

Financijska matematika – treće predavanje

FOI

PITUP

Amortizacija Linearna Suma znamenaka Konstantni postotak Funkcionalna

Pojam amortizacije i metode amortizacije

Definicija amortizacije

Amortizacija je smanjivanje vrijednosti imovine tijekom vremena uslijed njezina trošenja ili iscrpljivanja.

- funkcionalna metoda amortizacije
- vremenske metode amortizacije
 - linearna amortizacija
 - metoda sume znamenaka
 - metoda konstantnog postotka, ...

PITUP, FOI

Financijska matematika – treće predavanje

2/126

Amortizacija Linearna Suma znamenaka Konstantni postotak Funkcionalna

Amortizacija

PITUP, FOI

Financijska matematika – treće predavanje

1/126

Amortizacija Linearna Suma znamenaka Konstantni postotak Funkcionalna

Oznake

- C – originalna vrijednost (cijena) dobra (eng. cost)
- S – otpisna vrijednost (eng. salvage value)
- $C - S$ – trošak amortizacije
- n – vrijeme trajanja dobra
- R_k – trošak (kvota) amortizacije u k -tom razdoblju (eng. depreciation repaid)
- B_k – knjigovodstvena vrijednost u k -tom razdoblju (eng. book value)
- D_k – akumulirana amortizacija u k -tom razdoblju (eng. depreciation)

PITUP, FOI

Financijska matematika – treće predavanje

3/126

Osnovna relacija

akumulirana amortizacija + knjigovodstvena vrijednost = originalna vrijednost dobra

Osnovna relacija

$$D_k + B_k = C$$

Također vrijedi:

$$B_0 = C, \quad B_n = S, \quad D_0 = 0, \quad D_n = C - S$$

Podatke bitne za amortizaciju upisujemo u tablicu zvanu **amortizacijska osnovica**.

Primjer

Oprema ima vrijednost 400 000 kn, životni vijek 5 godina i otpisnu vrijednost 100 000 kn. Napravite amortizacijsku osnovicu koristeći linearnu metodu amortizacije.

Rješenje.

k	R_k	D_k	B_k
0	—	—	400 000
1	60 000	60 000	340 000
2	60 000	120 000	280 000
3	60 000	180 000	220 000
4	60 000	240 000	160 000
5	60 000	300 000	100 000

$$\begin{aligned} C &= 400\,000 \\ S &= 100\,000 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

$$R = \frac{C-S}{n} = \frac{400\,000-100\,000}{5} = 60\,000$$



Linearna amortizacija

- najjednostavnija i najčešće korištena metoda
- **osnova za amortizaciju je jednako raspoređena tijekom životnog vijeka dobra**
- $\frac{100}{n}$ – godišnja stopa amortizacije
 - postiže se preglednost pri uspoređivanju amortizacija različitih dobara

Trošak amortizacije i akumulirana amortizacija

$$R = \frac{C - S}{n}$$

$$D_k = k \cdot R$$

Metoda sume znamenaka

- metoda degresivne amortizacije – veće amortizacijske kvote javljaju se u početnim godinama
- Koristeći formulu za sumu prvih n članova aritmetičkog niza dobivamo

$$s = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Trošak amortizacije

$$R_k = \frac{n - k + 1}{s} (C - S)$$

Raspisivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{n}{s}(C - S) \\ R_2 &= \frac{n-1}{s}(C - S) \\ R_3 &= \frac{n-2}{s}(C - S) \\ &\vdots \\ R_{n-1} &= \frac{2}{s}(C - S) \\ R_n &= \frac{1}{s}(C - S) \end{aligned}$$

Metoda konstantnog postotka

- metoda degresivne amortizacije – veće amortizacijske kvote javljaju se u početnim godinama
- amortizacijska kvota je fiksni postotak knjigovodstvene vrijednosti**
- amortizacija je zadana **stopom amortizacije** d
- metoda se može primijeniti samo u slučaju $S > 0$ jer je ovdje knjigovodstvena vrijednost opisana eksponencijalnom funkcijom

Trošak amortizacije

$$R_k = B_{k-1} \cdot \frac{d}{100}$$

Primjer

Oprema ima vrijednost 400 000 kn, životni vijek 5 godina i otpisnu vrijednost 100 000 kn. Napravite amortizacijsku osnovicu koristeći metodu sume znamenaka.

Rješenje.

k	R_k	D_k	B_k
0	—	—	400 000
1	100 000	100 000	300 000
2	80 000	180 000	220 000
3	60 000	240 000	160 000
4	40 000	280 000	120 000
5	20 000	300 000	100 000

$$\begin{aligned} C &= 400\,000 \\ S &= 100\,000 \\ n &= 5 \\ s &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \end{aligned}$$

Iz osnovne relacije slijedi

$$\begin{aligned} B_k &= C - D_k \\ B_{k-1} &= C - D_{k-1} \end{aligned}$$

Oduzimanjem gornjih dviju jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} B_k - B_{k-1} &= -D_k + D_{k-1} \\ B_k - B_{k-1} &= -(R_1 + R_2 + \dots + R_{k-1} + R_k) + (R_1 + R_2 + \dots + R_{k-1}) \\ B_k - B_{k-1} &= -R_k \end{aligned}$$

pa vrijedi

$$B_k = B_{k-1} - R_k$$

$$\begin{aligned} R_k &= B_{k-1} \cdot \frac{d}{100} \\ B_k &= B_{k-1} - R_k \\ B_{k-1} - B_k &= B_{k-1} \cdot \frac{d}{100} \\ B_k &= B_{k-1} - B_{k-1} \cdot \frac{d}{100} \\ B_k &= B_{k-1} \left(1 - \frac{d}{100}\right) \end{aligned}$$

$$a_k = a_1 q^{k-1}$$

$$a_k = a_0 q^k$$

Dakle, (B_k) je geometrijski niz s kvocijentom $q = 1 - \frac{d}{100}$ i $B_0 = C$.

$$B_k = C \cdot \left(1 - \frac{d}{100}\right)^k$$

$$\begin{aligned} S &= C \left(1 - \frac{d}{100}\right)^n \bigg/ : C \\ \left(1 - \frac{d}{100}\right)^n &= \frac{S}{C} \bigg/ \sqrt[n]{} \\ 1 - \frac{d}{100} &= \sqrt[n]{\frac{S}{C}} \\ \frac{d}{100} &= 1 - \sqrt[n]{\frac{S}{C}} \bigg/ \cdot 100 \end{aligned}$$

$$d = 100 \cdot \left(1 - \sqrt[n]{\frac{S}{C}}\right)$$

Kako je $B_n = S$, dobivamo da je

$$S = C \left(1 - \frac{d}{100}\right)^n$$

- veličine C, S, n, d nisu međusobno neovisne, već svaka od njih ovisi o preostale tri preko gornje jednakosti
- na primjer, ako su zadani C, S i n , tada d ne možemo birati po volji

Primjer

Oprema ima vrijednost 400 000 kn, životni vijek 5 godina i otpisnu vrijednost 100 000 kn. Napravite amortizacijsku osnovicu koristeći metodu konstantnog postotka.

Rješenje.

k	R_k	D_k	B_k
0	—	—	400 000
1	96 856.69	96 856.69	303 143.31
2	73 403.64	170 260.33	229 739.67
3	55 629.56	225 889.89	174 110.11
4	42 159.32	268 049.21	131 950.79
5	31 950.79	300 000	100 000

$$C = 400\,000$$

$$S = 100\,000$$

$$n = 5$$

$$d = 100 \left(1 - \sqrt[5]{\frac{S}{C}}\right)$$

$$d \approx 24.21417$$

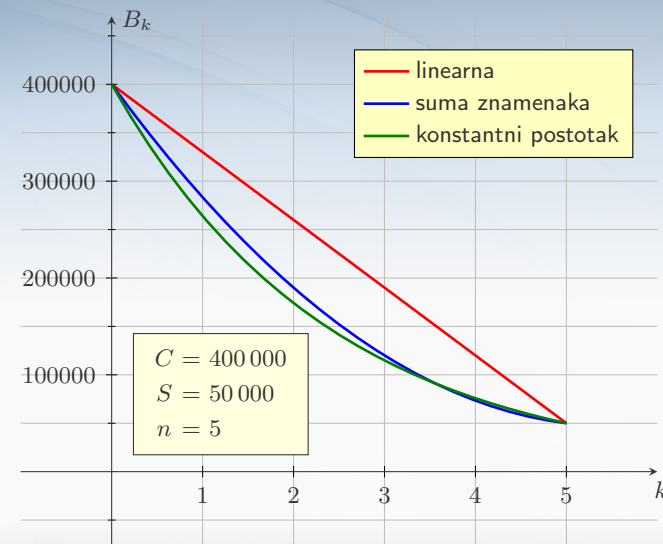
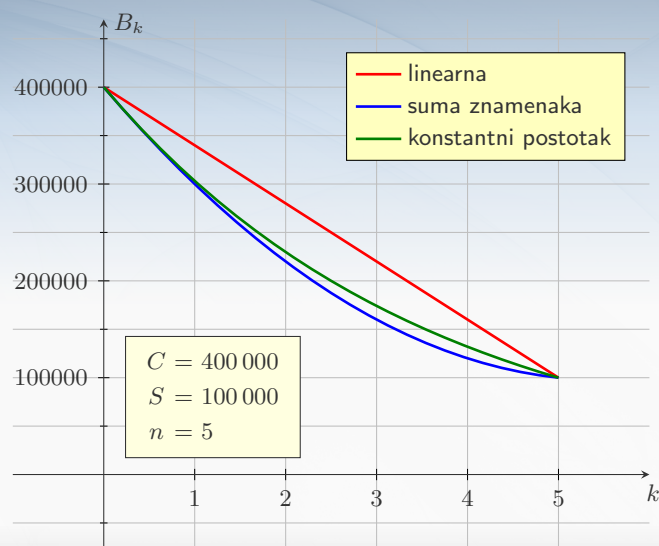
Primjer

Automobil je kupljen po cijeni od 20 000 €, a godišnja stopa amortizacije je 25%. Nađite knjigovodstvenu vrijednost na kraju pete godine i trošak amortizacije za šestu godinu.

