

Funkcije. Nizovi. Jednostavni i složeni dekurzivni kamatni račun.

FINANCIJSKA MATEMATIKA, PITUP

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Funkcije

Nizovi

Jednostavni i složeni dekurzivni kamatni račun

Funkcije

Definicija funkcije

Definicija

Funkcija je preslikavanje između dva skupa A i B koje svakom elementu skupa A pridružuje **jedan i samo jedan** element skupa B .

Definicija funkcije

Definicija

Funkcija je preslikavanje između dva skupa A i B koje svakom elementu skupa A pridružuje **jedan i samo jedan** element skupa B .

$$f : A \rightarrow B$$

Definicija funkcije

Definicija

Funkcija je preslikavanje između dva skupa A i B koje svakom elementu skupa A pridružuje **jedan i samo jedan** element skupa B .

$f : A \rightarrow B$

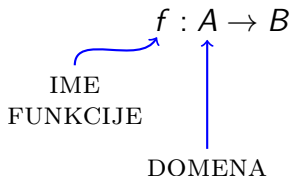


IME
FUNKCIJE

Definicija funkcije

Definicija

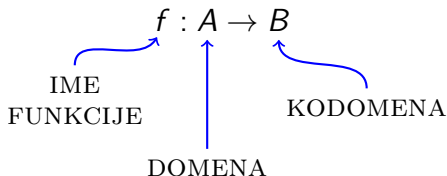
Funkcija je preslikavanje između dva skupa A i B koje svakom elementu skupa A pridružuje **jedan i samo jedan** element skupa B .



Definicija funkcije

Definicija

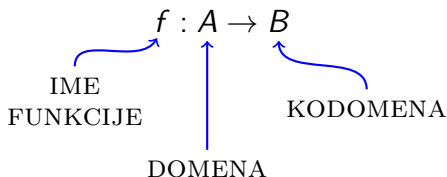
Funkcija je preslikavanje između dva skupa A i B koje svakom elementu skupa A pridružuje **jedan i samo jedan** element skupa B .



Definicija funkcije

Definicija

Funkcija je preslikavanje između dva skupa A i B koje svakom elementu skupa A pridružuje **jedan i samo jedan** element skupa B .

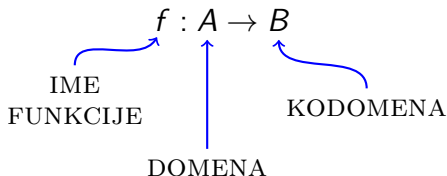


$$f(a) = b$$

Definicija funkcije

Definicija

Funkcija je preslikavanje između dva skupa A i B koje svakom elementu skupa A pridružuje **jedan i samo jedan** element skupa B .



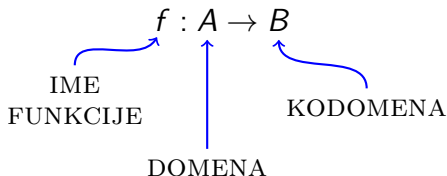
$$f(a) = b$$

Elementu $a \in A$ pridružen
je element $b \in B$.

Definicija funkcije

Definicija

Funkcija je preslikavanje između dva skupa A i B koje svakom elementu skupa A pridružuje **jedan i samo jedan** element skupa B .



$$f(a) = b$$

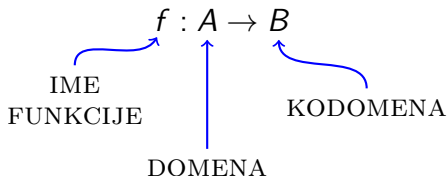
Elementu $a \in A$ pridružen je element $b \in B$.

$$a \xrightarrow{f} b$$

Definicija funkcije

Definicija

Funkcija je preslikavanje između dva skupa A i B koje svakom elementu skupa A pridružuje **jedan i samo jedan** element skupa B .

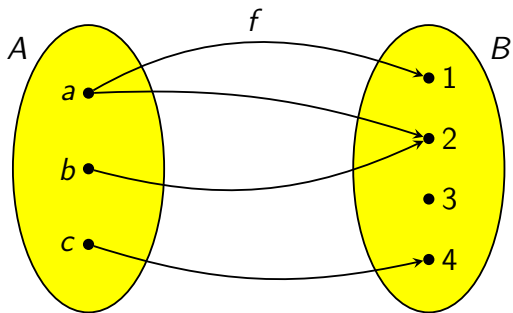


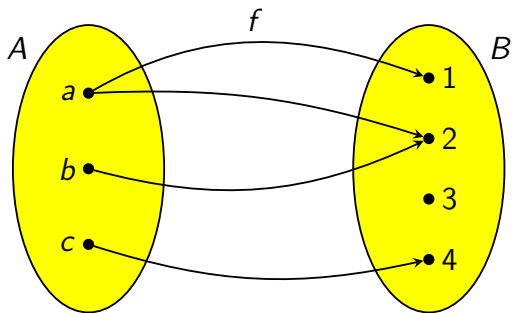
$$f(a) = b$$

Elementu $a \in A$ pridružen je element $b \in B$.

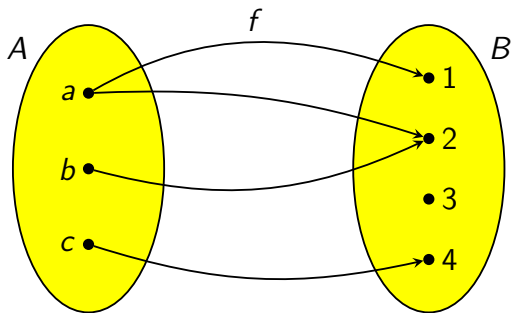
$$a \xrightarrow{f} b$$

$$a \mapsto b$$

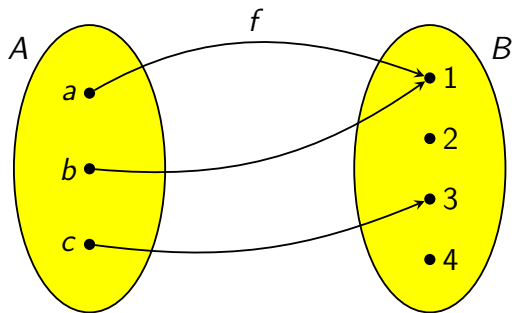


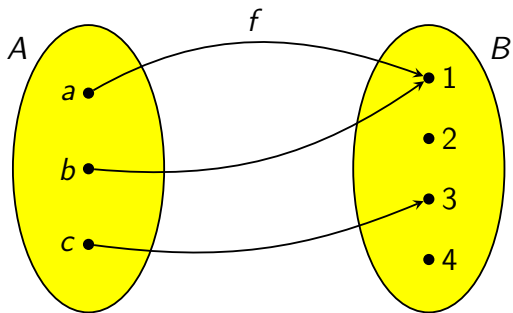


- f nije funkcija jer su elementu a iz domene pridružena dva različita elementa 1 i 2 iz kodomene.

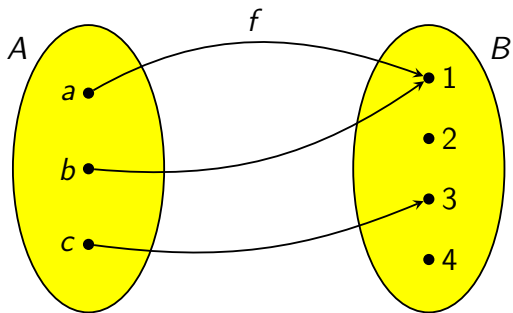


- f **nije funkcija** jer su elementu a iz domene pridružena dva različita elementa 1 i 2 iz kodomene.
- f je relacija.



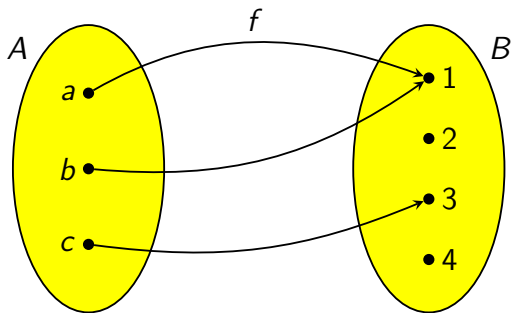


- $f : A \rightarrow B$ je funkcija.



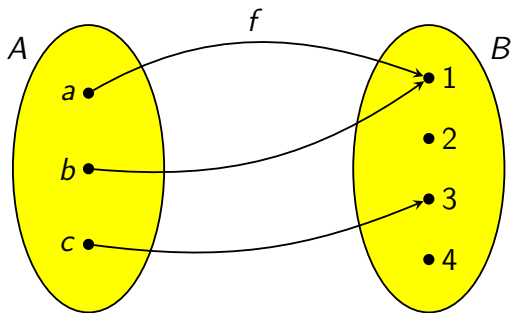
- $f : A \rightarrow B$ je funkcija.

$$f(a) = 1$$



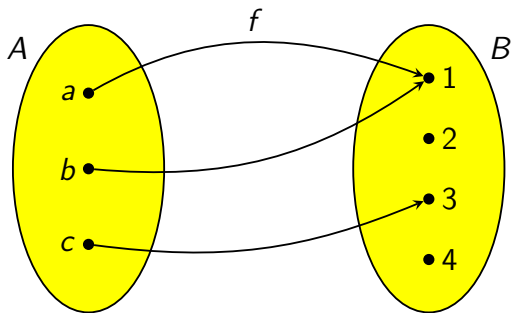
- $f : A \rightarrow B$ je funkcija.

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 1$$



- $f : A \rightarrow B$ je funkcija.

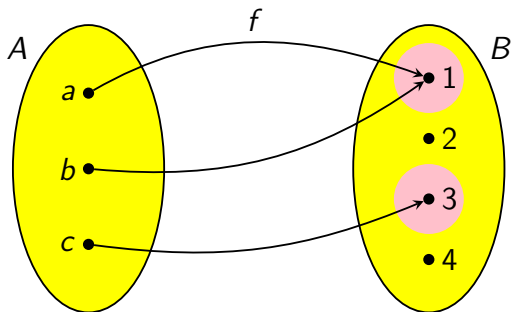
$$f(a) = 1, \quad f(b) = 1, \quad f(c) = 3$$



- $f : A \rightarrow B$ je funkcija.

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 1, \quad f(c) = 3$$

- Kod funkcije je dozvoljeno da se više različitih elemenata preslikaju u isti element.

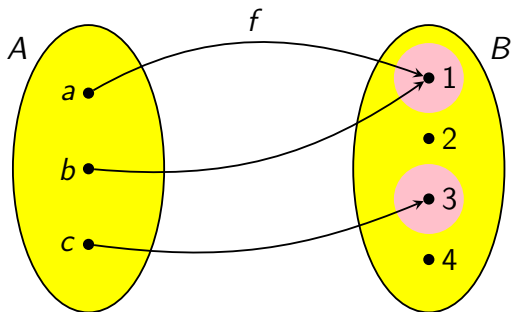


slika funkcije

- $f : A \rightarrow B$ je funkcija.

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 1, \quad f(c) = 3$$

- Kod funkcije je dozvoljeno da se više različitih elemenata preslikaju u isti element.



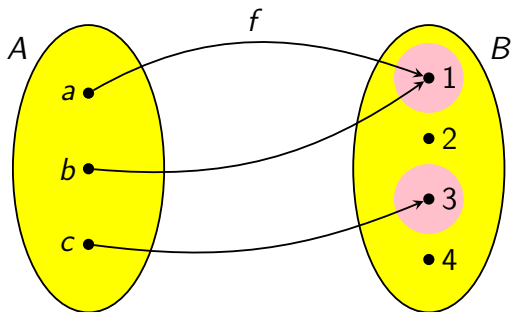
slika funkcije

$$\text{Im } f = \{1, 3\}$$

- $f : A \rightarrow B$ je funkcija.

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 1, \quad f(c) = 3$$

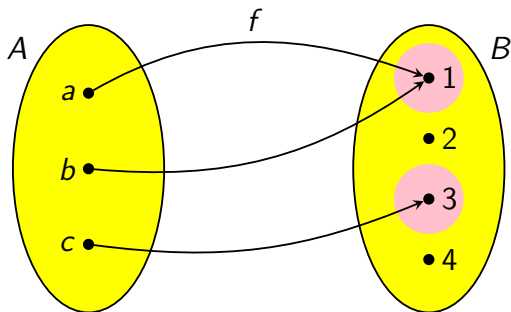
- Kod funkcije je dozvoljeno da se više različitih elemenata preslikaju u isti element.



slika funkcije

$$\text{Im } f = \{1, 3\}$$

- **slika funkcije**: skup svih elemenata iz kodomene koji su "pogođeni", tj. u koje se netko preslikao iz domene



slika funkcije

$$\text{Im } f = \{1, 3\}$$

- **slika funkcije**: skup svih elemenata iz kodomene koji su "pogođeni", tj. u koje se netko preslikao iz domene

Definicija

Neka je $f : A \rightarrow B$ funkcija. **Slika funkcije** f je skup

$$\text{Im } f = \{f(x) : x \in A\}.$$

Definicija

Realna funkcija realne varijable je funkcija kod koje su domena i kodomena podskupovi skupa realnih brojeva, tj.

$$f : A \rightarrow B, \quad A, B \subseteq \mathbb{R}.$$

Definicija

Realna funkcija realne varijable je funkcija kod koje su domena i kodomena podskupovi skupa realnih brojeva, tj.

$$f : A \rightarrow B, \quad A, B \subseteq \mathbb{R}.$$

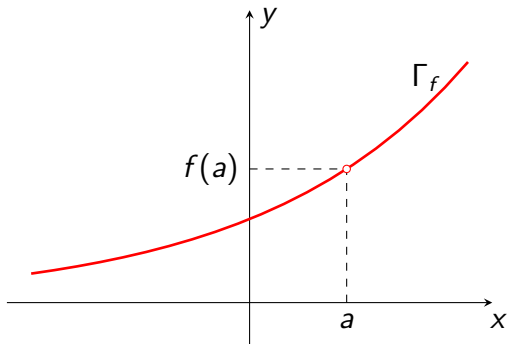
Definicija

Graf realne funkcije realne varijable je skup točaka ravnine

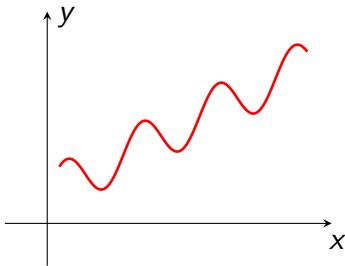
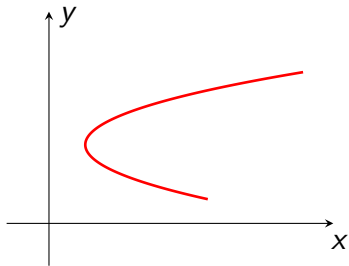
$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}_f\}$$

gdje je sa $\mathcal{D}_f$ označena domena funkcije f .

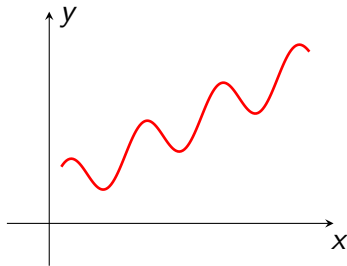
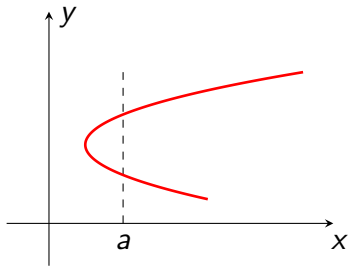
$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}_f\}$$



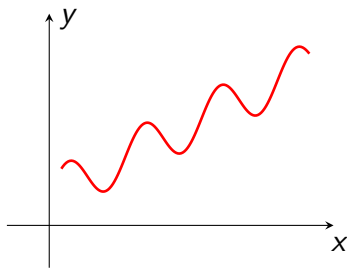
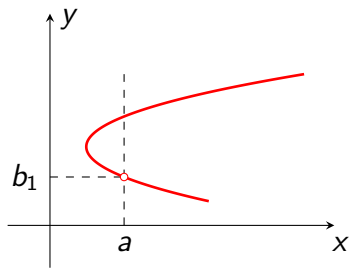
- Nije svaka krivulja u ravnini graf neke funkcije $y = f(x)$.



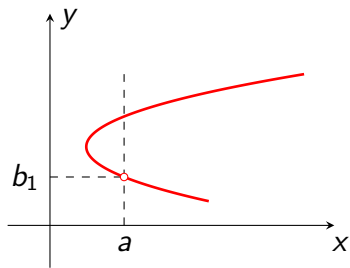
- Nije svaka krivulja u ravnini graf neke funkcije $y = f(x)$.



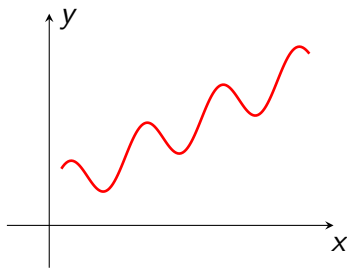
- Nije svaka krivulja u ravnini graf neke funkcije $y = f(x)$.



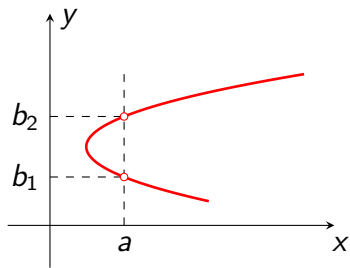
- Nije svaka krivulja u ravnini graf neke funkcije $y = f(x)$.



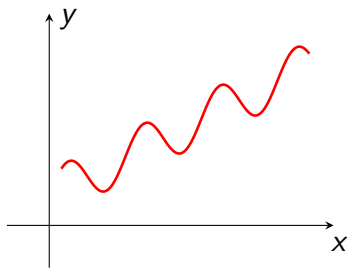
$$a \mapsto b_1$$



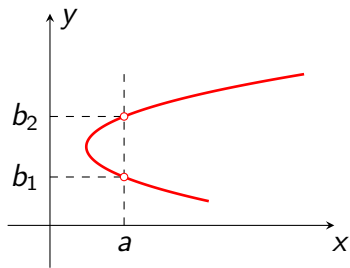
- Nije svaka krivulja u ravnini graf neke funkcije $y = f(x)$.



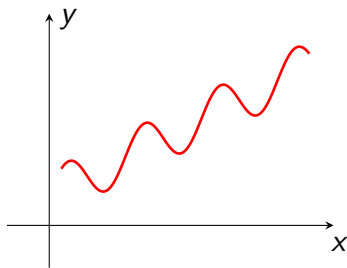
$$a \mapsto b_1$$



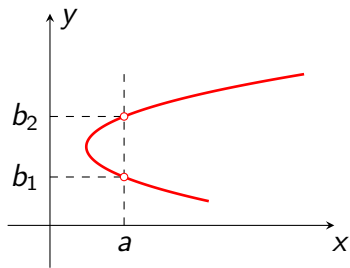
- Nije svaka krivulja u ravnini graf neke funkcije $y = f(x)$.



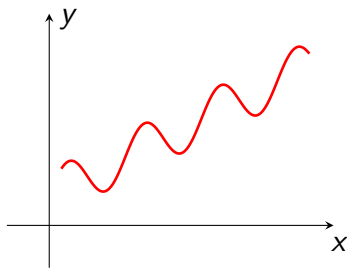
$$a \mapsto b_1, \quad a \mapsto b_2$$



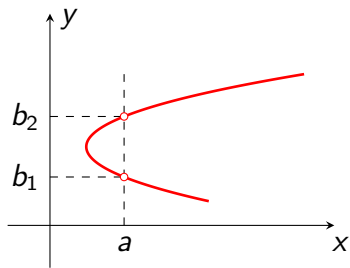
- Nije svaka krivulja u ravnini graf neke funkcije $y = f(x)$.



$$a \mapsto b_1, a \mapsto b_2, b_1 \neq b_2$$

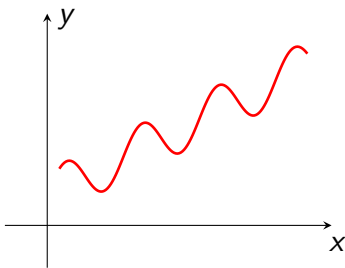


- Nije svaka krivulja u ravnini graf neke funkcije $y = f(x)$.

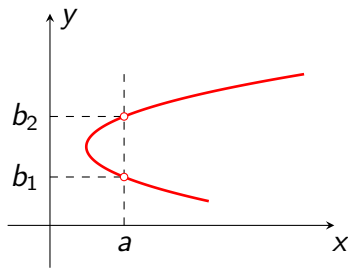


$$a \mapsto b_1, a \mapsto b_2, b_1 \neq b_2$$

zadana krivulja nije graf
niti jedne funkcije $y = f(x)$

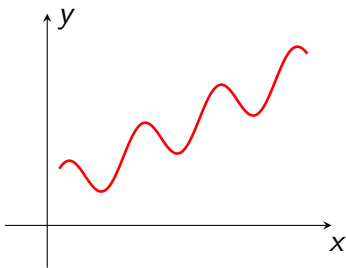


- Nije svaka krivulja u ravnini graf neke funkcije $y = f(x)$.



$$a \mapsto b_1, a \mapsto b_2, b_1 \neq b_2$$

zadana krivulja nije graf
niti jedne funkcije $y = f(x)$



zadana krivulja jest graf
neke funkcije $y = f(x)$

Zadavanje funkcije

Funkcija je zadana ako je zadana njezina domena, kodomena i pravilo pridruživanja.

