alpha_1 = \alpha_1' - 3\alpha_2'$$
$$\alpha_2 = 2\alpha_1' + 4\alpha_2'$$

Sustav linearnih jednadžbi

$$\alpha_1 = \alpha_1' - 3\alpha_2'$$
$$\alpha_2 = 2\alpha_1' + 4\alpha_2'$$

možemo zapisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{bmatrix}.$$

Dakle, dobili smo da vrijedi

$$X_{\mathcal{B}_1} = T X_{\mathcal{B}_2}$$

pri čemu je T matrica skupa $\mathcal{B}_2$ s obzirom na bazu $\mathcal{B}_1$ i zovemo ju matrica prijelaza iz baze $\mathcal{B}_1$ u bazu $\mathcal{B}_2$. Stupci matrice T sadrže koordinate vektora iz baze $\mathcal{B}_2$ u bazi $\mathcal{B}_1$. Kratko pišemo

$$\mathcal{B}_1 \xrightarrow{T} \mathcal{B}_2$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Iz $X_{\mathcal{B}_1} = TX_{\mathcal{B}_2}$ slijedi $X_{\mathcal{B}_2} = T^{-1}X_{\mathcal{B}_1}$. Dakle, ako je T matrica prijelaza iz baze $\mathcal{B}_1$ u bazu $\mathcal{B}_2$, tada je T^{-1} matrica prijelaza iz baze $\mathcal{B}_2$ u bazu $\mathcal{B}_1$. Kratko možemo zapisati

$$\mathcal{B}_1 \xrightarrow{T} \mathcal{B}_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{B}_2 \xrightarrow{T^{-1}} \mathcal{B}_1$$

Konačno, dolazimo do sljedećeg zaključka. Ako su $X_{\mathcal{B}_1}$ i $X_{\mathcal{B}_2}$ koordinatne matrice vektora $a \in \mathbb{R}^2$ s obzirom na zadane baze $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$, tada vrijedi sljedeća formula.

$$X_{\color{red}\mathcal{B}_1} = T_{{\color{red}\mathcal{B}_1} \to {\color{blue}\mathcal{B}_2}} X_{\color{blue}\mathcal{B}_2}$$

Najvažniji dio u toj formuli je upravo raspored slova $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$. Taj raspored predstavlja "dušu" te formule. Najčešće samo kratko pišemo $X_{\mathcal{B}_1} = TX_{\mathcal{B}_2}$, ali uvijek u mislima moramo imati na umu gore naglašeni raspored slova $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Uzmimo sada jedan primjer u kojemu niti jedna od baza $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ nije kanonska baza za $\mathbb{R}^2$. Neka su

$$\mathcal{B}_1 = \{(2,1), (-1,3)\} \quad \text{i} \quad \mathcal{B}_2 = \{(1,1), (-2,1)\}$$

dvije baze za $\mathbb{R}^2$ i neka je $a \in \mathbb{R}^2$ proizvoljni vektor. U svakoj od tih baza vektor a ima jedinstveni prikaz.

$$a = \alpha_1 \cdot (2,1) + \alpha_2 \cdot (-1,3)$$
$$a = \alpha_1' \cdot (1,1) + \alpha_2' \cdot (-2,1)$$

Kako je $\mathcal{B}_1$ baza, vektore iz baze $\mathcal{B}_2$ možemo prikazati u bazi $\mathcal{B}_1$. U ovom slučaju baza $\mathcal{B}_1$ nije kanonska baza pa taj prikaz nije tako očit. Stoga smo prisiljeni riješiti dva sustava linearnih jednadžbi.

Prikažimo najprije vektor $(1,1)$ u bazi $\mathcal{B}_1$. Iz

$$(1,1) = x_1 \cdot (2,1) + y_1 \cdot (-1,3)$$

dobivamo sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 2x_1 - y_1 &= 1 \\ x_1 + 3y_1 &= 1 \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje $x_1 = \frac{4}{7}$, $y_1 = \frac{1}{7}$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Prikažimo još vektor $(-2, 1)$ u bazi $\mathcal{B}_1$. Iz

$$(-2, 1) = x_2 \cdot (2, 1) + y_2 \cdot (-1, 3)$$

dobivamo sustav linearnih jednadžbi

$$2x_2 - y_2 = -2$$
$$x_2 + 3y_2 = 1$$

koji ima jedinstveno rješenje $x_2 = -\frac{5}{7}$, $y_2 = \frac{4}{7}$.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Dakle, prikazi vektora iz baze $\mathcal{B}_2$ u bazi $\mathcal{B}_1$ izgledaju

$$(1,1) = \tfrac{4}{7}\cdot(2,1) + \tfrac{1}{7}\cdot(-1,3)$$
$$(-2,1) = -\tfrac{5}{7}\cdot(2,1) + \tfrac{4}{7}\cdot(-1,3)$$

Stoga je

$$a = \alpha_1'\cdot(1,1) + \alpha_2'\cdot(-2,1) =$$
$$= \alpha_1'\cdot\left(\tfrac{4}{7}\cdot(2,1) + \tfrac{1}{7}\cdot(-1,3)\right) + \alpha_2'\cdot\left(\tfrac{-5}{7}\cdot(2,1) + \tfrac{4}{7}\cdot(-1,3)\right)$$
$$= \left(\tfrac{4}{7}\alpha_1' - \tfrac{5}{7}\alpha_2'\right)\cdot(2,1) + \left(\tfrac{1}{7}\alpha_1' + \tfrac{4}{7}\alpha_2'\right)\cdot(-1,3)$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Sada imamo dva različita prikaza vektora a u bazi $\mathcal{B}_1$.

$$a = \alpha_1 \cdot (2,1) + \alpha_2 \cdot (-1,3)$$
$$a = \left(\tfrac{4}{7}\alpha_1' - \tfrac{5}{7}\alpha_2'\right) \cdot (2,1) + \left(\tfrac{1}{7}\alpha_1' + \tfrac{4}{7}\alpha_2'\right) \cdot (-1,3)$$

Kako je prikaz svakog vektora u bilo kojoj bazi jedinstven, mora vrijediti

$$\alpha_1 = \tfrac{4}{7}\alpha_1' - \tfrac{5}{7}\alpha_2'$$
$$\alpha_2 = \tfrac{1}{7}\alpha_1' + \tfrac{4}{7}\alpha_2'$$

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Sustav linearnih jednadžbi

$$\alpha_1 = \frac{4}{7}\alpha_1' - \frac{5}{7}\alpha_2'$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{7}\alpha_1' + \frac{4}{7}\alpha_2'$$

možemo zapisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{bmatrix}.$$

Dakle, ponovo smo dobili da vrijedi

$$X_{\mathcal{B}_1} = T X_{\mathcal{B}_2}$$

pri čemu je T matrica prijelaza iz baze $\mathcal{B}_1$ u bazu $\mathcal{B}_2$. Stupci matrice T sadrže koordinate vektora iz baze $\mathcal{B}_2$ u bazi $\mathcal{B}_1$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Vratimo se ponovo na prikaze vektora $a \in \mathbb{R}^2$ u bazama

$$\mathcal{B}_1 = \{(2,1), (-1,3)\} \quad \text{i} \quad \mathcal{B}_2 = \{(1,1), (-2,1)\}.$$

$$a = \alpha_1 \cdot (2,1) + \alpha_2 \cdot (-1,3)$$
$$a = \alpha_1' \cdot (1,1) + \alpha_2' \cdot (-2,1)$$

Kako bismo došli do veze između matrica $X_{\mathcal{B}_1}$ i $X_{\mathcal{B}_2}$, umjesto da bazu $\mathcal{B}_2$ svodimo na bazu $\mathcal{B}_1$, možemo obje baze $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ svesti na kanonsku bazu $\mathcal{B}_{\text{kan}} = \{(1,0), (0,1)\}$. Pokažimo i ovaj pristup kako bismo dobili još jedno interesantno svojstvo matrice prijelaza.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Svedemo li obje baze $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ na kanonsku bazu $\mathcal{B}_{\text{kan}}$, dobivamo

$$
\begin{aligned}
a &= \alpha_1 \cdot (2,1) + \alpha_2 \cdot (-1,3) = \\
&= \big(2\alpha_1 - \alpha_2,\ \alpha_1 + 3\alpha_2\big) = \\
&= \big(2\alpha_1 - \alpha_2\big) \cdot (1,0) + \big(\alpha_1 + 3\alpha_2\big) \cdot (0,1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a &= \alpha_1' \cdot (1,1) + \alpha_2' \cdot (-2,1) = \\
&= \big(\alpha_1' - 2\alpha_2',\ \alpha_1' + \alpha_2'\big) = \\
&= \big(\alpha_1' - 2\alpha_2'\big) \cdot (1,0) + \big(\alpha_1' + \alpha_2'\big) \cdot (0,1)
\end{aligned}
$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Sada imamo dva različita prikaza vektora a u bazi $\mathcal{B}_{\text{kan}}$.

$$a = \big(2\alpha_1 - \alpha_2\big) \cdot (1,0) + \big(\alpha_1 + 3\alpha_2\big) \cdot (0,1)$$
$$a = \big(\alpha_1' - 2\alpha_2'\big) \cdot (1,0) + \big(\alpha_1' + \alpha_2'\big) \cdot (0,1)$$

Kako je prikaz svakog vektora u bilo kojoj bazi jedinstven, mora vrijediti

$$2\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_1' - 2\alpha_2'$$
$$\alpha_1 + 3\alpha_2 = \alpha_1' + \alpha_2'$$

odnosno u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{bmatrix}.$$

Konačno dobivamo

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{bmatrix}.$$

Neka su

$$T_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Laganim računom dobijemo

$$T_1^{-1} T_2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}.$$

Dakle, ponovo smo došli do iste formule

$$X_{\mathcal{B}_1} = T X_{\mathcal{B}_2}$$

gdje je $T = T_1^{-1} T_2$.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Usput možemo uočiti jedno pravilo ponašanja matrice prijelaza. Uočimo da u našem primjeru vrijedi

$$\mathcal{B}_{\text{kan}} \xrightarrow{T_1} \mathcal{B}_1, \quad \mathcal{B}_{\text{kan}} \xrightarrow{T_2} \mathcal{B}_2, \quad \mathcal{B}_1 \xrightarrow{T} \mathcal{B}_2, \quad \mathcal{B}_1 \xrightarrow{T_1^{-1}T_2} \mathcal{B}_2$$

Kako je matrica prijelaza iz baze $\mathcal{B}_1$ u bazu $\mathcal{B}_2$ jedinstvena, zaključujemo da vrijedi sljedeće pravilo koje je zorno prikazano na donjoj slici.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}_1 \arrow[r, "T_1^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "T_1^{-1}T_2"'] & \mathcal{B}_{\text{kan}} \arrow[r, "T_2"] & \mathcal{B}_2 \end{tikzcd}$$

Ovo pravilo često koristimo u zadacima kada želimo pronaći matricu prijelaza između dvije baze od kojih niti jedna nije kanonska tako da između njih umetnemo kanonsku bazu jer se matrice T_1 i T_2 vrlo brzo pronađu. Međutim, plaćamo cijenu za traženje inverza matrice T_1 i računanje produkta $T_1^{-1}T_2$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Ideje koje smo pokazali na konkretnim primjerima u $\mathbb{R}^2$, možemo provesti u bilo kojem dvodimenzionalnom vektorskom prostoru.

Neka je V vektorski prostor nad poljem F i $\dim V = 2$. Neka su $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2\}$ dvije baze za V. U svakoj od tih baza vektor $a \in V$ ima jedinstveni prikaz

$$
\begin{aligned}
a &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \\
a &= \alpha_1' f_1 + \alpha_2' f_2
\end{aligned}
$$

za neke skalare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1', \alpha_2' \in F$. Kako je $\mathcal{B}_1$ baza za V, vektori iz $\mathcal{B}_2$ imaju jedinstveni prikaz u bazi $\mathcal{B}_1$

$$
\begin{aligned}
f_1 &= f_1^{(1)} e_1 + f_1^{(2)} e_2 \\
f_2 &= f_2^{(1)} e_1 + f_2^{(2)} e_2
\end{aligned}
$$

za neke skalare $f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, f_2^{(1)}, f_2^{(2)} \in F$.

Stoga je

$$a = \alpha_1' f_1 + \alpha_2' f_2 =$$

$$= \alpha_1' \left(f_1^{(1)} e_1 + f_1^{(2)} e_2 \right) + \alpha_2' \left(f_2^{(1)} e_1 + f_2^{(2)} e_2 \right) =$$

$$= \left(\alpha_1' f_1^{(1)} + \alpha_2' f_2^{(1)} \right) e_1 + \left(\alpha_1' f_1^{(2)} + \alpha_2' f_2^{(2)} \right) e_2$$

Sada imamo dva prikaza vektora $a \in V$ u bazi $\mathcal{B}_1$.

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

$$a = \left(\alpha_1' f_1^{(1)} + \alpha_2' f_2^{(1)} \right) e_1 + \left(\alpha_1' f_1^{(2)} + \alpha_2' f_2^{(2)} \right) e_2$$

Zbog jedinstvenosti prikaza vektora u bazi mora vrijediti

$$\alpha_1 = \alpha_1' f_1^{(1)} + \alpha_2' f_2^{(1)}$$

$$\alpha_2 = \alpha_1' f_1^{(2)} + \alpha_2' f_2^{(2)}$$

Sustav linearnih jednadžbi

$$\alpha_1 = \alpha_1' f_1^{(1)} + \alpha_2' f_2^{(1)}$$
$$\alpha_2 = \alpha_1' f_1^{(2)} + \alpha_2' f_2^{(2)}$$

možemo zapisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(1)} & f_2^{(1)} \\ f_1^{(2)} & f_2^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{bmatrix}$$

odnosno

$$X_{\mathcal{B}_1} = T_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} X_{\mathcal{B}_2}$$

pri čemu je

$$T_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} f_1^{(1)} & f_2^{(1)} \\ f_1^{(2)} & f_2^{(2)} \end{bmatrix}$$

matrica prijelaza iz baze $\mathcal{B}_1$ u bazu $\mathcal{B}_2$. Stupci te matrice sadrže koordinate vektora iz baze $\mathcal{B}_2$ u bazi $\mathcal{B}_1$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Na potpuno analogni način možemo doći do iste formule u bilo kojem konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V. Jedina je razlika u tome što matrica prijelaza neće biti kvadratna matrica reda 2, već kvadratna matrica reda $n = \dim V$.

Neka je V vektorski prostor nad poljem F i $\dim V = n$. Neka su

$$\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \qquad \mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$$

dvije baze za V. U svakoj od tih baza vektor $a \in V$ ima jedinstveni prikaz

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' f_i = \alpha_1' f_1 + \alpha_2' f_2 + \cdots + \alpha_n' f_n$$

za neke skalare $\alpha_i, \alpha_i' \in F$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Kako je $\mathcal{B}_1$ baza za V, vektori iz baze $\mathcal{B}_2$ imaju jedinstveni prikaz u bazi $\mathcal{B}_1$

$$f_1 = \sum_{i=1}^{n} f_1^{(i)} e_i = f_1^{(1)} e_1 + f_1^{(2)} e_2 + \cdots + f_1^{(n)} e_n$$

$$f_2 = \sum_{i=1}^{n} f_2^{(i)} e_i = f_2^{(1)} e_1 + f_2^{(2)} e_2 + \cdots + f_2^{(n)} e_n$$

$$\vdots$$

$$f_k = \sum_{i=1}^{n} f_k^{(i)} e_i = f_k^{(1)} e_1 + f_k^{(2)} e_2 + \cdots + f_k^{(n)} e_n$$

$$\vdots$$

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} f_n^{(i)} e_i = f_n^{(1)} e_1 + f_n^{(2)} e_2 + \cdots + f_n^{(n)} e_n$$

gdje su $f_t^{(l)} \in F$, $t = 1, 2, \ldots, n$, $l = 1, 2, \ldots, n$.

Stoga je

$$a = \alpha'_1 f_1 + \alpha'_2 f_2 + \cdots + \alpha'_n f_n =$$

$$= \alpha'_1 \sum_{i=1}^{n} f_1^{(i)} e_i + \alpha'_2 \sum_{i=1}^{n} f_2^{(i)} e_i + \cdots + \alpha'_n \sum_{i=1}^{n} f_n^{(i)} e_i =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i f_i^{(1)} \right) e_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i f_i^{(2)} \right) e_2 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i f_i^{(n)} \right) e_n$$

Sada imamo dva prikaza vektora $a \in V$ u bazi $\mathcal{B}_1$.

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

$$a = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i f_i^{(1)} \right) e_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i f_i^{(2)} \right) e_2 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i f_i^{(n)} \right) e_n$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Zbog jedinstvenosti prikaza vektora u bazi mora vrijediti

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' f_i^{(1)}$$

$$\alpha_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' f_i^{(2)}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' f_i^{(n)}$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Raspišemo li sume na desnim stranama dobivamo

$$\alpha_1 = \alpha_1' f_1^{(1)} + \alpha_2' f_2^{(1)} + \cdots + \alpha_k' f_k^{(1)} + \cdots + \alpha_n' f_n^{(1)}$$

$$\alpha_2 = \alpha_1' f_1^{(2)} + \alpha_2' f_2^{(2)} + \cdots + \alpha_k' f_k^{(2)} + \cdots + \alpha_n' f_n^{(2)}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n = \alpha_1' f_1^{(n)} + \alpha_2' f_2^{(n)} + \cdots + \alpha_k' f_k^{(n)} + \cdots + \alpha_n' f_n^{(n)}$$

Prethodne jednakosti možemo zapisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & \cdots & f_k^{(1)} & \cdots & f_n^{(1)} \\ f_1^{(2)} & f_2^{(2)} & \cdots & f_k^{(2)} & \cdots & f_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n)} & f_2^{(n)} & \cdots & f_k^{(n)} & \cdots & f_n^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{bmatrix}$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Konačno dobivamo

$$X_{\mathcal{B}_1} = T_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} X_{\mathcal{B}_2}$$

gdje je

$$T_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & \cdots & f_k^{(1)} & \cdots & f_n^{(1)} \\ f_1^{(2)} & f_2^{(2)} & \cdots & f_k^{(2)} & \cdots & f_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n)} & f_2^{(n)} & \cdots & f_k^{(n)} & \cdots & f_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

matrica prijelaza iz baze $\mathcal{B}_1$ u bazu $\mathcal{B}_2$. Stupci matrice $T_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ sadrže koordinate vektora iz baze $\mathcal{B}_2$ u bazi $\mathcal{B}_1$. Često rečenicu $\underline{T}$ je matrica prijelaza iz baze $\mathcal{B}_1$ u bazu $\mathcal{B}_2$ kratko zapisujemo

$$\mathcal{B}_1 \xrightarrow{T} \mathcal{B}_2$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Time smo dokazali sljedeći izuzetno važni teorem.

Teorem 3.8.

Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem F. Neka su $X_{\mathcal{B}_1}$ i $X_{\mathcal{B}_2}$ koordinatne matrice vektora $a \in V$ u bazama $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$, a $T_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ matrica prijelaza iz baze $\mathcal{B}_1$ u bazu $\mathcal{B}_2$. Tada vrijedi

$$X_{\mathcal{B}_1} = T_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} X_{\mathcal{B}_2}.$$

Kako je $\mathcal{B}_2$ baza, matrica prijelaza $T_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ je maksimalnog ranga pa je regularna matrica. Stoga matrica $T_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ ima svoju inverznu matricu i vrijedi

$$\left(T_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}\right)^{-1} = T_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1}.$$

Drugim riječima,

$$\mathcal{B}_1 \xrightarrow{T} \mathcal{B}_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{B}_2 \xrightarrow{T^{-1}} \mathcal{B}_1$$

Nadalje, ako su $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ tri baze za vektorski prostor V, tada vrijedi sljedeće pravilo.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}_1 \arrow[r, "T_1"] \arrow[rr, bend right, "T_1T_2"'] & \mathcal{B}_3 \arrow[r, "T_2"] & \mathcal{B}_2 \end{tikzcd}$$

Drugim riječima, ako je T_1 matrica prijelaza iz baze $\mathcal{B}_1$ u bazu $\mathcal{B}_3$ i ako je T_2 matrica prijelaza iz baze $\mathcal{B}_3$ u bazu $\mathcal{B}_2$, tada je T_1T_2 matrica prijelaza iz baze $\mathcal{B}_1$ u bazu $\mathcal{B}_2$.

Naime, iz $X_{\mathcal{B}_1} = T_1 X_{\mathcal{B}_3}$ i $X_{\mathcal{B}_3} = T_2 X_{\mathcal{B}_2}$ zbog asocijativnosti množenja matrica dobivamo

$$X_{\mathcal{B}_1} = T_1 X_{\mathcal{B}_3} = T_1 \left(T_2 X_{\mathcal{B}_2} \right) = \left(T_1 T_2 \right) X_{\mathcal{B}_2}$$

iz čega slijedi pravilo prikazano na gornjoj slici.

Navedeno pravilo često koristimo u zadacima kada želimo pronaći matricu prijelaza iz baze $\mathcal{B}_1$ u bazu $\mathcal{B}_2$, a da pritom niti jedna od tih baza nije kanonska baza $\mathcal{B}_{\text{kan}}$ za promatrani vektorski prostor. U tom slučaju uzmemo $\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_{\text{kan}}$ i vrlo brzo bez ikakvog računanja pronađemo matrice prijelaza

$$\mathcal{B}_{\text{kan}} \xrightarrow{T_1} \mathcal{B}_1, \quad \mathcal{B}_{\text{kan}} \xrightarrow{T_2} \mathcal{B}_2$$

Matricu prijelaza iz baze $\mathcal{B}_1$ u bazu $\mathcal{B}_2$ tada pronađemo preko sljedećeg pravila.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}_1 \arrow[r, "T_1^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "T_1^{-1}T_2"'] & \mathcal{B}_{\text{kan}} \arrow[r, "T_2"] & \mathcal{B}_2 \end{tikzcd}$$

Primjer 3.26.

U vektorskom prostoru $\mathcal{P}_3$ *zadan je skup*

$$S = \{3x^2 - x + 1,\ 2x + 3,\ x^2 + x + 1\}.$$

- (a) *Dokažite da je* S *baza za* $\mathcal{P}_3$.
- (b) *Odredite koordinate polinoma* $p(x) = 4x^2 + 3x + 5$ *u bazi* S.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Primjer 3.26.

U vektorskom prostoru $\mathcal{P}_3$ *zadan je skup*

$$S = \{3x^2 - x + 1,\ 2x + 3,\ x^2 + x + 1\}.$$

- a) *Dokažite da je* S *baza za* $\mathcal{P}_3$.
- b) *Odredite koordinate polinoma* $p(x) = 4x^2 + 3x + 5$ *u bazi* S.

Rješenje.

- a) U kanonskoj bazi $\mathcal{B}_{\text{kan}} = \{1, x, x^2\}$ prostora $\mathcal{P}_3$ polinomi iz skupa S imaju koordinate

$$3x^2 - x + 1 = (1, -1, 3)$$
$$2x + 3 = (3, 2, 0)$$
$$x^2 + x + 1 = (1, 1, 1)$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Stoga matrica skupa S u kanonskoj bazi izgleda

$$M(S) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo rang matrice $M(S)$ tako da ju svedemo na neku njezinu retčanu ešalon formu.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} /\cdot 1 \quad /\cdot(-3) \\ + \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -9 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ /\cdot \frac{9}{5} \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} \end{bmatrix} /\cdot 5 \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Kako retčana ešalon forma matrice $M(S)$ ima ukupno tri nenul retka, zaključujemo da je rang matrice $M(S)$ jednak 3. Kako je taj rang jednak broju vektora u skupu S, slijedi da je skup S linearno nezavisan. S obzirom da je $\dim \mathcal{P}_3 = 3$, skup S je jedna baza za $\mathcal{P}_3$.

b) Koordinate polinoma $p(x) = 4x^2 + 3x + 5$ u bazi S možemo odrediti na dva načina: bez korištenja matrice prijelaza i pomoću matrice prijelaza.

1. način: bez korištenja matrice prijelaza

Polinom $p(x) = 4x^2 + 3x + 5$ napišemo kao linearnu kombinaciju polinoma iz skupa S i riješimo dobiveni sustav linearnih jednadžbi.

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

$$4x^2+3x+5=\alpha_1\big(3x^2-x+1\big)+\alpha_2\big(2x+3\big)+\alpha_3\big(x^2+x+1\big)$$

$$4x^2+3x+5=\big(3\alpha_1+\alpha_3\big)x^2+\big(-\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3\big)x+ \\ +\big(\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3\big)$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće potencije od x dobivamo sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 3\alpha_1+\alpha_3&=4\\ -\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3&=3\,.\\ \alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3&=5 \end{aligned}$$

Dobiveni sustav ima jedinstveno rješenje

$$\alpha_1=\tfrac{5}{8},\quad \alpha_2=\tfrac{3}{4},\quad \alpha_3=\tfrac{17}{8}.$$

Stoga polinom $p(x)$ u bazi S ima koordinate $\big(\frac{5}{8},\frac{3}{4},\frac{17}{8}\big)$, tj. vrijedi

$$4x^2+3x+5=\tfrac{5}{8}\big(3x^2-x+1\big)+\tfrac{3}{4}\big(2x+3\big)+\tfrac{17}{8}\big(x^2+x+1\big).$$

2. način: pomoću matrice prijelaza

U kanonskoj bazi $\mathcal{B}_{\mathrm{kan}} = \{1, x, x^2\}$ polinom $p(x) = 4x^2 + 3x + 5$ ima koordinatnu matricu

$$X_{\mathcal{B}_{\mathrm{kan}}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Tražimo koordinatnu matricu X_S tog polinoma u bazi S. Matricu prijelaza iz kanonske baze $\mathcal{B}_{\mathrm{kan}}$ u bazu S brzo odredimo tako što u stupce te matrice redom napišemo koordinate vektora iz skupa S koje oni imaju u kanonskoj bazi $\mathcal{B}_{\mathrm{kan}}$.

$$T_{\mathcal{B}_{\mathrm{kan}} \to S} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Odredimo inverz te matrice.

$$\left(T_{\mathcal{B}_{\text{kan}}\to S}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{9}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

Iz formule

$$X_{\mathcal{B}_{\text{kan}}} = T_{\mathcal{B}_{\text{kan}}\to S} X_S$$

slijedi

$$X_S = \left(T_{\mathcal{B}_{\text{kan}}\to S}\right)^{-1} X_{\mathcal{B}_{\text{kan}}}$$

pa je

$$X_S = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{9}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{17}{8} \end{bmatrix}.$$

Koordinatni sustav u ravnini

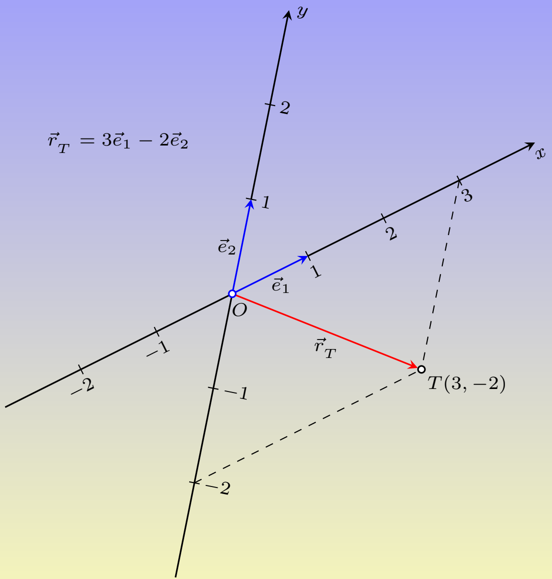
Koordinatni sustav u ravnini je uređeni par $(O, \mathcal{B})$ koji se sastoji od jedne točke O iz te ravnine i jedne baze $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ za $\mathbb{R}^2$.

Točka O predstavlja ishodište tog koordinatnog sustava, a vektori $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ predstavljaju koordinatne osi.

Drugim riječima, točkom O uzmemo pravce koji imaju vektore smjerova $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$. Orijentacije vektora $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ određuju pozitivne strane na koordinatnim osima, a duljine tih vektora određuju jedinične duljine na pojedinim osima.

Svakoj točki T pridružujemo koordinate tako da pogledamo koordinate njezinog radijvektora $\vec{r}_T = \overrightarrow{OT}$ u bazi $\mathcal{B}$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata



$\vec{r}_T = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$
y
x
2
1
$\vec{e}_2$
$\vec{e}_1$
O
3
2
1
-1
-2
$\vec{r}_T$
$T(3,-2)$
-1
-2

Primjer 3.27.

U ravnini su dana dva koordinatna sustava s istim ishodištem O. *Prvi koordinatni sustav je standardni pravokutni koordinatni sustav* $(O, \{\vec{i}, \vec{j}\})$, *a drugi koordinatni sustav je* $(O, \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\})$ *gdje je* $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + \vec{j}$ *i* $\vec{v}_2 = \vec{i} - 3\vec{j}$.

a. *Dana je točka* P *koja u prvom koordinatnom sustavu ima koordinate* $(2, 3)$. *Koje koordinate točka* P *ima u drugom koordinatnom sustavu?*

b. *Dana je točka* Q *koja u drugom koordinatnom sustavu ima koordinate* $(-1, -1)$. *Koje koordinate točka* Q *ima u prvom koordinatnom sustavu?*

Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Rješenje.

Imamo zadane dvije baze za $\mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0),(0,1)\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{(2,1),(1,-3)\}$$

Kako je $\mathcal{B}_1$ kanonska baza, možemo brzo pronaći matricu prijelaza iz baze $\mathcal{B}_1$ u bazu $\mathcal{B}_2$ tako da u stupce te matrice redom napišemo koordinate vektora iz baze $\mathcal{B}_2$ koje oni imaju u bazi $\mathcal{B}_1$. To je matrica

$$T_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Inverz te matrice jednak je

$$\left(T_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}\right)^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Točka P u prvom koordinatnom sustavu ima koordinate $(2, 3)$, a to znači da njezin radijvektor $\vec{r}_P$ u bazi $\mathcal{B}_1$ ima koordinatnu matricu

$$X_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Pitamo se koje koordinate vektor $\vec{r}_P$ ima u bazi $\mathcal{B}_2$. Iz formule

$$X_{\mathcal{B}_1} = T_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} X_{\mathcal{B}_2}$$

slijedi

$$X_{\mathcal{B}_2} = \left(T_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}\right)^{-1} X_{\mathcal{B}_1}$$

pa je

$$X_{\mathcal{B}_2} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{bmatrix}.$$

Zaključujemo da točka P u drugom koordinatnom sustavu ima koordinate $\left(\frac{9}{7}, -\frac{4}{7}\right)$, a to su zapravo koordinate koje njezin radijvektor $\vec{r}_P$ ima u bazi $\mathcal{B}_2$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Točka Q u drugom koordinatnom sustavu ima koordinate $(-1,-1)$, a to znači da njezin radijvektor $\vec{r}_Q$ u bazi $\mathcal{B}_2$ ima koordinatnu matricu

$$X_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Pitamo se koje koordinate vektor $\vec{r}_Q$ ima u bazi $\mathcal{B}_1$. Iz formule

$$X_{\mathcal{B}_1} = T_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} X_{\mathcal{B}_2}$$

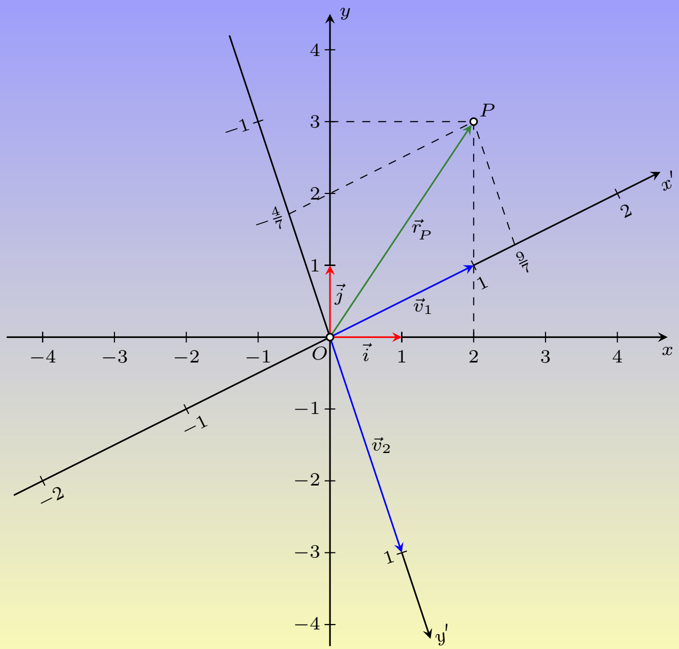
slijedi

$$X_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

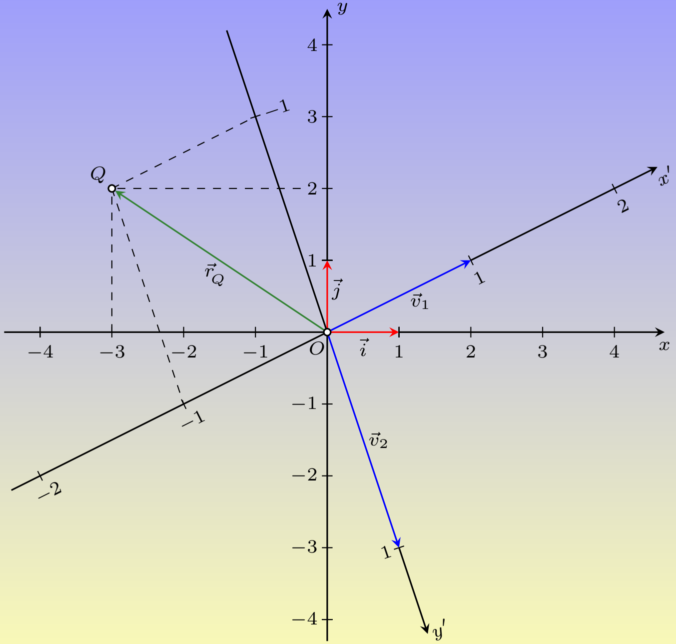
Zaključujemo da točka Q u prvom koordinatnom sustavu ima koordinate $(-3,2)$, a to su zapravo koordinate koje njezin radijvektor $\vec{r}_Q$ ima u bazi $\mathcal{B}_1$.

Na sljedećim slikama možete zorno vidjeti dobivene rezultate.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata



Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata



Vektorski prostori
- Grupoid
- Polugrupa
- Monoid
- Grupa
- Prsten
- Polje
- Vektorski prostor
- Primjeri vektorskih prostora
- Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
- Linearni omotač skupa
- Baza vektorskog prostora
- Egzistencija baze i dimenzija
- Potprostor
- Rang matrice
- Koordinatizacija
- Transformacija koordinata

Koordinatni sustav u prostoru

Koordinatni sustav u prostoru je uređeni par $(O, \mathcal{B})$ koji se sastoji od jedne točke O iz tog prostora i jedne baze $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ za $\mathbb{R}^3$.

Točka O predstavlja ishodište tog koordinatnog sustava, a vektori $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ i $\vec{e}_3$ predstavljaju koordinatne osi.

Drugim riječima, točkom O uzmemo pravce koji imaju vektore smjerova $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ i $\vec{e}_3$. Orijentacije vektora $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ i $\vec{e}_3$ određuju pozitivne strane na koordinatnim osima, a duljine tih vektora određuju jedinične duljine na pojedinim osima.

Svakoj točki T pridružujemo koordinate tako da pogledamo koordinate njezinog radijvektora $\vec{r}_T = \overrightarrow{OT}$ u bazi $\mathcal{B}$.

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Zadatak 3.16.

U prostoru su dana dva koordinatna sustava s istim ishodištem O*. Prvi koordinatni sustav je standardni pravokutni koordinatni sustav* $(O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\})$*, a drugi koordinatni sustav je* $(O, \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\})$ *gdje je* $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$*,* $\vec{v}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ *i* $\vec{v}_3 = 3\vec{i} + \vec{k}$*.*

a. *Dana je točka* P *koja u prvom koordinatnom sustavu ima koordinate* $(2, 3, -5)$*. Koje koordinate točka* P *ima u drugom koordinatnom sustavu?*

b. *Dana je točka* Q *koja u drugom koordinatnom sustavu ima koordinate* $(1, -1, 4)$*. Koje koordinate točka* Q *ima u prvom koordinatnom sustavu?*

Vektorski prostori
Grupoid
Polugrupa
Monoid
Grupa
Prsten
Polje
Vektorski prostor
Primjeri vektorskih prostora
Linearna zavisnost i nezavisnost vektora
Linearni omotač skupa
Baza vektorskog prostora
Egzistencija baze i dimenzija
Potprostor
Rang matrice
Koordinatizacija
Transformacija koordinata

Zadatak 3.16.

U prostoru su dana dva koordinatna sustava s istim ishodištem O. Prvi koordinatni sustav je standardni pravokutni koordinatni sustav $(O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\})$, a drugi koordinatni sustav je $(O, \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\})$ gdje je $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{v}_3 = 3\vec{i} + \vec{k}$.

- a *Dana je točka P koja u prvom koordinatnom sustavu ima koordinate $(2, 3, -5)$. Koje koordinate točka P ima u drugom koordinatnom sustavu?*
- b *Dana je točka Q koja u drugom koordinatnom sustavu ima koordinate $(1, -1, 4)$. Koje koordinate točka Q ima u prvom koordinatnom sustavu?*

Rješenje.

- a $\left(\frac{23}{5}, -\frac{27}{5}, -\frac{21}{5}\right)$
- b $(15, 1, 4)$

Dio IV

Linearni operatori

Linearni operatori

Definicija linearnog operatora

Primjeri linearnih operatora

Zadavanje linearnog operatora

Izomorfizam vektorskih prostora

Rang i defekt

Matrični zapis linearnog operatora

Primjeri matričnih zapisa

Računanje slike vektora

Odnos matričnih zapisa istog operatora

Izomorfizam matrica i linearnih operatora

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Problem svojstvenih vrijednosti

Sadržaj

- Linearni operatori
  - Definicija linearnog operatora
  - Primjeri linearnih operatora
  - Zadavanje linearnog operatora
  - Izomorfizam vektorskih prostora
  - Rang i defekt
  - Matrični zapis linearnog operatora
  - Primjeri matričnih zapisa
  - Računanje slike vektora
  - Odnos matričnih zapisa istog operatora
  - Izomorfizam matrica i linearnih operatora
  - Karakteristični polinom
  - Minimalni polinom
  - Problem svojstvenih vrijednosti

Definicija linearnog operatora

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Definicija linearnog operatora

Neka su U i V vektorski prostori nad istim poljem F. Kažemo da je preslikavanje $f : U \to V$ linearni operator ako ima sljedeća svojstva:

1. **aditivnost**

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad \forall a, b \in U$$

2. **homogenost**

$$f(\alpha a) = \alpha f(a), \quad \forall \alpha \in F, \ \forall a \in U$$

Propozicija 4.1.

Neka je $f : U \to V$ linearni operator. Tada je

- (a) $f(\Theta_U) = \Theta_V$
- (b) $f(-a) = -f(a), \ \forall\, a \in U$

Dokaz.

- (a) Neka je $a \in U$ proizvoljni vektor. Koristeći aditivnost linearnog operatora dobivamo

$$f(a) = f(a + \Theta_U) = f(a) + f(\Theta_U).$$

  Iz $f(a) = f(a) + f(\Theta_U)$ slijedi $f(\Theta_U) = \Theta_V$.

- (b) Koristeći homogenost linearnog operatora dobivamo

$$f(-a) = f(-1 \cdot a) = -1 \cdot f(a) = -f(a)$$

♡

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Prethodnu propoziciju možemo pročitati na sljedeći način.

a. Svaki linearni operator nulvektor preslikava u nulvektor.
b. Svaki linearni operator suprotni vektor svakog vektora preslikava u suprotni vektor njegove slike.

Propozicija 4.2 (Karakterizacija linearnog operatora).

Preslikavanje $f : U \to V$ je linearni operator akko za svaki izbor $\alpha, \beta \in F$ i svaki izbor $a, b \in U$ vrijedi

$$f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b).$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Neka je $f : U \to V$ linearni operator. Tada je po definiciji f aditivno i homogeno preslikavanje pa slijedi

$$f(\alpha a + \beta b) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aditivnost}}}{=} f(\alpha a) + f(\beta b) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{homogenost}}}{=} \alpha f(a) + \beta f(b).$$

$\boxed{\Leftarrow}$

Pretpostavimo da je $f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b)$ za svaki izbor $\alpha, \beta \in F$ i svaki izbor $a, b \in U$.

- Za $\alpha = \beta = 1$ dobivamo aditivnost preslikavanja f.
- Za $\beta = 0$ dobivamo homogenost preslikavanja f.

Dakle, $f : U \to V$ je aditivno i homogeno preslikavanje pa je f linearni operator. ♡

Linearni operatori

Definicija linearnog operatora

Primjeri linearnih operatora

Zadavanje linearnog operatora

Izomorfizam vektorskih prostora

Rang i defekt

Matrični zapis linearnog operatora

Primjeri matričnih zapisa

Računanje slike vektora

Odnos matričnih zapisa istog operatora

Izomorfizam matrica i linearnih operatora

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Problem svojstvenih vrijednosti

Napomena.

Linearni operator **čuva** linearne kombinacije vektora, tj. linearnu kombinaciju vektora preslikava u linearnu kombinaciju slika tih vektora s istim skalarima.

Propozicija 4.3.

Neka su $a_i \in U$ *bilo koji vektori, a* $\alpha_i \in F$ *skalari,* $i = 1, \ldots, k$. *Tada za linearni operator* $f : U \to V$ *vrijedi*

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(a_i).$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Dokaz.

Dokaz provodimo indukcijom po $k \in \mathbb{N}$. Za $k = 1$ dobivamo $f(\alpha_1 a_1) = \alpha_1 f(a_1)$, što je istina jer je po pretpostavci f linearni operator pa za njega vrijedi svojstvo homogenosti.

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za $k-1$ vektora, tj. da vrijedi

$$f\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i f(a_i).$$

Dokažimo da tada tvrdnja vrijedi za k vektora.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Koristeći linearnost preslikavanja f i pretpostavku indukcije dobivamo

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i a_i + \alpha_k a_k\right) =$$

$$\overset{\text{aditivnost}}{=} f\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i a_i\right) + f(\alpha_k a_k) =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i f(a_i)}_{\text{pretpostavka indukcije}} + \underbrace{\alpha_k f(a_k)}_{\text{homogenost}} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(a_i)$$

♡

Propozicija 4.4.

Kompozicija linearnih operatora je linearni operator.

Dokaz.

Neka su $f : U \to V$ i $g : V \to W$ linearni operatori, $\alpha, \beta \in F$ i $a, b \in U$ proizvoljni. Tada je

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\alpha a + \beta b) &= g\Big(f(\alpha a + \beta b)\Big) = \\
\boxed{f \text{ je linearni operator}} \quad &\stackrel{\smile}{=} g\Big(\alpha f(a) + \beta f(b)\Big) = \\
\boxed{g \text{ je linearni operator}} \quad &\stackrel{\smile}{=} \alpha g\Big(f(a)\Big) + \beta g\Big(f(b)\Big) = \\
&= \alpha (g \circ f)(a) + \beta (g \circ f)(b)
\end{aligned}$$

iz čega slijedi da je $g \circ f$ linearni operator. ♡

Linearni operatori

Definicija linearnog operatora

Primjeri linearnih operatora

Zadavanje linearnog operatora

Izomorfizam vektorskih prostora

Rang i defekt

Matrični zapis linearnog operatora

Primjeri matričnih zapisa

Računanje slike vektora

Odnos matričnih zapisa istog operatora

Izomorfizam matrica i linearnih operatora

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Problem svojstvenih vrijednosti

Primjeri linearnih operatora

- Zrcaljenje u ravnini s obzirom na x-os

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x, -y)$$

- Zrcaljenje u ravnini s obzirom na y-os

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = (-x, y)$$

- Ortogonalna projekcija ravnine na x-os

$$p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad p_1(x, y) = (x, 0)$$

- Ortogonalna projekcija ravnine na y-os

$$p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad p_2(x, y) = (0, y)$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

- Zrcaljenje u prostoru s obzirom na x-os

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x,-y,-z)$$

- Zrcaljenje u prostoru s obzirom na y-os

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad g(x,y,z) = (-x,y,-z)$$

- Zrcaljenje u prostoru s obzirom na z-os

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad h(x,y,z) = (-x,-y,z)$$

- Zrcaljenje u prostoru s obzirom na yz-ravninu

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (-x,y,z)$$

- Zrcaljenje u prostoru s obzirom na xz-ravninu

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad g(x, y, z) = (x, -y, z)$$

- Zrcaljenje u prostoru s obzirom na xy-ravninu

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad h(x, y, z) = (x, y, -z)$$

- Ortogonalna projekcija prostora na x-os

$$p_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad p_1(x, y, z) = (x, 0, 0)$$

- Ortogonalna projekcija prostora na y-os

$$p_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad p_2(x, y, z) = (0, y, 0)$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

- Ortogonalna projekcija prostora na z-os

$$p_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad p_3(x, y, z) = (0, 0, z)$$

- Ortogonalna projekcija prostora na yz-ravninu

$$p_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad p_1(x, y, z) = (0, y, z)$$

- Ortogonalna projekcija prostora na xz-ravninu

$$p_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad p_2(x, y, z) = (x, 0, z)$$

- Ortogonalna projekcija prostora na xy-ravninu

$$p_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad p_3(x, y, z) = (x, y, 0)$$

- Centralna simetrija u ravnini s obzirom na ishodište

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (-x, -y)$$

- Centralna simetrija u prostoru s obzirom na ishodište

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad g(x, y, z) = (-x, -y, -z)$$

- Rotacija u ravnini oko ishodišta
- Rotacija u prostoru oko x-osi, rotacija u prostoru oko y-osi, rotacija u prostoru oko z-osi
- Koordinatizacija vektorskog prostora s obzirom na odabranu bazu

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

- Neka je F polje. Za $i = 1, 2, \ldots, n$ definiramo

$$p_i : F^n \to F, \quad p_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i.$$

Preslikavanje p_i je linearni operator kojeg zovemo **i-ta koordinatna funkcija** ili **projektor na i-tu koordinatu**.

- Neka je L potprostor vektorskog prostora V. **Inkluzija**

$$i : L \to V, \quad i(x) = x$$

je linearni operator.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

- Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Za $\lambda \in F$ definiramo preslikavanje

$$h : V \to V, \quad h(x) = \lambda x.$$

Preslikavanje h je linearni operator kojeg zovemo **homotetija** u prostoru V s koeficijentom λ.

Za $\lambda = 0$ dobivamo **nuloperator**

$$n : V \to V, \quad n(x) = \Theta_V.$$

Za $\lambda = 1$ dobivamo **jedinični operator**

$$e : V \to V, \quad e(x) = x.$$

- Neka je $\mathcal{P}(t)$ vektorski prostor polinoma s realnim koeficijentima u varijabli t. Operator deriviranja

$$d : \mathcal{P}(t) \to \mathcal{P}(t), \quad d(p) = p'$$

$$d(p) = d\left(\sum_{i=0}^{k} a_i t^i\right) = \sum_{i=1}^{k} i a_i t^{i-1}$$

je linearni operator. Nadalje,

$$d\big|_{\mathcal{P}_n(t)} : \mathcal{P}_n(t) \to \mathcal{P}_{n-1}(t).$$

Drugim riječima, derivacija polinoma stupnja n je polinom stupnja $n-1$.

- Neka je $\mathcal{P}(t)$ vektorski prostor polinoma s realnim koeficijentima u varijabli t. Operator integriranja

$$s : \mathcal{P}(t) \to \mathcal{P}(t), \quad s(p) = \int_0^t p(x)\,\mathrm{d}x$$

$$s(p) = s\left(\sum_{i=0}^{k} a_i t^i\right) = \sum_{i=0}^{k} \frac{a_i}{i+1}\, t^{i+1}$$

je linearni operator. Nadalje,

$$s\big|_{\mathcal{P}_n(t)} : \mathcal{P}_n(t) \to \mathcal{P}_{n+1}(t).$$

Drugim riječima, integral polinoma stupnja n je polinom stupnja $n+1$.

Primjer 4.1.

Zadano je preslikavanje $k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $k(z) = \bar{z}$ *kojeg zovemo konjugiranje. Dokažite sljedeće tvrdnje:*

a) *Ako* $\mathbb{C}$ *promatramo kao realni vektorski prostor, tada je konjugiranje linearni operator.*

b) *Ako* $\mathbb{C}$ *promatramo kao kompleksni vektorski prostor, tada konjugiranje nije linearni operator.*

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Primjer 4.1.

Zadano je preslikavanje $k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $k(z) = \bar{z}$ *kojeg zovemo konjugiranje. Dokažite sljedeće tvrdnje:*

- a) *Ako* $\mathbb{C}$ *promatramo kao realni vektorski prostor, tada je konjugiranje linearni operator.*
- b) *Ako* $\mathbb{C}$ *promatramo kao kompleksni vektorski prostor, tada konjugiranje nije linearni operator.*

Rješenje.

Koristimo dva poznata svojstva konjugiranja kompleksnih brojeva:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

- a) Neka su $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ i $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ proizvoljni. Tada je $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1$ i $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2$ pa dobivamo

$$k(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \overline{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2} = \bar{\alpha}_1 \bar{z}_1 + \bar{\alpha}_2 \bar{z}_2 =$$
$$= \alpha_1 k(z_1) + \alpha_2 k(z_2)$$

iz čega slijedi da je konjugiranje linearni operator.

- b) Neka su $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ i $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ proizvoljni. U ovom slučaju je općenito $\bar{\alpha}_1 \neq \alpha_1$ i $\bar{\alpha}_2 \neq \alpha_2$ pa dobivamo

$$k(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \overline{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2} = \bar{\alpha}_1 \bar{z}_1 + \bar{\alpha}_2 \bar{z}_2 =$$
$$= \bar{\alpha}_1 k(z_1) + \bar{\alpha}_2 k(z_2)$$
$$\neq \alpha_1 k(z_1) + \alpha_2 k(z_2)$$

iz čega slijedi da konjugiranje nije linearni operator.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Zadavanje linearnog operatora

Primjer 4.2.

Pronađite linearni operator $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *koji vektore* $(1, 0)$ *i* $(1, 1)$ *preslikava redom u vektore* $(2, 3)$ *i* $(4, 6)$.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Zadavanje linearnog operatora

Primjer 4.2.

Pronađite linearni operator $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ koji vektore $(1,0)$ i $(1,1)$ preslikava redom u vektore $(2,3)$ i $(4,6)$.

Rješenje.

- Vektori $(1,0)$ i $(1,1)$ čine bazu za $\mathbb{R}^2$.
- Vektori $(2,3)$ i $(4,6)$ su linearno zavisni, ali to neće utjecati na rješavanje zadatka.
- Želimo da je $f(1,0) = (2,3)$ i $f(1,1) = (4,6)$.
- Tražimo formulu za $f(x,y)$.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Najprije pronađemo koordinate vektora (x, y) u bazi

$$\mathcal{B} = \{(1,0),\ (1,1)\}.$$

Matrica prijelaza iz kanonske baze u bazu $\mathcal{B}$ je matrica

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica prijelaza iz baze $\mathcal{B}$ u kanonsku bazu je matrica

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Koordinatna matrica vektora (x, y) u bazi $\mathcal{B}$ jednaka je

$$X_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ y \end{bmatrix}.$$

Konačno, koristeći linearnost preslikavanja f možemo dobiti formulu za $f(x, y)$ na temelju poznatih podataka $f(1, 0) = (2, 3)$ i $f(1, 1) = (4, 6)$.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f\big((x - y) \cdot (1, 0) + y \cdot (1, 1)\big) = \\ &= (x - y) \cdot f(1, 0) + y \cdot f(1, 1) = \\ &= (x - y) \cdot (2, 3) + y \cdot (4, 6) = \\ &= (2x + 2y,\ 3x + 3y) \end{aligned}$$

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Primjer 4.3.

Postoji li linearni operator $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *takav da je*

$$g(1,2) = (-1,3) \ \ \textit{i} \ \ g(3,6) = (0,1)?$$

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Primjer 4.3.

Postoji li linearni operator $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *takav da je*

$$g(1,2) = (-1,3) \;\; i \;\; g(3,6) = (0,1)?$$

Rješenje.

Vektori $(1,2)$ i $(3,6)$ su linearno zavisni i vrijedi $(3,6) = 3 \cdot (1,2)$.
Kako g mora biti linearni operator, slijedi

$$g(3,6) = g(3 \cdot (1,2)) = 3 \cdot g(1,2) = 3 \cdot (-1,3) = (-3,9)$$

pa zaključujemo da traženi linearni operator ne postoji.

Koliko ima linearnih operatora $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ za koje vrijedi

$$g(1,2) = (-1,3) \;\; \text{i} \;\; g(3,6) = (-3,9)?$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Teorem 4.1.

Neka je $(a_1, \ldots, a_k)$ linearno nezavisni uređeni skup vektora iz prostora U, a $(b_1, \ldots, b_k)$ bilo koji uređeni skup vektora iz prostora V. Tada postoji barem jedan linearni operator $f : U \to V$ takav da je $f(a_i) = b_i$, $\forall i = 1, \ldots, k$.

Dokaz.

Ako uređeni skup $(a_1, \ldots, a_k)$ nije baza za U, tada ga možemo (i to na više načina) nadopuniti do baze prostora U. Neka je

$$(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$$

jedna takva nadopuna do baze. Neka je

$$(b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n)$$

bilo koje proširenje danog uređenog skupa vektora $(b_1, \ldots, b_k)$ iz V. Moguće je također da je $b_i = b_j$ za neke $i \neq j$.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Neka je $a \in U$ bilo koji vektor. On ima jedinstven prikaz

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$$

u bazi $(a_1, \ldots, a_n)$ pa je dobro definirani operator $f : U \to V$ s

$$f(a) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i. \qquad (\blacktriangle)$$

Tvrdimo da je f linearni operator i da ima traženo svojstvo. Stavimo li u $(\blacktriangle)$ $\alpha_i = 1,\ \alpha_j = 0,\ j \neq i$ dobivamo

$$f(a_i) = b_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

pa stoga operator f ima traženo svojstvo.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Dokažimo još da je f linearni operator.

$$f(\alpha a + \beta b) = f\left(\alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i + \beta \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\right) =$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i + \beta\beta_i) a_i\right) \overset{(\blacktriangle)}{=} \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i + \beta\beta_i) b_i =$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i + \beta \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i =$$

$$\overset{(\blacktriangle)}{=} \alpha f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i\right) + \beta f\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\right) =$$

$$= \alpha f(a) + \beta f(b)$$

♡

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Korolar 4.1.

Ako je $(a_1, \ldots, a_n)$ baza za U i $(b_1, \ldots, b_n)$ bilo koji uređeni skup vektora iz V, tada postoji jedinstveni linearni operator $f : U \to V$ sa svojstvom $f(a_i) = b_i$ za svaki $i = 1, \ldots, n$.

Dokaz.

Egzistencija od f je dokazana u prethodnom teoremu. Treba još dokazati jedinstvenost. Kada bi postojao još jedan linearni operator $g : U \to V$ sa svojstvom $g(a_i) = b_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$, tada bi za $a \in U$ imali

$$g(a) = g\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(a_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i\right) = f(a)$$

pa bi zaista bilo $f = g$. ♡

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Korolar 4.2.

Neka je $\mathcal{B} = (a_1, \ldots, a_n)$ *baza prostora* U*, a* $f : \mathcal{B} \to V$ *bilo koje preslikavanje. Tada postoji jedinstveni linearni operator* $g : U \to V$ *koji proširuje* f*, tj. za koji vrijedi* $g\big|_{\mathcal{B}} = f$*.*

Dokaz.

Neka je $f(a_i) = b_i$. Prema prethodnom korolaru postoji jedinstveni linearni operator $g : U \to V$ takav da je $g(a_i) = b_i = f(a_i)$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$, tj. $g\big|_{\mathcal{B}} = f$. ♡

Važna napomena

Linearni operator je dovoljno zadati na bazi prostora. Dva linearna operatora $U \to V$ su jednaka akko imaju isto djelovanje na bilo kojoj bazi prostora U.

Izomorfizam vektorskih prostora

Definicija izomorfizma

Neka su U i V vektorski prostori nad istim poljem F. Kažemo da je preslikavanje $f : U \to V$ izomorfizam vektorskih prostora ako vrijedi

1. f je linearni operator,
2. f je bijekcija.

Izomorfizam $f : U \to U$ zove se automorfizam od U ili regularni operator.

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Definicija izomorfnih vektorskih prostora

Kažemo da je prostor U izomorfan s prostorom V ako postoji barem jedan izomorfizam $f : U \to V$. U tom slučaju pišemo $U \cong V$.

Propozicija 4.5.

Jedinični operator je izomorfizam. Inverz izomorfizma je izomorfizam. Kompozicija izomorfizama je izomorfizam.

Propozicija 4.6.

Relacija $\cong$, tj. relacija "biti izomorfan" je relacija ekvivalencije na klasi svih vektorskih prostora nad istim poljem.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Propozicija 4.7.

Neka je $f : U \to V$ izomorfizam vektorskih prostora, a S bilo koji skup vektora iz U. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

1. *Skup S je linearno nezavisan u prostoru U akko je $f(S)$ linearno nezavisan u prostoru V.*
2. *Skup S razapinje prostor U akko skup $f(S)$ razapinje prostor V.*
3. *Skup T je linearno nezavisan u prostoru V akko je $f^{-1}(T)$ linearno nezavisan u prostoru U.*
4. *Skup T razapinje prostor V akko skup $f^{-1}(T)$ razapinje prostor U.*

Dokaz.

1. Tvrdnju je dovoljno dokazati u slučaju da je S konačni skup jer je po definiciji beskonačni skup linearno nezavisni ako je svaki njegov konačni podskup linearno nezavisni.

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Pretpostavimo da je $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ linearno nezavisni skup u prostoru U. Tvrdimo da je $f(S) = \{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_k)\}$ linearno nezavisni skup u prostoru V. Kako je f linearni operator, iz

$$\alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + \cdots + \alpha_k f(a_k) = \Theta_V \tag{$\clubsuit$}$$

slijedi

$$f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k) = \Theta_V.$$

Svaki linearni operator nulvektor preslikava u nulvektor, a kako je f injekcija slijedi da mora biti

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k = \Theta_U.$$

Kako je po pretpostavci skup S linearno nezavisan, iz posljednje jednakosti slijedi $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. Iz ($\clubsuit$) tada slijedi da je $f(S)$ linearno nezavisni skup u prostoru V.

Obrnuto, pretpostavimo da je $f(S) = \{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_k)\}$ linearno nezavisni skup u prostoru V. Tvrdimo da je tada skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ linearno nezavisni u prostoru U. Kako je f linearni operator, iz

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k = \Theta_U \qquad (\spadesuit)$$

slijedi

$$f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k) = \Theta_V,$$

odnosno

$$\alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + \cdots + \alpha_k f(a_k) = \Theta_V.$$

Kako je po pretpostavci skup $f(S)$ linearno nezavisan, iz posljednje jednakosti slijedi $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. Iz $(\spadesuit)$ tada slijedi da je S linearno nezavisni skup u prostoru U.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

2. Pretpostavimo da je S skup izvodnica za prostor U. Neka je $y \in V$ proizvoljni vektor. Kako je je f bijekcija, postoji jedinstveni $x \in U$ takav da je $f(x) = y$. Kako je S skup izvodnica za U, postoji konačno mnogo vektora $a_1, a_2, \ldots, a_k \in S$ takvi da je $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$ za neke skalare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ iz polja F. Kako je f linearni operator, slijedi

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k) = \\ &= \alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + \cdots + \alpha_k f(a_k). \end{aligned}$$

Dakle, $y = \alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + \cdots + \alpha_k f(a_k)$. Kako je $y \in V$ proizvoljni vektor, zaključujemo da je $f(S)$ skup izvodnica za prostor V.

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Obrnuto, pretpostavimo da je $f(S)$ skup izvodnica za prostor V. Neka je $x \in U$ proizvoljni vektor. Tada postoji konačno mnogo vektora $a_1, a_2, \ldots, a_k \in S$ takvi da je

$$f(x) = \alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + \cdots + \alpha_k f(a_k)$$

za neke skalare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ iz polja F. Kako je f linearni operator, slijedi

$$f(x) = f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k).$$

Konačno, zbog injektivnosti operatora f mora biti

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k.$$

Kako je $x \in U$ proizvoljni vektor, zaključujemo da je S skup izvodnica za prostor U.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

3. Tvrdnja slijedi iz prve već dokazane tvrdnje i činjenice da je $f^{-1} : V \to U$ također izomorfizam.
4. Tvrdnja slijedi iz druge već dokazane tvrdnje i činjenice da je $f^{-1} : V \to U$ također izomorfizam.

$\heartsuit$

Iz prethodne propozicije slijedi da izomorfizam vektorskih prostora čuva njihove baze, tj.

Korolar 4.3.

Neka je $f : U \to V$ izomorfizam vektorskih prostora. Tada f svaku bazu od U preslikava u neku bazu prostora V, i obratno, svaka baza prostora V je slika neke baze prostora U.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Izomorfni vektorski prostori su iste apstraktne strukture, a mogu se razlikovati jedino u naravi svojih elemenata. Za konačnodimenzionalne vektorske prostore vrijedi sljedeći važni teorem.

Teorem 4.2.

Dva konačnodimenzionalna vektorska prostora nad istim poljem F su izomorfni akko imaju jednake dimenzije.

Prehodni teorem daje sljedeću važnu tvrdnju.

Korolar 4.4.

Svaki vektorski prostor V dimenzije n nad poljem F je izomorfan s koordinatnim prostorom F^n.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Pojasnimo posljednji korolar na konkretnom primjeru. Sjetimo se realnog vektorskog prostora $M_2(\mathbb{R})$. Kako je $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$, prema prethodnom korolaru je $M_2(\mathbb{R})$ izomorfan s $\mathbb{R}^4$. Pogledajmo na intuitivnom nivou zbog čega je to tako. Sjetimo se zbrajanja vektora u $M_2(\mathbb{R})$ i $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$$

Možemo uočiti da se zbrajanje u $M_2(\mathbb{R})$ i $\mathbb{R}^4$ odvija po potpuno istom pravilu tako da se zbrajaju odgovarajuće komponente u polju $\mathbb{R}$.

Isto tako, sjetimo se množenja vektora skalarom u $M_2(\mathbb{R})$ i $\mathbb{R}^4$.

$$k \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

$$k \cdot (a, b, c, d) = (ka, kb, kc, kd)$$

Također možemo uočiti da se množenje vektora skalarom u $M_2(\mathbb{R})$ i $\mathbb{R}^4$ odvija po potpuno istom pravilu. U tom smislu se vektorski prostori $M_2(\mathbb{R})$ i $\mathbb{R}^4$ ni po čemu ne razlikuju, osim naravno u prirodi svojih elemenata i zbog toga kažemo da su oni izomorfni.

