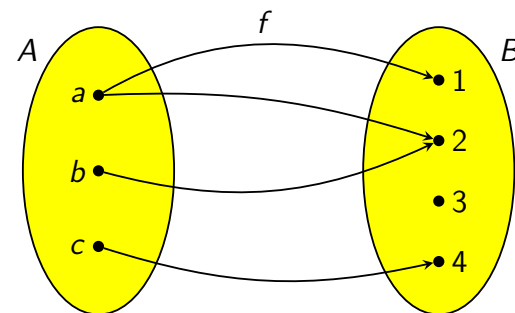


Funkcije. Nizovi. Jednostavni i složeni dekurzivni kamatni račun.

FINANCIJSKA MATEMATIKA, PITUP

Damir Horvat

FOI, Varaždin



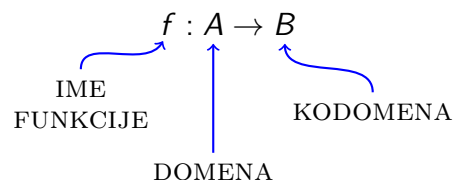
- f **nije funkcija** jer su elementu a iz domene pridružena dva različita elementa 1 i 2 iz kodomene.
- f je relacija.

2 / 64

Definicija funkcije

Definicija

Funkcija je preslikavanje između dva skupa A i B koje svakom elementu skupa A pridružuje **jedan i samo jedan** element skupa B .



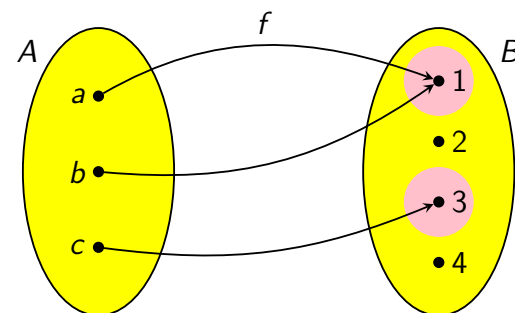
$$f(a) = b$$

Elementu $a \in A$ pridružen je element $b \in B$.

$$a \xrightarrow{f} b$$

$$a \mapsto b$$

1 / 64



slika funkcije

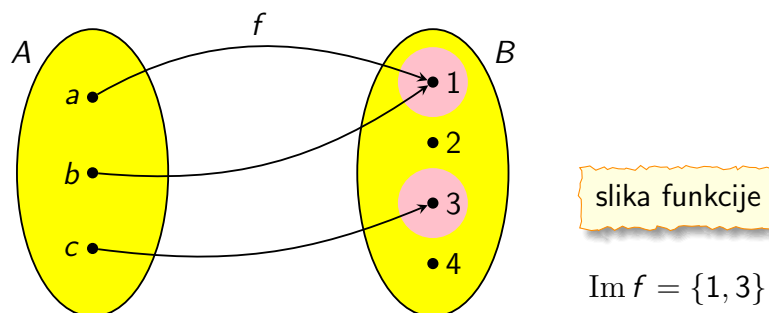
$$\text{Im } f = \{1, 3\}$$

- $f : A \rightarrow B$ je funkcija.

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 1, \quad f(c) = 3$$

- Kod funkcije je dozvoljeno da se više različitih elemenata preslikaju u isti element.

3 / 64



- **slika funkcije**: skup svih elemenata iz kodomene koji su "pogođeni", tj. u koje se netko preslikao iz domene

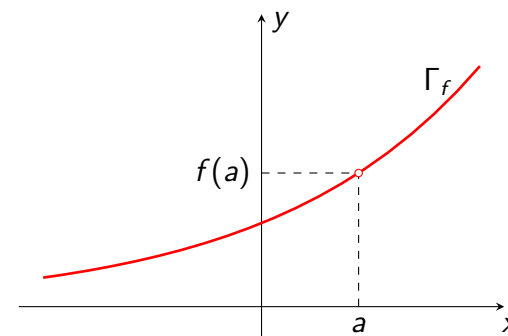
Definicija

Neka je $f : A \rightarrow B$ funkcija. **Slika funkcije** f je skup

$$\text{Im } f = \{f(x) : x \in A\}.$$

4 / 64

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}_f\}$$



6 / 64

Definicija

Realna funkcija realne varijable je funkcija kod koje su domena i kodomena podskupovi skupa realnih brojeva, tj.

$$f : A \rightarrow B, \quad A, B \subseteq \mathbb{R}.$$

Definicija

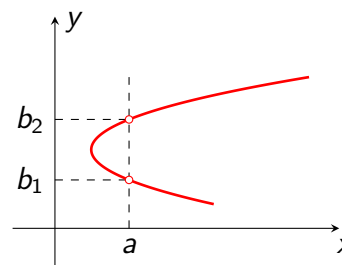
Graf realne funkcije realne varijable je skup točaka ravnine

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}_f\}$$

gdje je sa $\mathcal{D}_f$ označena domena funkcije f .

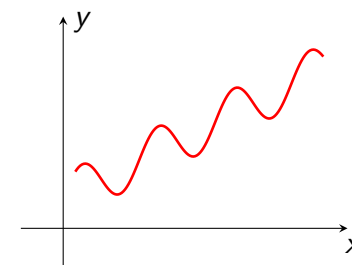
5 / 64

- Nije svaka krivulja u ravnini graf neke funkcije $y = f(x)$.



$$a \mapsto b_1, \quad a \mapsto b_2, \quad b_1 \neq b_2$$

zadana krivulja nije graf
niti jedne funkcije $y = f(x)$



zadana krivulja jest graf
neke funkcije $y = f(x)$

7 / 64

Zadavanje funkcije

Funkcija je zadana ako je zadana njezina domena, kodomena i pravilo pridruživanja.