Zadavanje funkcije

Funkcija je zadana ako je zadana njezina domena, kodomena i pravilo pridruživanja.

Pravilo pridruživanja je postupak pomoću kojeg se svakom elementu domene pridružuje **jedan i samo jedan** element kodomene.

Zadavanje funkcije

Funkcija je zadana ako je zadana njezina domena, kodomena i pravilo pridruživanja.

Pravilo pridruživanja je postupak pomoću kojeg se svakom elementu domene pridružuje **jedan i samo jedan** element kodomene.

Funkcije se mogu zadati:

- numerički (pomoću tablice)
- grafički (pomoću grafa)
- algebarski (pomoću formule)

Kvadratna funkcija

zadana algebarski

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

Kvadratna funkcija

zadana algebarski

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

zadana numerički

x	y
1	1
2	4
-3	9
-0.5	0.25
2.14	4.5796
$\vdots$	$\vdots$

Kvadratna funkcija

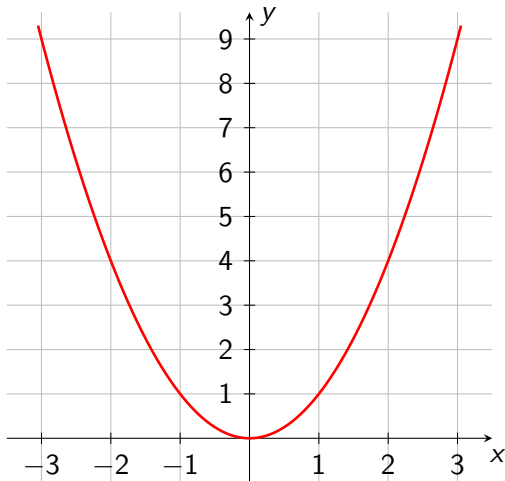
zadana algebarski

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

zadana numerički

x	y
1	1
2	4
-3	9
-0.5	0.25
2.14	4.5796
$\vdots$	$\vdots$

zadana grafički



Kvadratna funkcija

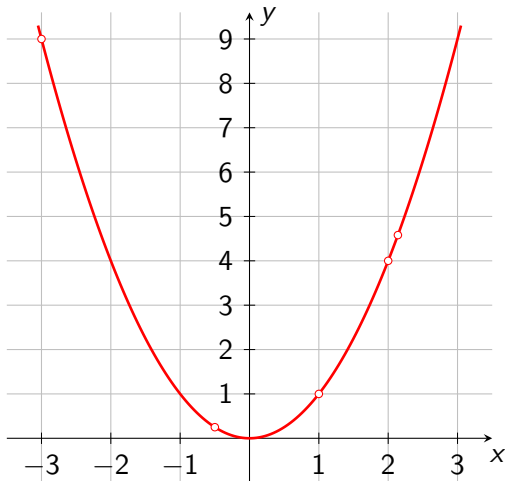
zadana algebarski

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

zadana numerički

x	y
1	1
2	4
-3	9
-0.5	0.25
2.14	4.5796
$\vdots$	$\vdots$

zadana grafički



Definicija

Dvije funkcije su **jednake** ako imaju jednake domene, jednake kodomene i jednako pravilo pridruživanja.

Definicija

Dvije funkcije su **jednake** ako imaju jednake domene, jednake kodomene i jednako pravilo pridruživanja.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

Definicija

Dvije funkcije su **jednake** ako imaju jednake domene, jednake kodomene i jednako pravilo pridruživanja.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

$$g : [0, 20] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$$

Definicija

Dvije funkcije su **jednake** ako imaju jednake domene, jednake kodomene i jednako pravilo pridruživanja.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

$$g : [0, 20] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$$

Funkcije f i g nisu jednake jer nemaju jednake domene.

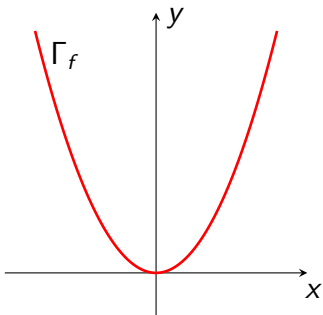
Definicija

Dvije funkcije su **jednake** ako imaju jednake domene, jednake kodomene i jednako pravilo pridruživanja.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

$$g : [0, 20] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$$

Funkcije f i g nisu jednake jer nemaju jednake domene.



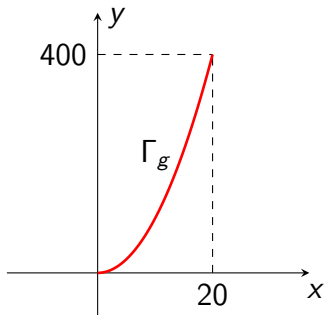
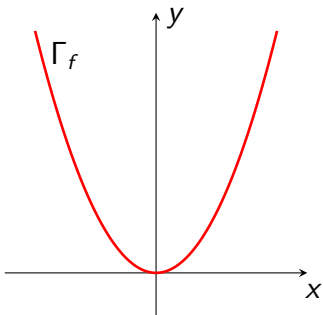
Definicija

Dvije funkcije su **jednake** ako imaju jednake domene, jednake kodomene i jednako pravilo pridruživanja.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

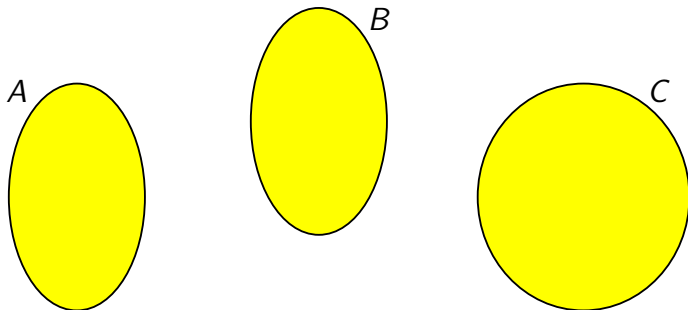
$$g : [0, 20] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$$

Funkcije f i g nisu jednake jer nemaju jednake domene.

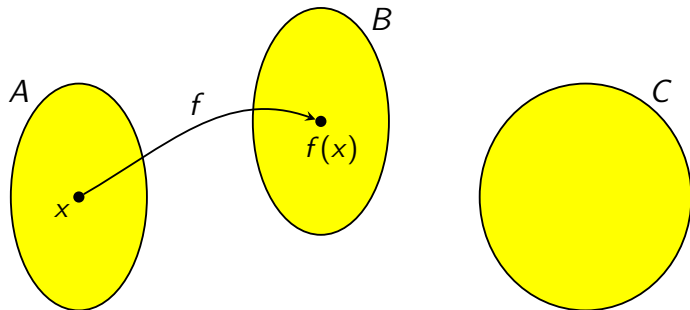


Kompozicija funkcija

Kompozicija funkcija

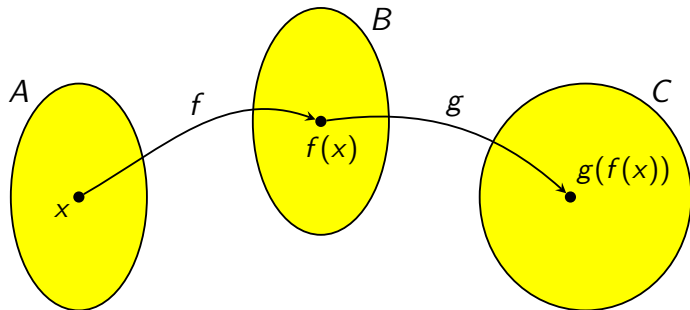


Kompozicija funkcija



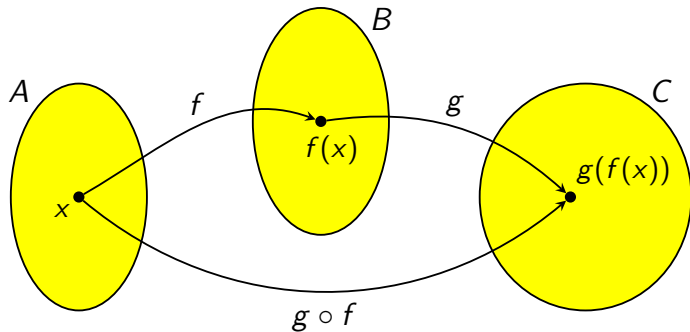
- $f : A \rightarrow B$,

Kompozicija funkcija



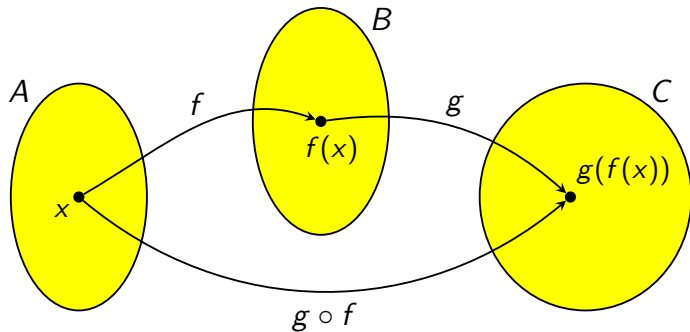
- $f : A \rightarrow B, \quad g : B \rightarrow C$

Kompozicija funkcija



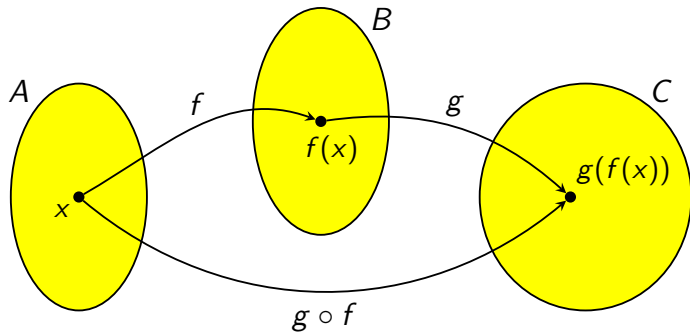
- $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$

Kompozicija funkcija



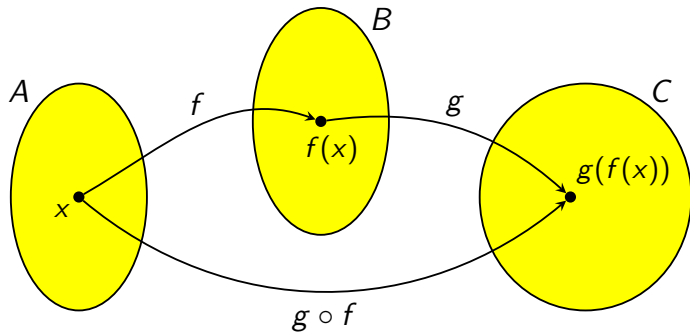
- $f : A \rightarrow B, \quad g : B \rightarrow C$
- $g \circ f : A \rightarrow C,$

Kompozicija funkcija



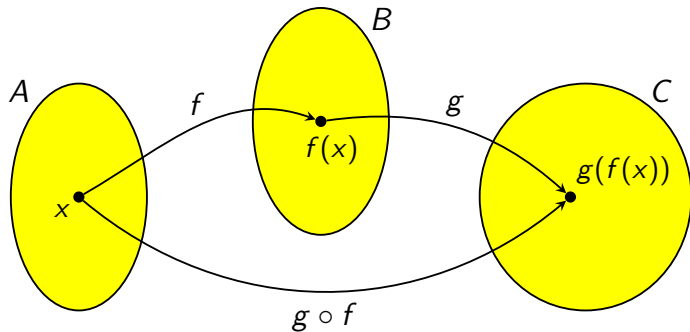
- $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$
- $g \circ f : A \rightarrow C$, $(g \circ f)(x) =$

Kompozicija funkcija



- $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$
- $g \circ f : A \rightarrow C$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Kompozicija funkcija



- $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$
- $g \circ f : A \rightarrow C$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$\text{Im } f \subseteq \mathcal{D}_g$$

Primjer

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x + 5$$

$$(g \circ f)(x) =$$

Primjer

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x + 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Primjer

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x + 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x})$$

Primjer

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x + 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 5$$

Primjer

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x + 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 5$$

$$(f \circ g)(x) =$$

Primjer

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x + 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 5$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Primjer

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x + 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 5$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 5)$$

Primjer

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x + 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 5$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 5) = \sqrt{x + 5}$$

Primjer

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x + 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 5$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 5) = \sqrt{x + 5}$$

Da bi kompozicija $f \circ g$ bila definirana, domene mogu biti najviše

Primjer

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x + 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 5$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 5) = \sqrt{x + 5}$$

Da bi kompozicija $f \circ g$ bila definirana, domene mogu biti najviše

$$f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

Primjer

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x + 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 5$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 5) = \sqrt{x + 5}$$

Da bi kompozicija $f \circ g$ bila definirana, domene mogu biti najviše

$$f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : [-5, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

Primjer

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x + 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 5$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 5) = \sqrt{x + 5}$$

Da bi kompozicija $f \circ g$ bila definirana, domene mogu biti najviše

$$f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : [-5, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

- Kompozicija funkcija općenito nije komutativna operacija

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Primjer

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x + 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 5$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 5) = \sqrt{x + 5}$$

Da bi kompozicija $f \circ g$ bila definirana, domene mogu biti najviše

$$f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : [-5, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

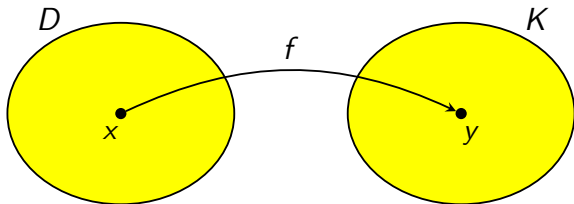
- Kompozicija funkcija općenito nije komutativna operacija

$$f \circ g \neq g \circ f$$

- Kompozicija funkcija je asocijativna operacija

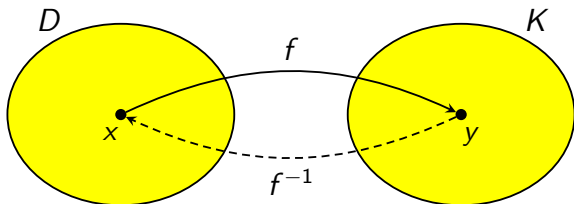
$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

Inverzna funkcija



$$f : D \rightarrow K$$

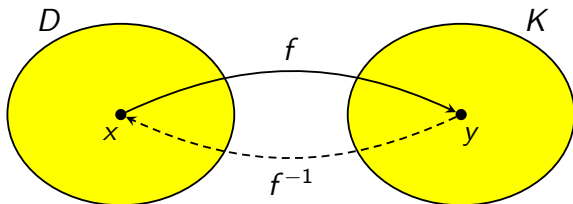
Inverzna funkcija



$$f : D \rightarrow K$$

$$f^{-1} : K \rightarrow D$$

Inverzna funkcija

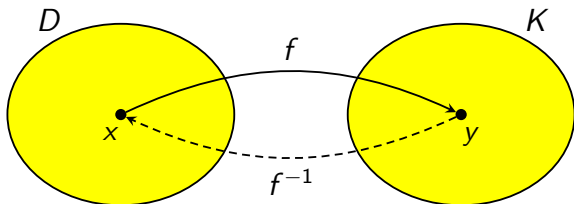


$$f : D \rightarrow K$$

$$f^{-1} : K \rightarrow D$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

Inverzna funkcija



$$f : D \rightarrow K$$

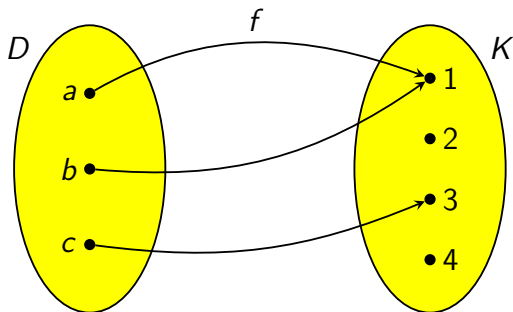
$$f^{-1} : K \rightarrow D$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

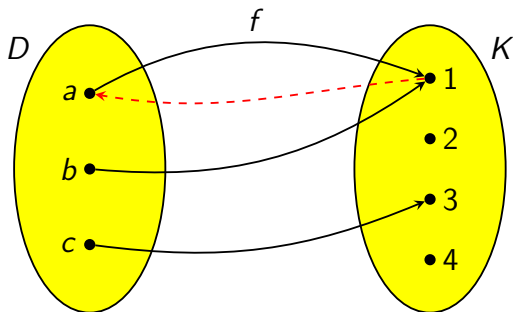
Napomena

Inverzna funkcija ne mora uvijek postojati.

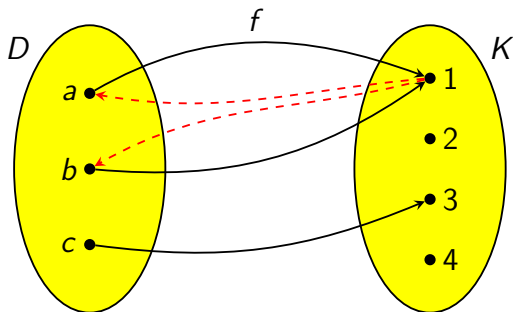
Koje funkcije imaju inverznu funkciju?



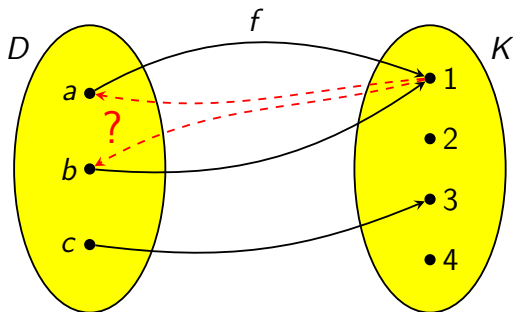
Koje funkcije imaju inverznu funkciju?



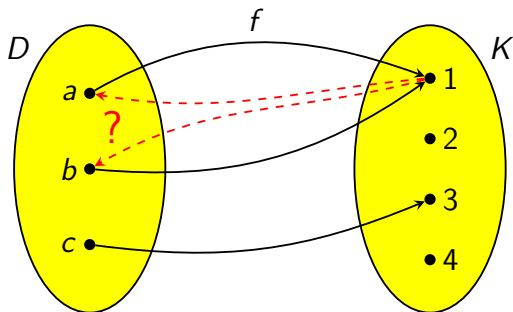
Koje funkcije imaju inverznu funkciju?



Koje funkcije imaju inverznu funkciju?

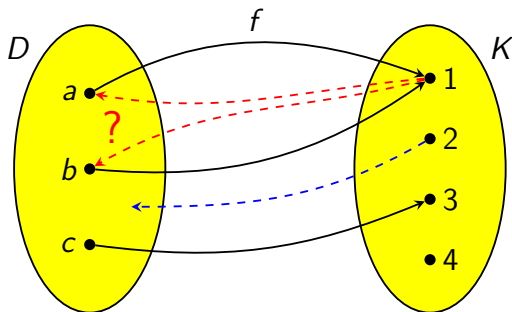


Koje funkcije imaju inverznu funkciju?



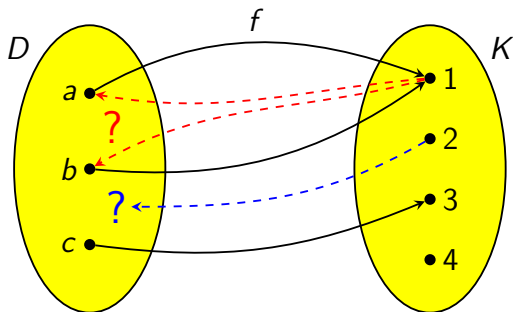
- Funkcija f mora različite elemente domene preslikavati u različite elemente kodomene, tj. f mora biti **INJEKCIJA**.

Koje funkcije imaju inverznu funkciju?



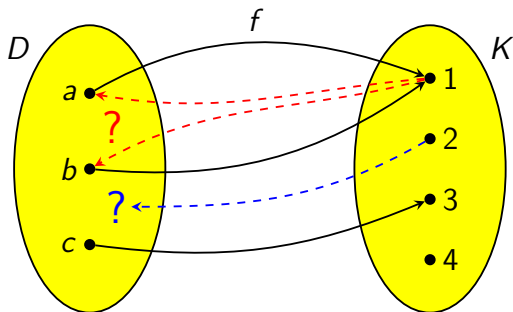
- Funkcija f mora različite elemente domene preslikavati u različite elemente kodomene, tj. f mora biti **INJEKCIJA**.