Rješenje.

$$B_5 = C \cdot \left(1 - \frac{d}{100}\right)^5 = 20\,000 \cdot \left(1 - \frac{25}{100}\right)^5 = 4746.09$$

$$R_6 = B_5 \cdot \frac{d}{100} = 4746.09 \cdot \frac{25}{100} = 1186.52$$

Usporedba metoda amortizacije**Usporedba metoda amortizacije****Funkcionalna amortizacija**

- amortizacija se obračunava proporcionalno intenzitetu korištenja sredstva za rad ili davanja usluga
- količina usluge: broj sati rada, jedinice proizvoda, prijeđeni kilometri
- Q – planirana količina učinka (ukupni broj proizvoda)
- p_k – količina učinka u k -toj godini (broj proizvoda u k -toj godini)
- $Q = p_1 + p_2 + \dots + p_n$

Trošak amortizacije po jedinici proizvoda

$$a = \frac{C-S}{Q}$$

Trošak amortizacije

$$R_k = p_k \cdot a$$

Primjer

Izradite amortizacijsku osnovicu za stroj čija je vrijednost 60 000 kn, a otpisna 8 000 kn. Predviđeni vijek trajanja stroja je 4 godine, a tijekom tih godina njegov je učinak po broju proizvoda dan u donjoj tablici.

godina	1.	2.	3.	4.
broj proizvoda	4 000	3 500	2 900	2 600

Anticipativni obračun kamata

Rješenje.

k	p_k	R_k	D_k	B_k
0	—	—	—	60 000
1	4 000	16 000	16 000	44 000
2	3 500	14 000	30 000	30 000
3	2 900	11 600	41 600	18 400
4	2 600	10 400	52 000	8 000

$$\begin{aligned} C &= 60\,000 \\ S &= 8\,000 \\ n &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= 4\,000 + 3\,500 + 2\,900 + 2\,600 = 13\,000 \\ a &= \frac{C-S}{Q} = \frac{60\,000-8\,000}{13\,000} = 4 \end{aligned}$$

Pojam anticipativnog obračuna kamata

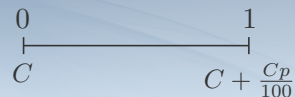
Dekurzivni obračun kamata

- ❑ kamate se obračunavaju na kraju razdoblja ukamaćivanja u odnosu na glavnici s početka tog razdoblja
- ❑ kamate pribrajamo glavnici na kraju razdoblja ukamaćivanja

Anticipativni obračun kamata

- ❑ kamate se obračunavaju na početku razdoblja ukamaćivanja u odnosu na glavnici s kraja tog razdoblja
- ❑ kamate oduzimamo od glavnice na početku razdoblja ukamaćivanja

Dekurzivni obračun kamata



- posuđeni iznos: C
- godišnja kamatna stopa: p
- kamate: $C \cdot \frac{p}{100}$
- na kraju godine se vraća iznos $C + C \cdot \frac{p}{100}$, tj. posuđeni iznos zajedno s kamatama

Anticipativni obračun kamata



- posuđeni iznos: C
- godišnja kamatna stopa: q
- kamate: $C \cdot \frac{q}{100}$
- kamate $C \cdot \frac{q}{100}$ se plaćaju odmah na početku, a na kraju godine se vraća posuđeni iznos C
- dužnik je zapravo posudio iznos $C - C \cdot \frac{q}{100}$, a na kraju godine vratio iznos C

Jednostavni dekurzivni obračun

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

$$C_n = C_0 + C_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot n$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{np}{100}\right)$$

Jednostavni anticipativni obračun kamata

- **jednostavni kamatni račun:** kamate se ne pribrajaju glavnici pa su jednake za svaki period ukamačivanja
- **anticipativni obračun:** kamate se obračunavaju na glavnici C_n s kraja razdoblja (za n godina)
- kamate za jednu godinu: $I = C_n \cdot \frac{q}{100}$
- kamate za n godina: $I_{uk} = C_n \cdot \frac{qn}{100}$

Jednostavni anticipativni obračun

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

$$C_n = C_0 + C_n \cdot \frac{qn}{100}$$

$$C_n - C_n \cdot \frac{qn}{100} = C_0$$

$$C_n \left(1 - \frac{qn}{100}\right) = C_0$$

$$C_n \cdot \frac{100 - qn}{100} = C_0 \quad \Bigg/ \cdot \frac{100}{100 - qn}$$

$$C_n = C_0 \cdot \frac{100}{100 - qn}$$

Izraz ima smisla uz uvjet $100 - qn > 0$, tj. $q < \frac{100}{n}$.

Rast glavnice – jednostavni anticipativni obračun kamata

$$C_n = C_0 \cdot \frac{100}{100 - qn}$$

Sjetimo se od ranije

Rast glavnice – jednostavni dekurzivni obračun kamata

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100}\right)$$

Usporedba rasta glavnice kod jednostavnog dekurzivnog i anticipativnog obračuna kamata

godina	dekurzivni	anticipativni
0	10 000.00	10 000.00
1	10 600.00	10 638.30
2	11 200.00	11 363.64
3	11 800.00	12 195.12
4	12 400.00	13 157.89
5	13 000.00	14 285.71
6	13 600.00	15 625.00
7	14 200.00	17 241.38
8	14 800.00	19 230.77
9	15 400.00	21 739.13
10	16 000.00	25 000.00

Primjer

Kolika je konačna vrijednost glavnice 10 000 kn nakon 5 godina uz

- jednostavni dekurzivni obračun kamata,
 - jednostavni anticipativni obračun kamata
- i godišnju kamatnu stopu 6%?

Rješenje.

anticipativne kamate su veće od dekurzivnih

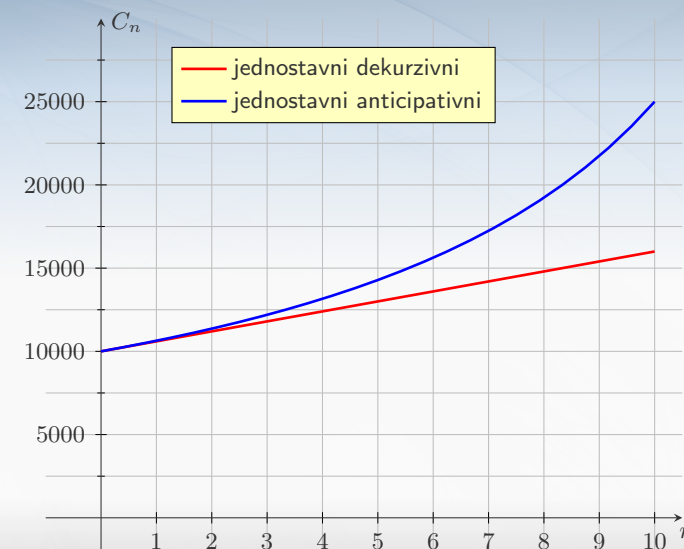
- a. Prema formuli dobivamo

$$C_5 = C_0 \left(1 + \frac{p \cdot 5}{100}\right) = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot 5}{100}\right) = 13\,000$$

- b. Prema formuli dobivamo

$$C_5 = C_0 \cdot \frac{100}{100 - q \cdot 5} = 10\,000 \cdot \frac{100}{100 - 6 \cdot 5} = 14\,285.71$$

Usporedba rasta glavnice kod jednostavnog dekurzivnog i anticipativnog obračuna kamata



Složeni anticipativni obračun kamata

- **složeni kamatni račun**: kamate se pribrajaju glavnici pa su različite za svaki period ukamaćivanja
- **anticipativni obračun**: kamate se obračunavaju na početku razdoblja u odnosu na glavnici s kraja razdoblja

$$\begin{array}{c} \text{-----} k \text{-----} \\ | \qquad \qquad \qquad | \\ C_k - \frac{C_k q}{100} \qquad C_k \end{array}$$

Složeni anticipativni obračun

$$C_n = C_0 \cdot \left(\frac{100}{100-q} \right)^n$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & I_1 & 1 & I_2 & 2 & I_3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ | & & | & & | & & | & & | & | \\ C_0 & & C_1 & & C_2 & & C_3 & & \dots & C_{n-1} & C_n \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} C_1 = C_0 + I_1 & C_2 = C_1 + I_2 & C_3 = C_2 + I_3 \\ C_1 = C_0 + C_1 \cdot \frac{q}{100} & C_2 = C_1 + C_2 \cdot \frac{q}{100} & C_3 = C_2 + C_3 \cdot \frac{q}{100} \\ C_1 - C_1 \cdot \frac{q}{100} = C_0 & C_2 - C_2 \cdot \frac{q}{100} = C_1 & C_3 - C_3 \cdot \frac{q}{100} = C_2 \\ C_1 \left(1 - \frac{q}{100} \right) = C_0 & C_2 \left(1 - \frac{q}{100} \right) = C_1 & C_3 \left(1 - \frac{q}{100} \right) = C_2 \\ C_1 \cdot \frac{100-q}{100} = C_0 & C_2 \cdot \frac{100-q}{100} = C_1 & C_3 \cdot \frac{100-q}{100} = C_2 \\ C_1 = C_0 \cdot \frac{100}{100-q} & C_2 = C_1 \cdot \frac{100}{100-q} & C_3 = C_2 \cdot \frac{100}{100-q} \\ & C_2 = C_0 \cdot \left(\frac{100}{100-q} \right)^2 & C_3 = C_0 \cdot \left(\frac{100}{100-q} \right)^3 \end{array}$$

Složeni dekurzivni obračun

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$$

$$\begin{array}{l} C_1 = C_0 + I_1 \\ C_1 = C_0 + C_0 \cdot \frac{p}{100} \\ C_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & I_1 & 1 & I_2 & 2 & I_3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ | & & | & & | & & | & & | & | \\ C_0 & & C_1 & & C_2 & & C_3 & & \dots & C_{n-1} & C_n \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} C_2 = C_1 + I_2 & C_3 = C_2 + I_3 \\ C_2 = C_1 + C_1 \cdot \frac{p}{100} & C_3 = C_2 + C_2 \cdot \frac{p}{100} \\ C_2 = C_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) & C_3 = C_2 \left(1 + \frac{p}{100} \right) \\ C_2 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100} \right) & C_3 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100} \right) \\ C_2 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2 & C_3 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^3 \end{array}$$

Rast glavnice – složeni anticipativni obračun kamata

$$C_n = C_0 \left(\frac{100}{100-q} \right)^n$$

Sjetimo se od ranije

Rast glavnice – složeni dekurzivni obračun kamata

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$$

Anticipativni kamatni faktor

Uvodimo oznaku za **anticipativni kamatni faktor**

Anticipativni kamatni faktor

$$\rho = \frac{100}{100 - q}$$

Stoga je

Rast glavnice – složeni anticipativni obračun kamata

$$C_n = C_0 \rho^n$$

Primijetimo da izraz ima smisla za $100 - q > 0$, odnosno $q < 100$.

