

Periodske svote

FINANCIJSKA MATEMATIKA, IPS

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Zadatak 1

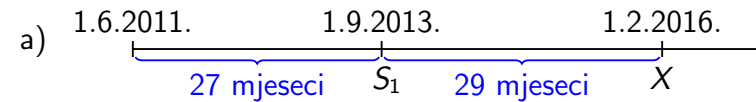
Julio štedi za novi auto. Uplaćuje 79 € početkom svakog mjeseca kroz 27 mjeseci počevši od 1.6.2011.

- a) Kolikim iznosom raspolaže 1.2.2016.?
b) Koliko novaca Julio mora ulagati kvartalno tijekom iduće tri godine kako bi tada, zajedno s uštedevinom, mogao kupiti auto vrijedan 9 000 €?

Na raniju uštedevinu također se obračunavaju kamate. Godišnja kamatna stopa iznosi 6.3%.

Rješenje

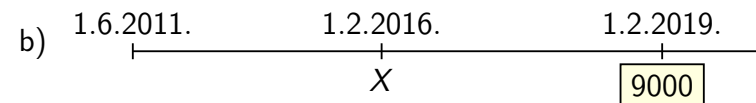
$$S = R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$



$$S_1 = R_1 \cdot r_1 \cdot \frac{r_1^{n_1} - 1}{r_1 - 1} = 79 \cdot \sqrt[12]{1.063} \cdot \frac{\sqrt[12]{1.063}^{27} - 1}{\sqrt[12]{1.063} - 1} = 2292.39$$

$$X = S_1 \cdot r_1^{29} = 2292.39 \cdot \sqrt[12]{1.063}^{29} = 2657.11$$

Julio 1.2.2016. raspolaže s 2657.11 €.



$$S_2 = 9000 - X \cdot r_2^{12}$$

$$S_2 = 9000 - 2657.11 \cdot \sqrt[4]{1.063}^{12} = 5808.39$$

$$S_2 = R_2 \cdot r_2 \cdot \frac{r_2^{n_2} - 1}{r_2 - 1}$$

$$S = R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$R_2 = \frac{S_2(r_2 - 1)}{r_2(r_2^{n_2} - 1)}$$

$$n_2 = 12 \text{ kvartala}$$

$$R_2 = \frac{5808.39 \cdot (\sqrt[4]{1.063} - 1)}{\sqrt[4]{1.063} \cdot (\sqrt[4]{1.063}^{12} - 1)} = 437.68$$

Tijekom iduće tri godine Julio kvartalno mora ulagati 437.68 €.

Zadatak 2

Netko uplati 12 puta u razmacima od 2 mjeseca 2000 kn početkom razdoblja. Četiri godine nakon prve uplate podigne trećinu raspoloživog iznosa, a godinu dana kasnije još polovicu iznosa s kojim raspolaže u tom trenutku. Koliko novaca ima šest godina nakon prvog ulaganja ako godišnja kamatna stopa iznosi 9.2%?

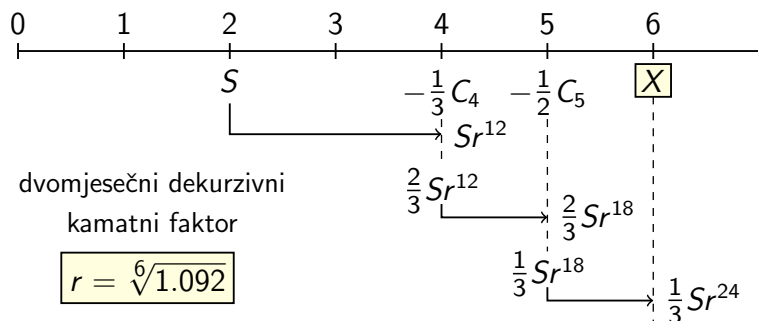
4 / 29

Zadatak 3

Roditelji su štedjeli za studij svoje djece. Od 1.11.2007. na račun su uplaćivali 420 € početkom svakog mjeseca tijekom 80 mjeseci. Od 1.2.2015. svako od dvoje djece dobiva mjesečnu rentu tijekom iduće četiri godine. O kojem se iznosu radi ako je godišnja kamatna stopa 4.5%?