Intuitivno, posljednji korolar upravo želi reći da u bilo kojem vektorskom prostoru dimenzije n nad poljem F nema bitno drukčijeg pravila zbrajanja i pravila množenja skalarom od onih koje koristimo u vektorskom prostoru F^n.

Rang i defekt

Linearni operator čuva potprostore. O tome govori sljedeća propozicija.

Propozicija 4.8.

Neka je $f : U \to V$ linearni operator.

1. *Ako je $L < U$, onda je $f(L) < V$.*
2. *Ako je $M < V$, onda je $f^{-1}(M) < U$.*

Dokaz.

1. Neka su $a, b \in f(L)$ bilo koji vektori, a $\alpha, \beta \in F$ proizvoljni skalari. Neka su $x, y \in L$ takvi da je $f(x) = a$, $f(y) = b$. Kako je $L < U$, onda je $\alpha x + \beta y \in L$. Sada imamo

$$\alpha a + \beta b = \alpha f(x) + \beta f(y) = f(\alpha x + \beta y) \in f(L)$$

pa je zaista $f(L) < V$.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

2. Neka su $x, y \in f^{-1}(M)$ bilo koji vektori, a $\alpha, \beta \in F$ proizvoljni skalari. Tada je $f(x) \in M$, $f(y) \in M$. Kako je $M < V$, slijedi da je $\alpha f(x) + \beta f(y) \in M$. Zbog linearnosti preslikavanja f vrijedi

$$\alpha f(x) + \beta f(y) = f(\alpha x + \beta y)$$

pa je $f(\alpha x + \beta y) \in M$. Stoga je $\alpha x + \beta y \in f^{-1}(M)$ iz čega slijedi da je $f^{-1}(M) < U$. ♡

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Definicija slike i jezgre linearnog operatora

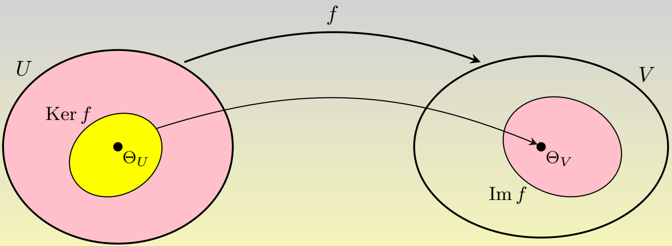
Neka je $f : U \to V$ linearni operator.

Slika od f je skup

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in U\}.$$

Jezgra ili **nulprostor** od f je skup

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in U \mid f(x) = \Theta_V\}.$$



Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Iz prethodne propozicije slijedi

Korolar 4.5.

Neka je $f : U \to V$ *linearni operator. Tada je* $\mathrm{Im}\, f < V$ *i* $\mathrm{Ker}\, f < U$.

Dokaz.

Iako korolar odmah slijedi iz prethodne propozicije za $L = U$ i $M = \{\Theta_V\}$, radi preglednosti i boljeg razumijevanja provedimo zasebni dokaz.

Dokažimo najprije da je $\mathrm{Ker}\, f < U$. Neka su $x, y \in \mathrm{Ker}\, f$ i $\alpha, \beta \in F$ proizvoljni. Tada je $f(x) = \Theta_V$ i $f(y) = \Theta_V$. Kako je f linearni operator, slijedi

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha \cdot \Theta_V + \beta \cdot \Theta_V = \Theta_V$$

pa je $\alpha x + \beta y \in \mathrm{Ker}\, f$. Stoga je $\mathrm{Ker}\, f < U$.

Dokažimo da je $\operatorname{Im} f < V$. Neka su $a, b \in \operatorname{Im} f$ i $\alpha, \beta \in F$ proizvoljni. Tada postoje $x, y \in U$ takvi da je $f(x) = a$ i $f(y) = b$. Kako je f linearni operator, slijedi

$$\alpha a + \beta b = \alpha f(x) + \beta f(y) = f(\underbrace{\alpha x + \beta y}_{\in U})$$

pa je $\alpha a + \beta b \in \operatorname{Im} f$. Stoga je $\operatorname{Im} f < V$. ♡

Definicija ranga i defekta linearnog operatora

Neka je $f : U \to V$ linearni operator.

- **Rang** od f je broj $r(f) = \dim(\operatorname{Im} f)$.
- **Defekt** od f je broj $d(f) = \dim(\operatorname{Ker} f)$.

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Propozicija 4.9.

Linearni operator $f : U \to V$ je injekcija akko je $d(f) = 0$.

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Neka je $f : U \to V$ injekcija. Znamo da svaki linearni operator nulvektor preslikava u nulvektor, tj. $\Theta_U \in \operatorname{Ker} f$. Međutim, kako je f injekcija, u njegovoj jezgri ne smije biti drugih vektora osim nulvektora jer bi inače bilo narušeno svojstvo injektivnosti. Stoga je $\operatorname{Ker} f = \{\Theta_U\}$ pa je $d(f) = 0$.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

⇐

Neka je $d(f) = 0$. Tada je $\mathrm{Ker}\, f = \{\Theta_U\}$. Tvrdimo da je f injekcija.

Pretpostavimo da je $f(x) = f(y)$ za neke $x, y \in U$. Tada je $f(x) - f(y) = \Theta_V$.

Zbog linearnosti operatora f slijedi $f(x-y) = \Theta_V$. Zaključujemo da je $x - y \in \mathrm{Ker}\, f$.

Kako je $d(f) = 0$, mora biti $x - y = \Theta_U$, tj. $x = y$.

Dakle, za proizvoljne $x, y \in U$ vrijedi

$$f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x = y$$

iz čega slijedi da je f injekcija. ♡

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Propozicija 4.10.

Neka su U i V konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem F. Linearni operator $f : U \to V$ je surjekcija akko je $r(f) = \dim V$.

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Neka je $f : U \to V$ surjekcija. Tada je $\operatorname{Im} f = V$ iz čega slijedi $r(f) = \dim V$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Neka je $r(f) = \dim V$. Tada je $\operatorname{Im} f$ potprostor od V koji ima dimenziju jednaku dimenziji prostora V. Kako je V konačnodimenzionalni vektorski prostor, zaključujemo da je $\operatorname{Im} f = V$ pa je f surjekcija. ♡

Linearni operatori

Definicija linearnog operatora

Primjeri linearnih operatora

Zadavanje linearnog operatora

Izomorfizam vektorskih prostora

Rang i defekt

Matrični zapis linearnog operatora

Primjeri matričnih zapisa

Računanje slike vektora

Odnos matričnih zapisa istog operatora

Izomorfizam matrica i linearnih operatora

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Problem svojstvenih vrijednosti

Rang i defekt linearnog operatora su povezani preko sljedećeg važnog teorema.

Teorem 4.3 (Teorem o rangu i defektu).

Neka su U i V konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem F, a $f : U \to V$ linearni operator. Tada je suma ranga i defekta od f jednaka dimenziji prostora U, tj.

$$r(f) + d(f) = \dim U.$$

Iz teorema o rangu i defektu slijedi jedna simpatična posljedica.

Korolar 4.6.

Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor. Linearni operator $f : V \to V$ je injekcija akko je surjekcija.

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

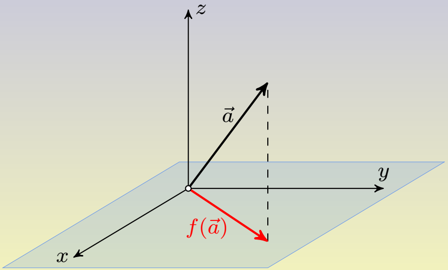
Pretpostavimo da je f injekcija. Tada je $d(f) = 0$. Prema teoremu o rangu i defektu vrijedi $r(f) + d(f) = \dim V$ iz čega zbog $d(f) = 0$ slijedi $r(f) = \dim V$. Kako je $r(f) = \dim V$, zaključujemo da je f surjekcija.

$\boxed{\Leftarrow}$

Pretpostavimo da je f surjekcija. Tada je $r(f) = \dim V$. Prema teoremu o rangu i defektu vrijedi $r(f) + d(f) = \dim V$ iz čega zbog $r(f) = \dim V$ slijedi $d(f) = 0$. Kako je $d(f) = 0$, zaključujemo da je f injekcija. $\heartsuit$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Kako nismo dokazivali teorem o rangu i defektu, uvjerimo se barem na jednom geometrijskom primjeru u njegovu istinitost. Ortogonalno projiciranje $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ prostora na xy-ravninu je linearni operator čija slika je očito xy-ravnina. Stoga je $r(f) = 2$. Nadalje, geometrijski je također jasno da operator f jedino vektore paralelne sa z-osi preslikava u nulvektor pa je njegova jezgra z-os. Stoga je $d(f) = 1$. Vidimo da je suma ranga i defekta jednaka dimenziji domene tog operatora.



Provedimo i formalni račun.

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Primjer 4.4.

Dokažite da je ortogonalno projiciranje na xy-ravninu

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x, y, 0)$$

linearni operator i odredite mu jezgru, sliku, rang i defekt.

Primjer 4.4.

Dokažite da je ortogonalno projiciranje na xy-ravninu

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x, y, 0)$$

linearni operator i odredite mu jezgru, sliku, rang i defekt.

Rješenje.

Dokažimo najprije da je f linearni operator. Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ proizvoljni. Tada je

$$\begin{aligned} & f\big(\alpha \cdot (x_1, y_1, z_1) + \beta \cdot (x_2, y_2, z_2)\big) = \\ & = f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) = \\ & = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, 0) = \\ & = \alpha \cdot (x_1, y_1, 0) + \beta \cdot (x_2, y_2, 0) = \\ & = \alpha \cdot f(x_1, y_1, z_1) + \beta \cdot f(x_2, y_2, z_2) \end{aligned}$$

iz čega slijedi da je f linearni operator.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Neka je $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f$. Tada je $f(x,y,z) = \Theta_{\mathbb{R}^3}$ pa imamo

$$f(x,y,z) = (0,0,0)$$
$$(x,y,0) = (0,0,0)$$

iz čega slijedi $x = 0$ i $y = 0$. Dakle, u jezgri linearnog operatora f se nalaze sve one uređene trojke (x,y,z) za koje je $x = 0$ i $y = 0$. Stoga je

$$\operatorname{Ker} f = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Kako je $(0,0,z) = z \cdot (0,0,1)$, slijedi da je $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f} = \{(0,0,1)\}$ jedna baza za $\operatorname{Ker} f$. Stoga je $d(f) = 1$.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Iz teorema o rangu i defektu slijedi

$$r(f) + d(f) = \dim \mathbb{R}^3$$
$$r(f) + 1 = 3$$
$$r(f) = 2$$

Nadalje, u slici linearnog operatora su uređene trojke oblika $(x, y, 0)$, tj.

$$\operatorname{Im} f = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Kako je

$$(x, y, 0) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0),$$

zaključujemo da je skup $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ skup izvodnica za $\operatorname{Im} f$. Kako već znamo da je $r(f) = 2$, slijedi da je

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$$

jedna baza za $\operatorname{Im} f$.

Matrični zapis linearnog operatora

- Neka su U i V vektorski prostori nad poljem F takvi da je $\dim U = n$ i $\dim V = m$.
- Neka je $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ neka baza za U.
- Neka je $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_m\}$ neka baza za V.
- Neka je $f : U \to V$ linearni operator. Tada je f zadan svojim djelovanjem na bazi $\mathcal{A}$.
- Na temelju poznatih podataka $f(a_1), \dots, f(a_n)$ možemo odrediti $f(x)$ za svaki vektor $x \in U$.
- Vektor $x \in U$ ima jedinstveni prikaz u bazi $\mathcal{A}$, tj. postoje jedinstveni $x_1, \dots, x_n \in F$ takvi da je $x = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$. Tada zbog linearnosti operatora f vrijedi

$$f(x) = f(x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n) = x_1 f(a_1) + \cdots + x_n f(a_n).$$

Linearni operatori

Definicija linearnog operatora

Primjeri linearnih operatora

Zadavanje linearnog operatora

Izomorfizam vektorskih prostora

Rang i defekt

Matrični zapis linearnog operatora

Primjeri matričnih zapisa

Računanje slike vektora

Odnos matričnih zapisa istog operatora

Izomorfizam matrica i linearnih operatora

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Problem svojstvenih vrijednosti

- Zbog toga podatke o djelovanju operatora f na bazi $\mathcal{A}$ spremamo u jednu matricu na sljedeći način. Najprije pronađemo koordinate svakog vektora $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$ u bazi $\mathcal{B}$.

$$
\begin{aligned}
f(a_1) &= \alpha_{11}b_1 + \alpha_{21}b_2 + \cdots + \alpha_{m1}b_m \\
f(a_2) &= \alpha_{12}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \cdots + \alpha_{m2}b_m \\
&\vdots \\
f(a_n) &= \alpha_{1n}b_1 + \alpha_{2n}b_2 + \cdots + \alpha_{mn}b_m
\end{aligned}
$$

- Nakon toga koordinate tih vektora pišemo redom u stupce jedne matrice.

$$
F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}
$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

- Matrica $F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}$ je tipa (m, n) i zovemo ju **matrični zapis**, **matrični prikaz**, **matrična reprezentacija** ili kratko **matrica** operatora f u paru baza $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Stupci te matrice sadrže redom koordinate slika $f(a_k)$ vektora baze $\mathcal{A}$ u bazi $\mathcal{B}$.
- Ako je $U = V$, tada najčešće standardno uzimamo $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ i govorimo o matrici operatora f u bazi $\mathcal{A}$ koju u tom slučaju označavamo s $F_{\mathcal{A}}$.

Napomena.

Pazite, u stupce matrice $F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}$ ne pišemo vektore $f(a_k)$, nego njihove koordinate s obzirom na odabranu bazu $\mathcal{B}$ u kodomeni.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Propozicija 4.11.

Rang linearnog operatora jednak je rangu matrice tog operatora.

Dokaz.

Neka su $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ i $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_m\}$ redom baze za vektorske prostore U i V. Po definiciji je rang linearnog operatora $f : U \to V$ jednak dimenziji skupa $S = \{f(a_1), \ldots, f(a_n)\}$, što je jednako rangu matrice tog skupa s obzirom na bazu $\mathcal{B}$. Spomenuta matrica je jednaka $F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}$, tj. matrici linearnog operatora u paru baza $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ iz čega slijedi tvrdnja. $\heartsuit$

Korolar 4.7.

Linearni operator je izomorfizam vektorskih prostora akko je matrica tog operatora regularna.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Primjeri matričnih zapisa

- operator deriviranja $d : \mathcal{P}_3(t) \to \mathcal{P}_2(t)$ u paru kanonskih baza
  $\mathcal{A} = \{1, t, t^2\}, \quad \mathcal{B} = \{1, t\}$

$$
\begin{aligned}
d(1) &= 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t \\
d(t) &= 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t \\
d(t^2) &= 2t = 0 \cdot 1 + 2 \cdot t
\end{aligned}
$$

$$
D_{(\mathcal{A},\mathcal{B})} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
$$

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

- operator deriviranja $d : \mathcal{P}_3(t) \to \mathcal{P}_2(t)$ u paru baza

  $\mathcal{A} = \{1+t, 2, 3t^2\}, \quad \mathcal{B} = \{5, 3-t\}$

$$d(1+t) = 1 = \frac{1}{5} \cdot 5 + 0 \cdot (3-t)$$

$$d(2) = 0 = 0 \cdot 5 + 0 \cdot (3-t)$$

$$d(3t^2) = 6t = \frac{18}{5} \cdot 5 + (-6) \cdot (3-t)$$

$$D_{(\mathcal{A},\mathcal{B})} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{18}{5} \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Linearni operatori

Definicija linearnog operatora

Primjeri linearnih operatora

Zadavanje linearnog operatora

Izomorfizam vektorskih prostora

Rang i defekt

Matrični zapis linearnog operatora

Primjeri matričnih zapisa

Računanje slike vektora

Odnos matričnih zapisa istog operatora

Izomorfizam matrica i linearnih operatora

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Problem svojstvenih vrijednosti

- operator integriranja $s : \mathcal{P}_3(t) \to \mathcal{P}_4(t)$ u paru kanonskih baza

$$\mathcal{A} = \{1, t, t^2\}, \quad \mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$$

$$\begin{aligned} s(1) &= t = 0 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ s(t) &= \frac{t^2}{2} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ s(t^2) &= \frac{t^3}{3} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \frac{1}{3} \cdot t^3 \end{aligned}$$

$$S_{(\mathcal{A},\mathcal{B})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

- zrcaljenje s obzirom na xy-ravninu u kanonskoj bazi $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$$z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad z(x,y,z) = (x,y,-z)$$

$$z(1,0,0) = (1,0,0) = 1 \cdot (1,0,0) + 0 \cdot (0,1,0) + 0 \cdot (0,0,1)$$
$$z(0,1,0) = (0,1,0) = 0 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) + 0 \cdot (0,0,1)$$
$$z(0,0,1) = (0,0,-1) = 0 \cdot (1,0,0) + 0 \cdot (0,1,0) + (-1) \cdot (0,0,1)$$

$$Z_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

- ortogonalna projekcija na xy-ravninu u kanonskoj bazi $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$$p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = (x,y,0)$$

$$p(1,0,0) = (1,0,0) = 1 \cdot (1,0,0) + 0 \cdot (0,1,0) + 0 \cdot (0,0,1)$$
$$p(0,1,0) = (0,1,0) = 0 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) + 0 \cdot (0,0,1)$$
$$p(0,0,1) = (0,0,0) = 0 \cdot (1,0,0) + 0 \cdot (0,1,0) + 0 \cdot (0,0,1)$$

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ortogonalna projekcija na y-os u kanonskoj bazi $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$$p:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad p(x,y,z) = (0,y,0)$$

$$\begin{aligned} p(1,0,0) &= (0,0,0) = 0\cdot(1,0,0) + 0\cdot(0,1,0) + 0\cdot(0,0,1) \\ p(0,1,0) &= (0,1,0) = 0\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 0\cdot(0,0,1) \\ p(0,0,1) &= (0,0,0) = 0\cdot(1,0,0) + 0\cdot(0,1,0) + 0\cdot(0,0,1) \end{aligned}$$

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

- zrcaljenje s obzirom na x-os u kanonskoj bazi $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$$z:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad z(x,y,z) = (x,-y,-z)$$

$$z(1,0,0) = (1,0,0) = 1\cdot(1,0,0) + 0\cdot(0,1,0) + 0\cdot(0,0,1)$$
$$z(0,1,0) = (0,-1,0) = 0\cdot(1,0,0) + (-1)\cdot(0,1,0) + 0\cdot(0,0,1)$$
$$z(0,0,1) = (0,0,-1) = 0\cdot(1,0,0) + 0\cdot(0,1,0) + (-1)\cdot(0,0,1)$$

$$Z_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

- Neka je V vektorski prostor nad poljem F dimenzije n i $\lambda \in F$ proizvoljni skalar. Homotetija

$$h : V \to V, \quad h(x) = \lambda x$$

je linearni operator koji u bilo kojoj bazi $\mathcal{B} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ od V ima matrični prikaz

$$H = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

H je matrica tipa (n, n).

- Specijalno, za $\lambda = 0$ matrica nuloperatora je nulmatrica, a za $\lambda = 1$ matrica identitete je jedinična matrica.

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

- Rotacija u $\mathbb{R}^2$ oko ishodišta za kut φ u kanonskoj bazi $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ ima matrični prikaz

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

- Rotacija u $\mathbb{R}^3$ oko z-osi za kut φ u kanonskoj bazi $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ ima matrični prikaz

$$R_{z,\varphi} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

- Rotacija u $\mathbb{R}^3$ oko x-osi za kut φ u kanonskoj bazi $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ ima matrični prikaz

$$R_{x,\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

- Rotacija u $\mathbb{R}^3$ oko y-osi za kut φ u kanonskoj bazi $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ ima matrični prikaz

$$R_{y,\varphi} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Linearni operatori

Definicija linearnog operatora

Primjeri linearnih operatora

Zadavanje linearnog operatora

Izomorfizam vektorskih prostora

Rang i defekt

Matrični zapis linearnog operatora

Primjeri matričnih zapisa

Računanje slike vektora

Odnos matričnih zapisa istog operatora

Izomorfizam matrica i linearnih operatora

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Problem svojstvenih vrijednosti

Računanje slike vektora

Kako je linearni operator jednoznačno određen svojim djelovanjem na bilo kojoj bazi u domeni, slijedi da je linearni operator jednoznačno određen svojim matričnim prikazom u bilo kojem paru baza. Preciznije o tome govori sljedeća važna propozicija.

Propozicija 4.12.

Neka su U i V konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem F, a $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ redom neke njihove baze. Neka je $f : U \to V$ linearni operator i $F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}$ matrica od f u paru baza $(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Neka je $X_{\mathcal{A}}$ koordinatna matrica vektora $a \in U$ u bazi $\mathcal{A}$ i $Y_{\mathcal{B}}$ koordinatna matrica vektora $f(a) \in V$ u bazi $\mathcal{B}$. Tada vrijedi $Y_{\mathcal{B}} = F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})} X_{\mathcal{A}}$.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Dokaz.

Neka je $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$, $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_m\}$, $F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})} = [\alpha_{ij}]$, $X_{\mathcal{A}} = [\alpha_i]$, $Y_{\mathcal{B}} = [\beta_i]$. Tada je

$$a = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k, \quad f(a_k) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} b_i$$

pa slijedi

$$f(a) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(a_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} b_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \alpha_k\right) b_i\,.$$

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Dakle, dobili smo

$$f(a) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \alpha_k \right) b_i. \qquad (\square)$$

S druge strane je

$$f(a) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i b_i. \qquad (\blacksquare)$$

Zbog jedinstvenosti prikaza vektora $f(a)$ u bazi $\mathcal{B}$ iz $(\square)$ i $(\blacksquare)$ slijedi

$$\beta_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \alpha_k, \quad \forall\, i = 1, \ldots, m$$

pa iz definicije množenja matrica slijedi $Y_{\mathcal{B}} = F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})} X_{\mathcal{A}}$. ♡

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Primjer 4.5.

Zadan je linearni operator $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *s*

$$f(x, y) = (x + y, x - 2y, 3y).$$

- a *Odredite matricu operatora* f *u paru kanonskih baza.*
- b *Odredite matricu od* f *u paru baza* $\mathcal{A}' = \{(1, -1), (1, 0)\}$ *i* $\mathcal{B}' = \{(0, 1, 0), (1, 2, 0), (1, 1, 1)\}$.
- c *Odredite sliku vektora* $(4, 1)$.

Rješenje.

(a) $\mathcal{A} = \{(1,0),(0,1)\}, \quad \mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

Tražimo koordinate slika vektora iz baze $\mathcal{A}$ u bazi $\mathcal{B}$ i te koordinate pišemo redom u stupce matrice $F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}$.

$$f(1,0) = (1,1,0) = 1\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 0\cdot(0,0,1)$$
$$f(0,1) = (1,-2,3) = 1\cdot(1,0,0) + (-2)\cdot(0,1,0) + 3\cdot(0,0,1)$$

$$F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

ⓑ $\mathcal{A}' = \{(1,-1),(1,0)\}, \quad \mathcal{B}' = \{(0,1,0),(1,2,0),(1,1,1)\}$

Tražimo koordinate slika vektora iz baze $\mathcal{A}'$ u bazi $\mathcal{B}'$ i te koordinate pišemo redom u stupce matrice $F_{(\mathcal{A}',\mathcal{B}')}$.

$$f(1,-1) = (0,3,-3) = \alpha_1 \cdot (0,1,0) + \alpha_2 \cdot (1,2,0) + \alpha_3 \cdot (1,1,1)$$
$$f(1,0) = (1,1,0) = \beta_1 \cdot (0,1,0) + \beta_2 \cdot (1,2,0) + \beta_3 \cdot (1,1,1)$$

Trebamo riješiti dva sustava linearnih jednadžbi.

$$\begin{aligned} \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 3 \\ \alpha_3 &= -3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \beta_2 + \beta_3 &= 1 \\ \beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 &= 1 \\ \beta_3 &= 0 \end{aligned}$$

Kako sustavi imaju istu matricu sustava, možemo ih istovremeno riješiti Gaussovim postupkom tako da u tablici s desne strane odmah napišemo slobodne koeficijente od oba sustava.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

$$
\begin{array}{ccc|cc l}
\hline
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
1 & 2 & 1 & 3 & 1 & \\
0 & 0 & 1 & -3 & 0 & \\
\hline
1 & 2 & 1 & 3 & 1 & \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & / \cdot (-2) \quad + \\
0 & 0 & 1 & -3 & 0 & \\
\hline
1 & 0 & -1 & 3 & -1 & \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
0 & 0 & 1 & -3 & 0 & / \cdot (-1) \quad + \quad / \cdot 1 \quad + \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\
0 & 1 & 0 & 3 & 1 & \\
0 & 0 & 1 & -3 & 0 &
\end{array}
$$

jedinična matrica

$F_{(\mathcal{A}',\mathcal{B}')}$

$$F_{(\mathcal{A}',\mathcal{B}')} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

- Sliku vektora $(4,1)$ odredit ćemo na tri načina:
  - Pomoću formule kojom je operator f zadan.
  - Pomoću matrice $F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}$.
  - Pomoću matrice $F_{(\mathcal{A}',\mathcal{B}')}$.

  Uvjerit ćemo se da u sva tri slučaja dobivamo isti rezultat.

  Iz $f(x,y)=(x+y,x-2y,3y)$ slijedi $f(4,1)=(5,2,3)$.

  Ukoliko sliku vektora $(4,1)$ određujemo preko matrice $F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}$, tada koristimo formulu $Y_{\mathcal{B}}=F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}X_{\mathcal{A}}$. Dakle, moramo pronaći koordinate vektora $(4,1)$ u bazi $\mathcal{A}$, a kao rezultat dobit ćemo koordinate njegove slike u bazi $\mathcal{B}$. Kako je $\mathcal{A}$ kanonska baza, slijedi $X_{\mathcal{A}}=\left[\begin{smallmatrix}4\\1\end{smallmatrix}\right]$. Stoga je

$$Y_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}1&1\\1&-2\\0&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\2\\3\end{bmatrix}.$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Ako sliku vektora $(4,1)$ određujemo preko matrice $F_{(\mathcal{A}',\mathcal{B}')}$, tada koristimo formulu $Y_{\mathcal{B}'} = F_{(\mathcal{A}',\mathcal{B}')} X_{\mathcal{A}'}$. Dakle, moramo pronaći koordinate vektora $(4,1)$ u bazi $\mathcal{A}'$, a kao rezultat dobit ćemo koordinate njegove slike u bazi $\mathcal{B}'$. Matrica prijelaza iz baze $\mathcal{A}$ u bazu $\mathcal{A}'$ je $S = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Iz $X_{\mathcal{A}} = S_{\mathcal{A}\to\mathcal{A}'} X_{\mathcal{A}'}$ slijedi

$$X_{\mathcal{A}'} = S^{-1} X_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Konačno, iz $Y_{\mathcal{B}'} = F_{(\mathcal{A}',\mathcal{B}')} X_{\mathcal{A}'}$ dobivamo

$$Y_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Usporedimo sada rezultate dobivene na tri različita načina.

$$f(4,1) = (5,2,3), \quad Y_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad Y_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Prva dva rezultata nam jasno daju do znanja da je slika vektora $(4,1)$ vektor $(5,2,3)$. Međutim, treći rezultat nas na prvi pogled malo zbunjuje i sugerira nam da je slika vektora $(4,1)$ vektor $(-5,2,3)$. No, kako je f funkcija, nije moguće da se vektor $(4,1)$ preslika u dva različita vektora. Dakle, negdje griješimo u interpretaciji dobivenih rezultata.

Zapravo griješimo u interpretaciji uređene trojke $(-5,2,3)$. Uređena trojka $(-5,2,3)$ zapravo predstavlja koordinate slike vektora $(4,1)$ u bazi $\mathcal{B}' = \{(0,1,0),(1,2,0),(1,1,1)\}$. Dakle, $(-5,2,3)$ predstavlja

$$-5 \cdot (0,1,0) + 2 \cdot (1,2,0) + 3 \cdot (1,1,1) = (5,2,3)$$

pa se opet zaista radi o istom vektoru $(5,2,3)$.

Linearni operatori

- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Napomena.

Kada računamo sliku vektora pomoću formule

$$Y_{\mathcal{B}} = F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})} X_{\mathcal{A}}, \qquad (\spadesuit)$$

tada ne radimo direktno sa samim vektorima, već s njihovim koordinatama u odabranim bazama za domenu i kodomenu. U tom slučaju najprije moramo pronaći **koordinate** vektora u bazi $\mathcal{A}$, a nakon primjene formule ($\spadesuit$) dobivamo **koordinate** njegove slike u bazi $\mathcal{B}$.

Ako se radi o kanonskim bazama, tada se koordinate vektora podudaraju s komponentama tog vektora pa niti ne uočavamo razliku između vektora i koordinata kao što smo mogli vidjeti u prethodnom primjeru. Međutim, formula ($\spadesuit$) je vezana uz odabrane koordinatne sustave, tj. baze u domeni i kodomeni pa treba znati na ispravni način koristiti tu formulu i pažljivo interpretirati rezultate koje ona daje.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Odnos matričnih zapisa istog operatora

U prethodnom primjeru promatrali smo linearni operator

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y) = (x+y, x-2y, 3y)$$

i pronašli njegove matrične prikaze

$$F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad F_{(\mathcal{A}',\mathcal{B}')} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

u parovima baza

$$\mathcal{A} = \{(1,0),(0,1)\}, \quad \mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

$$\mathcal{A}' = \{(1,-1),(1,0)\}, \quad \mathcal{B}' = \{(0,1,0),(1,2,0),(1,1,1)\}.$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Pitamo se postoji li neka veza između matrica $F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}$ i $F_{(\mathcal{A}',\mathcal{B}')}$. Uvjerimo se najprije na ovom primjeru da veza zaista postoji.

- Pronađite matrice prijelaza $\mathcal{A} \xrightarrow{S} \mathcal{A}'$ i $\mathcal{B} \xrightarrow{T} \mathcal{B}'$.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Pitamo se postoji li neka veza između matrica $F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}$ i $F_{(\mathcal{A}',\mathcal{B}')}$. Uvjerimo se najprije na ovom primjeru da veza zaista postoji.

- Pronađite matrice prijelaza $\mathcal{A} \xrightarrow{S} \mathcal{A}'$ i $\mathcal{B} \xrightarrow{T} \mathcal{B}'$.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Pitamo se postoji li neka veza između matrica $F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}$ i $F_{(\mathcal{A}',\mathcal{B}')}$. Uvjerimo se najprije na ovom primjeru da veza zaista postoji.

- Pronađite matrice prijelaza $\mathcal{A} \xrightarrow{S} \mathcal{A}'$ i $\mathcal{B} \xrightarrow{T} \mathcal{B}'$.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Odredite inverz matrice T.

Linearni operatori

Definicija linearnog operatora

Primjeri linearnih operatora

Zadavanje linearnog operatora

Izomorfizam vektorskih prostora

Rang i defekt

Matrični zapis linearnog operatora

Primjeri matričnih zapisa

Računanje slike vektora

Odnos matričnih zapisa istog operatora

Izomorfizam matrica i linearnih operatora

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Problem svojstvenih vrijednosti

Pitamo se postoji li neka veza između matrica $F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}$ i $F_{(\mathcal{A}',\mathcal{B}')}$. Uvjerimo se najprije na ovom primjeru da veza zaista postoji.

- Pronađite matrice prijelaza $\mathcal{A} \xrightarrow{S} \mathcal{A}'$ i $\mathcal{B} \xrightarrow{T} \mathcal{B}'$.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Odredite inverz matrice T.

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Pitamo se postoji li neka veza između matrica $F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}$ i $F_{(\mathcal{A}',\mathcal{B}')}$. Uvjerimo se najprije na ovom primjeru da veza zaista postoji.

- Pronađite matrice prijelaza $\mathcal{A} \xrightarrow{S} \mathcal{A}'$ i $\mathcal{B} \xrightarrow{T} \mathcal{B}'$.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Odredite inverz matrice T.

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Usporedite matrice $T^{-1}F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}S$ i $F_{(\mathcal{A}',\mathcal{B}')}$

Linearni operatori

Definicija linearnog operatora

Primjeri linearnih operatora

Zadavanje linearnog operatora

Izomorfizam vektorskih prostora

Rang i defekt

Matrični zapis linearnog operatora

Primjeri matričnih zapisa

Računanje slike vektora

Odnos matričnih zapisa istog operatora

Izomorfizam matrica i linearnih operatora

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Problem svojstvenih vrijednosti

Pitamo se postoji li neka veza između matrica $F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}$ i $F_{(\mathcal{A}',\mathcal{B}')}$. Uvjerimo se najprije na ovom primjeru da veza zaista postoji.

- Pronađite matrice prijelaza $\mathcal{A} \xrightarrow{S} \mathcal{A}'$ i $\mathcal{B} \xrightarrow{T} \mathcal{B}'$.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Odredite inverz matrice T.

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Usporedite matrice $T^{-1}F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}S$ i $F_{(\mathcal{A}',\mathcal{B}')}$ i uočite da su one jednake.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Propozicija 4.13.

Neka je $f : U \to V$ *linearni operator, a* $F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}$ *i* $F_{(\mathcal{A}',\mathcal{B}')}$ *njegove matrice u paru baza* $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ *odnosno* $(\mathcal{A}',\mathcal{B}')$*. Tada vrijedi*

$$F_{(\mathcal{A}',\mathcal{B}')} = T^{-1} F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})} S$$

gdje su S *i* T *matrice prijelaza*

$$\mathcal{A} \xrightarrow{S} \mathcal{A}', \quad \mathcal{B} \xrightarrow{T} \mathcal{B}'.$$

Dokaz.

Neka je $a \in U$ proizvoljni vektor, a $X_{\mathcal{A}}$ i $X_{\mathcal{A}'}$ njegove koordinatne matrice u bazama $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ prostora U. Neka su $Y_{\mathcal{B}}$ i $Y_{\mathcal{B}'}$ koordinatne matrice od $f(a)$ u bazama $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ prostora V. Tada je

$$X_{\mathcal{A}} = S X_{\mathcal{A}'} \qquad Y_{\mathcal{B}} = F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})} X_{\mathcal{A}}$$

$$Y_{\mathcal{B}} = T Y_{\mathcal{B}'} \qquad Y_{\mathcal{B}'} = F_{(\mathcal{A}',\mathcal{B}')} X_{\mathcal{A}'}$$

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Primjenom prethodno navedenih relacija dobivamo

$$F_{(\mathcal{A}',\mathcal{B}')}X_{\mathcal{A}'} = Y_{\mathcal{B}'} = T^{-1}Y_{\mathcal{B}} = T^{-1}F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}X_{\mathcal{A}} =$$
$$= T^{-1}F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}SX_{\mathcal{A}'} = \left(T^{-1}F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}S\right)X_{\mathcal{A}'}.$$

Kako za svaku koordinatnu matricu $X_{\mathcal{A}'}$ vrijedi

$$F_{(\mathcal{A}',\mathcal{B}')}X_{\mathcal{A}'} = \left(T^{-1}F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}S\right)X_{\mathcal{A}'},$$

slijedi da je zaista

$$F_{(\mathcal{A}',\mathcal{B}')} = T^{-1}F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}S.$$

♡

Zadatak 4.1.

Neka su $A, B \in M_{mn}$. Dokažite sljedeću tvrdnju:

$$AX = BX \text{ za svaku matricu } X \in M_{n1} \iff A = B.$$

Linearni operatori

Definicija linearnog operatora

Primjeri linearnih operatora

Zadavanje linearnog operatora

Izomorfizam vektorskih prostora

Rang i defekt

Matrični zapis linearnog operatora

Primjeri matričnih zapisa

Računanje slike vektora

Odnos matričnih zapisa istog operatora

Izomorfizam matrica i linearnih operatora

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Problem svojstvenih vrijednosti

Definicija ekvivalentnih matrica

Za matrice $A, B \in M_{mn}$ kažemo da su ekvivalentne ako postoje regularne matrice $S \in M_m$ i $T \in M_n$ takve da je $B = SAT$. U tom slučaju pišemo $A \sim B$.

Definicija sličnih matrica

Za matrice $A, B \in M_n$ kažemo da su slične ako postoji regularna matrica $T \in M_n$ takva da je $B = T^{-1}AT$. U tom slučaju pišemo $A \simeq B$.

Korolar 4.8.

Matrični zapisi F i F' istog linearnog operatora $f : U \to V$ u različitim parovima baza su ekvivalentne matrice, tj. $F \sim F'$.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Korolar 4.9.

Neka su $F_{\mathcal{B}}$ *i* $F_{\mathcal{B}'}$ *matrice operatora* $f : V \to V$ *u bazama* $\mathcal{B}$ *i* $\mathcal{B}'$*. Tada je*

$$F_{\mathcal{B}'} = T^{-1} F_{\mathcal{B}} T,$$

gdje je T *matrica prijelaza* $\mathcal{B} \xrightarrow{T} \mathcal{B}'$*.*

Korolar 4.10.

Matrični zapisi F *i* F' *istog linearnog operatora* $f : V \to V$ *u različitim bazama prostora* V *su slične matrice, tj.* $F \simeq F'$*.*

Primjer 4.6.

Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x,-y)$ *operator zrcaljenja s obzirom na* x*-os. Ako koordinatni sustav rotiramo za* 45° *oko ishodišta, odredite formulu tog operatora u novom koordinatnom sustavu.*

Linearni operatori

Definicija linearnog operatora

Primjeri linearnih operatora

Zadavanje linearnog operatora

Izomorfizam vektorskih prostora

Rang i defekt

Matrični zapis linearnog operatora

Primjeri matričnih zapisa

Računanje slike vektora

Odnos matričnih zapisa istog operatora

Izomorfizam matrica i linearnih operatora

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Problem svojstvenih vrijednosti

Primjer 4.6.

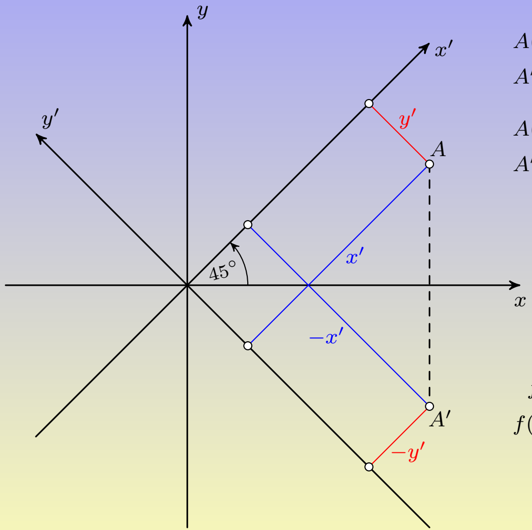
Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x, -y)$ *operator zrcaljenja s obzirom na* x*-os. Ako koordinatni sustav rotiramo za* $45°$ *oko ishodišta, odredite formulu tog operatora u novom koordinatnom sustavu.*

Rješenje.

Označimo s (x, y) koordinate točaka (radijvektora) u standardnom Kartezijevom koordinatnom sustavu, a s (x', y') koordinate točaka u rotiranom koordinatnom sustavu. Pogledamo li sliku na idućem slajdu, do tražene formule možemo odmah doći na temelju zora koristeći znanje iz elementarne geometrije. Gledajući sliku jasno je da promatrani operator u novom koordinatnom sustavu ima formulu $f(x', y') = (-y', -x')$. U novom koordinatnom sustavu taj operator "postaje" zrcaljenje s obzirom na pravac $y' = -x'$ jer x-os u novom koordinatnom sustavu ima jednadžbu $y' = -x'$.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Opustite se i uvjerite se na slici u istinitost napisanih izraza.



$A(x, y)$

$A'(x, -y)$

$A(x', y')$

$A'(-y', -x')$

$$f(x, y) = (x, -y)$$

$$f(x', y') = (-y', -x')$$

Pokažimo kako pomoću formule $F_{\mathcal{B}'} = T^{-1} F_{\mathcal{B}} T$ možemo također doći do istog rezultata.

- Standardni Kartezijev koordinatni sustav u ravnini povezan je s bazom $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$. U bazi $\mathcal{B}$ operator f ima matricu
$$F_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
- Matrica rotacije za kut 45° oko ishodišta u kanonskoj bazi je
$$T = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

  Drugim riječima, rotacijom oko ishodišta za 45° baza $\mathcal{B}$ se preslikava u bazu $\mathcal{B}' = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

- Rotirani koordinatni sustav je povezan s bazom $\mathcal{B}'$ i zapravo želimo pronaći matricu operatora f u toj bazi. Ovdje u igru ulazi formula $F_{\mathcal{B}'} = T^{-1}F_{\mathcal{B}}T$.
- Uočimo da je $\mathcal{B} \xrightarrow{T} \mathcal{B}'$.

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

- Sada iz formule $F_{\mathcal{B}'} = T^{-1}F_{\mathcal{B}}T$ slijedi

$$F_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

- Konačno, korištenjem formule $Y_{\mathcal{B}'} = F_{\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$ za računanje slike vektora dobivamo formulu operatora f u rotiranom koordinatnom sustavu.

$$Y_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y' \\ -x' \end{bmatrix}$$

Dakle, $f(x', y') = (-y', -x')$.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Izomorfizam matrica i linearnih operatora

Neka su U i V vektorski prostori nad poljem F, a $\mathrm{Hom}(U, V)$ skup svih linearnih operatora $U \to V$. U slučaju $U = V$ pišemo kraće $\mathrm{Hom}\, V$.

Na skupu $\mathrm{Hom}(U, V)$ definiramo zbrajanje i množenje skalarom na sljedeći način.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad f, g \in \mathrm{Hom}(U, V)$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad \alpha \in F,\ f \in \mathrm{Hom}(U, V)$$

Uz tako definirane operacije skup $\mathrm{Hom}(U, V)$ postaje vektorski prostor nad poljem F. Međutim, vrijedi i znatno više, a o tome govore sljedeća dva iznimno važna teorema za cjelokupno čovječanstvo.

Linearni operatori

Definicija linearnog operatora

Primjeri linearnih operatora

Zadavanje linearnog operatora

Izomorfizam vektorskih prostora

Rang i defekt

Matrični zapis linearnog operatora

Primjeri matričnih zapisa

Računanje slike vektora

Odnos matričnih zapisa istog operatora

Izomorfizam matrica i linearnih operatora

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Problem svojstvenih vrijednosti

Teorem 4.4.

Neka su $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *i* $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_m\}$ *redom baze za vektorske prostore* U *i* V *nad poljem* $\mathbb{F}$*. Neka je*

$$\Phi : \mathrm{Hom}(U, V) \to M_{mn}(\mathbb{F})$$

operator definiran s

$$\Phi(f) = F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}$$

gdje je $F_{(\mathcal{A},\mathcal{B})}$ *matrica operatora* f *u paru baza* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$*. Tada je* Φ *izomorfizam vektorskih prostora.*

Teorem 4.5.

Neka je $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ *baza za vektorski prostor* V *nad poljem* $\mathbb{F}$*. Neka je*

$$\Phi : \operatorname{Hom} V \to M_n(\mathbb{F})$$

operator definiran s

$$\Phi(f) = F_{\mathcal{B}}$$

gdje je $F_{\mathcal{B}}$ *matrica operatora* f *u bazi* $\mathcal{B}$*. Tada je* Φ *izomorfizam vektorskih prostora za kojeg još vrijedi*

$$\Phi(g \circ f) = \Phi(g) \cdot \Phi(f).$$

Napomena.

Pomoću izomorfizama iz prethodna dva teorema **uz odabrane baze** je uspostavljena korespodencija

$$f + g \mapsto F + G$$

$$\lambda f \mapsto \lambda F$$

$$f \circ g \mapsto FG$$

Dakle, **kada fiksiramo baze**, tada možemo linearni operator poistovjetiti s njegovom matricom, i obratno, svaka matrica predstavlja točno jedan linearni operator. Nadalje, sumi linearnih operatora odgovara suma njihovih matrica, a kompoziciji linearnih operatora odgovara produkt njihovih matrica. Upravo je to glavni razlog onako "čudnog" množenja matrica jer jedino takvo množenje matrica odgovara kompoziciji pripadnih linearnih operatora. Ovo je zaista snažna i duboka veza koja je od neprocjenjive vrijednosti u primjenama.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Nadalje, važno je napomenuti da spomenuto poistovjećivanje matrica i linearnih operatora ovisi o odabranim bazama jer će općenito u različitim bazama ista matrica predstavljati različite linearne operatore, i obratno, u različitim bazama isti linearni operator ima općenito različite matrice.

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Karakteristični polinom

Definicija karakteristične matrice

Neka je $A \in M_n(F)$ kvadratna matrica reda n nad poljem F. Matricu $C = A - \lambda I$ gdje je λ varijabilni parametar zovemo karakteristična matrica ili svojstvena matrica za matricu A.

Ako je $A = [\alpha_{ij}]$, tada je

$$C = \begin{bmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Definicija karakterističnog polinoma matrice

Neka je F polje i $A \in M_n(F)$. Polinom $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ zovemo karakteristični ili svojstveni polinom matrice A.

To je polinom n-tog stupnja u varijabli λ s koeficijentima iz polja F, tj.

$$k_A(\lambda) = k_n\lambda^n + k_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + k_1\lambda + k_0, \quad k_i \in F.$$

Pripadnu jednadžbu

$$k_A(\lambda) = 0$$

zovemo **karakteristična** ili **svojstvena jednadžba** za matricu A.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Iz definicije karakterističnog polinoma i definicije determinante odmah slijedi

Propozicija 4.14.

Ako je $k_A(\lambda) = k_n\lambda^n + k_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + k_1\lambda + k_0$ *karakteristični polinom matrice* $A \in M_n(F)$, *tada je*

$$k_n = (-1)^n, \quad k_{n-1} = (-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}\,A, \quad k_0 = \det A.$$

Sljedeća propozicija omogućuje prenošenje pojma karakterističnog polinoma na linearne operatore tako da on ne ovisi o matričnom zapisu linearnog operatora.

Propozicija 4.15.

Slične matrice imaju isti karakteristični polinom.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Dokaz.

Neka su $A, B \in M_n(F)$ slične matrice. Tada postoji regularna matrica $T \in M_n(F)$ takva da je $B = T^{-1}AT$. Tada zbog Binet-Cauchyjevog teorema slijedi

$$\begin{aligned}
k_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det\left(T^{-1}AT - \lambda(T^{-1}T)\right) = \\
&= \det\left(T^{-1}AT - T^{-1}(\lambda I)T\right) = \\
&= \det\left(T^{-1}(A - \lambda I)T\right) = \\
&= \det T^{-1} \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det T = \\
&= \det T^{-1} \cdot \det T \cdot \det(A - \lambda I) = \\
&= \det(T^{-1}T) \cdot \det(A - \lambda I) = \\
&= \det I \cdot \det(A - \lambda I) = \\
&= \det(A - \lambda I) = k_A(\lambda)
\end{aligned}$$

♡

Definicija karakterističnog polinoma linearnog operatora

Karakteristični ili svojstveni polinom k_g linearnog operatora $g : V \to V$ definiramo s $k_g(\lambda) = k_G(\lambda)$, gdje je G bilo koji matrični prikaz operatora g.

Definicija traga i determinante linearnog operatora

Neka je $g : V \to V$ linearni operator, a G bilo koji matrični prikaz operatora g.

- Trag od g definiramo s $\operatorname{tr} g = \operatorname{tr} G$.
- Determinantu od g definiramo s $\det g = \det G$.

Napomena.

Rang, defekt, karakteristični polinom, trag i determinanta su **invarijante** linearnog operatora $g : V \to V$ jer ne ovise o njegovom matričnom prikazu.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Znamo da je $M_n(F)$ vektorski prostor nad poljem F. Kako je $\dim M_n(F) = n^2$, slijedi da su

$$I, A, A^2, \ldots, A^n, \ldots, A^{n^2}$$

linearno zavisni vektori pa postoje $\alpha_i \in F$ koji nisu svi jednaki nula takvi da je

$$\alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_n A^n + \cdots + \alpha_{n^2} A^{n^2} = O.$$

To zapravo znači da matrica A poništava polinom

$$p(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \cdots + \alpha_{n^2} \lambda^{n^2}.$$

Vrijedi i jača tvrdnja koju ovdje navodimo bez dokaza.

Teorem 4.6 (Hamilton-Cayley).

Svaka kvadratna matrica A poništava svoj karakteristični polinom, tj. $k_A(A) = O$.

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Minimalni polinom

Definicija minimalnog polinoma matrice

Neka je F polje i $A \in M_n(F)$. Minimalni polinom matrice A je svaki onaj polinom $m_A(\lambda) \neq 0$ najnižeg stupnja kojeg matrica A poništava, tj. $m_A(A) = O$.

Pripadnu jednadžbu $m_A(\lambda) = 0$ nazivamo **minimalna jednadžba** matrice A.

Propozicija 4.16.

Neka je $p(\lambda)$ bilo koji polinom s koeficijentima iz polja F kojeg matrica $A \in M_n(F)$ poništava. Tada je $p(\lambda)$ djeljiv sa svakim minimalnim polinomom $m(\lambda)$ matrice A.

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Dokaz.

Iz definicije minimalnog polinoma slijedi da je $\deg m \leqslant \deg p$. Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom postoje polinomi $q(\lambda)$ i $r(\lambda)$ takvi da je

$$p(\lambda) = m(\lambda) \cdot q(\lambda) + r(\lambda),$$

pri čemu je $q(\lambda)$ kvocijentni polinom, a $r(\lambda)$ je ostatak i vrijedi $\deg r < \deg m$. Po pretpostavci je $p(A) = O$ pa imamo

$$p(A) = O = m(A) \cdot q(A) + r(A),$$

a odavde zbog $m(A) = O$ slijedi da je $r(A) = O$. Konačno, zbog minimalnosti od $m(\lambda)$ mora biti $r(\lambda) = 0$ jer u protivnom zbog $\deg r < \deg m$ polinom $m(\lambda)$ ne bi bio minimalni polinom matrice A. Stoga je zaista $p(\lambda)$ djeljiv s minimalnim polinomom $m(\lambda)$. $\heartsuit$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Iz prethodne propozicije odmah slijede sljedeće dvije tvrdnje.

Korolar 4.11.

Karakteristični polinom kvadratne matrice je djeljiv s njezinim minimalnim polinomom.

Korolar 4.12.

Minimalni polinom kvadratne matrice je jedinstven do na skalarni faktor različit od nule, tj. ako su $m_1(\lambda)$ *i* $m_2(\lambda)$ *minimalni polinomi kvadratne matrice* $A \in M_n(F)$, *tada postoji* $\alpha \in F$, $\alpha \neq 0$ *takav da je* $m_2(\lambda) = \alpha \cdot m_1(\lambda)$.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Propozicija 4.17.

Slične matrice imaju iste minimalne polinome.

Dokaz.

Neka su $A, B \in M_n(F)$ slične matrice. Tada postoji regularna matrica $T \in M_n(F)$ takva da je $B = T^{-1}AT$.

Neka su $m_A(\lambda)$ i $m_B(\lambda)$ minimalni polinomi od A i B. Neka je

$$m_A(\lambda) = \alpha_m \lambda^m + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + \alpha_0.$$

Kako je

$$B^j = (T^{-1}AT)^j = T^{-1}A^jT, \qquad j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

dalje dobivamo

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

$$
\begin{aligned}
m_A(B) &= \alpha_m B^m + \alpha_{m-1} B^{m-1} + \cdots + \alpha_0 I = \\
&= \alpha_m (T^{-1}AT)^m + \alpha_{m-1}(T^{-1}AT)^{m-1} + \cdots + \alpha_0 I = \\
&= T^{-1}(\alpha_m A^m)T + T^{-1}(\alpha_{m-1}A^{m-1})T + \cdots + T^{-1}(\alpha_0 I)T = \\
&= T^{-1}(\alpha_m A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + \cdots + \alpha_0 I)T = \\
&= T^{-1} \cdot m_A(A) \cdot T = T^{-1} \cdot O \cdot T = O
\end{aligned}
$$

Kako matrica B poništava minimalni polinom matrice A, mora biti

$$\deg m_B \leqslant \deg m_A. \qquad (\star)$$

Analogno, polazeći od $A = TBT^{-1}$, dobivamo da je $m_B(A) = O$ pa mora biti

$$\deg m_A \leqslant \deg m_B. \qquad (\bullet)$$

Iz $(\star)$ i $(\bullet)$ slijedi $\deg m_B = \deg m_A$.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Kako je $m_A(B) = O$, iz ◂ propozicije 4.16 slijedi

$$\frac{m_A(\lambda)}{m_B(\lambda)} = q(\lambda)$$

za neki polinom $q(\lambda)$. Kako je $\deg m_B = \deg m_A$, mora biti

$$q(\lambda) = \text{const} = \alpha \neq 0.$$

Stoga je $m_A(\lambda) = \alpha m_B(\lambda)$ iz čega slijedi tvrdnja. ♡

Definicija minimalnog polinoma linearnog operatora

Minimalni polinom m_g linearnog operatora $g : V \to V$ definiramo s $m_g(\lambda) = m_G(\lambda)$, gdje je G bilo koji matrični prikaz operatora g.

Napomena.

Iz prethodne propozicije slijedi da je minimalni polinom također jedna invarijanta linearnog operatora jer ne ovisi o njegovom matričnom prikazu.

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Za polinom $p(\lambda)$ s koeficijentima iz polja F kažemo da je **reducibilan** obzirom na to polje ako ga je moguće prikazati u obliku

$$p(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda),$$

gdje su $f(\lambda)$ i $g(\lambda)$ polinomi s koeficijentima iz polja F i svaki od njih je barem prvog stupnja. Za polinom koji nije reducibilan kažemo da je **ireducibilan** obzirom na dano polje.

Na primjer, polinom $\lambda^2 + 1$ je ireducibilan obzirom na polje $\mathbb{R}$, ali je reducibilan obzirom na polje $\mathbb{C}$ jer je $\lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$.

Polinom $\lambda^2 - 1$ je reducibilan obzirom na polje $\mathbb{R}$ i obzirom na polje $\mathbb{C}$ jer je $\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$.

Svaki linearni polinom je ireducibilan.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Na kraju bez dokaza navodimo još jednu dublju vezu između minimalnog i karakterističnog polinoma.

Propozicija 4.18.

Svaki ireducibilni faktor karakterističnog polinoma neke matrice je također ireducibilni faktor minimalnog polinoma te matrice.

Korolar 4.13.

Ako u karakterističnom polinomu nema istih ireducibilnih faktora, tada se taj polinom podudara s nekim minimalnim polinomom matrice.

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Problem svojstvenih vrijednosti

Neka je V vektorski prostor nad poljem F, a $f : V \to V$ linearni operator.

- Intuitivno, pitamo se postoji li vektor različit od nulvektora kojemu linearni operator ne mijenja smjer, tj. nakon što ga preslika samo ga eventualno produlji ili skrati i eventualno mu promijeni orijentaciju.
- Preciznije, pitamo se postoji li $a \in V \setminus \{\Theta_V\}$ takav da je $f(a) = \lambda a$ za neki $\lambda \in F$.
- Ukoliko takav vektor postoji, tada ga zovemo svojstvenim vektorom operatora f, a skalar λ zovemo svojstvena vrijednost operatora f.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Zadatak 4.2.

Geometrijskim (zornim) putem odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore sljedećih linearnih operatora:

a. *Rotacija oko ishodišta u ravnini za kut* α.
b. *Zrcaljenje u ravnini s obzirom na* x*-os.*
c. *Rotacija u prostoru oko* z*-osi za kut* α.
d. *Zrcaljenje u prostoru s obzirom na* xy*-ravninu.*
e. *Zrcaljenje u prostoru s obzirom na* z*-os.*
f. *Ortogonalna projekcija u prostoru na* xy*-ravninu.*
g. *Ortogonalna projekcija u prostoru na* z*-os.*

Definicija svojstvene vrijednosti i svojstvenog vektora

Neka je V vektorski prostor nad poljem F, a $f : V \to V$ linearni operator.

- Skalar $\lambda \in F$ zovemo svojstvena vrijednost operatora f ako postoji vektor $a \in V$, $a \neq \Theta_V$ takav da vrijedi $f(a) = \lambda a$.
- Svaki vektor $a \in V$, $a \neq \Theta_V$ koji zadovoljava navedeni uvjet $f(a) = \lambda a$, naziva se svojstveni vektor operatora f pridružen svojstvenoj vrijednosti λ.

Problem određivanja skalara $\lambda \in F$ i vektora $x \in V$ za koje je

$$f(x) = \lambda x \qquad (\clubsuit)$$

naziva se **problem svojstvenih vrijednosti** za linearni operator $f : V \to V$. Jednadžba $(\clubsuit)$ je jednadžba s dvije nepoznanice: jedna od njih je skalar, a druga je vektor.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Neka je $S(\lambda)$ skup svih svojstvenih vektora (uključujući i nulvektor) linearnog operatora $f : V \to V$ pridruženih svojstvenoj vrijednosti λ, tj.

$$S(\lambda) = \{a \in V : f(a) = \lambda a\}.$$

Tada vrijedi

Propozicija 4.19.

Skup $S(\lambda)$ je potprostor od V.

Potprostor $S(\lambda)$ zovemo **svojstveni potprostor** operatora f pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Dimenziju tog potprostora zovemo **geometrijska kratnost** svojstvene vrijednosti λ.

Linearni operatori

Definicija linearnog operatora

Primjeri linearnih operatora

Zadavanje linearnog operatora

Izomorfizam vektorskih prostora

Rang i defekt

Matrični zapis linearnog operatora

Primjeri matričnih zapisa

Računanje slike vektora

Odnos matričnih zapisa istog operatora

Izomorfizam matrica i linearnih operatora

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Problem svojstvenih vrijednosti

Dokaz.

Neka su $\alpha, \beta \in F$ i $a, b \in S(\lambda)$ proizvoljni. Tvrdimo da je tada $\alpha a + \beta b \in S(\lambda)$.

Kako su $a, b \in S(\lambda)$, slijedi $f(a) = \lambda a$ i $f(b) = \lambda b$.

Zbog linearnosti od f i svojstava operacija u vektorskom prostoru i polju slijedi

$$\begin{aligned} f(\alpha a + \beta b) &= \alpha f(a) + \beta f(b) = \alpha(\lambda a) + \beta(\lambda b) = \\ &= (\alpha\lambda)a + (\beta\lambda)b = (\lambda\alpha)a + (\lambda\beta)b = \\ &= \lambda(\alpha a) + \lambda(\beta b) = \lambda(\alpha a + \beta b) \end{aligned}$$

pa je $\alpha a + \beta b \in S(\lambda)$. Stoga je zaista $S(\lambda) < V$. ♡

Zadatak 4.3.

Koja svojstva operacija u vektorskom prostoru i polju su korištena na pojedinim mjestima u prethodnom dokazu?

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Spektar linearnog operatora

Spektar linearnog operatora f je skup svih svojstvenih vrijednosti operatora f. Označavamo ga sa $\sigma(f)$.

Propozicija 4.20 (Karakterizacija svojstvenih vrijednosti).

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, a $f : V \to V$ linearni operator. Skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ je svojstvena vrijednost operatora f akko je λ_0 nultočka karakterističnog polinoma $k_f(\lambda)$ tog operatora.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Dokaz.

Neka je F matrični zapis operatora f u nekoj bazi prostora V.

$\boxed{\Rightarrow}$

Neka je $\lambda_0 \in \sigma(f)$. Tada postoji $a \in V \setminus \{\Theta_V\}$ takav da je $f(a) = \lambda_0 a$, odnosno

$$(f - \lambda_0 e)(a) = \Theta_V$$

gdje je $e : V \to V$ jedinični operator.

Iz toga slijedi da operator

$$c = f - \lambda_0 e$$

ima netrivijalnu jezgru. Stoga c nije bijektivan pa niti regularan. Kako je matrični zapis operatora c matrica $C = F - \lambda_0 I$, mora biti

$$\det C = \det(F - \lambda_0 I) = 0$$

iz čega slijedi da je λ_0 nultočka od $k_f(\lambda)$.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

⇐

Neka je $\lambda_0 \in F$ takav da je $k_F(\lambda_0) = 0$, tj. $\det(F - \lambda_0 I) = 0$. To znači da $f - \lambda_0 e$ nije regularni operator pa postoji $a \in V \setminus \{\Theta_V\}$ takav da je

$$(f - \lambda_0 e)(a) = \Theta_V .$$

Iz posljednje jednakosti slijedi $f(a) = \lambda_0 a$, što znači da je zaista $\lambda_0 \in \sigma(f)$. ♡

Napomena.

Linearni operator koji djeluje na n-dimenzionalnom prostoru ima najviše n svojstvenih vrijednosti, ali i manje (možda čak nijednu). To ovisi o tome koliko rješenja karakteristične jednadžbe pripada polju nad kojim je linearni operator definiran. Tih teškoća nema ako se promatraju algebarski zatvorena polja.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Primjer 4.7.

Rotacija za kut φ *u* $\mathbb{R}^2$ *nema svojstvenih vrijednosti ako je* $\varphi \neq 0$ *i* $\varphi \neq \pi$*, što je i geometrijski jasno. Rotacija u* $\mathbb{R}^3$ *je uvijek rotacija oko nekog pravca pa ona uvijek ima barem jednu svojstvenu vrijednost.*

Primjer 4.8.

Neka je $f : V \to V$ *linearni operator s matričnim prikazom*

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Njegova karakteristična jednadžba je $\lambda^2 + 4 = 0$*.*

- *Ako je* V *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{C}$*, tada* f *ima dvije svojstvene vrijednosti* $\lambda_1 = 2i$ *i* $\lambda_2 = -2i$*.*
- *Ako je* V *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{R}$*, tada* f *nema svojstvenih vrijednosti.*

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Algebarski zatvoreno polje

Za polje F kažemo da je algebarski zatvoreno ako svaki polinom $p(\lambda)$ s koeficijentima iz tog polja ima nultočku u polju F.

Teorem 4.7.

Svako polje je sadržano u nekom algebarski zatvorenom polju.

Polje $\mathbb{C}$ je algebarski zatvoreno polje, dok polja $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ nisu algebarski zatvorena. Na primjer, koeficijenti polinoma $f(x) = x^2 + 1$ pripadaju poljima $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$, ali taj polinom nema niti jednu nultočku u tim poljima.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Svaki polinom $p(\lambda)$ stupnja $m \geqslant 1$ s koeficijentima iz algebarski zatvorenog polja F dopušta faktorizaciju na linearne faktore u tom polju, tj.

$$p(\lambda) = \alpha_m(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_m)$$

gdje su $\alpha_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F$.

Iz navedenog odmah slijedi sljedeća tvrdnja.

Propozicija 4.21.

Linearni operator koji djeluje na n-dimenzionalnom vektorskom prostoru nad algebarski zatvorenim poljem ima točno n svojstvenih vrijednosti (među kojima može biti i jednakih).

Algebarska kratnost svojstvene vrijednosti λ je njezina kratnost kao nultočke karakterističnog polinoma.