Usporedba rasta glavnice kod složenog dekurzivnog i anticipativnog obračuna kamata

godina	dekurzivni	anticipativni
0	10 000.00	10 000.00
1	10 600.00	10 638.30
2	11 236.00	11 317.34
3	11 910.16	12 039.72
4	12 624.77	12 808.21
5	13 382.26	13 625.76
6	14 185.19	14 495.49
7	15 036.30	15 420.73
8	15 938.48	16 405.04
9	16 894.79	17 452.17
10	17 908.48	18 566.13

Primjer

Kolika je konačna vrijednost glavnice 10 000 kn nakon 5 godina uz

- složeni dekurzivni obračun kamata,
 - složeni anticipativni obračun kamata
- i godišnju kamatnu stopu 6%?

Rješenje.

anticipativne kamate su veće od dekurzivnih

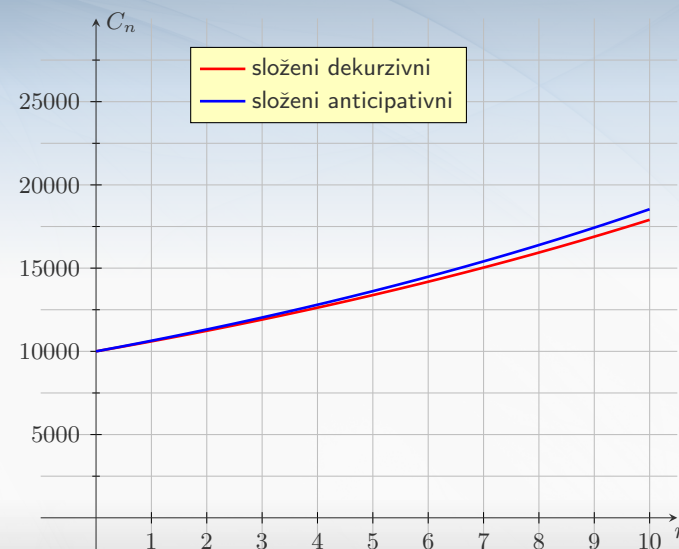
- a. Prema formuli dobivamo

$$C_5 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^5 = 13\,382.26$$

- b. Prema formuli dobivamo

$$C_5 = C_0 \left(\frac{100}{100 - q}\right)^5 = 10\,000 \cdot \left(\frac{100}{100 - 6}\right)^5 = 13\,625.76$$

Usporedba rasta glavnice kod složenog dekurzivnog i anticipativnog obračuna kamata



Svi obračuni kamata

	jednostavni		složeni	
godina	dekurzivni	anticipativni	dekurzivni	anticipativni
0	10 000.00	10 000.00	10 000.00	10 000.00
1	10 600.00	10 638.30	10 600.00	10 638.30
2	11 200.00	11 363.64	11 236.00	11 317.34
3	11 800.00	12 195.12	11 910.16	12 039.72
4	12 400.00	13 157.89	12 624.77	12 808.21
5	13 000.00	14 285.71	13 382.26	13 625.76
6	13 600.00	15 625.00	14 185.19	14 495.49
7	14 200.00	17 241.38	15 036.30	15 420.73
8	14 800.00	19 230.77	15 938.48	16 405.04
9	15 400.00	21 739.13	16 894.79	17 452.17
10	16 000.00	25 000.00	17 908.48	18 566.13

Odnos dekurzivne i anticipativne kamatne stope

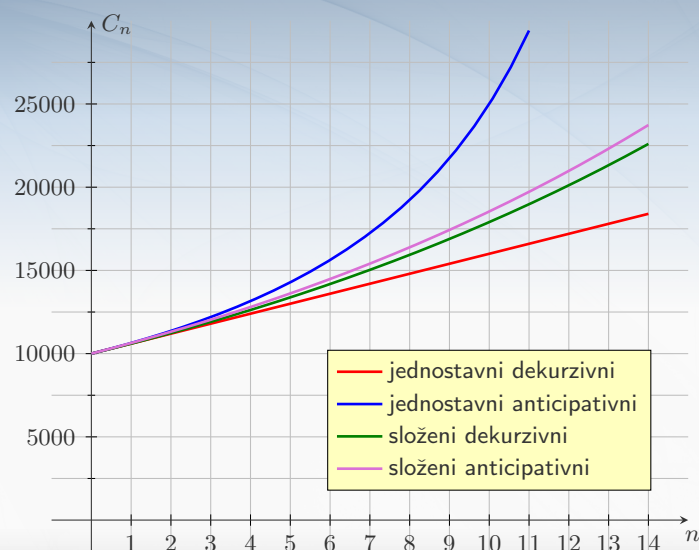
Ako neku glavnici uložimo uz istu dekurzivnu i anticipativnu kamatnu stopu, konačne vrijednosti neće biti jednake. **Veću konačnu vrijednost dobivamo uz anticipativni obračun kamata.** Za zadanu godišnju dekurzivnu kamatnu stopu, ekvivalentnu anticipativnu kamatnu stopu (i obrnuto) možemo odrediti iz relacije

$$C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = C_0 \cdot \frac{100}{100 - q}.$$

Dobivamo

$$p = \frac{100q}{100 - q}, \quad q = \frac{100p}{100 + p}.$$

Svi obračuni kamata



Ispodgodišnje ukamaćivanje

Relativna kamatna stopa q_r dobije se tako da godišnju kamatnu stopu podijelimo brojem razdoblja na koji smo podijelili godinu.

Relativna kamatna stopa

$$q_r = \frac{q}{m}$$

Iznos koji se dobije ako glavnici ukamatimo m puta godišnje uz kamatnu stopu q_r je manji od iznosa kojeg dobijemo ako istu glavnici ukamatimo jednom godišnje uz godišnju kamatnu stopu q . Stoga uvodimo **konformnu kamatnu stopu** q' .

Izvod formule za anticipativnu konformnu kamatnu stopu

Iznos koji se dobije ako glavnici ukamatimo m puta godišnje uz kamatnu stopu q' želimo da bude jednak iznosu kojeg dobijemo ako istu glavnici ukamatimo jednom godišnje uz godišnju kamatnu stopu q .

$$C_0 \cdot \frac{100}{100 - q} = C_0 \left(\frac{100}{100 - q'} \right)^m$$

Iz navedene jednakosti izrazimo q' .

$$q' = 100 \left(1 - \sqrt[m]{\frac{100 - q}{100}} \right)$$

$$q' = 100 \left(1 - \sqrt[m]{1 - \frac{q}{100}} \right)$$

Anticipativna konformna kamatna stopa

$$q' = 100 \left(1 - \sqrt[m]{1 - \frac{q}{100}} \right)$$

Za anticipativni kamatni faktor ρ' vrijedi analogna relacija kao i za dekurzivni kamatni faktor.

$$\rho' = \sqrt[m]{\rho}$$

$$C_0 \cdot \frac{100}{100 - q} = C_0 \left(\frac{100}{100 - q'} \right)^m \quad / : C_0$$

$$\frac{100}{100 - q} = \left(\frac{100}{100 - q'} \right)^m \quad / \sqrt[m]{}$$

$$\sqrt[m]{\frac{100}{100 - q}} = \frac{100}{100 - q'}$$

$$100 - q' = \frac{100}{\sqrt[m]{\frac{100}{100 - q}}}$$

$$q' = 100 \left(1 - \frac{1}{\sqrt[m]{\frac{100}{100 - q}}} \right)$$

$$q' = 100 \left(1 - \frac{\sqrt[m]{100 - q}}{\sqrt[m]{100}} \right)$$

Formule za periodske uplate i isplate

Formule su analogne formulama za dekurzivni kamatni račun uz zamjenu ρ umjesto r .

$$S = R \cdot \rho \cdot \frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} \qquad S' = R \cdot \frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}$$

$$A = R \cdot \frac{\rho^n - 1}{\rho^{n-1}(\rho - 1)} \qquad A' = R \cdot \frac{\rho^n - 1}{\rho^n(\rho - 1)}$$

Primjer

Florijan štedi za novi skuter. Uplaćuje 400 kn početkom svakog mjeseca kroz 39 mjeseci, a prvu ratu je uplatio 1. kolovoza 2004.

- Kolikim iznosom će raspolagati 1. lipnja 2009. godine uz složeni dekurzivni obračun kamata?
- Kolikim iznosom će raspolagati 1. lipnja 2009. godine uz složeni anticipativni obračun kamata?