Koje funkcije imaju inverznu funkciju?



- Funkcija f mora različite elemente domene preslikavati u različite elemente kodomene, tj. f mora biti **INJEKCIJA**.

Koje funkcije imaju inverznu funkciju?

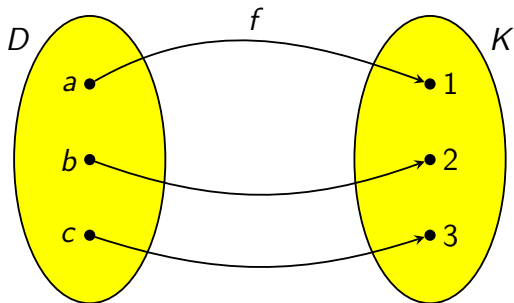


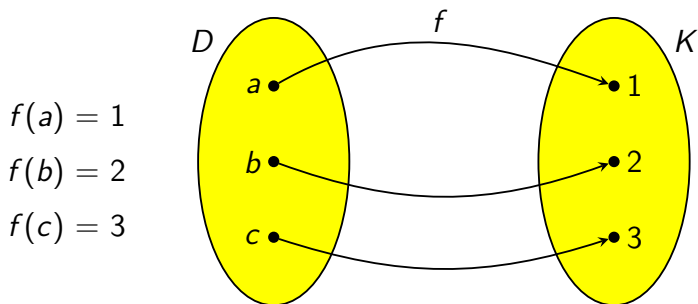
- Funkcija f mora različite elemente domene preslikavati u različite elemente kodomena, tj. f mora biti **INJEKCIJA**.
- Svi elementi u kodomeni moraju biti "pogođeni" ($\text{Im } f = K$), tj. f mora biti **SURJEKCIJA**.

$$f(a) = 1$$

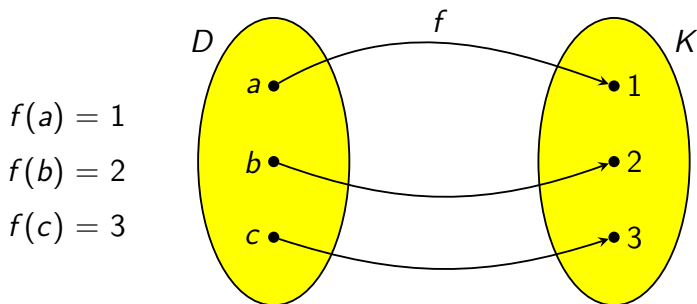
$$f(b) = 2$$

$$f(c) = 3$$

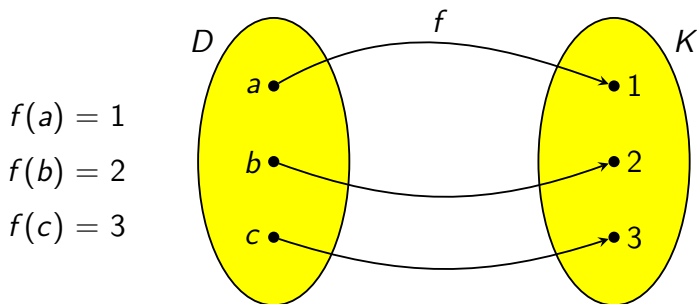




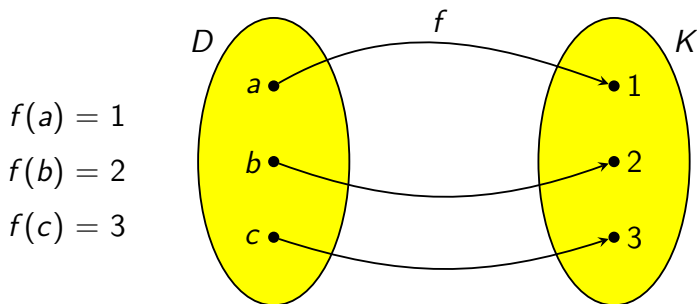
- Funkcija f je injekcija (različite elemente domene preslikava u različite elemente kodomene).



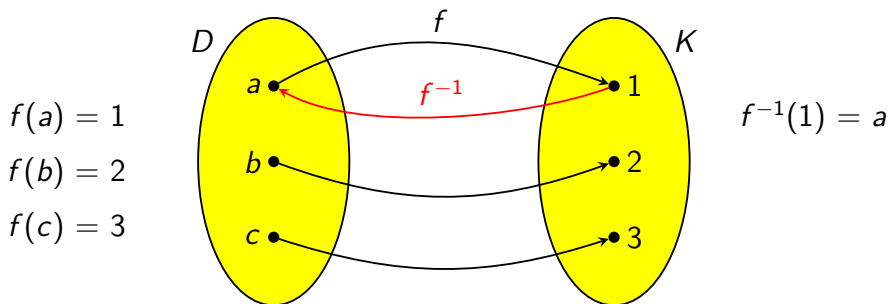
- Funkcija f je injekcija (različite elemente domene preslikava u različite elemente kodomene).
- Funkcija f je surjekcija jer je $\text{Im } f = K$ (svi elementi u kodomeni su "pogođeni").



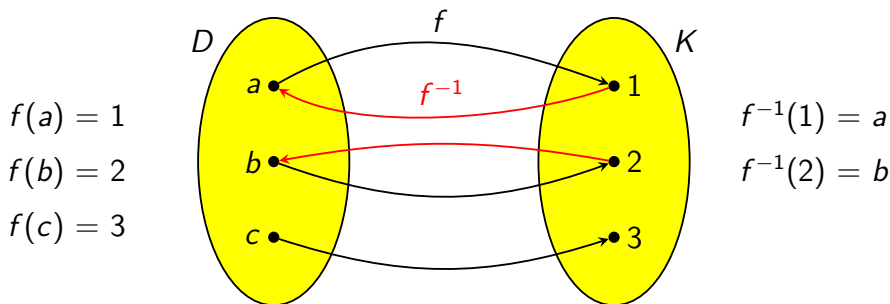
- Funkcija f je injekcija (različite elemente domene preslikava u različite elemente kodomene).
- Funkcija f je surjekcija jer je $\text{Im } f = K$ (svi elementi u kodomeni su "pogođeni").
- Funkcija f je **BIJEKCIJA** (injekcija i surjekcija).



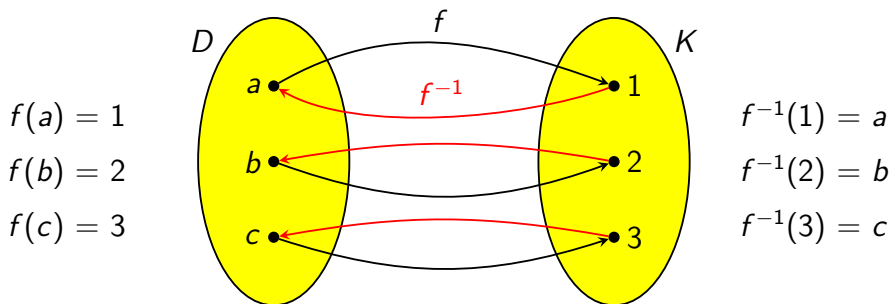
- Funkcija f je injekcija (različite elemente domene preslikava u različite elemente kodomene).
- Funkcija f je surjekcija jer je $\text{Im } f = K$ (svi elementi u kodomeni su "pogođeni").
- Funkcija f je **BIJEKCIJA** (injekcija i surjekcija).
- **Jedino bijekcije imaju inverznu funkciju.**



- Funkcija f je injekcija (različite elemente domene preslikava u različite elemente kodomene).
- Funkcija f je surjekcija jer je $\text{Im } f = K$ (svi elementi u kodomeni su "pogođeni").
- Funkcija f je **BIJEKCIJA** (injekcija i surjekcija).
- **Jedino bijekcije imaju inverznu funkciju.**

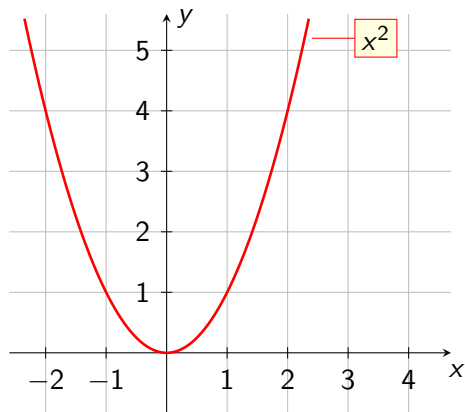


- Funkcija f je injekcija (različite elemente domene preslikava u različite elemente kodomene).
- Funkcija f je surjekcija jer je $\text{Im } f = K$ (svi elementi u kodomeni su "pogođeni").
- Funkcija f je **BIJEKCIJA** (injekcija i surjekcija).
- **Jedino bijekcije imaju inverznu funkciju.**

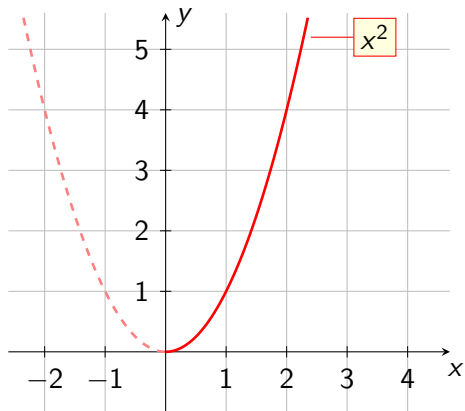


- Funkcija f je injekcija (različite elemente domene preslikava u različite elemente kodomene).
- Funkcija f je surjekcija jer je $\text{Im } f = K$ (svi elementi u kodomeni su "pogođeni").
- Funkcija f je **BIJEKCIJA** (injekcija i surjekcija).
- **Jedino bijekcije imaju inverznu funkciju.**

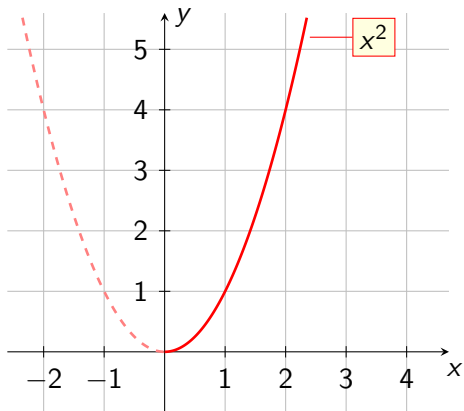
Drugi korijen



Drugi korijen

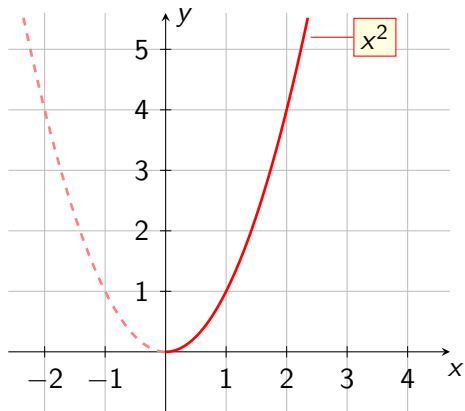


Drugi korijen



$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

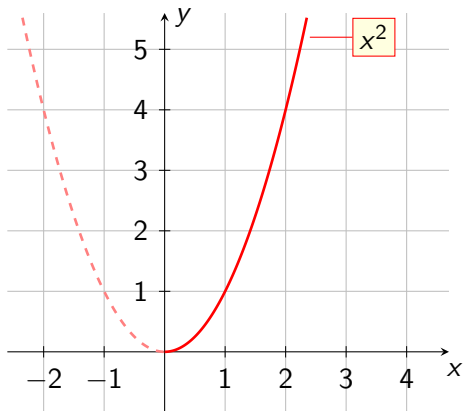
Drugi korijen



$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f(x) = x^2$$

Drugi korijen

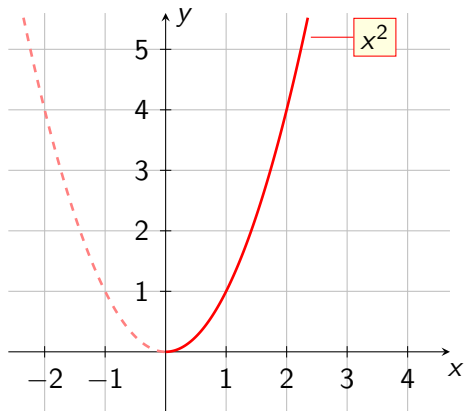


$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f(x) = x^2$$

$$f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

Drugi korijen



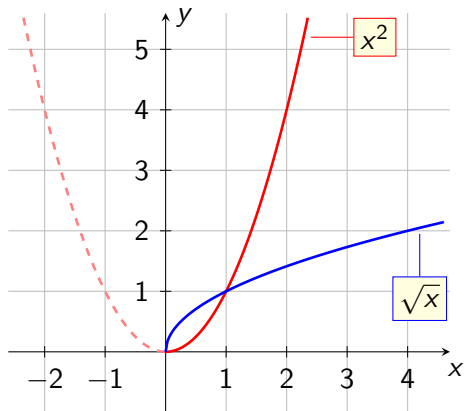
$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f(x) = x^2$$

$$f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Drugi korijen



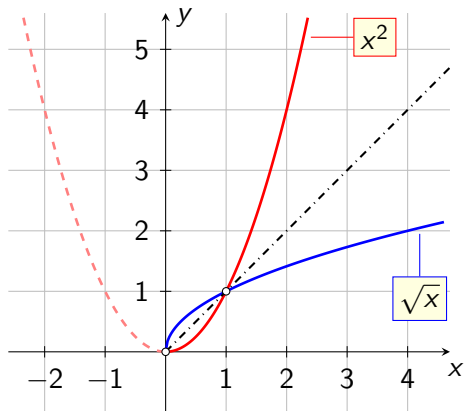
$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f(x) = x^2$$

$$f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Drugi korijen



$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

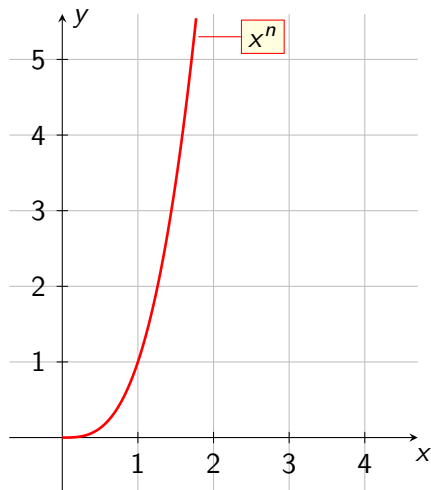
$$f(x) = x^2$$

$$f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Grafovi funkcija f i f^{-1} simetrični su s obzirom na pravac $y = x$.

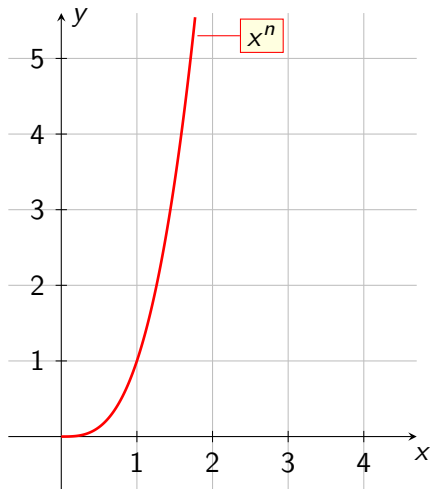
n -ti korijen



$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

n -ti korijen

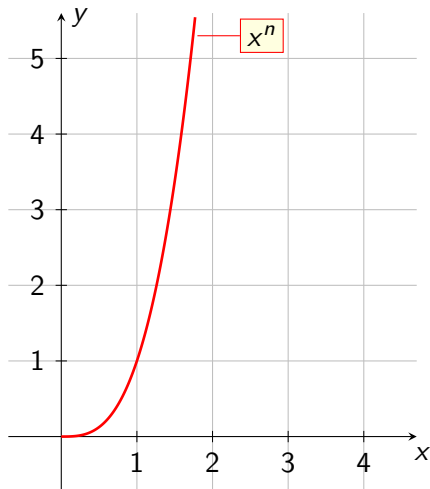


$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

$$f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

n -ti korijen



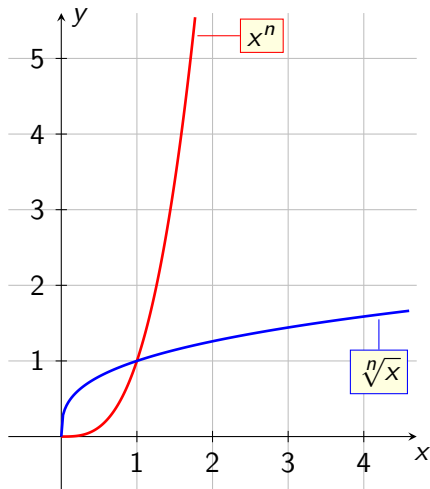
$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

$$f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

n -ti korijen



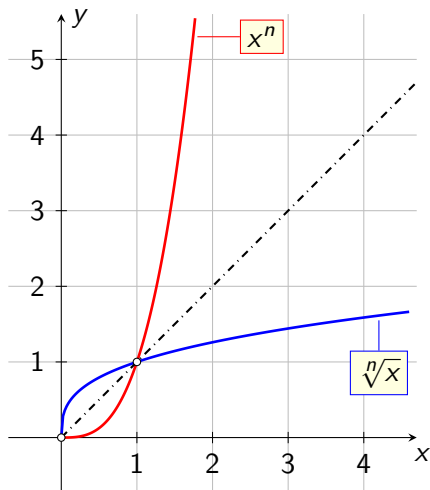
$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

$$f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

n -ti korijen



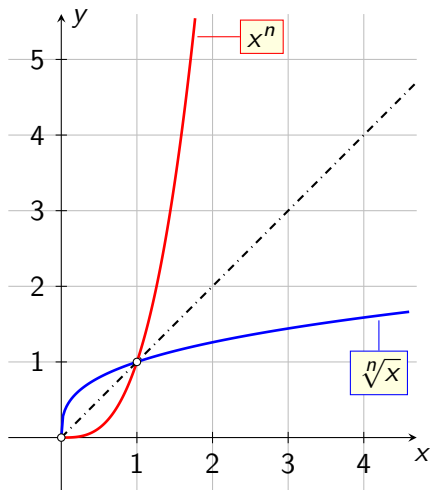
$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

$$f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

n -ti korijen



$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

$$f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

Napomena

Za neparni $n \in \mathbb{N}$ možemo uzeti $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Eksponencijalna funkcija

Definicija

Funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ oblika

$$f(x) = a^x, \quad a > 0, a \neq 1$$

zovemo **eksponencijalnom funkcijom** baze a .

Eksponeñcijalna funkcija

Definicija

Funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ oblika

$$f(x) = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

zovemo **eksponencijsalnom funkcijom** baze a .

- $a^0 = 1$, tj. graf prolazi kroz točku $(0, 1)$

Eksponeñcijalna funkcija

Definicija

Funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ oblika

$$f(x) = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

zovemo **eksponencijsalnom funkcijom** baze a .

- $a^0 = 1$, tj. graf prolazi kroz točku $(0, 1)$
- $a^x > 0$, tj. graf se nalazi iznad x -osi

Eksponencijalna funkcija

Definicija

Funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ oblika

$$f(x) = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

zovemo **eksponencijalnom funkcijom** baze a .

- $a^0 = 1$, tj. graf prolazi kroz točku $(0, 1)$
- $a^x > 0$, tj. graf se nalazi iznad x -osi
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

Kako izračunati a^x ?

Kako izračunati a^x ?

- ako je $x \in \mathbb{N}$

$$a^x = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{x \text{ puta}}$$

Kako izračunati a^x ?

- ako je $x \in \mathbb{N}$

$$a^x = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{x \text{ puta}}$$

- ako je $x \in \mathbb{Q}$, $x > 0$

Kako izračunati a^x ?

- ako je $x \in \mathbb{N}$

$$a^x = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{x \text{ puta}}$$

- ako je $x \in \mathbb{Q}$, $x > 0$  $x = \frac{m}{n}$ za neke $m, n \in \mathbb{N}$

Kako izračunati a^x ?

- ako je $x \in \mathbb{N}$

$$a^x = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{x \text{ puta}}$$

- ako je $x \in \mathbb{Q}$, $x > 0$  $x = \frac{m}{n}$ za neke $m, n \in \mathbb{N}$

$$a^x = \sqrt[n]{a^m}$$

Kako izračunati a^x ?

- ako je $x \in \mathbb{N}$

$$a^x = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{x \text{ puta}}$$

- ako je $x \in \mathbb{Q}$, $x > 0$  $x = \frac{m}{n}$ za neke $m, n \in \mathbb{N}$

$$a^x = \sqrt[n]{a^m}$$

- ako je x pozitivni iracionalni broj

$$a^x \approx a^r, \quad r \approx x, \quad r \in \mathbb{Q}$$

Kako izračunati a^x ?