Propozicija 4.22.

Geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti je uvijek manja ili jednaka od njezine algebarske kratnosti.

Neka je $f : V \to V$ linearni operator i $\lambda_0 \in \sigma(f)$. Želimo odrediti svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0. Treba riješiti jednadžbu

$$f(a) = \lambda_0 a \qquad (\bigstar)$$

gdje je vektor $a \in V$ nepoznanica.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Neka je $F_{\mathcal{B}}$ matrični prikaz operatora f u nekoj bazi $\mathcal{B}$ prostora V, a $X_{\mathcal{B}}$ koordinatna matrica vektora a u toj bazi. Tada ($\bigstar$) možemo matrično zapisati u obliku

$$F_{\mathcal{B}} X_{\mathcal{B}} = \lambda_0 X_{\mathcal{B}}$$

odnosno

$$(F_{\mathcal{B}} - \lambda_0 I) X_{\mathcal{B}} = O. \qquad (\blacklozenge)$$

Matrična jednadžba ($\blacklozenge$) je ekvivalentna s homogenim sustavom od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica pri čemu je $n = \dim V$.

Kako je $\det(F_{\mathcal{B}} - \lambda_0 I) = 0$, prema Roucheovom teoremu taj sustav ima i netrivijalnih rješenja. Svako takvo rješenje predstavlja **koordinate u bazi** $\mathcal{B}$ nekog svojstvenog vektora pridruženog svojstvenoj vrijednosti λ_0. Iz općeg rješenja sustava lako se odredi jedna baza za $S(\lambda_0)$, a time i geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti λ_0.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Primjer 4.9.

Odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene potprostore linearnog operatora

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (-7x - 10y,\, 5x + 8y).$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Primjer 4.9.

Odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene potprostore linearnog operatora

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (-7x - 10y,\, 5x + 8y).$$

Rješenje.

Riješit ćemo zadatak na dva načina tako da koristimo matrične zapise linearnog operatora f s obzirom na dvije različite baze vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 0), (0, 1)\} \quad \text{i} \quad \mathcal{B}_2 = \{(1, 3), (-1, 2)\}.$$

Razlog tome je da na konkretnom primjeru bolje shvatimo i utvrdimo obrađeno teoretsko gradivo.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Kako je

$$f(1,0) = (-7,5) = -7 \cdot (1,0) + 5 \cdot (0,1)$$
$$f(0,1) = (-10,8) = -10 \cdot (1,0) + 8 \cdot (0,1)$$

operator f u kanonskoj bazi $\mathcal{B}_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ ima matrični zapis

$$F_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -7 & -10 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Tražimo karakteristični polinom matrice $F_{\mathcal{B}_1}$.

$$k_{F_{\mathcal{B}_1}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & -10 \\ 5 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6$$

Rješavanjem jednadžbe $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ dobivamo $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = -2$. Stoga je $\sigma(f) = \{3, -2\}$.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Odredimo svojstveni potprostor $S(3)$. Trebamo riješiti homogeni sustav linearnih jednadžbi

$$(F_{\mathcal{B}_1} - 3I)X_{\mathcal{B}_1} = O$$

odnosno

$$\left(\begin{bmatrix} -7 & -10 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -10 & -10 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gaussovim postupkom odmah slijedi da mora biti $y = -x$ pa je

$$S(3) = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Iz $(x, -x) = x \cdot (1, -1)$ slijedi da je $\mathcal{B}_{S(3)} = \{(1, -1)\}$ jedna baza za $S(3)$.

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Odredimo svojstveni potprostor $S(-2)$. Trebamo riješiti homogeni sustav linearnih jednadžbi

$$(F_{\mathcal{B}_1} + 2I)X_{\mathcal{B}_1} = O$$

odnosno

$$\left(\begin{bmatrix} -7 & -10 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gaussovim postupkom odmah slijedi da mora biti $x = -2y$ pa je

$$S(-2) = \{(-2y, y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Iz $(-2y, y) = y \cdot (-2, 1)$ slijedi da je $\mathcal{B}_{S(-2)} = \{(-2, 1)\}$ jedna baza za $S(-2)$.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Odredimo sada svojstvene vrijednosti i svojstvene potprostore operatora f tako da koristimo njegov matrični zapis u bazi

$$\mathcal{B}_2 = \{(1,3), (-1,2)\}.$$

Kako je

$$f(1,3) = (-37,29) = -9 \cdot (1,3) + 28 \cdot (-1,2)$$
$$f(-1,2) = (-13,11) = -3 \cdot (1,3) + 10 \cdot (-1,2)$$

operator f u bazi $\mathcal{B}_2$ ima matrični zapis

$$F_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -9 & -3 \\ 28 & 10 \end{bmatrix}.$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Tražimo karakteristični polinom matrice $F_{\mathcal{B}_2}$.

$$k_{F_{\mathcal{B}_2}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -9-\lambda & -3 \\ 28 & 10-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6$$

Rješavanjem jednadžbe $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ dobivamo $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = -2$. Stoga je $\sigma(f) = \{3, -2\}$.

Naravno, dobili smo iste svojstvene vrijednosti kao i u slučaju matrice $F_{\mathcal{B}_1}$ jer znamo da je karakteristični polinom invarijanta linearnog operatora, tj. ne ovisi o njegovom matričnom zapisu. Stoga je spektar također invarijanta linearnog operatora.

Odredimo svojstveni potprostor $S(3)$. Trebamo riješiti homogeni sustav linearnih jednadžbi

$$(F_{\mathcal{B}_2} - 3I)X_{\mathcal{B}_2} = O$$

odnosno

$$\left(\begin{bmatrix} -9 & -3 \\ 28 & 10 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -12 & -3 \\ 28 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gaussovim postupkom odmah slijedi da mora biti $y = -4x$ pa je

$$S(3) = \{(x, -4x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Iz $(x, -4x) = x \cdot (1, -4)$ slijedi da je $\mathcal{B}_{S(3)} = \{(1, -4)\}$ jedna baza za $S(3)$.

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Odredimo svojstveni potprostor $S(-2)$. Trebamo riješiti homogeni sustav linearnih jednadžbi

$$(F_{\mathcal{B}_2} + 2I)X_{\mathcal{B}_2} = O$$

odnosno

$$\left(\begin{bmatrix} -9 & -3 \\ 28 & 10 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 28 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gaussovim postupkom odmah slijedi da mora biti $y = -\frac{7}{3}x$ pa je

$$S(-2) = \left\{\left(x, -\tfrac{7}{3}x\right) : x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Iz $\left(x, -\frac{7}{3}x\right) = x \cdot \left(1, -\frac{7}{3}\right)$ slijedi da je $\mathcal{B}_{S(-2)} = \left\{\left(1, -\frac{7}{3}\right)\right\}$ jedna baza za $S(-2)$.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Kod određivanja svojstvenog potprostora $S(3)$ na prvi pogled smo dobili bitno različite rezultate koristeći matrične zapise $F_{\mathcal{B}_1}$ i $F_{\mathcal{B}_2}$.

- Koristeći matrični zapis $F_{\mathcal{B}_1}$ dobili smo $\mathcal{B}_{S(3)} = \{(1, -1)\}$.
- Koristeći matrični zapis $F_{\mathcal{B}_2}$ dobili smo $\mathcal{B}_{S(3)} = \{(1, -4)\}$.

Jasno je da vektori $(1, -1)$ i $(1, -4)$ ne razapinju isti potprostor od $\mathbb{R}^2$. U čemu je problem? Problem je u tome što pogrešno interpretiramo dobivene rezultate jer su ti rezultati vezani uz dvije različite baze vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$ pa ih ne smijemo direktno uspoređivati po komponentama.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Podatak $(1,-1)$ predstavlja koordinate svojstvenog vektora u bazi $\mathcal{B}_1 = \{(1,0),(0,1)\}$. Dakle, radi se o vektoru

$$1\cdot(1,0)+(-1)\cdot(0,1)=(1,-1).$$

Naravno, u kanonskoj bazi se koordinate vektora podudaraju s njegovim komponentama.

Podatak $(1,-4)$ predstavlja koordinate svojstvenog vektora u bazi $\mathcal{B}_2 = \{(1,3),(-1,2)\}$. Dakle, radi se o vektoru

$$1\cdot(1,3)+(-4)\cdot(-1,2)=(5,-5).$$

Vektori $(1,-1)$ i $(5,-5)$ doduše nisu jednaki, ali su linearno zavisni pa zaista razapinju isti potprostor od $\mathbb{R}^2$.

Drugim riječima, koristeći matrični zapis $F_{\mathcal{B}_1}$ mogli smo umjesto $\mathcal{B}_{S(3)} = \left\{(1,-1)\right\}$ uzeti $\mathcal{B}_{S(3)} = \left\{(5,-5)\right\}$ jer znamo da baza vektorskog prostora ionako nije jedinstveno određena.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Podatak $(-2,1)$ predstavlja koordinate svojstvenog vektora u bazi $\mathcal{B}_1 = \{(1,0),(0,1)\}$. Dakle, radi se o vektoru

$$-2 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1) = (-2,1).$$

Naravno, u kanonskoj bazi se koordinate vektora podudaraju s njegovim komponentama.

Podatak $\left(1, -\frac{7}{3}\right)$ predstavlja koordinate svojstvenog vektora u bazi $\mathcal{B}_2 = \{(1,3),(-1,2)\}$. Dakle, radi se o vektoru

$$1 \cdot (1,3) + \frac{-7}{3} \cdot (-1,2) = \left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}\right).$$

Vektori $(-2,1)$ i $\left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ doduše nisu jednaki, ali su linearno zavisni jer je $\left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}\right) = -\frac{5}{3} \cdot (-2,1)$.

Drugim riječima, koristeći matrični zapis $F_{\mathcal{B}_2}$ mogli smo umjesto $\mathcal{B}_{S(-2)} = \{(-2,1)\}$ uzeti $\mathcal{B}_{S(-2)} = \left\{\left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}\right)\right\}$ jer znamo da baza vektorskog prostora ionako nije jedinstveno određena.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Napomena.

Ponovimo još jednom za sva vremena. Čim u računu koristimo matrični zapis linearnog operatora, tada sve ulazne i izlazne podatke o vektorima moramo interpretirati u terminima baza u kojima je zadana matrica linearnog operatora. Već smo ranije te interpretacije objašnjavali kod računanja slike vektora, a na prethodnom primjeru smo vidjeli da je potpuno ista situacija i kod određivanja svojstvenih vektora. U kanonskim bazama je situacija jednostavnija jer se u tom slučaju koordinate vektora podudaraju s njegovim komponentama pa spontano nismo svjesni te razlike.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Primjer 4.10.

Zadana je matrica

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix}.$$

- a *Odredite karakteristični polinom matrice D, njezin trag i determinantu.*
- b *Odredite spektar matrice D i minimalni polinom.*
- c *Odredite svojstvene potprostore matrice D.*
- d *Odredite inverz matrice D bez direktnog invertiranja.*

Rješenje.

- (a) Karakteristični polinom odredimo po definiciji računanjem determinante.

$$k_D(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 & -3 \\ -1 & -2-\lambda & -3 \\ 3 & 15 & 12-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ /\cdot(2-\lambda) \quad /\cdot 3 \\ \leftarrow + \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \lambda^2-9 & 3\lambda-9 \\ -1 & -2-\lambda & -3 \\ 0 & 9-3\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} \lambda^2-9 & 3\lambda-9 \\ 9-3\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\lambda-3)(\lambda+3) & 3(\lambda-3) \\ -3(\lambda-3) & -(\lambda-3) \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2\cdot \begin{vmatrix} \lambda+3 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-3)^2(-\lambda+6) = -(\lambda-3)^2(\lambda-6)$$

Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Dakle, karakteristični polinom matrice D je

$$k_D(\lambda) = -(\lambda - 3)^2(\lambda - 6)$$

odnosno nakon množenja

$$k_D(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 45\lambda + 54.$$

Determinanta matrice D jednaka je slobodnom članu od $k_D(\lambda)$, tj. $\det D = 54$.

Trag matrice D jednak je sumi elemenata na glavnoj dijagonali.

$$\operatorname{tr} D = 2 + (-2) + 12 = 12.$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

(b) Svojstvene vrijednosti matrice D su nultočke njezinog karakterističnog polinoma. Iz

$$-(\lambda-3)^2(\lambda-6)=0$$

slijedi $\sigma(D)=\{3,6\}$. Pritom je algebarska kratnost svojstvene vrijednosti $\lambda_1=3$ jednaka 2, a algebarska kratnost svojstvene vrijednosti $\lambda_2=6$ jednaka je 1.

Kako se svaki ireducibilni faktor u karakterističnom polinomu javlja u minimalnom polinomu, tada je minimalni polinom matrice D jednak $(\lambda-3)(\lambda-6)$ ili $(\lambda-3)^2(\lambda-6)$ ukoliko uzmemo normirani minimalni polinom. Redom od polinoma najnižeg stupnja krenemo provjeravati kojeg od njih matrica D poništava. Prvi takav polinom kojeg matrica D poništi je njezin minimalni polinom.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Kako je

$$(D-3I)(D-6I) = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & -3 \\ 3 & 15 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -5 & -3 \\ -1 & -8 & -3 \\ 3 & 15 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

minimalni polinom matrice D je polinom

$$m_D(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 6)$$

odnosno nakon množenja

$$m_D(\lambda) = \lambda^2 - 9\lambda + 18.$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

- Odredimo svojstveni potprostor $S(3)$. Trebamo riješiti homogeni sustav linearnih jednadžbi

$$(D - 3I)X = O$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & -3 \\ 3 & 15 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Gaussovim postupkom dobivamo

Linearni operatori

Definicija linearnog operatora

Primjeri linearnih operatora

Zadavanje linearnog operatora

Izomorfizam vektorskih prostora

Rang i defekt

Matrični zapis linearnog operatora

Primjeri matričnih zapisa

Računanje slike vektora

Odnos matričnih zapisa istog operatora

Izomorfizam matrica i linearnih operatora

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Problem svojstvenih vrijednosti

$$
\begin{array}{ccc|cl}
x & y & z & & \\
\hline
-1 & -5 & -3 & 0 & \\
-1 & -5 & -3 & 0 & \\
3 & 15 & 9 & 0 & /:3 \\
\hline
-1 & -5 & -3 & 0 & \\
-1 & -5 & -3 & 0 & \\
1 & 5 & 3 & 0 & \\
\hline
1 & 5 & 3 & 0 &
\end{array}
$$

pa slijedi $x + 5y + 3z = 0$. Rješenje tog sustava je

$$x = -5y - 3z, \;\; y, z \in \mathbb{R}$$

iz čega slijedi

$$S(3) = \{(-5y - 3z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Linearni operatori

Definicija linearnog operatora

Primjeri linearnih operatora

Zadavanje linearnog operatora

Izomorfizam vektorskih prostora

Rang i defekt

Matrični zapis linearnog operatora

Primjeri matričnih zapisa

Računanje slike vektora

Odnos matričnih zapisa istog operatora

Izomorfizam matrica i linearnih operatora

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Problem svojstvenih vrijednosti

Iz $(-5y-3z, y, z) = y \cdot (-5, 1, 0) + z \cdot (-3, 0, 1)$ slijedi da je

$$\mathcal{B}_{S(3)} = \{(-5, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$$

jedna baza za $S(3)$. Stoga je $\dim S(3) = 2$ pa je geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 3$ jednaka 2.

Odredimo svojstveni potprostor $S(6)$. Trebamo riješiti homogeni sustav linearnih jednadžbi

$$(D - 6I)X = O$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} -4 & -5 & -3 \\ -1 & -8 & -3 \\ 3 & 15 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Gaussovim postupkom dobivamo

$$\begin{array}{ccc|cl}
x & y & z & & \\
\hline
-4 & -5 & -3 & 0 & \\
-1 & -8 & -3 & 0 & /\cdot 3 \quad /\cdot(-4) \\
3 & 15 & 6 & 0 & \\
\hline
0 & 27 & 9 & 0 & /:9 \\
-1 & -8 & -3 & 0 & /\cdot(-1) \\
0 & -9 & -3 & 0 & /:(-3) \\
\hline
0 & 3 & 1 & 0 & \\
1 & 8 & 3 & 0 & \\
0 & 3 & 1 & 0 & \\
\hline
0 & 3 & 1 & 0 & /\cdot(-3) \\
1 & 8 & 3 & 0 & \\
\hline
0 & 3 & 1 & 0 & \\
1 & -1 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Linearni operatori

Definicija linearnog operatora

Primjeri linearnih operatora

Zadavanje linearnog operatora

Izomorfizam vektorskih prostora

Rang i defekt

Matrični zapis linearnog operatora

Primjeri matričnih zapisa

Računanje slike vektora

Odnos matričnih zapisa istog operatora

Izomorfizam matrica i linearnih operatora

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Problem svojstvenih vrijednosti

Opće rješenje sustava

$$\begin{aligned} 3y + z &= 0 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

je $x = y,\ z = -3y,\ y \in \mathbb{R}$. Stoga je

$$S(6) = \{(y, y, -3y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Iz $(y, y, -3y) = y \cdot (1, 1, -3)$ slijedi da je $\mathcal{B}_{S(6)} = \{(1, 1, -3)\}$ jedna baza za $S(6)$. Dakle, $\dim S(6) = 1$ pa je geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti $\lambda_2 = 6$ jednaka 1.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

- Prema Hamilton-Cayley teoremu svaka kvadratna matrica poništava svoj karakteristični polinom, tj. $k_D(D) = O$. Stoga imamo

$$
\begin{aligned}
-D^3 + 12D^2 - 45D + 54I &= 0 \\
54I &= D^3 - 12D^2 + 45D \ \ / \cdot D^{-1} \\
54D^{-1} &= D^2 - 12D + 45I \\
D^{-1} &= \tfrac{1}{54}(D^2 - 12D + 45I)
\end{aligned}
$$

Nakon što se izvrše operacije na desnoj strani dobiva se

$$
D^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 1 & 11 & 3 \\ -3 & -15 & -3 \end{bmatrix}.
$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Isto tako, možemo iskoristiti i minimalni polinom za određivanje inverza matrice D. Kako je $m_D(D) = O$, slijedi

$$D^2 - 9D + 18I = 0$$
$$18I = 9D - D^2 \;\; /\cdot D^{-1}$$
$$18D^{-1} = 9I - D$$
$$D^{-1} = \tfrac{1}{18}(9I - D)$$

Nakon što se izvrše operacije na desnoj strani ponovo se dobiva

$$D^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 1 & 11 & 3 \\ -3 & -15 & -3 \end{bmatrix}.$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Primjer 4.11.

Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *zrcaljenje u ravnini s obzirom na pravac* $y = kx$ *za neki* $k \in \mathbb{R}$*. Odredite formulu po kojoj djeluje taj linearni operator u standardnom Kartezijevom koordinatnom sustavu u ravnini.*

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Primjer 4.11.

Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *zrcaljenje u ravnini s obzirom na pravac* $y = kx$ *za neki* $k \in \mathbb{R}$. *Odredite formulu po kojoj djeluje taj linearni operator u standardnom Kartezijevom koordinatnom sustavu u ravnini.*

Rješenje.

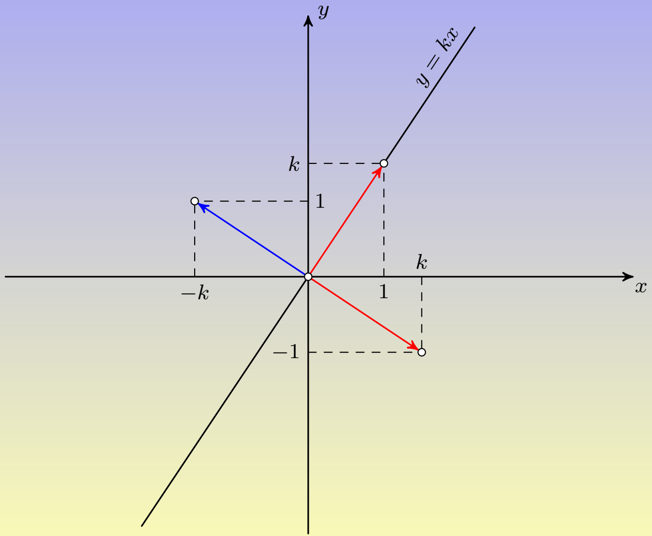
- Geometrijski je jasno da operator f ima dvije svojstvene vrijednosti 1 i -1.
- Vektor $(1, k)$ je vektor smjera pravca $y = kx$, tj. paralelan je s tim pravcem. Stoga je $f(1, k) = (1, k)$. Drugim riječima, $(1, k)$ je svojstveni vektor od f pridružen svojstvenoj vrijednosti 1.
- Vektor $(k, -1)$ je vektor okomit na vektor $(1, k)$, tj. okomit je na pravac $y = kx$. Stoga je $f(k, -1) = -(k, -1)$. Drugim riječima, $(k, -1)$ je svojstveni vektor od f pridružen svojstvenoj vrijednosti -1.

Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Opustite se i uvjerite se na slici da su 1 i -1 svojstvene vrijednosti, a $(1, k)$ i $(k, -1)$ su redom pridruženi svojstveni vektori.



Kako je

$$f(1,k) = (1,k) = 1 \cdot (1,k) + 0 \cdot (k,-1)$$
$$f(k,-1) = (-k,1) = 0 \cdot (1,k) + (-1) \cdot (k,-1)$$

operator f u bazi $\mathcal{B} = \{(1,k),(k,-1)\}$ ima matrični zapis

$$F_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tražimo matrični zapis operatora f u kanonskoj bazi

$$\mathcal{B}_{\text{kan}} = \{(1,0),(0,1)\}.$$

Neka je T matrica prijelaza iz baze $\mathcal{B}_{\mathsf{kan}} = \{(1,0),(0,1)\}$ u bazu $\mathcal{B} = \{(1,k),(k,-1)\}$.

$$\mathcal{B}_{\mathsf{kan}} \xrightarrow{T} \mathcal{B}$$

Tada je

$$T = \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{bmatrix}.$$

Inverzna matrica matrice T je matrica

$$T^{-1} = \frac{1}{-1-k^2} \begin{bmatrix} -1 & -k \\ -k & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k^2+1} & \frac{k}{k^2+1} \\ \frac{k}{k^2+1} & -\frac{1}{k^2+1} \end{bmatrix}.$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Iz $F_{\mathcal{B}} = T^{-1} F_{\mathcal{B}_{\text{kan}}} T$ slijedi $F_{\mathcal{B}_{\text{kan}}} = T F_{\mathcal{B}} T^{-1}$ pa je

$$F_{\mathcal{B}_{\text{kan}}} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{k^2+1} & \frac{k}{k^2+1} \\ \frac{k}{k^2+1} & -\frac{1}{k^2+1} \end{bmatrix}$$

$$F_{\mathcal{B}_{\text{kan}}} = \begin{bmatrix} \frac{1-k^2}{k^2+1} & \frac{2k}{k^2+1} \\ \frac{2k}{k^2+1} & \frac{k^2-1}{k^2+1} \end{bmatrix}$$

Konačno, formula za operator f u standardnom Kartezijevom koordinatnom sustavu je

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-k^2}{k^2+1} & \frac{2k}{k^2+1} \\ \frac{2k}{k^2+1} & \frac{k^2-1}{k^2+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-k^2}{k^2+1}x + \frac{2k}{k^2+1}y \\ \frac{2k}{k^2+1}x + \frac{k^2-1}{k^2+1}y \end{bmatrix}$$

odnosno

$$f(x,y) = \left(\frac{1-k^2}{k^2+1}x + \frac{2k}{k^2+1}y,\ \frac{2k}{k^2+1}x + \frac{k^2-1}{k^2+1}y \right).$$

Dobili smo da operator zrcaljenja u ravnini s obzirom na pravac $y = kx$ u kanonskoj bazi ima matrični zapis

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1-k^2}{k^2+1} & \frac{2k}{k^2+1} \\ \frac{2k}{k^2+1} & \frac{k^2-1}{k^2+1} \end{bmatrix}.$$

Tu matricu možemo zapisati u još jednom obliku koji će jako podsjećati na matricu rotacije. Naime, znamo da je $k = \operatorname{tg}\alpha$ pri čemu je α kut kojeg pravac $y = kx$ zatvara s pozitivnim dijelom x-osi. Izrazimo elemente iz matrice F pomoću kuta α.

$$\frac{1-k^2}{k^2+1} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} = \frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1} = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \cos 2\alpha$$

$$\frac{2k}{k^2+1} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} = \frac{2\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \sin 2\alpha$$

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Dakle, matrica zrcaljenja u ravnini s obzirom na pravac koji prolazi kroz ishodište i s pozitivnim dijelom x-osi zatvara kut α je

$$F = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}.$$

Pazite, F nije matrica rotacije oko ishodišta za kut 2α jer se kod rotacije minus predznak nalazi kod sinus funkcije.

Prisjetimo se, matrica rotacije oko ishodišta za kut 2α izgleda

$$R = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}.$$

Linearni operatori

Definicija linearnog operatora

Primjeri linearnih operatora

Zadavanje linearnog operatora

Izomorfizam vektorskih prostora

Rang i defekt

Matrični zapis linearnog operatora

Primjeri matričnih zapisa

Računanje slike vektora

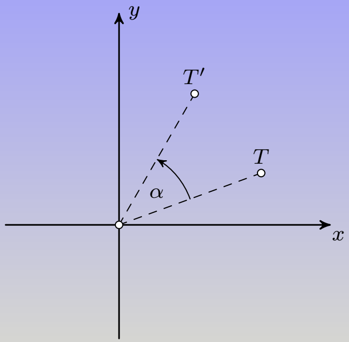
Odnos matričnih zapisa istog operatora

Izomorfizam matrica i linearnih operatora

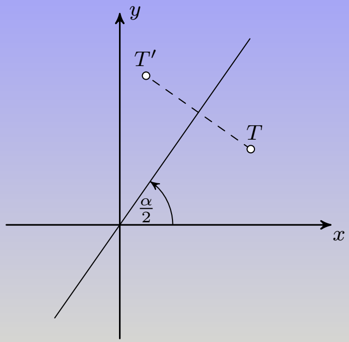
Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Problem svojstvenih vrijednosti



rotacija



zrcaljenje

$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

Linearni operatori
- Definicija linearnog operatora
- Primjeri linearnih operatora
- Zadavanje linearnog operatora
- Izomorfizam vektorskih prostora
- Rang i defekt
- Matrični zapis linearnog operatora
- Primjeri matričnih zapisa
- Računanje slike vektora
- Odnos matričnih zapisa istog operatora
- Izomorfizam matrica i linearnih operatora
- Karakteristični polinom
- Minimalni polinom
- Problem svojstvenih vrijednosti

Linearne operatore završavamo s jednim zaista predivnim teoremom.

Teorem 4.8.

Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ međusobno različite svojstvene vrijednosti linearnog operatora $f : V \to V$ i neka su $a_1, \ldots, a_s \in V$ svojstveni vektori tog operatora odabrani tako da je vektor a_i pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_i za svaki $i = 1, \ldots, s$. Tada je skup $S = \{a_1, \ldots, a_s\}$ linearno nezavisan u V.

Kratko govorimo da su svojstveni vektori linearnog operatora pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima linearno nezavisni.

Dokaz.

Pretpostavimo da je skup S linearno zavisan i da prvih k vektora predstavlja maksimalni linearno nezavisan podskup od S pri čemu je $k < s$. Tada su preostali vektori u S linearne kombinacije vektora $a_1, \ldots, a_k$. Stoga, na primjer posljednji vektor a_s možemo na jednoznačan način prikazati u obliku

$$a_s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i. \qquad (\spadesuit)$$

Pritom je barem jedan $\alpha_i \neq 0$ jer bi u protivnom bilo $a_s = \Theta_V$, što je nemoguće jer je a_s svojstveni vektor operatora f.

Primjenom operatora f na relaciju ($\spadesuit$) dobivamo

$$f(a_s) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(a_i),$$

Linearni operatori

Definicija linearnog operatora

Primjeri linearnih operatora

Zadavanje linearnog operatora

Izomorfizam vektorskih prostora

Rang i defekt

Matrični zapis linearnog operatora

Primjeri matričnih zapisa

Računanje slike vektora

Odnos matričnih zapisa istog operatora

Izomorfizam matrica i linearnih operatora

Karakteristični polinom

Minimalni polinom

Problem svojstvenih vrijednosti

odnosno zbog $f(a_i) = \lambda_i a_i$

$$\lambda_s a_s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i a_i. \qquad (\clubsuit)$$

Sada razlikujemo dva slučaja.

- $\lambda_s = 0$

Ako je $\lambda_s = 0$, nijedan od λ_i, $i \leqslant k$ ne može biti nula jer su po pretpostavci svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ različite. Kako nisu svi α_i jednaki nula, tada zbog $\lambda_s a_s = \Theta_V$ iz ($\clubsuit$) dobivamo prikaz

$$\Theta_V = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i a_i$$

u kojemu je bar jedan od koeficijenata različit od 0, što znači da je skup $\{a_1, \ldots, a_k\}$ linearno zavisan protivno pretpostavci. Stoga slučaj $\lambda_s = 0$ nije moguć.

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

- $\lambda_s \neq 0$

Ako je $\lambda_s \neq 0$, tada množenjem relacije (♣) s λ_s^{-1} dobivamo

$$a_s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i \lambda_s^{-1} a_i. \qquad (\blacklozenge)$$

Kako je $\lambda_i \lambda_s^{-1} \neq 1$ za svaki $i \leqslant k$ i kako nisu svi α_i jednaki 0, relacije (♠) i (♦) daju dva različita prikaza vektora a_s pomoću vektora iz skupa $\{a_1, \ldots, a_k\}$. Međutim, to je kontradikcija jer ukoliko takav prikaz postoji mora biti jednoznačan zbog linearne nezavisnosti skupa $\{a_1, \ldots, a_k\}$. Dakle, slučaj $\lambda_s \neq 0$ također nije moguć.

U svakom slučaju dobili smo da niti jedan od slučajeva $\lambda_s = 0$ i $\lambda_s \neq 0$ nije moguć, što je kontradikcija jer svaki element u polju ili je jednak nula ili je različit od nule. Stoga je naša početna pretpostavka da skup $\{a_1, \ldots, a_s\}$ nije linearno nezavisan bila pogrešna. Dakle, skup $\{a_1, \ldots, a_s\}$ je zaista linearno nezavisan u V. ♡

Linearni operatori
Definicija linearnog operatora
Primjeri linearnih operatora
Zadavanje linearnog operatora
Izomorfizam vektorskih prostora
Rang i defekt
Matrični zapis linearnog operatora
Primjeri matričnih zapisa
Računanje slike vektora
Odnos matričnih zapisa istog operatora
Izomorfizam matrica i linearnih operatora
Karakteristični polinom
Minimalni polinom
Problem svojstvenih vrijednosti

Dio V

Polinomi

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

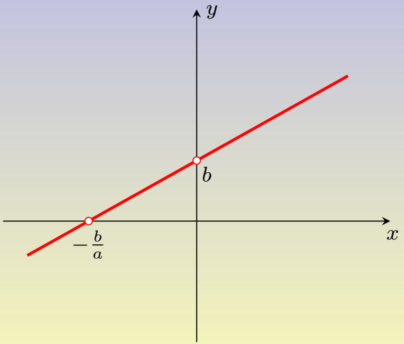
Sadržaj

- Polinomi
  - Definicija polinoma
  - Prsten polinoma
  - Jednakost polinoma
  - Određenost polinoma
  - Dijeljenje polinoma
  - Hornerov algoritam
  - Razvoj polinoma po potencijama od $x - a$
  - Najveća zajednička mjera polinoma
  - Kompleksni brojevi
  - Nultočke polinoma
  - Cjelobrojne nultočke
  - Racionalne nultočke
  - Cjelobrojne kompleksne nultočke
  - Simetrične jednadžbe
  - Cardanova formula
  - Ferrarijeva metoda

Definicija polinoma

Polinom prvog stupnja s realnim koeficijentima je funkcija oblika

$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \ a \neq 0.$$



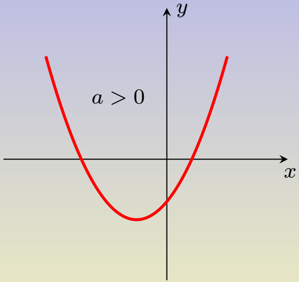
Odabrana poglavlja matematike

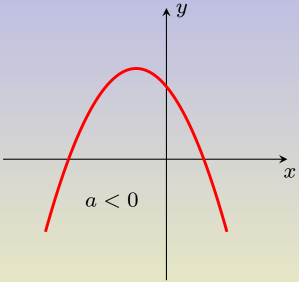
prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Polinom drugog stupnja s realnim koeficijentima je funkcija oblika

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \; a \neq 0.$$





Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

Najveća zajednička mjera polinoma

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Cjelobrojne kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Polinom s realnim koeficijentima

Polinom u jednoj varijabli x s realnim koeficijentima je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblika

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Broj $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zovemo stupanj polinoma f i označavamo ga s $\deg f$ ili $\operatorname{st} f$.

Nadalje, koeficijent a_n zovemo vodeći koeficijent polinoma f, a koeficijent a_0 zovemo slobodni član polinoma f.

Sigma zapis polinoma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Polinom s kompleksnim koeficijentima

Polinom u jednoj varijabli x s kompleksnim koeficijentima je funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ oblika

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Broj $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zovemo stupanj polinoma f i označavamo ga s $\deg f$ ili $\operatorname{st} f$.

Nadalje, koeficijent a_n zovemo vodeći koeficijent polinoma f, a koeficijent a_0 zovemo slobodni član polinoma f.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Polinom s koeficijentima iz nekog polja

Polinom u jednoj varijabli x s koeficijentima iz polja F je funkcija $f : F \to F$ oblika

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in F$, $a_n \neq 0$. Broj $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zovemo stupanj polinoma f i označavamo ga s $\deg f$ ili $\operatorname{st} f$. Pritom, operacije zbrajanja i množenja su operacije iz polja F.

Nadalje, koeficijent a_n zovemo vodeći koeficijent polinoma f, a koeficijent a_0 zovemo slobodni član polinoma f.

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Oznake

$\mathbb{R}[x]$ je oznaka za skup svih polinoma u jednoj varijabli x s realnim koeficijentima.

$\mathbb{C}[x]$ je oznaka za skup svih polinoma u jednoj varijabli x s kompleksnim koeficijentima.

$F[x]$ je oznaka za skup svih polinoma u jednoj varijabli x s koeficijentima iz polja F.

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Normirani polinom

Normirani polinom je polinom čiji je vodeći koeficijent jednak 1.

Nulpolinom

Nulpolinom je polinom čiji su svi koeficijenti jednaki 0. Stupanj nulpolinoma se ne definira. Ovisno o potrebama ponekad se definira da je stupanj nulpolinoma jednak -1 ili ∞.

Polinomi nultog stupnja

Polinomi nultog stupnja su konstante različite od nule.

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Prsten polinoma

Na skupu $F[x]$ definiramo zbrajanje na sljedeći način. Neka su

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

polinomi iz $F[x]$. Zbroj polinoma P i Q je polinom $P+Q$ definiran na sljedeći način:

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x) =$$

$$= a_n x^n + \cdots + (a_m + b_m) x^m + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

pri čemu je $m \leqslant n$.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

Najveća zajednička mjera polinoma

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Cjelobrojne kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Na skupu $F[x]$ definiramo množenje na sljedeći način. Neka su

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

polinomi iz $F[x]$. Produkt polinoma P i Q je polinom PQ definiran na sljedeći način:

$$(PQ)(x) = P(x)Q(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$$

pri čemu je

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j, \quad k = 0, 1, \ldots, n+m.$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.1.

Zadani su polinomi $P(x) = x^2 + x + 1$ *i* $Q(x) = x + 1$ *iz* $\mathbb{R}[x]$. *Odredite zbroj i produkt polinoma* P *i* Q.

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Primjer 5.1.

Zadani su polinomi $P(x) = x^2 + x + 1$ *i* $Q(x) = x + 1$ *iz* $\mathbb{R}[x]$. *Odredite zbroj i produkt polinoma* P *i* Q.

Rješenje.

Kako su P i Q polinomi iz $\mathbb{R}[x]$, operacije zbrajanja i množenja koeficijenata polinoma obavljamo u polju $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(P+Q)(x) &= P(x) + Q(x) = \left(x^2 + x + 1\right) + \left(x + 1\right) = \\ &= x^2 + (1+1)x + (1+1) = x^2 + 2x + 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(PQ)(x) &= P(x)Q(x) = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x + 1\right) = \\ &= x^3 + x^2 + x^2 + x + x + 1 = \\ &= x^3 + (1+1)x^2 + (1+1)x + 1 = \\ &= x^3 + 2x^2 + 2x + 1\end{aligned}$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.2.

Zadani su polinomi $P(x) = x^2 + x + 1$ *i* $Q(x) = x + 1$ *iz* $\mathbb{Z}_2[x]$. *Odredite zbroj i produkt polinoma* P *i* Q.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

Najveća zajednička mjera polinoma

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Cjelobrojne kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Primjer 5.2.

Zadani su polinomi $P(x) = x^2 + x + 1$ *i* $Q(x) = x + 1$ *iz* $\mathbb{Z}_2[x]$*. Odredite zbroj i produkt polinoma* P *i* Q*.*

Rješenje.

Kako su P i Q polinomi iz $\mathbb{Z}_2[x]$, operacije zbrajanja i množenja koeficijenata polinoma obavljamo u polju $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

$$\begin{aligned}(P+Q)(x) &= P(x) + Q(x) = \left(x^2 + x + 1\right) + \left(x + 1\right) = \\ &= x^2 + (1+1)x + (1+1) = x^2 + 0 \cdot x + 0 = x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(PQ)(x) &= P(x)Q(x) = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x + 1\right) = \\ &= x^3 + x^2 + x^2 + x + x + 1 = \\ &= x^3 + (1+1)x^2 + (1+1)x + 1 = \\ &= x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 = x^3 + 1\end{aligned}$$

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Propozicija 5.1.

Neka je F polje. Tada je $(F[x], +, \cdot)$ komutativni prsten.

$(F[x], +)$ je Abelova grupa u kojoj je neutralni element nulpolinom. Nadalje, suprotni element polinoma

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

je polinom

$$-P(x) = \sum_{k=0}^{n} (-a_k) x^k.$$

$(F[x], \cdot)$ je samo komutativni monoid s neutralnim elementom $e(x) = 1$. Polinomi stupnja $\geqslant 1$ nemaju multiplikativni inverz. Jedino konstantni polinomi različiti od nulpolinoma imaju multiplikativni inverz u prstenu $(F[x], +, \cdot)$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

U prstenu $(F[x], +, \cdot)$ definiramo oduzimanje polinoma na standardni način kao dodavanje suprotnog polinoma, tj.

$$P - Q = P + (-Q).$$

Nama će od posebnog interesa biti prsteni polinoma s realnim i kompleksnim koeficijentima.

Korolar 5.1.

$(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ *je komutativni prsten.*

Korolar 5.2.

$(\mathbb{C}[x], +, \cdot)$ *je komutativni prsten.*

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.3.

Odredite suprotni polinom polinoma $P(x) = x^2+x+1$ *u prstenima* $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Z}_2[x]$ *i* $\mathbb{Z}_3[x]$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.3.

Odredite suprotni polinom polinoma $P(x) = x^2+x+1$ u prstenima $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Z}_2[x]$ i $\mathbb{Z}_3[x]$.

Rješenje.

U prstenu $\mathbb{R}[x]$ suprotni polinom polinoma $P(x) = x^2 + x + 1$ je polinom $-P(x) = -x^2 - x - 1$.

Kako u polju $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ vrijedi $-1 = 1$, zaključujemo da je u prstenu $\mathbb{Z}_2[x]$ suprotni polinom polinoma $P(x) = x^2 + x + 1$ polinom $-P(x) = x^2 + x + 1$.

Kako u polju $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ vrijedi $-1 = 2$ i $-2 = 1$, zaključujemo da je u prstenu $\mathbb{Z}_3[x]$ suprotni polinom polinoma $P(x) = x^2+x+1$ polinom $-P(x) = 2x^2 + 2x + 2$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Jednakost polinoma

Teorem 5.1 (Teorem o nulpolinomu).

Polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

s realnim ili kompleksnim koeficijentima je nulfunkcija ako i samo ako je f nulpolinom.

Dokaz.

$\boxed{\Leftarrow}$

Pretpostavimo da je f nulpolinom. Tada je $a_i = 0$ za svaki $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ pa je očito f nulfunkcija, tj. preslikava sve realne ili kompleksne brojeve u nulu.

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

$\boxed{\Rightarrow}$

Pretpostavimo da je f nulfunkcija. Tada je $f(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ ili $x \in \mathbb{C}$. Stoga je

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_{n-1} x_1^{n-1} + a_n x_1^n &= 0 \\ a_0 + a_1 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_2^{n-1} + a_n x_2^n &= 0 \\ &\vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_{n-1} x_n^{n-1} + a_n x_n^n &= 0 \\ a_0 + a_1 x_{n+1} + \cdots + a_{n-1} x_{n+1}^{n-1} + a_n x_{n+1}^n &= 0 \end{aligned} \qquad (\spadesuit)$$

za međusobno različite $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

(♠) je zapravo homogeni sustav od $n+1$ linearnih jednadžbi s $n+1$ nepoznanica $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Determinanta tog sustava je

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i) \neq 0.$$

To je Vandermondeova determinanta. Prema Roucheovom teoremu sustav (♠) tada ima jedinstveno rješenje pa mora biti

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$$

iz čega slijedi da je f nulpolinom. ♡

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Sigurno se pitate zbog čega smo uopće dokazivali prethodni teorem kad je on na intuitivnoj razini toliko očit. Međutim, teorem o nulpolinomu ne vrijedi u svakom prstenu polinoma $F[x]$ s koeficijentima iz polja F. Uvjerimo se u to na sljedeća dva primjera.

Primjer 5.4.

Neka je $f(x) = x^2 + x$ *polinom iz* $\mathbb{Z}_2[x]$. *Pokažite da je polinom* $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ *nulfunkcija, ali* f *nije nulpolinom.*

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Sigurno se pitate zbog čega smo uopće dokazivali prethodni teorem kad je on na intuitivnoj razini toliko očit. Međutim, teorem o nulpolinomu ne vrijedi u svakom prstenu polinoma $F[x]$ s koeficijentima iz polja F. Uvjerimo se u to na sljedeća dva primjera.

Primjer 5.4.

Neka je $f(x) = x^2 + x$ polinom iz $\mathbb{Z}_2[x]$. Pokažite da je polinom $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ nulfunkcija, ali f nije nulpolinom.

Rješenje.

Očito $f(x) = x^2 + x$ nije nulpolinom jer mu nisu svi koeficijenti jednaki 0. Nadalje,

$$f(0) = 0^2 + 0 = 0 + 0 = 0$$
$$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 0$$

iz čega zaključujemo da polinom f sve elemente iz domene preslikava u nulu pa je $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ nulfunkcija.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.5.

Neka je $f(x) = x^3 + 2x$ *polinom iz* $\mathbb{Z}_3[x]$. *Pokažite da je polinom* $f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ *nulfunkcija, ali* f *nije nulpolinom.*

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.5.

Neka je $f(x) = x^3 + 2x$ *polinom iz* $\mathbb{Z}_3[x]$. *Pokažite da je polinom* $f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ *nulfunkcija, ali* f *nije nulpolinom.*

Rješenje.

Očito $f(x) = x^3 + 2x$ nije nulpolinom jer mu nisu svi koeficijenti jednaki 0. Nadalje,

$$f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$
$$f(1) = 1^3 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 0$$
$$f(2) = 2^3 + 2 \cdot 2 = 2 + 1 = 0$$

iz čega zaključujemo da polinom f sve elemente iz domene preslikava u nulu pa je $f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ nulfunkcija.

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Napomena.

Polinome iz $F[x]$ možemo gledati na dva različita načina.

- Polinome iz $F[x]$ možemo promatrati kao funkcije $F \to F$. U tom kontekstu imamo pojam nulfunkcije, a dva polinoma su jednaki ako su jednaki kao funkcije, tj. ako imaju jednake domene, kodomene i pravila pridruživanja.
- Polinome iz $F[x]$ možemo promatrati kao algebarske objekte koje znamo zbrajati i množiti. Pritom uz te operacije polinomi iz $F[x]$ čine komutativni prsten. U tom kontekstu imamo pojam nulpolinoma, a dva polinoma su po definiciji jednaki ako su istog stupnja i ako imaju jednake koeficijente uz iste potencije varijable x.

Teorem 5.2 (Teorem o jednakosti polinoma).

Polinomi s realnim ili kompleksnim koeficijentima

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \quad b_m \neq 0$$

su funkcijski jednaki akko vrijedi

$$n = m \ \ i \ \ a_i = b_i, \ \ \forall\, i = 0, 1, \ldots, n.$$

Dokaz.

$\boxed{\Leftarrow}$

Ako je $m = n$ i $a_i = b_i$, $\forall\, i = 0, 1, \ldots, n$, onda očito vrijedi $f(x) = g(x)$ za svaki realni ili kompleksni broj x pa su polinomi f i g funkcijski jednaki jer po definiciji imaju jednake domene i kodomene.

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

$\boxed{\Rightarrow}$

Pretpostavimo da su polinomi f i g funkcijski jednaki. Nadalje, pretpostavimo da je ipak $n \neq m$, npr. $n > m$. Tada za svaki realni ili kompleksni broj x vrijedi

$$a_n x^n + \cdots + a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \\ = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Iz te jednakosti slijedi

$$a_n x^n + \cdots + (a_m - b_m) x^m + \cdots + (a_1 - b_1) x + (a_0 - b_0) = 0.$$

Prema teoremu o nulpolinomu mora vrijediti

$$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{m+1} = 0,$$
$$a_m = b_m,\ a_{m-1} = b_{m-1},\ \ldots,\ a_1 = b_1,\ a_0 = b_0$$

što je u kontradikciji s $a_n \neq 0$. Dakle, mora biti $n = m$.

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Međutim, u tom slučaju dobivamo

$$(a_n - b_n)x^n + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0,$$

pa prema teoremu o nulpolinomu mora biti

$$a_n = b_n, \ \ldots, \ a_1 = b_1, \ a_0 = b_0.$$

♡

Napomena.

Teorem o jednakosti polinoma također ne vrijedi u bilo kojem prstenu polinoma $F[x]$. Uvjerimo se u to na sljedeća dva primjera.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.6.

Provjerite da su polinomi $f(x) = x^3 + x + 1$ *i* $g(x) = x^3 + x^2 + 1$ *iz* $\mathbb{Z}_2[x]$ *funkcijski jednaki, ali nisu algebarski jednaki.*

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Primjer 5.6.

Provjerite da su polinomi $f(x) = x^3 + x + 1$ *i* $g(x) = x^3 + x^2 + 1$ *iz* $\mathbb{Z}_2[x]$ *funkcijski jednaki, ali nisu algebarski jednaki.*

Rješenje.

Polinomi f i g očito nisu algebarski jednaki jer nemaju jednake koeficijente uz potencije od x i x^2. Nadalje, iz

$$f(0) = 0^3 + 0 + 1 = 0 + 0 + 1 = 0 + 1 = 1$$
$$g(0) = 0^3 + 0^2 + 1 = 0 + 0 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$f(1) = 1^3 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 = 0 + 1 = 1$$
$$g(1) = 1^3 + 1^2 + 1 = 1 + 1 + 1 = 0 + 1 = 1$$

zaključujemo da je $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in \mathbb{Z}_2$ pa su polinomi f i g funkcijski jednaki promatrani kao funkcije $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$. Uočite da su operacije zbrajanja i množenja obavljane u polju $\mathbb{Z}_2$.

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Primjer 5.7.

Provjerite da su polinomi

$$f(x) = x^4 + 2x + 1, \quad g(x) = x^2 + 2x + 1$$

iz $\mathbb{Z}_3[x]$ *funkcijski jednaki, ali nisu algebarski jednaki.*

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.7.

Provjerite da su polinomi

$$f(x) = x^4 + 2x + 1, \quad g(x) = x^2 + 2x + 1$$

iz $\mathbb{Z}_3[x]$ *funkcijski jednaki, ali nisu algebarski jednaki.*

Rješenje.

Polinomi f i g očito nisu algebarski jednaki jer nisu istog stupnja. Nadalje, iz

$$f(0) = 0^4 + 2 \cdot 0 + 1 = 0 + 0 + 1 = 0 + 1 = 1$$
$$g(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 = 0 + 0 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$f(1) = 1^4 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 0 + 1 = 1$$
$$g(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 0 + 1 = 1$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

$$f(2) = 2^4 + 2 \cdot 2 + 1 = 1 + 1 + 1 = 2 + 1 = 0$$
$$g(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 1 + 1 + 1 = 2 + 1 = 0$$

zaključujemo da je $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in \mathbb{Z}_3$ pa su polinomi f i g funkcijski jednaki promatrani kao funkcije $\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$. Uočite da su operacije zbrajanja i množenja obavljane u polju $\mathbb{Z}_3$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & f \in F[x] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{algebarski objekt} & & \text{funkcija } f : F \to F
\end{tikzcd}
$$

Ako je F konačno polje, tada vrijede samo implikacije:

$$
\begin{aligned}
f \text{ je nulpolinom} \quad &\Longrightarrow \quad f \text{ je nulfunkcija} \\
f \text{ i } g \text{ su algebarski jednaki} \quad &\Longrightarrow \quad f \text{ i } g \text{ su funkcijski jednaki}
\end{aligned}
$$

Ako je F beskonačno polje, tada vrijede ekvivalencije:

$$
\begin{aligned}
f \text{ je nulpolinom} \quad &\Longleftrightarrow \quad f \text{ je nulfunkcija} \\
f \text{ i } g \text{ su algebarski jednaki} \quad &\Longleftrightarrow \quad f \text{ i } g \text{ su funkcijski jednaki}
\end{aligned}
$$

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Napomena.

Kad god za dva polinoma $f, g \in F[x]$ napišemo $f = g$, uvijek podrazumijevamo da se radi o algebarskoj jednakosti polinoma ukoliko posebno ne napomenemo u kojem kontekstu promatramo jednakost polinoma.

U slučaju da je F beskonačno polje, tada su algebarska i funkcijska jednakost polinoma iz prstena $F[x]$ ekvivalentni pojmovi pa o jednakosti $f = g$ možemo razmišljati u oba konteksta.

Specijalno, u slučaju prstenova $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ i $\mathbb{C}[x]$ svejedno je u kojem kontekstu razmišljamo o jednakosti polinoma $f = g$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Iz dokaza teorema o nulpolinomu dobivamo sljedeći teorem.

Teorem 5.3.

Neka je F polje i $P \in F[x]$ polinom n-tog stupnja za koji postoji $n+1$ različitih brojeva $x_i \in F$ takvih da je $P(x_i) = 0$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$. Tada je P nulpolinom.

Nultočka polinoma

Neka je F polje. Kažemo da je $x_0 \in F$ nultočka polinoma $P \in F[x]$ ako je $P(x_0) = 0$.

Korolar 5.3.

Neka je F polje. Svaki polinom n-tog stupnja iz $F[x]$ ima najviše n nultočaka.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Određenost polinoma

Teorem 5.4.

Neka je u ravnini zadano $n+1$ različitih točaka (x_i, y_i) pri čemu je $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$, $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$. Tada postoji jedinstveni polinom $P \in \mathbb{R}[x]$ stupnja $\leqslant n$ takav da je $P(x_i) = y_i$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$.

Dokaz.

jedinstvenost

Pretpostavimo da postoje dva polinoma $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ stupnja $\leqslant n$ za koje vrijedi $P(x_i) = Q(x_i) = y_i,\ i = 1, 2, \ldots, n, n+1$.

Definiramo polinom $R(x) = P(x) - Q(x)$. Kako je $R(x_i) = 0$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$ i $\deg R \leqslant n$, iz prethodnog korolara slijedi da je R nulpolinom pa je $P = Q$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

egzistencija

Za svaki $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$ definiramo polinome

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_{n+1})}.$$

Vidimo da je

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } \; j \neq i \\ 1, & \text{ako je } \; j = i \end{cases}$$

Konačno, neka je

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i L_i(x).$$

Polinom P zadovoljava početne uvjete i zove se Lagrangeov interpolacijski polinom. ♡

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.8.

Zadane su točke $(-2,0),(-1,1),(1,2),(2,0)$. *Odredite polinom najmanjeg stupnja čiji graf prolazi kroz zadane točke.*

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.8.

Zadane su točke $(-2,0),(-1,1),(1,2),(2,0)$. *Odredite polinom najmanjeg stupnja čiji graf prolazi kroz zadane točke.*

Rješenje.

$$\overset{x_1}{(-2},\overset{y_1}{0)}\,,\quad \overset{x_2}{(-1},\overset{y_2}{1)},\quad \overset{x_3}{(1}\,,\overset{y_3}{2)}\,,\quad \overset{x_4}{(2}\,,\overset{y_4}{0)}$$

Najprije odredimo polinome L_i za $i = 1,2,3,4$.

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} = \\ &= \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2-1)(-2-2)} = \\ &= -\tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{12}x - \tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} =$$

$$= \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(-1+2)(-1-1)(-1-2)} =$$

$$= \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} =$$

$$= \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(1+2)(1+1)(1-2)} =$$

$$= -\tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{3}$$

$$L_4(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} =$$

$$= \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(2+2)(2+1)(2-1)} =$$

$$= \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{12}x - \frac{1}{6}$$

Traženi polinom P jednak je

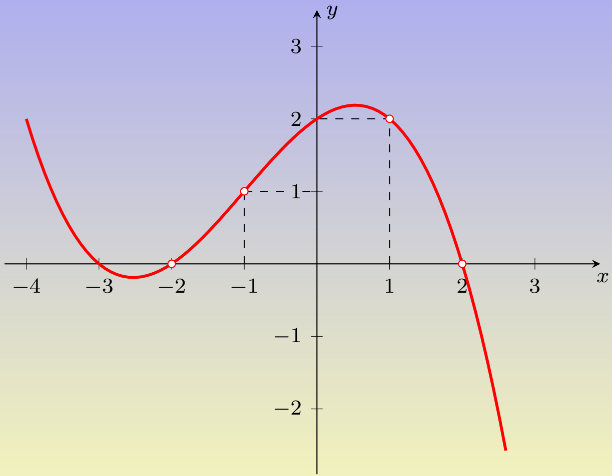
$$P(x) = y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x) + y_4L_4(x) =$$

$$= 0 \cdot \left(-\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{6}\right) + 1 \cdot \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right) +$$

$$+ 2 \cdot \left(-\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right) + 0 \cdot \left(\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{12}x - \frac{1}{6}\right) =$$

$$= -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + 2$$

Na donjoj slici je prikazan polinom $P(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + 2$ i zadane točke $(-2, 0), (-1, 1), (1, 2), (2, 0)$.



Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Dijeljenje polinoma

Teorem 5.5.

Neka je F polje. Tada za svaka dva polinoma $f, g \in F[x]$, $g \neq 0$, postoje jedinstveni polinomi $q, r \in F[x]$ takvi da je

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

pri čemu je $\deg r < \deg g$.

Dokaz.

jedinstvenost

Pretpostavimo da za zadane polinome f i g, osim polinoma q i r, postoje polinomi q' i r' takvi da je

$$f = gq + r, \quad \deg r < \deg g,$$
$$f = gq' + r', \quad \deg r' < \deg g.$$

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

Najveća zajednička mjera polinoma

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Cjelobrojne kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Oduzimanjem prethodnih jednakosti dobivamo

$$(q - q')g + (r - r') = 0. \qquad (\clubsuit)$$

Pretpostavimo da je $q \neq q'$, tj. $\deg(q - q') \geqslant 0$. Tada je

$$\deg(q - q')g = \deg(q - q') + \deg g \geqslant \deg g.$$

S druge strane imamo

$$\deg r < \deg g \quad \text{i} \quad \deg r' < \deg g,$$

pa je

$$\deg(r - r') < \deg g.$$

Zbog $\deg(q - q')g \geqslant \deg g$ i $\deg(r - r') < \deg g$ lijeva strana u $(\clubsuit)$ ne može biti nulpolinom. Stoga mora biti $q = q'$ pa iz $(\clubsuit)$ slijedi $r = r'$.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

Najveća zajednička mjera polinoma

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Cjelobrojne kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

egzistencija

Ako je $\deg f < \deg g$, tada uzmemo $q = 0$, $r = f$ i očito je $\deg r < \deg g$. Pretpostavimo stoga da je $\deg f \geqslant \deg g$.

Pretpostavimo da f i g imaju kanonske prikaze

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \quad b_m \neq 0.$$

Formiramo sada polinom f_1 preko formule

$$f_1(x) = f(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x). \tag{1}$$

Dobijemo polinom stupnja n_1 i očito je $n_1 < n$. Neka je

$$f_1(x) = d_{n_1}^{(1)} x^{n_1} + \cdots + d_0^{(1)}.$$

Ako je $n_1 \geqslant m$, postupak možemo nastaviti i formirati polinom f_2 preko formule

$$f_2(x) = f_1(x) - d_{n_1}^{(1)} b_m^{-1} x^{n_1 - m} g(x) \tag{2}$$

i očito je $\deg f_2 < \deg f_1$. Neka je

$$f_2(x) = d_{n_2}^{(2)} x^{n_2} + \cdots + d_0^{(2)}, \quad n_2 < n_1.$$

Ako je $n_2 \geqslant m$, formiramo polinom f_3 preko formule

$$f_3(x) = f_2(x) - d_{n_2}^{(2)} b_m^{-1} x^{n_2 - m} g(x) \tag{3}$$

pri čemu je $\deg f_3 < \deg f_2$. Neka je

$$f_3(x) = d_{n_3}^{(3)} x^{n_3} + \cdots + d_0^{(3)}, \quad n_3 < n_2.$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Kako stupnjevi polinoma $f, f_1, f_2, f_3, \dots$ strogo padaju, nastavljajući postupak nakon konačno mnogo koraka dobivamo polinom

$$f_k(x) = f_{k-1}(x) - d_{n_{k-1}}^{(k-1)} b_m^{-1} x^{n_{k-1}-m} g(x) \qquad (k)$$

takav da je ili $\deg f_k < m$ ili $f_k(x) = 0$. Zbrajanjem jednakosti $(1), (2), (3), \dots, (k)$ dobivamo

$$f(x) = g(x)q(x) + f_k(x)$$

pri čemu je

$$q(x) = a_n b_m^{-1} x^{n-m} + d_{n_1}^{(1)} b_m^{-1} x^{n_1-m} + \cdots + d_{n_{k-1}}^{(k-1)} b_m^{-1} x^{n_{k-1}-m}$$

Uz oznaku $r(x) = f_k(x)$, konačno dobivamo

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad \deg r < \deg g.$$

Polinom q zovemo kvocijent, a polinom r ostatak pri dijeljenju polinoma f s polinomom g. ♡

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.9.

Zadani su polinomi $f(x) = x^5 - 3x^3 - 5x$ *i* $g(x) = x^2 - x + 1$ *iz* $\mathbb{R}[x]$. *Odredite kvocijent i ostatak pri dijeljenju polinoma* f *s polinomom* g.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

Najveća zajednička mjera polinoma

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Cjelobrojne kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Primjer 5.9.

Zadani su polinomi $f(x) = x^5 - 3x^3 - 5x$ *i* $g(x) = x^2 - x + 1$ *iz* $\mathbb{R}[x]$. *Odredite kvocijent i ostatak pri dijeljenju polinoma* f *s polinomom* g.

Rješenje.

$$
\begin{array}{l}
(\;x^5 \qquad - 3x^3 \qquad\quad - 5x\;) : (x^2 - x + 1) = x^3 + x^2 - 3x - 4 \\
\underline{-x^5 + x^4 - x^3 \qquad\qquad\quad} \\
\qquad\quad x^4 - 4x^3 \qquad\quad - 5x \qquad \longleftarrow \text{ to je } f_1 \\
\qquad \underline{- x^4 + x^3 - x^2 \qquad\quad} \\
\qquad\qquad\quad - 3x^3 - x^2 - 5x \qquad \longleftarrow \text{ to je } f_2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{3x^3 - 3x^2 + 3x\quad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad - 4x^2 - 2x \qquad \longleftarrow \text{ to je } f_3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{4x^2 - 4x + 4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 6x + 4 \qquad \longleftarrow \text{ to je } f_4 = r
\end{array}
$$

Dakle, kvocijent je jednak $q(x) = x^3 + x^2 - 3x - 4$, a ostatak $r(x) = -6x + 4$.

Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Primjer 5.10.

Zadani su polinomi $f(x) = x^3 + 1$ *i* $g(x) = x^2 + x + 1$. *Odredite kvocijent i ostatak pri dijeljenju polinoma* f *s polinomom* g *ako*

a) *polinome* f *i* g *promatramo kao polinome iz* $\mathbb{R}[x]$,
b) *polinome* f *i* g *promatramo kao polinome iz* $\mathbb{Z}_2[x]$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.10.

Zadani su polinomi $f(x) = x^3 + 1$ *i* $g(x) = x^2 + x + 1$. *Odredite kvocijent i ostatak pri dijeljenju polinoma* f *s polinomom* g *ako*

1. *polinome* f *i* g *promatramo kao polinome iz* $\mathbb{R}[x]$,
2. *polinome* f *i* g *promatramo kao polinome iz* $\mathbb{Z}_2[x]$.

Rješenje.

1. U ovom slučaju kvocijent je jednak $q(x) = x - 1$, a ostatak $r(x) = 2$.

$$
\begin{array}{rl}
(\ \ x^3 \qquad\qquad\quad + 1\ ) & : (x^2 + x + 1) = x - 1 \\
\underline{-x^3 - x^2 - x \qquad} & \\
{\color{blue} - x^2 - x + 1} & \longleftarrow \quad \text{to je } f_1 \\
\underline{x^2 + x + 1} & \\
{\color{blue} 2} & \longleftarrow \quad \text{to je } f_2 = r
\end{array}
$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

- b U ovom slučaju operacije zbrajanja i množenja obavljamo u polju $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ u kojemu je $-1 = 1$.

$$
\begin{array}{rlll}
(x^3 & \qquad\qquad + 1\ ) : (x^2+x+1) = x+1 & & \\
x^3 + x^2 + x & & & \\
\hline
\color{blue}{x^2 + x + 1} & \longleftarrow & \text{to je } f_1 & \\
x^2 + x + 1 & & & \\
\hline
\color{blue}{0} & \longleftarrow & \text{to je } f_2 = r &
\end{array}
$$

Kvocijent je jednak $q(x) = x+1$, a ostatak je $r(x) = 0$. Dakle, polinom f je djeljiv s polinomom g u prstenu $\mathbb{Z}_2[x]$.

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Napomena.

Teorem o dijeljenju polinoma općenito ne vrijedi za polinome iz $R[x]$ pri čemu je R komutativni prsten. Teorem će vrijediti jedino u slučaju ako dijelimo s polinomom čiji vodeći koeficijent ima multiplikativni inverz u prstenu R.