Godišnja kamatna stopa je u oba slučaja 7.5%.

b. anticipativni obračun kamata



$$\rho = \sqrt[12]{\frac{100}{100 - q}} = \sqrt[12]{\frac{40}{37}}$$

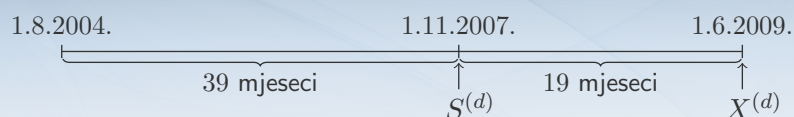
$$S^{(a)} = R \cdot \rho \cdot \frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} = 400 \cdot \sqrt[12]{\frac{40}{37}} \cdot \frac{\sqrt[12]{\frac{40}{37}}^{39} - 1}{\sqrt[12]{\frac{40}{37}} - 1} = 17\,812.11 \text{ kn}$$

$$X^{(a)} = S^{(a)} \cdot \rho^{19} = 17\,812.11 \cdot \sqrt[12]{\frac{40}{37}}^{19} = 20\,152.29 \text{ kn}$$

anticipativne kamate su veće od dekurzivnih

Rješenje.

a. dekurzivni obračun kamata



$$r = \sqrt[12]{1 + \frac{p}{100}} = \sqrt[12]{1.075}$$

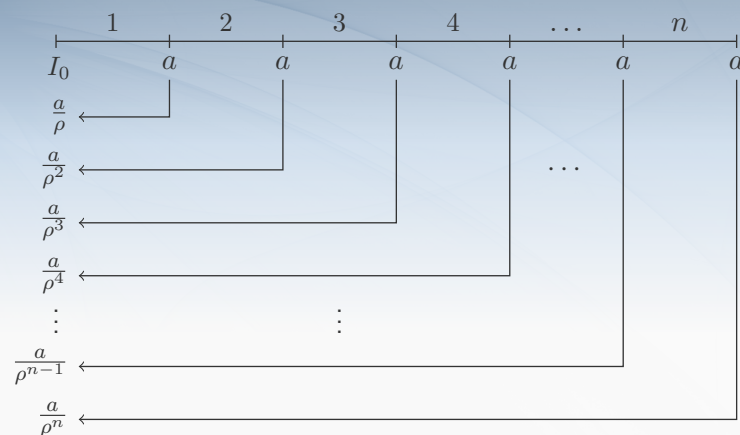
$$S^{(d)} = R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = 400 \cdot \sqrt[12]{1.075} \cdot \frac{\sqrt[12]{1.075}^{39} - 1}{\sqrt[12]{1.075} - 1} = 17\,638.86 \text{ kn}$$

$$X^{(d)} = S^{(d)} \cdot r^{19} = 17\,638.86 \cdot \sqrt[12]{1.075}^{19} = 19\,778.83 \text{ kn}$$

Otplata kredita jednakim anuitetima

- Za razliku od otplate kredita kod dekurzivnog obračuna kamata, kod anticipativnog obračuna svaki anuitet sadrži kamate unaprijed za sljedeći period.
- kod dekurzivnog obračuna kamata: $I_k = O_{k-1} \cdot \frac{p}{100}$
- kod anticipativnog obračuna kamata: $I_k = O_k \cdot \frac{q}{100}$
- pokazuje se da je formula za kredit kod otplate kredita jednakim anuitetima krajem razdoblja uz anticipativni obračun kamata analogna formuli za kredit kod dekurzivnog obračuna, ali uz prenumerando anuitete.

$$K = a \cdot \frac{\rho^n - 1}{\rho^{n-1}(\rho - 1)}$$



$$K = I_0 + \frac{a}{\rho} + \frac{a}{\rho^2} + \frac{a}{\rho^3} + \frac{a}{\rho^4} + \cdots + \frac{a}{\rho^{n-1}} + \frac{a}{\rho^n}$$

Iz jednakosti

$$a = I_k + R_k$$

$$a = I_{k+1} + R_{k+1}$$

slijedi

$$I_k + R_k = I_{k+1} + R_{k+1}$$

$$R_{k+1} = R_k + I_k - I_{k+1}$$

$$R_{k+1} = R_k + \frac{O_k \cdot q}{100} - \frac{O_{k+1} \cdot q}{100}$$

$$R_{k+1} = R_k + \frac{q}{100} (O_k - O_{k+1})$$

$$R_{k+1} = R_k + \frac{q}{100} \cdot R_{k+1} \quad \boxed{O_{k+1} = O_k - R_{k+1}}$$

$$K = I_0 + \frac{a}{\rho} + \frac{a}{\rho^2} + \frac{a}{\rho^3} + \frac{a}{\rho^4} + \cdots + \frac{a}{\rho^{n-1}} + \frac{a}{\rho^n}$$

$$K = I_0 + \frac{a}{\rho^n} (\rho^{n-1} + \rho^{n-2} + \rho^{n-3} + \rho^{n-4} + \cdots + \rho + 1)$$

$$K = I_0 + \frac{a}{\rho^n} \cdot \frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}$$

$$K - I_0 = \frac{a}{\rho^n} \cdot \frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}$$

$$K - K \cdot \frac{q}{100} = \frac{a}{\rho^n} \cdot \frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}$$

$$K - K \cdot \frac{\rho - 1}{\rho} = \frac{a}{\rho^n} \cdot \frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}$$

$$\frac{K}{\rho} = \frac{a}{\rho^n} \cdot \frac{\rho^n - 1}{\rho - 1}$$

$$K = a \cdot \frac{\rho^n - 1}{\rho^{n-1}(\rho - 1)}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{100}{100 - q} \\ (100 - q)\rho &= 100 \\ 100\rho - q\rho &= 100 \\ q\rho &= 100(\rho - 1) \\ \frac{q}{100} &= \frac{\rho - 1}{\rho} \end{aligned}$$

$$\left(1 - \frac{q}{100}\right) \cdot R_{k+1} = R_k$$

$$\frac{100 - q}{100} \cdot R_{k+1} = R_k$$

$$R_{k+1} = R_k \cdot \frac{100}{100 - q} \quad \boxed{\rho = \frac{100}{100 - q}}$$

$$R_{k+1} = R_k \cdot \rho, \quad k = 1, 2, \dots$$

Zaključujemo da je niz (R_k) otplatnih kvota geometrijski niz s kvocijentom ρ pa vrijedi

$$R_k = R_1 \cdot \rho^{k-1}$$

$$a = I_1 + R_1$$

$$R_1 = a - I_1$$

$$R_1 = a - \frac{O_1 \cdot q}{100}$$

$$R_1 = a - \frac{q}{100} \cdot (K - R_1)$$

$$R_1 = a - \frac{q}{100} \cdot K + \frac{q}{100} \cdot R_1$$

$$\frac{100 - q}{100} \cdot R_1 = a - I_0$$

$$I_0 = \frac{K \cdot q}{100}$$

$$R_1 = (a - I_0) \cdot \frac{100}{100 - q}$$

$$\rho = \frac{100}{100 - q}$$

$$R_1 = (a - I_0) \cdot \rho$$

Izrada otplatne osnovice kredita

1. izračunamo anuitet

$$a = K \cdot \frac{\rho^{n-1}(\rho - 1)}{\rho^n - 1}$$

2. izračunamo početne kamate I_0

$$I_0 = K \cdot \frac{q}{100}$$

3. računamo najprije otplatnu kvotu

$$R_k = (a - I_0)\rho^k$$

Otplatne kvote čine geometrijski niz

$$R_k = R_1 \rho^{k-1}$$

4. nakon toga izračunamo kamate i ostatak duga

$$I_k = a - R_k, \quad O_k = O_{k-1} - R_k$$

Konačno, iz

$$R_k = R_1 \cdot \rho^{k-1}$$

$$R_1 = (a - I_0) \cdot \rho$$

slijedi

$$R_k = (a - I_0) \cdot \rho^k$$

Usporedba otplate kredita uz konformno ukamaćivanje

$K = 6\,000$ kn
 $n = 6$ mjeseci
 $p = 13$

$K = 6\,000$ kn
 $n = 6$ mjeseci
 $q = 13$

	dekurzivni obračun				anticipativni obračun			
k	a	I_k	R_k	O_k	a	I_k	R_k	O_k
0	—	—	—	6 000.00	—	69.23	—	6 000.00
1	1 036.13	61.42	974.71	5 025.29	1 029.24	58.02	971.21	5 028.79
2	1 036.13	51.44	984.69	4 040.60	1 029.24	46.69	982.55	4 046.24
3	1 036.13	41.36	994.77	3 045.83	1 029.24	35.22	994.02	3 052.22
4	1 036.13	31.18	1 004.95	2 040.87	1 029.24	23.61	1 005.62	2 046.60
5	1 036.13	20.89	1 015.24	1 025.63	1 029.24	11.88	1 017.36	1 029.24
6	1 036.13	10.50	1 025.63	0.00	1 029.24	0.00	1 029.24	0.00

plaćene kamate: 216.80

plaćene kamate: 244.64

Derivacija funkcije Pravila deriviranja Tablica derivacija Složena funkcija

Derivacija funkcije

PITUP, FOI Financijska matematika – treće predavanje 59/126

Derivacija funkcije Pravila deriviranja Tablica derivacija Složena funkcija

$$k_s = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

PITUP, FOI Financijska matematika – treće predavanje 61/126

Derivacija funkcije Pravila deriviranja Tablica derivacija Složena funkcija

Definicija derivacije

- Isaac Newton (1642.–1727.) – problem brzine
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.–1716.) – problem tangente

Problem

U proizvoljnoj točki $(x_0, f(x_0))$ grafa funkcije f želimo pronaći jednadžbu tangente, tj. pravca koji dira graf funkcije f u toj točki.

Taktika rješavanja problema:

- promatramo sekantu i njezin koeficijent smjera k_s
- naći vezu između tangente i sekante
- odrediti koeficijent smjera k_t tangente

PITUP, FOI Financijska matematika – treće predavanje 60/126

Derivacija funkcije Pravila deriviranja Tablica derivacija Složena funkcija

Kada se točka T_1 po grafu funkcije f približava točki T_0 , sekanta s se približava tangenti t u točki T_0 , a Δx se približava nuli.

Stoga uočavamo sljedeću vezu između koeficijenta smjera tangente i sekante:

$$k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_s$$

Intuitivno, gornju relaciju čitamo na sljedeći način:

kada je Δx jako mali broj, tada je koeficijent smjera k_s sekante jako blizu koeficijenta smjera k_t tangente.

PITUP, FOI Financijska matematika – treće predavanje 62/126

Geometrijska interpretacija derivacije

Derivacija funkcije f u točki x_0 predstavlja koeficijent smjera tangente na graf te funkcije u točki $(x_0, f(x_0))$ koji se računa po formuli

$$k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

uz pretpostavku da navedeni limes postoji.

