

Tablice smrtnosti

FINANCIJSKA MATEMATIKA, IPS

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Nezavisni događaji

- Uvjetna vjerojatnost

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Vjerojatnost presjeka dva događaja

$$P(A \cap B) = P(A | B) \cdot P(B), \quad P(A \cap B) = P(B | A) \cdot P(A)$$

- Događaji A i B su nezavisni ako i samo ako vrijedi

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Događaji $A_1, A_2, \dots, A_n$ su nezavisni ako i samo ako za svaki neprazni podskup $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ vrijedi

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

2 / 21

Zadatak 1

Kolika je vjerojatnost da u igri LOTO 6 od 45 bude izvučeno vaših 6 brojeva?

Rješenje

- Neka je A događaj da je pogođeno svih 6 brojeva.

$$P(A) = \frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj mogućih ishoda}} = \frac{1}{\binom{45}{6}} = \frac{1}{8\,145\,060} \approx 0.000000123$$

$$\binom{45}{6} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 8\,145\,060$$

1 / 21

Zadatak 2

Na nekom fakultetu ispit iz matematike je položilo 75% studenata, ispit iz informatike 85% studenata, a 60% studenata je uspjelo položiti ispite iz oba predmeta.

- Kolika je vjerojatnost da je netko prošao barem jedan od navedena dva ispita?
- Kolika je vjerojatnost da je netko prošao matematiku ako je prošao informatiku?
- Kolika je vjerojatnost da je netko prošao informatiku ako je prošao matematiku?
- Kolika je vjerojatnost da netko nije prošao informatiku ako je prošao matematiku?
- Kolika je vjerojatnost da je netko prošao informatiku ako nije prošao matematiku?

3 / 21

Rješenje

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Definiramo sljedeća dva događaja.

$M = \{\text{odabrana osoba je položila matematiku}\}$

$I = \{\text{odabrana osoba je položila informatiku}\}$

- $P(M) = 0.75, \quad P(I) = 0.85, \quad P(M \cap I) = 0.6$

a) $P(M \cup I) = P(M) + P(I) - P(M \cap I) = 0.75 + 0.85 - 0.6 = 1$

b) $P(M | I) = \frac{P(M \cap I)}{P(I)} = \frac{0.6}{0.85} = \frac{12}{17} \approx 0.71$

c) $P(I | M) = \frac{P(I \cap M)}{P(M)} = \frac{0.6}{0.75} = 0.8$

d) $P(I^c | M) = 1 - P(I | M) = 1 - 0.8 = 0.2$

4 / 21

Oznake

- $\ell_x \rightarrow$ broj živih x -godišnjaka

- $d_x \rightarrow$ broj x -godišnjaka umrlih tijekom $(x + 1)$ -ve godine

$$d_x = \ell_x - \ell_{x+1}$$

- $q_x \rightarrow$ vjerojatnost da osoba stara x godina umre tijekom naredne godine

$$q_x = \frac{d_x}{\ell_x} = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x}$$

- $p_x \rightarrow$ vjerojatnost da osoba stara x godina bude živa naredne godine

$$p_x = 1 - q_x = \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x}$$

6 / 21

$$P(B | A) = \frac{P(A | B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

- e) Zanima nas vjerojatnost događaja $P(I | M^c)$.

Koristimo Bayesovu formulu

$$P(I | M^c) = \frac{P(M^c | I) \cdot P(I)}{P(M^c)}.$$

$$P(M^c) = 1 - P(M) = 1 - 0.75 = 0.25$$

$$P(M^c | I) = 1 - P(M | I) = 1 - \frac{12}{17} = \frac{5}{17}$$

$$P(I | M^c) = \frac{\frac{5}{17} \cdot 0.85}{0.25} = 1$$

5 / 21

Oznake

- ${}_n p_x \rightarrow$ vjerojatnost da će x -godišnjak živjeti narednih n godina

$${}_n p_x = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}$$

- ${}_n q_x \rightarrow$ vjerojatnost da će x -godišnjak umrijeti u narednih n godina

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+n}}{\ell_x}$$

7 / 21

Zadatak 3

Kolika je vjerojatnost da ženska osoba starosti 20 godina doživi 21. rođendan? Kolika je vjerojatnost da muška osoba starosti 50 godina doživi 51. rođendan?

Rješenje

$$p_x = \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x}$$

$$p_{20}(f) = \frac{\ell_{21}(f)}{\ell_{20}(f)} = \frac{99\,499}{99\,519} = 0.999799$$

$$p_{50}(m) = \frac{\ell_{51}(m)}{\ell_{50}(m)} = \frac{93\,761}{94\,320} = 0.994073$$

Vjerojatnost da ženska osoba starosti 20 godina doživi 21. rođendan jednaka je 99.9799%.