- ako je $x \in \mathbb{N}$

$$a^x = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{x \text{ puta}}$$

- ako je $x \in \mathbb{Q}$, $x > 0$  $x = \frac{m}{n}$ za neke $m, n \in \mathbb{N}$

$$a^x = \sqrt[n]{a^m}$$

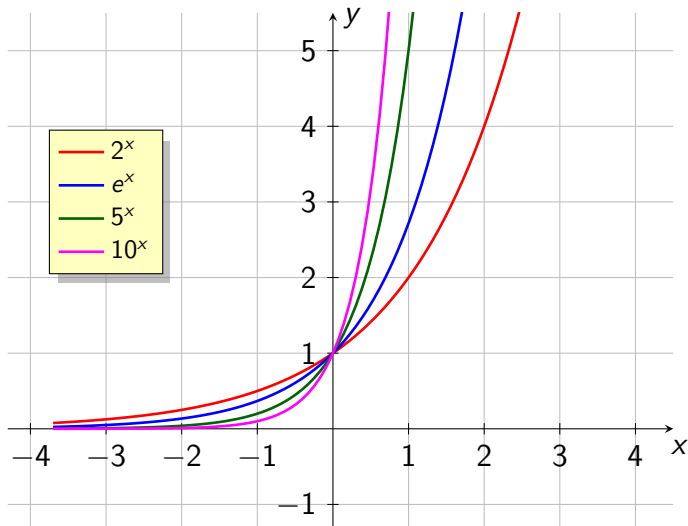
- ako je x pozitivni iracionalni broj

$$a^x \approx a^r, \quad r \approx x, \quad r \in \mathbb{Q}$$

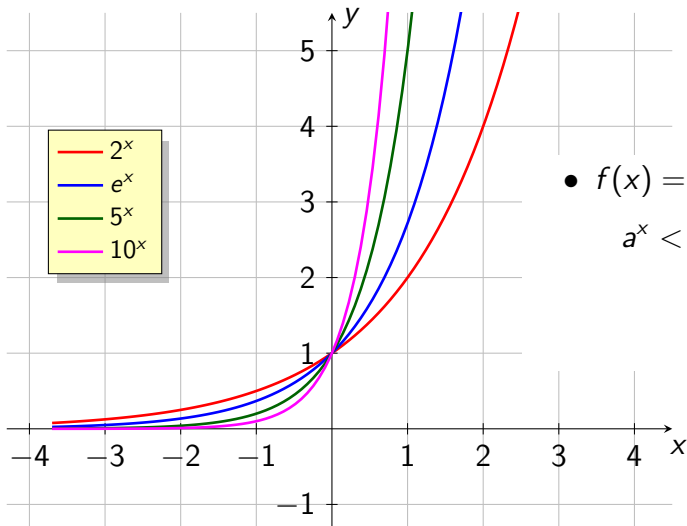
- ako je $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}$$

$$f(x) = a^x, \quad a > 1$$



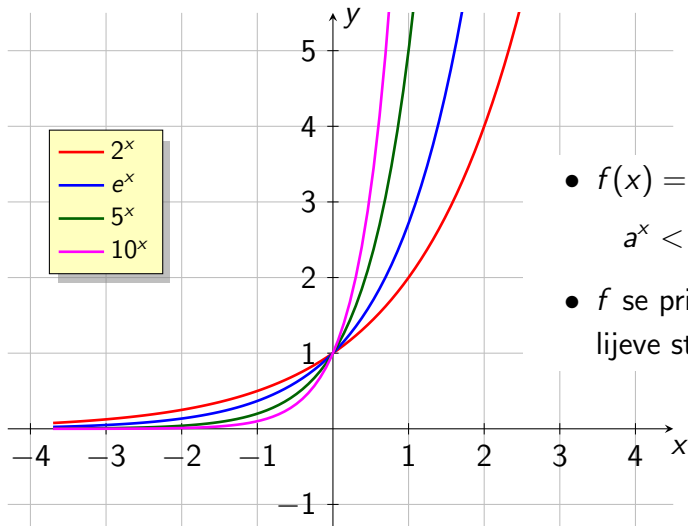
$$f(x) = a^x, \quad a > 1$$



- $f(x) = a^x$ strogo raste

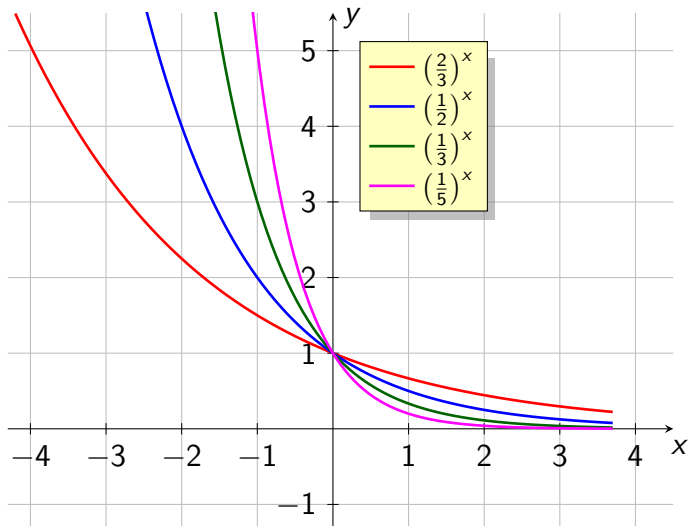
$$a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$$

$$f(x) = a^x, \quad a > 1$$

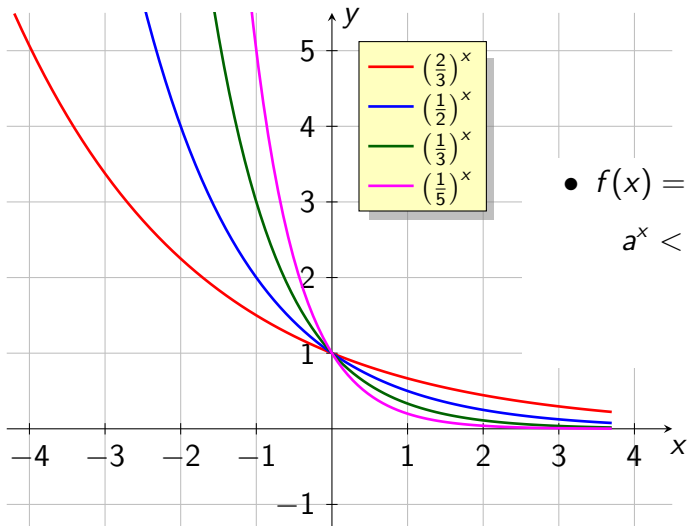


- $f(x) = a^x$ strogo raste
 $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$
- f se približava x-osi s lijeve strane

$$f(x) = a^x, \quad 0 < a < 1$$



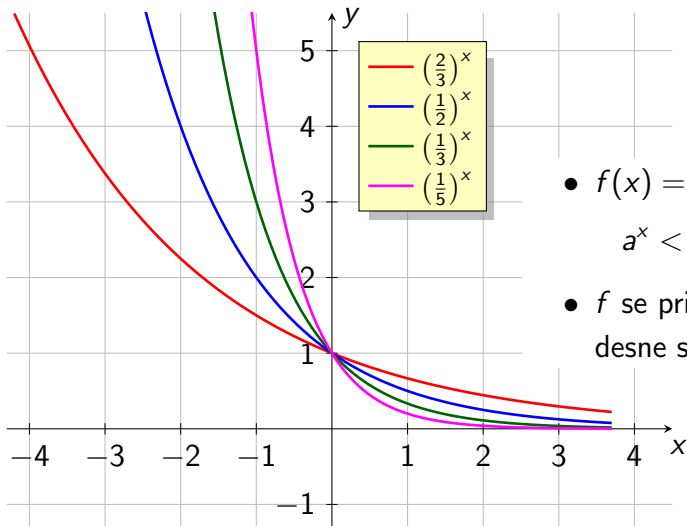
$$f(x) = a^x, \quad 0 < a < 1$$



• $f(x) = a^x$ strogo pada

$$a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$$

$$f(x) = a^x, \quad 0 < a < 1$$



- $f(x) = a^x$ strogo pada
 $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$
- f se približava x -osi s
 desne strane

Logaritamska funkcija

Definicija

Funkciju $f : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ koja je inverzna eksponencijalnoj funkciji baze a zovemo **logaritamskom funkcijom** baze a i označavamo s

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Logaritamska funkcija

Definicija

Funkciju $f : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ koja je inverzna eksponencijalnoj funkciji baze a zovemo **logaritamskom funkcijom** baze a i označavamo s

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

- $\log_a 1 = 0$, tj. graf prolazi kroz točku $(1, 0)$

Logaritamska funkcija

Definicija

Funkciju $f : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ koja je inverzna eksponencijalnoj funkciji baze a zovemo **logaritamskom funkcijom** baze a i označavamo s

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

- $\log_a 1 = 0$, tj. graf prolazi kroz točku $(1, 0)$
- $a^{\log_a x} = x, \quad \log_a a^x = x$

Logaritamska funkcija

Definicija

Funkciju $f : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ koja je inverzna eksponencijalnoj funkciji baze a zovemo **logaritamskom funkcijom** baze a i označavamo s

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

- $\log_a 1 = 0$, tj. graf prolazi kroz točku $(1, 0)$
- $a^{\log_a x} = x, \quad \log_a a^x = x$
- $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

Logaritamska funkcija

Definicija

Funkciju $f : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ koja je inverzna eksponencijalnoj funkciji baze a zovemo **logaritamskom funkcijom** baze a i označavamo s

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

- $\log_a 1 = 0$, tj. graf prolazi kroz točku $(1, 0)$
- $a^{\log_a x} = x, \quad \log_a a^x = x$
- $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

$$\log x = \log_{10} x$$

$$\ln x = \log_e x$$

Logaritamska funkcija

Definicija

Funkciju $f : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ koja je inverzna eksponencijalnoj funkciji baze a zovemo **logaritamskom funkcijom** baze a i označavamo s

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

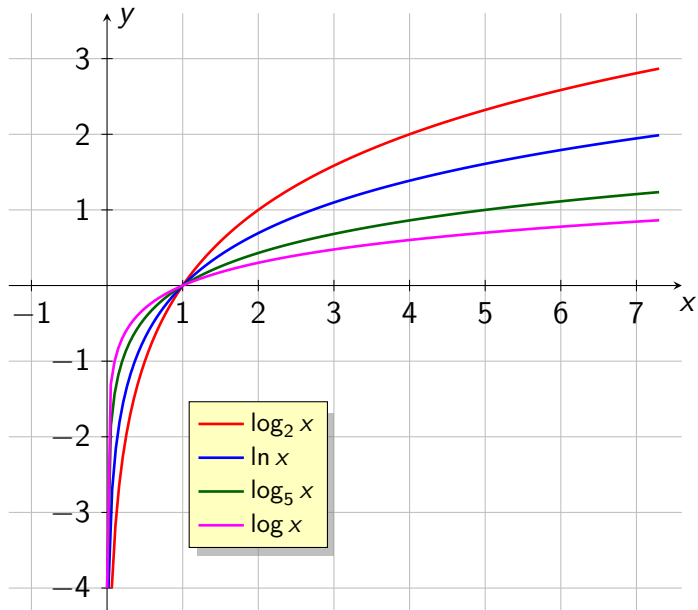
- $\log_a 1 = 0$, tj. graf prolazi kroz točku $(1, 0)$
- $a^{\log_a x} = x, \quad \log_a a^x = x$
- $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

$$e \approx 2.718281828$$

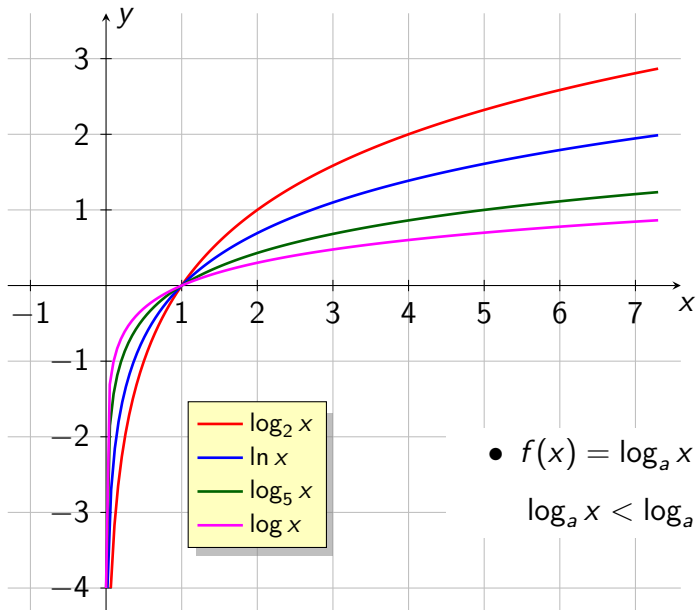
$$\log x = \log_{10} x$$

$$\ln x = \log_e x$$

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 1$$

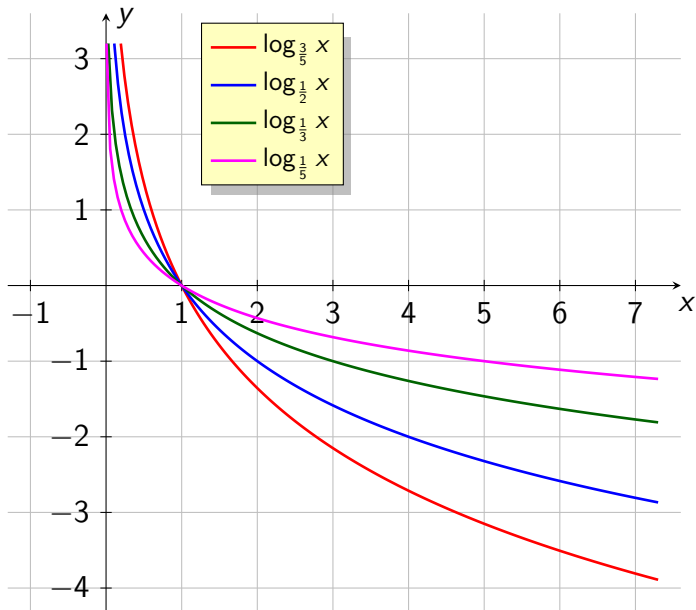


$$f(x) = \log_a x, \quad a > 1$$

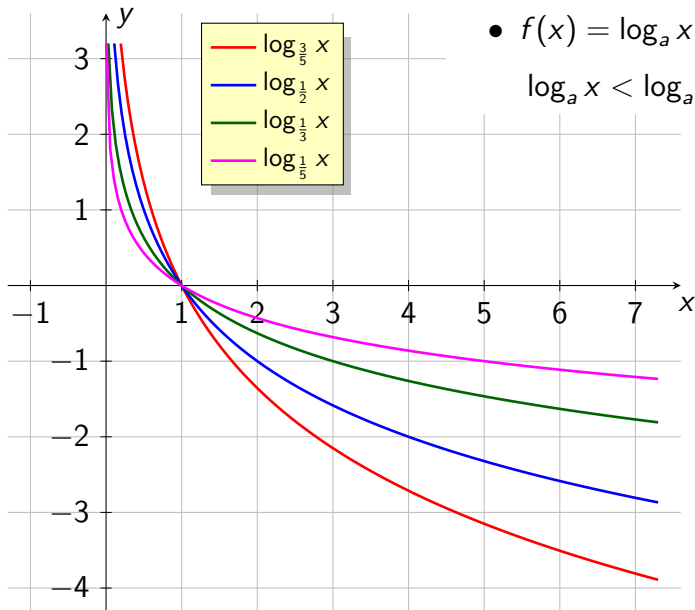


- $f(x) = \log_a x$ strogo raste
 $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x < y$

$$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a < 1$$



$$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a < 1$$



- $f(x) = \log_a x$ strogo pada
 $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x > y$

Još neka svojstva logaritamske funkcije

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad x, y > 0$

Još neka svojstva logaritamske funkcije

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad x, y > 0$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad x, y > 0$

Još neka svojstva logaritamske funkcije

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad x, y > 0$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad x, y > 0$
- $\log_a x^p = p \log_a x, \quad p \in \mathbb{R}, x > 0$

Još neka svojstva logaritamske funkcije

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad x, y > 0$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad x, y > 0$
- $\log_a x^p = p \log_a x, \quad p \in \mathbb{R}, x > 0$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Još neka svojstva logaritamske funkcije

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad x, y > 0$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad x, y > 0$
- $\log_a x^p = p \log_a x, \quad p \in \mathbb{R}, x > 0$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Još neka svojstva logaritamske funkcije

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad x, y > 0$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad x, y > 0$
- $\log_a x^p = p \log_a x, \quad p \in \mathbb{R}, x > 0$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Opća potencija

$$x^c = e^{c \ln x}, \quad c \in \mathbb{R}, x > 0$$

Jednostavni algoritam za logaritmiranje

Neka je L lista u koju će se spremati znamenke broja $\log_b x$.

Jednostavni algoritam za logaritmiranje

Neka je L lista u koju će se spremati znamenke broja $\log_b x$.

Ponavljaj željeni broj puta sljedeće korake:

Jednostavni algoritam za logaritmiranje

Neka je L lista u koju će se spremati znamenke broja $\log_b x$.

Ponavljaj željeni broj puta sljedeće korake:

- Neka je d potrební broj dijeljenja s brojem b da se zadovolji uvjet $\frac{x}{b^d} < b$.

Jednostavni algoritam za logaritmiranje

Neka je L lista u koju će se spremati znamenke broja $\log_b x$.

Ponavljaj željeni broj puta sljedeće korake:

- Neka je d potrební broj dijeljenja s brojem b da se zadovolji uvjet $\frac{x}{b^d} < b$.
- Spremi d na kraj liste L .

Jednostavni algoritam za logaritmiranje

Neka je L lista u koju će se spremati znamenke broja $\log_b x$.

Ponavljaj željeni broj puta sljedeće korake:

- Neka je d potrební broj dijeljenja s brojem b da se zadovolji uvjet $\frac{x}{b^d} < b$.
- Spremi d na kraj liste L .
- Stavi $y := \frac{x}{b^d}$.

Jednostavni algoritam za logaritmiranje

Neka je L lista u koju će se spremati znamenke broja $\log_b x$.

Ponavljaj željeni broj puta sljedeće korake:

- Neka je d potrební broj dijeljenja s brojem b da se zadovolji uvjet $\frac{x}{b^d} < b$.
- Spremi d na kraj liste L .
- Stavi $y := \frac{x}{b^d}$.
- Stavi $x := y^b$.

Jednostavni algoritam za logaritmiranje

Neka je L lista u koju će se spremati znamenke broja $\log_b x$.

Ponavljaj željeni broj puta sljedeće korake:

- Neka je d potrební broj dijeljenja s brojem b da se zadovolji uvjet $\frac{x}{b^d} < b$.
- Spremi d na kraj liste L .
- Stavi $y := \frac{x}{b^d}$.
- Stavi $x := y^b$.

Tada je prvi element liste L cjelobrojni dio broja $\log_b x$, a preostali elementi su redom decimale tog broja.

Nizovi

Definicija niza

Definicija

Niz realnih brojeva je funkcija $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definicija niza

Definicija

Niz realnih brojeva je funkcija $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

$a(n)$ $\longrightarrow$ n -ti ili opći član niza

Definicija niza

Definicija

Niz realnih brojeva je funkcija $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

$a(n)$ $\longrightarrow$ n -ti ili opći član niza

$a(n)$ $\longleftrightarrow$ a_n

Definicija niza

Definicija

Niz realnih brojeva je funkcija $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

$a(n)$ $\longrightarrow$ n -ti ili opći član niza

$a(n)$ $\longleftrightarrow$ a_n

a_n $\longrightarrow$ oznaka za n -ti član niza

Definicija niza

Definicija

Niz realnih brojeva je funkcija $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

$a(n)$ $\longrightarrow$ n -ti ili **opći član niza**

$a(n)$ $\longleftrightarrow$ a_n

a_n $\longrightarrow$ oznaka za n -ti član niza

(a_n) $\longrightarrow$ oznaka za sve članove niza kao jedna cjelina

Definicija niza

Definicija

Niz realnih brojeva je funkcija $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

$a(n)$ $\longrightarrow$ n -ti ili **opći član niza**

$a(n)$ $\longleftrightarrow$ a_n

a_n $\longrightarrow$ oznaka za n -ti član niza

(a_n) $\longrightarrow$ oznaka za sve članove niza kao jedna cjelina

Definicija

Konačni niz realnih brojeva je funkcija

$$a : \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Načini zadavanja nizova

- nabranjem početnih članova

Načini zadavanja nizova

- nabranjem početnih članova
 - niz parnih prirodnih brojeva: 2, 4, 6, 8, 10, ...

Načini zadavanja nizova

- nabranjem početnih članova
 - niz parnih prirodnih brojeva: 2, 4, 6, 8, 10, ...
 - niz neparnih prirodnih brojeva: 1, 3, 5, 7, 9, ...