Pravila deriviranja

Postupak određivanja derivacije funkcije zovemo **deriviranjem**. Umjesto da derivacije funkcija određujemo po definiciji računanjem limesa, navest ćemo osnovna pravila deriviranja.

Derivacija zbroja i razlike funkcija

$$(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$$

$$(u - v)'(x) = u'(x) - v'(x)$$

Motivirani prethodnim razmatranjima definiramo **derivaciju funkcije** f u točki na sljedeći način.

Definicija derivacije funkcije

Derivacija funkcije f u točki x_0 je broj

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ukoliko navedeni limes postoji.

Pravila deriviranja

Derivacija produkta i kvocijenta funkcija

$$(cu)'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$(uv)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

Tablica derivacija

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

Jednostavniji primjeri deriviranja

$$\square f(x) = x^5 \quad f'(x) = 5x^4$$

$$\square g(x) = 5^x \quad g'(x) = 5^x \ln 5$$

$$\square h(x) = x^3 + 5x^2 - x + 8$$

$$(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$$

$$(u - v)'(x) = u'(x) - v'(x)$$

$$(x)' = 1$$

$$(c)' = 0$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$h'(x) = (x^3)' + (5x^2)' - (x)' + (8)' = 3x^2 + 5 \cdot (x^2)' - 1 + 0 =$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$= 3x^2 + 5 \cdot 2x - 1 = 3x^2 + 10x - 1$$

$$(cu)'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\square k(x) = xe^x$$

$$k'(x) = (x)' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = 1 \cdot e^x + xe^x = (1 + x)e^x$$

$$(uv)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$(e^x)' = e^x$$

Pokažimo radi ilustracije zbog čega je $(x^2)' = 2x$. Koristeći definiciju derivacije funkcije

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

slijedi

$$\begin{aligned} (x^2)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot (2x + \Delta x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x + 0 = 2x \end{aligned}$$

ako je Δx jako mali broj, tada je broj $2x + \Delta x$ jako blizu broja $2x$

Derivacija složene funkcije

Derivacija složene funkcije (pravilo o ulančanom deriviranju)

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Intuitivno gornju formulu možemo pročitati na sljedeći način:

$$[f(\text{nešto})]' = f'(\text{nešto}) \cdot (\text{nešto})'$$

Derivacija funkcije	Pravila deriviranja	Tablica derivacija	Složena funkcija
Tablica derivacija		Derivacija složene funkcije	
$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	c	0
x	1	nešto	$(\text{nešto})'$
x^2	$2x$	$(\text{nešto})^2$	$2(\text{nešto}) \cdot (\text{nešto})'$
x^n	nx^{n-1}	$(\text{nešto})^n$	$n(\text{nešto})^{n-1} \cdot (\text{nešto})'$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{\text{nešto}}$	$\frac{1}{2\sqrt{\text{nešto}}} \cdot (\text{nešto})'$
e^x	e^x	$e^{\text{nešto}}$	$e^{\text{nešto}} \cdot (\text{nešto})'$
a^x	$a^x \ln a$	$a^{\text{nešto}}$	$a^{\text{nešto}} \ln a \cdot (\text{nešto})'$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln(\text{nešto})$	$\frac{1}{\text{nešto}} \cdot (\text{nešto})'$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\log_a(\text{nešto})$	$\frac{1}{\text{nešto} \cdot \ln a} \cdot (\text{nešto})'$

Linearna funkcija	Trošak	Potražnja	Ponuda	Elastičnost	Politika	Elast. ponude	Elast. troškova
-------------------	--------	-----------	--------	-------------	----------	---------------	-----------------

Primjena derivacija u ekonomiji

Derivacija funkcije	Pravila deriviranja	Tablica derivacija	Složena funkcija
---------------------	---------------------	--------------------	------------------

Primjer deriviranja složene funkcije

□ $f(x) = \sqrt{100 - 10x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{100 - 10x}} \cdot (100 - 10x)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{100 - 10x}} \cdot (0 - 10 \cdot 1) =$$

$$= \frac{-10}{2\sqrt{100 - 10x}} =$$

$$= \frac{-5}{\sqrt{100 - 10x}}$$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 $(\sqrt{\text{nešto}})' = \frac{1}{2\sqrt{\text{nešto}}} \cdot (\text{nešto})'$

$(x)' = 1$
 $(c)' = 0$

$(cu)'(x) = c \cdot u'(x)$
 $(u - v)'(x) = u'(x) - v'(x)$

Linearna funkcija	Trošak	Potražnja	Ponuda	Elastičnost	Politika	Elast. ponude	Elast. troškova
-------------------	--------	-----------	--------	-------------	----------	---------------	-----------------

Linearna funkcija

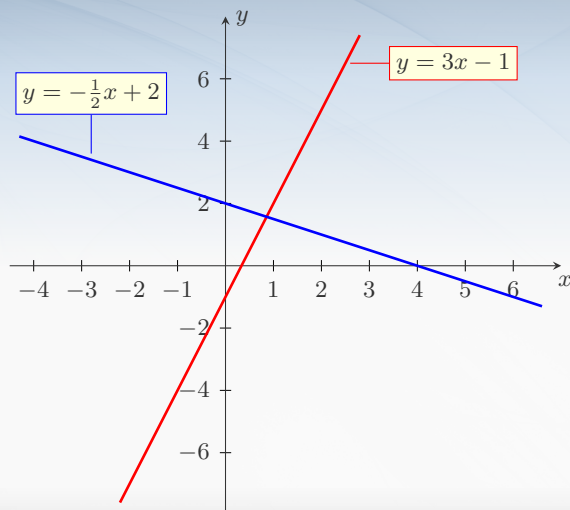
Mnoge veze među ekonomskim veličinama mogu se prikazati pomoću linearne funkcije. Zbog toga se ona posebno ističe.

Linearna funkcija zadaje se na sljedeći način:

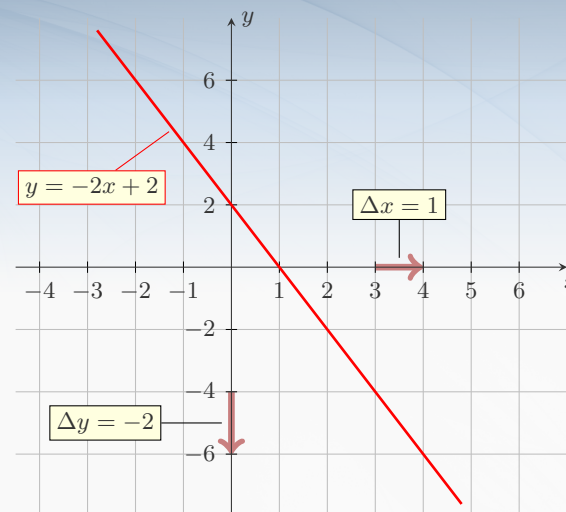
- algebarski:** $f(x) = ax + b$
primjer: $f(x) = 2x + 1$
- jednadžbom:** $y = ax + b$
primjer: $y = 2x + 1$

pri čemu su $a, b \in \mathbb{R}$. Graf linearne funkcije je pravac.

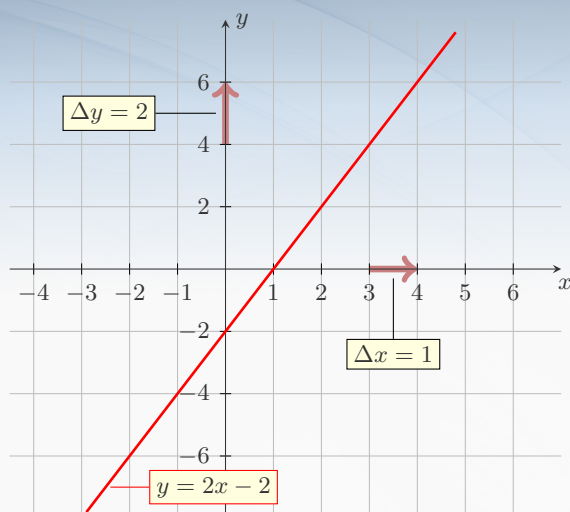
Na slici su nacrtani pravci $y = 3x - 1$ i $y = -\frac{1}{2}x + 2$. Pridružite svakom pravcu njegovu jednažbu.



Za svaki porast nezavisne varijable x za 1, zavisna varijabla y smanji se za 2.



Za svaki porast nezavisne varijable x za 1, zavisna varijabla y poraste za 2.



Kod linearne funkcije $y = ax + b$ uvijek vrijedi

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

Specijalno, ako je $\Delta x = 1$, tada je $\Delta y = a$.

- Ako je $a > 0$, tada povećanje nezavisne varijable x za 1 na bilo kojoj razini uzrokuje povećanje zavisne varijable y za a jedinica.
- Ako je $a < 0$, tada povećanje nezavisne varijable x za 1 na bilo kojoj razini uzrokuje smanjenje zavisne varijable y za $|a|$ jedinica.

Općenito, iz $\Delta y = a \cdot \Delta x$ zaključujemo sljedeće. Kod linearne funkcije $y = ax + b$ promjena nezavisne varijable x za Δx na bilo kojoj razini uzrokuje promjenu zavisne varijable y za $a \cdot \Delta x$.

Funkcija troškova

Funkcija troškova je općenito funkcija oblika

$$T = f(Q, p_1, p_2, \dots, p_n)$$

pri čemu je Q količina proizvodnje, a $p_1, p_2, \dots, p_n$ su cijene pojedinih faktora proizvodnje. Ova opća funkcija može se pojednostavniti i prilagoditi konkretnoj situaciji uvažavajući sljedeće pretpostavke:

- broj faktora proizvodnje smatra se konstantnim,
- cijene faktora proizvodnje smatraju se konstantnima,
- tehnički parametri proizvodnje se ne mijenjaju,
- struktura proizvodnje (asortiman i kvaliteta) se ne mijenja.

Vrste troškova

Fiksni i varijabilni troškovi. U funkciji troškova može se prepoznati varijabilan dio koji direktno ovisi o proizvodnji i konstantan, nepromjenjiv dio koji se ne mijenja bez obzira na promjene obujma proizvodnje. Zbog toga se funkcija troškova proizvodnje može promatrati kao suma fiksnih troškova i varijabilnih troškova.

$$T = T_F + T_V$$

U analizi troškova koriste se i funkcije **prosječnih fiksnih troškova** $\frac{T_F}{Q}$ i **prosječnih varijabilnih troškova** $\frac{T_V}{Q}$.