Pravilo pridruživanja je postupak pomoću kojeg se svakom elementu domene pridružuje **jedan i samo jedan** element kodomene.

Funkcije se mogu zadati:

- numerički (pomoću tablice)
- grafički (pomoću grafa)
- algebarski (pomoću formule)

8 / 64

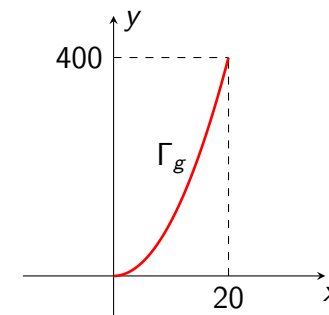
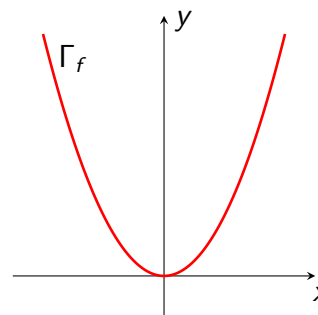
Definicija

Dvije funkcije su **jednake** ako imaju jednake domene, jednake kodomene i jednako pravilo pridruživanja.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

$$g : [0, 20] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$$

Funkcije f i g nisu jednake jer nemaju jednake domene.



10 / 64

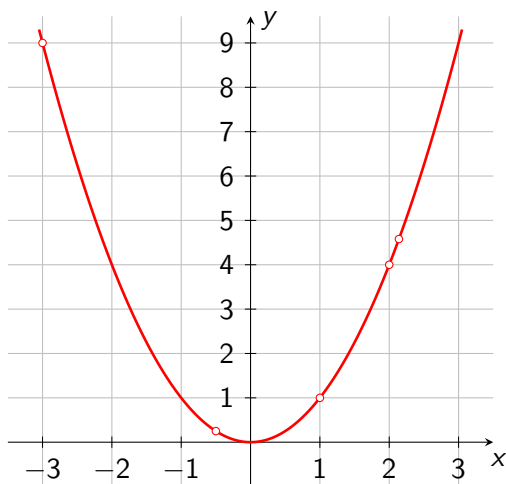
Kvadratna funkcija

zadana algebarski

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

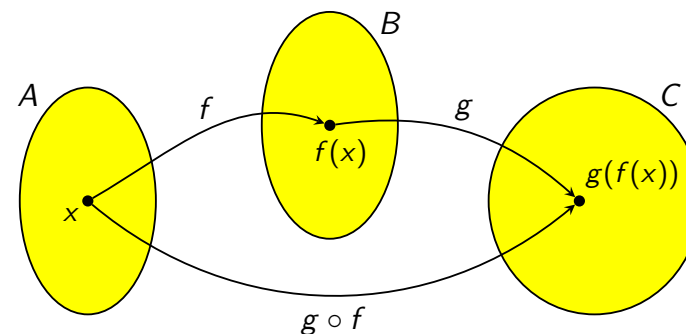
zadana numerički

x	y
1	1
2	4
-3	9
-0.5	0.25
2.14	4.5796
⋮	⋮



9 / 64

Kompozicija funkcija



- $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$
- $g \circ f : A \rightarrow C, (g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$\text{Im } f \subseteq \mathcal{D}_g$$

11 / 64

Primjer

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x + 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 5$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 5) = \sqrt{x + 5}$$

Da bi kompozicija $f \circ g$ bila definirana, domene mogu biti najviše

$$f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : [-5, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

- Kompozicija funkcija općenito nije komutativna operacija

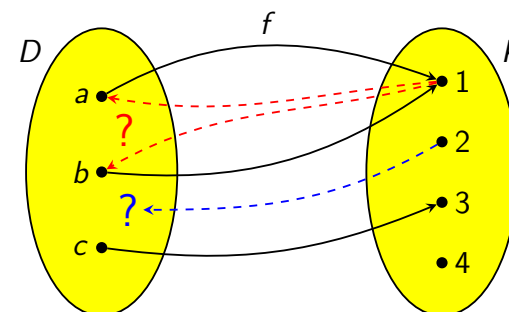
$$f \circ g \neq g \circ f$$

- Kompozicija funkcija je asocijativna operacija

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

12 / 64

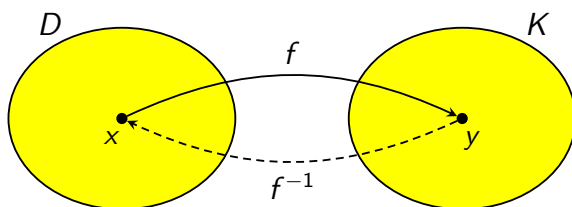
Koje funkcije imaju inverznu funkciju?



- Funkcija f mora različite elemente domene preslikavati u različite elemente kodomene, tj. f mora biti **INJEKCIJA**.
- Svi elementi u kodomeni moraju biti "pogođeni" ($\text{Im } f = K$), tj. f mora biti **SURJEKCIJA**.

14 / 64

Inverzna funkcija



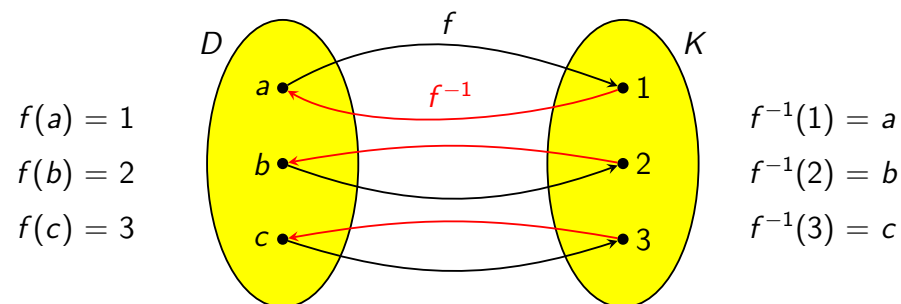
$$f : D \rightarrow K \quad f^{-1} : K \rightarrow D$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

Napomena

Inverzna funkcija ne mora uvijek postojati.