Vjerojatnost da muška osoba starosti 50 godina doživi 51. rođendan jednaka je 99.4073%.

8 / 21

Zadatak 5

Je li vjerojatnije da ženska osoba starosti 30 godina doživi 65. rođendan ili da muška osoba starosti 25 godina doživi 60. rođendan?

Rješenje

$${}_n p_x = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}$$

$${}_{35}p_{30}(f) = \frac{\ell_{65}(f)}{\ell_{30}(f)} = \frac{90\,405}{99\,271} = 0.910689$$

$${}_{35}p_{25}(m) = \frac{\ell_{60}(m)}{\ell_{25}(m)} = \frac{85\,449}{98\,904} = 0.863959$$

Vjerojatnost da ženska osoba starosti 30 godina doživi 65. rođendan jednaka je 91.0689%.

Vjerojatnost da muška osoba starosti 25 godina doživi 60. rođendan jednaka je 86.3959%.

10 / 21

Zadatak 4

Je li vjerojatnije da ženska osoba starosti 40 godina ili muška osoba starosti 30 godina ne doživi idući rođendan?

Rješenje

$$q_x = \frac{d_x}{\ell_x} = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x}$$

$$q_{40}(f) = \frac{d_{40}(f)}{\ell_{40}(f)} = \frac{81}{98\,796} = 0.00082$$

$$q_{30}(m) = \frac{d_{30}(m)}{\ell_{30}(m)} = \frac{86}{98\,496} = 0.000873$$

Vjerojatnost da ženska osoba starosti 40 godina ne doživi 41. rođendan jednaka je 0.082%.

Vjerojatnost da muška osoba starosti 30 godina ne doživi 31. rođendan jednaka je 0.0873%.

9 / 21

Zadatak 6

Je li vjerojatnije da ženska osoba starosti 18 godina ne doživi 65. rođendan ili da muška osoba starosti 25 godina ne doživi 55. rođendan?

Rješenje

$${}_n q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+n}}{\ell_x}$$

$${}_{47}q_{18}(f) = \frac{\ell_{18}(f) - \ell_{65}(f)}{\ell_{18}(f)} = \frac{99\,559 - 90\,405}{99\,559} = 0.091945$$

$${}_{30}q_{25}(m) = \frac{\ell_{25}(m) - \ell_{55}(m)}{\ell_{25}(m)} = \frac{98\,904 - 90\,843}{98\,904} = 0.081503$$

Vjerojatnost da ženska osoba starosti 18 godina ne doživi 65. rođendan jednaka je 9.1945%.

Vjerojatnost da muška osoba starosti 25 godina ne doživi 55. rođendan jednaka je 8.1503%.

11 / 21

Zadatak 7

Kolika je vjerojatnost da će supruga starosti 28 godina biti udovica tijekom idućih 10 godina ako joj suprug ima 76 godina?

Rješenje

Definiramo sljedeća dva događaja:

$$A = \{\text{supruga starosti 28 godina će živjeti idućih 10 godina}\}$$

$$B = \{\text{suprug starosti 76 godina će umrijeti u narednih 10 godina}\}$$

Nas zanima vjerojatnost događaja $A \cap B$. Kako su A i B nezavisni događaji, slijedi

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = {}_{10}p_{28}(f) \cdot {}_{10}q_{76}(m)$$

12 / 21

Zadatak 8

- Kolika je vjerojatnost da će muška osoba starosti 28 godina i ženska osoba starosti 25 godina, s tri godine bračnog staža, slaviti zlatni pir (50 godina braka)?
- Kolika je vjerojatnost da će barem jedna osoba doživjeti 50. godišnjicu braka?
- Kolika je vjerojatnost da će točno jedna osoba doživjeti 50. godišnjicu braka?

Rješenje

- Neka je A događaj da će muška osoba starosti 28 godina s tri godine bračnog staža slaviti zlatni pir.
- Neka je B događaj da će ženska osoba starosti 25 godina s tri godine bračnog staža slaviti zlatni pir.

14 / 21

$${}_np_x = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}$$

$${}_nq_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+n}}{\ell_x}$$

$${}_{10}p_{28}(f) = \frac{\ell_{38}(f)}{\ell_{28}(f)} = \frac{98\,933}{99\,325} = 0.996053$$

$${}_{10}q_{76}(m) = \frac{\ell_{76}(m) - \ell_{86}(m)}{\ell_{76}(m)} = \frac{51\,940 - 18\,298}{51\,940} = 0.647709$$

$$P(A \cap B) = 0.996053 \cdot 0.647709 = 0.645152$$

Vjerojatnost da supruga postane udovica tijekom idućih 10 godina jednaka je 64.5152%.