Najčešće se funkcija troškova daje u obliku $T = f(Q)$. Posebni oblici te funkcije su:

$$T = aQ + b, \quad T = aQ^2 + bQ + c,$$

$$T = aQ^{\frac{m}{n}} + b, \quad T = aQ \frac{Q + b}{Q + c} + d,$$

$$T = ae^{bQ}, \quad T = aQ^3 - bQ^2 + cQ + d.$$

Varijabla Q je količina proizvodnje. Parametri koji se javljaju u ovim funkcijama su pozitivne konstante.

Prosječni troškovi. Funkcija prosječnih troškova (troškova po jedinici proizvoda) dobije se tako da se funkcija troškova podijeli s brojem proizvoda Q .

$$T_p = \frac{T}{Q}$$

Vrijedi opće pravilo da prosječni troškovi padaju s porastom proizvodnje. Za potpuniju analizu odnosa između obujma proizvodnje i različitih posebnih oblika troškova potrebno je još poznavati pojmove **elastičnost troškova** i **granične troškove**.

Linearna funkcija troškova

Linearna funkcija troškova je funkcija oblika

$$T = ax + b$$

pri čemu je T **ukupni trošak**, a x je **broj proizvoda**.

Broj a zove se **granični** ili **marginalni trošak**. Ovaj broj pokazuje za koliko se povećava trošak ako se broj proizvoda poveća za 1.

Broj b zove se **fiksni trošak** i on pokazuje koliki troškovi postoje i kada nema proizvodnje.

U nekim situacijama linearna funkcija troškova označava se s

$$T = T_G x + T_F.$$

Varijabla x izražava se u broju komada proizvoda (osim ako se ne navede drugačije), a T_G i T_F u novčanim jedinicama.

Primjer

Funkcija troškova tiskanja kalendara je $T(x) = 12x + 6000$, a jedan kalendar se prodaje po 22 kn.

- Koliko stoji tiskanje 200 kalendara?
- Koliko stoji tiskanje 201 kalendara?
- Koliki je trošak tiskanja svakog dodatnog kalendara?
- Koliki je prihod od prodaje 80 kalendara?
- Odredite funkciju dobiti i dobit od prodaje 1000 kalendara i 400 kalendara.
- Odredite točku pokrića.

Linearna funkcija prihoda i dobiti

Iz ekonomike poduzeća poznato je da je prihod funkcija količine prodaje. Ukoliko se radi o linearnoj funkciji oblika $y = ax$, broj a predstavlja prihod po jedinici prodanog proizvoda. Taj broj zove se **granični** ili **marginalni prihod**.

Dobit (profit) proizlazi iz prihoda i troškova. Funkcija dobiti je linearna ukoliko su linearne funkcije prihoda i troškova.

Dobit ili profit

$$\text{Dobit} = \text{Prihod} - \text{Troškovi, tj. } D = P - T$$

Ukoliko je vrijednost za D negativna, govori se o gubitku.

Za količinu prodaje za koju je $D = 0$ kaže se da pokriva proizvodnju.

Točka pokrića je određena jednačinom $P = T$.

Rješenje.

$$T(x) = 12x + 6000$$

- $T(200) = 12 \cdot 200 + 6000 = 8400$.
Tiskanje 200 kalendara stoji 8400 kn.

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = 12$$

- Iz $\Delta x = 1$ slijedi $\Delta T = 12$. Stoga je

$$T(201) = 8400 + 12 = 8412.$$

Možemo izračunati i direktno.

$$T(201) = 12 \cdot 201 + 6000 = 8412.$$

- Trošak tiskanja svakog dodatnog kalendara iznosi 12 kn.

d. Kako se jedan kalendar prodaje po 22 kn, prihod od x kalendara jednak je $P(x) = 22x$. Stoga je $P(80) = 22 \cdot 80 = 1760$ pa prihod od 80 kalendara iznosi 1760 kn.

e. Funkcija dobiti jednaka je

$$D(x) = P(x) - T(x)$$

$$D(x) = 22x - (12x + 6000)$$

$$D(x) = 10x - 6000$$

Stoga je

$$D(1000) = 10 \cdot 1000 - 6000 = 4000$$

$$D(400) = 10 \cdot 400 - 6000 = -2000$$

Dakle, u slučaju prodaje samo 400 kalendara bit ćemo u gubitku od 2000 kn.

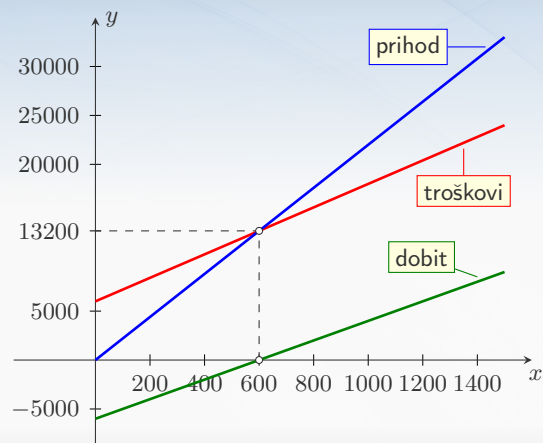
Funkcija potražnje

Funkcija potražnje

Funkcija potražnje pokazuje kako količina robe koja se traži ovisi o njezinoj cijeni.

Funkcija potražnje je u pravilu padajuća funkcija jer povećanje cijene neke robe dovodi do smanjenja potražnje za tom robom. U nekim slučajevima funkcija potražnje je linearna funkcija.

f. Rješavanjem jednadžbe $D = 0$, tj. $10x - 6000 = 0$, dobivamo točku pokrića $x = 600$. Dakle, moramo prodati barem 600 kalendara ako ne želimo biti u gubitku.



Linearna funkcija potražnje

Linearna funkcija potražnje je funkcija oblika

$$q = ap + b$$

pri čemu je p **cijena proizvoda**, a q **ukupna potražnja** uz cijenu p .

Kako je funkcija potražnje padajuća funkcija, a je negativni broj koji pokazuje za koliko (izraženo brojem proizvoda) se smanjuje potražnja ako se cijena poveća za jednu novčanu jedinicu.

Broj b pokazuje kolika je potreba tržišta za određenom robom. Strogo formalno gledajući, to bi se moglo interpretirati kao potražnja za robom kada bi ona bila besplatna.

Primjer

Dnevna potražnja za pamučnim majicama dana je s

$$q = -0.8p + 150,$$

pri čemu je p cijena u kunama.

- Koliko se majica maksimalno traži dnevno?
- Koliko se majica proda dnevno ako je cijena 30 kn?
- Koliko se proda majica dnevno ako je cijena 31 kn?
- Za koliko bi trebalo smanjiti cijenu da se proda jedna majica više dnevno? Ovisi li to o trenutnoj cijeni?
- Za koliko bi trebalo smanjiti cijenu da se prodaju 3 majice više dnevno?

d. Iz $\Delta q = 1$ i $\Delta q = -0.8 \cdot \Delta p$ slijedi

$$\Delta p = \frac{1}{-0.8} = -1.25.$$

$$q = -0.8p + 150$$

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} = -0.8$$

Ako želimo dnevno prodati jednu majicu više, trebamo cijenu smanjiti za 1 kunu i 25 lipa. Ovo sniženje ne ovisi o trenutnoj cijeni majice jer se radi o linearnoj funkciji potražnje.

e. Iz $\Delta q = 3$ i $\Delta q = -0.8 \cdot \Delta p$ slijedi

$$\Delta p = \frac{3}{-0.8} = -3.75.$$

Ako želimo dnevno prodati tri majice više, trebamo cijenu smanjiti za 3 kune i 75 lipa.

Rješenje.

$$q = -0.8p + 150$$

a. Dnevno se maksimalno traži 150 majica.

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} = -0.8$$

b. $q(30) = -0.8 \cdot 30 + 150 = 126$

Po cijeni od 30 kn dnevno se proda 126 majica.

c. Iz $\Delta p = 1$ slijedi $\Delta q = -0.8$. Stoga je

$$q(31) = 126 - 0.8 = 125.2.$$

Možemo izračunati i direktno.

$$q(31) = -0.8 \cdot 31 + 150 = 125.2$$

Funkcija ponude**Funkcija ponude**

Funkcija ponude pokazuje kako količina robe koja se nudi ovisi o njezinoj cijeni.

Uz porast cijena na tržištu dobavljači su spremni ponuditi veće količine robe. Stoga je u općem slučaju funkcija ponude rastuća funkcija. U nekim slučajevima funkcija ponude je linearna funkcija.

Linearna funkcija ponude

Linearna funkcija ponude je funkcija oblika

$$q = ap + b$$

pri čemu je p je **cijena proizvoda**, a q **ukupna ponuda** uz cijenu p .

Kako je funkcija ponude rastuća funkcija, a je pozitivni broj koji pokazuje koliko se komada robe nudi više ako se cijena poveća za jednu novčanu jedinicu.

Strogo formalno gledajući, broj b se može interpretirati kao količina robe koja se nudi besplatno.

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} = 1.4$$

$$q = 1.4p + 53$$

Rješenje.

- Minimalna ponuda je 53 majice dnevno uz cijenu 0 kn.
- Iz $\Delta p = 5$ i $\Delta q = 1.4 \cdot \Delta p$ dobivamo $\Delta q = 1.4 \cdot 5 = 7$.
Ako se cijena poveća za 5 kn, ponuda će se povećati za 7 majica više dnevno.
- Iz $\Delta q = 1$ i $\Delta q = 1.4 \cdot \Delta p$ dobivamo $\Delta p = \frac{1}{1.4} = 0.71$.
Kako bi se ponudila dnevno jedna majica više, treba cijenu povećati za 71 lipu.

Primjer

Funkcija dnevne ponude pamučnih majica je $q = 1.4p + 53$ pri čemu je p cijena u kunama.