Na primjer, promotrimo polinome

$$f(x) = x^3 + 1 \quad \text{i} \quad g(x) = 5x^2 + x - 2.$$

Podijelimo li polinom f s polinomom g u prstenu $\mathbb{R}[x]$, dobivamo kvocijent $q(x) = \frac{1}{5}x - \frac{1}{25}$ i ostatak $r(x) = \frac{11}{25}x + \frac{23}{25}$.

Međutim, ako želimo podijeliti polinom f s polinomom g u prstenu $\mathbb{Z}[x]$, tada polinomi q i r više ne pripadaju tom prstenu jer njihovi koeficijenti nisu cijeli brojevi. Problem je u tome što je vodeći koeficijent polinoma g s kojim dijelimo jednak 5, a broj 5 nema multiplikativni inverz u komutativnom prstenu $\mathbb{Z}$.

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Uvijek možemo napisati

$$x^3 + 1 = 0 \cdot \left(5x^2 + x - 2\right) + x^3 + 1$$

pa u tom slučaju polinomi $q(x) = 0$ i $r(x) = x^3 + 1$ pripadaju prstenu $\mathbb{Z}[x]$, ali sada nije zadovoljen uvjet da stupanj ostatka mora biti strogo manji od stupnja polinoma s kojim dijelimo.

U polju F svaki element različit od nule ima multiplikativni inverz pa onda nemamo takvih problema. Upravo je to i bila ključna stvar u dokazu egzistencije polinoma q i r za polinome iz prstena $F[x]$.

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Hornerov algoritam

Opisat ćemo efikasni algoritam za računanje vrijednosti polinoma $f \in F[x]$ u danoj točki $a \in F$. U ovom slučaju F ne mora nužno biti polje, može biti samo komutativni prsten. Neka je

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

i promotrimo normirani polinom $g(x) = x - a$ prvog stupnja. Prema teoremu o dijeljenju polinoma postoje jedinstveni polinomi $q, r \in F[x]$ takvi da je

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad \deg r < \deg g.$$

Kako je $\deg g = 1$, mora biti $r(x) = r$ za neki $r \in F$. Stoga je kvocijent q polinom stupnja $n-1$, tj.

$$q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \cdots + c_1 x + c_0.$$

Sada iz $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ slijedi

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 =$$
$$= (x-a)\big(c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1 x + c_0\big) + r,$$

odnosno nakon množenja polinoma na desnoj strani

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = c_{n-1}x^n +$$
$$+ (c_{n-2} - ac_{n-1})x^{n-1} + (c_{n-3} - ac_{n-2})x^{n-2} + \cdots +$$
$$+ (c_0 - ac_1)x + r - c_0 a.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće potencije iz posljednje jednakosti dobivamo

$$\left.\begin{aligned}
a_n &= c_{n-1}\\
a_{n-1} &= c_{n-2} - ac_{n-1}\\
a_{n-2} &= c_{n-3} - ac_{n-2}\\
&\vdots\\
a_1 &= c_0 - ac_1\\
a_0 &= r - ac_0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}
c_{n-1} &= a_n\\
c_{n-2} &= a_{n-1} + ac_{n-1}\\
c_{n-3} &= a_{n-2} + ac_{n-2}\\
&\vdots\\
c_0 &= a_1 + ac_1\\
r &= a_0 + ac_0
\end{aligned}}$$

Uvrstimo li $x = a$ u $f(x) = (x-a)q(x) + r$, slijedi $f(a) = r$.

Hornerov algoritam možemo prikazati preko sljedeće tablice.

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
a	$\underbrace{a_n}_{c_{n-1}}$	$\underbrace{ac_{n-1} + a_{n-1}}_{c_{n-2}}$	$\cdots$	$\underbrace{ac_1 + a_1}_{c_0}$	$\underbrace{ac_0 + a_0}_{r}$

Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Primjer 5.11.

Izračunajte vrijednost polinoma $f(x) = 3x^3 + 2x^2$ *u točki* -2.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

Najveća zajednička mjera polinoma

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Cjelobrojne kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.11.

Izračunajte vrijednost polinoma $f(x) = 3x^3 + 2x^2$ *u točki* -2.

Rješenje.

Hornerovim algoritmom dobivamo

	3	2	0	0
-2	3	-4	8	-16

pa je $f(-2) = -16$. Nadalje, ako polinom f podijelimo s polinomom $x + 2$, dobit ćemo kvocijent $q(x) = 3x^2 - 4x + 8$ i ostatak $r(x) = -16$.

Složenost Hornerovog algoritma

Usporedimo Hornerov algoritam s klasičnim računanjem vrijednosti polinoma n-tog stupnja u nekoj točki.

Klasično računanje

n zbrajanja

$n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ množenja

Složenost: $O(n^2)$

Hornerov algoritam

n zbrajanja i n množenja

Složenost: $O(n)$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x-a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Teorem 5.6 (Descartesov teorem).

Neka je F polje. $a \in F$ je nultočka polinoma $f \in F[x]$ ako i samo ako je f djeljiv s polinomom $x - a$.

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Pretpostavimo da je a nultočka polinoma f. Tada je $f(a) = 0$. Prema teoremu o dijeljenju polinoma vrijedi

$$f(x) = (x - a)q(x) + r$$

za neki $q \in F[x]$ i $r \in F$. Uvrstimo li u posljednju jednakost $x = a$, zbog $f(a) = 0$ dobivamo $r = 0$ pa je polinom f djeljiv s polinomom $x - a$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

$\Leftarrow$

Pretpostavimo da je polinom f djeljiv s polinomom $x - a$. Tada je

$$f(x) = (x - a)q(x)$$

za neki $q \in F[x]$. Uvrstimo li u posljednju jednakost $x = a$, dobivamo $f(a) = 0$ pa je a nultočka polinoma f. ♡

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Razvoj polinoma po potencijama od $x - a$

Pomoću Hornerovog algoritma

Polinom $f \in F[x]$ stupnja n

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

želimo raspisati po potencijama od $x - a$ pri čemu je $a \in F \setminus \{0\}$. Drugim riječima, želimo pronaći koeficijente $r_0, r_1, \ldots, r_n \in F$ tako da vrijedi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} r_k (x-a)^k.$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Jezikom teorije vektorskih prostora taj problem možemo izreći na sljedeći način.

Zadan je polinom f n-tog stupnja svojim koordinatama

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

u kanonskoj bazi $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Treba pronaći njegove koordinate

$$(r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

u bazi $\mathcal{B}_2 = \{1,\ x-a,\ (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n\}$.

Ovaj problem možemo riješiti pomoću matrice prijelaza

$$\mathcal{B}_2 \xrightarrow{T} \mathcal{B}_1$$

i formule $X_{\mathcal{B}_2} = T_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} X_{\mathcal{B}_1}$. Međutim, u ovom slučaju postoji jedan znatno brži način pronalaženja tih koordinata koji se temelji na višestrukoj primjeni Hornerovog algoritma.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Podijelimo polinom f s polinomom $x - a$ i dobivamo

$$f(x) = (x - a)q_0(x) + r_0. \qquad (\blacktriangle)$$

Nakon toga dalje dijelimo kvocijent q_0 s polinomom $x - a$ i dobivamo

$$q_0(x) = (x - a)q_1(x) + r_1. \qquad (\blacktriangledown)$$

Uvrstimo li ($\blacktriangledown$) u ($\blacktriangle$), dobivamo

$$f(x) = (x - a)^2 q_1(x) + r_1(x - a) + r_0. \qquad (\triangle)$$

Dalje dijelimo kvocijent q_1 s polinomom $x - a$ i dobivamo

$$q_1(x) = (x - a)q_2(x) + r_2. \qquad (\triangledown)$$

Uvrstimo li ($\triangledown$) u ($\triangle$), dobivamo

$$f(x) = (x - a)^3 q_2(x) + r_2(x - a)^2 + r_1(x - a) + r_0.$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Ponavljajući opisani postupak, nakon $n+1$ koraka dolazimo do traženog zapisa

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} r_k (x-a)^k.$$

Ako stavimo da je $q_{-1} = f$, tada u i-tom koraku dijelimo kvocijent q_{i-2} s polinomom $x-a$. Ovo dijeljenje možemo provesti Hornerovim algoritmom i na taj način dobivamo kvocijent q_{i-1} i ostatak r_{i-1}. Ostatak r_{i-1} je zapravo traženi koeficijent uz potenciju $(x-a)^{i-1}$.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x-a$

Najveća zajednička mjera polinoma

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Cjelobrojne kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Primjer 5.12.

Pomoću Hornerovog algoritma razvijte polinom

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$$

iz $\mathbb{R}[x]$ *po potencijama od* $x + 1$.

Primjer 5.12.

Pomoću Hornerovog algoritma razvijte polinom

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$$

iz $\mathbb{R}[x]$ *po potencijama od* $x + 1$.

Rješenje.

	1	2	−3	−4	1
−1	1	1	−4	0	1
−1	1	0	−4	4	
−1	1	−1	−3		
−1	1	−2			
−1	1				

$$f(x) = (x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1$$

Razvoj polinoma po potencijama od $x - a$

Pomoću derivacija

Do koeficijenata $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n$ u razvoju polinoma f po potencijama od $x - a$ možemo doći preko vrijednosti derivacija polinoma f u točki a. Naime, ako je

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

tada je

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Drugim riječima,

$$r_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

Najveća zajednička mjera polinoma

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Cjelobrojne kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Primjer 5.13.

Pomoću derivacija razvijte polinom $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ *iz* $\mathbb{R}[x]$ *po potencijama od* $x + 1$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.13.

Pomoću derivacija razvijte polinom $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ *iz* $\mathbb{R}[x]$ *po potencijama od* $x + 1$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1 & f(-1) &= 1 \\ f'(x) &= 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4 & f'(-1) &= 4 \\ f''(x) &= 12x^2 + 12x - 6 & f''(-1) &= -6 \\ f'''(x) &= 24x + 12 & f'''(-1) &= -12 \\ f^{(4)}(x) &= 24 & f^{(4)}(-1) &= 24 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{24}{4!}(x+1)^4 + \frac{-12}{3!}(x+1)^3 + \frac{-6}{2!}(x+1)^2 + \frac{4}{1!}(x+1) + \frac{1}{0!}$$

$$f(x) = (x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1$$

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Najveća zajednička mjera polinoma

Zajednička mjera polinoma

Svaki polinom koji dijeli polinome f i g zovemo zajednička mjera polinoma f i g.

Najveća zajednička mjera polinoma

Najveća zajednička mjera polinoma f i g je normirani polinom najvećeg stupnja koji dijeli polinome f i g. Najveću zajedničku mjeru polinoma f i g označavamo s $M(f, g)$.

Najveću zajedničku mjeru dva polinoma možemo pronaći pomoću Euklidovog algoritma. Euklidov algoritam se temelji na uzastopnoj primjeni teorema o dijeljenju polinoma tako dugo dok ne dobijemo ostatak jednak 0. Tada je najveća zajednička mjera jednaka normiranom prethodnom ostatku.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Euklidov algoritam

Za pronalaženje najveće zajedničke mjere polinoma f i g, nakon konačno mnogo primjena teorema o dijeljenju polinoma dobivamo sljedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
f &= gq_1 + r_1, \quad \deg r_1 < \deg g\\
g &= r_1q_2 + r_2, \quad \deg r_2 < \deg r_1\\
r_1 &= r_2q_3 + r_3, \quad \deg r_3 < \deg r_2\\
&\vdots\\
r_{k-4} &= r_{k-3}q_{k-2} + r_{k-2}, \quad \deg r_{k-2} < \deg r_{k-3}\\
r_{k-3} &= r_{k-2}q_{k-1} + r_{k-1}, \quad \deg r_{k-1} < \deg r_{k-2}\\
r_{k-2} &= r_{k-1}q_k
\end{aligned}$$

Tada je $M(f,g) = n(r_{k-1})$ pri čemu $n(r_{k-1})$ označava normiranje polinoma r_{k-1}.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Sljedeće dvije propozicije dokazuju ispravnost Euklidovog algoritma koji nam daje egzistenciju najveće zajedničke mjere dva polinoma u prstenu $F[x]$ pri čemu je F bilo koje polje.

Propozicija 5.2.

Polinom r_{k-1} je zajednička mjera polinoma f i g. Drugim riječima, polinomi f i g su djeljivi s polinomom r_{k-1}.

Dokaz.

Iz posljednje jednakosti Euklidovog algoritma slijedi da r_{k-1} dijeli r_{k-2}. Iz pretposljednje jednakosti Euklidovog algoritma dalje slijedi da r_{k-1} dijeli r_{k-3}. Nastavimo li tako dalje redom do prve dvije jednakosti Euklidovog algoritma, dobivamo da r_{k-1} dijeli f i g. Drugim riječima, polinomi f i g su djeljivi s polinomom r_{k-1} pa je r_{k-1} zajednička mjera polinoma f i g. ♡

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Propozicija 5.3.

Polinom $n(r_{k-1})$ je najveća zajednička mjera polinoma f i g.

Dokaz.

Iz prethodne propozicije znamo da je r_{k-1} zajednička mjera polinoma f i g. Dokažimo još da je $n(r_{k-1})$ najveća zajednička mjera polinoma f i g.

Neka je r neka druga zajednička mjera polinoma f i g. Tada iz prve jednakosti Euklidovog algoritma slijedi da r dijeli r_1 jer dijeli f i g. Iz druge jednakosti Euklidovog algoritma dalje slijedi da r dijeli r_2. Nastavimo li tako dalje redom do pretposljednje jednakosti, dobivamo da r dijeli r_{k-1}. Stoga je $\deg r \leqslant \deg r_{k-1}$ iz čega slijedi da je $n(r_{k-1})$ najveća zajednička mjera polinoma f i g. ♡

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Propozicija 5.4.

Neka je F polje. Najveća zajednička mjera polinoma f i g u prstenu $F[x]$ je jedinstvena.

Dokaz.

Pretpostavimo da su r i r' dvije najveće zajedničke mjere polinoma f i g. Tada r dijeli r' i isto tako r' dijeli r. Stoga je $\deg r = \deg r'$ pa je $r' = \alpha r$ za neki $\alpha \in F$. No, kako je po definiciji najveća zajednička mjera normirani polinom, slijedi da je $\alpha = 1$ pa je $r' = r$. ♡

Napomena.

Iz dokaza prethodne propozicije uočavamo da nam normiranost daje jedinstvenost najveće zajedničke mjere. Zbog toga smo u definiciji najveće zajedničke mjere polinoma tražili da to mora biti normirani polinom kako bi ona bila jedinstveno određena.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Propozicija 5.5.

Postoje polinomi $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$ takvi da je $f \cdot \tilde{f} + g \cdot \tilde{g} = M(f, g)$.

Dokaz.

Iz prve jednakosti u Euklidovom algoritmu slijedi $r_1 = f - gq_1$. Stavimo li $f_1 = 1$ i $g_1 = -q_1$, dobivamo da postoje polinomi f_1 i g_1 za koje vrijedi $ff_1 + gg_1 = r_1$.

Uvrstimo li taj izraz za r_1 u drugu jednakost Euklidovog algoritma, dobivamo $r_2 = g - (ff_1 + gg_1)q_2$. Sredimo li desnu stranu, dobivamo da postoje polinomi f_2 i g_2 takvi da je $ff_2 + gg_2 = r_2$.

Nastavljajući dalje ovaj postupak do pretposljednje jednakosti Euklidovog algoritma, dobivamo da postoje polinomi f_k i g_k takvi da je $ff_k + gg_k = n(r_{k-1}) = M(f, g)$. Stavimo li $\tilde{f} = f_k$ i $\tilde{g} = g_k$, slijedi tvrdnja. ♡

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Napomena.

Polinomi $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$ iz prethodne propozicije nisu jedinstveni. Na primjer, ako je $f(x) = x$ i $g(x) = 1$, tada je očito $M(f, g) = 1$.

Kako je

$$x \cdot 1 + 1 \cdot (-x + 1) = 1,$$

polinomi $\tilde{f}(x) = 1$ i $\tilde{g}(x) = -x + 1$ zadovoljavaju jednakost

$$f \cdot \tilde{f} + g \cdot \tilde{g} = M(f, g). \qquad (\bigstar)$$

Isto tako, kako je

$$x \cdot (-1) + 1 \cdot (x + 1) = 1,$$

polinomi $\tilde{f}(x) = -1$ i $\tilde{g}(x) = x + 1$ također zadovoljavaju jednakost $(\bigstar)$.

Euklidov algoritam nam daje jedno rješenje za polinome $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$ tako da vrijedi jednakost $(\bigstar)$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.14.

U prstenu $\mathbb{R}[x]$ *odredite najveću zajedničku mjeru polinoma*

$$f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \quad \textit{i} \quad g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.14.

U prstenu $\mathbb{R}[x]$ odredite najveću zajedničku mjeru polinoma

$$f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \quad i \quad g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

Rješenje.

$$\begin{array}{l}
(\ x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1\ ) : (x^3 - 2x^2 + x - 2) = x + 3 \\
\underline{-x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x} \\
\qquad 3x^3 + x^2 + 3x + 1 \\
\qquad \underline{-3x^3 + 6x^2 - 3x + 6} \\
\qquad\qquad 7x^2 + 7 \quad \longleftarrow \quad \text{to je } r_1
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(\ x^3 - 2x^2 + x - 2\ ) : (7x^2 + 7) = \frac{1}{7}x - \frac{2}{7} \\
\underline{-x^3 \qquad - x} \\
\qquad -2x^2 - 2 \\
\qquad \underline{2x^2 + 2} \\
\qquad\qquad 0 \quad \longleftarrow \quad \text{to je } r_2
\end{array}$$

Stoga je $M(f,g) = n(7x^2 + 7) = \frac{1}{7} \cdot (7x^2 + 7) = x^2 + 1.$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.15.

Zadani su polinomi $f(x) = x^3 + 1$ *i* $g(x) = x^2 + 1$.

a. *Odredite* $M(f, g)$ *u prstenu* $\mathbb{R}[x]$.
b. *Odredite* $M(f, g)$ *u prstenu* $\mathbb{Z}_2[x]$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.15.

Zadani su polinomi $f(x) = x^3 + 1$ i $g(x) = x^2 + 1$.

- a *Odredite $M(f, g)$ u prstenu $\mathbb{R}[x]$.*
- b *Odredite $M(f, g)$ u prstenu $\mathbb{Z}_2[x]$.*

Rješenje.

Kada tražimo najveću zajedničku mjeru polinoma f i g u prstenu $\mathbb{R}[x]$, tada obavljamo operacije zbrajanja i množenja u polju $\mathbb{R}$.

Kada tražimo najveću zajedničku mjeru polinoma f i g u prstenu $\mathbb{Z}_2[x]$, tada obavljamo operacije zbrajanja i množenja u polju $\mathbb{Z}_2$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

- Traženje $M(f,g)$ u prstenu $\mathbb{R}[x]$

$$
\begin{array}{l}
(\ x^3 \quad\quad + 1\ ) : (x^2+1) = x \\
\underline{-x^3 - x \quad\quad} \\
\quad\quad - x + 1 \quad \longleftarrow \quad \text{to je } r_1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(\ x^2 \quad\quad + 1\ ) : (-x+1) = -x-1 \\
\underline{-x^2 + x \quad\quad} \\
\quad\quad\quad x + 1 \\
\quad\quad \underline{-x + 1} \\
\quad\quad\quad\quad 2 \quad \longleftarrow \quad \text{to je } r_2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(\ -x + 1\ ) : 2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\
\underline{\quad x \quad\quad\quad} \\
\quad\quad\quad 1 \\
\quad\quad \underline{-1} \\
\quad\quad\quad 0 \quad \longleftarrow \quad \text{to je } r_3
\end{array}
$$

Stoga je $M(f,g) = n(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

b) Traženje $M(f,g)$ u prstenu $\mathbb{Z}_2[x]$

$$\begin{array}{l} (x^3 \qquad + 1\ ) : (x^2+1) = x \\ \underline{x^3 + x} \\ \qquad x + 1 \quad \longleftarrow \text{ to je } r_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (x^2 \qquad + 1\ ) : (x+1) = x + 1 \\ \underline{x^2 + x} \\ \qquad x + 1 \\ \qquad \underline{x + 1} \\ \qquad\quad 0 \quad \longleftarrow \text{ to je } r_2 \end{array}$$

Stoga je $M(f,g) = n(x+1) = x+1$.

Naime, u prstenu $\mathbb{Z}_2[x]$ vrijedi

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2+x+1)$$
$$x^2 + 1 = (x+1)^2$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x-a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Zadatak 5.1.

Dokažite da za svaki prosti broj p u prstenu polinoma $\mathbb{Z}_p[x]$ vrijedi relacija

$$(x+1)^p = x^p + 1.$$

Ova relacija se još naziva san brucoša.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Zadatak 5.1.

Dokažite da za svaki prosti broj p u prstenu polinoma $\mathbb{Z}_p[x]$ vrijedi relacija

$$(x+1)^p = x^p + 1.$$

Ova relacija se još naziva san brucoša.

Rješenje.

Primijenite binomni poučak i provjerite da je $\binom{p}{k}$ djeljiv s brojem p za svaki $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ i svaki prosti broj p iz čega odmah slijedi gornja relacija.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

Najveća zajednička mjera polinoma

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Cjelobrojne kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Kompleksni brojevi

Skup kompleksnih brojeva

$$\mathbb{C} = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$$

Realni i imaginarni dio kompleksnog broja

$$z = x + yi, \quad \operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y$$

Konjugirano kompleksni broj kompleksnog broja

$$z = x + yi, \quad \overline{z} = x - yi$$

Apsolutna vrijednost ili modul kompleksnog broja

$$z = x + yi, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

Najveća zajednička mjera polinoma

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Cjelobrojne kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Jednakost kompleksnih brojeva:

$$a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c \ \text{ i } \ b = d$$

Zbrajanje kompleksnih brojeva:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Množenje kompleksnih brojeva:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Dijeljenje kompleksnih brojeva:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Zadatak 5.2.

Dokažite da za kompleksne brojeve vrijede sljedeće relacije:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$$

$$z\overline{z} = |z|^2$$

Zadatak 5.3.

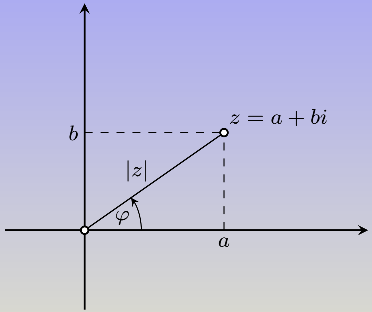
Matematičkom indukcijom dokažite da za kompleksne brojeve vrijede sljedeće relacije za svaki $n \in \mathbb{N}$:

$$\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \cdots + \overline{z}_n$$

$$\overline{z_1 z_2 \cdots z_n} = \overline{z}_1 \overline{z}_2 \cdots \overline{z}_n$$

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Trigonometrijski zapis kompleksnog broja



$$a = r\cos\varphi$$
$$b = r\sin\varphi$$
$$\arg z = \varphi \in [0, 2\pi\rangle$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$$
$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Trigonometrijski zapis kompleksnog broja

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Pritom, r zovemo modul kompleksnog broja z, a φ argument kompleksnog broja z.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Propozicija 5.6.

Ako je $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *i* $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, *tada vrijedi*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big).$$

Dokaz.

Koristeći poznate formule

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

odmah dobivamo

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \\ &\qquad + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big) \end{aligned}$$

♡

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Propozicija 5.7.

Ako je $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *i* $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, *tada vrijedi*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\Big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big).$$

Dokaz.

Koristeći poznate formule

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

odmah dobivamo

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2}{\underbrace{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}_{1}}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Propozicija 5.8.

Ako je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *tada vrijedi*

$$z^n = r^n\big(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz.

Dokaz provodimo indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo da tada tvrdnja vrijedi za sljedeći prirodni broj $n + 1$.

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z = r^n\big(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\big) \cdot r\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big) = \\ &= r^{n+1}\big(\cos n\varphi\cos\varphi + i\cos n\varphi\sin\varphi + \\ &\qquad + i\sin n\varphi\cos\varphi - \sin n\varphi\sin\varphi\big) = \\ &= r^{n+1}\big(\cos(n\varphi + \varphi) + i\sin(n\varphi + \varphi)\big) = \\ &= r^{n+1}\big(\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi\big) \end{aligned}$$

♡

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Za $r = 1$ dobivamo

Moivreova formula

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

Nadalje, također vrijedi

Eulerova formula

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

Najveća zajednička mjera polinoma

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Cjelobrojne kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Propozicija 5.9.

Ako je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *tada vrijedi*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\Big)$$

pri čemu je $n \in \mathbb{N}$ *i* $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Dokaz.

Kako $\sqrt[n]{z}$ mora biti kompleksni broj, možemo ga zapisati u trigonometrijskom obliku.

$$\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Dignemo li posljednju jednakost na n-tu potenciju, dobivamo

$$z = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$$

pri čemu smo koristili formulu za potenciranje kompleksnog broja.

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Kako je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, slijedi

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$

Stoga mora biti

$$r = \rho^n, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

odnosno

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Kako su sinus i kosinus periodične funkcije s temeljnim periodom 2π, konačno dobivamo

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

pri čemu je $k = 0, 1, \ldots, n-1$. ♡

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

n-ti korijen iz kompleksnog broja ima ukupno n različitih vrijednosti u skupu kompleksnih brojeva. Svi n-ti korijeni

$$z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

kompleksnog broja $z = re^{i\varphi}$ nalaze se na kružnici polumjera $\sqrt[n]{r}$ sa središtem u ishodištu i vrhovi su pravilnog n-terokuta.

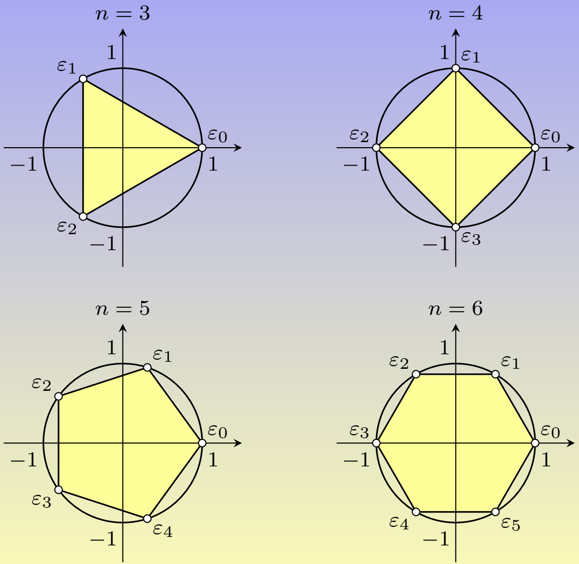
Specijalno, n-ti korijeni iz jedinice

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

leže na jediničnoj kružnici sa središtem u ishodištu i vrhovi su pravilnog n-terokuta.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$



Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Primjer 5.16.

Izračunajte $\sqrt[3]{-27}$.

Primjer 5.16.

Izračunajte $\sqrt[3]{-27}$.

Rješenje.

Najprije kompleksni broj $z = -27$ napišemo u trigonometrijskom obliku. U ovom slučaju je $r = 27$ i $\varphi = \pi$. Stoga je

$$z = 27(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Tada je

$$z_k = \sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

odnosno

$$z_0 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_1 = 3(\cos\pi + i\sin\pi) = 3(-1 + 0\cdot i) = -3$$

$$z_2 = 3\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right) = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Nultočke polinoma

Neka je

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

polinom n-tog stupnja iz $\mathbb{C}[x]$, tj. $a_0, a_1 \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$.

Kažemo da je $x_0 \in \mathbb{C}$ nultočka polinoma P ako je $P(x_0) = 0$.

Izraz

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (\clubsuit)$$

zovemo algebarska jednadžba n-tog stupnja u varijabli x. Vrijednost x_0 varijable x za koju vrijedi

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = 0$$

zovemo korijen ili rješenje jednadžbe $(\clubsuit)$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Kratnost nultočke

Kažemo da je $x_0 \in \mathbb{C}$ nultočka polinoma $P(x)$ kratnosti k ako je $P(x)$ djeljiv s $(x - x_0)^k$ i nije djeljiv s $(x - x_0)^{k+1}$.

Ako je $k = 1$, kažemo da je x_0 jednostruka nultočka. Ako je $k > 1$, kažemo da je x_0 višestruka nultočka (dvostruka, trostruka, . . .).

Teorem 5.7 (Osnovni teorem algebre).

Svaki polinom $P \in \mathbb{C}[x]$ stupnja $\geqslant 1$ ima barem jednu nultočku u polju $\mathbb{C}$, tj. $\mathbb{C}$ je algebarski zatvoreno polje.

Zadatak 5.4.

Objasnite zašto $\mathbb{R}$ nije algebarski zatvoreno polje.

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Korolar 5.4.

Svaki polinom $P \in \mathbb{C}[x]$ stupnja $n \geqslant 1$ ima točno n nultočaka u polju $\mathbb{C}$ brojeći njihovu kratnost.

Dokaz.

Prema osnovnom teoremu algebre polinom P ima barem jednu nultočku $x_1 \in \mathbb{C}$. Prema Descartesovom teoremu je

$$P(x) = (x - x_1)Q_1(x), \qquad (\lozenge)$$

gdje je $Q_1 \in \mathbb{C}[x]$ polinom stupnja $n - 1$.

Prema osnovnom teoremu algebre polinom Q_1 ima barem jednu nultočku $x_2 \in \mathbb{C}$ pa je prema Descartesovom teoremu

$$Q_1(x) = (x - x_2)Q_2(x), \qquad (\blacklozenge)$$

gdje je $Q_2 \in \mathbb{C}[x]$ polinom stupnja $n - 2$.

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Uvrstimo li ($\blacklozenge$) u ($\lozenge$), dobivamo

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)Q_2(x).$$

Sada opet primijenimo isto zaključivanje na polinom Q_2 i nakon konačno mnogo koraka dobivamo da je

$$P(x) = c(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n), \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

iz čega slijedi tvrdnja. $\heartsuit$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Korolar 5.5 (Faktorizacija polinoma).

Polinom $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *iz* $\mathbb{C}[x]$ *može se napisati u obliku*

$$P(x) = a_n (x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} \cdots (x - x_s)^{n_s}$$

gdje su $x_1, \ldots, x_s$ *različite nultočke polinoma* P*, a* n_i *je kratnost nultočke* x_i *i vrijedi* $n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Teorem 5.8.

$x_0 \in \mathbb{C}$ je nultočka kratnosti k polinoma $P \in \mathbb{C}[x]$ akko vrijedi

$$P(x_0) = P'(x_0) = \cdots = P^{(k-1)}(x_0) = 0, \quad P^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Ako je $x = x_0$ nultočka kratnosti k polinoma $P \in \mathbb{C}[x]$, tada je

$$P(x) = (x - x_0)^k Q(x), \; Q(x_0) \neq 0.$$

Deriviranjem dobivamo

$$P'(x) = k(x - x_0)^{k-1} Q(x) + (x - x_0)^k Q'(x),$$

odnosno

$$P'(x) = (x - x_0)^{k-1} \Big[kQ(x) + (x - x_0) Q'(x) \Big].$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Označimo li s $Q_1(x) = kQ(x) + (x - x_0)Q'(x)$, dobivamo

$$P'(x) = (x - x_0)^{k-1} Q_1(x),\ Q_1(x_0) \neq 0,\ P'(x_0) = 0.$$

Nastavimo li dalje derivirati, dobivamo

$$P''(x) = (k-1)(x - x_0)^{k-2} Q_1(x) + (x - x_0)^{k-1} Q_1'(x)$$

odnosno

$$P''(x) = (x - x_0)^{k-2}\Big[(k-1)Q_1(x) + (x - x_0)Q_1'(x)\Big]$$

Označimo li s $Q_2(x) = (k-1)Q_1(x) + (x - x_0)Q_1'(x)$, dobivamo

$$P''(x) = (x - x_0)^{k-2} Q_2(x),\ Q_2(x_0) \neq 0,\ P''(x_0) = 0.$$

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Nakon $k-1$ deriviranja dobivamo

$$P^{(k-1)}(x_0) = (x-x_0)Q_{k-1}(x),\ Q_{k-1}(x_0) \neq 0,\ P^{(k-1)}(x_0) = 0.$$

Deriviramo li još jedanput, dobivamo

$$P^{(k)}(x) = Q_{k-1}(x) + (x-x_0)Q'_{k-1}(x),$$

iz čega slijedi da je $P^{(k)}(x_0) = Q_{k-1}(x_0) \neq 0$.

Dakle, zaista je

$$P(x_0) = P'(x_0) = \cdots = P^{(k-1)}(x_0) = 0,\ P^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Napišimo polinom $P(x)$ po potencijama od $x - x_0$.

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

Zbog $P(x_0) = P'(x_0) = \cdots = P^{(k-1)}(x_0) = 0$ slijedi

$$P(x) = \sum_{i=k}^{n} \frac{P^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

odnosno

$$P(x) = (x - x_0)^k \sum_{i=k}^{n} \frac{P^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^{i-k}.$$

Iz posljednje jednakosti zaključujemo da je polinom P djeljiv s $(x - x_0)^k$ i nije djeljiv s $(x - x_0)^{k+1}$ pa je x_0 nultočka kratnosti k polinoma P.

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Jednostruku nultočku možemo vrlo lako prepoznati s grafa funkcije.

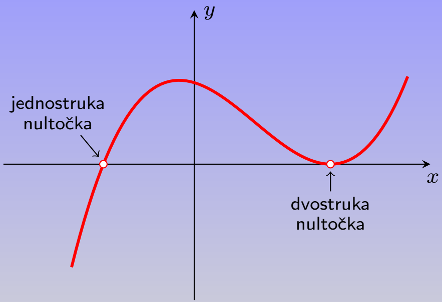
Višestruku nultočku također možemo prepoznati s grafa funkcije. Točnu kratnost višestruke nultočke je ipak zbog "varljivosti" slike gotovo nemoguće prepoznati samo s grafa funkcije.

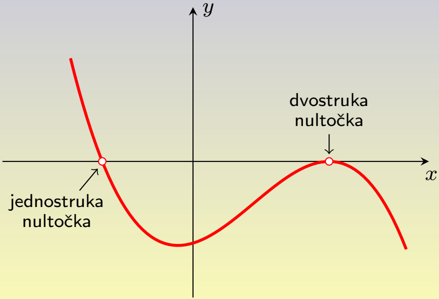
Međutim, kod višestruke nultočke s grafa funkcije možemo lagano prepoznati radi li se o višestrukoj nultočki parne ili neparne kratnosti.

Sljedećih nekoliko slika zapravo daje odgovor kako s grafa funkcije prepoznati jednostruku nultočku, višestruku nultočku parne kratnosti i višestruku nultočku neparne kratnosti.

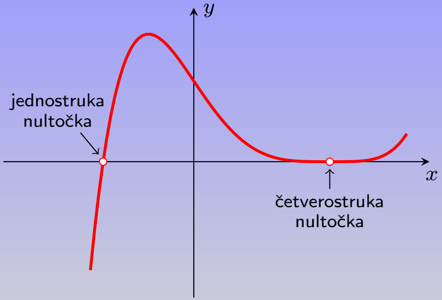
Obratite pažnju kako graf funkcije izgleda u okolini jednostruke nultočke, kako izgleda u okolini višestruke nultočke parnog reda i kako izgleda u okolini višestruke nultočke neparnog reda.

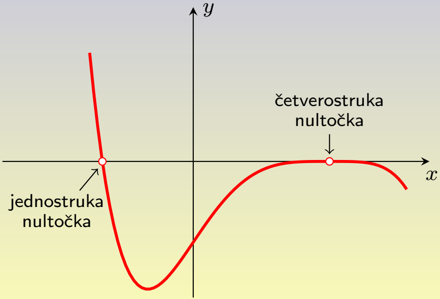
Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda



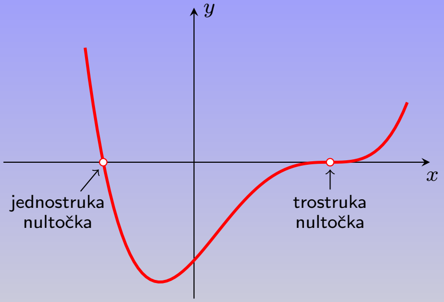


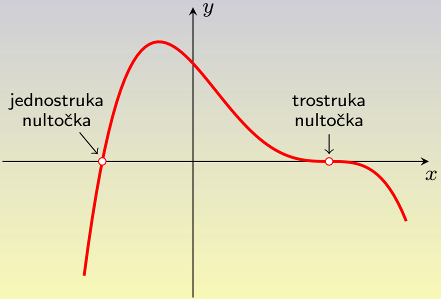
Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda



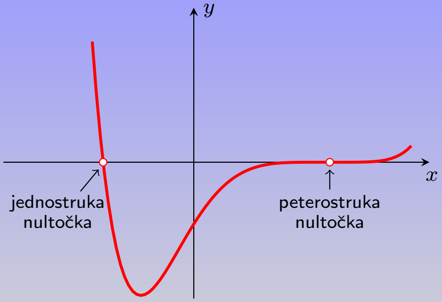


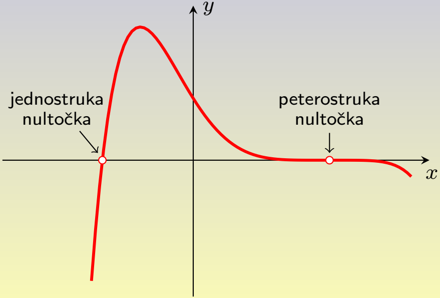
Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda





Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda





prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Teorem 5.9.

Neka je $P \in \mathbb{R}[x]$. Ako je $z_0 \in \mathbb{C}$ nultočka polinoma P, tada je i $\overline{z}_0$ također nultočka polinoma P.

Dokaz.

Neka je

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\overline{a}_i = a_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, n.$$

Pretpostavimo da je $z_0 \in \mathbb{C}$ nultočka polinoma P. Tada je

$$P(z_0) = a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0 = 0.$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Sada imamo

$$\begin{aligned}
P(\overline{z}_0) &= a_n \overline{z}_0^{\,n} + a_{n-1}\overline{z}_0^{\,n-1} + \cdots + a_1 \overline{z}_0 + a_0 = \\
&= a_n \overline{z_0^n} + a_{n-1}\overline{z_0^{n-1}} + \cdots + a_1 \overline{z}_0 + a_0 = \\
&= \overline{a}_n \overline{z_0^n} + \overline{a}_{n-1}\overline{z_0^{n-1}} + \cdots + \overline{a}_1 \overline{z}_0 + \overline{a}_0 = \\
&= \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a}_0 = \\
&= \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0} = \overline{0} = 0.
\end{aligned}$$

Dakle, $P(\overline{z}_0) = 0$. ♡

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Napomena.

Prethodni teorem ne vrijedi ako je $P \in \mathbb{C}[x]$. Na primjer, nultočke polinoma

$$P(x) = x^2 - i$$

su $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ i $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ koje nisu konjugirano kompleksne.

Uočite gdje je u dokazu teorema 5.9. bilo važno da imamo polinom s realnim koeficijentima!

Korolar 5.6.

Svaki polinom $P \in \mathbb{R}[x]$ neparnog stupnja ima barem jednu realnu nultočku.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Dokaz 1 (u duhu algebre).

Ako je $z \in \mathbb{C}$ kompleksna nultočka polinoma s realnim koeficijentima, tada je i $\overline{z} \in \mathbb{C}$ također nultočka tog polinoma. Dakle, kompleksne nultočke polinoma s realnim koeficijentima se pojavljuju u parovima. Nadalje, svaki polinom n-tog stupnja s koeficijentima iz $\mathbb{R}$ ima točno n nultočaka u skupu kompleksnih brojeva brojeći njihovu kratnost. Konačno, ako imamo polinom s realnim koeficijentima neparnog stupnja, on mora imati barem jednu realnu nultočku jer je ukupan broj svih kompleksnih nultočki paran broj (jer se one pojavljuju u parovima), a ukupni broj svih nultočki mora biti neparan broj (jer polinom ima neparan stupanj).

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Dokaz 2 (u duhu analize).

Neka je

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

gdje je n neparan prirodni broj. Kada $x \to \pm\infty$ na predznak od $f(x)$ utječe samo član $a_n x^n$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a_n > 0$. Tada postoje $x_1 < 0$ i $x_2 > 0$ takvi da je $f(x_1) < 0$ i $f(x_2) > 0$ jer je n neparan broj. Kako je polinom neprekidna funkcija, a neprekidna funkcija na segmentu poprima sve međuvrijednosti, tada postoji $x_0 \in \langle x_1, x_2 \rangle$ takav da je $f(x_0) = 0$. ♡

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Napomena.

U oba dokaza korolara 5.6. koristili smo nekoliko iznimno važnih teorema u matematici čiji dokazi nisu uopće trivijalni. U prvom dokazu smo koristili osnovni teorem algebre, a za njegov dokaz je potrebna teorija kompleksnih funkcija kompleksne varijable. Postoji i algebarski dokaz tog teorema u kojem se koristi Galoisova teorija. U drugom dokazu smo koristili Bolzano-Weierstrassov teorem o neprekidnim realnim funkcijama na segmentu koji je specijalni slučaj teorema o neprekidnim realnim funkcijama na kompaktnom skupu. Prema tom teoremu svaka neprekidna realna funkcija na kompaktnom skupu poprima minimum i maksimum i sve međuvrijednosti.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Teorem 5.10 (Vièteove formule).

Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *polinom s kompleksnim koeficijentima, a* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *njegove nultočke. Tada vrijedi:*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\sum_{i<j} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\sum_{i<j<k} x_i x_j x_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Cjelobrojne nultočke polinoma

Teorem 5.11.

Ako je $\alpha \in \mathbb{Z}$ nultočka polinoma $f(x)$ s cjelobrojnim koeficijentima, tada je α djelitelj njegovog slobodnog člana.

Dokaz.

Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, gdje su $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$. Kako je $f(\alpha) = 0$, imamo

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0.$$

Iz te jednakosti slijedi

$$a_0 = -\alpha\Big(\underbrace{a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \cdots + a_1}_{\in \mathbb{Z}}\Big),$$

iz čega zaključujemo da je α djelitelj od a_0. ♡

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.17.

Riješite jednadžbu $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0.$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.17.

Riješite jednadžbu $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$.

Rješenje.

Kandidati za cjelobrojna rješenja: $1, -1, 2, -2$.

Pomoću Hornerovog algoritma dobivamo jedno rješenje $x_1 = -1$.

	1	1	-2	-2
-1	1	0	-2	0

Sada faktorizacija početne jednadžbe glasi

$$(x+1)(1 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 2) = 0$$

pa su preostala dva rješenja $x_2 = \sqrt{2}$ i $x_3 = -\sqrt{2}$.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

Najveća zajednička mjera polinoma

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Cjelobrojne kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Teorem 5.12.

Ako je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima i α njegova cjelobrojna nultočka, tada je za svaki $k \in \mathbb{Z}$ broj $f(k)$ djeljiv s $\alpha - k$.

Dokaz.

Prema pretpostavci je

$$0 = f(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0.$$

Nadalje,

$$f(k) = a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_1 k + a_0.$$

Oduzimanjem prethodnih dviju jednakosti dobivamo

$$-f(k) = a_n\left(\alpha^n - k^n\right) + a_{n-1}\left(\alpha^{n-1} - k^{n-1}\right) + \cdots + a_1\left(\alpha - k\right).$$

Kako je svaki od binoma na desnoj strani djeljiv sa $\alpha - k$, slijedi da je $-f(k)$ pa stoga i $f(k)$ djeljiv s $\alpha - k$. ♡

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.18.

Riješite jednadžbu $x^3 - 4x^2 - 5x + 20 = 0$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.18.

Riješite jednadžbu $x^3 - 4x^2 - 5x + 20 = 0.$

Rješenje.

Kandidati za cjelobrojna rješenja:

$$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 4,\ -4,\ 5,\ -5,\ 10,\ -10,\ 20,\ -20.$$

Uzmemo li $k = -2$, dobivamo $f(k) = f(-2) = 6$.

Ispišemo brojeve $\alpha - k$, tj. $\alpha + 2$

$$3,\ 1,\ 4,\ 0,\ 6,\ -2,\ 7,\ -3,\ 12,\ -8,\ 22,\ -18.$$

Kako $f(-2)$ nije djeljiv s $4,\ 0,\ 7,\ 12,\ -8,\ 22,\ -18$, onda prema prethodnom teoremu jedini kandidati za cjelobrojna rješenja preostaju

$$1,\ -1,\ 4,\ -4,\ -5.$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Pomoću Hornerovog algoritma dobivamo jedno rješenje $x_1 = 4$.

	1	-4	-5	20
4	1	0	-5	0

Sada faktorizacija početne jednadžbe glasi

$$(x-4)(x^2-5)=0$$

pa su preostala dva rješenja

$$x_2 = \sqrt{5}, \quad x_3 = -\sqrt{5}.$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Racionalne nultočke

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Teorem 5.13.

Ako je racionalni broj $\alpha = \frac{p}{q}$ nultočka polinoma $f(x)$ s cjelobrojnim koeficijentima i $M(p,q) = 1$, onda je p djelitelj slobodnog člana i q djelitelj vodećeg koeficijenta od $f(x)$.

Dokaz.

Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, gdje su $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$. Po pretpostavci je $f(\alpha) = 0$ pa imamo

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Iz te jednakosti slijedi

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0, \qquad (\circledast)$$

pa je

$$a_0 q^n = -p\Big(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \cdots + a_1 q^{n-1}\Big).$$

Prema pretpostavci su p i q relativno prosti. U tom slučaju p nije djelitelj od q^n. Stoga iz posljednje jednakosti slijedi da je p djelitelj od a_0.

Nadalje, iz $(\circledast)$ dobivamo

$$a_n p^n = -q\Big(a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}\Big),$$

iz čega slijedi da je q djelitelj od a_n. ♡

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.19.

Riješite jednadžbu $3x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0.$

Primjer 5.19.

Riješite jednadžbu $3x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0.$

Rješenje.

Kandidati za racionalna rješenja:

$$-1,\ 1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}.$$

Hornerovim algoritmom dobivamo da je $x_1 = \frac{1}{3}$ jedno rješenje.

	3	−1	3	−1
$\frac{1}{3}$	3	0	3	0

Sada faktorizacija početne jednadžbe glasi

$$\left(x - \tfrac{1}{3}\right)\left(3x^2 + 3\right) = 0.$$

Stoga su preostala dva rješenja $x_2 = i$ i $x_3 = -i$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Teorem 5.14.

Ako je $M(p,q)=1$ i $\alpha=\frac{p}{q}$ racionalna nultočka polinoma $f(x)$ s cjelobrojnim koeficijentima, tada je za svaki cijeli broj k broj $f(k)$ djeljiv s $p-kq$.

Dokaz.

Prema pretpostavci je

$$0=f(\alpha)=a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\frac{p}{q}+a_0.$$

Nadalje,

$$f(k)=a_nk^n+a_{n-1}k^{n-1}+\cdots+a_1k+a_0.$$

Oduzimanjem gornjih dviju jednakosti dobivamo

$$-f(k)=a_n\left(\left(\frac{p}{q}\right)^n-k^n\right)+a_{n-1}\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}-k^{n-1}\right)+\cdots+a_1\left(\frac{p}{q}-k\right)$$

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x-a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

odnosno

$$-f(k)q^n = a_n\left(p^n - q^n k^n\right) + \\ + a_{n-1}\left(p^{n-1} - q^{n-1}k^{n-1}\right)q + \cdots + a_1\left(p - qk\right)q^{n-1} \qquad (\square)$$

Svaki od binoma na desnoj strani od ($\square$) je djeljiv s $p - qk$.

Iz $M(p,q) = 1$ slijedi $M(q, p - kq) = 1$.

Pretpostavimo suprotno, tj. $M(q, p - kq) = s > 1$. Tada je

$$p - kq = t_1 s, \quad q = t_2 s$$

za neke $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ iz čega slijedi

$$p = t_1 s + k t_2 s = (t_1 + k t_2)s.$$

Stoga je $M(p,q) \geqslant s$, što je kontradikcija s pretpostavkom pa je zaista $M(q, p - qk) = 1$. Tada je i $M(q^n, p - qk) = 1$. Sada zbog svega navedenog iz ($\square$) slijedi da je $f(k)$ djeljiv s $p - kq$. ♡

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.20.

Riješite jednadžbu $12x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = 0.$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.20.

Riješite jednadžbu $12x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = 0.$

Rješenje.

Kandidati za racionalna rješenja:

$$1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{6},\ \frac{1}{12},\ -\frac{1}{12}$$

$k = -1, \quad f(-1) = -6, \quad p - kq = p + q$

Ispišemo brojeve $p + q$.

$$2,\ 0,\ 3,\ 1,\ 4,\ 2,\ 5,\ 3,\ 7,\ 5,\ 13,\ 11$$

Kako $f(-1)$ nije djeljivo s $0,\ 4,\ 5,\ 7,\ 5,\ 13,\ 11$, prema prethodnom teoremu jedini kandidati za racionalna rješenja su

$$1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4}.$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Hornerovim algoritmom dobivamo jedno rješenje $x_1 = \frac{1}{2}$.

	12	4	-3	-1
$\frac{1}{2}$	12	10	2	0

Sada faktorizacija početne jednadžbe glasi

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(12x^2 + 10x + 2\right) = 0,$$

iz čega rješavanjem kvadratne jednadžbe $12x^2 + 10x + 2 = 0$ dobivamo preostala dva rješenja $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{3}$.

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Cjelobrojne kompleksne nultočke

Cjelobrojna kompleksna nultočka

Cjelobrojna kompleksna nultočka polinoma je nultočka $\alpha+\beta i$, gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{Z},\ \beta \neq 0$.

Teorem 5.15.

Ako je $\alpha + \beta i$ cjelobrojna kompleksna nultočka polinoma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

s cjelobrojnim koeficijentima, onda je $\alpha^2 + \beta^2$ djelitelj slobodnog člana.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Dokaz.

Prema teoremu 5.9., ako je $\alpha + \beta i$ nultočka zadanog polinoma, tada je $\alpha - \beta i$ također nultočka tog polinoma. Stoga je polinom $f(x)$ djeljiv s polinomom

$$g(x) = \big(x - (\alpha + \beta i)\big)\big(x - (\alpha - \beta i)\big),$$

odnosno s

$$g(x) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2.$$

Dakle,

$$f(x) = \big(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2\big)q(x).$$

Ako stavimo

$$q(x) = b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_0, \quad b_i \in \mathbb{Z},$$

tada dobivamo $a_0 = (\alpha^2 + \beta^2)b_0$ iz čega slijedi tvrdnja. ♡

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.21.

Odredite cjelobrojne kompleksne korijene jednadžbe

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0.$$

Primjer 5.21.

Odredite cjelobrojne kompleksne korijene jednadžbe

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0.$$

Rješenje.

Slobodni član 5 ima dva pozitivna djelitelja 1 i 5. Prikažimo te brojeve u obliku sume kvadrata $\alpha^2 + \beta^2,\ \beta \neq 0$.

$$1 = 0^2 + 1^2$$
$$5 = 1^2 + 2^2 = 2^2 + 1^2$$

Sada odavde slijedi da su kandidati za cjelobrojne kompleksne korijene sljedeći brojevi:

$$i,\ -i,\ 1+2i,\ 1-2i,\ -1+2i,\ -1-2i,\ 2+i,\ 2-i,\ -2+i,\ -2-i$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Hornerovim algoritmom dobivamo da je $x_1 = i$ jedno rješenje.

	1	-4	6	-4	5
i	1	$-4+i$	$5-4i$	$5i$	0

Prema teoremu 5.9. znamo da je tada i $x_2 = -i$ također rješenje. Sada je polinom na lijevoj strani zadane jednadžbe djeljiv s polinomom

$$(x-i)(x+i) = x^2 + 1,$$

pa se početna jednadžba faktorizira u obliku

$$(x^2+1)(x^2-4x+5) = 0.$$

Riješimo li jednadžbu $x^2 - 4x + 5 = 0$ dobivamo preostala dva rješenja $x_3 = 2+i$ i $x_4 = 2-i$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Simetrične jednadžbe

Simetrični polinom

Za polinom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ kažemo da je simetrični ako vrijedi

$$a_k = a_{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

Simetričnom polinomu $f(x)$ pridružena jednadžba $f(x) = 0$ zove se **simetrična jednadžba**.

Zadatak 5.5.

Dokažite da je polinom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-tog stupnja simetričan akko vrijedi

$$x^n \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Simetrične jednadžbe parnog stupnja

Simetrična jednadžba $f(x) = 0$ parnog stupnja može se riješiti pomoću supstitucije

$$x + \frac{1}{x} = t. \qquad \text{(SIM)}$$

Kvadriramo li (SIM) dobivamo

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2.$$

Kubiramo li (SIM) dobivamo

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t.$$

Nastavljajući ovaj postupak izraz $x^k + \frac{1}{x^k}$ možemo napisati kao polinom u varijabli t za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.22.

Riješite jednadžbu $3x^4 - 13x^3 + 16x^2 - 13x + 3 = 0.$

Primjer 5.22.

Riješite jednadžbu $3x^4 - 13x^3 + 16x^2 - 13x + 3 = 0$.

Rješenje.

Podijelimo li jednadžbu s x^2 dobivamo

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 16 = 0.$$

Stavimo supstituciju $t = x + \frac{1}{x}$. Tada je $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Sada dobivamo jednadžbu

$$3t^2 - 13t + 10 = 0,$$

čija rješenja su $t_1 = 1$ i $t_2 = \frac{10}{3}$. Vratimo se natrag u supstituciju $t = x + \frac{1}{x}$ i dobivamo rješenja početne jednadžbe:

$$x_1 = 3,\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2},\ x_4 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Propozicija 5.10.

Svaki simetrični polinom neparnog stupnja je djeljiv s $x+1$.

Dokaz.

Neka je $f(x) = a_0 x^{2k+1} + a_1 x^{2k} + \cdots + a_1 x + a_0$. Tada je

$$f(x) = a_0\left(x^{2k+1}+1\right) + a_1\left(x^{2k}+x\right) + \cdots + a_k\left(x^{k+1}+x^k\right),$$

odnosno

$$f(x) = a_0\left(x^{2k+1}+1\right) + a_1 x\left(x^{2k-1}+1\right) + \cdots + a_k x^k\left(x+1\right).$$

Kako je svaki od binoma na desnoj strani djeljiv s $x+1$, slijedi da je $f(x)$ djeljiv s $x+1$. ♡

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Propozicija 5.11.

Kvocijent pri dijeljenju simetričnog polinoma neparnog stupnja s polinomom $x+1$ je simetrični polinom parnog stupnja.

Dokaz.

Neka je f simetrični polinom neparnog stupnja n. Prema prethodnoj propoziciji postoji polinom q stupnja $n-1$ takav da je

$$f(x) = (x+1)q(x). \qquad (\blacklozenge)$$

Tvrdimo da je q također simetrični polinom. Kako je f simetrični polinom stupnja n, prema ◂ zadatku 5.5. vrijedi

$$x^n \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x). \qquad (\lozenge)$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Uvrstimo li (♦) u (♢), sređivanjem dobivamo

$$
\begin{aligned}
x^n \cdot f\left(\tfrac{1}{x}\right) &= f(x) \\
x^n \cdot \left(\tfrac{1}{x}+1\right) q\left(\tfrac{1}{x}\right) &= (x+1)q(x) \\
\left(x^{n-1}+x^n\right) q\left(\tfrac{1}{x}\right) &= (x+1)q(x) \\
x^{n-1}(x+1)\, q\left(\tfrac{1}{x}\right) &= (x+1)q(x) \\
x^{n-1} \cdot q\left(\tfrac{1}{x}\right) &= q(x)
\end{aligned}
$$

iz čega zbog $\deg q = n-1$ i zadatka 5.5. slijedi da je q zaista simetrični polinom. ♡

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Iz svega navedenog dobivamo sljedeći postupak za rješavanje simetrične jednadžbe $f(x) = 0$ neparnog stupnja.

- $x_1 = -1$ je jedno rješenje jednadžbe $f(x) = 0$.
- Hornerovim algoritmom podijelimo polinom f s polinomom $x+1$. Dobivamo kvocijent q koji je simetrični polinom parnog stupnja.
- Pomoću supstitucije $t = x + \frac{1}{x}$ riješimo simetričnu jednadžbu $q(x) = 0$ parnog stupnja i na taj način pronađemo preostala rješenja početne jednadžbe $f(x) = 0$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.23.

Riješite jednadžbu $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.23.

Riješite jednadžbu $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0.$

Rješenje.

Jedno rješenje zadane jednadžbe je $x_1 = -1$.

	2	7	7	2
-1	2	5	2	0

Preostaje još riješiti simetričnu jednadžbu parnog stupnja

$$2x^2 + 5x + 2 = 0.$$

Kako se radi o kvadratnoj jednadžbi, nema potrebe uvoditi supstituciju $t = x + \frac{1}{x}$. Rješenja te jednadžbe su $x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = -2$. Stoga su

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = -2$$

sva rješenja početne jednadžbe.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Cardanova formula

Neka je

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

algebarska jednadžba trećeg stupnja. Rješavanje ove jednadžbe sastoji se od nekoliko koraka.

1. **Normiranje jednadžbe.** Jednadžbu podijelimo s a_3 i dobivamo

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

gdje je $a = \frac{a_2}{a_3}$, $b = \frac{a_1}{a_3}$, $c = \frac{a_0}{a_3}$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

2. **Poništenje kvadratnog člana.** Supstitucijom

$$x = y - \frac{a}{3}$$

riješit ćemo se kvadratnog člana i jednadžba poprima oblik

$$y^3 + py + q = 0, \tag{1}$$

pri čemu je

$$p = b - \frac{1}{3}a^2, \quad q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c.$$

Takva jednadžba u kojoj nema kvadratnog člana zove se kanonski oblik jednadžbe trećeg stupnja.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

3. Rješenje kanonske jednadžbe (1) tražimo u obliku

$$y = u + v, \tag{2}$$

gdje su u i v za sada još neodređeni brojevi. Kako se svaki kompleksni broj može na beskonačno mnogo načina prikazati u obliku zbroja dvaju kompleksnih brojeva, na rastav (2) možemo postaviti još jedan uvjet.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Ako je (2) korijen jednadžbe (1), onda ju on mora zadovoljavati, tj. mora biti

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0,$$

odnosno

$$(3uv+p)(u+v) + (u^3+v^3+q) = 0.$$

Odaberimo onaj od rastava (2) za koji vrijedi

$$3uv + p = 0.$$

Ako taj uvjet uvrstimo u prethodnu jednadžbu, dobivamo

$$u^3 + v^3 = -q.$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Problem rješavanja kanonske jednadžbe (1) svodi se na rješavanje sustava

$$\left.\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q \\ uv &= -\frac{p}{3} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

jer ako su u i v rješenja od (3), onda je očito $u + v$ rješenje od (1).

Umjesto sustava (3) promatramo sustav

$$\left.\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q \\ u^3 v^3 &= -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Sustavi (3) i (4) nisu ekvivalentni. Svako rješenje sustava (3) jest rješenje sustava (4), ali obrnuto ne mora vrijediti.

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Dakle, sustav (3) možemo riješiti tako da riješimo sustav (4) i uzmemo samo ona rješenja od (4) koja zadovoljavaju drugu jednadžbu u (3).

Iz (4) prema Vièteovim formulama slijedi da su u^3 i v^3 korijeni jednadžbe

$$t^2 + qt - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

Odavde slijedi

$$t_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Dakle,

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Stoga se rješenje kanonske jednadžbe

$$y^3 + py + q = 0$$

može se napisati u obliku

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad (5)$$

Formula (5) se zove **Cardanova formula**.

Polinomi
- Definicija polinoma
- Prsten polinoma
- Jednakost polinoma
- Određenost polinoma
- Dijeljenje polinoma
- Hornerov algoritam
- Razvoj po $x - a$
- Najveća zajednička mjera polinoma
- Kompleksni brojevi
- Nultočke polinoma
- Cjelobrojne nultočke
- Racionalne nultočke
- Cjelobrojne kompleksne nultočke
- Simetrične jednadžbe
- Cardanova formula
- Ferrarijeva metoda

Važna napomena.

Kako treći korijen iz kompleksnog broja ima tri vrijednosti iz Cardanove formule se čini da kubna jednadžba ima devet rješenja. Međutim, sjetimo se izvoda Cardanove formule i neekvivalentnosti sustava (3) i (4). Brojevi u i v moraju još zadovoljavati jednadžbu $3uv + p = 0$ pa imamo zaista samo tri rješenja.

Cardanova formula je nespretna za računanje pa ćemo ju malo modificirati. Neka je

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

bilo koja od triju vrijednosti trećeg korijena i

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1}.$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Neka je $\varepsilon = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ treći korijen iz jedinice. Tada je

$$\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \ \ \varepsilon^3 = 1, \ \ \varepsilon^4 = \varepsilon, \ \ \varepsilon^5 = \varepsilon^2, \ \ \varepsilon^6 = 1, \ldots$$

Uočimo da je $\varepsilon^2 = \overline{\varepsilon}$ i $\varepsilon\overline{\varepsilon} = 1$. Tada se rješenja jednadžbe

$$x^3 + px + q = 0$$

mogu zapisati u obliku

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= u_1 + v_1 \\ x_2 &= u_1\varepsilon + v_1\overline{\varepsilon} \\ x_3 &= u_1\overline{\varepsilon} + v_1\varepsilon \end{aligned}}$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Da je x_1 korijen te jednadžbe očito je iz postupka pomoću kojeg je izvedena Cardanova formula. Provjerimo da je i x_2 zaista korijen te jednadžbe. Uvrstimo li x_2 u gornju jednadžbu, dobivamo

$$(u_1\varepsilon + v_1\overline{\varepsilon})^3 + p(u_1\varepsilon + v_1\overline{\varepsilon}) + q =$$
$$= \underbrace{u_1^3 + v_1^3 + q}_{=0} + (u_1\varepsilon + v_1\overline{\varepsilon})(\underbrace{3u_1v_1 + p}_{=0}) = 0$$

pa je x_2 zaista rješenje. Analogno se provjeri da je i x_3 također rješenje te jednadžbe.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Primjer 5.24.

Riješite jednadžbu $x^3 + 30x + 90 = 0.$

Primjer 5.24.

Riješite jednadžbu $x^3 + 30x + 90 = 0.$

Rješenje.