6 / 29

Rješenje



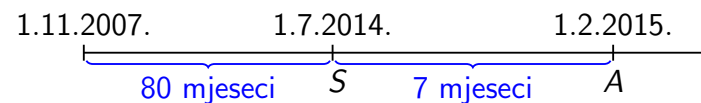
$$S = R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = 2000 \cdot \sqrt[6]{1.092} \cdot \frac{\sqrt[6]{1.092}^{12} - 1}{\sqrt[6]{1.092} - 1} = 26\,434.78$$

$$X = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{2}{3} (Sr^{12}) \right] \cdot r^6 \right\} \cdot r^6$$

$$X = \frac{1}{3} Sr^{24} = \frac{1}{3} \cdot 26\,434.78 \cdot \sqrt[6]{1.092}^{24} = 12\,529.82$$

5 / 29

Rješenje



$$S = R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = 420 \cdot \sqrt[12]{1.045} \cdot \frac{\sqrt[12]{1.045}^{80} - 1}{\sqrt[12]{1.045} - 1} = 39\,121.33$$

$$A = S \cdot r^7 = 39\,121.33 \cdot \sqrt[12]{1.045}^7 = 40\,138.84$$

$$A = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n-1} \cdot (r - 1)} \quad R = \frac{A \cdot r^{n-1} \cdot (r - 1)}{r^n - 1}$$

$$R = \frac{40\,138.84 \cdot \sqrt[12]{1.045}^{47} \cdot (\sqrt[12]{1.045} - 1)}{\sqrt[12]{1.045}^{48} - 1} = 910.33$$

Svako dijete dobiva mjesečno 455.16 €.

7 / 29

Zadatak 4

Netko uplati tri puta u razmacima od 9 mjeseci 15 000 kn uz godišnju kamatnu stopu 5.5%. Šest mjeseci nakon prve uplate podigne 12 000 kn. Na osnovu svote s kojom raspolaže četiri godine nakon prve uplate želi primiti postnumerando mjesečnu rentu visine 3500 kn. Koliko će takvih renti primiti i kolika je krnja isplata?

8 / 29

$$A' = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r - 1)} \quad n = \frac{\log \frac{R}{R - A' \cdot (r - 1)}}{\log r}$$

$$n = \frac{\log \frac{3500}{3500 - 39\,108.48 \cdot (\sqrt[12]{1.055} - 1)}}{\log \sqrt[12]{1.055}} = 11.48$$

Dakle, $n = 11$, tj. može se primiti 11 isplata visine 3500 kn.

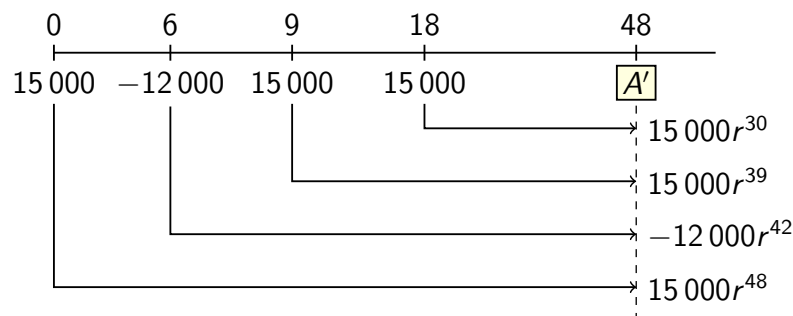
Krnja isplata

$$R' = \left(A' - R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r - 1)} \right) \cdot r^{n+1} \quad R' = 1710.93$$

$$R' = \left(39\,108.48 - 3500 \cdot \frac{\sqrt[12]{1.055}^{11} - 1}{\sqrt[12]{1.055} \cdot (\sqrt[12]{1.055} - 1)} \right) \cdot \sqrt[12]{1.055}^{11+1}$$