Načini zadavanja nizova

- nabranjem početnih članova
 - niz parnih prirodnih brojeva: 2, 4, 6, 8, 10, ...
 - niz neparnih prirodnih brojeva: 1, 3, 5, 7, 9, ...
 - niz potencija broja dva: 2, 4, 8, 16, 32, ...

Načini zadavanja nizova

- nabrajanjem početnih članova
 - niz parnih prirodnih brojeva: 2, 4, 6, 8, 10, ...
 - niz neparnih prirodnih brojeva: 1, 3, 5, 7, 9, ...
 - niz potencija broja dva: 2, 4, 8, 16, 32, ...
- općim članom

Načini zadavanja nizova

- nabranjem početnih članova
 - niz parnih prirodnih brojeva: 2, 4, 6, 8, 10, ...
 - niz neparnih prirodnih brojeva: 1, 3, 5, 7, 9, ...
 - niz potencija broja dva: 2, 4, 8, 16, 32, ...
- općim članom
 - niz parnih prirodnih brojeva: $a_n = 2n$

Načini zadavanja nizova

- nabranjem početnih članova
 - niz parnih prirodnih brojeva: $2, 4, 6, 8, 10, \dots$
 - niz neparnih prirodnih brojeva: $1, 3, 5, 7, 9, \dots$
 - niz potencija broja dva: $2, 4, 8, 16, 32, \dots$
- općim članom
 - niz parnih prirodnih brojeva: $a_n = 2n$
 - niz neparnih prirodnih brojeva: $b_n = 2n - 1$

Načini zadavanja nizova

- nabranjem početnih članova

- niz parnih prirodnih brojeva: $2, 4, 6, 8, 10, \dots$
- niz neparnih prirodnih brojeva: $1, 3, 5, 7, 9, \dots$
- niz potencija broja dva: $2, 4, 8, 16, 32, \dots$

- općim članom

- niz parnih prirodnih brojeva: $a_n = 2n$
- niz neparnih prirodnih brojeva: $b_n = 2n - 1$
- niz potencija broja dva: $c_n = 2^n$

Načini zadavanja nizova

- nabrajanjem početnih članova
 - niz parnih prirodnih brojeva: 2, 4, 6, 8, 10, ...
 - niz neparnih prirodnih brojeva: 1, 3, 5, 7, 9, ...
 - niz potencija broja dva: 2, 4, 8, 16, 32, ...
- općim članom
 - niz parnih prirodnih brojeva: $a_n = 2n$
 - niz neparnih prirodnih brojeva: $b_n = 2n - 1$
 - niz potencija broja dva: $c_n = 2^n$
- rekurzivnom formulom

Načini zadavanja nizova

- nabranjem početnih članova

- niz parnih prirodnih brojeva: $2, 4, 6, 8, 10, \dots$
- niz neparnih prirodnih brojeva: $1, 3, 5, 7, 9, \dots$
- niz potencija broja dva: $2, 4, 8, 16, 32, \dots$

- općim članom

- niz parnih prirodnih brojeva: $a_n = 2n$
- niz neparnih prirodnih brojeva: $b_n = 2n - 1$
- niz potencija broja dva: $c_n = 2^n$

- rekurzivnom formulom

- niz parnih prirodnih brojeva: $a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + 2, n \geq 2$

Načini zadavanja nizova

- nabranjem početnih članova

- niz parnih prirodnih brojeva: $2, 4, 6, 8, 10, \dots$
- niz neparnih prirodnih brojeva: $1, 3, 5, 7, 9, \dots$
- niz potencija broja dva: $2, 4, 8, 16, 32, \dots$

- općim članom

- niz parnih prirodnih brojeva: $a_n = 2n$
- niz neparnih prirodnih brojeva: $b_n = 2n - 1$
- niz potencija broja dva: $c_n = 2^n$

- rekurzivnom formulom

- niz parnih prirodnih brojeva: $a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + 2, n \geq 2$
- niz neparnih prirodnih brojeva: $b_1 = 1, b_n = b_{n-1} + 2, n \geq 2$

Načini zadavanja nizova

- nabranjem početnih članova

- niz parnih prirodnih brojeva: $2, 4, 6, 8, 10, \dots$
- niz neparnih prirodnih brojeva: $1, 3, 5, 7, 9, \dots$
- niz potencija broja dva: $2, 4, 8, 16, 32, \dots$

- općim članom

- niz parnih prirodnih brojeva: $a_n = 2n$
- niz neparnih prirodnih brojeva: $b_n = 2n - 1$
- niz potencija broja dva: $c_n = 2^n$

- rekurzivnom formulom

- niz parnih prirodnih brojeva: $a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + 2, n \geq 2$
- niz neparnih prirodnih brojeva: $b_1 = 1, b_n = b_{n-1} + 2, n \geq 2$
- niz potencija broja dva: $c_1 = 2, c_n = 2c_{n-1}, n \geq 2$

Fibonaccijev niz

Fibonaccijev niz (F_n) je niz brojeva zadan rekurzivno s

$$F_1 = 1, F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Fibonaccijev niz

Fibonaccijev niz (F_n) je niz brojeva zadan rekurzivno s

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$

Fibonaccijev niz

Fibonaccijev niz (F_n) je niz brojeva zadan rekurzivno s

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$

Fibonaccijev niz

Fibonaccijev niz (F_n) je niz brojeva zadan rekurzivno s

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3.$$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$

Fibonaccijev niz

Fibonaccijev niz (F_n) je niz brojeva zadan rekurzivno s

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3.$$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

Fibonaccijev niz

Fibonaccijev niz (F_n) je niz brojeva zadan rekurzivno s

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Kako izračunati drugi korijen?

- Neka je x_1 neka početna aproksimacija za $\sqrt{a}$.

Kako izračunati drugi korijen?

- Neka je x_1 neka početna aproksimacija za $\sqrt{a}$.
- $x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right), \quad k \geq 1$

Kako izračunati drugi korijen?

- Neka je x_1 neka početna aproksimacija za $\sqrt{a}$.
- $$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right), \quad k \geq 1$$
- Računaj sljedeći član x_{k+1} tako dugo dok se ne zadovolji uvjet $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ za neki odabrani dovoljno mali broj $\varepsilon > 0$.

Kako izračunati drugi korijen?

- Neka je x_1 neka početna aproksimacija za $\sqrt{a}$.
- $$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right), \quad k \geq 1$$
- Računaj sljedeći član x_{k+1} tako dugo dok se ne zadovolji uvjet $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ za neki odabrani dovoljno mali broj $\varepsilon > 0$.
- Tada je $x_k \approx \sqrt{a}$ za dovoljno veliki $k \in \mathbb{N}$.

Kako izračunati n -ti korijen?

- Neka je x_1 neka početna aproksimacija za $\sqrt[n]{a}$.

Kako izračunati n -ti korijen?

- Neka je x_1 neka početna aproksimacija za $\sqrt[n]{a}$.
- $$x_{k+1} = \frac{1}{n} \left((n-1)x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}} \right), \quad k \geq 1$$

Kako izračunati n -ti korijen?

- Neka je x_1 neka početna aproksimacija za $\sqrt[n]{a}$.
- $$x_{k+1} = \frac{1}{n} \left((n-1)x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}} \right), \quad k \geq 1$$
- Računaj sljedeći član x_{k+1} tako dugo dok se ne zadovolji uvjet $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ za neki odabrani dovoljno mali broj $\varepsilon > 0$.

Kako izračunati n -ti korijen?

- Neka je x_1 neka početna aproksimacija za $\sqrt[n]{a}$.
- $$x_{k+1} = \frac{1}{n} \left((n-1)x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}} \right), \quad k \geq 1$$
- Računaj sljedeći član x_{k+1} tako dugo dok se ne zadovolji uvjet $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ za neki odabrani dovoljno mali broj $\varepsilon > 0$.
- Tada je $x_k \approx \sqrt[n]{a}$ za dovoljno veliki $k \in \mathbb{N}$.

Aritmetički niz

Definicija

Niz (a_n) je **aritmetički** ako je razlika svakog člana (osim prvog) i njegovog prethodnika konstantni broj d , tj.

$$a_{n+1} - a_n = d, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aritmetički niz

Definicija

Niz (a_n) je **aritmetički** ako je razlika svakog člana (osim prvog) i njegovog prethodnika konstantni broj d , tj.

$$a_{n+1} - a_n = d, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Broj d naziva se **razlika (diferencija) aritmetičkog niza**.

Aritmetički niz

Definicija

Niz (a_n) je **aritmetički** ako je razlika svakog člana (osim prvog) i njegovog prethodnika konstantni broj d , tj.

$$a_{n+1} - a_n = d, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Broj d naziva se **razlika (diferencija) aritmetičkog niza**.

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots$$

Aritmetički niz

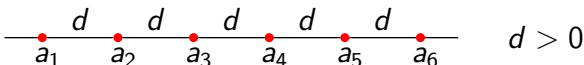
Definicija

Niz (a_n) je **aritmetički** ako je razlika svakog člana (osim prvog) i njegovog prethodnika konstantni broj d , tj.

$$a_{n+1} - a_n = d, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Broj d naziva se **razlika (diferencija) aritmetičkog niza**.

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots$$



Aritmetički niz

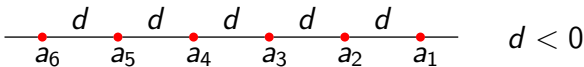
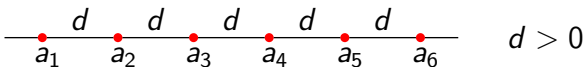
Definicija

Niz (a_n) je **aritmetički** ako je razlika svakog člana (osim prvog) i njegovog prethodnika konstantni broj d , tj.

$$a_{n+1} - a_n = d, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Broj d naziva se **razlika (diferencija) aritmetičkog niza**.

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots$$



Opći član aritmetičkog niza

$$a_1$$

Opći član aritmetičkog niza

$$a_1$$

$$a_2 =$$

Opći član aritmetičkog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

Opći član aritmetičkog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 =$$

Opći član aritmetičkog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d$$

Opći član aritmetičkog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d$$

Opći član aritmetičkog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

Opći član aritmetičkog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 =$$

Opći član aritmetičkog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d$$

Opći član aritmetičkog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d$$

Opći član aritmetičkog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

Opći član aritmetičkog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$$\vdots$$

Opći član aritmetičkog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$\vdots$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Opći član aritmetičkog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

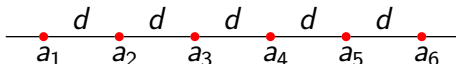
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$\vdots$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Vrijedi i općenitija formula



Opći član aritmetičkog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

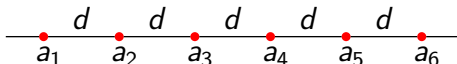
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$\vdots$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_5 = a_2 + 3d$$

Vrijedi i općenitija formula



Opći član aritmetičkog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

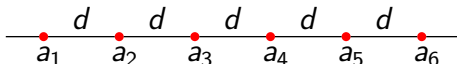
$\vdots$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_5 = a_2 + 3d$$

$$a_2 = a_5 - 3d$$

Vrijedi i općenitija formula



Opći član aritmetičkog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$\vdots$

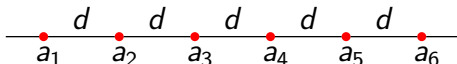
$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_5 = a_2 + 3d$$

$$a_2 = a_5 - 3d$$

Vrijedi i općenitija formula

$$a_n = a_m + (n - m)d$$



Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$S_n =$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$S_n =$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$S_n = a_1$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$S_n = a_1 + (a_1 + d)$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n - 2)d)$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n - 2)d) + (a_1 + (n - 1)d)$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n - 2)d) + (a_1 + (n - 1)d)$$

$$S_n =$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n - 2)d) + (a_1 + (n - 1)d)$$

$$S_n = a_n$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n - 2)d) + (a_1 + (n - 1)d)$$

$$S_n = a_n + (a_n - d)$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n - 2)d) + (a_1 + (n - 1)d)$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + \cdots$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n - 2)d) + (a_1 + (n - 1)d)$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + \cdots + (a_n - (n - 2)d)$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n - 2)d) + (a_1 + (n - 1)d)$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + \cdots + (a_n - (n - 2)d) + (a_n - (n - 1)d)$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n - 2)d) + (a_1 + (n - 1)d)$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + \cdots + (a_n - (n - 2)d) + (a_n - (n - 1)d)$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$\begin{array}{l} S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n - 2)d) + (a_1 + (n - 1)d) \\ S_n = a_n + (a_n - d) + \cdots + (a_n - (n - 2)d) + (a_n - (n - 1)d) \end{array} \quad \Bigg| \quad +$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$\begin{array}{l} S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n - 2)d) + (a_1 + (n - 1)d) \\ S_n = a_n + (a_n - d) + \cdots + (a_n - (n - 2)d) + (a_n - (n - 1)d) \end{array} \quad \Bigg| \quad +$$

$$2S_n =$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n - 2)d) + (a_1 + (n - 1)d) \\ S_n = a_n + (a_n - d) + \cdots + (a_n - (n - 2)d) + (a_n - (n - 1)d) \end{array} \quad \Bigg| \quad +$$

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$\begin{array}{l} S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n - 2)d) + (a_1 + (n - 1)d) \\ S_n = a_n + (a_n - d) + \cdots + (a_n - (n - 2)d) + (a_n - (n - 1)d) \end{array} \quad \Bigg| +$$

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \quad / : 2$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$\begin{array}{l} S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n - 2)d) + (a_1 + (n - 1)d) \\ S_n = a_n + (a_n - d) + \cdots + (a_n - (n - 2)d) + (a_n - (n - 1)d) \end{array} \quad \Bigg| +$$

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \quad / : 2$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$\begin{array}{l} S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d) \\ S_n = a_n + (a_n - d) + \cdots + (a_n - (n-2)d) + (a_n - (n-1)d) \end{array} \quad \Bigg| +$$

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \quad / : 2$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$\begin{array}{l} S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n - 2)d) + (a_1 + (n - 1)d) \\ S_n = a_n + (a_n - d) + \cdots + (a_n - (n - 2)d) + (a_n - (n - 1)d) \end{array} \quad \Bigg| +$$

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \quad / : 2$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + (n - 2)d) + (a_1 + (n - 1)d) \\ S_n = a_n + (a_n - d) + \cdots + (a_n - (n - 2)d) + (a_n - (n - 1)d) \end{array} \quad \Bigg| +$$

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \quad / : 2$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$$

Primjer

Odredite sumu prvih n neparnih prirodnih brojeva.

Primjer

Odredite sumu prvih n neparnih prirodnih brojeva.

Rješenje

- $a_n = 2n - 1$

Primjer

Odredite sumu prvih n neparnih prirodnih brojeva.

Rješenje

- $a_n = 2n - 1$
- $a_1 = 1, d = 2$

Primjer

Odredite sumu prvih n neparnih prirodnih brojeva.

Rješenje

- $a_n = 2n - 1$
- $a_1 = 1, d = 2$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Primjer

Odredite sumu prvih n neparnih prirodnih brojeva.

Rješenje

- $a_n = 2n - 1$
- $a_1 = 1, d = 2$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) =$$

Primjer

Odredite sumu prvih n neparnih prirodnih brojeva.

Rješenje

- $a_n = 2n - 1$
- $a_1 = 1, d = 2$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = \frac{n}{2}(1 + (2n - 1))$$

Primjer

Odredite sumu prvih n neparnih prirodnih brojeva.

Rješenje

- $a_n = 2n - 1$
- $a_1 = 1, d = 2$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = \frac{n}{2}(1 + (2n - 1))$$

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) =$$

Primjer

Odredite sumu prvih n neparnih prirodnih brojeva.

Rješenje

- $a_n = 2n - 1$
- $a_1 = 1, d = 2$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = \frac{n}{2}(1 + (2n - 1))$$

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = \frac{n}{2} \cdot 2n$$

Primjer

Odredite sumu prvih n neparnih prirodnih brojeva.

Rješenje

- $a_n = 2n - 1$
- $a_1 = 1, d = 2$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = \frac{n}{2}(1 + (2n - 1))$$

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = \frac{n}{2} \cdot 2n$$

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Karakterizacija aritmetičkog niza

Niz (a_n) je aritmetički niz ako i samo ako je svaki član niza (osim prvog) aritmetička sredina svojih susjeda, tj. vrijedi

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}, \quad n > 1.$$

Geometrijski niz

Definicija

Niz (a_n) je **geometrijski** ako je kvocijent svakog člana (osim prvog) i njegovog prethodnika konstantan broj različit od nule, tj.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad q \neq 0.$$

Geometrijski niz

Definicija

Niz (a_n) je **geometrijski** ako je kvocijent svakog člana (osim prvog) i njegovog prethodnika konstantan broj različit od nule, tj.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad q \neq 0.$$

Broj q naziva se **kvocijent geometrijskog niza**.

Geometrijski niz

Definicija

Niz (a_n) je **geometrijski** ako je kvocijent svakog člana (osim prvog) i njegovog prethodnika konstantan broj različit od nule, tj.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad q \neq 0.$$

Broj q naziva se **kvocijent geometrijskog niza**.

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots$$

Geometrijski niz

Definicija

Niz (a_n) je **geometrijski** ako je kvocijent svakog člana (osim prvog) i njegovog prethodnika konstantan broj različit od nule, tj.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad q \neq 0.$$

Broj q naziva se **kvocijent geometrijskog niza**.

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots$$

- $q = 1$

Geometrijski niz

Definicija

Niz (a_n) je **geometrijski** ako je kvocijent svakog člana (osim prvog) i njegovog prethodnika konstantan broj različit od nule, tj.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad q \neq 0.$$

Broj q naziva se **kvocijent geometrijskog niza**.

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots$$

- $q = 1 \longrightarrow$ konstantni niz: $a_1, a_1, a_1, \dots$

Geometrijski niz

Definicija

Niz (a_n) je **geometrijski** ako je kvocijent svakog člana (osim prvog) i njegovog prethodnika konstantan broj različit od nule, tj.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad q \neq 0.$$

Broj q naziva se **kvocijent geometrijskog niza**.

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots$$

- $q = 1 \longrightarrow$ konstantni niz: $a_1, a_1, a_1, \dots$
- $a_n = r^n, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Geometrijski niz

Definicija

Niz (a_n) je **geometrijski** ako je kvocijent svakog člana (osim prvog) i njegovog prethodnika konstantan broj različit od nule, tj.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad q \neq 0.$$

Broj q naziva se **kvocijent geometrijskog niza**.