Kako se radi o kanonskom obliku jednadžbe trećeg stupnja, možemo odmah primijeniti Cardanovu formulu. U ovom slučaju je $p = 30$ i $q = 90$ pa uvrštavanjem u formulu

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

dobivamo $u = \sqrt[3]{10}$. Uzmimo realnu vrijednost ovog trećeg korijena, tj. $u_1 = \sqrt[3]{10}$. Tada je

$$v_1 = -\frac{p}{3u_1} = -\frac{30}{3\sqrt[3]{10}} = -\frac{10}{\sqrt[3]{10}} \cdot \frac{\sqrt[3]{100}}{\sqrt[3]{100}} = -\sqrt[3]{100}$$

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

Najveća zajednička mjera polinoma

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Cjelobrojne kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Uz $\varepsilon = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ sva rješenja se dobiju prema ranije izvedenim formulama.

$$x_1 = u_1 + v_1$$
$$x_1 = \sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{100}$$

$$x_2 = u_1\varepsilon + v_1\overline{\varepsilon}$$
$$x_2 = \frac{-\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{100}}{2} - \frac{\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{100}}{2}\sqrt{3}\,i$$

$$x_3 = u_1\overline{\varepsilon} + v_1\varepsilon$$
$$x_3 = \frac{-\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{100}}{2} + \frac{\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{100}}{2}\sqrt{3}\,i$$

x_3 nismo trebali direktno računati jer imamo jednadžbu s realnim koeficijentima, a znamo da se onda kompleksni korijeni javljaju u konjugiranim parovima.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

U Cardanovoj formuli javlja se izraz

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

koji zovemo diskriminanta jednadžbe $x^3 + px + q = 0$.

Teorem 5.16.

Neka je Δ diskriminanta jednadžbe $x^3 + px + q = 0$ s realnim koeficijentima. Tada vrijedi:

- *Ako je $\Delta > 0$, onda zadana jednadžba ima jedan realni i dva konjugirano kompleksna korijena.*
- *Ako je $\Delta = 0$, onda su svi korijeni zadane jednadžbe realni i barem jedan od njih je višestruki.*
- *Ako je $\Delta < 0$, onda su svi korijeni zadane jednadžbe realni i različiti.*

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Napomena.

Do otkrića kompleksnih brojeva došlo je preko kubne jednadžbe, a ne preko kvadratne kako se uči u školi. Naime, krenulo se od kubne jednadžbe

$$(x+1)(x-1)(x-2)=0$$

za koju se zna da ima tri korijena -1, 1, 2. Ako se ta jednadžba svede na kanonski oblik supstitucijom $x = y + \frac{2}{3}$ dobiva se jednadžba

$$y^3 - \tfrac{7}{3}y + \tfrac{20}{27} = 0.$$

Prema Cardanovoj formuli je

$$x = \frac{2}{3} + \sqrt[3]{-\frac{10}{27} + \sqrt{-\frac{9161}{729}}} + \sqrt[3]{-\frac{10}{27} - \sqrt{-\frac{9161}{729}}}.$$

Vidimo da se pojavio drugi korijen iz negativnog broja, a znamo da rezultat mora biti realan pa je to bio pravi razlog uvođenja kompleksnih brojeva.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Ferrarijeva metoda

Neka je

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad a_4 \neq 0$$

algebarska jednadžba 4. reda. Pogledajmo kako se ona rješava Ferrarijevom metodom. Prvo treba **normirati** jednadžbu tako da je vodeći koeficijent jednak 1. Dakle, podijelimo zadanu jednadžbu s a_4 i dobivamo

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

gdje je $a = \frac{a_3}{a_4}$, $b = \frac{a_2}{a_4}$, $c = \frac{a_1}{a_4}$, $d = \frac{a_0}{a_4}$.

Sljedeći korak je normiranu jednadžbu prikazati kao razliku kvadrata.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Neka je y neki realni broj. Tada vrijedi sljedeća jednakost.

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d =$$

$$= \left(x^2 + \frac{a}{2}x + y\right)^2 - \left[\left(\frac{a^2}{4} - b + 2y\right)x^2 + (ay - c)x + y^2 - d\right]$$

Da bi izraz u uglatoj zagradi bio potpuni kvadrat, mora diskriminanta kvadratnog polinoma u varijabli x biti jednaka nula, tj.

$$(ay - c)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} - b + 2y\right)(y^2 - d) = 0.$$

Prethodnu jednadžbu zovemo **Ferrarijeva rezolventa** od zadane jednadžbe 4. stupnja. To je jednadžba 3. stupnja po y i ima stoga barem jedno realno rješenje. U tom slučaju je izraz u uglatoj zagradi kvadrat nekog linearnog polinoma $F(x)$.

Polinomi

Definicija polinoma

Prsten polinoma

Jednakost polinoma

Određenost polinoma

Dijeljenje polinoma

Hornerov algoritam

Razvoj po $x - a$

Najveća zajednička mjera polinoma

Kompleksni brojevi

Nultočke polinoma

Cjelobrojne nultočke

Racionalne nultočke

Cjelobrojne kompleksne nultočke

Simetrične jednadžbe

Cardanova formula

Ferrarijeva metoda

Tada možemo pisati

$$\left[\left(x^2 + \frac{a}{2}x + y\right) + F(x)\right] \cdot \left[\left(x^2 + \frac{a}{2}x + y\right) - F(x)\right] = 0$$

Preostaje da se riješe dvije kvadratne jednadžbe koje onda daju 4 rješenja u skupu $\mathbb{C}$.

Primjer 5.25.

Riješite jednadžbu $x^4 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Tada možemo pisati

$$\left[\left(x^2+\frac{a}{2}x+y\right)+F(x)\right]\cdot\left[\left(x^2+\frac{a}{2}x+y\right)-F(x)\right]=0$$

Preostaje da se riješe dvije kvadratne jednadžbe koje onda daju 4 rješenja u skupu $\mathbb{C}$.

Primjer 5.25.

Riješite jednadžbu $x^4+2x^2+4x+8=0$.

Rješenje.

Najprije iz

$$(x^2+0\cdot x+y)^2-\left[(2y-2)x^2-4x+y^2-8\right]=0. \qquad (*)$$

dobivamo rezolventu

$$16-4(2y-2)(y^2-8)=0.$$

Jedno realno rješenje te rezolvente je $y=3$.

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x-a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Uvrstimo li $y = 3$ u $(*)$ dobivamo

$$(x^2 + 3)^2 - (4x^2 - 4x + 1) = 0,$$

odnosno

$$(x^2 + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 0.$$

Faktorizacijom dobivamo

$$(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0.$$

Riješimo li kvadratne jednadžbe

$$x^2 + 2x + 2 = 0, \quad x^2 - 2x + 4 = 0$$

dobivamo tražena rješenja

$$x_1 = -1 + i, \; x_2 = -1 - i, \; x_3 = 1 + i\sqrt{3}, \; x_4 = 1 - i\sqrt{3}.$$

Polinomi
Definicija polinoma
Prsten polinoma
Jednakost polinoma
Određenost polinoma
Dijeljenje polinoma
Hornerov algoritam
Razvoj po $x - a$
Najveća zajednička mjera polinoma
Kompleksni brojevi
Nultočke polinoma
Cjelobrojne nultočke
Racionalne nultočke
Cjelobrojne kompleksne nultočke
Simetrične jednadžbe
Cardanova formula
Ferrarijeva metoda

Dio VI

Funkcije više varijabli

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Sadržaj

- Funkcije više varijabli
  - Osnovne definicije
  - Nivo-linije
  - Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
  - Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
  - Limes funkcije više varijabli
  - Parcijalne derivacije
  - Parcijalne derivacije višeg reda
  - Diferencijabilnost funkcije
  - Parcijalno deriviranje složenih funkcija
  - Usmjerena derivacija
  - Teorem srednje vrijednosti
  - Derivacija implicitno zadane funkcije
  - Ekstremi funkcija dvije varijable
  - Uvjetni ekstremi

Osnovne definicije

Definicija funkcije n varijabli

Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ neprazni skupovi. Svako preslikavanje $f : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to X_{n+1}$ zovemo funkcijom n varijabli i označavamo relacijom $x_{n+1} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Ako je $X_i = \mathbb{R}$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n+1$, tada se radi o preslikavanju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i u tom slučaju f zovemo realnom funkcijom n realnih varijabli.

Kod nas će uglavnom biti $n = 2$, tj. proučavat ćemo realne funkcije dviju realnih varijabli.

Primjeri

- Površina pravokutnika s duljinama stranica x, y

$$P(x, y) = xy$$

- Opseg pravokutnika s duljinama stranica x, y

$$o(x, y) = 2x + 2y$$

- Volumen kvadra s bridovima duljina x, y, z

$$V(x, y, z) = xyz$$

- Oplošje kvadra s bridovima duljina x, y, z

$$O(x, y, z) = 2(xy + xz + yz)$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Domena realne funkcije više varijabli

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Definicija domene

Domena (područje definicije) realne funkcije n varijabli

$$x_{n+1} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

je podskup Kartezijevog produkta $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ sastavljen od svih uređenih n-torki $(x_1, \ldots, x_n)$ za koje postoji realni broj $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Specijalno, kada je $n = 2$ i $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$, domena od f je podskup od $\mathbb{R}^2$, tj. neki skup u ravnini.

Graf realne funkcije dviju realnih varijabli

Graf

Graf realne funkcije dviju realnih varijabli $z = f(x, y)$ je skup

$$\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}.$$

Taj graf prikazujemo u $\mathbb{R}^3$ i to je neka ploha u prostoru u slučaju da je funkcija f "lijepa" (barem neprekidna), iako se u definiciji plohe traže i jači zahtjevi na funkciju.

- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Primjer 6.1.

Odredite domenu i graf funkcije $f(x,y) = \sqrt{100 - 4x^2 - 10y^2}$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.1.

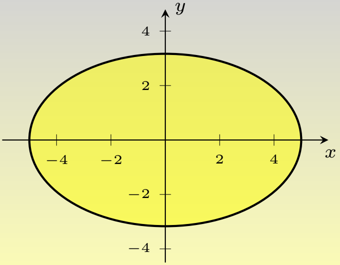
Odredite domenu i graf funkcije $f(x,y) = \sqrt{100 - 4x^2 - 10y^2}$.

Rješenje.

Zbog drugog korijena mora biti $100 - 4x^2 - 10y^2 \geqslant 0$ odnosno

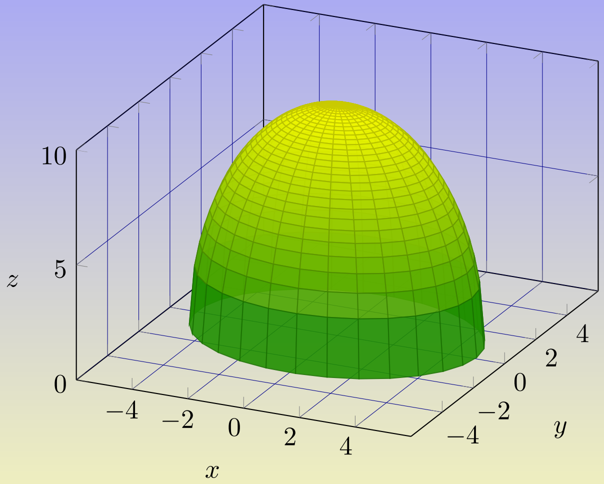
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{10} \leqslant 1,$$

što u slučaju jednakosti predstavlja elipsu sa središtem u ishodištu i poluosima $a = 5$, $b = \sqrt{10}$. Kako ovdje imamo nejednakost u obzir dolaze sve točke unutar te elipse uključujući i točke na elipsi.



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Graf te funkcije izgleda



Primjer 6.2.

Odredite domenu i graf funkcije $f(x,y)=\sqrt{xy}$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.2.

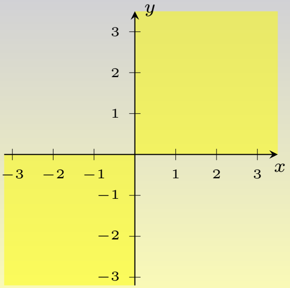
Odredite domenu i graf funkcije $f(x,y)=\sqrt{xy}$.

Rješenje.

Zbog korijena mora biti $xy \geqslant 0$ pa imamo dva slučaja:

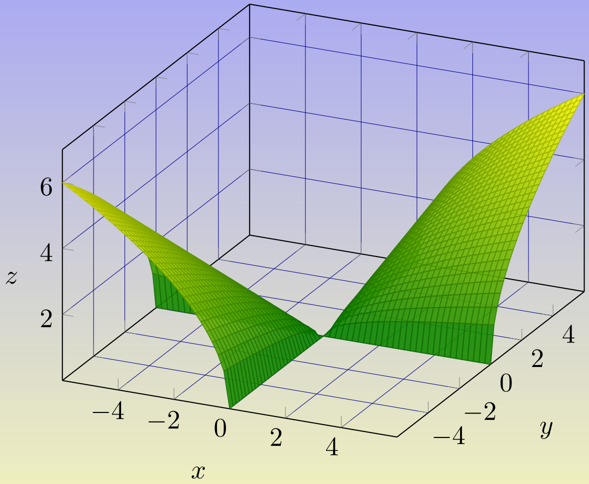
- $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0$,
- $x \leqslant 0$ i $y \leqslant 0$.

Stoga je domena ove funkcije prvi i treći kvadrant uključujući i koordinatne osi.



Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Graf te funkcije izgleda



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike u $\mathbb{R}^3$

Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parcijalne derivacije višeg reda

Diferencijabilnost funkcije

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Usmjerena derivacija

Teorem srednje vrijednosti

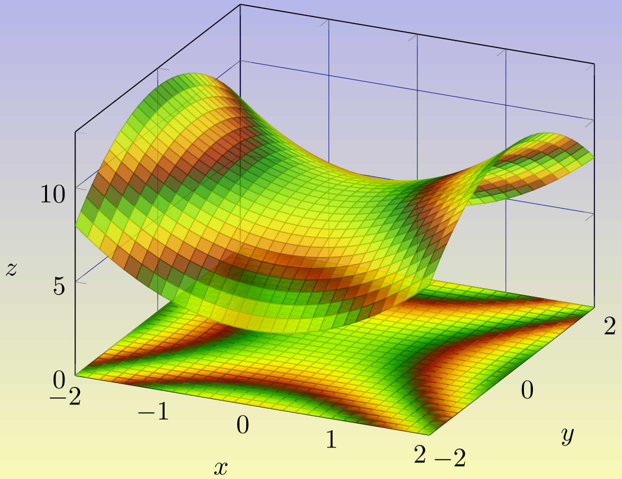
Derivacija implicitno zadane funkcije

Ekstremi funkcija dvije varijable

Uvjetni ekstremi

Nivo-linije

Gledamo sve točke na grafu funkcije koje su jednako udaljene od xy-ravnine.



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Definicija nivo-linije

Nivo-linija funkcije $z = f(x, y)$ za vrijednost $z = z_0$ je skup svih točaka $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ za koje je $f(x, y) = z_0$.

Definicija nivo-plohe

Nivo-ploha funkcije $u = f(x, y, z)$ za vrijednost $u = u_0$ je skup svih točaka $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ za koje je $f(x, y, z) = u_0$.

Primjer 6.3.

Odredite nivo-linije funkcije $f(x, y) = \sqrt{xy}$.

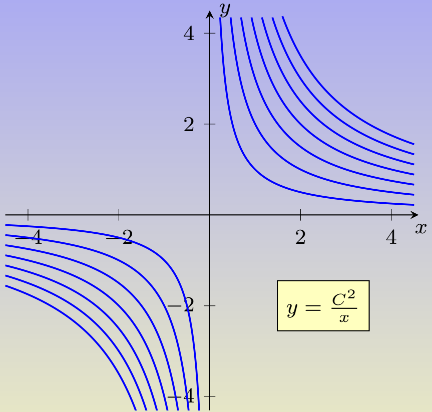
Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Rješenje.

Iz $f(x, y) = C$ slijedi $\sqrt{xy} = C$. Kvadriranjem zadnje jednakosti dobivamo $y = \frac{C^2}{x}$. Dakle,

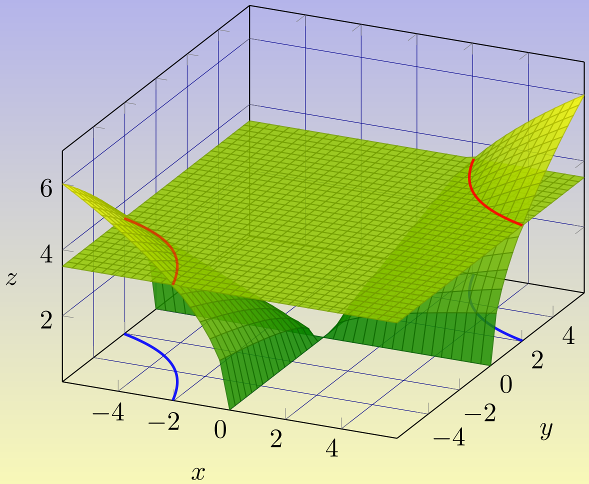
- za $C > 0$ nivo-linije su hiperbole,
- za $C = 0$ nivo-linija je unija pravaca $x = 0$ i $y = 0$.

Uočimo da za $C = 0$ zapravo dobivamo nultočke funkcije f. Funkcija f ima neprebrojivo beskonačno mnogo nultočaka i sve one leže na koordinatnim osima u ravnini.



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Na slici je prikazana plavom bojom nivo-linija funkcije f za vrijednost $z = \frac{7}{2}$. Točke s plave krivulje u domeni se preslikavaju na crvenu krivulju. Crvena krivulja je presjek grafa funkcije f i ravnine $z = \frac{7}{2}$.



Primjer 6.4.

Odredite nivo-linije funkcije $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.4.

Odredite nivo-linije funkcije $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Rješenje.

Iz $f(x, y) = C$ slijedi $\sqrt{x^2 + y^2} = C$. Kvadriranjem zadnje jednakosti dobivamo $x^2 + y^2 = C^2$. Dakle,

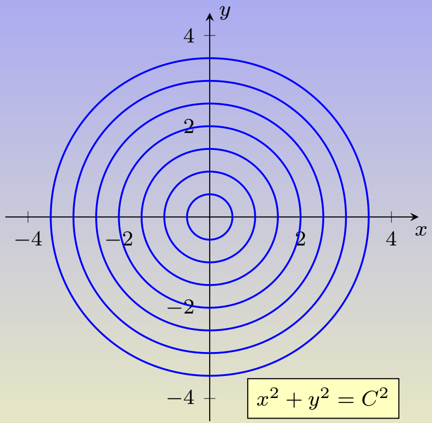
- za $C > 0$ nivo-linije su kružnice sa središtem u ishodištu,
- za $C = 0$ nivo-linija je samo jedna točka $(0, 0)$.

Funkcija f ima samo jednu nultočku $(0, 0)$.

Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

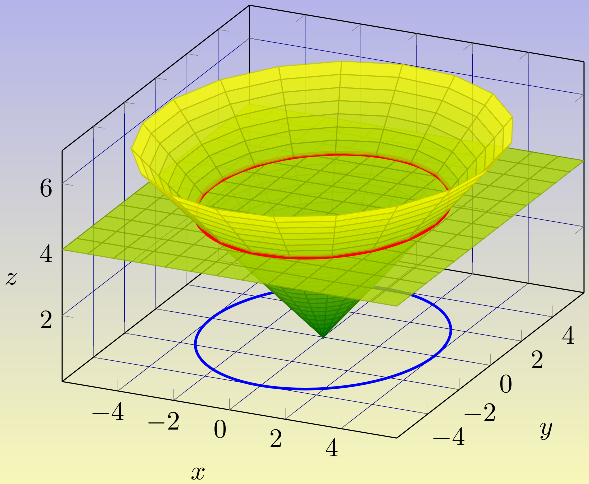
Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi



$$\boxed{x^2 + y^2 = C^2}$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Na slici je prikazana plavom bojom nivo-linija funkcije f za vrijednost $z = 4$. Točke s plave krivulje u domeni se preslikavaju na crvenu krivulju. Crvena krivulja je presjek grafa funkcije f i ravnine $z = 4$.



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Definicija kvadrike

Neka je

$$f(x,y,z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10}$$

polinom drugog stupnja u tri varijable x, y, z, gdje su $a_i \in \mathbb{R}$ za $i = 1, 2, \ldots, 10$ i barem jedan od koeficijenata $a_1, \ldots, a_6$ je različit od nule. Skup

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\}$$

zovemo algebarskom plohom drugog reda ili kvadrikom.

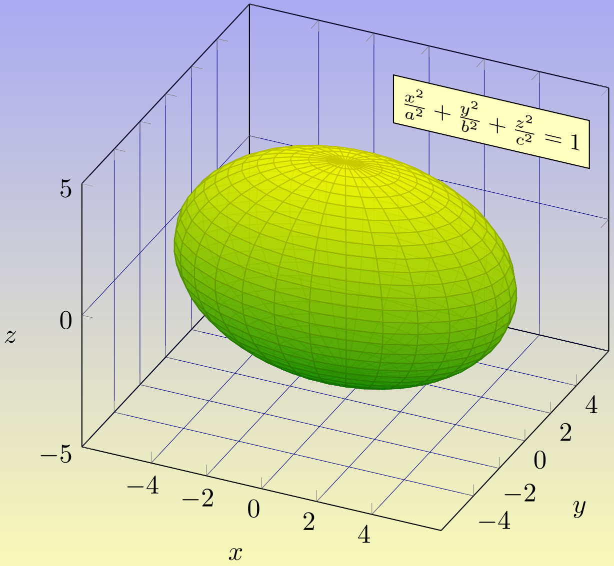
Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Mogu nastupiti i degenerirani slučajevi, tj. rješenje jednadžbe $f(x, y, z) = 0$ može biti prazan skup, točka, ravnina ili dvije ravnine.

Promotrimo sada nedegenerirane slučajeve tako što ćemo napisati kanonske jednadžbe pojedinih kvadrika i prikazati njihove slike. Kvadrika koja nije zadana u kanonskom obliku može se odgovarajućim transformacijama svesti na kanonski oblik, no ovdje nećemo ulaziti u tolike detalje.

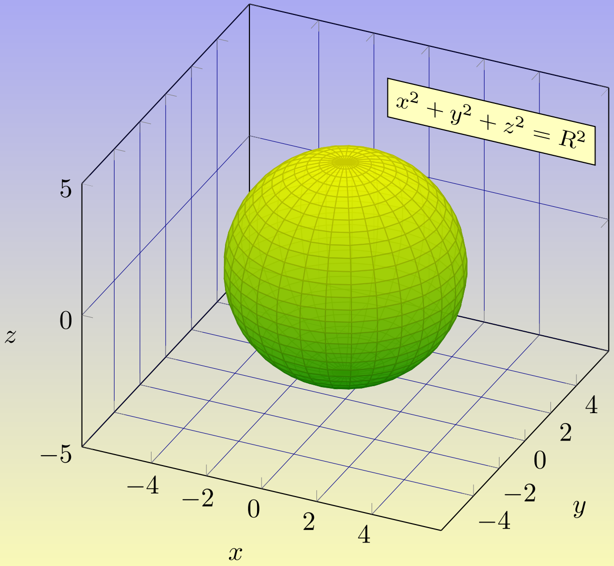
Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Elipsoid



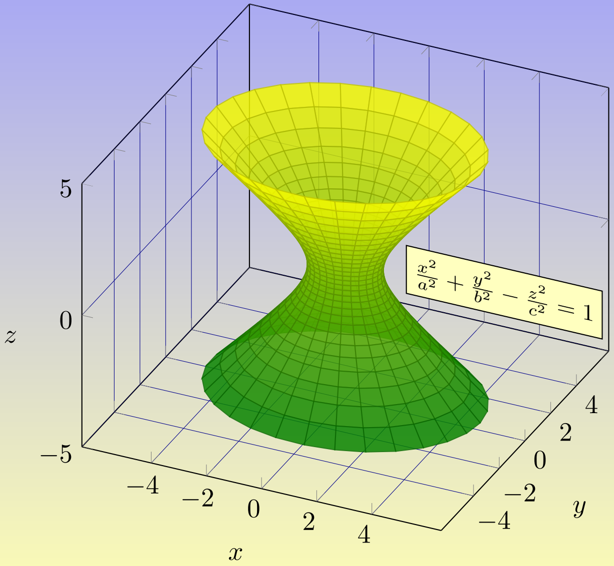
Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Sfera



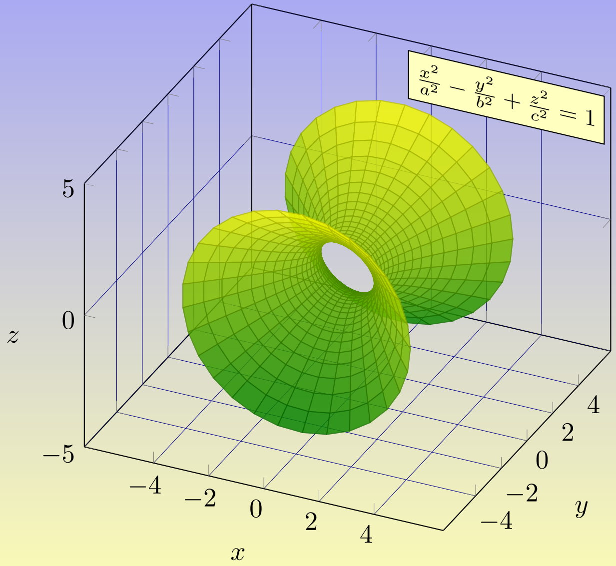
Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Jednoplohi hiperboloid



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Jednoplohi hiperboloid

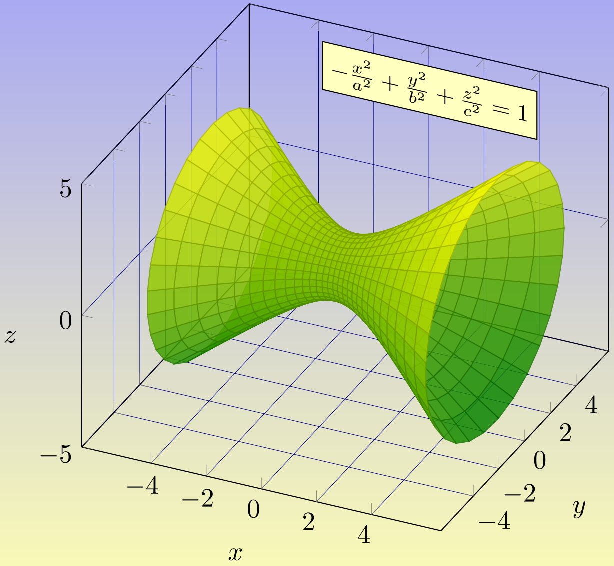


Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

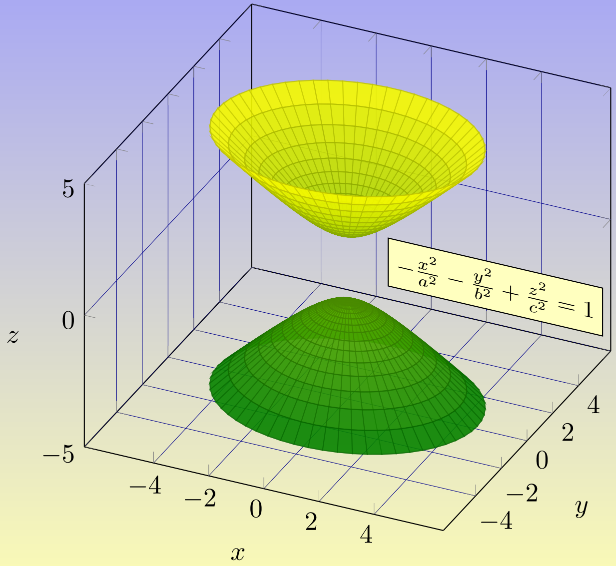
Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Jednoplohi hiperboloid



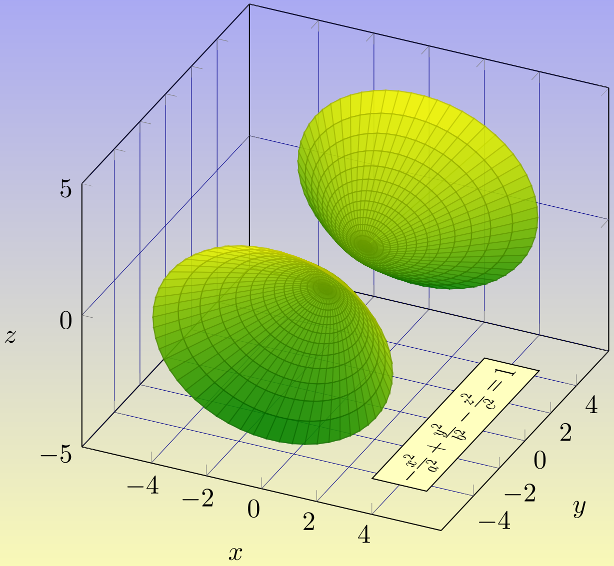
Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Dvoplohi hiperboloid



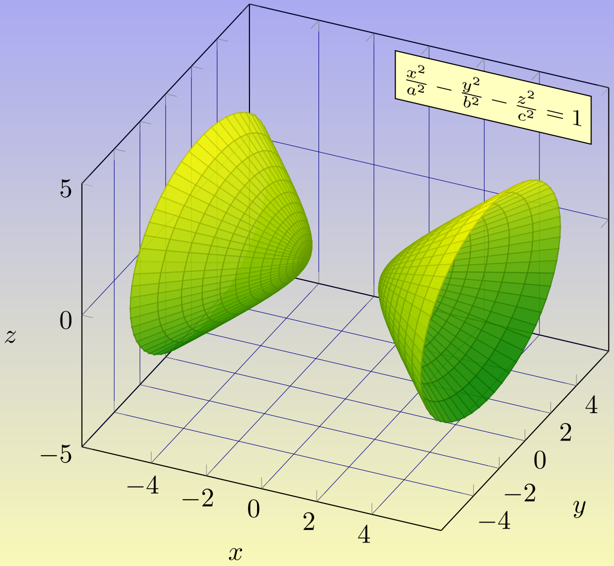
Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Dvoplohi hiperboloid



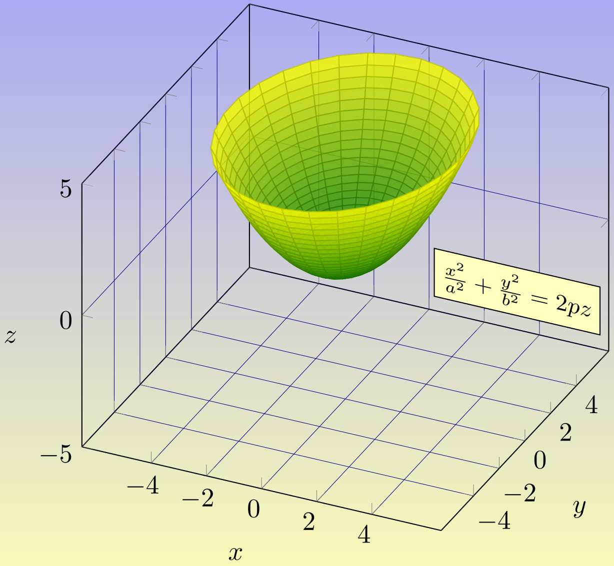
Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Dvoplohi hiperboloid



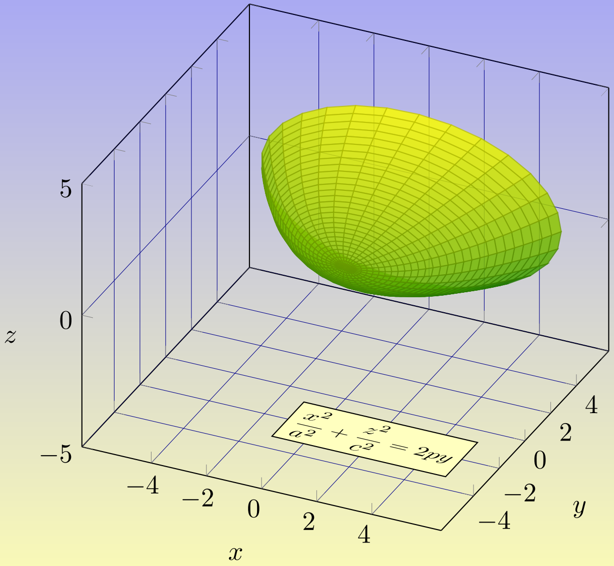
Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Eliptički paraboloid

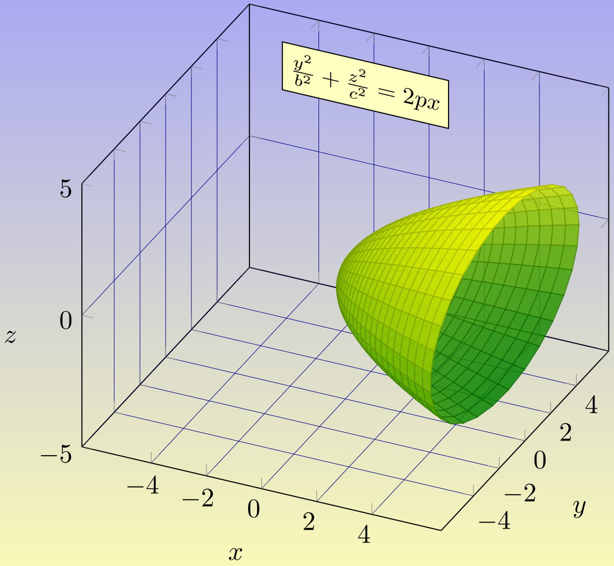


Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Eliptički paraboloid

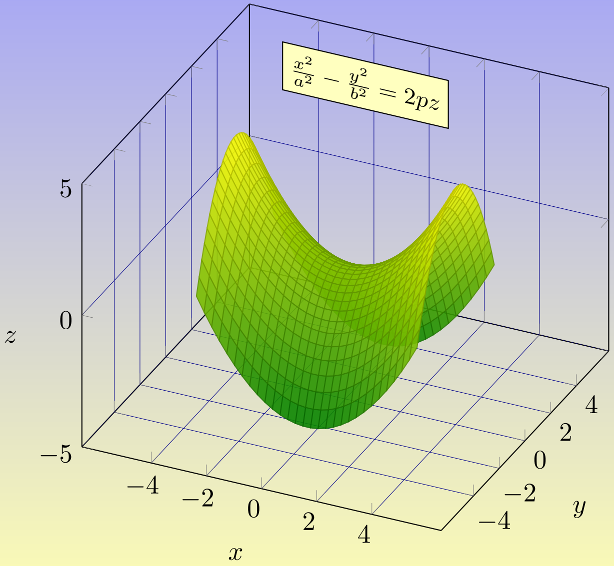


Eliptički paraboloid



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

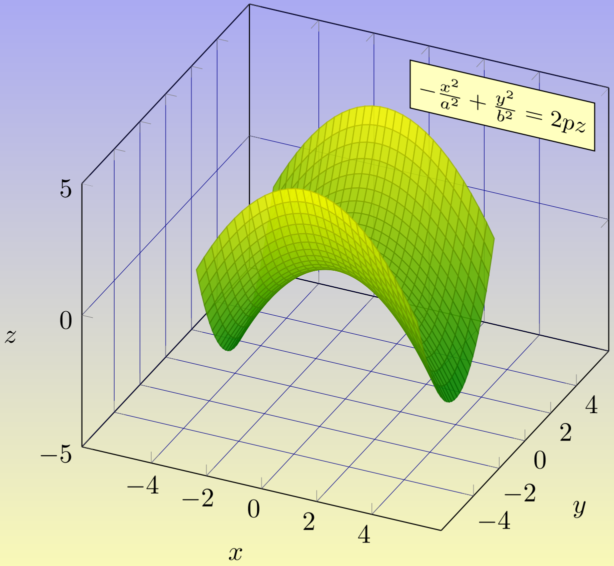
Hiperbolički paraboloid



Funkcije više varijabli

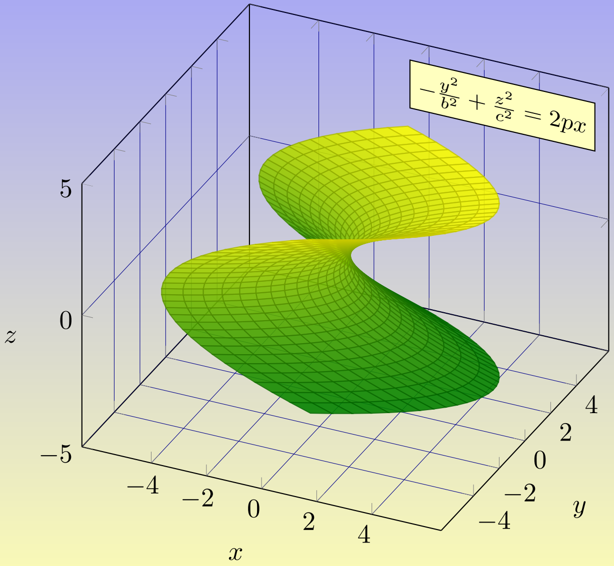
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Hiperbolički paraboloid



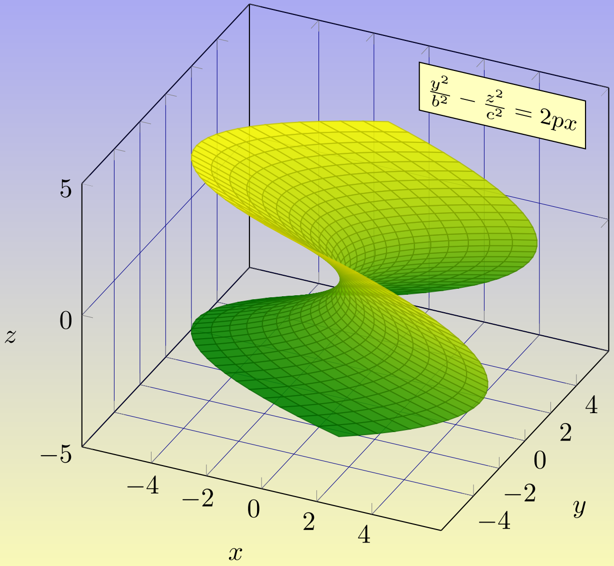
Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Hiperbolički paraboloid



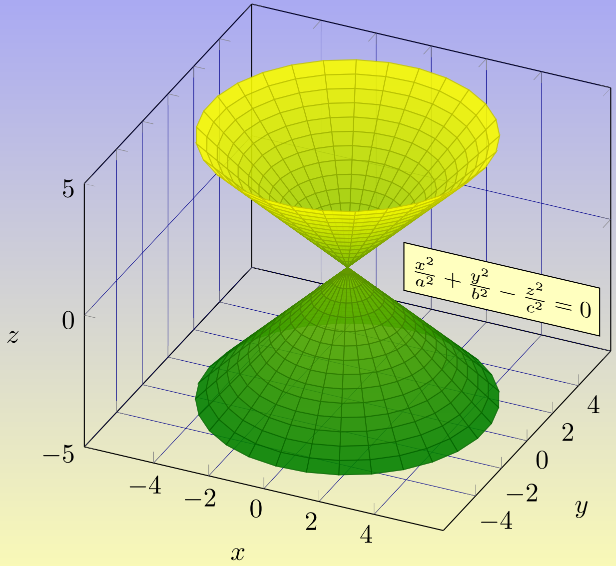
Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Hiperbolički paraboloid



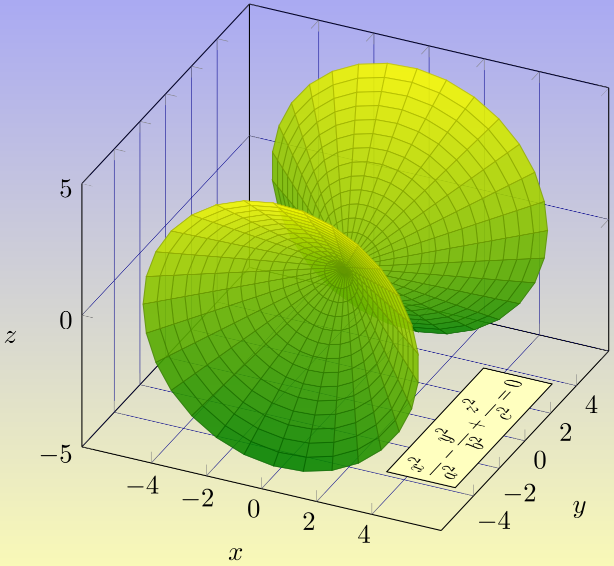
Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Konus



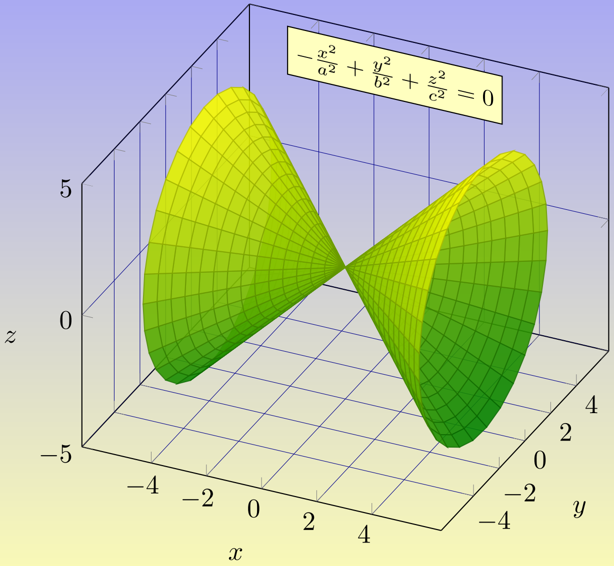
Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Konus



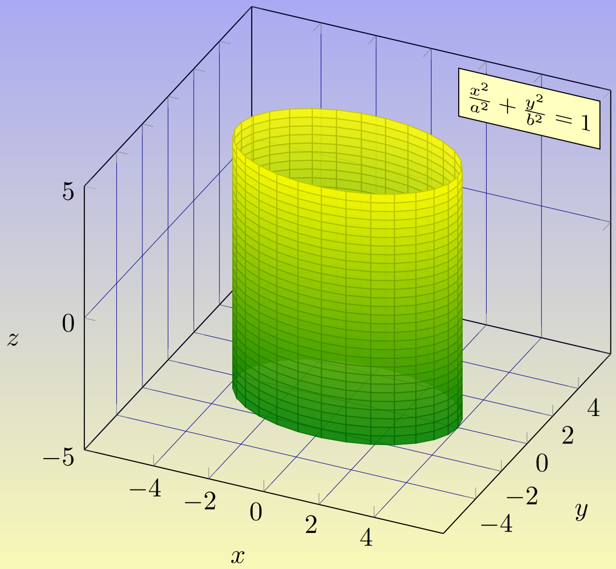
Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Konus



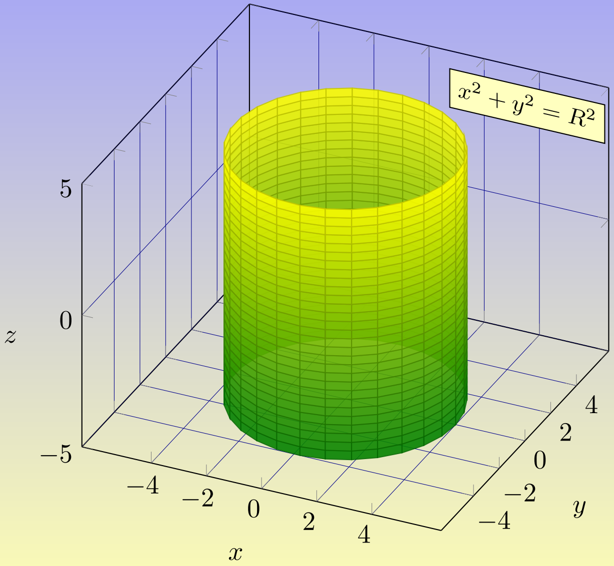
Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Eliptički cilindar



Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Kružni cilindar



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike u $\mathbb{R}^3$

Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parcijalne derivacije višeg reda

Diferencijabilnost funkcije

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Usmjerena derivacija

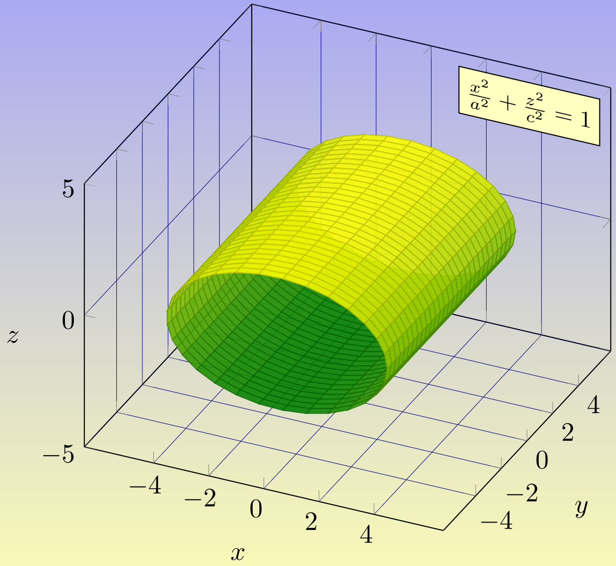
Teorem srednje vrijednosti

Derivacija implicitno zadane funkcije

Ekstremi funkcija dvije varijable

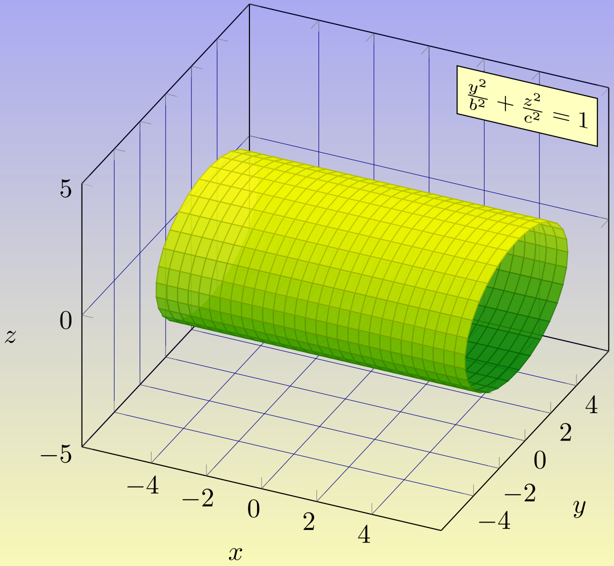
Uvjetni ekstremi

Eliptički cilindar



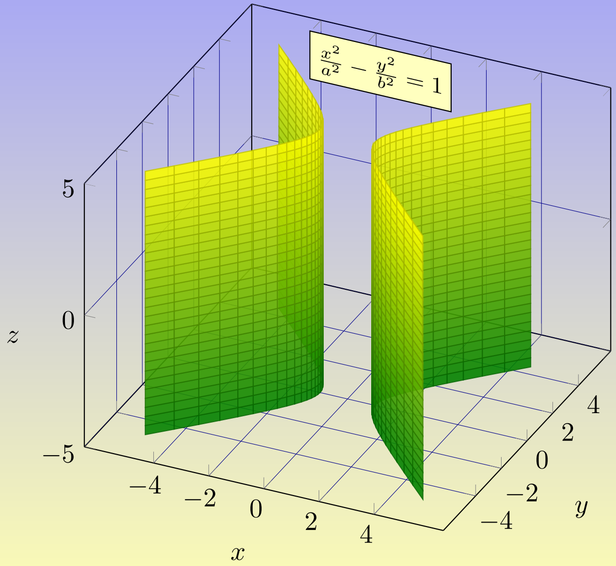
Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Eliptički cilindar



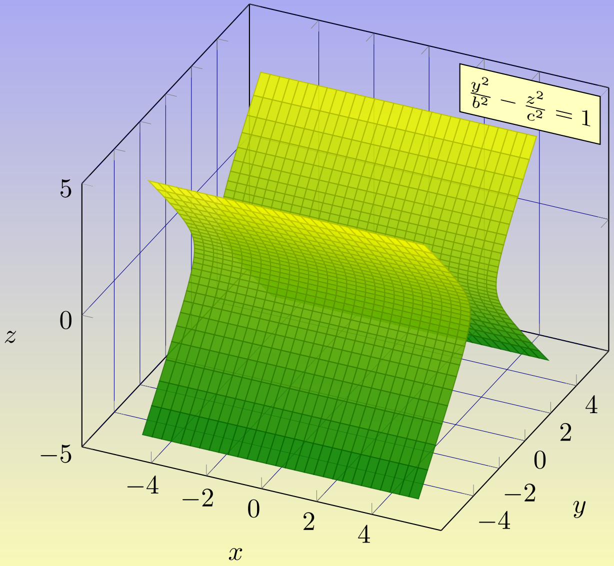
Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Hiperbolički cilindar



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Hiperbolički cilindar



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike u $\mathbb{R}^3$

Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parcijalne derivacije višeg reda

Diferencijabilnost funkcije

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Usmjerena derivacija

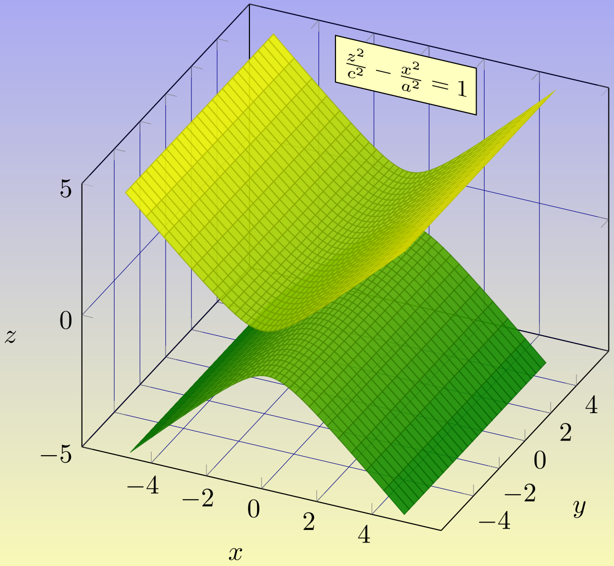
Teorem srednje vrijednosti

Derivacija implicitno zadane funkcije

Ekstremi funkcija dvije varijable

Uvjetni ekstremi

Hiperbolički cilindar



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike u $\mathbb{R}^3$

Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parcijalne derivacije višeg reda

Diferencijabilnost funkcije

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Usmjerena derivacija

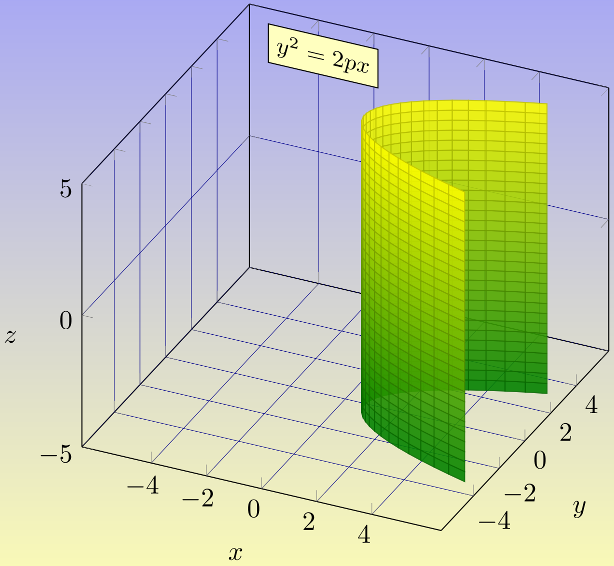
Teorem srednje vrijednosti

Derivacija implicitno zadane funkcije

Ekstremi funkcija dvije varijable

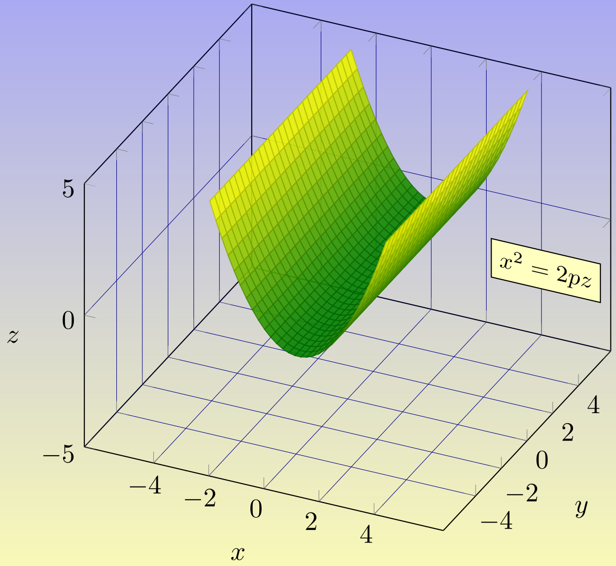
Uvjetni ekstremi

Parabolički cilindar



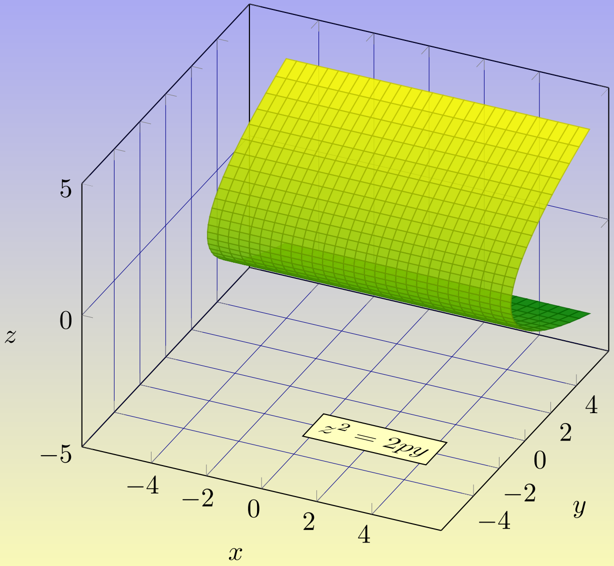
Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Parabolički cilindar



Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Parabolički cilindar

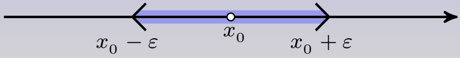


Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

Definicija ε-okoline na pravcu

ε-okolina $O(x_0, \varepsilon)$ točke $x_0 \in \mathbb{R}$ je skup $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle$, tj.

$$O(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}.$$



Udaljenost dvije točke $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ računa se po formuli

$$d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$$

pa možemo pisati

$$O(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Sada analogno možemo definirati ε-okolinu u $\mathbb{R}^2$. Naime, za $A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

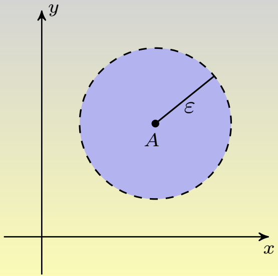
$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

pa imamo sljedeću definiciju.

Definicija ε-okoline u ravnini

ε-okolina točke $A \in \mathbb{R}^2$ je skup

$$O(A, \varepsilon) = \left\{X \in \mathbb{R}^2 : d(X, A) < \varepsilon\right\}.$$



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Napomena.

ε-okolinu točke A zovemo još ε-**kugla** sa središtem u točki A polumjera ε. U slučaju prostora $\mathbb{R}^3$ to je stvarno kugla, a u $\mathbb{R}^2$ to je krug polumjera ε sa središtem u A bez rubne kružnice. U $\mathbb{R}$ ε-kugla je otvoreni interval duljine 2ε.

Definicija otvorenog skupa u ravnini

Kažemo da je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup u $\mathbb{R}^2$ ako za svaku točku $A \in S$ postoji okolina $O(A, \varepsilon)$ koja je cijela sadržana u S.

Definicija zatvorenog skupa u ravnini

Kažemo da je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ zatvoren skup u $\mathbb{R}^2$ ako je $\mathbb{R}^2 \setminus S$ otvoren skup.

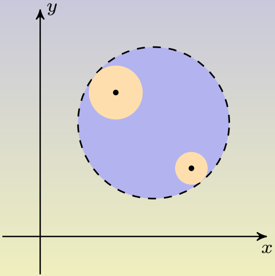
Topologija ravnine je familija $\mathcal{T}$ svih otvorenih skupova u ravnini.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Propozicija 6.1.

- (a) *Skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$ je otvoren u $\mathbb{R}^2$ akko je unija ε-kugli.*
- (b) *Skup $S \subseteq \mathbb{R}$ je otvoren u $\mathbb{R}$ akko je unija ε-kugli.*

ε-kugle u $\mathbb{R}^2$ su otvoreni skupovi u $\mathbb{R}^2$.



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Propozicija 6.2.

Topologija $\mathcal{T}$ ravnine ima sljedeća svojstva:

- $\mathbb{R}^2, \emptyset \in \mathcal{T}$, *tj. prazan skup i čitava ravnina su otvoreni skupovi.*
- *Ako su* $U_1, U_2, \ldots, U_\alpha, \ldots \in \mathcal{T}$, *tada je skup* $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ *također element od* $\mathcal{T}$. *Drugim riječima, proizvoljna unija otvorenih skupova je otvoren skup.*
- *Ako su* $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$, *tada je skup* $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ *također element od* $\mathcal{T}$. *Drugim riječima, presjek konačno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup.*

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Propozicija 6.3.

Familija $\mathcal{F}$ svih zatvorenih skupova topologije $\mathcal{T}$ ravnine ima sljedeća svojstva:

- $\mathbb{R}^2, \emptyset \in \mathcal{F}$, *tj. prazan skup i čitava ravnina su zatvoreni skupovi.*
- *Ako su* $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$, *tada je skup* $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$ *također element od* $\mathcal{F}$. *Drugim riječima, konačna unija zatvorenih skupova je zatvoren skup.*
- *Ako su* $F_1, F_2, \ldots, F_\alpha, \ldots \in \mathcal{F}$, *tada je skup* $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ *također element od* $\mathcal{F}$. *Drugim riječima, proizvoljan presjek zatvorenih skupova je zatvoren skup.*

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Definicija interiora skupa

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$. Interior (nutrina) skupa S je najveći otvoreni skup koji je sadržan u S. Interior skupa S označavamo s $\operatorname{Int} S$.

Definicija zatvarača skupa

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$. Zatvarač skupa S je najmanji zatvoreni skup koji sadrži skup S. Zatvarač skupa S označavamo s $\operatorname{Cl} S$.

Definicija ruba skupa

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$. Rub skupa S je je skup svih točaka iz $\mathbb{R}^2$ čija svaka okolina siječe S i $\mathbb{R}^2 \setminus S$. Rub skupa S označavamo s ∂S.

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Sljedeće tvrdnje lagano slijede iz navedenih definicija ili ih možemo zorno obrazložiti na topologiji ravnine.

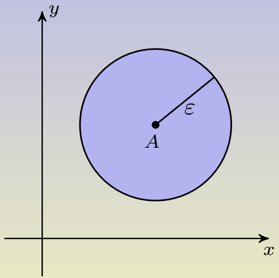
Propozicija 6.4.

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$. Tada vrijedi:

- a) *Skup S je otvoren akko $\operatorname{Int} S = S$.*
- b) *Skup S je zatvoren akko $\operatorname{Cl} S = S$.*
- c) *∂S je zatvoren skup.*
- d) $\operatorname{Cl} S = \operatorname{Int} S \cup \partial S$
- e) $\partial S = \operatorname{Cl} S \cap \operatorname{Cl}\left(\mathbb{R}^2 \setminus S\right)$

Ako otvorenoj ε-kugli $O(A, \varepsilon)$ dodamo njezin rub dobivamo zatvorenu ε-kuglu.

$$\mathrm{Cl}\left(O(A,\varepsilon)\right) = O(A,\varepsilon) \cup \partial\big(O(A,\varepsilon)\big)$$



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike u $\mathbb{R}^3$

Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parcijalne derivacije višeg reda

Diferencijabilnost funkcije

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Usmjerena derivacija

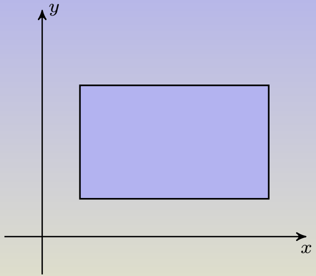
Teorem srednje vrijednosti

Derivacija implicitno zadane funkcije

Ekstremi funkcija dvije varijable

Uvjetni ekstremi

Pravokutnik je zatvoren skup u ravnini.



Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike u $\mathbb{R}^3$

Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parcijalne derivacije višeg reda

Diferencijabilnost funkcije

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Usmjerena derivacija

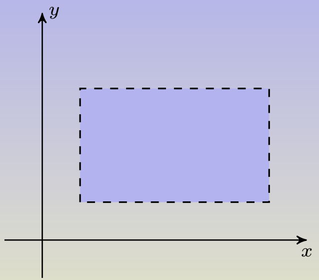
Teorem srednje vrijednosti

Derivacija implicitno zadane funkcije

Ekstremi funkcija dvije varijable

Uvjetni ekstremi

Pravokutnik bez svog ruba je otvoren skup u ravnini.



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike u $\mathbb{R}^3$

Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parcijalne derivacije višeg reda

Diferencijabilnost funkcije

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Usmjerena derivacija

Teorem srednje vrijednosti

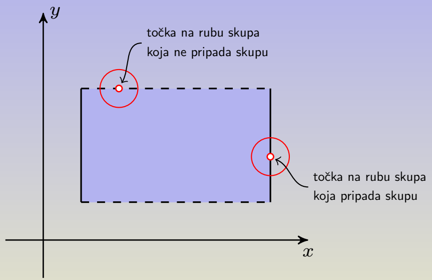
Derivacija implicitno zadane funkcije

Ekstremi funkcija dvije varijable

Uvjetni ekstremi

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer skupa koji nije niti otvoren niti zatvoren u ravnini.



U $\mathbb{R}$ otvoreni skupovi su otvoreni intervali ili unije otvorenih intervala, a zatvoreni skupovi su segmenti ili konačne unije segmenata.

Skupovi oblika $\langle a, b]$ i $[a, b\rangle$ nisu niti otvoreni niti zatvoreni u $\mathbb{R}$. Zašto?

Primjer 6.5.

Dokažite da beskonačna unija zatvorenih skupova ne mora biti zatvoren skup.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

U $\mathbb{R}$ otvoreni skupovi su otvoreni intervali ili unije otvorenih intervala, a zatvoreni skupovi su segmenti ili konačne unije segmenata.

Skupovi oblika $\langle a, b]$ i $[a, b\rangle$ nisu niti otvoreni niti zatvoreni u $\mathbb{R}$. Zašto?

Primjer 6.5.

Dokažite da beskonačna unija zatvorenih skupova ne mora biti zatvoren skup.

Rješenje.

Neka je $I_n = \left[\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$. Skupovi I_n su zatvoreni u $\mathbb{R}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Međutim,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = \langle 0, 3\rangle$$

što nije zatvoren skup u $\mathbb{R}$.

Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.6.

Dokažite da beskonačni presjek otvorenih skupova ne mora biti otvoren skup.

Primjer 6.6.

Dokažite da beskonačni presjek otvorenih skupova ne mora biti otvoren skup.

Rješenje.

Neka je $I_n = \langle -\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Skupovi I_n su otvoreni u $\mathbb{R}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Međutim,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = [0, 1]$$

što nije otvoren skup u $\mathbb{R}$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Napomena.

Neka je $I = \langle a, b\rangle$. Promatramo li I kao podskup skupa $\mathbb{R}$, tada je

$$\operatorname{Int} I = \langle a, b\rangle, \quad \partial I = \{a, b\}, \quad \operatorname{Cl} I = [a, b].$$

Promatramo li I kao podskup od $\mathbb{R}^2$ uz standardnu identifikaciju

$$\mathbb{R} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\},$$

tada je

$$\operatorname{Int} I = \emptyset, \quad \partial I = [a, b], \quad \operatorname{Cl} I = [a, b].$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Napomena.