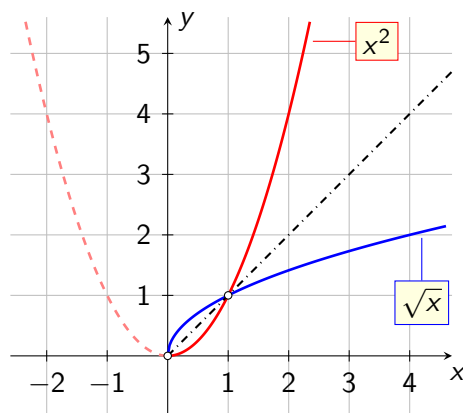
13 / 64



- Funkcija f je injekcija (različite elemente domene preslikava u različite elemente kodomene).
- Funkcija f je surjekcija jer je $\text{Im } f = K$ (svi elementi u kodomeni su "pogođeni").
- Funkcija f je **BIJEKCIJA** (injekcija i surjekcija).
- Jedino bijekcije imaju inverznu funkciju.**

15 / 64

Drugi korijen



$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f(x) = x^2$$

$$f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Grafovi funkcija f i f^{-1} simetrični su s obzirom na pravac $y = x$.

16 / 64

Eksponencijalna funkcija

Definicija

Funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ oblika

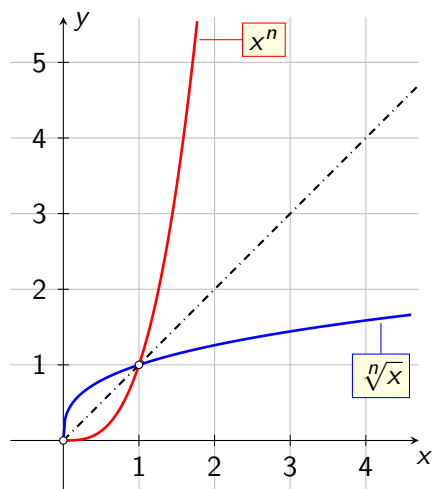
$$f(x) = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

zovemo **eksponencijalnom funkcijom** baze a .

- $a^0 = 1$, tj. graf prolazi kroz točku $(0, 1)$
- $a^x > 0$, tj. graf se nalazi iznad x -osi
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

18 / 64

n -ti korijen



$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

$$f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

Napomena

Za neparni $n \in \mathbb{N}$ možemo uzeti $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

17 / 64

Kako izračunati a^x ?

- ako je $x \in \mathbb{N}$

$$a^x = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{x \text{ puta}}$$

- ako je $x \in \mathbb{Q}$, $x > 0$ $\rightsquigarrow$ $x = \frac{m}{n}$ za neke $m, n \in \mathbb{N}$

$$a^x = \sqrt[n]{a^m}$$

- ako je x pozitivni iracionalni broj

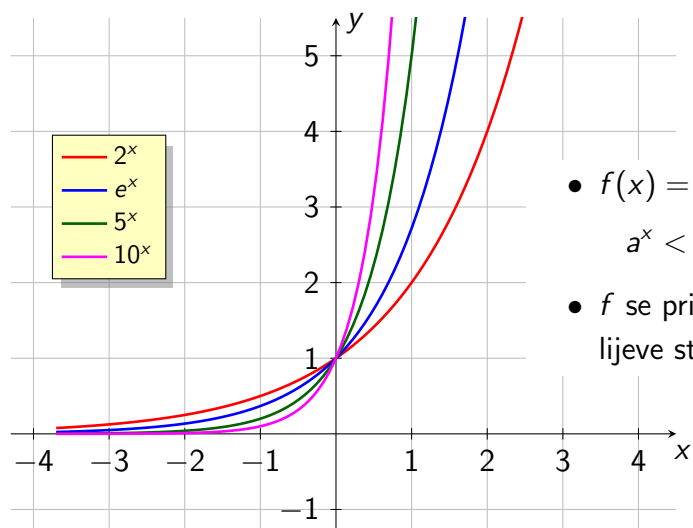
$$a^x \approx a^r, \quad r \approx x, \quad r \in \mathbb{Q}$$

- ako je $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}$$

19 / 64

$$f(x) = a^x, a > 1$$



- $f(x) = a^x$ strogo raste
 $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$
- f se približava x -osi s lijeve strane

20 / 64

Logaritamska funkcija

Definicija

Funkciju $f : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ koja je inverzna eksponencijalnoj funkciji baze a zovemo **logaritamskom funkcijom** baze a i označavamo s

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0, a \neq 1.$$

- $\log_a 1 = 0$, tj. graf prolazi kroz točku $(1, 0)$
- $a^{\log_a x} = x, \quad \log_a a^x = x$
- $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