- Kolika je minimalna ponuda i uz koju cijenu?
- Za koliko se poveća ponuda ako se cijena povisi za 5 kn?
- Za koliko treba povisiti cijenu da bi se ponudila jedna majica više dnevno?

Ekvilibrij. Model tržišta

Cijena ekvilibrija

Cijena ekvilibrija je cijena za koju je ponuda robe jednaka potražnji te robe.

Model tržišta

Model tržišta sastoji se od funkcije ponude, funkcije potražnje i cijene u ekvilibriju.

Primjer

Dnevna potražnja za pamučnim majicama dana je linearnom funkcijom $q_1 = -0.8p + 150$, a ponuda linearnom funkcijom $q_2 = 1.4p + 53$. Odredite cijenu ekvilibrija.

Rješenje.

Treba funkciju ponude izjednačiti s funkcijom potražnje i riješiti dobivenu jednadžbu.

$$1.4p + 53 = -0.8p + 150$$

$$2.2p = 97$$

$$p = 44.09$$

Dakle, cijena ekvilibrija jednaka je 44.09 kn.

Elastičnost potražnje

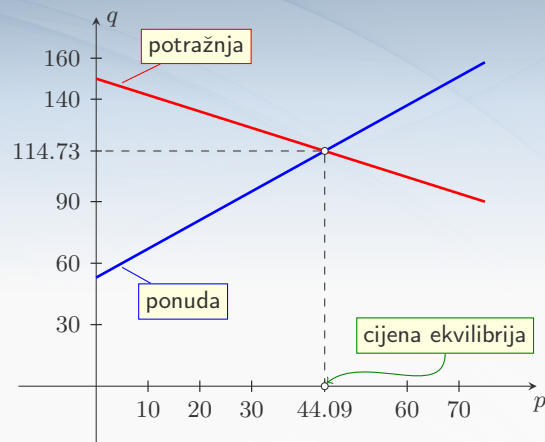
Elastičnost potražnje pokazuje kako je osjetljiva potražnja za nekom robom na promjenu njezine cijene.

Elastičnost potražnje

Elastičnost potražnje se izražava brojem koji pokazuje za koliko posto se mijenja potražnja kada se cijena promijeni za 1%.

Primjer

Utvrđeno je da za jednu vrstu robe vrijedi: ako se cijena poveća za 1%, potražnja za robom padne za 5%. Kaže se: **cjenovna elastičnost potražnje za tom robom je -5**.

**Elastična i neelastična potražnja**

- Ako cijena benzina poraste za 1% i potražnja potom padne za 0.3%, kaže se da je elastičnost potražnje 0.3.
- Ako cijena krznene odjeće poraste za 1% i potražnja padne za 6%, kaže se da je elastičnost potražnje 6.

Potražnja za krznom je osjetljivija na promjenu cijene od potražnje za benzinom.

Ako je elastičnost u granicama $\langle -1, 1 \rangle$, kaže se da je **potražnja neelastična**.

Ako je elastičnost po apsolutnoj vrijednosti veća od 1, kaže se da je **potražnja elastična**.

Ako je elastičnost jednaka 1, govori se o **jediničnoj elastičnosti**.

Mjerenje elastičnosti

U praksi se koriste dvije formule za mjerenje elastičnosti. Koja od njih će se koristiti ovisi o tome u kojem obliku je zadana veza između zavisne varijable (npr. potražnje) i nezavisne varijable (npr. cijene). Ekonomske funkcije često se zadaju u obliku tablice, a mogu se zadati i algebarski. Za svaki od spomenutih načina zadavanja funkcije postoji odgovarajuća formula za izračunavanje elastičnosti.

Primjer

Dani su sljedeći podaci o potražnji za robom ovisno o cijeni.

Cijena	Potražnja
30	18
32	17
34	16
36	15
38	14
40	13
42	12

Izračunajte elastičnost potražnje kada je cijena jednaka 32.

P – cijena robe

Q – potražnja uz cijenu P

ΔP – mala promjena postojeće cijene

ΔQ – mala promjena tražene količine

Iz osnovne formule postotnog računa

$$y = \frac{p}{100} \cdot x$$

slijedi

$$p = \frac{100y}{x}$$

Elastičnost potražnje = $\frac{\text{promjena količine u \% na razini } Q}{\text{promjena cijene u \% na razini } P}$

$$\text{Elastičnost} = \frac{\frac{100 \cdot \Delta Q}{Q}}{\frac{100 \cdot \Delta P}{P}} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta P}$$

Formula za elastičnost potražnje zadane tablicom

$$E_{Q,P} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta P}$$

Rješenje.

Prema formuli za elastičnost imamo

$$E_{q,p} = \frac{p}{q} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{32}{17} \cdot \frac{16 - 17}{34 - 32} = -\frac{16}{17} \approx -0.94.$$

Dakle, $E_{q,p}(32) = -0.94$.

Interpretacija dobivenog podatka. Ako na razini cijene $p = 32$ cijenu povećamo za 1%, potražnja će se smanjiti za 0.94%.

Napomena

Negativna elastičnost ukazuje na to da je smjer promjene suprotan, tj. povećanje nezavisne varijable dovodi do smanjivanja vrijednosti zavisne varijable.

Ako je potražnja zadana formulom $Q = Q(P)$, tada se njezina elastičnost računa pomoću sljedeće formule.

Formula za elastičnost potražnje zadane algebarski

$$E_{Q,P}(P) = \frac{P}{Q(P)} \cdot Q'(P)$$

Primjer

Zadana je funkcija potražnje $q = -0.6p + 120$. Odredite elastičnost potražnje na razini cijene $p = 50$ i interpretirajte dobiveni rezultat.

Rješenje.

Kako je $q' = -0.6$, slijedi

$$E_{q,p} = \frac{p}{q} \cdot q' = \frac{p}{-0.6p + 120} \cdot (-0.6) = \frac{0.6p}{0.6p - 120}.$$

Dobili smo funkciju elastičnosti. Za cijenu $p = 50$ dobivamo

$$E_{q,p}(50) = \frac{0.6 \cdot 50}{0.6 \cdot 50 - 120} = \frac{30}{-90} = -\frac{1}{3} \approx -0.33.$$

Interpretacija dobivenog podatka. Ako na razini cijene $p = 50$ cijenu povećamo za 1%, potražnja će se smanjiti za 0.33%.

Sjetimo se da za derivabilnu funkciju $Q = Q(P)$ vrijedi

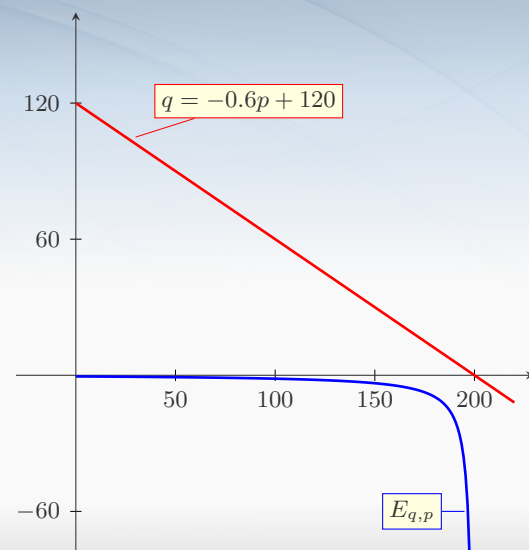
$$Q'(P) = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta P} = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{Q(P + \Delta P) - Q(P)}{\Delta P}.$$

Stoga za male promjene ΔP vrijedi

$$Q'(P) \approx \frac{\Delta Q}{\Delta P}$$

pa o formuli $E_{Q,P} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta P}$ možemo razmišljati kao o aproksimacijskoj formuli formule $E_{Q,P} = \frac{P}{Q} \cdot Q'$.

Objasnite kako na temelju donje slike možete uočiti ponašanje potražnje s obzirom na promjenu cijene za 1% na različitim razinama.



Elastičnost funkcije

Postoje različiti tipovi elastičnosti ovisno o tome koje ekonomske veličine se povezuju. Tako se govori o

- elastičnosti potražnje s obzirom na cijenu,
- elastičnosti potražnje s obzirom na dohodak,
- elastičnosti ponude s obzirom na cijenu,
- elastičnosti troškova s obzirom na količinu proizvoda, itd.

Općenito možemo promatrati elastičnost funkcije $y = f(x)$, a u konkretnom kontekstu tada nezavisnoj varijabli x i zavisnoj varijabli y pridajemo određeno značenje. Na primjer, u slučaju potražnje x je cijena koju najčešće označavamo s p , a y je potražnja koju najčešće označavamo s q pa u tom slučaju imamo funkciju $q = q(p)$.

Primjer

Odredite elastičnost homogene funkcije $y = ax^n$.

Rješenje.

Prema formuli za računanje elastičnosti slijedi

$$\begin{aligned} E_{y,x} &= \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{ax^n} \cdot (ax^n)' = \\ &= \frac{x}{ax^n} \cdot anx^{n-1} = \frac{anx^n}{ax^n} = n. \end{aligned}$$

Dakle, na svakoj razini promjena nezavisne varijable x za 1% uzrokuje promjenu zavisne varijable y za $n\%$.

Ako je funkcija zadana formulom $y = f(x)$, tada se njezina elastičnost računa pomoću sljedeće formule.

Elastičnost funkcije

$$E_{y(x),x}(x) = \frac{x}{y(x)} \cdot y'(x)$$

Za male promjene nezavisne varijable na određenoj razini vrijedi

$$\text{Elastičnost} \approx \frac{\text{promjena zavisne varijable u } \%}{\text{promjena nezavisne varijable u } \%}$$

ili kratko

$$E_{y,x}(x) \approx \frac{\Delta y\%}{\Delta x\%}$$

gdje je $\Delta y\% = \frac{100 \cdot \Delta y}{y}$ i $\Delta x\% = \frac{100 \cdot \Delta x}{x}$. Zapravo vrijedi

$$E_{y,x}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y\%}{\Delta x\%}.$$

Pravila za računanje elastičnosti

Neka su $u = u(x)$ i $v = v(x)$ derivabilne funkcije. Tada vrijede sljedeća pravila:

1. Elastičnost zbroja i razlike

$$E_{u \pm v, x} = \frac{x}{u \pm v} (u' \pm v')$$

2. Elastičnost produkta

$$E_{u \cdot v, x} = E_{u, x} + E_{v, x}$$

3. Elastičnost kvocijenta

$$E_{\frac{u}{v}, x} = E_{u, x} - E_{v, x}$$

4. Elastičnost složene funkcije

$$E_{u \circ v, x} = E_{u, v(x)} \cdot E_{v, x}$$

Elastičnost potražnje i politika cijena

Ako proizvođač uz određenu cijenu p prodaje poznatu količinu robe q , to mu donosi prihod $P(p) = p \cdot q(p)$.