Neka je X proizvoljni skup. Svaku familiju $\mathcal{T}$ podskupova skupa X koja ima svojstva

- $X, \emptyset \in \mathcal{T}$
- Ako su $U_1, U_2, \ldots, U_\alpha, \ldots \in \mathcal{T}$, tada je skup $\bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$ također element od $\mathcal{T}$.
- Ako su $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$, tada je skup $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ također element od $\mathcal{T}$.

zovemo **topologija** na skupu X, a uređen par $(X, \mathcal{T})$ **topološki prostor**. Elemente skupa $\mathcal{T}$ zovemo otvorenim skupovima.

Napomena.

Na istom skupu X možemo imati više različitih topologija.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Definicija kompaktnog skupa u ravnini

Omeđen i zatvoren skup u $\mathbb{R}^2$ zovemo kompaktan skup.

- Kružnica, dužina, krug, pravokutnik su primjeri kompaktnih skupova u ravnini.
- Pravac, otvorena ε-kugla, pravokutnik bez svog ruba, pravokutnik koji sadrži samo dio svog ruba su primjeri skupova u ravnini koji nisu kompaktni.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Napomena.

Pojam kompaktnog skupa se može općenito definirati u bilo kojem topološkom prostoru. Može se pokazati da je ta definicija ekvivalentna s našom definicijom za prostor $\mathbb{R}^n$. Općenito, nije istina da je skup kompaktan akko je omeđen i zatvoren. To vrijedi za $\mathbb{R}^n$ uz standardnu topologiju, ali ne vrijedi općenito za bilo koji topološki prostor.

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Limes funkcije više varijabli

Heineova definicija

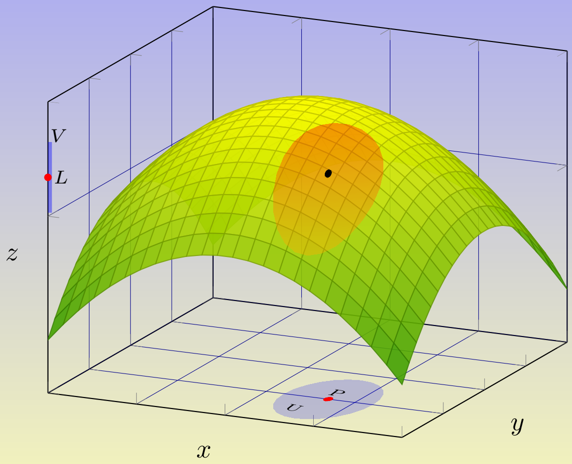
Neka je $f : O \to \mathbb{R}$ realna funkcija definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$ osim možda u $P \in O$. Kažemo da je $L \in \mathbb{R}$ limes funkcije f u točki $P \in O$ ako za svaki niz (P_n) u O za koji je $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$ vrijedi da je $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n) = L$.

Cauchyjeva definicija

Neka je $f : O \to \mathbb{R}$ realna funkcija definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$ osim možda u $P \in O$. Kažemo da je $L \in \mathbb{R}$ limes funkcije f u točki $P \in O$ ako za svaku okolinu V točke $L \in \mathbb{R}$ postoji okolina U točke P takva da je $f(Q) \in V$ za svaku točku $Q \in U \setminus \{P\}$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Cauchyjeva definicija limesa funkcije

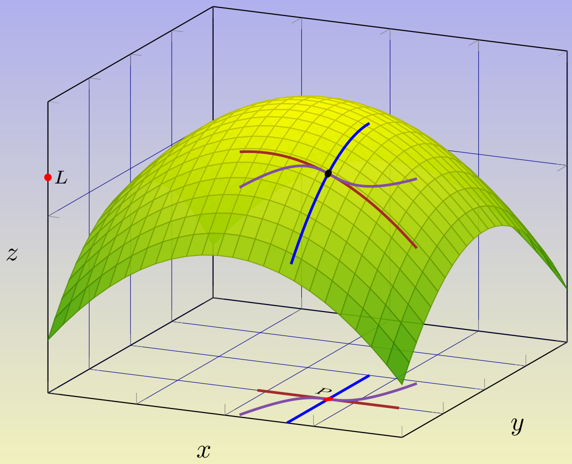


Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Heineova definicija limesa funkcije



Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Cauchyjeva definicija u ε, δ terminologiji

Neka je $f : O \to \mathbb{R}$ realna funkcija definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$ osim možda u $P \in O$. Kažemo da je $L \in \mathbb{R}$ limes funkcije f u točki $P \in O$ ako

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall Q \big(0 < d(Q,P) < \delta \;\Rightarrow\; |f(Q) - L| < \varepsilon\big)$$

Ukoliko je L limes funkcije f u točki P, tada pišemo

$$\lim_{Q \to P} f(Q) = L$$

odnosno

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

ako stavimo $Q = (x,y)$ i $P = (x_0, y_0)$.

Propozicija 6.5.

Heineova i Cauchyjeva definicija limesa funkcije su ekvivalentne.

Napomena.

Heineova definicija limesa funkcije se temelji na nizovima, a Cauchyjeva na okolinama. Prema Heineovoj definiciji limes funkcije ne ovisi o tome kako se približavamo određenoj točki. Stoga, ako želimo dokazati da funkcija nema limes u nekoj točki, dovoljno je da nađemo dva niza koji konvergiraju toj točki, dok njihove funkcijske vrijednosti ne konvergiraju k istom broju.

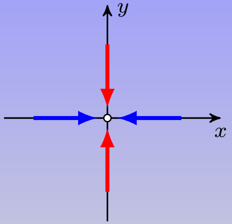
Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.7.

Odredite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$.

Primjer 6.7.

Odredite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$.



Rješenje.

Uzmimo $x = 0$. Tada je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

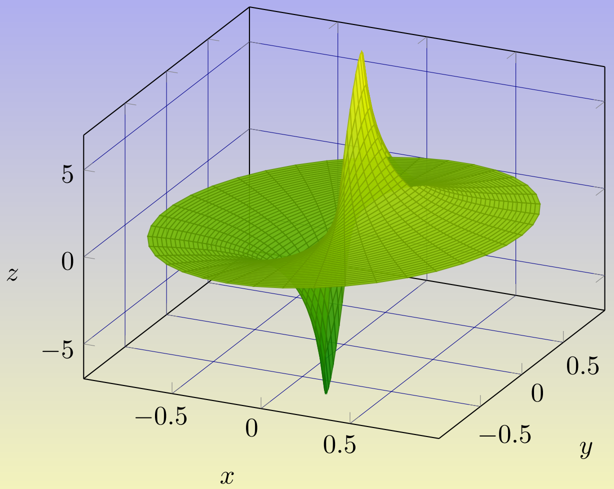
Ako stavimo $y = 0$, tada dobivamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \pm\infty.$$

Zaključujemo da ne postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Graf funkcije $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$



Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Primjer 6.8.

Odredite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+y^3}{x^2+y^2}$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

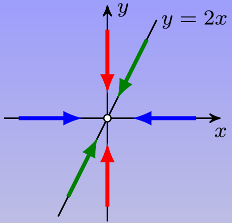
Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.8.

Odredite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+y^3}{x^2+y^2}$.



Rješenje.

Stavimo li $x = 0$ dobivamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^2} = \lim_{y\to 0} y = 0.$$

Stavimo li $y = 0$ dobivamo

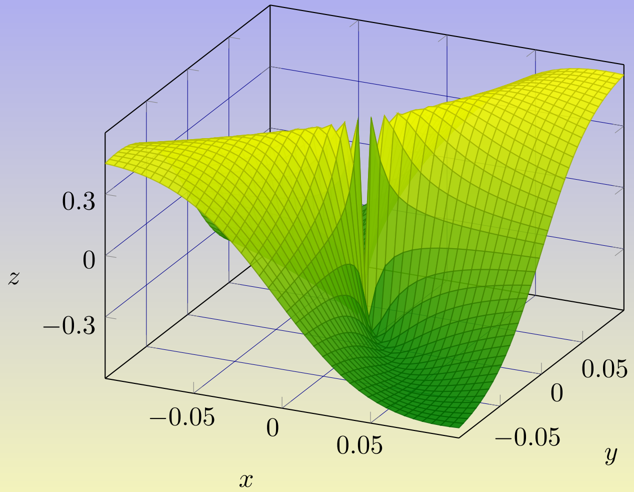
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Stavimo li $y = 2x$ dobivamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2+8x^3}{x^2+4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{8x+2}{5} = \frac{2}{5}.$$

Zaključujemo da ne postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+y^3}{x^2+y^2}$.

Graf funkcije $f(x,y) = \frac{xy+y^3}{x^2+y^2}$



Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Propozicija 6.6.

Neka su $f, g : O \to \mathbb{R}$ realne funkcije definirane na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je $\lambda \in \mathbb{R}$. Ako funkcije f i g imaju u $P_0 \in O$ limese, tada i funkcije $f+g$, λf, $f \cdot g$ i $|f|$ imaju limese u P_0 i vrijedi

- $\lim\limits_{P \to P_0} (f(P) + g(P)) = \lim\limits_{P \to P_0} f(P) + \lim\limits_{P \to P_0} g(P)$
- $\lim\limits_{P \to P_0} (\lambda f(P)) = \lambda \lim\limits_{P \to P_0} f(P)$
- $\lim\limits_{P \to P_0} (f(P) \cdot g(P)) = \lim\limits_{P \to P_0} f(P) \cdot \lim\limits_{P \to P_0} g(P)$
- $\lim\limits_{P \to P_0} |f(P)| = \left| \lim\limits_{P \to P_0} f(P) \right|$

Ako je $\lim\limits_{P \to P_0} g(P) \neq 0$, tada je

- $\lim\limits_{P \to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = \frac{\lim\limits_{P \to P_0} f(P)}{\lim\limits_{P \to P_0} g(P)}$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.9.

Odredite $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{\sin xy}{2x}$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.9.

Odredite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \frac{\sin xy}{2x}$.

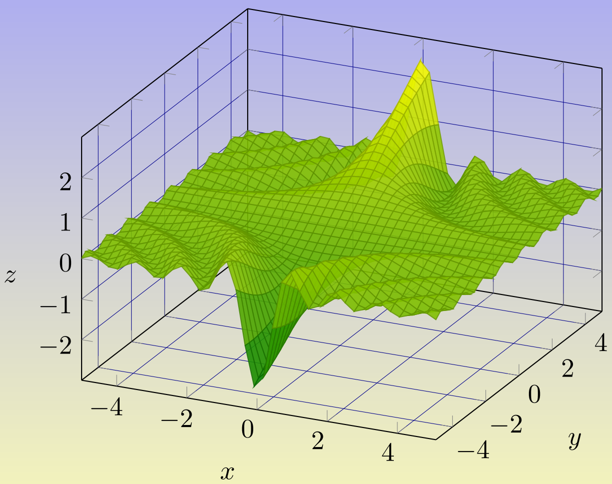
Rješenje.

Koristimo da je $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$. Nadalje, kada $(x, y) \to (0, 3)$, tada $xy \to 0$. Stoga je $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \frac{\sin xy}{xy} = 1$. Konačno dobivamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{\sin xy}{2x} = \lim_{(x,y)\to(0,3)} \left(\frac{\sin xy}{xy} \cdot \frac{y}{2}\right) = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Graf funkcije $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{2x}$



Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Napomena.

Mogu se promatrati uzastopni limesi

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y), \quad \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

i svaki od njih se sastoji od dva limesa funkcije jedne varijable i općenito su ti limesi međusobno različiti i razlikuju se od limesa

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.10.

Neka je $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}.$$

Dokažite da ne postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *iako je*

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0.$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.10.

Neka je $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}.$$

Dokažite da ne postoji $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *iako je*

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0.$$

Rješenje.

Izračunajmo najprije uzastopne limese.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot 0^2}{x^2\cdot 0^2+(x-0)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{0^2\cdot y^2}{0^2\cdot y^2+(0-y)^2} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} =$$

$$= \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Pokažimo sada da ne postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Stavimo li $x = 0$ dobivamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0^2\cdot y^2}{0^2\cdot y^2+(0-y)^2} = \\ = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

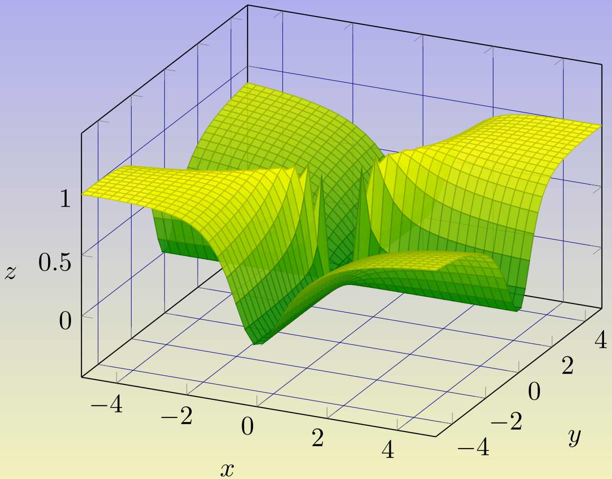
Stavimo li $y = x$ dobivamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot x^2}{x^2\cdot x^2+(x-x)^2} = \\ = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Zaključujemo da ne postoji $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Graf funkcije $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike u $\mathbb{R}^3$

Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parcijalne derivacije višeg reda

Diferencijabilnost funkcije

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Usmjerena derivacija

Teorem srednje vrijednosti

Derivacija implicitno zadane funkcije

Ekstremi funkcija dvije varijable

Uvjetni ekstremi

Neprekidne funkcije

Definicija neprekidne funkcije

Neka je $f : O \to \mathbb{R}$ funkcija definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je $P \in O$. Kažemo da je f neprekidna u točki P ako vrijedi $\lim\limits_{Q \to P} f(Q) = f(P)$.

Funkcija f je neprekidna ako je neprekidna u svakoj točki $P \in O$.

Da bismo mogli govoriti o neprekidnosti funkcije u nekoj točki, ta funkcija mora biti definirana u toj točki i na nekoj okolini te točke. Funkcija $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ je neprekidna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. O neprekidnosti te funkcije u $(0, 0)$ nema smisla govoriti jer u toj točki funkcija f nije definirana.

Neka je $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definirana s

$$g(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Ova funkcija ima prekid u točki $(0,0)$ zato jer je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)\neq g(0,0).$$

Štoviše, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ ne postoji. Stoga, kako god da predefiniramo funkciju g u točki $(0,0)$, ona će uvijek imati prekid u toj točki.

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Propozicija 6.7.

Neka su $f, g : O \to \mathbb{R}$ *realne funkcije definirane na otvorenom skupu* $O \subseteq \mathbb{R}^2$ *i neka je* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Ako su funkcije* f *i* g *neprekidne u* $P_0 \in O$, *tada su i funkcije* $f + g$, λf, $f \cdot g$ *i* $|f|$ *neprekidne u* P_0. *Ako je* $g(P_0) \neq 0$, *onda je i funkcija* $\frac{f}{g}$ *neprekidna u* P_0.

Propozicija 6.8.

Kompozicija neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija.

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Parcijalne derivacije

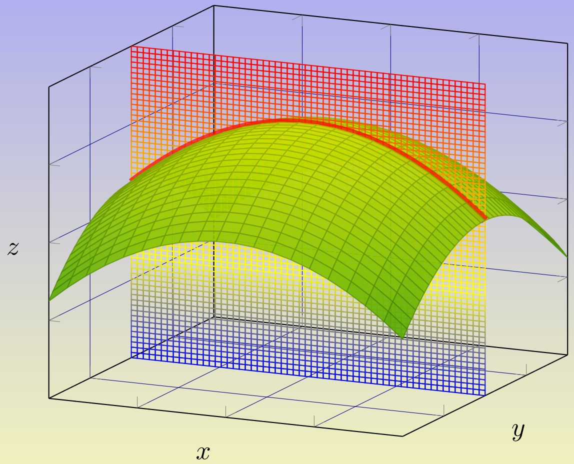
Neka je $z = f(x, y)$ realna funkcija dvije varijable i neka je (x_0, y_0) točka iz unutrašnjosti domene funkcije f. Postavimo li točkom (x_0, y_0) ravninu $y = y_0$, onda ta ravnina siječe graf te funkcije po nekoj krivulji. Na tu krivulju možemo gledati kao na graf funkcije jedne varijable

$$f_1(x) = f(x, y_0).$$

Derivaciju funkcije f_1 zovemo parcijalna derivacija funkcije f po varijabli x.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Parcijalna derivacija po varijabli x



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike u $\mathbb{R}^3$

Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parcijalne derivacije višeg reda

Diferencijabilnost funkcije

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Usmjerena derivacija

Teorem srednje vrijednosti

Derivacija implicitno zadane funkcije

Ekstremi funkcija dvije varijable

Uvjetni ekstremi

Parcijalna derivacija po varijabli x

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

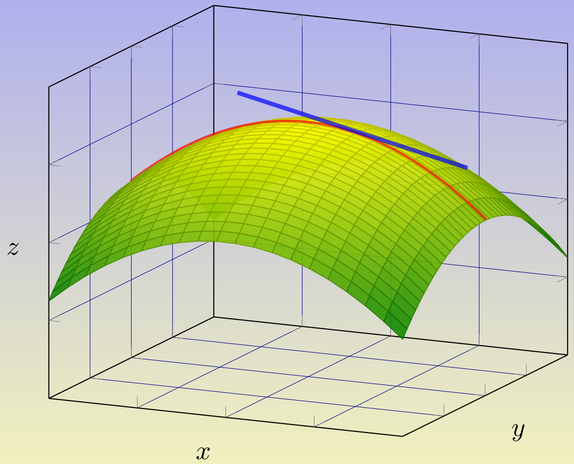
Druge oznake za parcijalnu derivaciju funkcije f po varijabli x u točki (x_0, y_0) su još $f_x(x_0, y_0)$, $D_x f(x_0, y_0)$, $f'_x(x_0, y_0)$.

Geometrijska interpretacija

Parcijalna derivacija funkcije $z = f(x, y)$ po varijabli x u točki (x_0, y_0) je koeficijent smjera tangente na graf funkcije $f_1(x) = f(x, y_0)$ u točki x_0.

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Geometrijska interpretacija



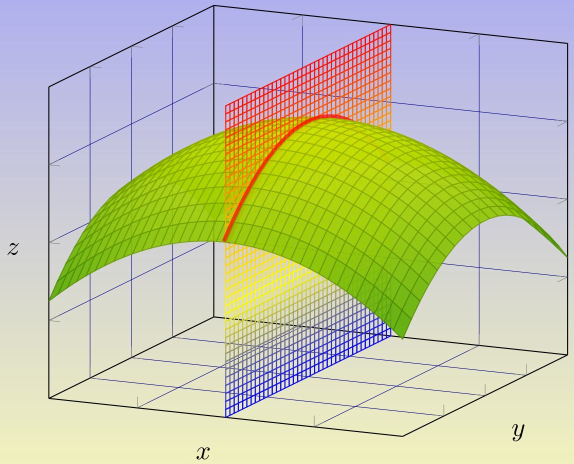
Neka je $z = f(x, y)$ realna funkcija dvije varijable i neka je (x_0, y_0) točka iz unutrašnjosti domene funkcije f. Postavimo li točkom (x_0, y_0) ravninu $x = x_0$, onda ta ravnina siječe graf te funkcije po nekoj krivulji. Na tu krivulju možemo gledati kao na graf funkcije jedne varijable

$$f_2(y) = f(x_0, y).$$

Derivaciju funkcije f_2 zovemo parcijalna derivacija funkcije f po varijabli y.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Parcijalna derivacija po varijabli y



Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Parcijalna derivacija po varijabli y

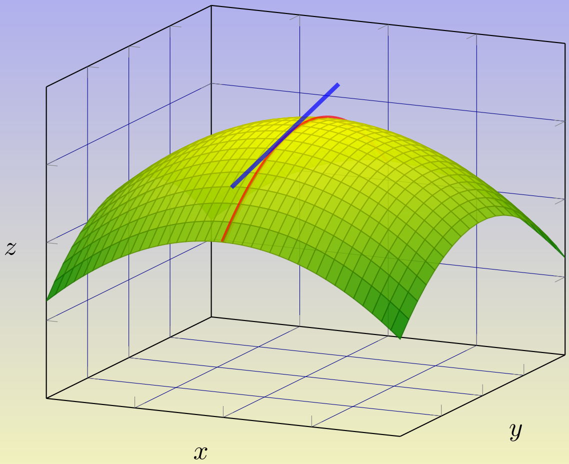
$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

Druge oznake za parcijalnu derivaciju funkcije f po varijabli y u točki (x_0, y_0) su još $f_y(x_0,y_0)$, $D_y f(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$.

Geometrijska interpretacija

Parcijalna derivacija funkcije $z = f(x,y)$ po varijabli y u točki (x_0, y_0) je koeficijent smjera tangente na graf funkcije $f_2(y) = f(x_0, y)$ u točki y_0.

Geometrijska interpretacija



Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Kako su parcijalne derivacije zapravo obične derivacije funkcija jedne varijable za njih vrijede ista pravila deriviranja koja vrijede i za funkcije jedne varijable.

$$\frac{\partial}{\partial x}(u+v) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x}v + u\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(u+v) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}(uv) = \frac{\partial u}{\partial y}v + u\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u-v) = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}v - u\frac{\partial v}{\partial x}}{v^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(u-v) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}v - u\frac{\partial v}{\partial y}}{v^2}$$

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Primjer 6.11.

Odredite parcijalne derivacije funkcije $f(x, y) = x^2y - x\sin y$.

Primjer 6.11.

Odredite parcijalne derivacije funkcije $f(x,y) = x^2y - x\sin y$.

Rješenje.

$f_x(x,y) = 2xy - \sin y, \quad f_y(x,y) = x^2 - x\cos y.$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.11.

Odredite parcijalne derivacije funkcije $f(x,y) = x^2y - x\sin y$.

Rješenje.

$f_x(x,y) = 2xy - \sin y, \quad f_y(x,y) = x^2 - x\cos y.$

Zadatak 6.1.

Odredite parcijalne derivacije sljedećih funkcija:

- $f(x,y) = \operatorname{tg} x - y^2 - xy^2 + 6y$,
- $g(x,y) = \ln\frac{x}{y} - 3xy^3 + 2x^4$,
- $h(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} - \ln(x^2+y^2)$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Parcijalne derivacije funkcije tri varijable

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z}$$

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Primjer 6.12.

Odredite parcijalne derivacije funkcije $f(x, y, z) = xy^2z^3$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.12.

Odredite parcijalne derivacije funkcije $f(x,y,z) = xy^2z^3$.

Rješenje.

$$f_x(x,y,z) = y^2z^3, \quad f_y(x,y,z) = 2xyz^3, \quad f_z(x,y,z) = 3xy^2z^2$$

Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Primjer 6.12.

Odredite parcijalne derivacije funkcije $f(x, y, z) = xy^2z^3$.

Rješenje.

$$f_x(x, y, z) = y^2z^3, \quad f_y(x, y, z) = 2xyz^3, \quad f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2$$

Definicija derivabilne funkcije

Za funkciju $f : O \to \mathbb{R}$ definiranu na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$ kažemo da je derivabilna u točki $(x_0, y_0) \in O$ ako postoje obje parcijalne derivacije te funkcije u toj točki. Funkcija f je derivabilna na O ako je derivabilna u svakoj točki iz O.

Analogno se definira derivabilnost realne funkcije n realnih varijabli.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Parcijalne derivacije višeg reda

Neka je $z = z(x, y)$ realna funkcija dvije realne varijable. Ako na parcijalne derivacije $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ ponovo primijenimo operatore $\frac{\partial}{\partial x}$ i $\frac{\partial}{\partial y}$, dobivamo parcijalne derivacije drugog reda funkcije z.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Druge oznake za parcijalne derivacije drugog reda su z_{xx}, z_{yy}, z_{xy}, z_{yx} ili z'_{xx}, z'_{yy}, z'_{xy}, z'_{yx}.

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Općenito se parcijalne derivacije n-tog reda dobivaju iz parcijalnih derivacija $n-1$ reda primjenom operatora $\frac{\partial}{\partial x}$ i $\frac{\partial}{\partial y}$.

Na primjer, parcijalne derivacije trećeg reda se dalje dobivaju primjenom operatora $\frac{\partial}{\partial x}$ i $\frac{\partial}{\partial y}$ na parcijalne derivacije drugog reda.

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

Primjer 6.13.

Odredite parcijalne derivacije drugog reda funkcije

$$f(x, y) = \sin(x^2 y).$$

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike u $\mathbb{R}^3$

Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parcijalne derivacije višeg reda

Diferencijabilnost funkcije

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Usmjerena derivacija

Teorem srednje vrijednosti

Derivacija implicitno zadane funkcije

Ekstremi funkcija dvije varijable

Uvjetni ekstremi

Primjer 6.13.

Odredite parcijalne derivacije drugog reda funkcije

$$f(x,y) = \sin(x^2 y).$$

Rješenje.

$$f_x(x,y) = 2xy\cos(x^2 y)$$

$$f_y(x,y) = x^2\cos(x^2 y)$$

$$f_{xx}(x,y) = 2y\cos(x^2 y) - 4x^2y^2\sin(x^2 y)$$

$$f_{xy}(x,y) = 2x\cos(x^2 y) - 2x^3y\sin(x^2 y)$$

$$f_{yx}(x,y) = 2x\cos(x^2 y) - 2x^3y\sin(x^2 y)$$

$$f_{yy}(x,y) = -x^4\sin(x^2 y)$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Teorem 6.1 (Schwarzov teorem).

Neka je $z = f(x, y)$ funkcija dvije varijable koja u nekoj točki (x_0, y_0) i u nekoj njezinoj okolini O ima derivacije z_x i z_y. Ako na skupu O postoji i neprekidna je jedna od mješovitih parcijalnih derivacija, npr. z_{xy}, tada postoje u točki (x_0, y_0) obje mješovite parcijalne derivacije i jednake su, tj. vrijedi $z_{xy}(x_0, y_0) = z_{yx}(x_0, y_0)$.

Definicija funkcije klase C^r

Neka je $f : O \to \mathbb{R}$ realna funkcija definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$. Kažemo da je funkcija f klase C^r na O ako je neprekidna i postoje sve parcijalne derivacije do reda r funkcije f i one su neprekidne funkcije na O. Skup svih funkcija klase C^r na O označavamo s $C^r(O)$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Diferencijabilnost funkcije

Osnovna ideja diferencijalnog računa je zadanu funkciju što bolje lokalno aproksimirati linearnom. Jednostavno rečeno, funkcija je diferencijabilna u točki (x_0, y_0) ako je $f(x_0 + h, y_0 + k)$ praktički jednako $f(x_0, y_0)$ kada su h i k dovoljno blizu nule.

Neka je $f : O \to \mathbb{R}$ definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je $P_0 \in O$. Želimo prirast funkcije $f(P_0+H)-f(P_0)$ aproksimirati s $A(H)$, gdje je $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ linearni operator i $H \in \mathbb{R}^2$ takav da je $P_0 + H \in O$.

Pritom ćemo preslikavanje f smatrati "dobrim" ukoliko relativnu grešku $\frac{r(H)}{\|H\|}$ možemo učiniti po volji malom za dovoljno male H, pri čemu je $r(H) = f(P_0 + H) - f(P_0) - A(H)$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Pokazuje se da ako linearni operator A postoji on je jedinstven i zovemo ga **diferencijal funkcije** f **u točki** P_0 i označavamo s $\mathrm{d}f(P_0)$. U tom slučaju kažemo da je funkcija f **diferencijabilna** u točki P_0.

Pogledajmo prvo slučaj realne funkcije jedne realne varijable

Primjer 6.14.

Ispitajte diferencijabilnost funkcije $f(x) = x^2$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Pokazuje se da ako linearni operator A postoji on je jedinstven i zovemo ga **diferencijal funkcije f u točki P_0** i označavamo s $\mathrm{d}f(P_0)$. U tom slučaju kažemo da je funkcija f **diferencijabilna** u točki P_0.

Pogledajmo prvo slučaj realne funkcije jedne realne varijable

Primjer 6.14.

Ispitajte diferencijabilnost funkcije $f(x) = x^2$.

Rješenje.

Najprije odredimo prirast funkcije f u točki x.

$$\Delta f = f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2$$

Sada gledamo onaj dio izraza u Δf koji linearno ovisi o h. To je ovdje $2xh$. Dakle, naš kandidat za diferencijal funkcije f u točki x je linearni operator

$$\mathrm{d}f(x)(h) = 2xh.$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Tada je

$$r(h) = f(x+h) - f(x) - \mathrm{d}f(x)(h) = (2xh + h^2) - 2xh = h^2.$$

Treba još provjeriti da je $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$.

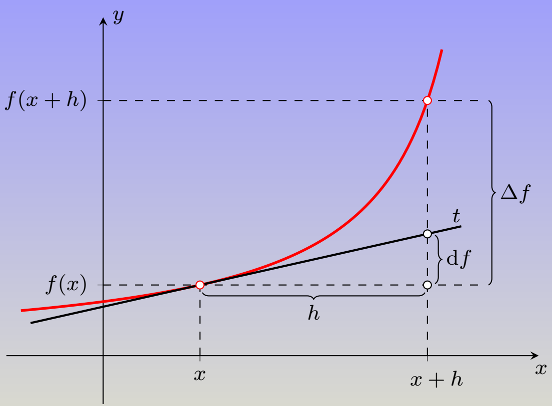
$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$$

Kako je zaista $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$, zaključujemo da je $\mathrm{d}f(x)(h) = 2xh$ diferencijal funkcije f u točki x pa je f diferencijabilna funkcija.

Uočimo još da je $f'(x) = 2x$ pa je zapravo

$$\mathrm{d}f(x)(h) = f'(x) \cdot h.$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi



$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$\mathrm{d}f(x)(h) = f'(x) \cdot h \;\leftarrow$ diferencijal funkcije f u točki x

Za male pomake h je $\Delta f \approx \mathrm{d}f$, tj. $f(x+h) \approx f(x) + f'(x) \cdot h$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Derivacija $f'(x)$ funkcije f u točki x je numerički reprezentant diferencijala $\mathrm{d}f(x)$ funkcije f u točki x. Naime, $\mathrm{d}f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je linearni operator koji u kanonskoj bazi ima svoj matrični zapis i to je matrica tipa $(1,1)$ čiji jedini element je $f'(x)$, tj. derivacija funkcije f u točki x.

Napomena.

Lako se pokazuje da su za realne funkcije jedne varijable derivabilnost i diferencijabilnost ekvivalentna svojstva, tj. postojanje derivacije je ekvivalentno postojanju diferencijala. Vidjet ćemo da kod funkcija više varijabli to ne vrijedi, tj. postojanje parcijalnih derivacija nije ekvivalentno postojanju diferencijala.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Diferencijal realne funkcije dvije varijable

Neka je $f : O \to \mathbb{R}$ realna funkcija definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$. Diferencijal funkcije f u točki $(x, y) \in O$ je linearni operator $\mathrm{d}f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ za kojeg vrijedi

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - \mathrm{d}f(x, y)(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Izraz u gornjem limesu zapravo predstavlja relativnu grešku $\frac{r(H)}{\|H\|}$ raspisanu po koordinatama. Naime, ako stavimo $H = (h, k)$, tada je $\|H\| = \sqrt{h^2 + k^2}$. Relativnu grešku $\frac{r(H)}{\|H\|}$ intuitivno možemo pročitati na sljedeći način:

$$\frac{\text{prirast funkcije} - \text{vrijednost diferencijala na vektor pomaka}}{\text{duljina vektora pomaka}}$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Napomena.

U slučaju realne funkcije jedne varijable relativna greška $\frac{r(H)}{\|H\|}$ raspisana u koordinatama izgleda $\frac{r(h)}{|h|}$ ako stavimo $H = h$. Međutim, bez tehničkog raspisivanja intuitivno je jasno da vrijedi

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \iff \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0.$$

Zbog toga u prethodnom primjeru kod ispitivanja diferencijabilnosti funkcije jedne varijable nismo u nazivniku stavljali apsolutnu vrijednost.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.15.

Ispitajte diferencijabilnost funkcije $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.15.

Ispitajte diferencijabilnost funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Rješenje.

Najprije odredimo prirast funkcije f u točki (x, y).

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x+h, y+k) - f(x, y) = \\ &= (x+h)^2 + (y+k)^2 - x^2 - y^2 = \\ &= 2xh + 2yk + h^2 + k^2\end{aligned}$$

Sada gledamo onaj dio izraza u Δf koji linearno ovisi o h i k. To je ovdje $2xh + 2yk$. Dakle, naš kandidat za diferencijal funkcije f u točki (x, y) je linearni operator

$$\mathrm{d}f(x, y)(h, k) = 2xh + 2yk.$$

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Tada je

$$r(h,k) = f(x+h,y+k) - f(x,y) - \mathrm{d}f(x,y)(h,k) =$$
$$= \left(2xh + 2yk + h^2 + k^2\right) - (2xh + 2yk) = h^2 + k^2.$$

Treba još provjeriti da je $\lim\limits_{H\to\Theta} \frac{r(H)}{\|H\|} = 0.$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt{h^2+k^2}^{\,2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2} =$$

$$= \sqrt{0^2+0^2} = 0$$

Zaključujemo da je $\mathrm{d}f(x,y)(h,k) = 2xh+2yk$ diferencijal funkcije f u točki (x,y) pa je f diferencijabilna funkcija.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Nadalje, diferencijal $\mathrm{d}f(x,y)$ možemo napisati preko skalarnog produkta vektora.

$$\mathrm{d}f(x,y)(h,k) = 2xh + 2yk = (2x, 2y) \cdot (h,k)$$

Komponente vektora $(2x, 2y)$ su parcijalne derivacije funkcije f jer je $f_x(x,y) = 2x$ i $f_y(x,y) = 2y$. Vektor $\big(f_x(x,y), f_y(x,y)\big)$ zovemo gradijent funkcije f u točki (x,y) i označavamo ga s $\nabla f(x,y)$. Dakle,

$$\mathrm{d}f(x,y)(h,k) = \nabla f(x,y) \cdot (h,k).$$

Gradijent funkcije

Neka je $f : O \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$. Gradijent funkcije f u točki $P \in O$ je vektor

$$\nabla f(P) = \big(f_x(P), f_y(P)\big) = f_x(P) \cdot \vec{i} + f_y(P) \cdot \vec{j}$$

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Umjesto h i k uobičajene oznake za priraste nezavisnih varijabli x i y su $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$ pa uz ove oznake imamo

$$\mathrm{d}f(x,y)(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = 2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y$$

ili kraće

$$\mathrm{d}f(x,y) = 2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y.$$

Općenito, ako je funkcija $f : O \to \mathbb{R}$ definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$ diferencijabilna u točki $(x,y) \in O$, tada je njezin diferencijal u toj točki jednak

$$\mathrm{d}f(x,y)(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = f_x(x,y)\,\mathrm{d}x + f_y(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

ime linearnog operatora

vektor na kojeg djeluje linearni operator

Najčešće kratko pišemo

$$\mathrm{d}f(x,y) = f_x(x,y)\,\mathrm{d}x + f_y(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

funkcija jedne varijable	funkcija dvije varijable
$f \mapsto f'$	$f \mapsto \nabla f$
$\mathrm{d}f(x)(h) = f'(x) \cdot h$	$\mathrm{d}f(P)(H) = \nabla f(P) \cdot H$

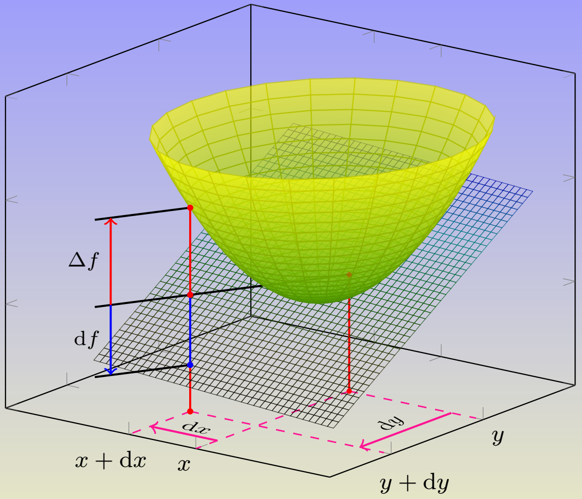
U analogiji s realnim funkcijama jedne varijable $\nabla f(P)$ bi bilo opravdano zvati derivacijom funkcije f u točki P.

Znamo da $f'(x_0)$ geometrijski predstavlja koeficijent smjera tangente u točki $(x_0, f(x_0))$ na graf funkcije f i jednadžba te tangente je

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Kod funkcija dvije varijable gradijent ima sličnu ulogu jer se javlja u jednadžbi tangencijalne ravnine na graf te funkcije.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi



Za male pomake $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$ je $\Delta f \approx \mathrm{d}f$, tj.

$$f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) \approx f(x,y) + \mathrm{d}f(x,y)(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y).$$

Jednadžba tangencijalne ravnine na graf funkcije $z = f(x, y)$ u točki (x_0, y_0) glasi

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0),$$

odnosno

$$f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

gdje je $z_0 = f(x_0, y_0)$.

O tangencijalnim ravninama i plohama će biti više riječi kasnije.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Svojstva gradijenta

1. $\nabla\big[f(P)+g(P)\big]=\nabla f(P)+\nabla g(P)$
2. $\nabla\big[\alpha f(P)\big]=\alpha\cdot\nabla f(P),\quad \alpha\in\mathbb{R}$
3. $\nabla\big[f(P)\cdot g(P)\big]=g(P)\cdot\nabla f(P)+f(P)\cdot\nabla g(P)$
4. $\nabla\left(\dfrac{f(P)}{g(P)}\right)=\dfrac{g(P)\cdot\nabla f(P)-f(P)\cdot\nabla g(P)}{g(P)^2},\quad g(P)\neq 0$

Napomena.

Analogno, kao kod funkcija dviju varijabli, se definira gradijent funkcije triju ili više varijabli. Na primjer, gradijent funkcije triju varijabli u točki (x_0,y_0,z_0) je

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\Big(f_x(x_0,y_0,z_0),f_y(x_0,y_0,z_0),f_z(x_0,y_0,z_0)\Big).$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Totalni diferencijal

Neka je $f : O \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$. Tada funkcija f u svakoj točki $(x_0, y_0) \in O$ ima diferencijal $\mathrm{d}f(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. U paru kanonskih baza matrica diferencijala $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$ je tipa $(1, 2)$ i sastoji se od parcijalnih derivacija funkcije f u točki (x_0, y_0).

Definicija totalnog diferencijala

Neka je $f : O \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$. Totalni diferencijal funkcije f je preslikavanje $\mathrm{d}f : O \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ koje svakoj točki $(x_0, y_0) \in O$ pridružuje diferencijal funkcije f u toj točki, tj. $(x_0, y_0) \mapsto \mathrm{d}f(x_0, y_0)$.

Totalni diferencijal funkcije f se određuje po formuli

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.16.

Zadana je funkcija $f(x, y) = x^2 + y^2$.

- a *Odredite totalni diferencijal funkcije* f.
- b *Odredite diferencijal funkcije* f *u točki* $(1, 3)$ *i gradijent u toj točki.*
- c *Izračunajte približno pomoću diferencijala* $f(1.02, 2.99)$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.16.

Zadana je funkcija $f(x, y) = x^2 + y^2$.

- (a) *Odredite totalni diferencijal funkcije* f.
- (b) *Odredite diferencijal funkcije* f *u točki* $(1, 3)$ *i gradijent u toj točki.*
- (c) *Izračunajte približno pomoću diferencijala* $f(1.02, 2.99)$.

Rješenje.

- (a) Kako je $f_x = 2x$ i $f_y = 2y$, totalni diferencijal funkcije f jednak je $\mathrm{d}f = 2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.16.

Zadana je funkcija $f(x,y) = x^2 + y^2$.

- a *Odredite totalni diferencijal funkcije* f.
- b *Odredite diferencijal funkcije* f *u točki* $(1,3)$ *i gradijent u toj točki.*
- c *Izračunajte približno pomoću diferencijala* $f(1.02, 2.99)$.

Rješenje.

- a Kako je $f_x = 2x$ i $f_y = 2y$, totalni diferencijal funkcije f jednak je $\mathrm{d}f = 2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y$.
- b Kako je $f_x(1,3) = 2$ i $f_y(1,3) = 6$, diferencijal funkcije f u točki $(1,3)$ jednak je $\mathrm{d}f(1,3) = 2\,\mathrm{d}x + 6\,\mathrm{d}y$, a gradijent je jednak $\nabla f(1,3) = (2,6)$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

- Ako u

$$f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) \approx f(x,y) + \mathrm{d}f(x,y)(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

uvrstimo $x=1,\ y=3,\ \mathrm{d}x = 0.02,\ \mathrm{d}y = -0.01$, dobivamo

$$f(1.02, 2.99) \approx f(1,3) + \mathrm{d}f(1,3)(0.02, -0.01).$$

Kako je $f(1,3) = 10$ i

$$\mathrm{d}f(1,3)(0.02,-0.01) = 2\cdot 0.02 + 6\cdot(-0.01) = -0.02,$$

konačno dobivamo $f(1.02, 2.99) \approx 10 + (-0.02) = 9.98.$

Stvarna vrijednost je

$$f(1.02, 2.99) = (1.02)^2 + (2.99)^2 = 9.9805.$$

Greška je mala jer su pomaci $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$ mali.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Diferencijabilnost funkcije je toliko jako svojstvo da povlači neprekidnost i derivabilnost. Preciznije o tome govore sljedeće dvije propozicije.

Propozicija 6.9.

Neka je $f : O \to \mathbb{R}$ definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$. Ako je funkcija f diferencijabilna u točki (x_0, y_0), tada je f neprekidna u točki (x_0, y_0).

Propozicija 6.10.

Neka je $f : O \to \mathbb{R}$ definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$. Ako je funkcija f diferencijabilna u točki (x_0, y_0), tada je i derivabilna u toj točki i vrijedi

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y.$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Obrat propozicije 6.10 ne vrijedi, tj. kod realnih funkcija dviju ili više varijabli derivabilnost ne povlači diferencijabilnost. Međutim, ukoliko funkcija ima neprekidne parcijalne derivacije, tada je ona i diferencijabilna.

Propozicija 6.11.

Neka je $f : O \to \mathbb{R}$ definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$. Ako funkcija f ima neprekidne parcijalne derivacije u točki (x_0, y_0), tada je f diferencijabilna u toj točki.

Drugim riječima, neprekidnost parcijalnih derivacija je dovoljan uvjet za diferencijabilnost, ali nije i nužan uvjet. Moguće je da funkcija bude diferencijabilna u nekoj točki, a da pritom njezine parcijalne derivacije u toj točki nisu neprekidne.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.17.

Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definirana s*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ima obje parcijalne derivacije u točki $(0,0)$ *i one su jednake* 0*, ali* f *nije diferencijabilna u* $(0,0)$*.*

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.17.

Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definirana s*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ima obje parcijalne derivacije u točki $(0,0)$ *i one su jednake* 0*, ali* f *nije diferencijabilna u* $(0,0)$.

Rješenje.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0-0}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} 0 = 0$$

Ako bi postojao diferencijal funkcije f u točki $(0,0)$, on bi zbog jedinstvenosti morao biti jednak

$$\mathrm{d}f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,\mathrm{d}y = 0 \cdot \mathrm{d}x + 0 \cdot \mathrm{d}y = 0,$$

tj., on bi bio nuloperator. No, treba još provjeriti je li

$$\lim_{H \to \Theta} \frac{r(H)}{\|H\|} = 0.$$

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike u $\mathbb{R}^3$

Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parcijalne derivacije višeg reda

Diferencijabilnost funkcije

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Usmjerena derivacija

Teorem srednje vrijednosti

Derivacija implicitno zadane funkcije

Ekstremi funkcija dvije varijable

Uvjetni ekstremi

$$\lim_{H\to\Theta}\frac{r(H)}{\|H\|}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\mathrm{d}f(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{hk}{h^2+k^2}-0-0}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Za $k=0$ imamo

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot 0}{(h^2+0^2)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0}{|h|^3}=\lim_{h\to 0}0=0$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Za $k = \sqrt{h}$ imamo

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{h\to 0+} \frac{h\cdot\sqrt{h}}{\left(h^2+\sqrt{h}^2\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{h^{\frac{3}{2}}}{(h^2+h)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{h\to 0+} \left(\frac{h}{h^2+h}\right)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \left(\frac{1}{h+1}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{0+1}\right)^{\frac{3}{2}} = 1^{\frac{3}{2}} = 1$$

Zaključujemo da $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$ ne postoji pa f nije diferencijabilna funkcija u točki $(0,0)$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

U ovom slučaju jednostavniji način da dokažemo da funkcija f nije diferencijabilna u točki $(0,0)$ jest da dokažemo da ona ima prekid u toj točki, tj. da je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0) = 0.$$

Međutim, limes

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

ne postoji jer je za $x=0$ jednak 0, a za $x=y$ je jednak $\frac{1}{2}$. Dakle, funkcija f ima prekid u točki $(0,0)$ pa stoga nije niti diferencijabilna u toj točki.

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Zadatak 6.2.

Dokažite sljedeće tvrdnje:

- a *Funkcija* $z = \sqrt[3]{xy}$ *ima u točki* $(0,0)$ *parcijalne derivacije jednake* 0, *ali nije diferencijabilna u* $(0,0)$.
- b *Funkcija* $z = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ *ima u* $(0,0)$ *parcijalne derivacije jednake* 1, *ali nije diferencijabilna u* $(0,0)$.
- c *Funkcija*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ima parcijalne derivacije u $(0,0)$ *koje imaju prekide u* $(0,0)$ *i neomeđene su, ali je ipak* f *diferencijabilna u* $(0,0)$.

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike u $\mathbb{R}^3$

Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parcijalne derivacije višeg reda

Diferencijabilnost funkcije

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Usmjerena derivacija

Teorem srednje vrijednosti

Derivacija implicitno zadane funkcije

Ekstremi funkcija dvije varijable

Uvjetni ekstremi

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Neka je

$$f : O \to \mathbb{R}, \quad z = f(x, y)$$

diferencijabilna funkcija definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$. Pretpostavimo da varijable x i y ovise o nekoj novoj varijabli t, tj. da je

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Tada je

$$z = f(x(t), y(t)),$$

odnosno na z možemo gledati kao na funkciju jedne varijable t, tj.

$$z = z(t).$$

Želimo odrediti derivaciju $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ funkcije z po varijabli t.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Teorem 6.2.

Za diferencijabilne funkcije $z = f(x,y)$, $x(t)$, $y(t)$ vrijedi

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Dokaz.

Kako je $z = f(x,y)$, slijedi

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y. \qquad \text{(I)}$$

S druge strane, zbog $z = z(t)$ mora biti

$$\mathrm{d}z = z'(t)\,\mathrm{d}t. \qquad \text{(II)}$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Isto tako, zbog $x = x(t)$ i $y = y(t)$ vrijedi

$$\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}y = y'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{III}$$

Uvrstimo li (III) u (I) nakon sređivanja dobivamo

$$\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\,y'(t)\right)\mathrm{d}t. \tag{IV}$$

Iz (II) i (IV) zbog jedinstvenosti diferencijala slijedi

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\,x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\,y'(t),$$

odnosno

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

♡

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Primjer 6.18.

Neka je $f(x,y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3)$ *te* $x(t) = a\cos t,\ y(t) = b\sin t$.

Odredite $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.18.

Neka je $f(x,y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3)$ *te* $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$. *Odredite* $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.

Rješenje.

Prvi način. U funkciju f uvrstimo izraze za varijable x i y, a nakon toga deriviramo po varijabli t.

$$f(t) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3) = \frac{1}{3}\left(a^3\cos^3 t + b^3\sin^3 t\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}\left(-3a^3\cos^2 t\sin t + 3b^3\sin^2 t\cos t\right) =$$

$$= -a^3\sin t\cos^2 t + b^3\sin^2 t\cos t$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Drugi način. Iskoristimo formulu za parcijalnu derivaciju složene funkcije, a nakon toga u derivaciju uvrstimo izraze za varijable x i y.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y^2, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -a\sin t, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = b\cos t$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= x^2\cdot(-a\sin t) + y^2\cdot b\cos t = \\ &= (a\cos t)^2\cdot(-a\sin t) + (b\sin t)^2\cdot b\cos t = \\ &= -a^3\sin t\cos^2 t + b^3\sin^2 t\cos t\end{aligned}$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Neka je $z = f(x, y)$ i pretpostavimo da varijable x i y ovise o dva parametra u i v, tj.

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v).$$

Tada je

$$z = f\big(x(u, v), y(u, v)\big),$$

odnosno na z možemo gledati kao na funkciju dvije varijable u i v, tj.

$$z = z(u, v).$$

Želimo odrediti parcijalne derivacije $\frac{\partial z}{\partial u}$ i $\frac{\partial z}{\partial v}$ funkcije z po varijablama u i v.

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Teorem 6.3.

Za diferencijabilne funkcije $z = f(x, y)$, $x(u, v)$, $y(u, v)$ vrijedi

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

Dokaz.

Diferencijal funkcije $z = f(x, y)$ jednak je

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y. \tag{i}$$

S druge strane, zbog $z = z(u, v)$ vrijedi

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathrm{d}v. \tag{ii}$$

Diferencijali varijabli $x = x(u, v)$ i $y = y(u, v)$ jednaki su

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathrm{d}v \qquad \text{(iii)}$$

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}v \qquad \text{(iv)}$$

Uvrstimo li (iii) i (iv) u (i) dobivamo

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}\right)\mathrm{d}u + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}\right)\mathrm{d}v$$

Odabrana poglavlja matematike
prof.dr.sc. Blaženka Divjak
Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Usporedimo li posljednju jednakost s (ii), zbog jedinstvenosti diferencijala slijedi

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

♡

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.19.

Neka je $f(x,y)=x^2-y^2$ *te* $x(u,v)=u\cos v$, $y(u,v)=u\sin v$.

Odredite $\frac{\partial f}{\partial u}$ *i* $\frac{\partial f}{\partial v}$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.19.

Neka je $f(x,y) = x^2 - y^2$ *te* $x(u,v) = u\cos v$, $y(u,v) = u\sin v$.
Odredite $\frac{\partial f}{\partial u}$ *i* $\frac{\partial f}{\partial v}$.

Rješenje.

Prvi način. U funkciju f uvrstimo izraze za varijable x i y, a nakon toga parcijalno deriviramo po varijablama u i v.

$$f(u,v) = x^2 - y^2 = u^2\cos^2 v - u^2\sin^2 v =$$

$$= u^2\left(\cos^2 v - \sin^2 v\right) = u^2\cos 2v$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2u\cos 2v$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -2u^2\sin 2v$$

Drugi način. Iskoristimo formulu za parcijalnu derivaciju složene funkcije, a nakon toga u derivaciju uvrstimo izraze za varijable x i y.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -u \sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u \cos v$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} =$$

$$= 2x \cdot \cos v + (-2y) \cdot \sin v =$$

$$= 2u \cos v \cdot \cos v - 2u \sin v \cdot \sin v =$$

$$= 2u \cos^2 v - 2u \sin^2 v = 2u\big(\cos^2 v - \sin^2 v\big) =$$

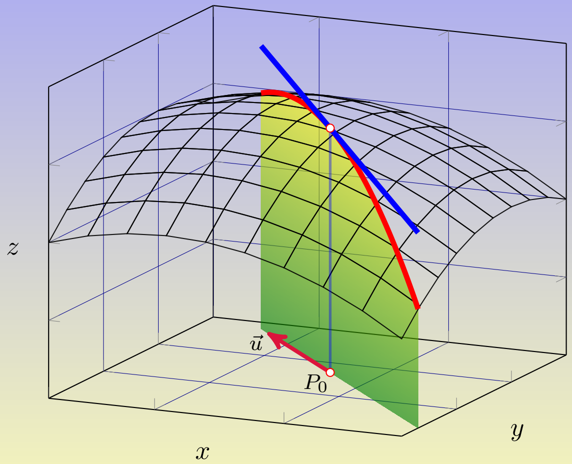
$$= 2u \cos 2v$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = \\
&= 2x\cdot(-u\sin v) + (-2y)\cdot u\cos v = \\
&= 2u\cos v\cdot(-u\sin v) - 2u\sin v\cdot u\cos v = \\
&= -4u^2\sin v\cos v = -2u^2\cdot 2\sin v\cos v = \\
&= -2u^2\sin 2v
\end{aligned}
$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Usmjerena derivacija



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike u $\mathbb{R}^3$

Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parcijalne derivacije višeg reda

Diferencijabilnost funkcije

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Usmjerena derivacija

Teorem srednje vrijednosti

Derivacija implicitno zadane funkcije

Ekstremi funkcija dvije varijable

Uvjetni ekstremi

Neka je $f : O \to \mathbb{R}$ definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je $P_0 \in O$. Zanima nas brzina promjene funkcije f u smjeru nekog vektora $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ u točki P_0. U tu svrhu gledamo restrikciju funkcije f na pravac kroz točku P_0 s vektorom smjera $\vec{u}$. To je funkcija jedne varijable čiji graf je krivulja koja se dobije kao presjek grafa funkcije f i ravnine kroz P_0 koja je okomita na xy-ravninu i paralelna je s vektorom $\vec{u}$.

Derivacija te funkcije u točki P_0 se zove **derivacija funkcije f duž vektora** $\vec{u}$ i označava se s $\partial_{\vec{u}} f(P_0)$. Derivacija duž jediničnog vektora $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ zove se **derivacija u smjeru vektora** $\vec{u}$.

Usmjerena derivacija

$$\partial_{\vec{u}} f(P_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f(P_0 + t\vec{u}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{u}) - f(P_0)}{t}$$

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Propozicija 6.12.

Neka je $f : O \to \mathbb{R}$ definirana na otvorenom skupu $O \subseteq \mathbb{R}^2$. Ako je f diferencijabilna funkcija u točki $P_0 \in O$, tada je

$$\partial_{\vec{u}} f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cdot u_2$$

pri čemu je $\vec{u} = (u_1, u_2)$.

Gornju formulu možemo zapisati preko skalarnog produkta vektora.

$$\partial_{\vec{u}} f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{u}.$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Dokaz.

Neka je $P_0 = (x_0, y_0)$. Tada je

$$P_0 + t\vec{u} = (x_0, y_0) + t \cdot (u_1, u_2) = (x_0 + tu_1, y_0 + tu_2).$$

Ako stavimo $x(t) = x_0 + tu_1,\ y(t) = y_0 + tu_2$, dobivamo

$$f(P_0 + t\vec{u}) = f(x(t), y(t)), \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u_1, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u_2.$$

Korištenjem formule za derivaciju složene funkcije

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

i uvrštavanjem $t = 0$ slijedi

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(x(0), y(0)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(0), y(0)) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(0), y(0)) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0)$$

odnosno

$$\partial_{\vec{u}} f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cdot u_2$$

♡

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Sjetimo se da diferencijal realne funkcije dvije varijable računamo po formuli

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0)(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = f_x(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y$$

što možemo zapisati u obliku

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0)(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y).$$

Izraz na desnoj strani u zadnjoj jednakosti predstavlja derivaciju funkcije f u točki (x_0, y_0) duž vektora $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$. Time smo dobili jednu lijepu geometrijsku interpretaciju diferencijala.

Geometrijska interpretacija diferencijala

Vrijednost diferencijala realne funkcije dvije varijable u točki (x_0, y_0) na vektoru $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ mjeri brzinu promjene te funkcije kada se iz točke (x_0, y_0) pomaknemo duž vektora $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$.

Pogledajmo još jednom formulu

$$\partial_{\vec{u}} f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{u}.$$

Koristeći definiciju skalarnog produkta vektora dobivamo

$$\partial_{\vec{u}} f(P_0) = |\nabla f(P_0)| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos(\nabla f(P_0), \vec{u}). \qquad (\clubsuit)$$

Vidimo da duljina vektora $\vec{u}$ utječe na brzinu promjene funkcije f duž tog vektora, što je i intuitivno jasno jer duljina vektora $\vec{u}$ nam govori koliko daleko smo otišli od početne točke P_0. Stoga nas uglavnom zanima brzina promjene funkcije duž jediničnog vektora, tj. u smjeru jediničnog vektora. Često, iako vektor $\vec{u}$ nije jedinični, govorimo o brzini promjene u smjeru vektora $\vec{u}$ pri čemu podrazumijevamo brzinu promjene te funkcije u smjeru pripadnog jediničnog vektora $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Pitamo se u smjeru kojeg vektora $\vec{u}$ funkcija f najbrže raste u točki P_0. Iz (♣) i $|\vec{u}| = 1$ slijedi da funkcija najbrže raste u smjeru onog vektora $\vec{u}$ za kojeg vrijedi $\cos(\nabla f(P_0), \vec{u}) = 1$, što znači da $\vec{u}$ mora biti kolinearan s vektorom $\nabla f(P_0)$ i mora imati istu orijentaciju. Drugim riječima, u točki P_0 funkcija najbrže raste u smjeru gradijenta $\nabla f(P_0)$, tj. u smjeru vektora $\frac{\nabla f(P_0)}{|\nabla f(P_0)|}$ i ta brzina rasta je jednaka duljini gradijenta funkcije f u točki P_0.

Isto tako, pitamo se u smjeru kojeg vektora $\vec{u}$ funkcija f najbrže pada u točki P_0. Iz (♣) i $|\vec{u}| = 1$ slijedi da funkcija najbrže pada u smjeru onog vektora $\vec{u}$ za kojeg vrijedi $\cos(\nabla f(P_0), \vec{u}) = -1$, što znači da $\vec{u}$ mora biti kolinearan s vektorom $\nabla f(P_0)$ i mora imati suprotnu orijentaciju. Drugim riječima, u točki P_0 funkcija najbrže pada u smjeru vektora $-\nabla f(P_0)$, tj. u smjeru vektora $-\frac{\nabla f(P_0)}{|\nabla f(P_0)|}$ i ta brzina padanja je jednaka $-|\nabla f(P_0)|$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Veza gradijenta i nivo-linije

Neka je

$$f(x,y) = C \qquad (\spadesuit)$$

nivo-linija funkcije f za vrijednost $C \in \mathbb{R}$. Primjenom diferencijala dobivamo

$$\mathrm{d}f(x,y) = \mathbf{0}$$

jer je diferencijal konstantne funkcije nuloperator. Tada je

$$\nabla f(x,y) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = 0. \qquad (\blacklozenge)$$

Nadalje, relacijom ($\spadesuit$) y je implicitno zadan kao funkcija od x, tj. $y = y(x)$. Stoga je $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x$ pa slijedi

$$(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (\mathrm{d}x, y'\mathrm{d}x) = \mathrm{d}x \cdot (1, y').$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Zaključujemo da je vektor $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ kolinearan s vektorom $(1, y')$. Vektor $(1, y')$ je vektor smjera tangente na nivo-liniju $f(x, y) = C$ u točki (x, y). Naime, pravac $y = kx + l$ ima vektor smjera $(1, k)$ pri čemu znamo da je $k = y'$ prema geometrijskoj interpretaciji derivacije realne funkcije jedne varijable.

Na temelju ovog razmatranja iz (♦) slijedi da je gradijent funkcije f u točki P_0 okomit na tangentu nivo-linije funkcije f u točki P_0.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.20.

Zadana je funkcija $f(x, y) = x^2 + y^2$.

a. *Odredite derivaciju funkcije* f *duž vektora* $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ *u točki* $(3, 4)$.
b. *Odredite smjer i brzinu najbržeg rasta i pada funkcije* f *u točki* $(3, 4)$.
c. *Odredite vektor smjera tangente na nivo-liniju funkcije* f *koja prolazi točkom* $(3, 4)$.

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Rješenje.

Parcijalne derivacije funkcije f su $f_x = 2x$ i $f_y = 2y$. Stoga je $\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$ i specijalno $\nabla f(3,4) = (6,8)$. Nadalje,

$$|\nabla f(3,4)| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10.$$

a. $\partial_{\vec{u}} f(3,4) = \nabla f(3,4) \cdot \vec{u} = (6,8) \cdot (2,3) = 12 + 24 = 36$

b. U točki $(3,4)$ funkcija f najbrže raste u smjeru vektora

$$\vec{a} = \frac{\nabla f(3,4)}{|\nabla f(3,4)|} = \frac{1}{10} \cdot (6,8) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right),$$

a najbrže pada u smjeru vektora $\vec{b} = -\vec{a} = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$. Brzina tog rasta jednaka je $|\nabla f(3,4)| = 10$, a brzina pada je -10.

c. Smjer tangente na nivo-liniju u točki $(3,4)$ je okomit na vektor $\nabla f(3,4)$. Dakle, vektoru $\nabla f(3,4)$ zamijenimo komponente i jednoj od njih promijenimo predznak. Stoga je vektor smjera tangente jednak $(-8,6)$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Teorem srednje vrijednosti za funkcije jedne varijable

Teorem 6.4 (Lagrangeov teorem).

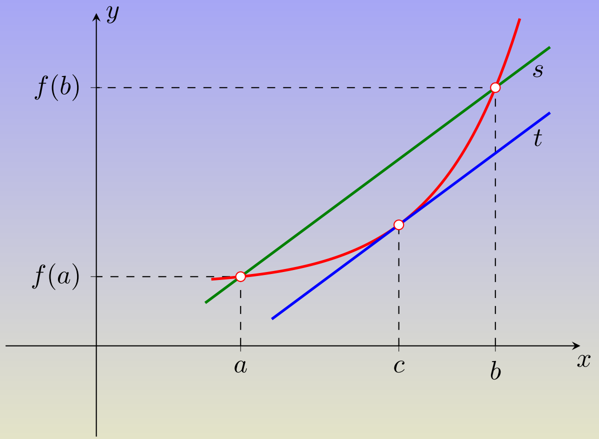
Neka je f diferencijabilna funkcija na intervalu $\langle a, b\rangle$ i neprekidna na segmentu $[a, b]$. Tada postoji $c \in \langle a, b\rangle$ za koji vrijedi

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ili ekvivalentno

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi



$$k_s = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = k_t$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Teorem srednje vrijednosti za funkcije dvije varijable

Neka su $P, Q \in \mathbb{R}^2$ dvije različite točke. Segment $[P, Q]$ je skup svih točaka na dužini $\overline{PQ}$.

$$[P, Q] = \Big\{ P + t(Q - P) : t \in [0, 1] \Big\}.$$

Teorem 6.5 (Lagrangeov teorem).