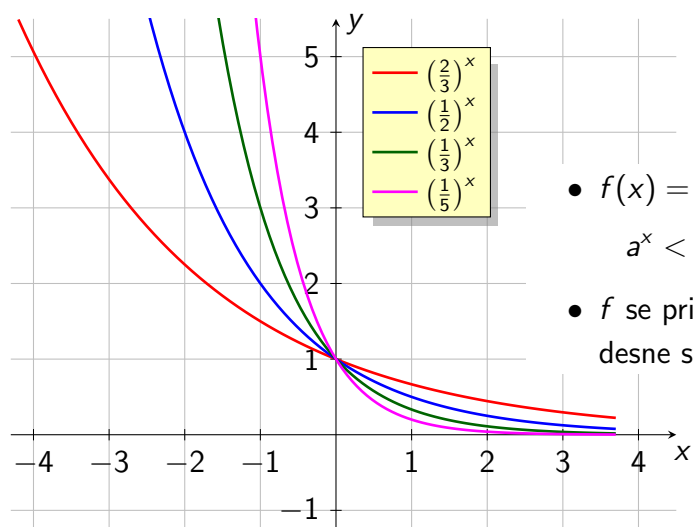
$$\log x = \log_{10} x$$

$$\ln x = \log_e x$$

$$e \approx 2.718281828$$

22 / 64

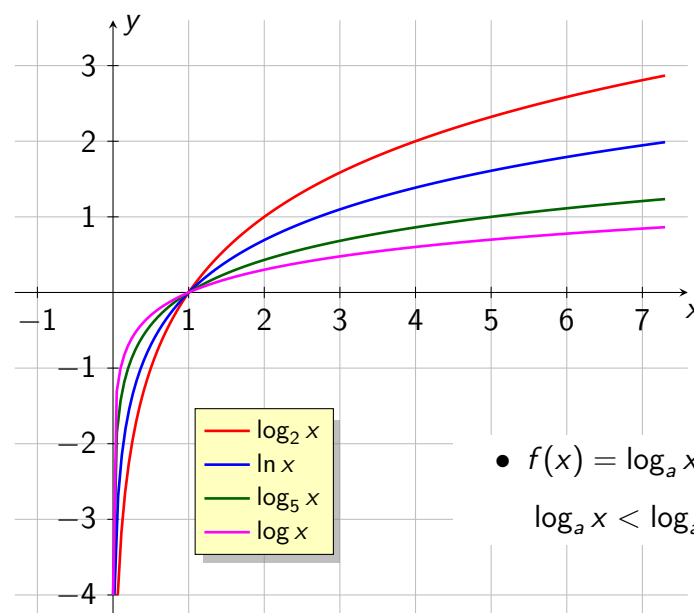
$$f(x) = a^x, 0 < a < 1$$



- $f(x) = a^x$ strogo pada
 $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$
- f se približava x -osi s desne strane

21 / 64

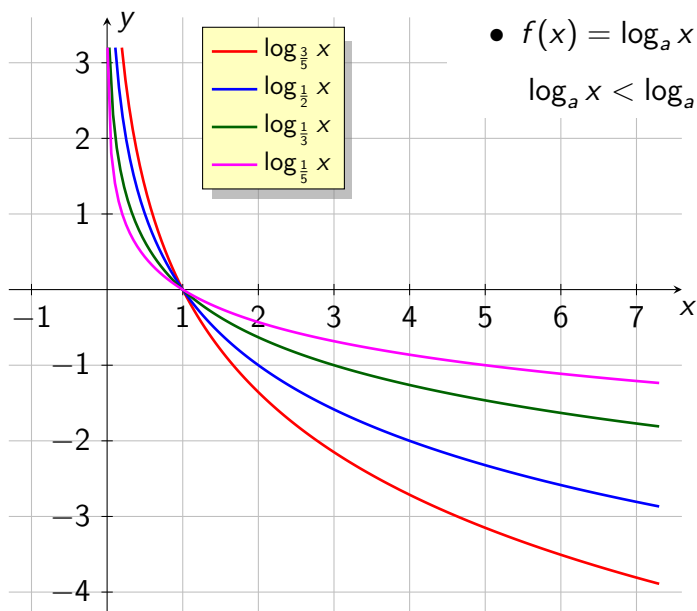
$$f(x) = \log_a x, a > 1$$



- $f(x) = \log_a x$ strogo raste
 $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x < y$

23 / 64

$$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a < 1$$



- $f(x) = \log_a x$ strogo pada
- $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x > y$

24 / 64

Jednostavni algoritam za logaritmiranje

Neka je L lista u koju će se spremati znamenke broja $\log_b x$.

Ponavljaj željeni broj puta sljedeće korake:

- Neka je d potrebiti broj dijeljenja s brojem b da se zadovolji uvjet $\frac{x}{b^d} < b$.
- Spremi d na kraj liste L .
- Stavi $y := \frac{x}{b^d}$.
- Stavi $x := y^b$.

Tada je prvi element liste L cjelobrojni dio broja $\log_b x$, a preostali elementi su redom decimale tog broja.

26 / 64

Još neka svojstva logaritamske funkcije

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad x, y > 0$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad x, y > 0$
- $\log_a x^p = p \log_a x, \quad p \in \mathbb{R}, x > 0$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Opća potencija

$$x^c = e^{c \ln x}, \quad c \in \mathbb{R}, x > 0$$

25 / 64

Definicija niza

Definicija

Niz realnih brojeva je funkcija $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$a(n) \longrightarrow n\text{-ti ili opći član niza} \qquad a(n) \longleftrightarrow a_n$$

$$a_n \longrightarrow \text{oznaka za } n\text{-ti član niza}$$

$$(a_n) \longrightarrow \text{oznaka za sve članove niza kao jedna cjelina}$$

Definicija

Konačni niz realnih brojeva je funkcija

$$a : \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}.$$

27 / 64

Načini zadavanja nizova

- nabrojanjem početnih članova
 - niz parnih prirodnih brojeva: 2, 4, 6, 8, 10, ...
 - niz neparnih prirodnih brojeva: 1, 3, 5, 7, 9, ...
 - niz potencija broja dva: 2, 4, 8, 16, 32, ...
- općim članom
 - niz parnih prirodnih brojeva: $a_n = 2n$
 - niz neparnih prirodnih brojeva: $b_n = 2n - 1$
 - niz potencija broja dva: $c_n = 2^n$
- rekurzivnom formulom
 - niz parnih prirodnih brojeva: $a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + 2, n \geq 2$
 - niz neparnih prirodnih brojeva: $b_1 = 1, b_n = b_{n-1} + 2, n \geq 2$
 - niz potencija broja dva: $c_1 = 2, c_n = 2c_{n-1}, n \geq 2$

28 / 64

Kako izračunati drugi korijen?