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots$$

- $q = 1 \longrightarrow$ konstantni niz: $a_1, a_1, a_1, \dots$
- $a_n = r^n, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow$ geometrijski niz: $a_1 = r, q = r$

Opći član geometrijskog niza

$$a_1$$

Opći član geometrijskog niza

$$a_1$$

$$a_2 =$$

Opći član geometrijskog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 q$$

Opći član geometrijskog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 =$$

Opći član geometrijskog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q$$

Opći član geometrijskog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = (a_1 q) q$$

Opći član geometrijskog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = (a_1 q) q = a_1 q^2$$

Opći član geometrijskog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = (a_1 q) q = a_1 q^2$$

$$a_4 =$$

Opći član geometrijskog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = (a_1 q) q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 q$$

Opći član geometrijskog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = (a_1 q) q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 q = (a_1 q^2) q$$

Opći član geometrijskog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = (a_1 q) q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 q = (a_1 q^2) q = a_1 q^3$$

Opći član geometrijskog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = (a_1 q) q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 q = (a_1 q^2) q = a_1 q^3$$

$$\vdots$$

Opći član geometrijskog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = (a_1 q) q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 q = (a_1 q^2) q = a_1 q^3$$

$\vdots$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Opći član geometrijskog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = (a_1 q) q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 q = (a_1 q^2) q = a_1 q^3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Vrijedi i općenitija formula

Opći član geometrijskog niza

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = (a_1 q) q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 q = (a_1 q^2) q = a_1 q^3$$

$\vdots$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Vrijedi i općenitija formula

$$a_n = a_m \cdot q^{n-m}$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$qS_n =$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n =$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n =$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1 q$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-2}$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n =$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = a_1 q$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1}$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^{n-1}$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \quad / \cdot (-1)$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \quad / \cdot (-1)$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

$$-S_n =$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \quad / \cdot (-1)$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

$$-S_n = -a_1 - a_1q - a_1q^2 - \cdots - a_1q^{n-2} - a_1q^{n-1}$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \quad / \cdot (-1)$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

$$-S_n = -a_1 - a_1q - a_1q^2 - \cdots - a_1q^{n-2} - a_1q^{n-1}$$

$$qS_n =$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \quad / \cdot (-1)$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

$$-S_n = -a_1 - a_1q - a_1q^2 - \cdots - a_1q^{n-2} - a_1q^{n-1}$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \quad / \cdot (-1)$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

$$-S_n = -a_1 - a_1q - a_1q^2 - \cdots - a_1q^{n-2} - a_1q^{n-1}$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \quad / \cdot (-1)$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

$$\begin{array}{r} -S_n = -a_1 - a_1q - a_1q^2 - \cdots - a_1q^{n-2} - a_1q^{n-1} \\ qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \end{array} \quad / +$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \quad / \cdot (-1)$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

$$\begin{array}{r} -S_n = -a_1 - a_1q - a_1q^2 - \cdots - a_1q^{n-2} - a_1q^{n-1} \\ qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \end{array} \quad / +$$

$$qS_n - S_n =$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \quad / \cdot (-1)$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

$$\begin{array}{r} -S_n = -a_1 - a_1q - a_1q^2 - \cdots - a_1q^{n-2} - a_1q^{n-1} \\ qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \end{array} \quad / +$$

$$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \quad / \cdot (-1)$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

$$\begin{array}{r} -S_n = -a_1 - a_1q - a_1q^2 - \cdots - a_1q^{n-2} - a_1q^{n-1} \\ qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \\ + \end{array} \right.$$

$$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1$$

$$(q - 1)S_n =$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \quad / \cdot (-1)$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

$$\begin{array}{r} -S_n = -a_1 - a_1q - a_1q^2 - \cdots - a_1q^{n-2} - a_1q^{n-1} \\ qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \end{array} \quad / +$$

$$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1$$

$$(q - 1)S_n = a_1(q^n - 1)$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \quad / \cdot (-1)$$

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

$$\begin{array}{r} -S_n = -a_1 - a_1 q - a_1 q^2 - \cdots - a_1 q^{n-2} - a_1 q^{n-1} \\ qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \end{array} \quad / +$$

$$qS_n - S_n = a_1 q^n - a_1$$

$$(q - 1)S_n = a_1(q^n - 1) \quad / : (q - 1), \quad q \neq 1$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \quad / \cdot (-1)$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

$$\begin{array}{r} -S_n = -a_1 - a_1q - a_1q^2 - \cdots - a_1q^{n-2} - a_1q^{n-1} \\ qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \end{array} \quad / +$$

$$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1$$

$$(q - 1)S_n = a_1(q^n - 1) \quad / : (q - 1), \quad q \neq 1$$

$$S_n =$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \quad / \cdot (-1)$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

$$\begin{array}{r} -S_n = -a_1 - a_1q - a_1q^2 - \cdots - a_1q^{n-2} - a_1q^{n-1} \\ qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \end{array} \quad / +$$

$$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1$$

$$(q-1)S_n = a_1(q^n - 1) \quad / : (q-1), \quad q \neq 1$$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \quad / \cdot (-1)$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

$$\begin{array}{r} -S_n = -a_1 - a_1q - a_1q^2 - \cdots - a_1q^{n-2} - a_1q^{n-1} \\ qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \\ + \end{array} \right.$$

$$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1$$

$$(q-1)S_n = a_1(q^n - 1) \quad / : (q-1), \quad q \neq 1$$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Suma prvih n članova geometrijskog niza

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \cdots + qa_{n-1} + qa_n$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \quad / \cdot (-1)$$

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

$$\begin{array}{r} -S_n = -a_1 - a_1q - a_1q^2 - \cdots - a_1q^{n-2} - a_1q^{n-1} \\ qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \end{array} \quad \Bigg/ +$$

$$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1$$

$$(q-1)S_n = a_1(q^n - 1) \quad / : (q-1), \quad q \neq 1$$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$q = 1 \rightsquigarrow S_n = na_1$$

Primjer

Odredite sumu prvih n prirodnih potencija broja 2.

Primjer

Odredite sumu prvih n prirodnih potencija broja 2.

Rješenje

- $a_n = 2^n$

Primjer

Odredite sumu prvih n prirodnih potencija broja 2.

Rješenje

- $a_n = 2^n$
- $a_1 = 2, q = 2$

Primjer

Odredite sumu prvih n prirodnih potencija broja 2.

Rješenje

- $a_n = 2^n$
- $a_1 = 2, q = 2$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Primjer

Odredite sumu prvih n prirodnih potencija broja 2.

Rješenje

- $a_n = 2^n$
- $a_1 = 2, q = 2$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$2 + 2^2 + \cdots + 2^n =$$

Primjer

Odredite sumu prvih n prirodnih potencija broja 2.

Rješenje

- $a_n = 2^n$
- $a_1 = 2, q = 2$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

Primjer

Odredite sumu prvih n prirodnih potencija broja 2.

Rješenje

- $a_n = 2^n$
- $a_1 = 2, q = 2$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$2 + 2^2 + \dots + 2^n =$$

Primjer

Odredite sumu prvih n prirodnih potencija broja 2.

Rješenje

- $a_n = 2^n$
- $a_1 = 2, q = 2$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2 \cdot (2^n - 1)$$

Primjer

Odredite sumu prvih n prirodnih potencija broja 2.

Rješenje

- $a_n = 2^n$
- $a_1 = 2, q = 2$

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2 \cdot (2^n - 1)$$

$$2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

Karakterizacija geometrijskog niza

Niz (a_n) s pozitivnim članovima je geometrijski niz ako i samo ako je svaki član niza (a_n) (osim prvog) geometrijska sredina svojih susjeda, tj. vrijedi

$$a_n = \sqrt{a_{n+1}a_{n-1}}, \quad n > 1.$$

Jednostavni i složeni dekurzivni kamatni račun

Osnovni pojmovi

- **Glavnica** je novčani iznos posuđen dužniku (u širem smislu može biti i nešto drugo, ne samo novac).

Osnovni pojmovi

- **Glavnica** je novčani iznos posuđen dužniku (u širem smislu može biti i nešto drugo, ne samo novac).
- **Kamata** je naknada koju dužnik plaća za posuđenu glavnica.

Osnovni pojmovi

- **Glavnica** je novčani iznos posuđen dužniku (u širem smislu može biti i nešto drugo, ne samo novac).
- **Kamata** je naknada koju dužnik plaća za posuđenu glavnica.
- **Razdoblje ukamaćivanja** je vremenski interval na koji je novac posuđen i za koji se obračunavaju kamate.

Osnovni pojmovi

- **Glavnica** je novčani iznos posuđen dužniku (u širem smislu može biti i nešto drugo, ne samo novac).
- **Kamata** je naknada koju dužnik plaća za posuđenu glavnica.
- **Razdoblje ukamaćivanja** je vremenski interval na koji je novac posuđen i za koji se obračunavaju kamate.
- **Kamatna stopa** je iznos koji dužnik plaća za 100 posuđenih novčanih jedinica za neki osnovni vremenski interval.

Dekurzivni i anticipativni obračun kamata

Dekurzivni obračun kamata

- kamate se obračunavaju na kraju razdoblja ukamaćivanja u odnosu na glavnice s početka tog razdoblja

Dekurzivni i anticipativni obračun kamata

Dekurzivni obračun kamata

- kamate se obračunavaju na kraju razdoblja ukamaćivanja u odnosu na glavnici s početka tog razdoblja
- kamate pribrajamo glavnici na kraju razdoblja ukamaćivanja

Dekurzivni i anticipativni obračun kamata

Dekurzivni obračun kamata

- kamate se obračunavaju na kraju razdoblja ukamaćivanja u odnosu na glavnici s početka tog razdoblja
- kamate pribrajamo glavnici na kraju razdoblja ukamaćivanja

Anticipativni obračun kamata

- kamate se obračunavaju na početku razdoblja ukamaćivanja u odnosu na glavnici s kraja tog razdoblja

Dekurzivni i anticipativni obračun kamata

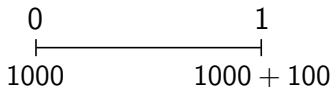
Dekurzivni obračun kamata

- kamate se obračunavaju na kraju razdoblja ukamaćivanja u odnosu na glavnice s početka tog razdoblja
- kamate pribrajamo glavnici na kraju razdoblja ukamaćivanja

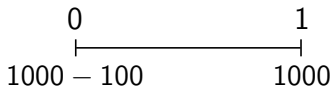
Anticipativni obračun kamata

- kamate se obračunavaju na početku razdoblja ukamaćivanja u odnosu na glavnice s kraja tog razdoblja
- kamate oduzimamo od glavnice na početku razdoblja ukamaćivanja

Dekurzivni obračun kamata

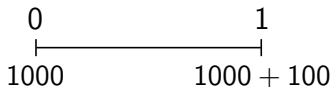


Anticipativni obračun kamata

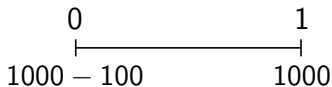


- posuđeni iznos: 1000 kn

Dekurzivni obračun kamata

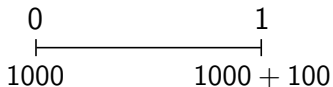


Anticipativni obračun kamata



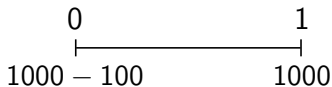
- posuđeni iznos: 1000 kn
- godišnja kamatna stopa: 10%

Dekurzivni obračun kamata

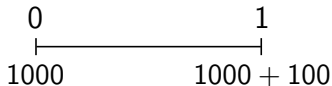


- posuđeni iznos: 1000 kn
- godišnja kamatna stopa: 10%
- kamate: $1000 \cdot 0.1 = 100$

Anticipativni obračun kamata

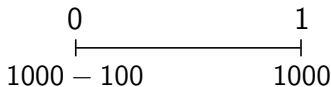


Dekurzivni obračun kamata

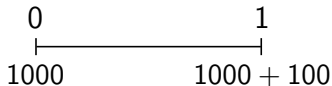


- posuđeni iznos: 1000 kn
- godišnja kamatna stopa: 10%
- kamate: $1000 \cdot 0.1 = 100$
- na kraju godine se vraća iznos 1100 kn, tj. posuđeni iznos zajedno s kamatama

Anticipativni obračun kamata

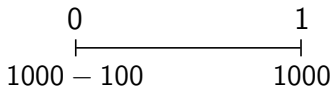


Dekurzivni obračun kamata



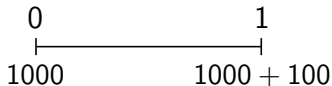
- posuđeni iznos: 1000 kn
- godišnja kamatna stopa: 10%
- kamate: $1000 \cdot 0.1 = 100$
- na kraju godine se vraća iznos 1100 kn, tj. posuđeni iznos zajedno s kamatama

Anticipativni obračun kamata



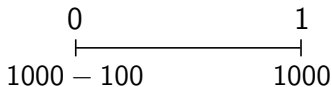
- posuđeni iznos: 1000 kn

Dekurzivni obračun kamata



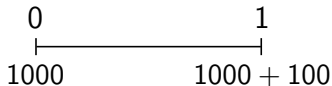
- posuđeni iznos: 1000 kn
- godišnja kamatna stopa: 10%
- kamate: $1000 \cdot 0.1 = 100$
- na kraju godine se vraća iznos 1100 kn, tj. posuđeni iznos zajedno s kamatama

Anticipativni obračun kamata



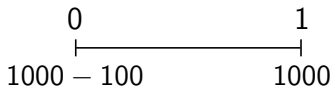
- posuđeni iznos: 1000 kn
- godišnja kamatna stopa: 10%

Dekurzivni obračun kamata



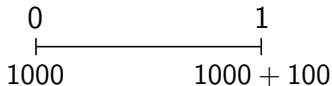
- posuđeni iznos: 1000 kn
- godišnja kamatna stopa: 10%
- kamate: $1000 \cdot 0.1 = 100$
- na kraju godine se vraća iznos 1100 kn, tj. posuđeni iznos zajedno s kamatama

Anticipativni obračun kamata



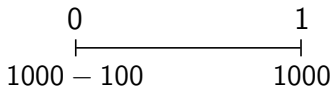
- posuđeni iznos: 1000 kn
- godišnja kamatna stopa: 10%
- kamate: $1000 \cdot 0.1 = 100$

Dekurzivni obračun kamata



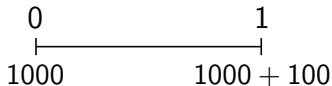
- posuđeni iznos: 1000 kn
- godišnja kamatna stopa: 10%
- kamate: $1000 \cdot 0.1 = 100$
- na kraju godine se vraća iznos 1100 kn, tj. posuđeni iznos zajedno s kamatama

Anticipativni obračun kamata



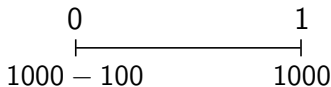
- posuđeni iznos: 1000 kn
- godišnja kamatna stopa: 10%
- kamate: $1000 \cdot 0.1 = 100$
- kamate se plaćaju odmah na početku, a na kraju godine se vraća posuđeni iznos

Dekurzivni obračun kamata



- posuđeni iznos: 1000 kn
- godišnja kamatna stopa: 10%
- kamate: $1000 \cdot 0.1 = 100$
- na kraju godine se vraća iznos 1100 kn, tj. posuđeni iznos zajedno s kamatama

Anticipativni obračun kamata



- posuđeni iznos: 1000 kn
- godišnja kamatna stopa: 10%
- kamate: $1000 \cdot 0.1 = 100$
- kamate se plaćaju odmah na početku, a na kraju godine se vraća posuđeni iznos
- dužnik je zapravo posudio iznos 900 kn, a na kraju godine vratio iznos 1000 kn

Jednostavni i složeni kamatni račun

Jednostavni kamatni račun

- kamate se ne pribrajaju glavnici pa su jednake za svaki period ukamaćivanja

Jednostavni i složeni kamatni račun

Jednostavni kamatni račun

- kamate se ne pribrajaju glavnici pa su jednake za svaki period ukamaćivanja
- kod svakog sljedećeg razdoblja kamate se računaju na istu glavicu

Jednostavni i složeni kamatni račun

Jednostavni kamatni račun

- kamate se ne pribrajaju glavnici pa su jednake za svaki period ukamaćivanja
- kod svakog sljedećeg razdoblja kamate se računaju na istu glavicu

Složeni kamatni račun

- kamate se pribrajaju glavnici pa su različite za svaki period ukamaćivanja

Jednostavni i složeni kamatni račun

Jednostavni kamatni račun

- kamate se ne pribrajaju glavnici pa su jednake za svaki period ukamaćivanja
- kod svakog sljedećeg razdoblja kamate se računaju na istu glavicu

Složeni kamatni račun

- kamate se pribrajaju glavnici pa su različite za svaki period ukamaćivanja
- kod svakog sljedećeg razdoblja kamate se računaju na glavicu uvećanu za kamate iz prošlog razdoblja

Jednostavni dekurzivni kamatni račun

- C_0 – početna vrijednost glavnice

Jednostavni dekurzivni kamatni račun

- C_0 – početna vrijednost glavnice
- I_k – kamate u k -tom razdoblju ukamaćivanja

Jednostavni dekurzivni kamatni račun

- C_0 – početna vrijednost glavnice
- I_k – kamate u k -tom razdoblju ukamaćivanja
- p – godišnja kamatna stopa

Jednostavni dekurzivni kamatni račun

- C_0 – početna vrijednost glavnice
- I_k – kamate u k -tom razdoblju ukamaćivanja
- p – godišnja kamatna stopa
- n – vrijeme u godinama

Jednostavni dekurzivni kamatni račun

- C_0 – početna vrijednost glavnice
- I_k – kamate u k -tom razdoblju ukamaćivanja
- p – godišnja kamatna stopa
- n – vrijeme u godinama

Iznos kamata za godinu dana

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

Jednostavni dekurzivni kamatni račun

- C_0 – početna vrijednost glavnice
- I_k – kamate u k -tom razdoblju ukamaćivanja
- p – godišnja kamatna stopa
- n – vrijeme u godinama

Iznos kamata za godinu dana

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

$$I_1 = I_2 = \dots = I_{n-1} = I_n = I$$

Buduća vrijednost glavnice

C_0

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$C_1 =$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 =$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 = C_1 + I$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 = C_1 + I = (C_0 + I) + I$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 = C_1 + I = (C_0 + I) + I = C_0 + 2I$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 = C_1 + I = (C_0 + I) + I = C_0 + 2I$$

$$C_3 =$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 = C_1 + I = (C_0 + I) + I = C_0 + 2I$$

$$C_3 = C_2 + I$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 = C_1 + I = (C_0 + I) + I = C_0 + 2I$$

$$C_3 = C_2 + I = (C_0 + 2I) + I$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 = C_1 + I = (C_0 + I) + I = C_0 + 2I$$

$$C_3 = C_2 + I = (C_0 + 2I) + I = C_0 + 3I$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 = C_1 + I = (C_0 + I) + I = C_0 + 2I$$

$$C_3 = C_2 + I = (C_0 + 2I) + I = C_0 + 3I$$

$\vdots$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 = C_1 + I = (C_0 + I) + I = C_0 + 2I$$

$$C_3 = C_2 + I = (C_0 + 2I) + I = C_0 + 3I$$

$\vdots$

$$C_n =$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 = C_1 + I = (C_0 + I) + I = C_0 + 2I$$

$$C_3 = C_2 + I = (C_0 + 2I) + I = C_0 + 3I$$

$\vdots$

$$C_n = C_0 + nI$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 = C_1 + I = (C_0 + I) + I = C_0 + 2I$$

$$C_3 = C_2 + I = (C_0 + 2I) + I = C_0 + 3I$$

$\vdots$

$$C_n = C_0 + nI$$

$$C_n =$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 = C_1 + I = (C_0 + I) + I = C_0 + 2I$$

$$C_3 = C_2 + I = (C_0 + 2I) + I = C_0 + 3I$$

$\vdots$

$$C_n = C_0 + nI$$

$$C_n = C_0 + n \cdot C_0 \frac{p}{100}$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 = C_1 + I = (C_0 + I) + I = C_0 + 2I$$

$$C_3 = C_2 + I = (C_0 + 2I) + I = C_0 + 3I$$

⋮

$$C_n = C_0 + nI$$

$$C_n = C_0 + n \cdot C_0 \frac{p}{100} = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100} \right)$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 = C_1 + I = (C_0 + I) + I = C_0 + 2I$$

$$C_3 = C_2 + I = (C_0 + 2I) + I = C_0 + 3I$$

⋮

$$C_n = C_0 + nI$$

$$C_n = C_0 + n \cdot C_0 \frac{p}{100} = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100} \right)$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100} \right)$$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 = C_1 + I = (C_0 + I) + I = C_0 + 2I$$

$$C_3 = C_2 + I = (C_0 + 2I) + I = C_0 + 3I$$

$\vdots$

$$C_n = C_0 + nI$$

$$C_n = C_0 + n \cdot C_0 \frac{p}{100} = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100} \right)$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100} \right)$$

- $C_0, C_1, C_2, \dots$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 = C_1 + I = (C_0 + I) + I = C_0 + 2I$$

$$C_3 = C_2 + I = (C_0 + 2I) + I = C_0 + 3I$$

⋮

$$C_n = C_0 + nI$$

$$C_n = C_0 + n \cdot C_0 \frac{p}{100} = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100} \right)$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100} \right)$$

- $C_0, C_1, C_2, \dots$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 = C_1 + I = (C_0 + I) + I = C_0 + 2I$$

$$C_3 = C_2 + I = (C_0 + 2I) + I = C_0 + 3I$$

⋮

$$C_n = C_0 + nI$$

$$C_n = C_0 + n \cdot C_0 \frac{p}{100} = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100} \right)$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100} \right)$$

- $C_0, C_1, C_2, \dots$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 = C_1 + I = (C_0 + I) + I = C_0 + 2I$$

$$C_3 = C_2 + I = (C_0 + 2I) + I = C_0 + 3I$$

$\vdots$

$$C_n = C_0 + nI$$

$$a_n = a_0 + nd$$

$$C_n = C_0 + n \cdot C_0 \frac{p}{100} = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100} \right)$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100} \right)$$

- $C_0, C_1, C_2, \dots$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 = C_1 + I = (C_0 + I) + I = C_0 + 2I$$

$$C_3 = C_2 + I = (C_0 + 2I) + I = C_0 + 3I$$

$\vdots$

$$C_n = C_0 + nI$$

$$a_n = a_0 + nd$$

$$C_n = C_0 + n \cdot C_0 \frac{p}{100} = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100} \right)$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100} \right)$$

- $C_0, C_1, C_2, \dots \rightsquigarrow$ aritmetički niz s razlikom $d = C_0 \cdot \frac{p}{100}$

Buduća vrijednost glavnice

$$C_0$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

$$C_1 = C_0 + I$$

$$C_2 = C_1 + I = (C_0 + I) + I = C_0 + 2I$$

$$C_3 = C_2 + I = (C_0 + 2I) + I = C_0 + 3I$$

$\vdots$

$$C_n = C_0 + nI$$

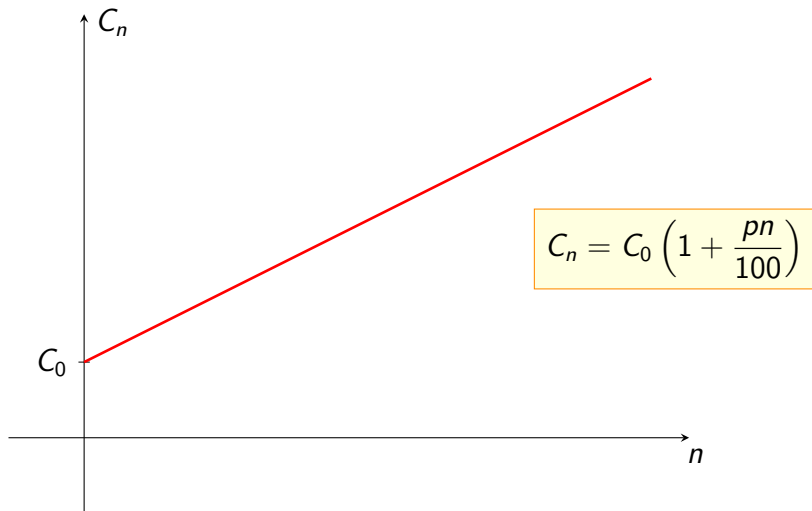
$$a_n = a_0 + nd$$

$$C_n = C_0 + n \cdot C_0 \frac{p}{100} = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100} \right)$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100} \right)$$

- $C_0, C_1, C_2, \dots$  aritmetički niz s razlikom $d = C_0 \cdot \frac{p}{100}$
- Konačna vrijednost glavnice je linearna funkcija vremena ukamaćivanja.