Neka je $O \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, a $f : O \to \mathbb{R}$ realna funkcija diferencijabilna u svim točkama segmenta $[A, B] \subseteq O$. Tada postoji $C \in [A, B]$ tako da je

$$\underbrace{f(B) - f(A)}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{\nabla f(C)}_{\text{vektor}} \cdot \underbrace{(B - A)}_{\text{vektor}}.$$

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Derivacija implicitno zadane funkcije

Slučaj jedne nezavisne varijable

Neka je f realna funkcije dvije varijable koja ima neprekidne parcijalne derivacije. Jednadžbu

$$f(x, y) = 0 \qquad (\star)$$

možemo interpretirati kao jednadžbu kojom je implicitno zadana neka funkcija jedne varijable $y = y(x)$ ili $x = x(y)$. U rijetkim slučajevima je moguće doći do eksplicitne veze između varijabli x i y jer funkcija f može biti komplicirana pa je nemoguće jednadžbu $(\star)$ riješiti po varijabli x ili y. Međutim, zanimljiva je činjenica da unatoč tome što ne možemo doći do eksplicitne formule $y = y(x)$ ili $x = x(y)$, možemo ipak pronaći derivaciju takve implicitno zadane funkcije preko parcijalnih derivacija poznate funkcije f.

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

- Ako je $f_y(x_0, y_0) \neq 0$, tada na nekoj okolini točke x_0 možemo y izraziti kao funkciju od x, tj. $y = y(x)$ i pritom vrijedi

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}.$$

- Ako je $f_x(x_0, y_0) \neq 0$, tada na nekoj okolini točke y_0 možemo x izraziti kao funkciju od y, tj. $x = x(y)$ i pritom vrijedi

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{f_y(x, y)}{f_x(x, y)}.$$

Primjer 6.21.

Odredite derivaciju implicitno zadane funkcije y jednadžbom

$$x \sin y + x^2 y^3 = 0.$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.21.

Odredite derivaciju implicitno zadane funkcije y jednadžbom

$$x \sin y + x^2 y^3 = 0.$$

Rješenje.

Parcijalne derivacije funkcije

$$f(x, y) = x \sin y + x^2 y^3$$

jednake su

$$f_x(x, y) = \sin y + 2xy^3, \quad f_y(x, y) = x \cos y + 3x^2 y^2.$$

Tada je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} = -\frac{\sin y + 2xy^3}{x \cos y + 3x^2 y^2}.$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Derivacija implicitno zadane funkcije

Slučaj dvije nezavisne varijable

Neka je F realna funkcije tri varijable koja ima neprekidne parcijalne derivacije. Jednadžbu

$$F(x,y,z) = 0 \qquad (*)$$

možemo interpretirati kao jednadžbu kojom je implicitno zadana funkcija dvije varijable $z = z(x,y)$, $y = y(x,z)$ ili $x = x(y,z)$. U rijetkim slučajevima je moguće doći do eksplicitne veze između varijabli x, y i z jer funkcija F može biti komplicirana pa je nemoguće jednadžbu $(*)$ riješiti po nekoj od varijabli x, y ili z. Međutim, zanimljiva je činjenica da unatoč tome što ne možemo doći do eksplicitne formule $z = z(x,y)$, $y = y(x,z)$ ili $x = x(y,z)$, možemo ipak pronaći parcijalne derivacije takve implicitno zadane funkcije preko parcijalnih derivacija poznate funkcije F.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

- Ako je $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, tada na nekoj okolini točke (x_0, y_0) možemo z izraziti kao funkciju od x i y, tj. $z = z(x, y)$ i pritom vrijedi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

- Ako je $F_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, tada na nekoj okolini točke (x_0, z_0) možemo y izraziti kao funkciju od x i z, tj. $y = y(x, z)$ i pritom vrijedi

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_y(x,y,z)}, \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z(x,y,z)}{F_y(x,y,z)}$$

- Ako je $F_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, tada na nekoj okolini točke (y_0, z_0) možemo x izraziti kao funkciju od y i z, tj. $x = x(y, z)$ i pritom vrijedi

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_x(x,y,z)}, \qquad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{F_z(x,y,z)}{F_x(x,y,z)}$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.22.

Odredite parcijalne derivacije implicitno zadane funkcije z jednadžbom

$$y \sin x + y^3 \ln z + xyz^2 = 0.$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.22.

Odredite parcijalne derivacije implicitno zadane funkcije z jednadžbom

$$y \sin x + y^3 \ln z + xyz^2 = 0.$$

Rješenje.

Parcijalne derivacije funkcije

$$F(x, y, z) = y \sin x + y^3 \ln z + xyz^2$$

jednake su

$$F_x(x, y, z) = y \cos x + yz^2$$

$$F_y(x, y, z) = \sin x + 3y^2 \ln z + xz^2$$

$$F_z(x, y, z) = \frac{y^3}{z} + 2xyz$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Konačno dobivamo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{y\cos x + yz^2}{\frac{y^3}{z} + 2xyz} =$$

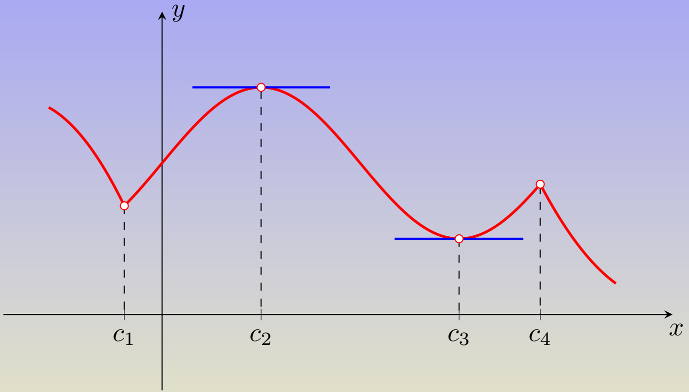
$$= -\frac{yz\cos x + yz^3}{y^3 + 2xyz^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{\sin x + 3y^2 \ln z + xz^2}{\frac{y^3}{z} + 2xyz} =$$

$$= -\frac{z\sin x + 3y^2 z \ln z + xz^3}{y^3 + 2xyz^2}$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Slučaj jedne varijable



U točki c_2 funkcija f ima lokalni maksimum pa je $f'(c_2) = 0$.

U točki c_3 funkcija f ima lokalni minimum pa je $f'(c_3) = 0$.

U točki c_1 funkcija f ima lokalni minimum, ali ne postoji $f'(c_1)$.

U točki c_4 funkcija f ima lokalni maksimum, ali ne postoji $f'(c_4)$.

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Ako funkcija $y = f(x)$ ima u točki x_0 lokalni ekstrem i u toj točki postoji prva derivacija, tada je $f'(x_0) = 0$. Geometrijski gledano, tangenta na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ je paralelna s x-osi. Moguće je da funkcija u nekoj točki ima ekstrem, a da pritom nema derivaciju u toj točki. Takva točka na grafu neprekidne funkcije se prepoznaje kao *šiljak*.

Ako je u nekoj točki prva derivacija jednaka nula, tada u toj točki funkcija ne mora nužno imati ekstrem. Primjer je funkcija $f(x) = x^3$. Dakle, kandidati za ekstreme su nultočke prve derivacije i te točke nazivamo **stacionarne** ili **kritične** točke. Rubne točke i točke u kojima ne postoji prva derivacija treba još posebno ispitati jer i u njima funkcija može imati lokalne ili globalne ekstreme.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Karakter stacionarne točke možemo ispitati na više načina.

Pomoću prve derivacije

Stacionarna točka je lokalni ekstrem ako i samo ako se predznak prve derivacije lijevo od stacionarne točke razlikuje od predznaka prve derivacije desno od stacionarne točke.

Pomoću druge derivacije

- Ako je u stacionarnoj točki druga derivacija strogo veća od nule, tada u toj točki funkcija ima lokalni minimum.
- Ako je u stacionarnoj točki druga derivacija strogo manja od nule, tada u toj točki funkcija ima lokalni maksimum.
- Ako je u stacionarnoj točki druga derivacija jednaka nuli, tada ovaj test ne daje odgovor pa ispitivanje vršimo pomoću prve derivacije ili pomoću viših derivacija.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Definicija lokalnog minimuma funkcije dvije varijable

Kažemo da funkcija $z = f(x, y)$ definirana na otvorenom skupu Ω ima lokalni minimum u točki $(x_0, y_0) \in \Omega$ ako postoji okolina O točke (x_0, y_0) takva da je

$$f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$$

za sve točke $(x, y) \in O$.

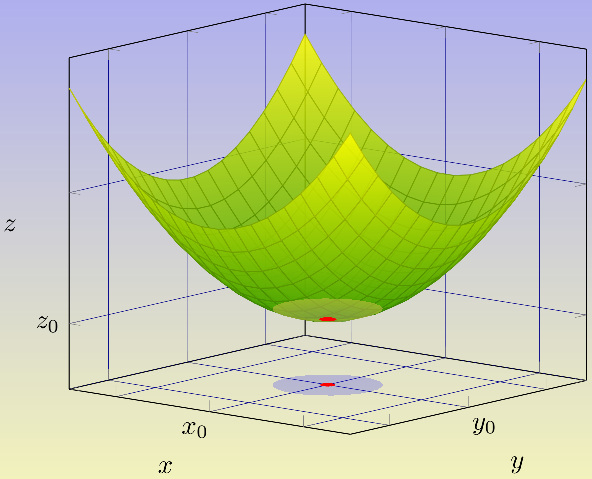
Definicija strogog lokalnog minimuma funkcije dvije varijable

Kažemo da funkcija $z = f(x, y)$ definirana na otvorenom skupu Ω ima strogi lokalni minimum u točki $(x_0, y_0) \in \Omega$ ako postoji okolina O točke (x_0, y_0) takva da je

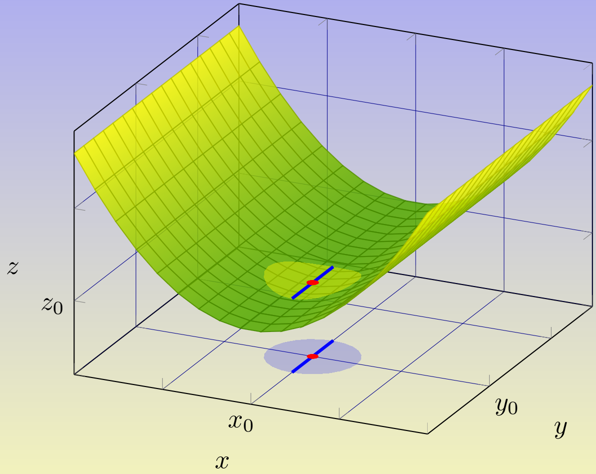
$$f(x, y) > f(x_0, y_0)$$

za sve točke $(x, y) \in O \setminus \{(x_0, y_0)\}$.

Strogi lokalni minimum



Lokalni minimum koji nije strogi



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Definicija lokalnog maksimuma funkcije dvije varijable

Kažemo da funkcija $z = f(x, y)$ definirana na otvorenom skupu Ω ima lokalni maksimum u točki $(x_0, y_0) \in \Omega$ ako postoji okolina O točke (x_0, y_0) takva da je

$$f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$$

za sve točke $(x, y) \in O$.

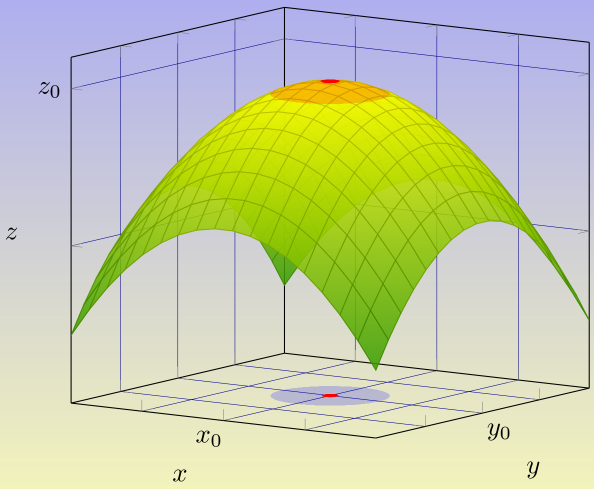
Definicija strogog lokalnog maksimuma funkcije dvije varijable

Kažemo da funkcija $z = f(x, y)$ definirana na otvorenom skupu Ω ima strogi lokalni maksimum u točki $(x_0, y_0) \in \Omega$ ako postoji okolina O točke (x_0, y_0) takva da je

$$f(x, y) < f(x_0, y_0)$$

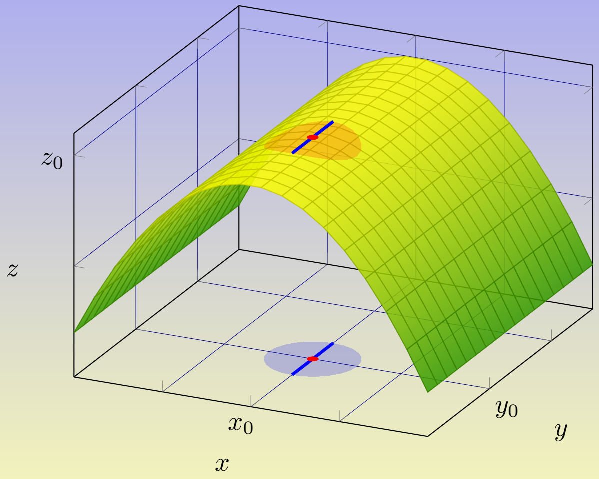
za sve točke $(x, y) \in O \setminus \{(x_0, y_0)\}$.

Strogi lokalni maksimum



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Lokalni maksimum koji nije strogi



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Teorem 6.6 (nužan uvjet za postojanje ekstrema).

Ako funkcija $z = f(x, y)$ ima lokalni ekstrem u točki (x_0, y_0) i ako postoje parcijalne derivacije f_x i f_y u toj točki, tada su one jednake nula, tj. $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Dokaz.

Ako funkcija f ima lokalni ekstrem u točki (x_0, y_0), tada

- funkcija $f_1(x) = f(x, y_0)$ ima lokalni ekstrem u točki x_0,
- funkcija $f_2(y) = f(x_0, y)$ ima lokalni ekstrem u točki y_0.

Funkcije f_1 i f_2 su realne funkcije jedne varijable pa je $f_1'(x_0) = 0$ i $f_2'(y_0) = 0$. Iz definicije parcijalnih derivacija tada odmah slijedi $f_x(x_0, y_0) = 0$ i $f_y(x_0, y_0) = 0$, odnosno $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$. ♡

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Sjetimo se da jednadžba tangencijalne ravnine na graf funkcije $z = f(x, y)$ u točki (x_0, y_0) glasi

$$f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

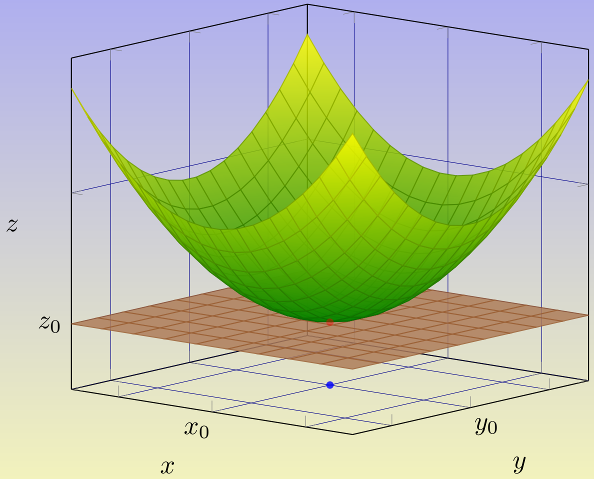
gdje je $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Iz teorema 6.6 slijedi da je tangencijalna ravnina u točki (x_0, y_0) lokalnog ekstrema paralelna s xy-ravninom, tj. njezina jednadžba je

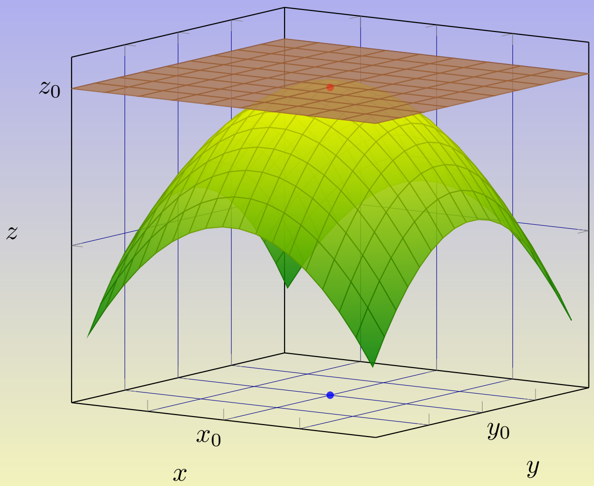
$$z = f(x_0, y_0).$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Tangencijalna ravnina u lokalnom minimumu



Tangencijalna ravnina u lokalnom maksimumu



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Definicija stacionarne točke funkcije dvije varijable

Neka je f derivabilna realna funkcija dvije varijable. Svaka točka (x_0, y_0) iz domene funkcije f za koju vrijedi $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ zovemo stacionarnom točkom funkcije f.

Kao što smo vidjeli, ako funkcija f ima u točki (x_0, y_0) lokalni ekstrem, tada je $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ ukoliko u toj točki gradijent postoji. Obrat ne vrijedi, tj. ako u nekoj točki postoje obje parcijalne derivacije i one su jednake nula, tada u toj točki funkcija ne mora nužno imati lokalni ekstrem.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.23.

Odredite stacionarne točke funkcije $f(x,y) = x^2 - y^2 + 7$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.23.

Odredite stacionarne točke funkcije $f(x,y) = x^2 - y^2 + 7$.

Rješenje.

Parcijalne derivacije funkcije f jednake su $f_x = 2x,\ f_y = -2y$.

Izjednačimo li parcijalne derivacije s nulom dobivamo samo jednu stacionarnu točku $(0,0)$. Međutim, u točki $(0,0)$ funkcija f nema ekstrema.

Pomaknemo li se malo za h po x-osi od točke $(0,0)$ imamo

$$f(h,0) = h^2 + 7 > 7. \tag{1}$$

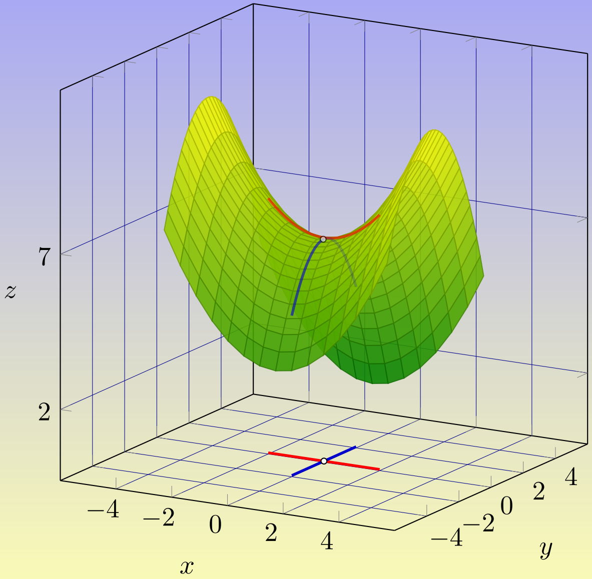
Pomaknemo li se malo za k po y-osi od točke $(0,0)$ imamo

$$f(0,k) = -k^2 + 7 < 7. \tag{2}$$

Kako je $f(0,0) = 7$ i kako u **svakoj** okolini točke $(0,0)$ ima točaka i sa x-osi i sa y-osi, iz (1) i (2) slijedi da funkcija f u točki $(0,0)$ nema ekstrema.

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Tangencijalna ravnina u sedlastoj točki

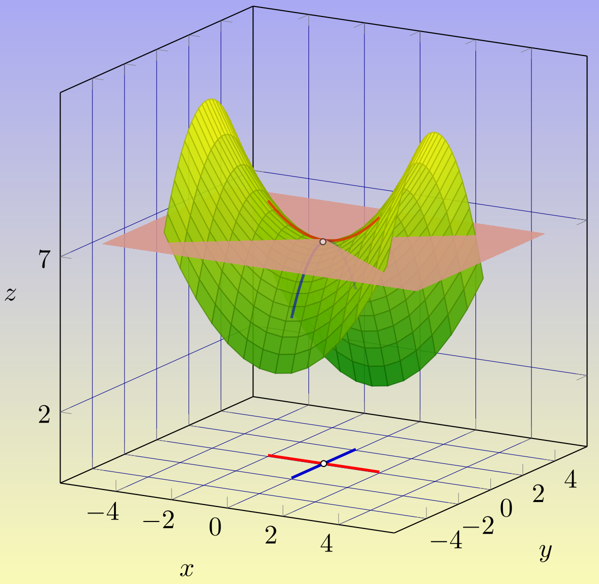


Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Tangencijalna ravnina u sedlastoj točki



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike u $\mathbb{R}^3$

Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parcijalne derivacije višeg reda

Diferencijabilnost funkcije

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Usmjerena derivacija

Teorem srednje vrijednosti

Derivacija implicitno zadane funkcije

Ekstremi funkcija dvije varijable

Uvjetni ekstremi

Definicija sedlaste točke funkcije dvije varijable

Neka je f derivabilna realna funkcija dvije varijable. Svaka točka (x_0, y_0) iz domene funkcije f za koju vrijedi $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ i u kojoj funkcija f nema lokalni ekstrem zovemo sedlastom točkom funkcije f.

Dakle, sedlasta točka funkcije f je svaka ona stacionarna točka funkcije f u kojoj funkcija f ne poprima lokalni ekstrem.

U stacionarnoj točki funkcija ne mora nužno imati lokalni ekstrem. Treba dodatno proučiti ponašanje funkcije u okolini stacionarne točke na temelju kojeg onda možemo donijeti zaključak.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.24.

Odredite ekstreme funkcije

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y.$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.24.

Odredite ekstreme funkcije

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y.$$

Rješenje.

Najprije odredimo parcijalne derivacije funkcije f.

$$f_x = 4x - y$$
$$f_y = 2y - x - 7$$

Izjednačimo parcijalne derivacije s nulom i dobivamo

$$4x - y = 0$$
$$-x + 2y = 7.$$

Rješenje gornjeg sustava je točka $(1, 4)$ i to je jedina stacionarna točka funkcije f.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Da bismo ispitali ima li u toj točki funkcija f lokalni ekstrem, treba vidjeti kako se ponaša funkcija f u okolini te točke. Najprije, $f(1,4) = -14$. Sada dalje računamo

$$f(1+h, 4+k) =$$
$$= 2(1+h)^2 + (4+k)^2 - (1+h)(4+k) - 7(4+k),$$

odnosno nakon sređivanja dobivamo

$$f(1+h, 4+k) = 2h^2 + k^2 - hk - 14.$$

Nadalje,

$$2h^2 + k^2 - hk \geqslant 2h^2 + k^2 - |hk| =$$
$$= |h|^2 + \left(|h|^2 + |k|^2\right) - |h||k| = h^2 + \left(|h| - |k|\right)^2 + |h||k| \geqslant 0.$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Iz prethodnih razmatranja slijedi da je

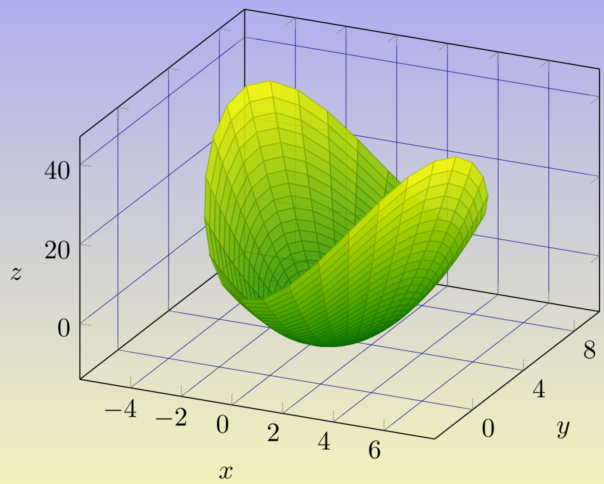
$$f(1+h, 4+k) \geqslant -14, \quad \forall h, k \in \mathbb{R}$$

pa u točki $(1,4)$ funkcija f ima lokalni minimum. Štoviše, kako tijekom razmatranja nismo dobili nikakve uvjete na h i k, tj. nije bitno koliko su oni veliki, u točki $(1,4)$ funkcija f ima globalni minimum. Drugim riječima, dokazali smo da je

$$2x^2 + y^2 - xy - 7y \geqslant -14, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Graf funkcije f



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.25.

Odredite ekstreme funkcije $f(x,y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$.

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

Primjer 6.25.

Odredite ekstreme funkcije $f(x,y) = 1 + \sqrt{x^2+y^2}$.

Rješenje.

Parcijalne derivacije funkcije f jednake su

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

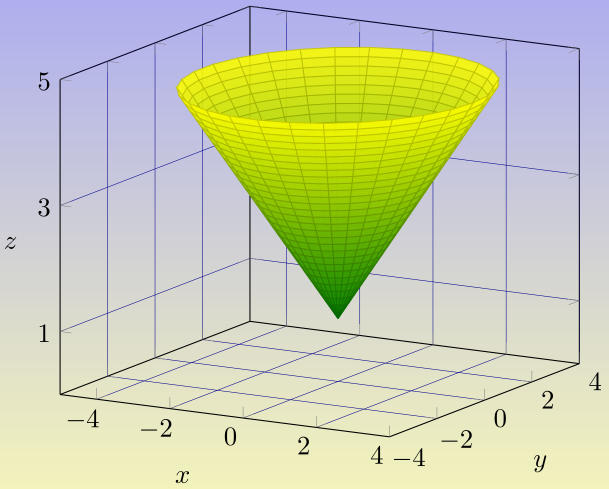
Izjednačimo li parcijalne derivacije s nulom i riješimo pripadni sustav, dobivamo jednu kritičnu točku $(0,0)$ funkcije f. Ta točka je u domeni funkcije f, ali u toj točki ne postoje parcijalne derivacije, odnosno ne postoji $\nabla f(0,0)$. S druge strane, kako je $f(0,0) = 1$ i $\sqrt{x^2+y^2} \geqslant 0$, slijedi da je

$$f(x,y) \geqslant 1, \quad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

pa u $(0,0)$ funkcija f ima globalni minimum.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Graf funkcije f



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Pogledajmo sada kako pomoću parcijalnih derivacija drugog reda možemo ispitati postojanje ekstrema u stacionarnoj točki. Nećemo ulaziti duboko u teoriju, samo ćemo opisati postupak.

Neka je (x_0, y_0) stacionarna točka funkcije f, tj.

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Neka je

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix}.$$

Determinantu $H(x, y)$ zovemo **Hesseova determinanta**.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

- Ako je $H(x_0, y_0) < 0$, tada u točki (x_0, y_0) funkcija f nema ekstrema, tj. (x_0, y_0) je sedlasta točka.
- Ako je $H(x_0, y_0) > 0$, tada u točki (x_0, y_0) funkcija f ima ekstrem, i to
  - lokalni minimum, ako je $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$
  - lokalni maksimum, ako je $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$
- Ako je $H(x_0, y_0) = 0$, tada ovaj test ne daje odgovor pa treba provesti daljnja ispitivanja.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Sjetimo se primjera 6.24 i funkcije $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$. Parcijalne derivacije te funkcije su

$$f_x = 4x - y, \quad f_y = 2y - x - 7,$$

a stacionarna točka je $(1, 4)$. Nadalje,

$$f_{xx} = 4, \quad f_{xy} = -1, \quad f_{yy} = 2,$$

pa je Hesseova determinanta

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

Specijalno je $H(1, 4) = 7 > 0$ i $f_{xx}(1, 4) = 4 > 0$ iz čega zaključujemo da funkcija f u točki $(1, 4)$ ima lokalni minimum.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Na temelju ovog testa ne možemo zaključiti odmah da funkcija f ima globalni minimum u točki $(1,4)$, nego samo da ima lokalni minimum. Za globalni minimum treba provesti daljnja ispitivanja koja smo proveli u primjeru 6.24.

Primjer 6.26.

Odredite ekstreme funkcije $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike u $\mathbb{R}^3$

Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parcijalne derivacije višeg reda

Diferencijabilnost funkcije

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Usmjerena derivacija

Teorem srednje vrijednosti

Derivacija implicitno zadane funkcije

Ekstremi funkcija dvije varijable

Uvjetni ekstremi

Na temelju ovog testa ne možemo zaključiti odmah da funkcija f ima globalni minimum u točki $(1, 4)$, nego samo da ima lokalni minimum. Za globalni minimum treba provesti daljnja ispitivanja koja smo proveli u primjeru 6.24.

Primjer 6.26.

Odredite ekstreme funkcije $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Rješenje.

Parcijalne derivacije funkcije f jednake su

$$f_x = 3x^2 - 3y, \qquad f_y = 3y^2 - 3x.$$

Izjednačimo li parcijalne derivacije s 0, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0 \\ 3y^2 - 3x &= 0. \end{aligned}$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Iz prve jednadžbe slijedi da je $y = x^2$ pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo

$$3x^4 - 3x = 0,$$

odnosno

$$x(x^3 - 1) = 0.$$

Realna rješenja zadnje jednadžbe su $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$. Iz $y = x^2$ slijedi $y_1 = 0$ i $y_2 = 1$. Dakle, funkcija f ima dvije stacionarne točke $T_1(0,0)$ i $T_2(1,1)$.

Parcijalne derivacije drugog reda od f su

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = -3, \quad f_{yy} = 6y$$

pa je Hesseova determinanta jednaka

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}.$$

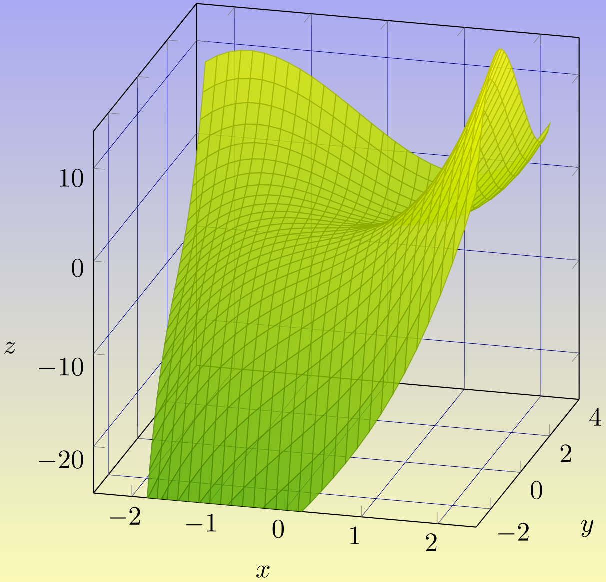
- Kako je $H(0,0) = -9 < 0$, zaključujemo da je $(0,0)$ sedlasta točka funkcije f.
- Kako je $H(1,1) = 27 > 0$ i $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$, zaključujemo da funkcija f u točki $(1,1)$ ima lokalni minimum koji je jednak $f(1,1) = -1$.

Primijetimo ovdje da funkcija f nema globalni minimum u točki $(1,1)$ jer je

$$\lim_{(x,y)\to(-\infty,-\infty)} \left(x^3 + y^3 - 3xy\right) = -\infty.$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Graf funkcije f



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.27.

Odredite ekstreme funkcije $f(x,y) = \frac{1}{2}\left(ax^2 + cy^2\right)$.

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike u $\mathbb{R}^3$

Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parcijalne derivacije višeg reda

Diferencijabilnost funkcije

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Usmjerena derivacija

Teorem srednje vrijednosti

Derivacija implicitno zadane funkcije

Ekstremi funkcija dvije varijable

Uvjetni ekstremi

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.27.

Odredite ekstreme funkcije $f(x,y) = \frac{1}{2}\left(ax^2 + cy^2\right)$.

Rješenje.

Parcijalne derivacije funkcije f jednake su $f_x = ax$ i $f_y = cy$. Izjednačimo li parcijalne derivacije s 0 i riješimo sustav, dobivamo samo jednu stacionarnu točku $(0,0)$.

Parcijalne derivacije drugog reda funkcije f jednake su

$$f_{xx} = a, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = c.$$

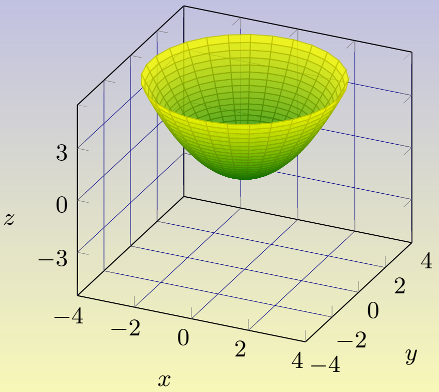
Hesseova determinanta od f je

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = ac.$$

Specijalno je $H(0,0) = ac$.

Razlikujemo sljedeće slučajeve:

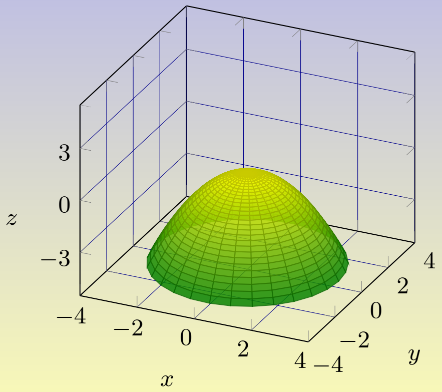
- $a > 0, c > 0$. U ovom slučaju f ima lokalni minimum u $(0,0)$ koji je ujedno i globalni minimum.



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Razlikujemo sljedeće slučajeve:

- $a < 0, c < 0$. U ovom slučaju f ima lokalni maksimum u $(0,0)$ koji je ujedno i globalni maksimum.



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike u $\mathbb{R}^3$

Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parcijalne derivacije višeg reda

Diferencijabilnost funkcije

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Usmjerena derivacija

Teorem srednje vrijednosti

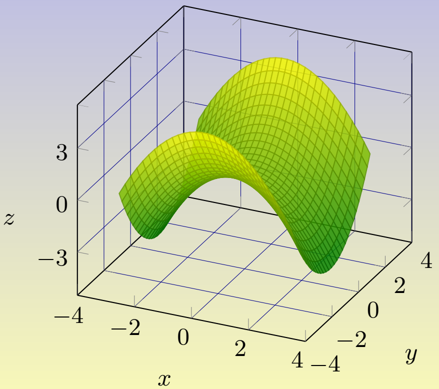
Derivacija implicitno zadane funkcije

Ekstremi funkcija dvije varijable

Uvjetni ekstremi

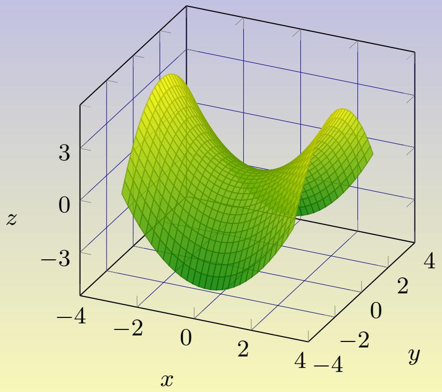
Razlikujemo sljedeće slučajeve:

- $a < 0, c > 0$. U ovom slučaju točka $(0, 0)$ je sedlasta točka funkcije f.



Razlikujemo sljedeće slučajeve:

- $a > 0, c < 0$. U ovom slučaju točka $(0,0)$ je sedlasta točka funkcije f.



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike u $\mathbb{R}^3$

Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parcijalne derivacije višeg reda

Diferencijabilnost funkcije

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Usmjerena derivacija

Teorem srednje vrijednosti

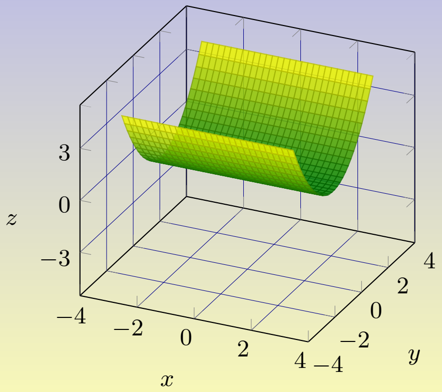
Derivacija implicitno zadane funkcije

Ekstremi funkcija dvije varijable

Uvjetni ekstremi

Razlikujemo sljedeće slučajeve:

- $a = 0, c > 0$. U ovom slučaju f ima lokalni minimum u $(0, 0)$ koji je ujedno i globalni minimum, ali nije strogi. U svim točkama $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, funkcija f ima globalne minimume koji nisu strogi.



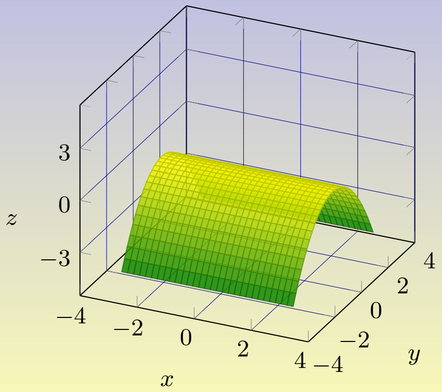
Odabrana poglavlja matematike

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Razlikujemo sljedeće slučajeve:

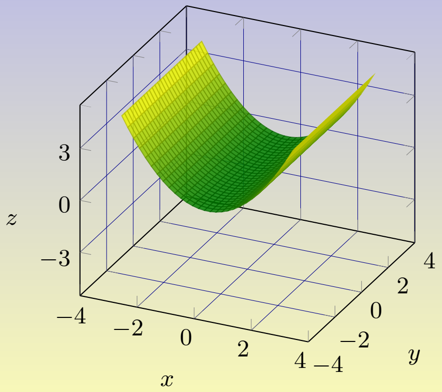
- $a = 0, c < 0$. U ovom slučaju f ima lokalni maksimum u $(0,0)$ koji je ujedno i globalni maksimum, ali nije strogi. U svim točkama $(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$, funkcija f ima globalne maksimume koji nisu strogi.



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Razlikujemo sljedeće slučajeve:

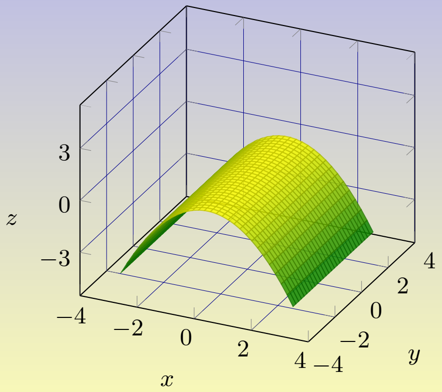
- $a > 0, c = 0$. U ovom slučaju f ima lokalni minimum u $(0,0)$ koji je ujedno i globalni minimum, ali nije strogi. U svim točkama $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$, funkcija f ima globalne minimume koji nisu strogi.



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Razlikujemo sljedeće slučajeve:

- $a < 0, c = 0$. U ovom slučaju f ima lokalni maksimum u $(0,0)$ koji je ujedno i globalni maksimum, ali nije strogi. U svim točkama $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$, funkcija f ima globalne maksimume koji nisu strogi.



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Uvjetni ekstremi

Pogledajmo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadanu s

$$f(x, y) = ax + by + c, \quad a^2 + b^2 \neq 0.$$

Graf te funkcije je ravnina i jasno je da ta funkcija nema ekstrema na $\mathbb{R}^2$. Naime, parcijalne derivacije te funkcije su

$$f_x = a, \quad f_y = b,$$

a kako je barem jedan od brojeva a i b različit od nule, ta funkcija nema stacionarnih točaka pa onda niti ekstrema.

No, u većini situacija nas ne zanimaju ekstremi funkcije na čitavoj njezinoj domeni nego na nekom podskupu, ili još specijalnije, ponekad treba naći ekstreme funkcije uz neki dodatni uvjet $g(x, y) = 0$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Na primjer, možemo tražiti ekstreme funkcije

$$f(x,y) = ax + by + c, \quad a^2 + b^2 \neq 0$$

uz uvjet

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

tj.

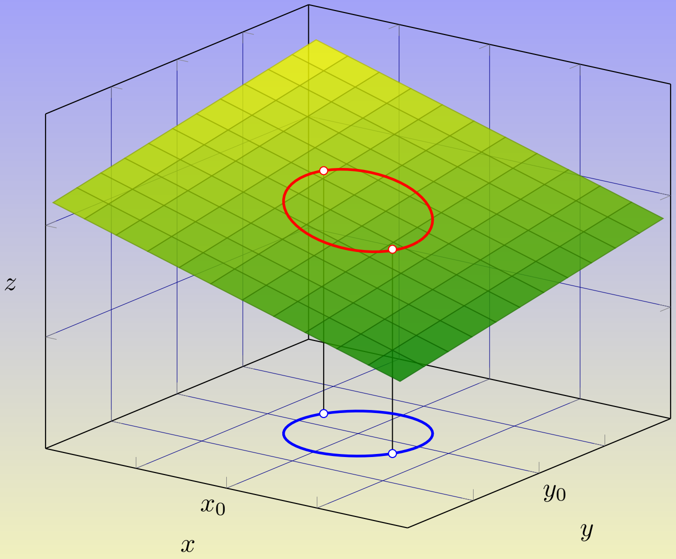
$$g(x,y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2.$$

Drugim riječima, pitamo se da li funkcija f na kružnici

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

postiže ekstreme i u kojim točkama. Naravno, pitanje je da li takve točke uopće postoje i kako ih pronaći ukoliko postoje. Gledajući sliku, uvjereni smo da takve točke postoje. Pitanje je kako da ih pronađemo.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike u $\mathbb{R}^3$

Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parcijalne derivacije višeg reda

Diferencijabilnost funkcije

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Usmjerena derivacija

Teorem srednje vrijednosti

Derivacija implicitno zadane funkcije

Ekstremi funkcija dvije varijable

Uvjetni ekstremi

Isto tako, možemo tražiti ekstreme funkcije

$$f(x,y)=ax+by+c, \quad a^2+b^2\neq 0$$

uz uvjet

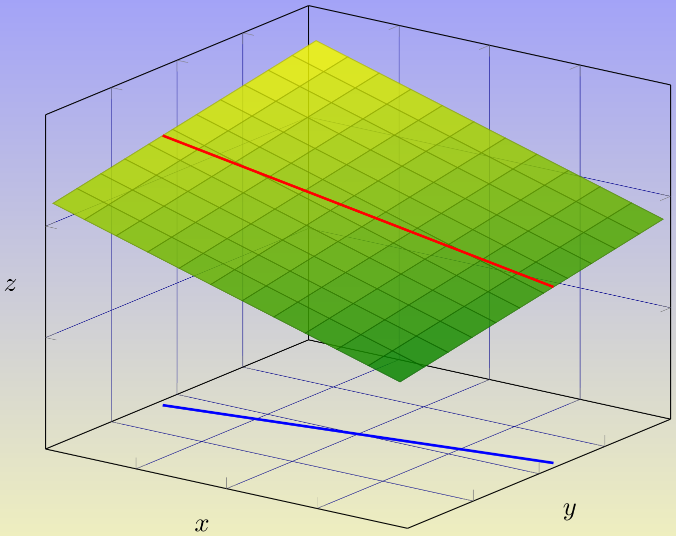
$$Ax+By+C=0,$$

tj. ekstreme funkcije f na pravcu $Ax+By+C=0$. Gledajući sliku vidimo da uz taj uvjet funkcija f nema ekstrema. Funkcija f na pravcu $Ax+By+C=0$ općenito ne postiže niti minimum, niti maksimum (osim možda za neki specijalni pravac).

Zadatak 6.3.

Opišite riječima na kojim pravcima $Ax+By+C=0$ *funkcija* $f(x,y)=ax+by+c$ *postiže ekstreme pri čemu je* $a^2+b^2\neq 0$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Teorem 6.7 (O ekstremima neprekidne funkcije na kompaktnom skupu).

Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompaktan skup, a $f : K \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada f poprima globalni minimum i globalni maksimum na skupu K.

Iz gornjeg teorema slijedi da funkcija

$$f(x, y) = ax + by + c$$

poprima minimum i maksimum na kružnici

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

jer je kružnica kompaktan skup u $\mathbb{R}^2$ i f je neprekidna funkcija.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Opišimo sada kako se traže ekstremi funkcije

$$z = f(x, y)$$

uz uvjet

$$g(x, y) = 0.$$

Prva ideja koja se nameće jest da iz uvjeta $g(x, y) = 0$ izrazimo jednu od varijabli x i y pomoću preostale, npr. $y = \varphi(x)$ pa onda tražimo ekstreme funkcije jedne varijable $z(x) = f\big(x, \varphi(x)\big)$. U većini situacija uvjet može biti kompliciran pa to nije moguće napraviti. Stoga nam preostaje da se uvjetom služimo u obliku u kojem je zadan.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Uz pretpostavku da su funkcije f i g diferencijabilne imamo

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

$$0 = \frac{\partial g}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

Iz druge jednakosti uz uvjet $\frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$ slijedi

$$\mathrm{d}y = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}\,\mathrm{d}x.$$

Uvrstimo li to u prvu jednakost, dobivamo

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}\right)\mathrm{d}x.$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Kako u stacionarnoj točki mora biti $\mathrm{d}f = 0$, slijedi

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = 0,$$

odnosno

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 0.$$

Posljednju jednakost možemo zapisati u obliku determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Zaključujemo da je prvi redak proporcionalan s drugim, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y},$$

odnosno

$$\nabla f = \lambda \nabla g.$$

Dakle, dokazali smo da uz uvjet $\nabla g(P_0) \neq (0,0)$ u stacionarnoj točki P_0 mora vrijediti

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0).$$

Ovo pokazuje da se traženje ekstrema funkcije $z = f(x,y)$ uz uvjet $g(x,y) = 0$ može svesti na traženje ekstrema funkcije

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y)$$

koju zovemo Lagrangeova funkcija, a faktor λ zovemo Lagrangeov multiplikator.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Zaista, deriviramo li funkciju L po varijablama x i y dobivamo

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}$$

Izjednačimo li parcijalne derivacije s 0, vidimo da je to ekvivalentno s uvjetom $\nabla f = \lambda \nabla g$. Deriviramo li još funkciju L po varijabli λ dobivamo

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y),$$

što nakon izjednačavanja s nulom daje početni uvjet $g(x, y) = 0$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Primjer 6.28.

Nađite točke na krivulji $xy = 1$ *koje su najbliže ishodištu.*

Primjer 6.28.

Nađite točke na krivulji $xy = 1$ koje su najbliže ishodištu.

Rješenje.

Udaljenost dviju točaka A i B u ravnini računa se po formuli

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Specijalno, udaljenost točke $T(x, y)$ od ishodišta je jednaka

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Stoga definiramo funkciju

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

i tražimo njezine ekstreme uz uvjet $xy = 1$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Kod definiranja funkcije f izostavili smo korijen da olakšamo deriviranje, a korijen postiže ekstreme u istim točkama u kojima ih postiže izraz pod korijenom. Sada definiramo Lagrangeovu funkciju

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 1).$$

Njezine parcijalne derivacije su

$$\begin{aligned} L_x &= 2x + \lambda y \\ L_y &= 2y + \lambda x\,. \\ L_\lambda &= xy - 1 \end{aligned}$$

Izjednačimo li te parcijalne derivacije s 0, dobivamo sustav

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

$$2x + \lambda y = 0$$
$$2y + \lambda x = 0\,.$$
$$xy - 1 = 0$$

Iz prvih dviju jednadžbi dobivamo

$$\lambda = -\frac{2x}{y}, \quad \lambda = -\frac{2y}{x}$$

odnosno

$$x^2 = y^2. \qquad (*)$$

Iz treće jednadžbe slijedi $y = \frac{1}{x}$ pa uvrštavanjem u $(*)$ dobivamo

$$x^4 = 1.$$

Stoga su rješenja početnog sustava

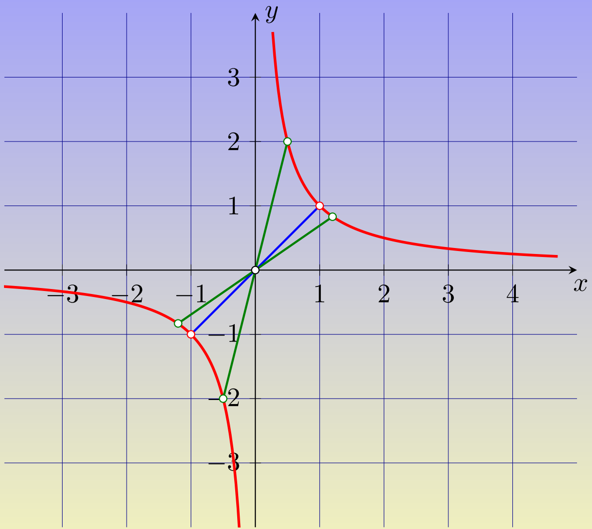
$$(x_1, y_1, \lambda_1) = (1, 1, -2), \quad (x_2, y_2, \lambda_2) = (-1, -1, -2).$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Dakle, imamo dvije stacionarne točke $(1,1)$ i $(-1,-1)$ od funkcije f uz uvjet $xy = 1$. Pitanje je ima li u tim točkama funkcija zaista ekstreme. Sada bismo trebali napraviti dodatna ispitivanja. Međutim iz prirode problema jasno je da minimum postoji, a maksimuma nema.

Kako je $f(1,1) = f(-1,-1) = 2$, postoje dvije točke $(1,1)$ i $(-1,-1)$ na hiperboli $xy = 1$ koje su najbliže ishodištu i od njega su udaljene za $\sqrt{2}$. Sjetimo se, funkcija f daje kvadrat udaljenosti točke (x,y) od ishodišta.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi



Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike u $\mathbb{R}^3$

Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parcijalne derivacije višeg reda

Diferencijabilnost funkcije

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Usmjerena derivacija

Teorem srednje vrijednosti

Derivacija implicitno zadane funkcije

Ekstremi funkcija dvije varijable

Uvjetni ekstremi

Kako hiperbola $xy = 1$ nije kompaktan skup u ravnini, ne možemo se pozvati na teorem o ekstremima neprekidne funkcije na kompaktnom skupu. Svoje tvrdnje u ovom slučaju temeljili smo na geometrijskom zoru koji ne mora uvijek biti toliko očit.

Stoga ćemo sada navesti i dovoljne uvjete za postojanje lokalnih ekstrema funkcije $z = f(x, y)$ uz uvjet $g(x, y) = 0$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

- Najprije formiramo Lagrangeovu funkciju

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

i pronađemo njezine parcijalne derivacije L_x, L_y, L_λ.

- Nakon toga rješavamo sustav

$$\begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

Rješenja tog sustava zovemo stacionarnim točkama, a te točke su upravo kandidati za lokalne uvjetne ekstreme.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

- Pronađemo parcijalne derivacije L_{xx}, L_{xy}, L_{yy}, g_x, g_y i formiramo determinantu

$$\Delta(x,y,\lambda) = -\begin{vmatrix} 0 & g_x(x,y) & g_y(x,y) \\ g_x(x,y) & L_{xx}(x,y,\lambda) & L_{xy}(x,y,\lambda) \\ g_y(x,y) & L_{xy}(x,y,\lambda) & L_{yy}(x,y,\lambda) \end{vmatrix}.$$

- Neka je (x_0, y_0, λ_0) stacionarna točka.
    - Ako je $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$, tada funkcija f u točki (x_0, y_0) ima lokalni uvjetni minimum.
    - Ako je $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$, tada funkcija f u točki (x_0, y_0) ima lokalni uvjetni maksimum.
    - Ako je $\Delta(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, tada ovaj postupak ne daje odgovor.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

U našem primjeru je

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(xy-1), \quad g(x,y) = xy - 1.$$

Stoga je

$$L_{xx} = 2, \quad L_{xy} = \lambda, \quad L_{yy} = 2, \quad g_x = y, \quad g_y = x$$

pa dobivamo

$$\Delta(x,y,\lambda) = -\begin{vmatrix} 0 & y & x \\ y & 2 & \lambda \\ x & \lambda & 2 \end{vmatrix}.$$

Sada odredimo vrijednosti od Δ u stacionarnim točkama $(1,1,-2)$ i $(-1,-1,-2)$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

$$\Delta(1,1,-2) = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -(-8) = 8 > 0$$

$$\Delta(-1,-1,-2) = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -(-8) = 8 > 0$$

Zaključujemo da funkcija $f(x, y) = x^2 + y^2$ poprima lokalne minimume uz uvjet $xy = 1$. Ovaj test ne garantira da su ekstremi ujedno i globalni. Ukoliko želimo ispitati jesu li ekstremi ujedno i globalni, treba provesti daljnja ispitivanja. U ovom slučaju nam pomaže geometrijski zor koji "garantira" da se radi o globalnim uvjetnim minimumima.

Funkcije više varijabli

Osnovne definicije

Nivo-linije

Kvadrike u $\mathbb{R}^3$

Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini

Limes funkcije

Parcijalne derivacije

Parcijalne derivacije višeg reda

Diferencijabilnost funkcije

Parcijalno deriviranje složenih funkcija

Usmjerena derivacija

Teorem srednje vrijednosti

Derivacija implicitno zadane funkcije

Ekstremi funkcija dvije varijable

Uvjetni ekstremi

Spomenimo sada kako se u općenitom slučaju traže ekstremi kada je zadano više uvjeta. Neka je zadana realna funkcija n varijabli

$$z = f(x_1, \ldots, x_n)$$

i neka je zadano m uvjeta $(m < n)$

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Tada je traženje ekstrema funkcije f uz zadane uvjete ekvivalentno s traženjem ekstrema Lagrangeove funkcije

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

pri čemu su $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

Primjer 6.29.

Odredite udaljenost točke $T_1(x_1, y_1, z_1)$ od ravnine

$$\pi \dots Ax + By + Cz + D = 0.$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Rješenje.

Po definiciji je udaljenost točke T_1 od ravnine π jednaka

$$d(T_1, \pi) = \inf_{T \in \pi} d(T_1, T).$$

Geometrijski je jasno da se minimum dostiže za onu točku $T \in \pi$ za koju je $TT_1 \perp \pi$. S druge strane je

$$d^2(T, T_1) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$$

pa definiramo funkciju

$$f(x, y, z) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Tražimo ekstreme (tj. minimum) funkcije f uz uvjet

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

U tu svrhu definiramo Lagrangeovu funkciju

$$L(x,y,z,\lambda) = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 + \lambda(Ax+By+Cz+D).$$

Parcijalne derivacije te funkcije su

$$\begin{aligned} L_x &= 2(x-x_1) + A\lambda \\ L_y &= 2(y-y_1) + B\lambda \\ L_z &= 2(z-z_1) + C\lambda \\ L_\lambda &= Ax + By + Cz + D. \end{aligned}$$

Izjednačimo li derivacije s 0, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 2(x-x_1) + A\lambda &= 0 \\ 2(y-y_1) + B\lambda &= 0 \\ 2(z-z_1) + C\lambda &= 0 \\ Ax + By + Cz + D &= 0. \end{aligned}$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Iz prve tri jednadžbe slijedi da je

$$
\begin{aligned}
x &= -\frac{A\lambda}{2} + x_1 \\
y &= -\frac{B\lambda}{2} + y_1, \\
z &= -\frac{C\lambda}{2} + z_1
\end{aligned}
\qquad (\clubsuit)
$$

Uvrstimo to u četvrtu jednadžbu pa dobivamo

$$\lambda = 2 \cdot \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2}. \qquad (\spadesuit)$$

Sada iz ($\clubsuit$) i ($\spadesuit$) slijedi da je

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

$$x - x_1 = -A \cdot \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$y - y_1 = -B \cdot \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$z - z_1 = -C \cdot \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Uvrstimo li to u

$$d^2(T, T_1) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

dobivamo

$$d^2(T, T_1) = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} \cdot (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)^2,$$

odnosno

$$d^2(T,T_1) = \frac{(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Korjenovanjem konačno dobivamo poznatu formulu za udaljenost točke od ravnine.

$$d(T,T_1) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Pogledajmo još jedan primjer traženja ekstrema na kompaktnom skupu s nepraznim interiorom.

Primjer 6.30.

Odredite ekstreme funkcije $f(x,y) = 10 - x - y$ *na skupu*

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

Funkcije više varijabli
- Osnovne definicije
- Nivo-linije
- Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
- Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
- Limes funkcije
- Parcijalne derivacije
- Parcijalne derivacije višeg reda
- Diferencijabilnost funkcije
- Parcijalno deriviranje složenih funkcija
- Usmjerena derivacija
- Teorem srednje vrijednosti
- Derivacija implicitno zadane funkcije
- Ekstremi funkcija dvije varijable
- Uvjetni ekstremi

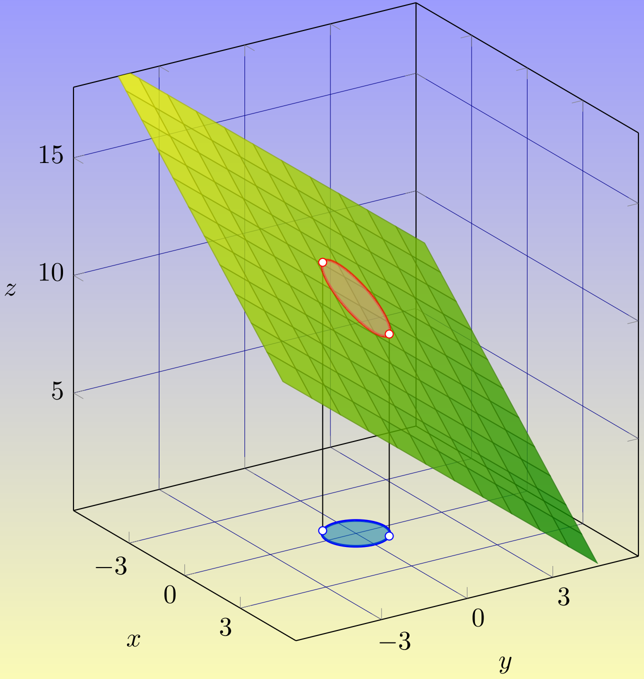
Rješenje.

Tražimo ekstreme funkcije f na krugu polumjera 1 sa središtem u ishodištu. Parcijalne derivacije funkcije f su

$$f_x = -1, \quad f_y = -1.$$

Vidimo da nema stacionarnih točaka pa funkcija f ne postiže ekstreme u interioru skupa S. Kako je S kompaktan skup i f neprekidna funkcija, onda ona mora postizati globalni minimum i globalni maksimum na skupu S. Kako se taj minimum i maksimum ne postižu u unutrašnjosti skupa S, onda se oni postižu na njegovom rubu, tj. na kružnici $x^2 + y^2 = 1$. Stoga trebamo dalje tražiti ekstreme funkcije f uz uvjet $x^2 + y^2 = 1$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi



Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Definiramo Lagrangeovu funkciju

$$L(x, y, \lambda) = 10 - x - y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Parcijalne derivacije te funkcije su

$$\begin{aligned} L_x &= -1 + 2\lambda x \\ L_y &= -1 + 2\lambda y. \\ L_\lambda &= x^2 + y^2 - 1 \end{aligned}$$

Izjednačimo li derivacije s 0, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} -1 + 2\lambda x &= 0 \\ -1 + 2\lambda y &= 0. \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Iz prvih dviju jednadžbi dobivamo

$$x = \frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{2\lambda}. \qquad (*)$$

Uvrstimo li $(*)$ u treću jednadžbu, dobivamo

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (\blacklozenge)$$

Konačno, uvrštavanjem $(\blacklozenge)$ u $(*)$ dobivamo dvije stacionarne točke

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Kako je S kompaktan skup, u jednoj od njih f poprima globalni minimum, a u drugoj globalni maksimum na skupu S.

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 10 - \sqrt{2}, \quad f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = 10 + \sqrt{2}$$

- U točki $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ funkcija f poprima globalni minimum na skupu S koji iznosi $10 - \sqrt{2}$.
- U točki $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ funkcija f poprima globalni maksimum na skupu S koji iznosi $10 + \sqrt{2}$.

Funkcije više varijabli
Osnovne definicije
Nivo-linije
Kvadrike u $\mathbb{R}^3$
Otvoreni i zatvoreni skupovi u ravnini
Limes funkcije
Parcijalne derivacije
Parcijalne derivacije višeg reda
Diferencijabilnost funkcije
Parcijalno deriviranje složenih funkcija
Usmjerena derivacija
Teorem srednje vrijednosti
Derivacija implicitno zadane funkcije
Ekstremi funkcija dvije varijable
Uvjetni ekstremi

Dio VII

Plohe u prostoru

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Sadržaj

- Plohe u prostoru
  - Zadavanje plohe
  - Sfera i elipsoid
  - Torus
  - Rotacijske plohe
  - Pravčaste plohe
  - Tangencijalna ravnina i normala plohe

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Zadavanje plohe

Najjednostavnija ploha u prostoru je **ravnina**. Upoznali smo razne oblike jednadžbe ravnine i to:

- Opći ili implicitni oblik jednadžbe ravnine

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

  gdje su $A, B, C, D \in \mathbb{R}, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

- Eksplicitni oblik jednadžbe ravnine kojeg možemo dobiti iz općeg oblika uz uvjet da je $C \neq 0$

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}$$

- Vektorski oblik jednadžbe ravnine

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b},$$

gdje je $\vec{r}_0$ radijvektor točke kojom ravnina prolazi, a razapeta je vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

- Parametarski oblik jednadžbe ravnine kojeg dobijemo iz vektorskog oblika jednadžbe ravnine

$$x = x_0 + a_x u + b_x v$$
$$y = y_0 + a_y u + b_y v$$
$$z = z_0 + a_z u + b_z v$$

gdje su

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0),\ \vec{a} = (a_x, a_y, a_z),\ \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

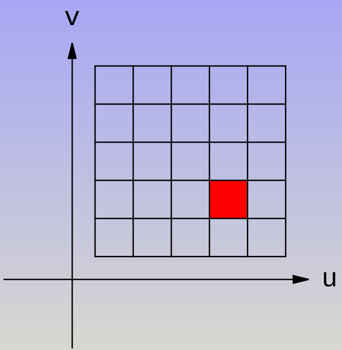
Važno je uočiti kod parametarskog oblika da su parametri u i v proizvoljni realni brojevi i da za svaki izbor $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ dobijemo neku točku promatrane ravnine u prostoru. Mijenjajući parametre u i v dobijemo sve točke promatrane ravnine i samo te točke. Stoga na parametarski oblik jednadžbe ravnine možemo gledati kao na preslikavanje

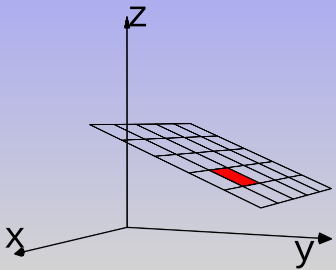
$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

koje svakoj točki $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ pridružuje točku $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, gdje je

$$x = x_0 + a_x u + b_x v$$
$$y = y_0 + a_y u + b_y v$$
$$z = z_0 + a_z u + b_z v$$

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina





$$x(u,v) = x_0 + a_x u + b_x v$$
$$y(u,v) = y_0 + a_y u + b_y v$$
$$z(u,v) = z_0 + a_z u + b_z v$$

Plohu $\mathcal{P}$ u prostoru možemo zadati na tri različita načina:

- Implicitni oblik jednadžbe plohe

$$\mathcal{P} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\right\}$$

- Eksplicitni oblik jednadžbe plohe

$$\mathcal{P} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\right\}$$

- Parametarski oblik jednadžbe plohe

$$\mathcal{P} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)\right\}$$

Daljnje je pitanje uvjeta koje moraju zadovoljavati pojedini oblici jednadžbe plohe kako bismo ih mogli korisno upotrijebiti pri proučavanju ploha.