- Neka je x_1 neka početna aproksimacija za $\sqrt{a}$.
- $x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right), \quad k \geq 1$
- Računaj sljedeći član x_{k+1} tako dugo dok se ne zadovolji uvjet $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ za neki odabrani dovoljno mali broj $\varepsilon > 0$.
- Tada je $x_k \approx \sqrt{a}$ za dovoljno veliki $k \in \mathbb{N}$.

30 / 64

Fibonaccijev niz

Fibonaccijev niz (F_n) je niz brojeva zadan rekurzivno s

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

29 / 64

Kako izračunati n -ti korijen?

- Neka je x_1 neka početna aproksimacija za $\sqrt[n]{a}$.
- $x_{k+1} = \frac{1}{n} \left((n-1)x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}} \right), \quad k \geq 1$
- Računaj sljedeći član x_{k+1} tako dugo dok se ne zadovolji uvjet $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ za neki odabrani dovoljno mali broj $\varepsilon > 0$.
- Tada je $x_k \approx \sqrt[n]{a}$ za dovoljno veliki $k \in \mathbb{N}$.

31 / 64

Aritmetički niz

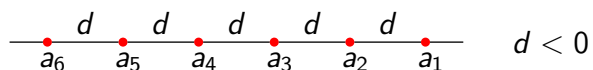
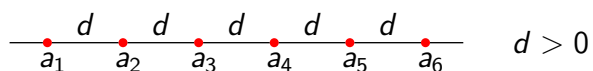
Definicija

Niz (a_n) je **aritmetički** ako je razlika svakog člana (osim prvog) i njegovog prethodnika konstantni broj d , tj.

$$a_{n+1} - a_n = d, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Broj d naziva se **razlika (diferencija) aritmetičkog niza**.

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots$$



32 / 64

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$$

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + (a_1 + d) + \dots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d) \\ S_n = a_n + (a_n - d) + \dots + (a_n - (n-2)d) + (a_n - (n-1)d) \end{array} \quad \Bigg| +$$

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \quad / : 2$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{where } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

34 / 64

Opći član aritmetičkog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$$\vdots$$

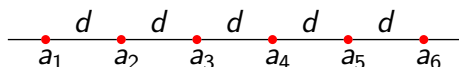
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_5 = a_2 + 3d$$

$$a_2 = a_5 - 3d$$

Vrijedi i općenitija formula

$$a_n = a_m + (n - m)d$$



33 / 64

Primjer

Odredite sumu prvih n neparnih prirodnih brojeva.

Rješenje

- $a_n = 2n - 1$
- $a_1 = 1, d = 2$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$1 + 3 + \dots + (2n-1) = \frac{n}{2}(1 + (2n-1))$$

$$1 + 3 + \dots + (2n-1) = \frac{n}{2} \cdot 2n$$

$$1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$$

35 / 64

Karakterizacija aritmetičkog niza

Niz (a_n) je aritmetički niz ako i samo ako je svaki član niza (osim prvog) aritmetička sredina svojih susjeda, tj. vrijedi

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}, \quad n > 1.$$

36 / 64

Opći član geometrijskog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = (a_1 q) q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 q = (a_1 q^2) q = a_1 q^3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Vrijedi i općenitija formula

$$a_n = a_m \cdot q^{n-m}$$

38 / 64

Geometrijski niz

Definicija

Niz (a_n) je **geometrijski** ako je kvocijent svakog člana (osim prvog) i njegovog prethodnika konstantan broj različit od nule, tj.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad q \neq 0.$$

Broj q naziva se **kvocijent geometrijskog niza**.

$$a_1, a_1 q, a_1 q^2, a_1 q^3, \dots$$

- $q = 1 \rightarrow$ konstantni niz: $a_1, a_1, a_1, \dots$
- $a_n = r^n, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow$ geometrijski niz: $a_1 = r, q = r$

37 / 64

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \dots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \quad / \cdot (-1)$$

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \\ - qS_n = -a_1 q - a_1 q^2 - \dots - a_1 q^{n-1} - a_1 q^n \\ \hline S_n - qS_n = a_1 - a_1 q^n \end{array} \quad / +$$

$$qS_n - S_n = a_1 q^n - a_1$$

$$(q - 1)S_n = a_1(q^n - 1) \quad / : (q - 1), \quad q \neq 1$$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$q = 1 \rightarrow S_n = na_1$$

39 / 64

Primjer

Odredite sumu prvih n prirodnih potencija broja 2.

Rješenje

- $a_n = 2^n$
- $a_1 = 2, q = 2$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2 \cdot (2^n - 1)$$

$$2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

40 / 64

Osnovni pojmovi

- **Glavnica** je novčani iznos posuđen dužniku (u širem smislu može biti i nešto drugo, ne samo novac).
- **Kamata** je naknada koju dužnik plaća za posuđenu glavnica.
- **Razdoblje ukamaćivanja** je vremenski interval na koji je novac posuđen i za koji se obračunavaju kamate.
- **Kamatna stopa** je iznos koji dužnik plaća za 100 posuđenih novčanih jedinica za neki osnovni vremenski interval.