10 / 29

Rješenje



$$A' = 15\,000r^{48} - 12\,000r^{42} + 15\,000r^{39} + 15\,000r^{30}$$

$$A' = 15\,000 \cdot \sqrt[12]{1.055}^{48} - 12\,000 \cdot \sqrt[12]{1.055}^{42} + 15\,000 \cdot \sqrt[12]{1.055}^{39} + 15\,000 \cdot \sqrt[12]{1.055}^{30}$$

$$A' = 39\,108.48$$

9 / 29

Zadatak 5

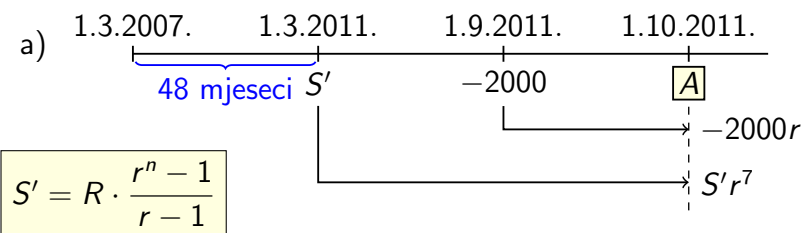
Ivan ima brižne roditelje i strica Stjepana. Kako bi Ivanu osigurali bezbrižno studiranje, njegovi roditelji zajedno sa stricom Stjepanom su otvorili račun u banci. Krajem svakog mjeseca tijekom četiri godine, počevši od ožujka 2007., roditelji izdvajaju 500 kn, a stric Stjepan 700 kn i ukupni iznos uplaćuju na Ivanov račun. Zbog troškova upisa na fakultet, Ivan je sa svojeg računa 1. rujna 2011. godine podigao 2000 kn.

- Od 1. listopada 2011. Ivan želi početkom svakog mjeseca primiti rentu u iznosu od 1200 kn. Koliko takvih isplata Ivan može primiti temeljem iznosa s kojim raspolaže na svojem računu?
- Kolika je krnja isplata?

Godišnja kamatna stopa je 6.5%.

11 / 29

Rješenje



$$R = 500 + 700 = 1200$$

$$S' = 1200 \cdot \frac{\sqrt[12]{1.065}^{48} - 1}{\sqrt[12]{1.065} - 1} = 65\,332.50$$

$$A = S'r^7 - 2000r$$

$$A = 65\,332.50 \cdot \sqrt[12]{1.065}^7 - 2000 \cdot \sqrt[12]{1.065}$$

$$A = 65\,766.61$$

12 / 29

Zadatak 6

Tomislav je uložio u banku 4000 €.

- a) Kolikim će iznosom raspolagati na kraju osme godine ako u posljednje tri godine bude podizao iz banke po 500 € početkom svakog kvartala?
- b) Ukoliko od kraja desete godine od raspoloživog iznosa Tomislav želi primati prenumerando mjesečne isplate visine 300 €, koliko takvih isplata može primiti i kolika je krnja isplata?

Polugodišnja kamatna stopa je 5.1%.

14 / 29

$$A = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n-1} \cdot (r - 1)} \quad n = \frac{\log \frac{R \cdot r}{R \cdot r - A \cdot (r - 1)}}{\log r}$$

$$n = \frac{\log \frac{1200 \cdot \sqrt[12]{1.065}}{1200 \cdot \sqrt[12]{1.065} - 65\,766.61 \cdot (\sqrt[12]{1.065} - 1)}}{\log \sqrt[12]{1.065}} = 64.42$$

Dakle, $n = 64$, tj. Ivan može primiti 64 isplate visine 1200 kn.

b) Krnja isplata

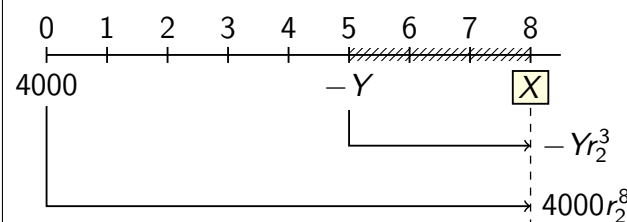
$$R' = \left(A - R \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n-1} \cdot (r - 1)} \right) \cdot r^n \quad R' = 506.70$$

$$R' = \left(65\,766.61 - 1200 \cdot \frac{\sqrt[12]{1.065}^{64} - 1}{\sqrt[12]{1.065}^{64-1} \cdot (\sqrt[12]{1.065} - 1)} \right) \cdot \sqrt[12]{1.065}^{64}$$