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Ako je ploha zadana implicitno jednadžbom

$$F(x, y, z) = 0,$$

tada tražimo da je funkcija F diferencijabilna, tj. postoji diferencijal

$$\mathrm{d}F = F_x \, \mathrm{d}x + F_y \, \mathrm{d}y + F_z \, \mathrm{d}z,$$

pri čemu je još u promatranoj točki barem jedna od parcijalnih derivacija F_x, F_y, F_z različita od nule.

Kao što ćemo vidjeti kasnije, vektor $\big(F_x, F_y, F_z\big)$ je normala tangencijalne ravnine na plohu zadanu implicitno jednadžbom $F(x, y, z) = 0$, pa nam gornji uvjeti osiguravaju da ploha u svakoj svojoj točki ima tangencijalnu ravninu, odnosno da normala ne degenerira u nulvektor.

Ako je ploha zadana eksplicitno jednadžbom

$$z = f(x, y),$$

tada tražimo da je f diferencijabilna funkcija, tj. postoji diferencijal

$$\mathrm{d}z = f_x \,\mathrm{d}x + f_y \,\mathrm{d}y.$$

Kasnije ćemo vidjeti da je vektor $(f_x, f_y, -1)$ normala tangencijalne ravnine na plohu zadanu eksplicitno jednadžbom $z = f(x, y)$, pa nam gornji uvjet osigurava da u svakoj točki ploha ima tangencijalnu ravninu.

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Ako je ploha zadana parametarski jednadžbama

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v),$$

tada tražimo da su preslikavanja x, y, z diferencijabilna i da je rang matrice

$$\begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix}$$

jednak 2. Točke u kojima je taj uvjet ispunjen zovemo **regularne točke**.

Radi se o tome da je preslikavanje

$$(u,v) \mapsto (x,y,z)$$

zadano vektorskom jednadžbom

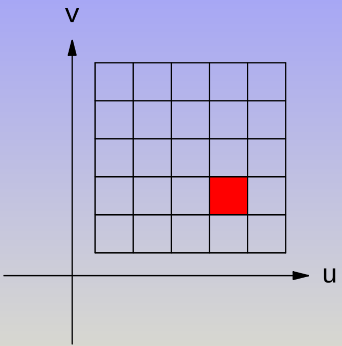
$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

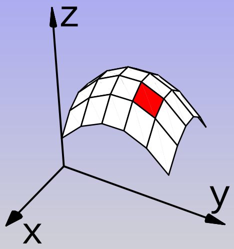
diferencijabilno i obostrano jednoznačno (tj. ploha ne presijeca samu sebe). S druge strane, regularnost nam osigurava da su vektori $\mathbf{r}_u$ i $\mathbf{r}_v$ linearno nezavisni, što je važno jer ćemo vidjeti kasnije da je vektor

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$$

normala tangencijalne ravnine na plohu zadanu parametarski.

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina





$$x = x(u, v)$$
$$y = y(u, v)$$
$$z = z(u, v)$$

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Neka je M ploha zadana parametarskim jednadžbama

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v),$$

odnosno

$$r(u,v) = \Big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\Big)$$

pri čemu je

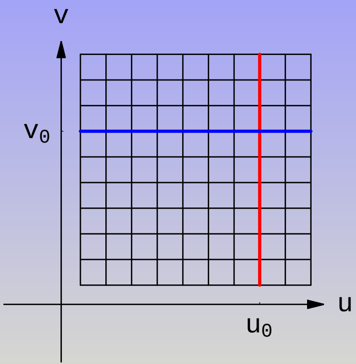
$$r : D \to \mathbb{R}^3, \quad D = I \times J \subseteq \mathbb{R}^2,$$

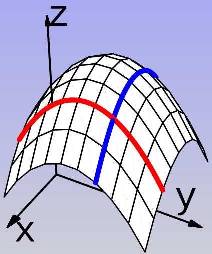
gdje su I i J otvoreni intervali.

Uočimo točku $(u_0, v_0) \in D$. Restrikcija od r na $I \times \{v_0\}$ je očito krivulja $r(u, v_0) : I \to \mathbb{R}^3$. Ta se krivulja zove parametarska u-crta ili u-krivulja. Njezin graf se nalazi na plohi M i prolazi točkom T_0.

Isto tako, restrikcija od r na $\{u_0\} \times J$ je krivulja $r(u_0, v) : J \to \mathbb{R}^3$ čiji graf je također na plohi M i prolazi točkom T_0, a zove se parametarska v-crta ili v-krivulja. Skup svih parametarskih u-crta

i v-crta tvori jednu mrežu krivulja koju zovemo parametarska mreža plohe M.





Plava krivulja na plohi je u-krivulja, a crvena krivulja na plohi je v-krivulja.

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

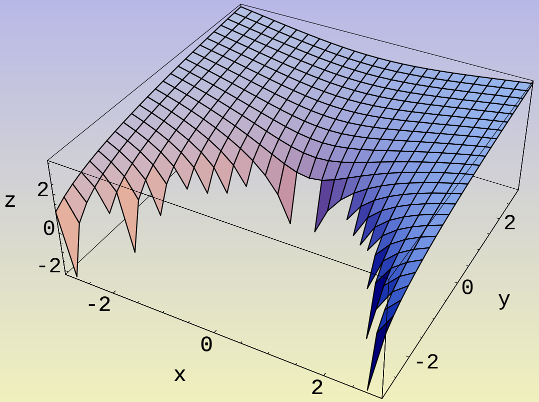
Parametarski oblik jednadžbe plohe je najvažniji od ova tri oblika. S druge strane, ploha može općenito imati više različitih parametrizacija, što može biti korisno u primjenama, pogotovo kod crtanja plohe na računalu. Pogledajmo jedan primjer iz kojeg ćemo vidjeti važnost pogodnog odabira parametrizacije plohe.

Pretpostavimo da želimo na računalu, npr. pomoću programskog paketa Mathematica, nacrtati plohu zadanu eksplicitno jednadžbom $z = \ln(2x^2 + 5y)$. Mathematica ima naredbu Plot3D koja crta plohu zadanu eksplicitno na nekom pravokutniku. Napišemo li

$$\mathrm{Plot3D}[\mathrm{Log}[2\mathrm{x}^2 + 5\mathrm{y}], \{\mathrm{x}, -3, 3\}, \{\mathrm{y}, -3, 3\}]$$

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

time smo Mathematici rekli da neka nacrta graf zadane funkcije birajući varijable x i y između -3 i 3. Nakon nekoliko javljenih grešaka Mathematica će dati ovakvu sliku



Ne bismo trebali biti previše zadovoljni takvom slikom. Kao prvo, zašto su takve "špice" na pojedinim dijelovima kad je zadana funkcija dovoljno "lijepa" da se to ne bi smjelo dogoditi, i s druge stane, zašto nam je Mathematica u toku crtanja grafa javila neke greške.

Navedeni problemi se javljaju zbog domene funkcije

$$z = \ln(2x^2 + 5y).$$

Odredimo domenu te funkcije. Zbog logaritma mora biti

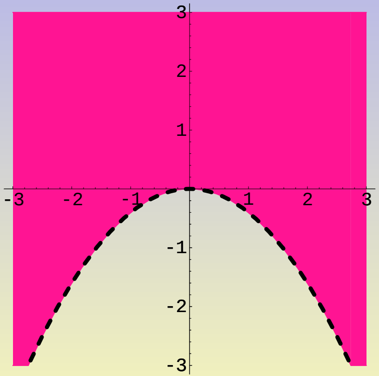
$$2x^2 + 5y > 0,$$

odnosno

$$y > -\frac{2}{5}x^2.$$

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Dakle, u domeni zadane funkcije se nalaze sve točke ravnine koje su izvan parabole $y = -\frac{2}{5}x^2$. Taj skup u ravnini izgleda ovako



Mi smo zapravo Mathematici rekli da nam nacrta graf te funkcije na kvadratu čiji su vrhovi u točkama

$$(-3,-3), \quad (3,-3), \quad (3,3), \quad (-3,3).$$

No, taj kvadrat nije čitav sadržan u domeni te funkcije i to je razlog zašto nam je Mathematica javljala greške i na kraju dala "ružan" graf.

Kako ipak nacrtati tu plohu na zadanom kvadratu, tj. kako prisiliti Mathematicu da izbjegava točke koje su istovremeno unutar zadanog kvadrata i unutar parabole $y = -\frac{2}{5}x^2$?

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Stvar je u tome da jednadžbu plohe napišemo u parametarskom obliku, a Mathematica nam nudi naredbu ParametricPlot3D za crtanje plohe koja je zadana u parametarskom obliku. Međutim, nije baš svejedno koju parametrizaciju odaberemo. Ako bismo varijable x i y uzeli za parametre, tj. ako stavimo

$$x = u, \quad y = v$$

dobivamo parametrizaciju

$$r_1(u, v) = \big(u, v, \ln\left(2u^2 + 5v\right)\big).$$

prof.dr.sc. Blaženka Divjak

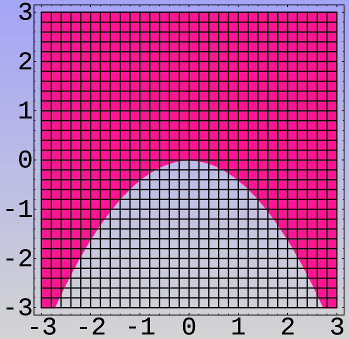
Napišemo li sada u Mathematici

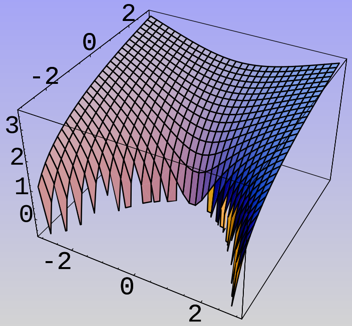
$$\mathrm{ParametricPlot3D}[\{\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{Log}[2\mathrm{u}^2 + 5\mathrm{v}]\}, \{\mathrm{u}, -3, 3\}, \{\mathrm{v}, -3, 3\}]$$

rezultat će biti isti kao i prije. Mathematica će opet javljati greške i dati "ružan" graf. Zašto? Naime, ovom parametrizacijom nismo ništa promijenili "šetnju" po domeni. Kada je jedan od parametara u i v fiksan, a drugi se mijenja, mi se tada po domeni šećemo paralelno s jednom od koordinatnih osi, što opet nije dobro jer ako su $u, v \in [-3, 3]$, opet ćemo ući unutar parabole $y = -\frac{2}{5}x^2$.

Drugim riječima, u-crte i v-crte u uv-ravnini su pravci paralelni s koordinatnim osima.

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina





$$r_1(u,v) = \left(u, v, \ln\left(2u^2 + 5v\right)\right)$$

$$u, v \in [-3, 3]$$

Pitanje je koju parametrizaciju uzeti. Trebalo bi uzeti onu parametrizaciju takvu da dok je jedan od parametara u i v fiksan, a drugi se mijenja, da se tada šećemo po paraboli "paralelnoj" sa parabolom $y = -\frac{2}{5}x^2$, tj. po paraboli $y = -\frac{2}{5}x^2 + c$, gdje je $c \in \langle 0, \infty \rangle$.

U tu svrhu stavimo da je

$$x = u, \quad y = -\frac{2}{5}u^2 + v,$$

pa dobivamo parametrizaciju

$$r_2(u, v) = \left(u, -\frac{2}{5}u^2 + v, \ln 5v\right).$$

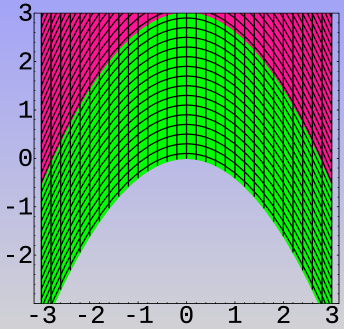
Što smo dobili ovom parametrizacijom?

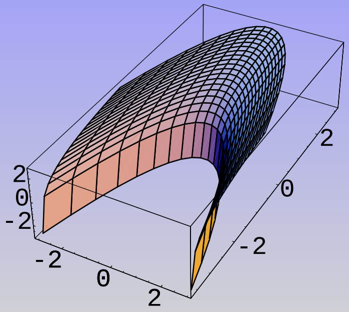
Mijenjajući parametar v dobivamo parabole "paralelne" s parabolom $y = -\frac{2}{5}x^2$, tj. kada je $v = v_0$ fiksan, a u se mijenja, mi se šećemo po paraboli $y = -\frac{2}{5}x^2 + v_0$, što smo i htjeli. Kada je $u = u_0$ fiksan, tada se šećemo po pravcu paralelnom s y-osi, tj. preciznije, po polupravcu paralelnom s y-osi koji ima početak na paraboli $y = -\frac{2}{5}x^2$ i nalazi se izvan nje. Stoga, ako je $u \in \mathbb{R}$, $v \in \langle 0, \infty \rangle$, nikad nećemo izaći izvan promatranog skupa.

Dakle, ovo je tražena parametrizacija koja će nam dati "lijepi" graf. Napišemo li sada u Mathematici

$$\mathrm{ParametricPlot3D}[\{\mathrm{u}, -\tfrac{2}{5}\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}, \ln[5\mathrm{v}]\}, \{\mathrm{u}, -3, 3\}, \{\mathrm{v}, 0.01, 3\}]$$

dobivamo



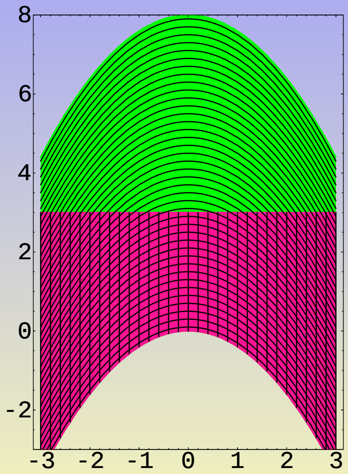


$$r_2(u,v) = \left(u, -\frac{2}{5}u^2 + v, \ln 5v\right)$$

$$u \in [-3,3], \quad v \in [0.01,3]$$

Na taj način je nacrtan graf samo za točke u zelenom dijelu domene.

Kako nacrtati graf na preostalom dijelu kvadrata koji jest u domeni zadane funkcije. Trik je u tome da se uzme veći interval za parametar v, npr. $v \in [0.01, 8]$. Na taj način ćemo dodatnim parabolama popuniti preostali dio kvadrata, ali ćemo pokupiti i točke izvan tog kvadrata (koje jesu u domeni, ali mi ne želimo na tom dijelu crtati plohu).


8
6
4
2
0
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3

Mathematica nam nudi opciju PlotRange kojom određujemo koje će točke na grafu biti prikazane, a koje ne. Na primjer, kada napišemo

PlotRange –> {{-3,3},{-3,3},{-4,4}}

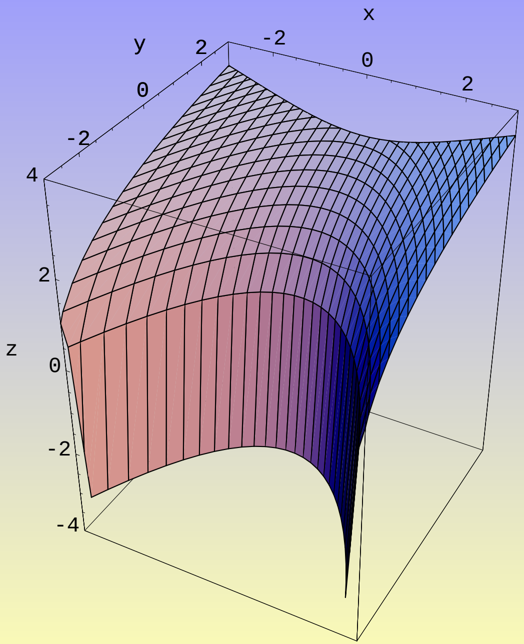
Mathematica će prikazati samo onaj dio grafa koji se nalazi unutar kocke koja sadrži točke (x, y, z) za čije koordinate vrijedi

$$x \in [-3, 3], \quad y \in [-3, 3], \quad z \in [-4, 4].$$

Dakle, napišemo li

$$\mathrm{ParametricPlot3D}[\{\mathrm{u}, -\tfrac{2}{5}\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}, \ln[5\mathrm{v}]\}, \{\mathrm{u}, -3, 3\}, \{\mathrm{v}, 0.01, 8\},$$
$$\mathrm{PlotRange}{-}{>}\ \{\{-3, 3\}, \{-3, 3\}, \{-4, 4\}\}]$$

dobit ćemo graf na željenom području.


x
y
z
-2
0
2
2
0
-2
4
2
0
-2
-4

Sfera i elipsoid

Implicitna jednadžba sfere polumjera R s centrom u ishodištu glasi

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad (*)$$

a s centrom u točki (x_0, y_0, z_0)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

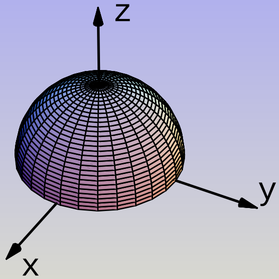
Napišemo li eksplicitni oblik od $(*)$, dobivamo

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

pri čemu ako uzmemo predznak "$+$" dobivamo gornju polusferu, a za predznak "$-$" donju polusferu.

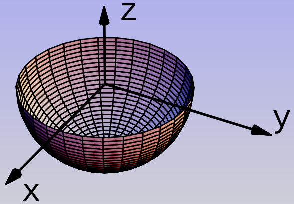
Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina



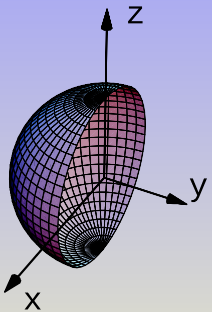
gornja polusfera

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$



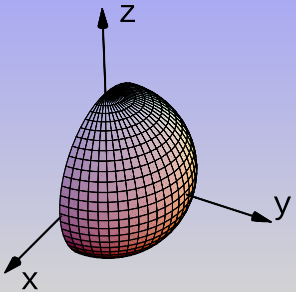
donja polusfera

$$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$



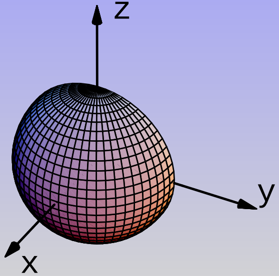
lijeva polusfera

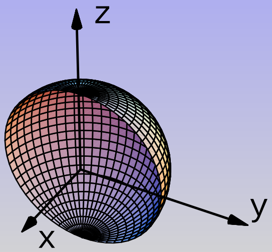
$$y = -\sqrt{R^2 - x^2 - z^2}$$



desna polusfera

$$y = \sqrt{R^2 - x^2 - z^2}$$



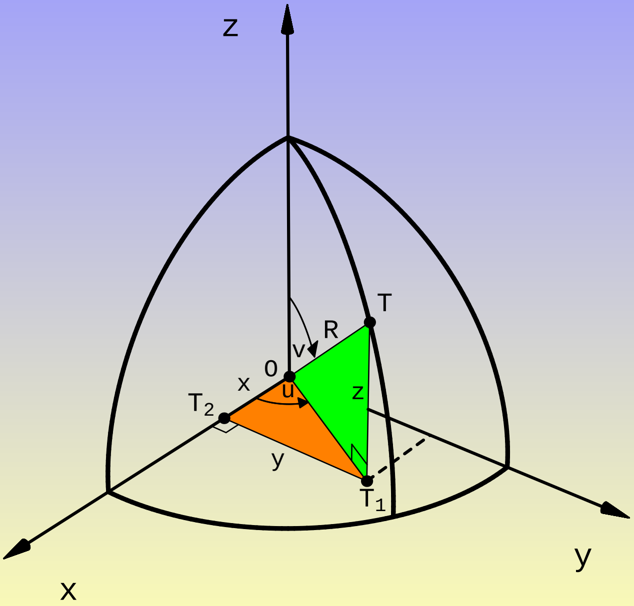


prednja polusfera

$$x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$$

stražnja polusfera

$$x = -\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$$


z
T
R
v
0
x
u
z
T_2
y
T_1
x
y

Izvedimo sada parametarske jednadžbe sfere

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Neka je $T(x, y, z)$ točka na zadanoj sferi. Neka je $T_1(x, y, 0)$ ortogonalna projekcija točke T na xy-ravninu. Tada su trokuti OT_1T i OT_2T_1 pravokutni (vidi sliku).

Iz trokuta OT_1T slijedi

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \frac{|T_1T|}{|OT|} = \frac{z}{R},$$

odnosno

$$z = R\cos v.$$

Iz trokuta OT_2T_1 slijedi

$$\cos u = \frac{|OT_2|}{|OT_1|} = \frac{x}{|OT_1|}, \quad \sin u = \frac{|T_2T_1|}{|OT_1|} = \frac{y}{|OT_1|}. \qquad (\blacklozenge)$$

Iz trokuta OT_1T dobivamo da je

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \frac{|OT_1|}{|OT|} = \frac{|OT_1|}{R},$$

odnosno

$$|OT_1| = R\sin v. \qquad (\lozenge)$$

Uvrstimo li $(\lozenge)$ u $(\blacklozenge)$ dobivamo

$$x = R\sin v\cos u, \quad y = R\sin v\sin u.$$

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Dakle, parametarske jednadžbe sfere su

$$x = R\cos u \sin v$$
$$y = R\sin u \sin v$$
$$z = R\cos v$$

ili u vektorskom obliku

$$r(u,v) = \big(R\cos u \sin v, R\sin u \sin v, R\cos v\big),$$

gdje je

$$u \in [0, 2\pi], \quad v \in \left[\tfrac{-\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right].$$

Ova parametrizacija se još zove i geografska parametrizacija sfere jer su ovdje u-crte paralele, a v-crte su meridijani.

Uređenu trojku (R, u, v) zovemo sferne koordinate točke u prostoru.

Implicitna jednadžba elipsoida sa središtem u ishodištu čije su poluosi a, b i c glasi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Gledajući parametarske jednadžbe sfere lako možemo zaključiti i provjeriti da su parametarske jednadžbe elipsoida

$$\begin{aligned} x &= a \cos u \sin v \\ y &= b \sin u \sin v \\ z &= c \cos v \end{aligned}$$

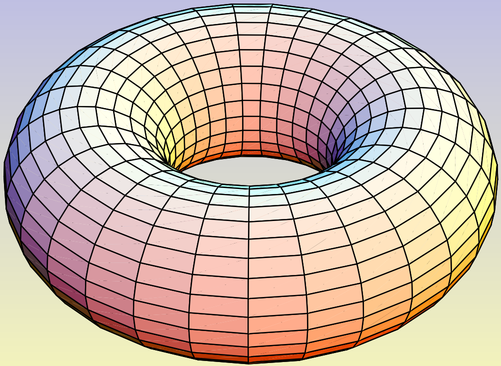
Zadatak 7.1.

Izvedite parametarske jednadžbe ostalih kvadrika.

Plohe u prostoru
- Zadavanje plohe
- Sfera i elipsoid
- Torus
- Rotacijske plohe
- Pravčaste plohe
- Tangencijalna ravnina

Torus

Torus je ploha koja nastaje rotacijom kružnice oko neke osi.



Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Bez smanjenja općenitosti, neka je R polumjer centralne linije torusa, tj. kružnice po kojoj rotira središte manje kružnice, a r polumjer kružnice koja rotira. Uzmimo da je $r < R$. Neka je z-os os rotacije i neka torus nastaje rotacijom kružnice

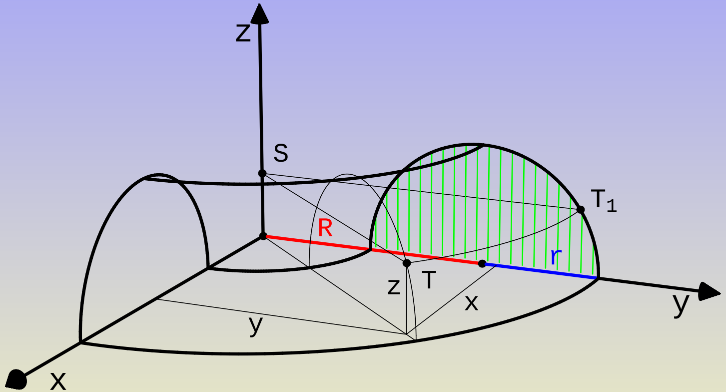
$$\left\{ \begin{array}{rcl} (y-R)^2 + z^2 & = & r^2 \\ x & = & 0 \end{array} \right. .$$

Neka je $T(x, y, z)$ točka na torusu nastala rotacijom točke $T_1(0, y_1, z_1)$ zadane kružnice oko z-osi. Tada je

$$z_1 = z \ \text{ i } \ |ST_1| = |ST|.$$

Sa slike se vidi da je

$$|ST| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



z
S
R
T₁
r
z
T
x
y
y
x

Prema tome, T_1 ima koordinate

$$T_1\big(0, \sqrt{x^2+y^2}, z\big).$$

Točka T_1 je na zadanoj kružnici pa vrijedi

$$(y_1 - R)^2 + z_1^2 = r^2,$$

odnosno

$$\big(\sqrt{x^2+y^2} - R\big)^2 + z^2 = r^2.$$

Kvadriramo li prethodnu jednakost, dobivamo

$$x^2 + y^2 - 2R\sqrt{x^2+y^2} + R^2 + z^2 = r^2,$$

odnosno

$$x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2 = 2R\sqrt{x^2+y^2}.$$

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

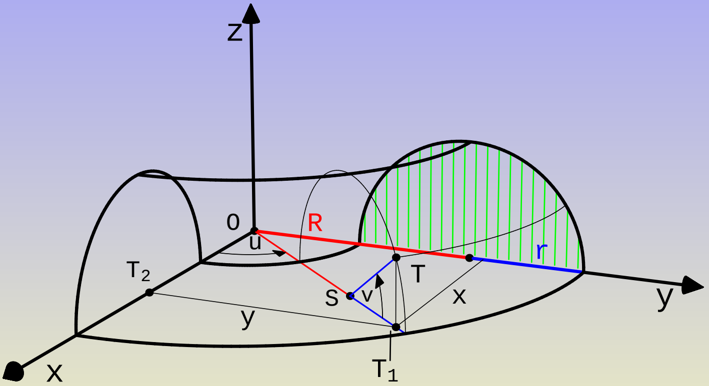
Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Kvadriramo li još jedanput prethodnu jednakost dobivamo implicitnu jednadžbu torusa

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2\right)^2 - 4R^2\left(x^2 + y^2\right) = 0.$$

Vidimo da je torus algebarska ploha 4. reda.

Izvedimo sada još i parametarske jednadžbe torusa.



Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Neka je $T(x, y, z)$ točka na torusu. Uz oznake sa slike vidimo da je

$$z = |TT_1|, \quad |ST| = r, \quad |OS| = R.$$

Nadalje, trokut TT_1S je pravokutan pa imamo

$$z = r \sin v, \quad |ST_1| = r \cos v.$$

Isto tako,

$$|OT_1| = |OS| + |ST_1| = R + r \cos v.$$

Iz pravokutnog trokuta OT_2T_1 slijedi

$$x = |OT_1| \cos u, \quad y = |OT_1| \sin u.$$

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Iz navedenih razmatranja dobivamo parametarske jednadžbe torusa

$$\begin{aligned} x &= (R + r\cos v)\cos u \\ y &= (R + r\cos v)\sin u \\ z &= r\sin v \end{aligned}$$

pri čemu je

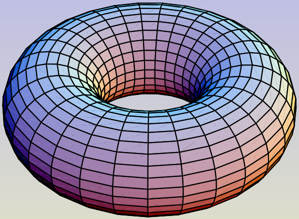
$$u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 2\pi].$$

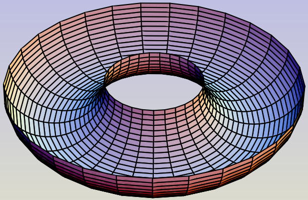
U ovoj parametrizaciji u-crte su horizontalne kružnice na torusu, a v-crte su poprečne kružnice.

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

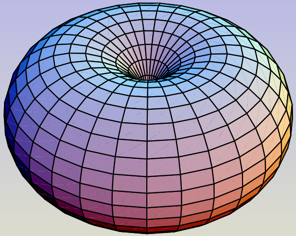
Razlikujemo tri vrste torusa:

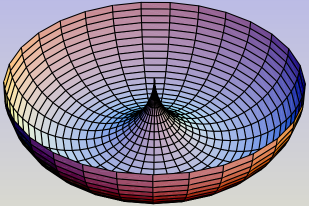
- **Ring torus**: $r < R$





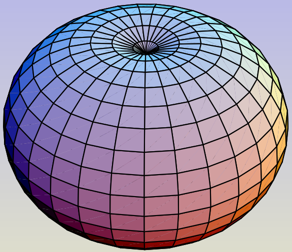
- **Horn torus**: $r = R$

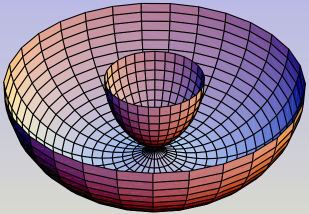




Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

- **Spindle torus**: $r > R$





Rotacijske plohe

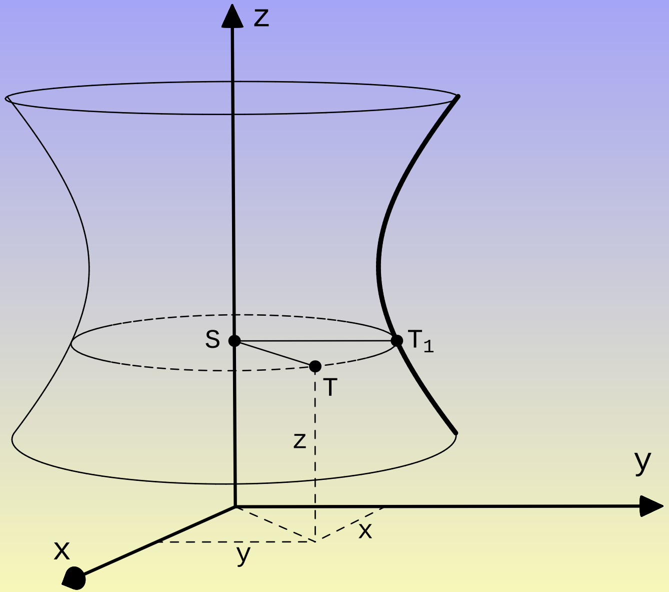
Rotacijska ploha je skup točaka prostora koji nastaje rotacijom neke krivulje oko neke osi. Tu krivulju zovemo generatrisa ili profilna krivulja te plohe.

Uzmimo da je zadana krivulja u yz-ravnini jednadžbom

$$f(y, z) = 0$$

i neka je os z os rotacije i pretpostavimo da krivulja ne siječe os z. Nađimo implicitnu jednadžbu plohe koja nastaje rotacijom ove krivulje oko osi z.

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina



Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Neka je $T(x,y,z)$ točka plohe nastala rotacijom točke $T_1(0,y_1,z_1)$ krivulje $f(y,z)=0$ oko osi z. Sa slike vidimo da vrijedi

$$z_1 = z, \quad y_1 = |ST_1| = |ST| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Stoga točka T_1 ima koordinate $\left(0, \sqrt{x^2+y^2}, z\right)$.

Kako je točka T_1 na zadanoj krivulji, slijedi da je

$$f(y_1,z_1)=0,$$

a iz toga dobivamo implicitnu jednadžbu rotacijske plohe

$$f\left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right) = 0.$$

Izvedimo sada još i parametarske jednadžbe rotacijske plohe. Pretpostavimo da je ploha dobivena rotacijom krivulje

$$c(u) = \big(0, g(u), h(u)\big), \quad u \in I \subseteq \mathbb{R}$$

koja se nalazi u yz-ravnini i rotira oko osi z.

Neka je $T(x, y, z)$ točka plohe nastala rotacijom točke $T_1(0, y_1, z_1)$ krivulje c oko osi z. Tada je

$$z = z_1 = h(u), \quad |ST| = |ST_1| = y_1 = g(u).$$

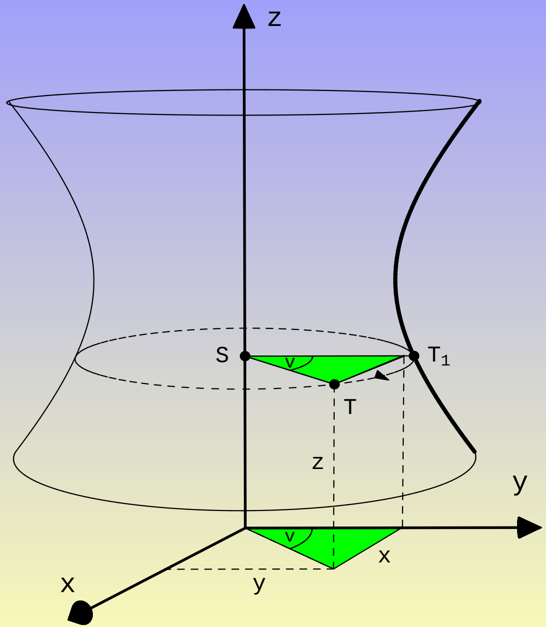
Nadalje, iz označenih trokuta na slici slijedi

$$\sin v = \frac{x}{|ST|}, \quad \cos v = \frac{y}{|ST|},$$

odnosno

$$x = g(u)\sin v, \quad y = g(u)\cos v.$$

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina



Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Dakle, parametarske jednadžbe plohe dobivene rotacijom krivulje

$$c(u) = \big(0, g(u), h(u)\big)$$

oko osi z su

$$\begin{aligned} x &= g(u)\sin v \\ y &= g(u)\cos v \\ z &= h(u) \end{aligned}$$

gdje je $u \in I$, $v \in [0, 2\pi]$.

U slučaju da zadana krivulja rotira oko osi y, parametarske jednadžbe dobivene plohe su

$$\begin{aligned} x &= h(u)\sin v \\ y &= g(u) \\ z &= h(u)\cos v \end{aligned}$$

Parametarske jednadžbe plohe dobivene rotacijom krivulje

$$c(u) = \big(g(u), 0, h(u)\big)$$

oko osi x su

$$x = g(u)$$
$$y = h(u)\sin v$$
$$z = h(u)\cos v$$

a u slučaju rotacije oko osi z

$$x = g(u)\cos v$$
$$y = g(u)\sin v$$
$$z = h(u)$$

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Parametarske jednadžbe plohe dobivene rotacijom krivulje

$$c(u) = \big(g(u), h(u), 0\big)$$

oko osi x su

$$\begin{aligned} x &= g(u) \\ y &= h(u)\cos v \\ z &= h(u)\sin v \end{aligned}$$

a u slučaju rotacije oko osi y

$$\begin{aligned} x &= g(u)\cos v \\ y &= h(u) \\ z &= g(u)\sin v \end{aligned}$$

Primjeri rotacijskih ploha

- sfera
- torus
- jednoplohi rotacioni hiperboloid – nastaje rotacijom hiperbole $y^2 - z^2 = 1$ oko z osi. Njegova implicitna jednadžba glasi

$$\sqrt{x^2+y^2}^2 - z^2 = 1,$$

odnosno

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Parametarske jednadžbe hiperbole $y^2 - z^2 = 1$ su

$$c(u) = \left(0, \operatorname{ch} u, \operatorname{sh} u\right)$$

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

gdje je

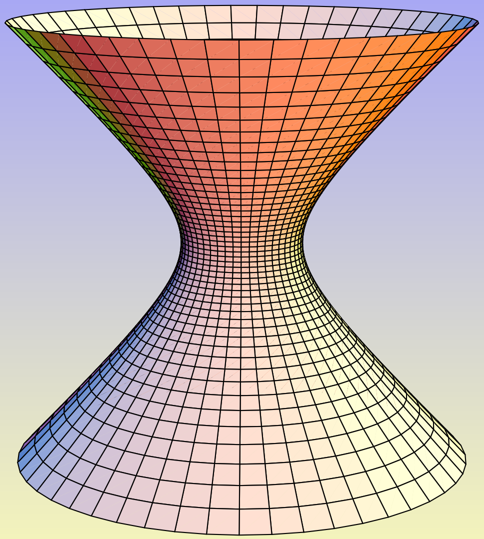
$$\operatorname{ch} u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad \operatorname{sh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}.$$

Stoga su parametarske jednadžbe rotacionog hiperboloida

$$x = \operatorname{ch} u \sin v$$
$$y = \operatorname{ch} u \cos v$$
$$z = \operatorname{sh} u$$

gdje je $u \in \mathbb{R}$, $v \in [0, 2\pi]$.

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina



Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

- Neka je $z = \sin y$ sinusoida u yz-ravnini. Rotacijom te sinusoide oko osi z dobivamo plohu čija je implicitna jednadžba

$$z - \sin\sqrt{x^2 + y^2} = 0,$$

a parametarske jednadžbe

$$\begin{aligned} x &= u \sin v \\ y &= u \cos v \\ z &= \sin u \end{aligned}$$

gdje je $u \in [0, \infty\rangle$, $v \in [0, 2\pi]$.

Plohe u prostoru

Zadavanje plohe

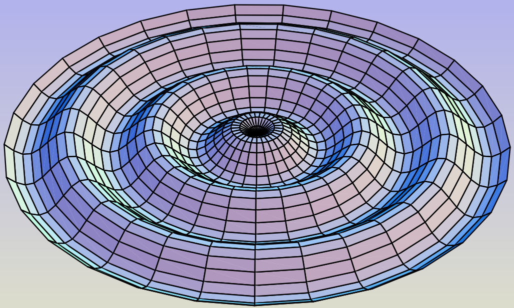
Sfera i elipsoid

Torus

Rotacijske plohe

Pravčaste plohe

Tangencijalna ravnina

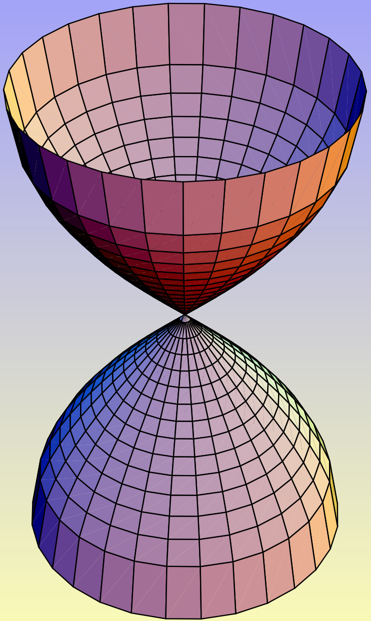


Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

- Neka je $z = \arcsin y$ krivulja u yz-ravnini. Ta krivulja siječe os z. Rotacijom te krivulje oko osi z dobivamo plohu čije su parametarske jednadžbe

$$x = u \sin v$$
$$y = u \cos v$$
$$z = \arcsin u$$

gdje je $u \in [-1, 1]$, $v \in [0, 2\pi]$.



Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

- Neka je $z = \arcsin(y-1)$ krivulja u yz-ravnini. Ta krivulja ne siječe os z. Rotacijom te krivulje oko osi z dobivamo plohu čija je implicitna jednadžba

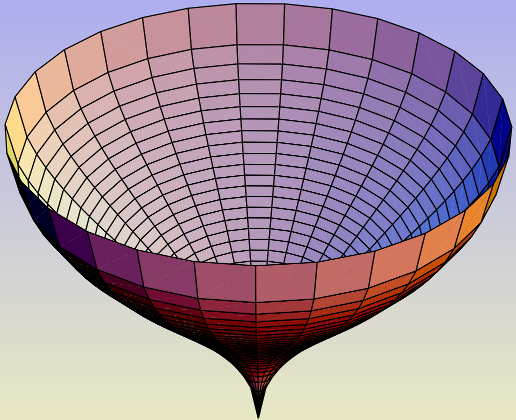
$$z - \arcsin\left(\sqrt{x^2+y^2} - 1\right) = 0,$$

a parametarske jednadžbe su

$$\begin{aligned} x &= u \sin v \\ y &= u \cos v \\ z &= \arcsin(u-1) \end{aligned}$$

gdje je $u \in [0,2]$, $v \in [0, 2\pi]$.

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina



Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

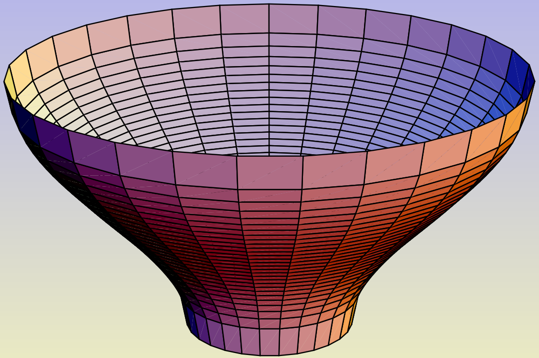
- Neka je $z = \arcsin(y-2)$ krivulja u yz-ravnini. Ta krivulja ne siječe os z. Rotacijom te krivulje oko osi z dobivamo plohu čija je implicitna jednadžba

$$z - \arcsin\left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right) = 0,$$

a parametarske jednadžbe su

$$\begin{aligned} x &= u \sin v \\ y &= u \cos v \\ z &= \arcsin(u-2) \end{aligned}$$

gdje je $u \in [1,3]$, $v \in [0, 2\pi]$.



- Neka je $z = \operatorname{arctg} y$ krivulja u yz-ravnini. Ta krivulja siječe os z. Rotacijom te krivulje oko osi z dobivamo plohu čije su parametarske jednadžbe

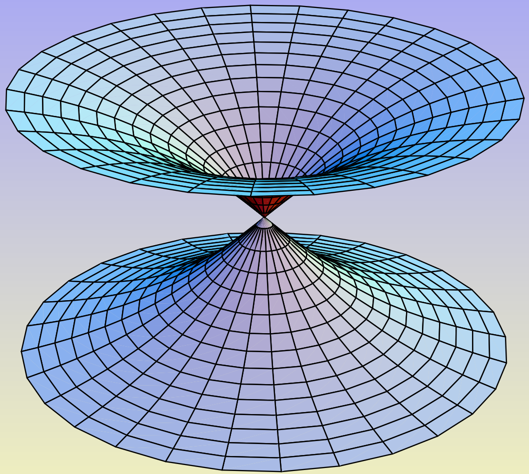
$$x = u \sin v$$

$$y = u \cos v$$

$$z = \operatorname{arctg} u$$

gdje je $u \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $v \in [0, 2\pi]$.

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina



Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

- Pseudosfera je ploha koja nastaje rotacijom oko osi z traktrise

$$c(u) = \Big(0, a\sin u, a\big(\ln\tfrac{u}{2} + \cos u\big)\Big).$$

Parametarske jednadžbe pseudosfere su

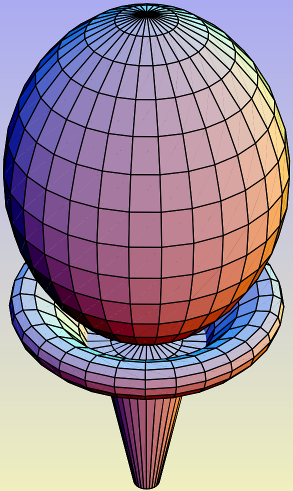
$$x = a\sin u \sin v$$

$$y = a\sin u \cos v$$

$$z = a\big(\ln\tfrac{u}{2} + \cos u\big)$$

gdje je $u \in \langle 0, \infty\rangle$, $v \in [0, 2\pi]$.

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina



Pravčaste plohe

U svakoj točki krivulje

$$R \ldots c(u) = \big(x(u), y(u), z(u)\big), \quad u \in I \subseteq \mathbb{R}$$

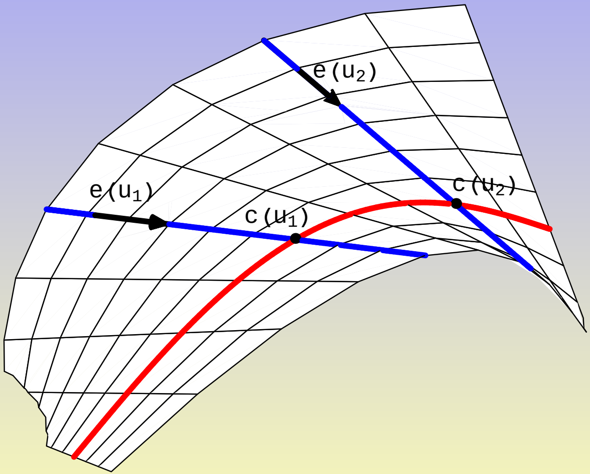
položimo pravac s vektorom smjera $e(u)$ i na taj način dobijemo plohu koju zovemo pravčasta ploha. Parametarska jednadžba pravčaste plohe je

$$r(u, v) = c(u) + v \cdot e(u),$$

gdje je $u \in I$, $v \in \mathbb{R}$.

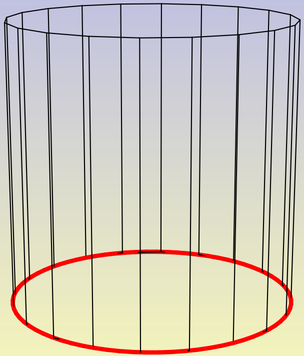
Krivulju R zovemo ravnalica pravčaste plohe, a pravce koji prolaze točkama krivulje R zovemo izvodnice pravčaste plohe.

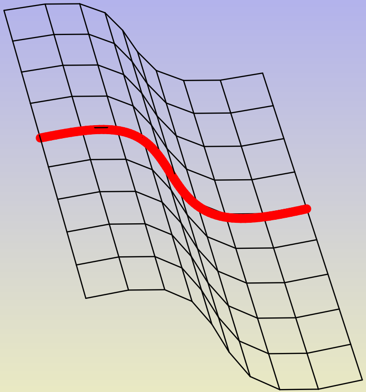
Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina


e(u₂)
c(u₂)
e(u₁)
c(u₁)

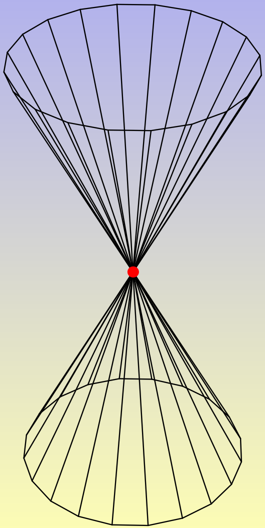
Specijalne vrste pravčastih ploha

- **Cilindrične plohe ili valjci** su pravčaste plohe kod kojih je $e(u) = \text{const.}$, tj. izvodnice su međusobno paralelni pravci.





- **Konusne plohe** su pravčaste plohe kod kojih je krivulja R jedna točka, tj. $c(u) = \text{const.}$



Plohe u prostoru

Zadavanje plohe

Sfera i elipsoid

Torus

Rotacijske plohe

Pravčaste plohe

Tangencijalna ravnina

- **Konoidi** su pravčaste plohe čije izvodnice su okomite na neki zadani pravac. Ako su izvodnice okomite, npr. na os z, tada se lako vidi da su parametarske jednadžbe konoida

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = f(v).$$

Helikoid je specijalni slučaj konoida kada je $f(v) = cv$, gdje je c konstanta. Parametarske jednadžbe helikoida su

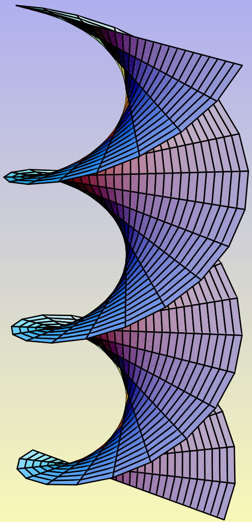
$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = cv.$$

Plückerov konoid ima parametarske jednadžbe

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = c\sin 2v.$$

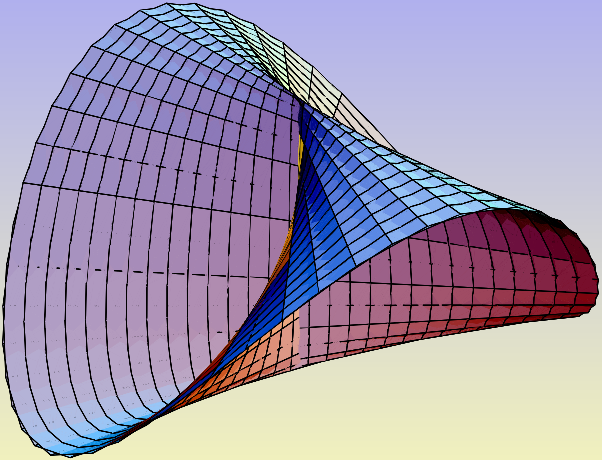
Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Helikoid



Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Plückerov konoid



Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Jednoplohi hiperboloid

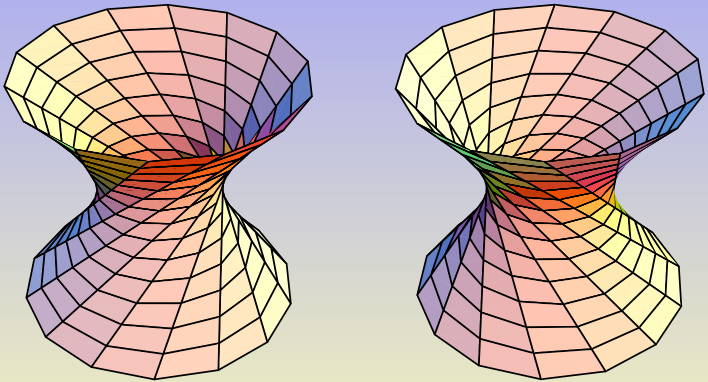
Sjetimo se da je jednoplohi hiperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ rotaciona ploha. No, on je i pravčasta ploha. Naime,

$$r_1(u, v) = (\cos u, \sin u, 0) + v(-\sin u, \cos u, 1)$$

i

$$r_2(u, v) = (\cos u, \sin u, 0) + v(\sin u, -\cos u, 1)$$

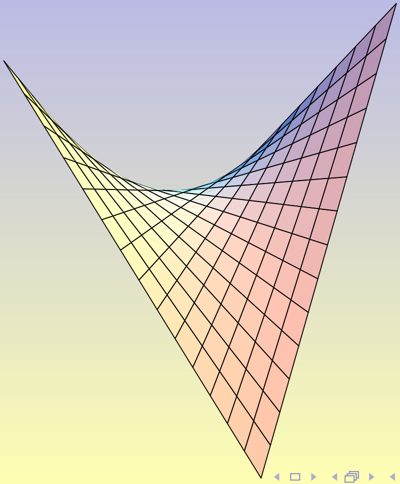
su dvije različite parametrizacije hiperboloida $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Kažemo da je hiperboloid dvostruko pravčast.



Hiperbolni paraboloid

Hiperbolni paraboloid $z = xy$ je pravčasta ploha. Njegova parametrizacija je

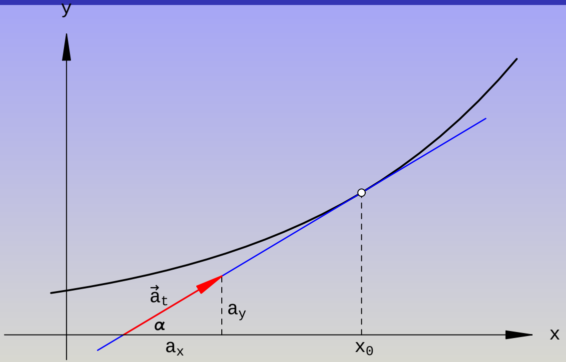
$$r(u, v) = (u, v, uv).$$



Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Tangencijalna ravnina i normala plohe



$$\vec{a}_t = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}, \quad \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0), \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a_y}{a_x}$$

Kako nam je važan samo smjer, možemo uzeti $a_x = 1$, pa je vektor smjera tangente jednak $\vec{a}_t = (1, f'(x_0))$.

$$t \ldots f'(x_0)(x - x_0) - (y - y_0) = 0$$

Kao i u prostoru, tako je i u ravnini svaki pravac određen točkom i vektorom smjera. Ako pravac prolazi točkom $T_0(x_0, y_0)$ i ima vektor smjera $\vec{s} = (s_x, s_y)$, tada on ima jednadžbu

$$\frac{x - x_0}{s_x} = \frac{y - y_0}{s_y}$$

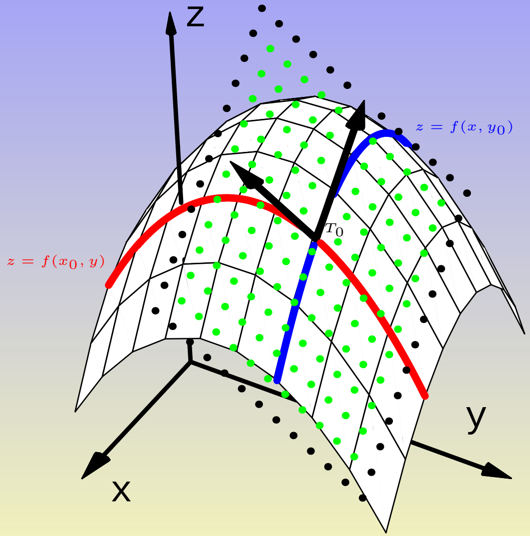
koju zovemo kanonski oblik jednadžbe pravca. U slučaju tangente iz prethodnih razmatranja slijedi da tangenta na graf funkcije f u točki (x_0, y_0) ima vektor smjera $\big(1, f'(x_0)\big)$, pa je njezina jednadžba

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{f'(x_0)},$$

odnosno nakon sređivanja

$$f'(x_0)(x - x_0) - (y - y_0) = 0.$$

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina



Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Neka je ploha zadana eksplicitno jednadžbom $z = f(x, y)$ i neka je $T_0(x_0, y_0, z_0)$ točka na toj plohi, gdje je $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Iz prethodnih razmatranja i definicije parcijalnih derivacija slijedi da je vektor smjera tangente na krivulju

$$z = f(x, y_0)$$

u točki T_0 jednak

$$\big(1, 0, z_x(x_0, y_0)\big),$$

a vektor smjera tangente na krivulju

$$z = f(x_0, y)$$

u toj istoj točki je

$$\big(0, 1, z_y(x_0, y_0)\big).$$

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Ravninu koja prolazi točkom $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i razapeta je vektorima

$$(1, 0, z_x(x_0, y_0)), \quad (0, 1, z_y(x_0, y_0))$$

zovemo **tangencijalna ravnina** plohe $z = f(x, y)$ u točki T_0. Njezina jednadžba je

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & z_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & z_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno

$$z_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Često jednadžbu tangencijalne ravnine u točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$ plohe $z = f(x, y)$ zapisujemo kao

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{T_0}(x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{T_0}(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

pri čemu treba parcijalne derivacije izračunati u točki T_0, tj. preciznije u točki (x_0, y_0).

Normala plohe $z = f(x, y)$ u točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$ je pravac

$$n \ldots \frac{x - x_0}{z_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{z_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Neka je ploha zadana implicitno jednadžbom

$$F(x, y, z) = 0$$

i neka je $T_0(x_0, y_0, z_0)$ točka na plohi. Neka je

$$\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

krivulja na zadanoj plohi koja prolazi točkom T_0 i neka je $\vec{r}(t_0) = T_0$. Tada je

$$F\big(\vec{r}(t)\big) = F\big(x(t), y(t), z(t)\big) = 0.$$

Deriviramo li prethodnu jednakost po t, dobivamo

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\big(\vec{r}(t)\big) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0$$

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

odnosno

$$\nabla F\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0.$$

Dakle, dokazali smo sljedeće: ako uzmemo bilo koju glatku krivulju na plohi $F(x,y,z)=0$ koja prolazi točkom T_0 te plohe, tada je $\nabla F(T_0)$ okomit na tangencijalni vektor te krivulje u točki T_0.

Stoga je prirodna sljedeća definicija. Tangencijalna ravnina plohe $F(x,y,z)=0$ u točki $T_0(x_0,y_0,z_0)$ je ravnina

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot \nabla F(T_0) = 0.$$

Raspišemo li to koordinatno

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\cdot (F_x, F_y, F_z) = 0$$

dobivamo

$$(F_x)_{T_0}(x-x_0)+(F_y)_{T_0}(y-y_0)+(F_z)_{T_0}(z-z_0)=0,$$

pri čemu treba izračunati parcijalne derivacije u točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$.

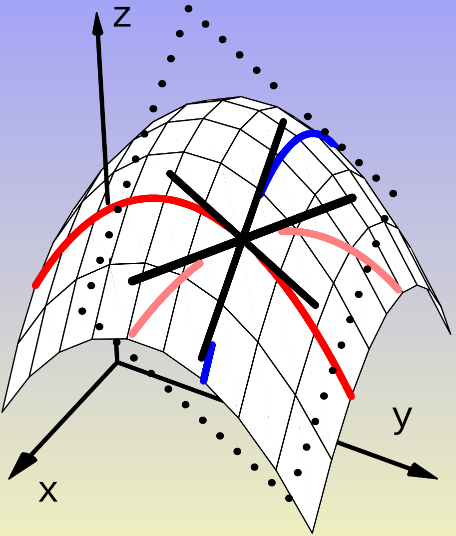
Dakle, tangente svih glatkih krivulja na plohi

$$F(x,y,z)=0$$

koje prolaze točkom T_0 leže u tangencijalnoj ravnini zadane plohe u točki T_0.

Normala plohe $F(x,y,z)=0$ u točki $T_0(x_0,y_0,z_0)$ je pravac

$$n \ldots \frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$



Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Specijalno, ako je ploha zadana eksplicitno sa

$$z = f(x, y),$$

tada je njezin implicitni oblik

$$f(x, y) - z = 0,$$

odnosno

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

Tada je

$$F_x = f_x, \quad F_y = f_y, \quad F_z = -1,$$

pa je u tom slučaju jednadžba tangencijalne ravnine u točki $T_0(x_0, y_0, z_0)$

$$(f_x)_{T_0}(x - x_0) + (f_y)_{T_0}(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

što se podudara s prethodnim razmatranjima.

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Primjer 7.1.

Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine i normale na plohu $x^2 - y^2 - z^2 = 4$ *u točki* $T_0(3, 2, 1)$.

Rješenje

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Primjer 7.1.

Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine i normale na plohu $x^2 - y^2 - z^2 = 4$ u točki $T_0(3,2,1)$.

Rješenje

$$x_0 = 3, \quad y_0 = 2, \quad z_0 = 1, \quad F(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2 - 4$$

$$F_x = 2x, \quad F_y = -2y, \quad F_z = -2z$$

$$(F_x)_{T_0} = 6, \quad (F_y)_{T_0} = -4, \quad (F_z)_{T_0} = -2$$

Jednadžba tangencijalne ravnine je

$$(F_x)_{T_0}(x - x_0) + (F_y)_{T_0}(y - y_0) + (F_z)_{T_0}(z - z_0) = 0,$$

odnosno

$$6(x-3) - 4(y-2) - 2(z-1) = 0,$$

i konačno nakon sređivanja

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Jednadžba normale je

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)},$$

odnosno nakon uvrštavanja

$$\frac{x - 3}{6} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z - 1}{-2}.$$

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Neka je ploha zadana parametarski s

$$r(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big). \qquad (*)$$

Jednadžbom $r = r(u_0, v)$ definirana je jedna v-krivulja točkom $T(u_0, v_0)$ s vektorom tangente $r_v(u_0, v_0)$ kojeg kratko zapisujemo s r_v^0.

Nadalje, jednadžbom $r = r(u, v_0)$ definirana je jedna u-krivulja točkom $T(u_0, v_0)$ s vektorom tangente $r_u(u_0, v_0)$ kojeg kratko zapisujemo s r_u^0.

Ako je $T(u_0, v_0)$ regularna točka, tada su vektori r_u^0 i r_v^0 linearno nezavisni pa određuju ravninu čija je normala vektor $r_u^0 \times r_v^0$, a koju zovemo tangencijalna ravnina u točki $T(u_0, v_0)$ plohe zadane parametarski s $(*)$.

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Sljedeća lema opravdava prethodnu definiciju tangencijalne ravnine plohe koja je zadana parametarski.

Lema 1.

Ako je ploha zadana parametarski s

$$r(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

pri čemu je r *diferencijabilna funkcija (tj. koordinatne funkcije su diferencijabilne), tada tangenta svake krivulje koja leži na zadanoj plohi i prolazi točkom* $T(u_0, v_0)$ *leži u ravnini određenoj vektorima* r_u^0 *i* r_v^0.

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

Dokaz.

Neka je K krivulja na zadanoj plohi koja prolazi točkom $T(u_0, v_0)$.

Tada je njezina jednadžba

$$r(t) = r(u(t), v(t))$$

pri čemu je $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$.

Deriviranjem po parametru t dobivamo

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial r}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Uvrstimo li gore $u = u_0$ i $v = v_0$, dobivamo

$$\frac{\mathrm{d}r^0}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} r_u^0 + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} r_v^0.$$

Iz posljednje jednakosti slijedi da je vektor tangente $\frac{\mathrm{d}r^0}{\mathrm{d}t}$

krivulje K u točki $T(u_0, v_0)$ linearna kombinacija vektora r_u^0 i r_v^0 sa skalarima $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ i $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ izračunatima u $T(u_0, v_0)$. ♡

Primjer 7.2.

Odredite tangencijalnu ravninu i normalu u točki $(3, 0, 0)$ *torusa*

$$r(u, v) = \big((2 + \cos v)\cos u, (2 + \cos v)\sin u, \sin v\big).$$

Rješenje

krivulje K u točki $T(u_0, v_0)$ linearna kombinacija vektora r_u^0 i r_v^0 sa skalarima $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ i $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ izračunatima u $T(u_0, v_0)$. ♡

Primjer 7.2.

Odredite tangencijalnu ravninu i normalu u točki $(3, 0, 0)$ torusa

$$r(u, v) = \big((2 + \cos v)\cos u, (2 + \cos v)\sin u, \sin v\big).$$

Rješenje

$r(0, 0) = (3, 0, 0)$, pa je $u_0 = 0$, $v_0 = 0$

$r_u = \big(-(2 + \cos v)\sin u, (2 + \cos v)\cos u, 0\big)$

$r_v = \big(-\sin v \cos u, -\sin v \sin u, \cos v\big)$

$r_u(0, 0) = (0, 3, 0)$, $r_v(0, 0) = (0, 0, 1)$

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina

$$r_u(0,0) \times r_v(0,0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3,0,0) = 3(1,0,0)$$

Za normalu tangencijalne ravnine možemo uzeti vektor $(1,0,0)$, a točka je $T(3,0,0)$. Dakle, jednadžba tangencijalne ravnine u točki $(3,0,0)$ je

$$\pi_t \ldots 1 \cdot (x-3) + 0 \cdot (y-0) + 0 \cdot (z-0) = 0,$$

odnosno

$$\pi_t \ldots x = 3.$$

Jednadžba normale u točki $(3,0,0)$ je

$$n \ldots \frac{x-3}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}.$$

Plohe u prostoru
Zadavanje plohe
Sfera i elipsoid
Torus
Rotacijske plohe
Pravčaste plohe
Tangencijalna ravnina