42 / 64

Karakterizacija geometrijskog niza

Niz (a_n) s pozitivnim članovima je geometrijski niz ako i samo ako je svaki član niza (a_n) (osim prvog) geometrijska sredina svojih susjeda, tj. vrijedi

$$a_n = \sqrt{a_{n+1}a_{n-1}}, \quad n > 1.$$

41 / 64

Dekurzivni i anticipativni obračun kamata

Dekurzivni obračun kamata

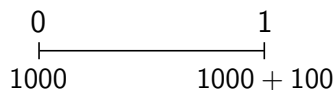
- kamate se obračunavaju na kraju razdoblja ukamaćivanja u odnosu na glavnica s početka tog razdoblja
- kamate pribrajamo glavnici na kraju razdoblja ukamaćivanja

Anticipativni obračun kamata

- kamate se obračunavaju na početku razdoblja ukamaćivanja u odnosu na glavnica s kraja tog razdoblja
- kamate oduzimamo od glavnice na početku razdoblja ukamaćivanja

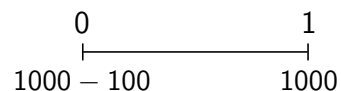
43 / 64

Dekurzivni obračun kamata



- posuđeni iznos: 1000 kn
- godišnja kamatna stopa: 10%
- kamate: $1000 \cdot 0.1 = 100$
- na kraju godine se vraća iznos 1100 kn, tj. posuđeni iznos zajedno s kamatama

Anticipativni obračun kamata



- posuđeni iznos: 1000 kn
- godišnja kamatna stopa: 10%
- kamate: $1000 \cdot 0.1 = 100$
- kamate se plaćaju odmah na početku, a na kraju godine se vraća posuđeni iznos
- dužnik je zapravo posudio iznos 900 kn, a na kraju godine vratio iznos 1000 kn

44 / 64

Jednostavni dekurzivni kamatni račun

- C_0 – početna vrijednost glavnice
- I_k – kamate u k -tom razdoblju ukamaćivanja
- p – godišnja kamatna stopa
- n – vrijeme u godinama

Iznos kamata za godinu dana

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

$$I_1 = I_2 = \dots = I_{n-1} = I_n = I$$

46 / 64

Jednostavni i složeni kamatni račun

Jednostavni kamatni račun

- kamate se ne pribrajaju glavnici pa su jednake za svaki period ukamaćivanja
- kod svakog sljedećeg razdoblja kamate se računaju na istu glavicu

Složeni kamatni račun

- kamate se pribrajaju glavnici pa su različite za svaki period ukamaćivanja
- kod svakog sljedećeg razdoblja kamate se računaju na glavicu uvećanu za kamate iz prošlog razdoblja

45 / 64

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 = C_1 + I = (C_0 + I) + I = C_0 + 2I$$

$$C_3 = C_2 + I = (C_0 + 2I) + I = C_0 + 3I$$

⋮

$$C_n = C_0 + nI$$

$$C_n = C_0 + n \cdot C_0 \frac{p}{100} = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100} \right)$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

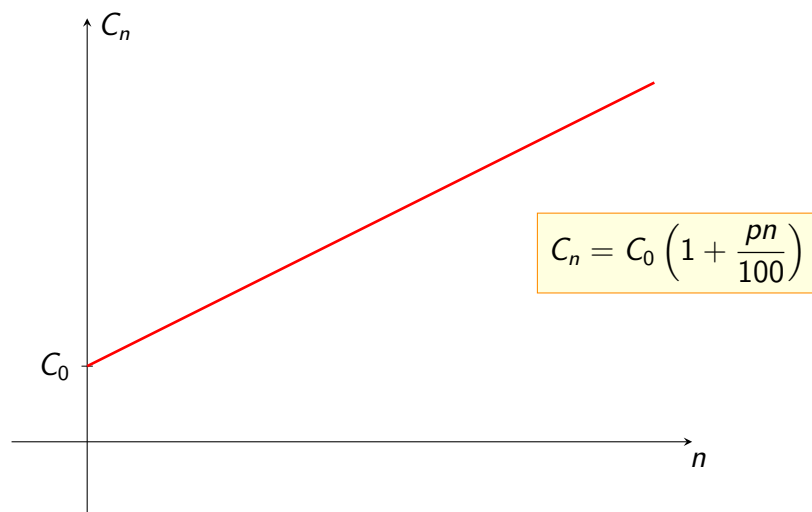
$$a_n = a_0 + nd$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100} \right)$$

- $C_0, C_1, C_2, \dots$ → aritmetički niz s razlikom $d = C_0 \cdot \frac{p}{100}$
- Konačna vrijednost glavnice je linearna funkcija vremena ukamaćivanja.

47 / 64

Grafički prikaz rasta glavnice



48 / 64

Relativna dnevna kamatna stopa

- **njemačka metoda**: godina ima 360 dana, svaki mjesec ima 30 dana

$$p_r = \frac{p}{360}$$

- **francuska metoda**: godina ima 360 dana, dani u mjesecu računaju se prema kalendaru

$$p_r = \frac{p}{360}$$

- **engleska metoda**: dani u godini računaju se prema kalendaru (365 ili 366), dani u mjesecu računaju se prema kalendaru

$$p_r = \frac{p}{365} \quad \text{ili} \quad p_r = \frac{p}{366}$$

50 / 64

Ispodgodišnje ukamaćivanje

Definicija

Relativna kamatna stopa p_r je godišnja kamatna stopa p podijeljena broj razdoblja unutar godine, tj.

$$p_r = \frac{p}{m}$$

- **relativna mjesečna kamatna stopa**: $m = 12$, $p_r = \frac{p}{12}$
- **relativna polugodišnja kamatna stopa**: $m = 2$, $p_r = \frac{p}{2}$
- **relativna kvartalna kamatna stopa**: $m = 4$, $p_r = \frac{p}{4}$

kvartal je razdoblje od tri mjeseca

49 / 64

- p – godišnja kamatna stopa
- n – broj razdoblja ukamaćivanja
- m – kolike se puta razdoblje ukamaćivanja javlja unutar godine
- p_r – pripadna relativna kamatna stopa