Grafički prikaz rasta glavnice



Ispodgodišnje ukamaćivanje

Definicija

Relativna kamatna stopa p_r je godišnja kamatna stopa p podijeljena broj razdoblja unutar godine, tj.

$$p_r = \frac{p}{m}.$$

Ispodgodišnje ukamaćivanje

Definicija

Relativna kamatna stopa p_r je godišnja kamatna stopa p podijeljena broj razdoblja unutar godine, tj.

$$p_r = \frac{p}{m}.$$

- **relativna mjesečna kamatna stopa:** $m = 12$, $p_r = \frac{p}{12}$

Ispodgodišnje ukamaćivanje

Definicija

Relativna kamatna stopa p_r je godišnja kamatna stopa p podijeljena broj razdoblja unutar godine, tj.

$$p_r = \frac{p}{m}.$$

- **relativna mjesečna kamatna stopa:** $m = 12$, $p_r = \frac{p}{12}$
- **relativna polugodišnja kamatna stopa:** $m = 2$, $p_r = \frac{p}{2}$

Ispodgodišnje ukamaćivanje

Definicija

Relativna kamatna stopa p_r je godišnja kamatna stopa p podijeljena broj razdoblja unutar godine, tj.

$$p_r = \frac{p}{m}.$$

- **relativna mjesečna kamatna stopa:** $m = 12$, $p_r = \frac{p}{12}$
- **relativna polugodišnja kamatna stopa:** $m = 2$, $p_r = \frac{p}{2}$
- **relativna kvartalna kamatna stopa:** $m = 4$, $p_r = \frac{p}{4}$

Ispodgodišnje ukamaćivanje

Definicija

Relativna kamatna stopa p_r je godišnja kamatna stopa p podijeljena broj razdoblja unutar godine, tj.

$$p_r = \frac{p}{m}.$$

- relativna mjesečna kamatna stopa: $m = 12$, $p_r = \frac{p}{12}$
- relativna polugodišnja kamatna stopa: $m = 2$, $p_r = \frac{p}{2}$
- relativna kvartalna kamatna stopa: $m = 4$, $p_r = \frac{p}{4}$

kvartal je razdoblje od tri mjeseca

Relativna dnevna kamatna stopa

- **njemačka metoda**: godina ima 360 dana, svaki mjesec ima 30 dana

$$p_r = \frac{p}{360}$$

Relativna dnevna kamatna stopa

- **njemačka metoda**: godina ima 360 dana, svaki mjesec ima 30 dana

$$p_r = \frac{p}{360}$$

- **francuska metoda**: godina ima 360 dana, dani u mjesecu računaju se prema kalendaru

$$p_r = \frac{p}{360}$$

Relativna dnevna kamatna stopa

- **njemačka metoda**: godina ima 360 dana, svaki mjesec ima 30 dana

$$p_r = \frac{p}{360}$$

- **francuska metoda**: godina ima 360 dana, dani u mjesecu računaju se prema kalendaru

$$p_r = \frac{p}{360}$$

- **engleska metoda**: dani u godini računaju se prema kalendaru (365 ili 366), dani u mjesecu računaju se prema kalendaru

$$p_r = \frac{p}{365} \quad \text{ili} \quad p_r = \frac{p}{366}$$

- p – godišnja kamatna stopa

- p – godišnja kamatna stopa
- n – broj razdoblja ukamaćivanja

- p – godišnja kamatna stopa
- n – broj razdoblja ukamaćivanja
- m – kolike se puta razdoblje ukamaćivanja javlja unutar godine

- p – godišnja kamatna stopa
- n – broj razdoblja ukamaćivanja
- m – kolike se puta razdoblje ukamaćivanja javlja unutar godine
- p_r – pripadna relativna kamatna stopa

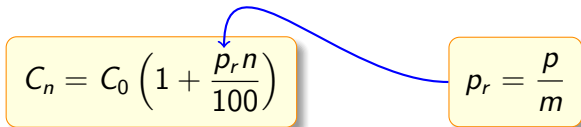
- p – godišnja kamatna stopa
- n – broj razdoblja ukamaćivanja
- m – kolike se puta razdoblje ukamaćivanja javlja unutar godine
- p_r – pripadna relativna kamatna stopa

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p_r n}{100} \right)$$

- p – godišnja kamatna stopa
- n – broj razdoblja ukamaćivanja
- m – kolike se puta razdoblje ukamaćivanja javlja unutar godine
- p_r – pripadna relativna kamatna stopa

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p_r n}{100} \right)$$
$$p_r = \frac{p}{m}$$

- p – godišnja kamatna stopa
- n – broj razdoblja ukamaćivanja
- m – kolike se puta razdoblje ukamaćivanja javlja unutar godine
- p_r – pripadna relativna kamatna stopa


$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p_r n}{100} \right)$$
$$p_r = \frac{p}{m}$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100m} \right)$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p_r n}{100} \right)$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100m} \right)$$

- ukupne kamate

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p_r n}{100} \right)$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100m} \right)$$

- ukupne kamate

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{p_r n}{100}$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p_r n}{100} \right)$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100m} \right)$$

- ukupne kamate

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{p_r n}{100}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p_r n}{100} \right)$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100m} \right)$$

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

- ukupne kamate

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{p_r n}{100}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p_r n}{100} \right)$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100m} \right)$$

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

- ukupne kamate

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{p_r n}{100}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

- kamate za jedno razdoblje ukamaćivanja

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p_r n}{100} \right)$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100m} \right)$$

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

- ukupne kamate

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{p_r n}{100}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

- kamate za jedno razdoblje ukamaćivanja

$$I = C_0 \cdot \frac{p_r}{100}$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p_r n}{100} \right)$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100m} \right)$$

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

- ukupne kamate

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{p_r n}{100}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

- kamate za jedno razdoblje ukamaćivanja

$$I = C_0 \cdot \frac{p_r}{100}$$

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100m}$$

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

16

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

$$16 + 31$$

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

$$16 + 31 + 30$$

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

$$16 + 31 + 30 + 31$$

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

$$16 + 31 + 30 + 31 + 31$$

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

$$16 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30$$

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

$$16 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31$$

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

$$16 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30$$

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

$$16 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31$$

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

$$16 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 261$$

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

$$16 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 261 \quad (2007. \text{ godina})$$

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

$$16 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 261 \quad (2007. \text{ godina})$$

$$31 + 29 + 31 =$$

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

$$16 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 261 \quad (2007. \text{ godina})$$

$$31 + 29 + 31 = 91$$

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

$$16 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 261 \quad (2007. \text{ godina})$$

$$31 + 29 + 31 = 91 \quad (2008. \text{ godina})$$

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

$$16 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 261 \quad (2007. \text{ godina})$$

$$31 + 29 + 31 = 91 \quad (2008. \text{ godina})$$

$$n = 261 + 91 = 352$$

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

$$16 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 261 \quad (2007. \text{ godina})$$

$$31 + 29 + 31 = 91 \quad (2008. \text{ godina})$$

$$n = 261 + 91 = 352$$

$$C_{352} =$$

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

$$16 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 261 \quad (2007. \text{ godina})$$

$$31 + 29 + 31 = 91 \quad (2008. \text{ godina})$$

$$n = 261 + 91 = 352$$

$$C_{352} = 10\,000$$

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk}$$

$$I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

$$16 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 261 \quad (2007. \text{ godina})$$

$$31 + 29 + 31 = 91 \quad (2008. \text{ godina})$$

$$n = 261 + 91 = 352$$

$$C_{352} = 10\,000 + 10\,000 \cdot \frac{6 \cdot 261}{36\,500}$$

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk} \qquad I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

$$16 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 261 \quad (2007. \text{ godina})$$

$$31 + 29 + 31 = 91 \quad (2008. \text{ godina})$$

$$n = 261 + 91 = 352$$

$$C_{352} = 10\,000 + 10\,000 \cdot \frac{6 \cdot 261}{36\,500} + 10\,000 \cdot \frac{6 \cdot 91}{36\,600}$$

Primjer

Kolikim iznosom raspolaže štediša 1. travnja 2008. godine ako je 15. travnja 2007. u banku uložio 10 000 kn, a banka mu je obračunala kamate po jednostavnom kamatnom računu uz englesku metodu brojanja dana i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$C_n = C_0 + I_{uk} \qquad I_{uk} = C_0 \cdot \frac{pn}{100m}$$

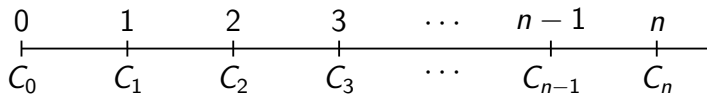
$$16 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 = 261 \quad (2007. \text{ godina})$$

$$31 + 29 + 31 = 91 \quad (2008. \text{ godina})$$

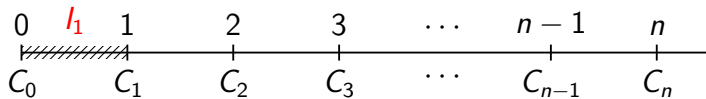
$$n = 261 + 91 = 352$$

$$C_{352} = 10\,000 + 10\,000 \cdot \frac{6 \cdot 261}{36\,500} + 10\,000 \cdot \frac{6 \cdot 91}{36\,600} = 10\,578.22$$

Složeni dekurzivni kamatni račun

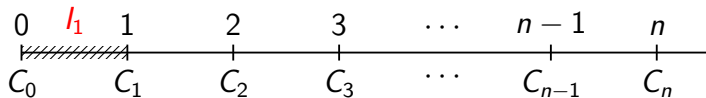


Složeni dekurzivni kamatni račun



$$C_1 = C_0 + l_1$$

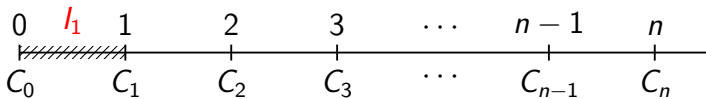
Složeni dekurzivni kamatni račun



$$C_1 = C_0 + l_1$$

$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

Složeni dekurzivni kamatni račun



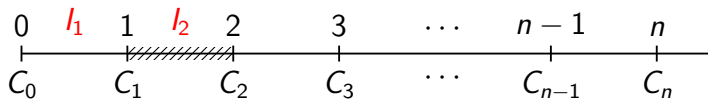
$$C_1 = C_0 + i_1$$

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

$$C_1 = C_0 + C_0 \cdot \frac{p}{100}$$

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

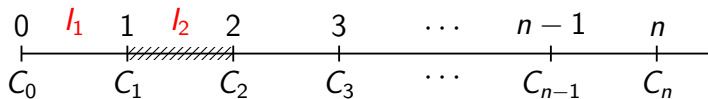
Složeni dekurzivni kamatni račun



$$C_2 = C_1 + l_2$$

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

Složeni dekurzivni kamatni račun

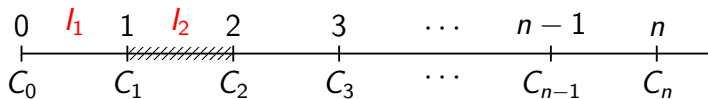


$$C_2 = C_1 + l_2$$

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot \frac{p}{100}$$

Složeni dekurzivni kamatni račun



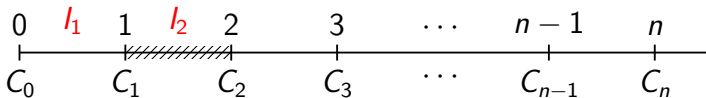
$$C_2 = C_1 + l_2$$

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot \frac{p}{100}$$

$$C_2 = C_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

Složeni dekurzivni kamatni račun



$$C_2 = C_1 + l_2$$

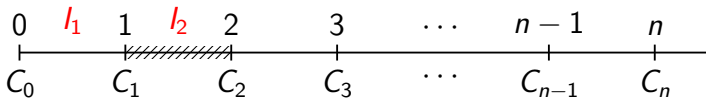
$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot \frac{p}{100}$$

$$C_2 = C_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$C_2 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Složeni dekurzivni kamatni račun



$$C_2 = C_1 + l_2$$

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot \frac{p}{100}$$

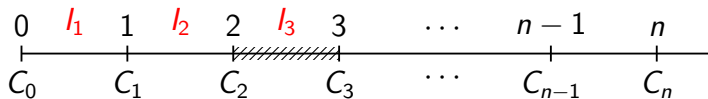
$$C_2 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

$$C_2 = C_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$C_2 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$C_2 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

Složeni dekurzivni kamatni račun

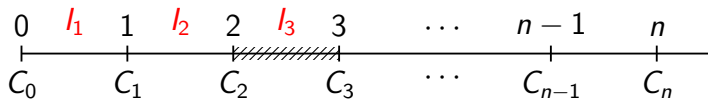


$$C_3 = C_2 + l_3$$

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$C_2 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

Složeni dekurzivni kamatni račun



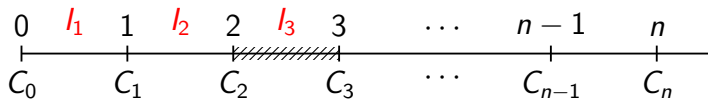
$$C_3 = C_2 + i_3$$

$$C_3 = C_2 + C_2 \cdot \frac{p}{100}$$

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$C_2 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

Složeni dekurzivni kamatni račun



$$C_3 = C_2 + l_3$$

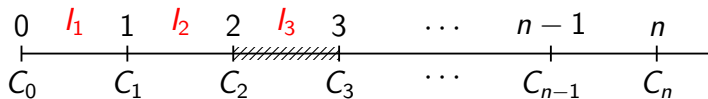
$$C_3 = C_2 + C_2 \cdot \frac{p}{100}$$

$$C_3 = C_2 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$C_2 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

Složeni dekurzivni kamatni račun



$$C_3 = C_2 + i_3$$

$$C_3 = C_2 + C_2 \cdot \frac{p}{100}$$

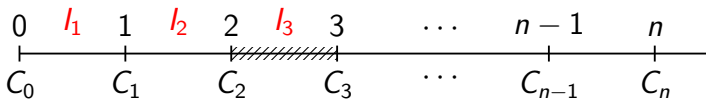
$$C_3 = C_2 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$C_3 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$C_2 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

Složeni dekurzivni kamatni račun



$$C_3 = C_2 + i_3$$

$$C_3 = C_2 + C_2 \cdot \frac{p}{100}$$

$$C_3 = C_2 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$C_3 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

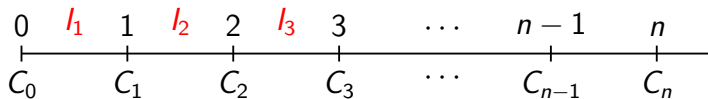
$$C_3 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$$

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$C_2 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

$$C_3 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$$

Složeni dekurzivni kamatni račun



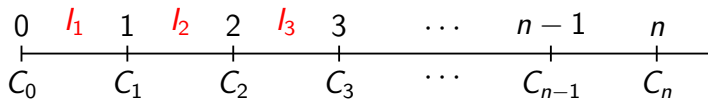
$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$C_2 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

$$C_3 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$$

$\vdots$

Složeni dekurzivni kamatni račun



$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

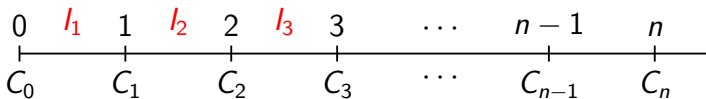
$$C_2 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

$$C_3 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$$

$$\vdots$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Složeni dekurzivni kamatni račun



$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

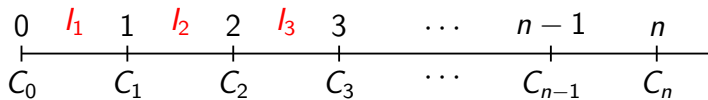
$$C_2 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

$$C_3 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$$

$$\vdots$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Složeni dekurzivni kamatni račun



$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$



konačna vrijednost glavnice

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$C_2 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

$$C_3 = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$$

$\vdots$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

- **dekurzivni kamatni faktor**

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

- **dekurzivni kamatni faktor**

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$p = 6 \quad \rightsquigarrow \quad r =$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

- **dekurzivni kamatni faktor**

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$p = 6 \quad \rightsquigarrow \quad r = 1.06$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

- **dekurzivni kamatni faktor**

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$p = 6 \quad \rightsquigarrow \quad r = 1.06$$

$$p = 12.1 \quad \rightsquigarrow \quad r =$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

- **dekurzivni kamatni faktor**

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$p = 6 \quad \rightsquigarrow \quad r = 1.06$$

$$p = 12.1 \quad \rightsquigarrow \quad r = 1.121$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

- **dekurzivni kamatni faktor**

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$p = 6 \quad \rightsquigarrow \quad r = 1.06$$

$$p = 12.1 \quad \rightsquigarrow \quad r = 1.121$$

$$r = 1.063 \quad \rightsquigarrow \quad p =$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

- **dekurzivni kamatni faktor**

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$p = 6 \quad \rightsquigarrow \quad r = 1.06$$

$$p = 12.1 \quad \rightsquigarrow \quad r = 1.121$$

$$r = 1.063 \quad \rightsquigarrow \quad p = 6.3$$

- **dekurzivni kamatni faktor**

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$C_n = C_0 \cdot r^n$$

$$p = 6 \quad \rightsquigarrow \quad r = 1.06$$

$$p = 12.1 \quad \rightsquigarrow \quad r = 1.121$$

$$r = 1.063 \quad \rightsquigarrow \quad p = 6.3$$

- **dekurzivni kamatni faktor**

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$C_n = C_0 \cdot r^n$$

$$p = 6 \quad \rightsquigarrow \quad r = 1.06$$

$$p = 12.1 \quad \rightsquigarrow \quad r = 1.121$$

$$r = 1.063 \quad \rightsquigarrow \quad p = 6.3$$

- $C_0, C_1, C_2, \dots$

- **dekurzivni kamatni faktor**

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$C_n = C_0 \cdot r^n$$

$$p = 6 \quad \rightsquigarrow \quad r = 1.06$$

$$p = 12.1 \quad \rightsquigarrow \quad r = 1.121$$

$$r = 1.063 \quad \rightsquigarrow \quad p = 6.3$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

- $C_0, C_1, C_2, \dots$

- **dekurzivni kamatni faktor**

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$C_n = C_0 \cdot r^n$$

$$p = 6 \quad \rightsquigarrow \quad r = 1.06$$

$$p = 12.1 \quad \rightsquigarrow \quad r = 1.121$$

$$r = 1.063 \quad \rightsquigarrow \quad p = 6.3$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$a_n = a_0 q^n$$

- $C_0, C_1, C_2, \dots$

- **dekurzivni kamatni faktor**

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$C_n = C_0 \cdot r^n$$

$$p = 6 \quad \rightsquigarrow \quad r = 1.06$$

$$p = 12.1 \quad \rightsquigarrow \quad r = 1.121$$

$$r = 1.063 \quad \rightsquigarrow \quad p = 6.3$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$a_n = a_0 q^n$$

- $C_0, C_1, C_2, \dots \rightsquigarrow$ geometrijski niz s kvocijentom $q = r$

- **dekurzivni kamatni faktor**

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$C_n = C_0 \cdot r^n$$

$$p = 6 \quad \rightsquigarrow \quad r = 1.06$$

$$p = 12.1 \quad \rightsquigarrow \quad r = 1.121$$

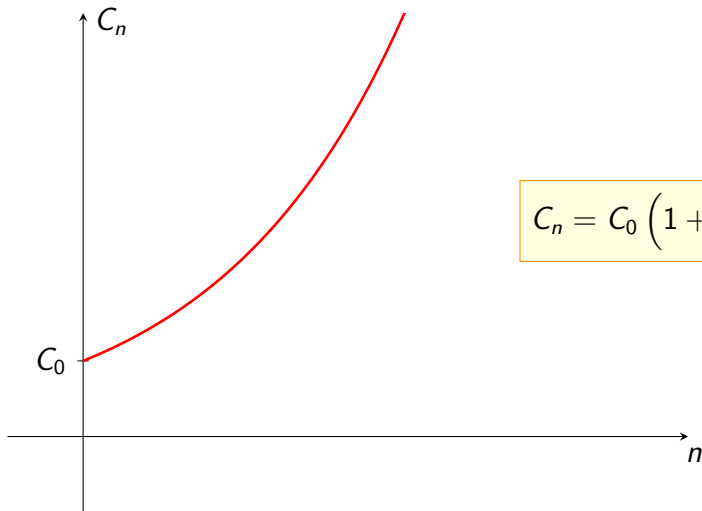
$$r = 1.063 \quad \rightsquigarrow \quad p = 6.3$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$a_n = a_0 q^n$$

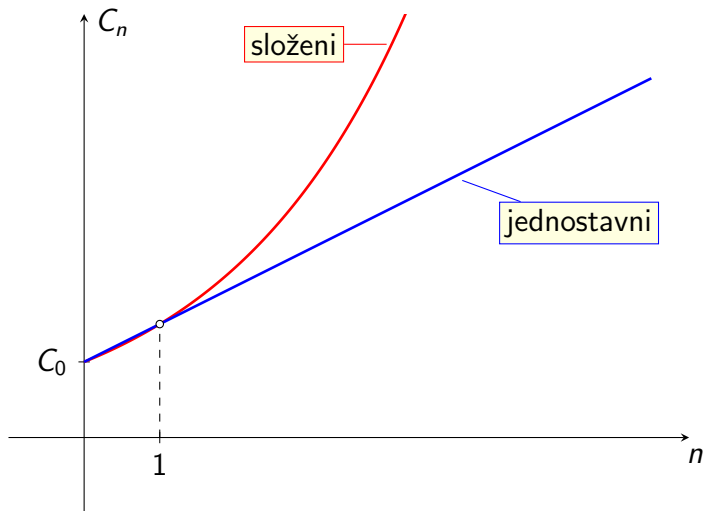
- $C_0, C_1, C_2, \dots \rightsquigarrow$ geometrijski niz s kvocijentom $q = r$
- Konačna vrijednost glavnice je eksponencijalna funkcija vremena ukamaćivanja.