13 / 29

Rješenje

a) Prvi način: preko prenumerando isplata



$$Y = R \cdot \frac{r_1^n - 1}{r_1^{n-1} \cdot (r_1 - 1)}$$

$$Y = 500 \cdot \frac{\sqrt{1.051}^{12} - 1}{\sqrt{1.051}^{12-1} \cdot (\sqrt{1.051} - 1)} = 5252.22$$

$$X = 4000r_2^8 - Yr_2^3$$

$$X = 4000 \cdot (1.051^2)^8 - 5252.22 \cdot (1.051^2)^3 = 1786.71$$

$$A = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n-1} \cdot (r - 1)}$$

kvartalni dekurzivni
kamatni faktor

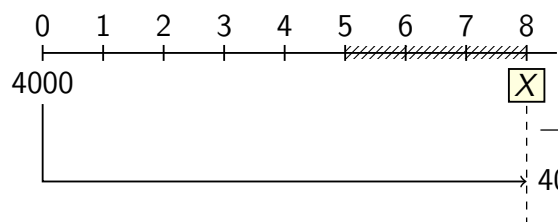
$$r_1 = \sqrt{1.051}$$

godišnji dekurzivni
kamatni faktor

$$r_2 = 1.051^2$$

15 / 29

a) **Drugi način:** preko prenumerando uplata



kvartalni dekurzivni

kamatni faktor

$$r_1 = \sqrt[4]{1.051}$$

godišnji dekurzivni

kamatni faktor

$$r_2 = 1.051^2$$

$$S = R \cdot r_1 \cdot \frac{r_1^n - 1}{r_1 - 1}$$

$$S = 500 \cdot \sqrt{1.051} \cdot \frac{\sqrt{1.051}^{12} - 1}{\sqrt{1.051} - 1} = 7078.798$$

$$X = 4000r_2^8 - S$$

$$X = 4000 \cdot (1.051^2)^8 - 7078.798 = 1786.71$$

16 / 29

Krnja isplata

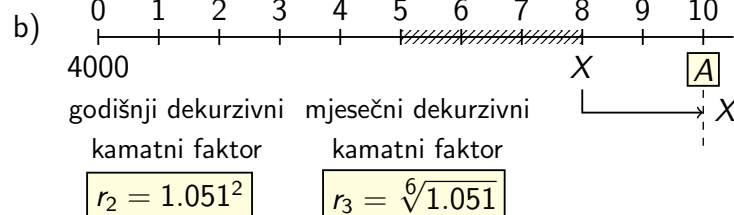
$$R' = \left(A - R \cdot \frac{r_3^n - 1}{r_3^{n-1} \cdot (r_3 - 1)} \right) \cdot r_3^n$$

$$R' = \left(2180.04 - 300 \cdot \frac{\sqrt[6]{1.051}^7 - 1}{\sqrt[6]{1.051}^{7-1} \cdot (\sqrt[6]{1.051} - 1)} \right) \cdot \sqrt[6]{1.051}^7$$

$$R' = 139.19$$

Krnja isplata iznosi 139.19 €.

18 / 29



godišnji dekurzivni kamatni faktor

$$r_2 = 1.051^2$$

mesečni dekurzivni kamatni faktor

$$r_3 = \sqrt[6]{1.051}$$

$$A = Xr_2^2 = 1786.71 \cdot (1.051^2)^2 = 2180.04$$

$$A = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n-1} \cdot (r - 1)} \quad n = \frac{\log \frac{R \cdot r_3}{R \cdot r_3 - A \cdot (r_3 - 1)}}{\log r_3}$$

$$n = \frac{\log \frac{300 \cdot \sqrt[6]{1.051}}{300 \cdot \sqrt[6]{1.051} - 2180.04 \cdot (\sqrt[6]{1.051} - 1)}}{\log \sqrt[6]{1.051}} = 7.46 \quad \boxed{n = 7}$$

Tomislav može primiti ukupno 7 mjesečnih isplata visine 300 €.