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p_r n}{100} \right)$$

$$p_r = \frac{p}{m}$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100m} \right)$$

51 / 64

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p_r n}{100}\right)$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100m}\right)$$

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

- ukupne kamate

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{p_r n}{100}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

- kamate za jedno razdoblje ukamaćivanja

$$I = C_0 \cdot \frac{p_r}{100}$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100m}$$

52 / 64

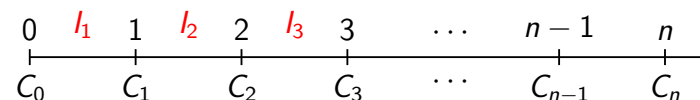
Složeni dekurzivni kamatni račun

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$C_1 = C_0 + I_1$$

$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$



$$C_2 = C_1 + I_2$$

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot \frac{p}{100}$$

$$C_2 = C_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$C_2 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$C_2 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

$$C_3 = C_2 + I_3$$

$$C_3 = C_2 + C_2 \cdot \frac{p}{100}$$

$$C_3 = C_2 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$C_3 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$C_3 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$$

54 / 64

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk} \quad I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

$$16 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 261 \quad (2007. \text{ godina})$$

$$31 + 29 + 31 = 91 \quad (2008. \text{ godina})$$

$$n = 261 + 91 = 352$$

$$C_{352} = 10\,000 + 10\,000 \cdot \frac{6 \cdot 261}{36\,500} + 10\,000 \cdot \frac{6 \cdot 91}{36\,600} = 10\,578.22$$

53 / 64

- **dekurzivni kamatni faktor**

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$C_n = C_0 \cdot r^n$$

$$p = 6 \quad \rightsquigarrow \quad r = 1.06$$

$$p = 12.1 \quad \rightsquigarrow \quad r = 1.121$$

$$r = 1.063 \quad \rightsquigarrow \quad p = 6.3$$

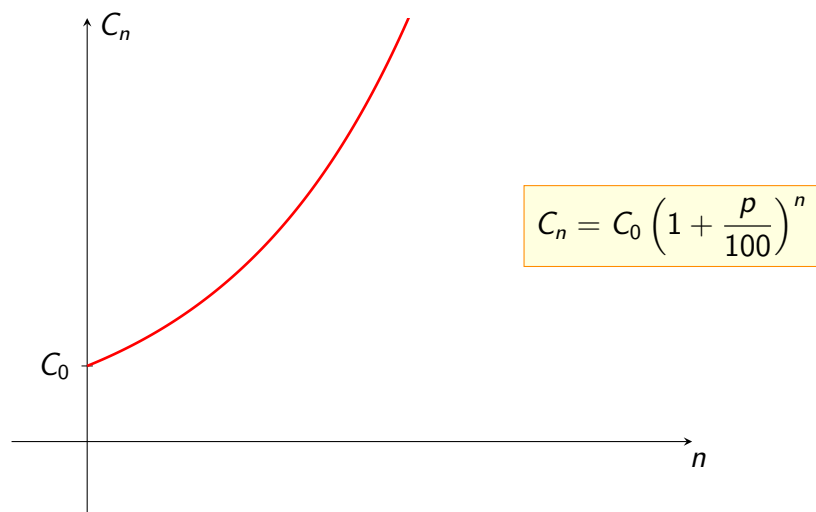
$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$a_n = a_0 q^n$$

- $C_0, C_1, C_2, \dots \rightsquigarrow$ geometrijski niz s kvocijentom $q = r$
- Konačna vrijednost glavnice je eksponencijalna funkcija vremena ukamaćivanja.

55 / 64

Grafički prikaz rasta glavnice



56 / 64

Primjer

Kolika je konačna vrijednost glavnice 10 000 kn nakon 5 godina uz

- a) jednostavni dekurzivni obračun kamata
- b) složeni dekurzivni obračun kamata

i godišnju kamatnu stopu 6%?

Rješenje

a) $C_5 = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot 5}{100}\right) = 13\,000$

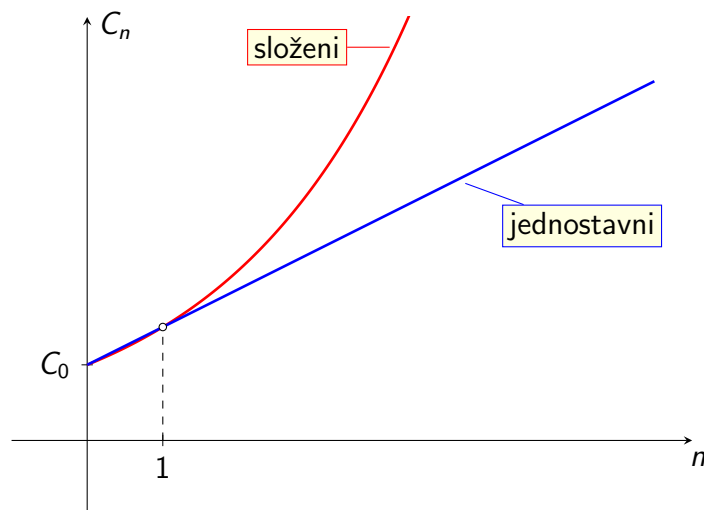
$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100}\right)$