Grafički prikaz rasta glavnice



$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Jednostavni i složeni kamatni račun



Primjer

Kolika je konačna vrijednost glavnice 10 000 kn nakon 5 godina uz

- a) jednostavni dekurzivni obračun kamata
- b) složeni dekurzivni obračun kamata

i godišnju kamatnu stopu 6%?

Primjer

Kolika je konačna vrijednost glavnice 10 000 kn nakon 5 godina uz

a) jednostavni dekurzivni obračun kamata

b) složeni dekurzivni obračun kamata

i godišnju kamatnu stopu 6%?

Rješenje

a)

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100} \right)$$

Primjer

Kolika je konačna vrijednost glavnice 10 000 kn nakon 5 godina uz

a) jednostavni dekurzivni obračun kamata

b) složeni dekurzivni obračun kamata

i godišnju kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$a) C_5 = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot 5}{100}\right)$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100}\right)$$

Primjer

Kolika je konačna vrijednost glavnice 10 000 kn nakon 5 godina uz

a) jednostavni dekurzivni obračun kamata

b) složeni dekurzivni obračun kamata

i godišnju kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$\text{a) } C_5 = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot 5}{100}\right) = 13\,000$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100}\right)$$

Primjer

Kolika je konačna vrijednost glavnice 10 000 kn nakon 5 godina uz

a) jednostavni dekurzivni obračun kamata

b) složeni dekurzivni obračun kamata

i godišnju kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$a) C_5 = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot 5}{100}\right) = 13\,000$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100}\right)$$

b)

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Primjer

Kolika je konačna vrijednost glavnice 10 000 kn nakon 5 godina uz

a) jednostavni dekurzivni obračun kamata

b) složeni dekurzivni obračun kamata

i godišnju kamatnu stopu 6%?

Rješenje

$$a) C_5 = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot 5}{100}\right) = 13\,000$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100}\right)$$

$$b) C_5 = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^5$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Primjer

Kolika je konačna vrijednost glavnice 10 000 kn nakon 5 godina uz

a) jednostavni dekurzivni obračun kamata

b) složeni dekurzivni obračun kamata

i godišnju kamatnu stopu 6%?

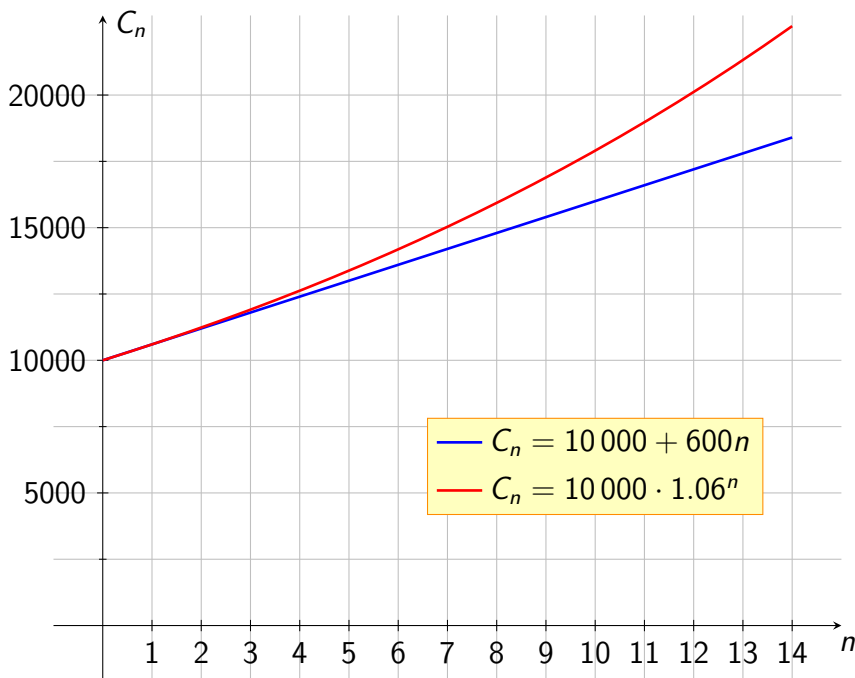
Rješenje

$$\text{a) } C_5 = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot 5}{100}\right) = 13\,000$$

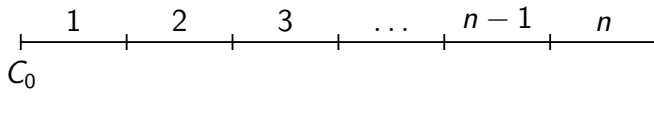
$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{pn}{100}\right)$$

$$\text{b) } C_5 = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^5 = 13\,382.26$$

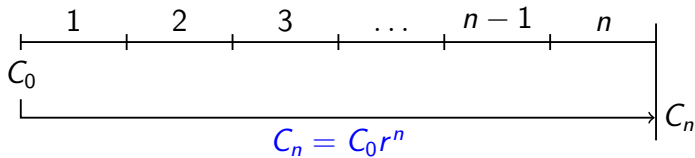
$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$



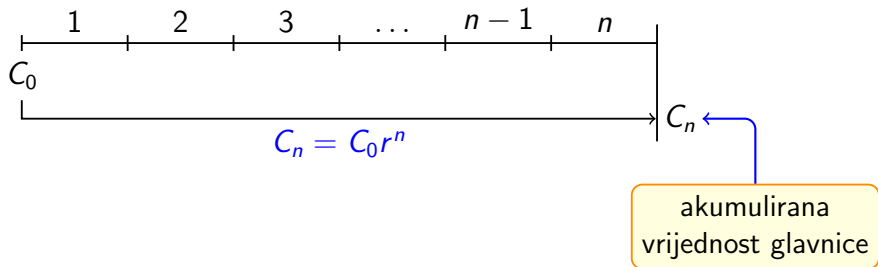
Akumulirana i diskontirana vrijednost



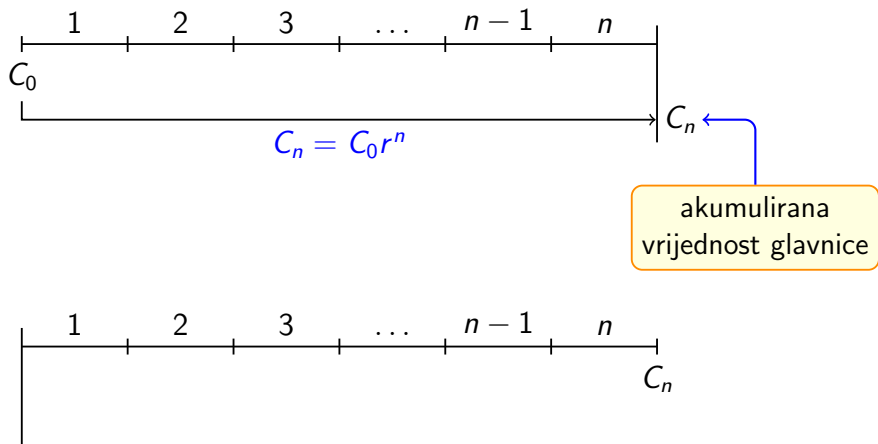
Akumulirana i diskontirana vrijednost



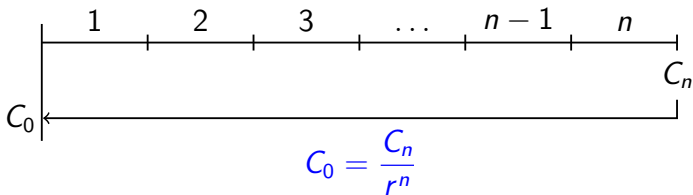
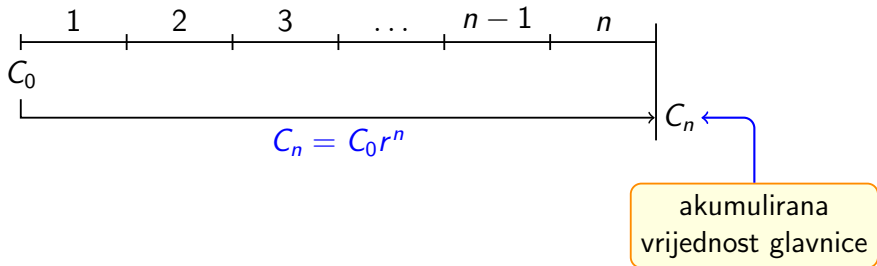
Akumulirana i diskontirana vrijednost



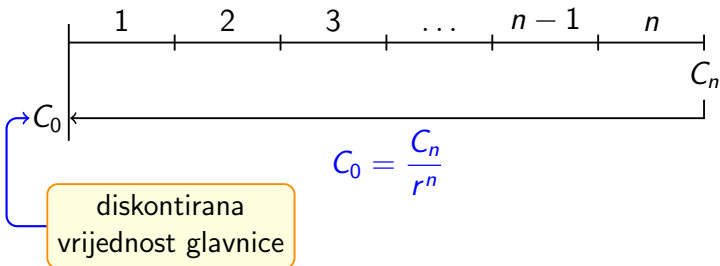
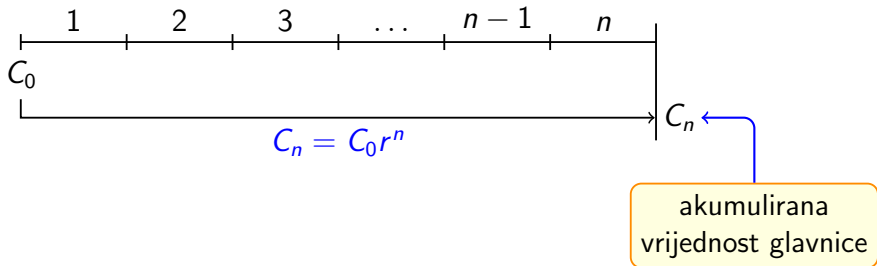
Akumulirana i diskontirana vrijednost



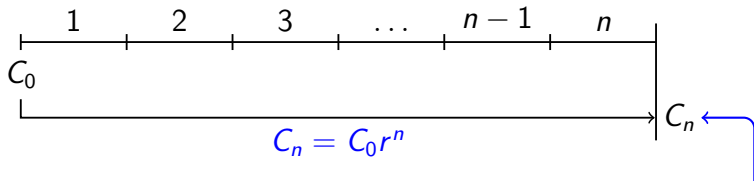
Akumulirana i diskontirana vrijednost



Akumulirana i diskontirana vrijednost

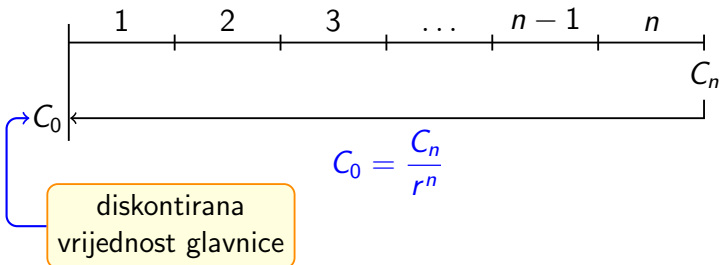


Akumulirana i diskontirana vrijednost



koriste se za uspoređivanje
različitih novčanih iznosa

akumulirana
vrijednost glavnice



diskontirana
vrijednost glavnice

Složeni kamatni račun – ispodgodišnje ukamaćivanje

Definicija

Nominalna kamatna stopa je poznata kamatna stopa za određeno vremensko razdoblje.

Složeni kamatni račun – ispodgodišnje ukamaćivanje

Definicija

Nominalna kamatna stopa je poznata kamatna stopa za određeno vremensko razdoblje.

- Najčešće je zadana godišnja kamatna stopa kao nominalna kamatna stopa.

Složeni kamatni račun – ispodgodišnje ukamaćivanje

Definicija

Nominalna kamatna stopa je poznata kamatna stopa za određeno vremensko razdoblje.

- Najčešće je zadana godišnja kamatna stopa kao nominalna kamatna stopa.
- Nadalje, može biti zadana npr. godišnja kamatna stopa, a ukamaćivanje se obavlja mjesečno.

Složeni kamatni račun – ispodgodišnje ukamaćivanje

Definicija

Nominalna kamatna stopa je poznata kamatna stopa za određeno vremensko razdoblje.

- Najčešće je zadana godišnja kamatna stopa kao nominalna kamatna stopa.
- Nadalje, može biti zadana npr. godišnja kamatna stopa, a ukamaćivanje se obavlja mjesečno.
- Možemo koristiti relativnu kamatnu stopu kao i kod jednostavnog obračuna kamata.

Primjer

- godišnja kamatna stopa: $p = 6$

Primjer

- godišnja kamatna stopa: $p = 6$
- početna glavnica: $C_0 = 1000 \text{ kn}$

Primjer

- godišnja kamatna stopa: $p = 6$
- početna glavnica: $C_0 = 1000 \text{ kn}$
- relativna mjesečna kamatna stopa: $p_r = \frac{6}{12} = 0.5$

Primjer

- godišnja kamatna stopa: $p = 6$
- početna glavnica: $C_0 = 1000$ kn
- relativna mjesečna kamatna stopa: $p_r = \frac{6}{12} = 0.5$
- Ako ukamatimo jednom godišnje, na kraju godine imamo

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Primjer

- godišnja kamatna stopa: $p = 6$
- početna glavica: $C_0 = 1000$ kn
- relativna mjesečna kamatna stopa: $p_r = \frac{6}{12} = 0.5$
- Ako ukamatimo jednom godišnje, na kraju godine imamo

$$C_1 = 1000 \cdot 1.06$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Primjer

- godišnja kamatna stopa: $p = 6$
- početna glavica: $C_0 = 1000$ kn
- relativna mjesečna kamatna stopa: $p_r = \frac{6}{12} = 0.5$
- Ako ukamatimo jednom godišnje, na kraju godine imamo 1060 kn.

$$C_1 = 1000 \cdot 1.06 = 1060$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Primjer

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

- godišnja kamatna stopa: $p = 6$
- početna glavnica: $C_0 = 1000$ kn
- relativna mjesečna kamatna stopa: $p_r = \frac{6}{12} = 0.5$
- Ako ukamatimo jednom godišnje, na kraju godine imamo 1060 kn.

$$C_1 = 1000 \cdot 1.06 = 1060$$

- Ako ukamaćujemo svaki mjesec, na kraju godine imamo

Primjer

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

- godišnja kamatna stopa: $p = 6$
- početna glavica: $C_0 = 1000$ kn
- relativna mjesečna kamatna stopa: $p_r = \frac{6}{12} = 0.5$
- Ako ukamatimo jednom godišnje, na kraju godine imamo 1060 kn.

$$C_1 = 1000 \cdot 1.06 = 1060$$

- Ako ukamaćujemo svaki mjesec, na kraju godine imamo

$$C_{12} = 1000 \cdot 1.005^{12}$$

Primjer

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

- godišnja kamatna stopa: $p = 6$
- početna glavica: $C_0 = 1000$ kn
- relativna mjesečna kamatna stopa: $p_r = \frac{6}{12} = 0.5$
- Ako ukamatimo jednom godišnje, na kraju godine imamo 1060 kn.

$$C_1 = 1000 \cdot 1.06 = 1060$$

- Ako ukamaćujemo svaki mjesec, na kraju godine imamo 1061.68 kn.

$$C_{12} = 1000 \cdot 1.005^{12} = 1061.68$$

Primjer

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

- godišnja kamatna stopa: $p = 6$
- početna glavica: $C_0 = 1000$ kn
- relativna mjesečna kamatna stopa: $p_r = \frac{6}{12} = 0.5$
- Ako ukamatimo jednom godišnje, na kraju godine imamo 1060 kn.

$$C_1 = 1000 \cdot 1.06 = 1060$$

- Ako ukamaćujemo svaki mjesec, na kraju godine imamo 1061.68 kn.

$$C_{12} = 1000 \cdot 1.005^{12} = 1061.68$$

≠

Konformna kamatna stopa

- Ako C_0 ukamatimo m puta godišnje uz relativnu kamatnu stopu p_r , dobivamo iznos različit od onog kada C_0 ukamatimo jednom godišnje uz godišnju kamatnu stopu p .

Konformna kamatna stopa

- Ako C_0 ukamatimo m puta godišnje uz relativnu kamatnu stopu p_r , dobivamo iznos različit od onog kada C_0 ukamatimo jednom godišnje uz godišnju kamatnu stopu p .

Definicija

Konformna kamatna stopa je kamatna stopa koja za istu glavnicu daje iste kamate kao i nominalna kamatna stopa, neovisno o tome obračunavaju li se kamate u kraćim ili dužim vremenskim intervalima od nominalnog.

- Ako C_0 ukamatimo m puta godišnje uz konformnu kamatnu stopu p' , dobivamo iznos jednak onome kada C_0 ukamatimo jednom godišnje uz godišnju kamatnu stopu p .

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

- Ako C_0 ukamatimo m puta godišnje uz konformnu kamatnu stopu p' , dobivamo iznos jednak onome kada C_0 ukamatimo jednom godišnje uz godišnju kamatnu stopu p .

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$C_n = C_0 r^n$$

- Ako C_0 ukamatimo m puta godišnje uz konformnu kamatnu stopu p' , dobivamo iznos jednak onome kada C_0 ukamatimo jednom godišnje uz godišnju kamatnu stopu p .

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$C_n = C_0 r^n$$

- Ako C_0 ukamatimo m puta godišnje uz konformnu kamatnu stopu p' , dobivamo iznos jednak onome kada C_0 ukamatimo jednom godišnje uz godišnju kamatnu stopu p .

$$C_0 \left(1 + \frac{p'}{100}\right)^m = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$C_n = C_0 r^n$$

- Ako C_0 ukamatimo m puta godišnje uz konformnu kamatnu stopu p' , dobivamo iznos jednak onome kada C_0 ukamatimo jednom godišnje uz godišnju kamatnu stopu p .

$$C_0 \left(1 + \frac{p'}{100}\right)^m = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$p' = 100 \left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right)$$

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$C_n = C_0 r^n$$

- Ako C_0 ukamatimo m puta godišnje uz konformnu kamatnu stopu p' , dobivamo iznos jednak onome kada C_0 ukamatimo jednom godišnje uz godišnju kamatnu stopu p .

$$C_0 \left(1 + \frac{p'}{100}\right)^m = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$p' = 100 \left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right)$$

- Veza između kamatnih faktora

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$C_n = C_0 r^n$$

- Ako C_0 ukamatimo m puta godišnje uz konformnu kamatnu stopu p' , dobivamo iznos jednak onome kada C_0 ukamatimo jednom godišnje uz godišnju kamatnu stopu p .

$$C_0 \left(1 + \frac{p'}{100}\right)^m = C_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$p' = 100 \left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right)$$

- Veza između kamatnih faktora

$$r' = \sqrt[m]{r}$$