17 / 29

Zadatak 7

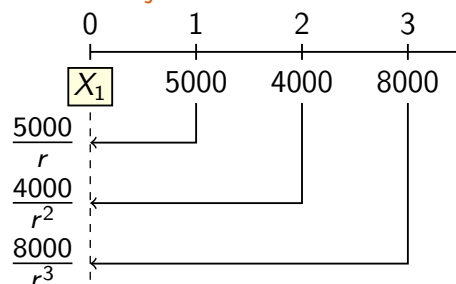
Gabrijel kupuje automobil i odlučio je posuditi novac od rođaka. Tri rođaka spremna su mu ustupiti potrebna sredstva, ali uz različite modele vraćanja posuđenog iznosa. Stric Andrija želi da mu Gabrijel vrati 5000 € za godinu dana, 4000 € za dvije godine i 8000 € za tri godine. Baka Kata želi 284 € krajem svakog mjeseca tijekom sljedećih pet godina. Bratić Marko želi 9500 € za godinu dana i po 2500 € početkom svake od sljedeće tri godine. Godišnja kamatna stopa je 6.9%. Odredite osobu čija je ponuda najpovoljnija i od koje će Gabrijel posuditi novac. Obrazložite svoj odgovor.

19 / 29

Rješenje

Kako bismo usporedili sve tri ponude, usporedit ćemo njihove diskontirane vrijednosti.

stric Andrija



$$X_1 = \frac{5000}{r} + \frac{4000}{r^2} + \frac{8000}{r^3}$$

$$X_1 = \frac{5000}{1.069} + \frac{4000}{1.069^2} + \frac{8000}{1.069^3}$$

$$X_1 = 14\,726.29$$

baka Kata

$$A' = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r - 1)}$$

$$X_2 = 284 \cdot \frac{\sqrt[12]{1.069}^{60} - 1}{\sqrt[12]{1.069}^{60} \cdot (\sqrt[12]{1.069} - 1)}$$

$$X_2 = 14\,448.73$$

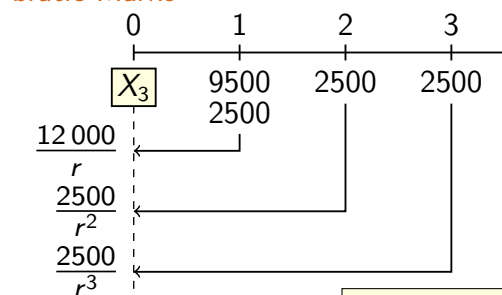
20 / 29

Zadatak 8

Osam puta, početkom svakog kvartala, netko uplati nepoznati iznos. Točno tri godine nakon prve uplate podigne dvostruku vrijednost tog iznosa. O kojem se iznosu radi ako sedam godina nakon prve uplate ima 28 000 kn? Obavezno skicirajte tijek novca. Nominalna godišnja kamatna stopa iznosi 11%.

22 / 29

brat Marko



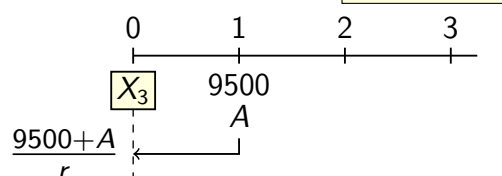
$$X_3 = \frac{12\,000}{r} + \frac{2500}{r^2} + \frac{2500}{r^3}$$

$$X_3 = \frac{12\,000}{1.069} + \frac{2500}{1.069^2} + \frac{2500}{1.069^3}$$

$$X_3 = 15\,459.61$$

drugi način razmišljanja

$$A = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n-1} \cdot (r - 1)}$$



$$A = 2500 \cdot \frac{1.069^3 - 1}{1.069^{3-1} \cdot (1.069 - 1)}$$

$$A = 7026.32$$

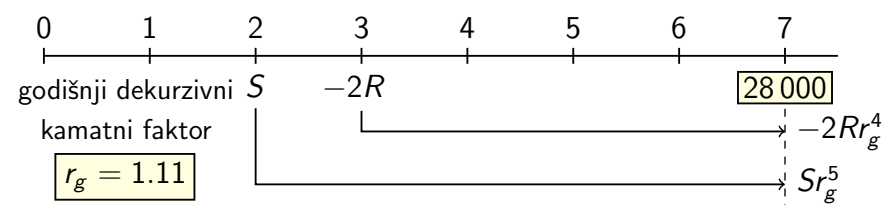
$$X_3 = \frac{9500 + A}{r} = \frac{9500 + 7026.32}{1.069}$$

$$X_3 = 15\,459.61$$

Za Gabrijela je najpovoljnija ponuda bake Kate jer njezina ponuda ima najmanju sadašnju vrijednost.