b) $C_5 = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^5 = 13\,382.26$

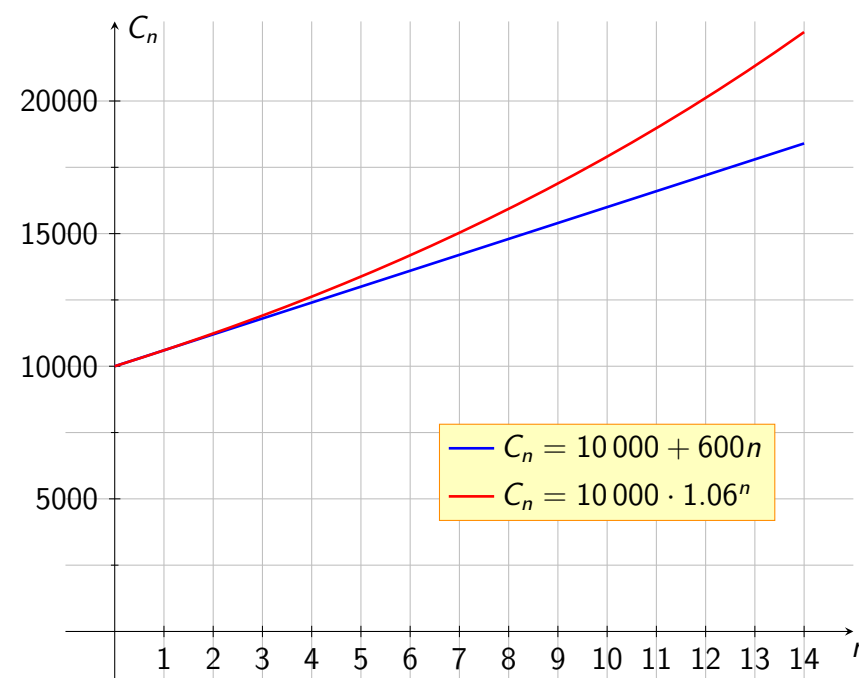
$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

58 / 64

Jednostavni i složeni kamatni račun

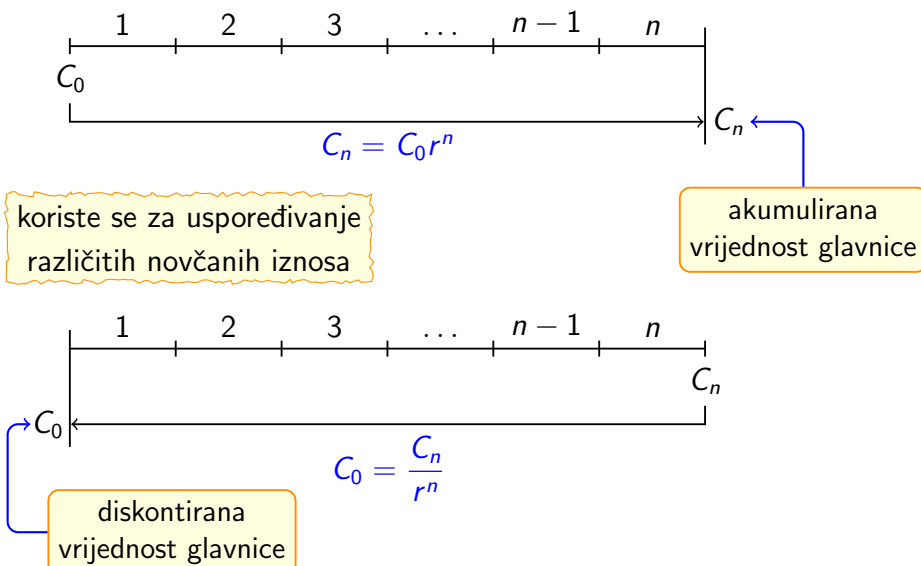


57 / 64



59 / 64

Akumulirana i diskontirana vrijednost



60 / 64

Primjer

- godišnja kamatna stopa: $p = 6$
- početna glavnica: $C_0 = 1000$ kn
- relativna mjesečna kamatna stopa: $p_r = \frac{6}{12} = 0.5$
- Ako ukamatimo jednom godišnje, na kraju godine imamo 1060 kn.

$$C_1 = 1000 \cdot 1.06 = 1060$$

- Ako ukamaćujemo svaki mjesec, na kraju godine imamo 1061.68 kn.

$$C_{12} = 1000 \cdot 1.005^{12} = 1061.68$$

≠

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

62 / 64

Složeni kamatni račun – ispodgodišnje ukamaćivanje

Definicija

Nominalna kamatna stopa je poznata kamatna stopa za određeno vremensko razdoblje.

- Najčešće je zadana godišnja kamatna stopa kao nominalna kamatna stopa.
- Nadalje, može biti zadana npr. godišnja kamatna stopa, a ukamaćivanje se obavlja mjesečno.
- Možemo koristiti relativnu kamatnu stopu kao i kod jednostavnog obračuna kamata.

61 / 64

Konformna kamatna stopa

- Ako C_0 ukamatimo m puta godišnje uz relativnu kamatnu stopu p_r , dobivamo iznos različit od onog kada C_0 ukamatimo jednom godišnje uz godišnju kamatnu stopu p .

Definicija

Konformna kamatna stopa je kamatna stopa koja za istu glavnica daje iste kamate kao i nominalna kamatna stopa, neovisno o tome obračunavaju li se kamate u kraćim ili dužim vremenskim intervalima od nominalnog.

63 / 64

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$C_n = C_0 r^n$$

- Ako C_0 ukamatimo m puta godišnje uz konformnu kamatnu stopu p' , dobivamo iznos jednak onome kada C_0 ukamatimo jednom godišnje uz godišnju kamatnu stopu p .

$$C_0 \left(1 + \frac{p'}{100}\right)^m = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$p' = 100 \left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right)$$

- Veza između kamatnih faktora

$$r' = \sqrt[m]{r}$$