13 / 21

- Zanima nas $P(A \cap B)$. Kako su A i B nezavisni događaji, vrijedi

$${}_np_x = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = {}_{47}p_{28}(m) \cdot {}_{47}p_{25}(f)$$

$${}_{47}p_{28}(m) = \frac{\ell_{75}(m)}{\ell_{28}(m)} = \frac{54\,969}{98\,660} = 0.557156$$

$${}_{47}p_{25}(f) = \frac{\ell_{72}(f)}{\ell_{25}(f)} = \frac{82\,328}{99\,404} = 0.828216$$

$$P(A \cap B) = 0.557156 \cdot 0.828216 = 0.461446$$

Vjerojatnost da obje osobe dožive zlatni pir jednaka je 46.1446%.

15 / 21

b) Zanima nas $P(A \cup B)$.

1. način

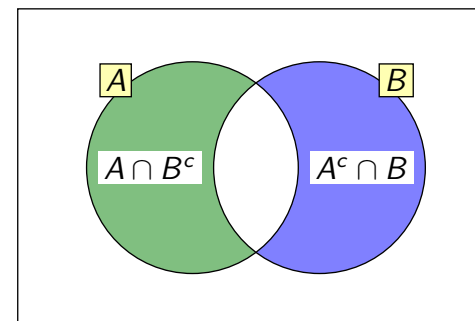
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= {}_{47}p_{28}(m) + {}_{47}p_{25}(f) - P(A \cap B) = \\ &= 0.557156 + 0.828216 - 0.461446 = \\ &= 0.923926 \end{aligned}$$

Vjerojatnost da barem jedna osoba doživi zlatni pir jednaka je 92.3926%.

16 / 21

c) 1. način

Zanima nas vjerojatnost događaja $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$.



Uočite da je

$$(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

18 / 21

2. način

$${}_np_x + {}_nq_x = 1$$

$${}_nq_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+n}}{\ell_x}$$

Odredimo najprije vjerojatnost suprotnog događaja $(A \cup B)^c$.

$$P((A \cup B)^c) = P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c)$$

$$P(A^c) = {}_{47}q_{28}(m) = 1 - {}_{47}p_{28}(m) = 1 - 0.557156 = 0.442844$$

$$P(B^c) = {}_{47}q_{25}(f) = 1 - {}_{47}p_{25}(f) = 1 - 0.828216 = 0.171784$$

$$P((A \cup B)^c) = 0.442844 \cdot 0.171784 = 0.076074$$

Vjerojatnost da niti jedna osoba ne doživi zlatni pir jednaka je 7.6074%.

$$P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)^c) = 1 - 0.076074 = 0.923926$$

Vjerojatnost da barem jedna osoba doživi zlatni pir jednaka je 92.3926%.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

17 / 21

- $A \cap B^c$ i $A^c \cap B$ su disjunktni događaji
- A i B^c su nezavisni događaji
- A^c i B su nezavisni događaji

Stoga je

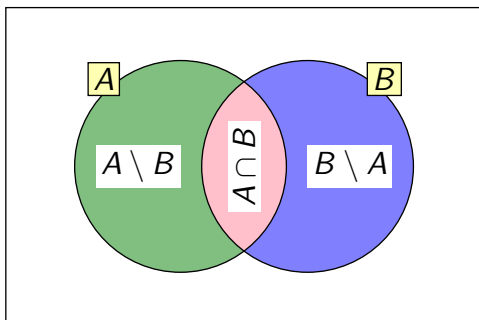
$$\begin{aligned} P((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) &= P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) = \\ &= P(A) \cdot P(B^c) + P(A^c) \cdot P(B) = \\ &= 0.557156 \cdot 0.171784 + 0.442844 \cdot 0.828216 = \\ &= 0.462481 \end{aligned}$$

Vjerojatnost da točno jedna osoba doživi zlatni pir jednaka je 46.2481%.

19 / 21

2. način

Zanima nas vjerojatnost događaja $A \triangle B$.



$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

20 / 21

- Događaji $A \triangle B$ i $A \cap B$ su disjunktni događaji.
- $A \cup B = (A \triangle B) \cup (A \cap B)$

Stoga je

$$P(A \cup B) = P(A \triangle B) + P(A \cap B)$$

iz čega slijedi

$$P(A \triangle B) = P(A \cup B) - P(A \cap B).$$

Konačno dobivamo

$$P(A \triangle B) = 0.923926 - 0.461446 = 0.46248$$

Vjerojatnost da točno jedna osoba doživi zlatni pir jednaka je 46.248%.

21 / 21