Ukoliko želi na povećanje prihoda djelovati samo promjenom cijene,

- on može smanjiti cijenu i računati da će zbog povećane prodaje ostvariti veći prihod,
- ili povećati cijenu računajući da će unatoč manjoj potražnji zbog te povećane cijene ostvareni prihod biti na kraju veći.

U odgovoru na pitanje koju od ovih strategija odabrati pomaže elastičnost.

a. Kako je

$$E_{q,p}(5) = \frac{5}{2 \cdot 5 - 20} = -0.5,$$

zaključujemo da povećanje cijene od 1% na razini $p = 5$ smanjuje potražnju za 0.5% pa prihod raste.

- Prihod od prodaje x komada robe uz cijenu $p = 5$ jednak je $P = 5x$.
- Povećamo li cijenu za 1% dobivamo novu cijenu $p = 5.05$, a potražnja se smanji za 0.5% i iznosi $0.995x$.
- Novi prihod jednak je $P = 5.05 \cdot 0.995x = 5.02475x$.
- Dakle, želimo li povećati prihod, u ovom slučaju moramo povećati cijenu.

Primjer

Funkcija potražnje zadana je formulom $q = \sqrt{100 - 10p}$. Ukoliko se želi povećati prihod od prodaje, treba li povećati ili smanjiti cijenu u slučaju

- a. $p = 5$, b. $p = 8$?

Rješenje.

Odredimo najprije elastičnost potražnje.

$$\begin{aligned} E_{q,p} &= \frac{p}{q} \cdot q' = \frac{p}{\sqrt{100 - 10p}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{100 - 10p}} \cdot (-10) = \\ &= \frac{-5p}{100 - 10p} = \frac{p}{2p - 20} \end{aligned}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

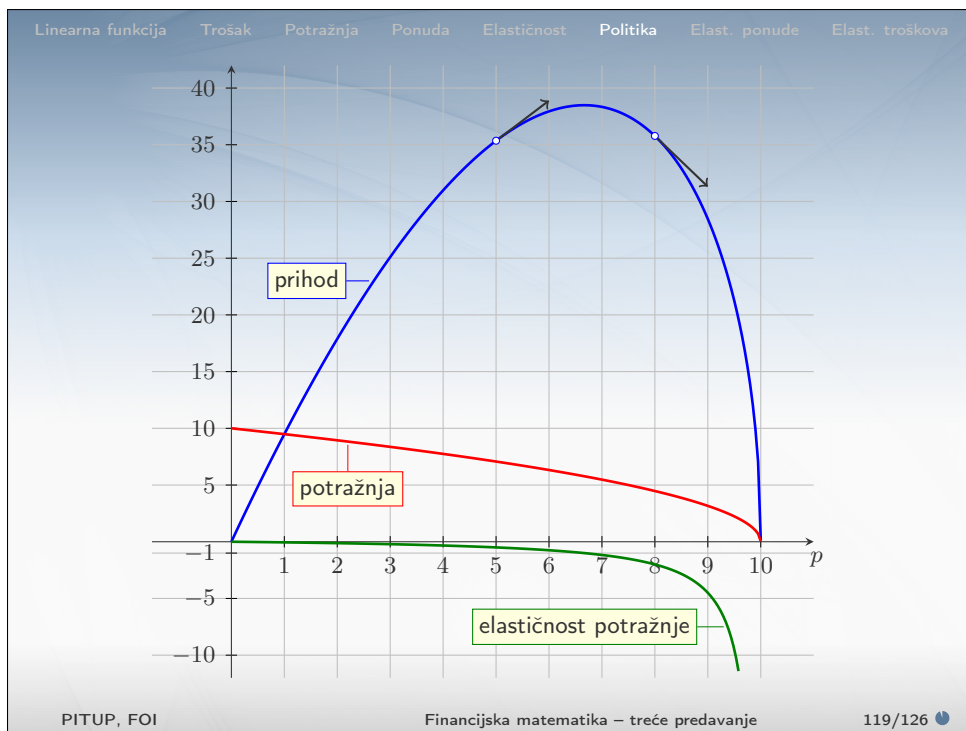
$$(\sqrt{\text{nešto}})' = \frac{1}{2\sqrt{\text{nešto}}} \cdot (\text{nešto})'$$

b. Kako je

$$E_{q,p}(8) = \frac{8}{2 \cdot 8 - 20} = -2,$$

zaključujemo da povećanje cijene od 1% na razini $p = 8$ smanjuje potražnju za 2% pa prihod pada.

- Prihod od prodaje x komada robe uz cijenu $p = 8$ jednak je $P = 8x$.
- Povećamo li cijenu za 1% dobivamo novu cijenu $p = 8.08$, a potražnja se smanji za 2% i iznosi $0.98x$.
- Novi prihod jednak je $P = 8.08 \cdot 0.98x = 7.9184x$.
- Dakle, želimo li povećati prihod, u ovom slučaju moramo smanjiti cijenu.



Elastičnost ponude

Elastičnost ponude pokazuje kako je osjetljiva ponuda za nekom robom na promjenu njezine cijene.

Elastičnost ponude

Elastičnost ponude se izražava brojem koji pokazuje za koliko posto se mijenja ponuda kada se cijena promijeni za 1%.

Primjer

Utvrđeno je da za jednu vrstu robe vrijedi: ako se cijena poveća za 1%, ponuda za robom poraste za 3%. Kaže se: **cjenovna elastičnost ponude za tom robom je 3.**

Linearna funkcija Trošak Potražnja Ponuda Elastičnost Politika Elast. ponude Elast. troškova

Elastičnost	$E_{q,p} < -1$	$-1 < E_{q,p} < 0$
Smanjenje cijene	Prihod raste	Prihod pada
Povećanje cijene	Prihod pada	Prihod raste

O tablici možemo intuitivno razmišljati na sljedeći način.

- Ako je potražnja neelastična u cijeni p , tada ne reagira jako na promjenu trenutne cijene, a to nam daje slobodu da cijenu malo povećamo kako bismo povećali ukupni prihod.
- Ako je potražnja elastična u cijeni p , tada reagira jako na promjenu trenutne cijene pa više nemamo slobodu povećavati cijenu, već ju moramo smanjiti ukoliko želimo povećati ukupni prihod.

PITUP, FOI Financijska matematika – treće predavanje 120/126

Elastičnost troškova

Funkciju troškova ovdje promatramo kao funkciju jedne varijable, tj. kao funkciju količine proizvoda $T = T(Q)$.

Elastičnost troškova

Elastičnost troškova se izražava brojem koji pokazuje za koliko posto se mijenjaju troškovi kada se količina proizvodnje promijeni za 1%.

Elastičnost troškova računa se po standardnoj formuli

Formula za elastičnost troškova

$$E_{T,Q} = \frac{Q}{T} T'$$

Granični trošak

Granični trošak pokazuje za koliko se poveća trošak ako se proizvodnja poveća za jedan proizvod.

Funkcija graničnih ili marginalnih troškova T_g dobije se kao derivacija funkcije troškova, tj. $T_g = T'$.

Prosječni trošak

Prosječni trošak je trošak po jedinici proizvoda.

Funkcija prosječnih troškova T_p dobije se tako da se funkcija troškova podijeli s brojem proizvoda, tj. $T_p = \frac{T}{Q}$.

Iz $E_{T,Q} = \frac{Q}{T} T'$ te definicija graničnih i prosječnih troškova proizlazi

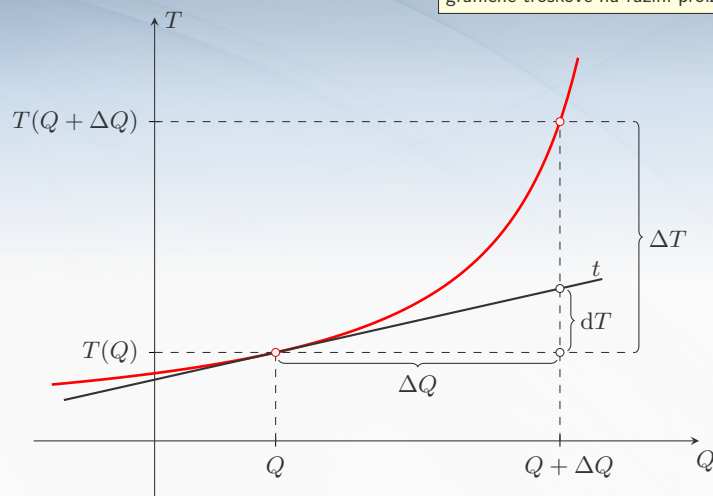
$$E_{T,Q} = \frac{Q}{T} T' = \frac{T'}{\frac{T}{Q}} = \frac{T_g}{T_p} = \frac{\text{granični troškovi}}{\text{prosječni troškovi}}.$$

Veza između $E_{T,Q}$, T_g i T_p

$$E_{T,Q} = \frac{T_g}{T_p}$$

Vizualizacija graničnih troškova

Kada je $\Delta Q = 1$, tada dT predstavlja granične troškove na razini proizvodnje Q .



Iz definicije prosječnih troškova i pravila za računanje elastičnosti kvocijenta slijedi

$$E_{T_p,Q} = E_{\frac{T}{Q},Q} = E_{T,Q} - E_{Q,Q} = E_{T,Q} - 1.$$

Veza između elastičnosti troškova i prosječnih troškova

$$E_{T_p,Q} = E_{T,Q} - 1$$