21 / 29

Rješenje



$$S = R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = R \cdot \sqrt[4]{1.11} \cdot \frac{\sqrt[4]{1.11}^8 - 1}{\sqrt[4]{1.11} - 1}$$

$$S r_g^5 - 2R r_g^4 = 28\,000$$

$$R \cdot \sqrt[4]{1.11} \cdot \frac{\sqrt[4]{1.11}^8 - 1}{\sqrt[4]{1.11} - 1} \cdot 1.11^5 - 2R \cdot 1.11^4 = 28\,000$$

23 / 29

$$R \cdot \sqrt[4]{1.11} \cdot \frac{\sqrt[4]{1.11}^8 - 1}{\sqrt[4]{1.11} - 1} \cdot 1.11^5 - 2R \cdot 1.11^4 = 28\,000$$

$$R \cdot \left(\sqrt[4]{1.11} \cdot \frac{\sqrt[4]{1.11}^8 - 1}{\sqrt[4]{1.11} - 1} \cdot 1.11^5 - 2 \cdot 1.11^4 \right) = 28\,000$$

$$R = \frac{28\,000}{\sqrt[4]{1.11} \cdot \frac{\sqrt[4]{1.11}^8 - 1}{\sqrt[4]{1.11} - 1} \cdot 1.11^5 - 2 \cdot 1.11^4}$$

$$R = 2304.38$$

24 / 29

Domaća zadaća

Zadatak 10

Rukometni klub je organizirao zabavu na kojoj je od sponzora, ulaznica i prodaje pića zaradio 25 820 kn.

- Koliko mjesečno može trošiti (troškovi se namiruju krajem mjeseca) ako je sljedeća zabava za dvije godine, a u međuvremenu nema dodatnih prihoda?
- Ako klubu za normalan rad mjesečno treba 1 500 kn, za koliko će mjeseci navedeni iznos biti dovoljan?
- Koliki bi iznos svaki od 10 igrača morao uplatiti jednokratno na početku dvogodišnjeg perioda kako klub ne bi upao u financijske probleme?

Godišnja kamatna stopa je 7.2%.

26 / 29

Domaća zadaća

Zadatak 9

Koliko je najmanje mjesečnih uplata iznosa 1200 kn potrebno, kako bi uz godišnju kamatnu stopu 6.5% njihova konačna vrijednost bila 100 000 kn?

Rješenje

Potrebno je barem 69 uplata.

$$S = R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad n = \frac{\log \left(\frac{S(r-1)}{Rr} + 1 \right)}{\log r}$$

$$n = \frac{\log \left(\frac{100\,000 \cdot (\sqrt[12]{1.065} - 1)}{1200 \cdot \sqrt[12]{1.065}} + 1 \right)}{\log \sqrt[12]{1.065}} = 68.98$$

25 / 29

Rješenje

$$a) A' = 25\,820, \quad n = 24, \quad r = \sqrt[12]{1.072}$$

$$A' = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r - 1)} \quad R = \frac{A' \cdot r^n \cdot (r - 1)}{r^n - 1}$$

$$R = \frac{25\,820 \cdot \sqrt[12]{1.072}^{24} \cdot (\sqrt[12]{1.072} - 1)}{\sqrt[12]{1.072}^{24} - 1} = 1155.71$$

Klub mjesečno može trošiti 1155.71 kn.

27 / 29

$$\text{b) } A' = 25\,820, \quad R = 1500, \quad r = \sqrt[12]{1.072}$$

$$A' = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r - 1)} \quad n = \frac{\log \frac{R}{R - A' \cdot (r - 1)}}{\log r}$$

$$n = \frac{\log \frac{1500}{1500 - 25\,820 \cdot (\sqrt[12]{1.072} - 1)}}{\log \sqrt[12]{1.072}} = 18.19$$

Iznos će biti dovoljan za 18 mjeseci.

$$\text{c) } A' = 25\,820, \quad R = 1500, \quad r = \sqrt[12]{1.072}, \quad n = 24$$

$$A'_1 = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r - 1)} = 1500 \cdot \frac{\sqrt[12]{1.072}^{24} - 1}{\sqrt[12]{1.072}^{24} \cdot (\sqrt[12]{1.072} - 1)} = 33\,511.88$$

$$A'_1 - A' = 33\,511.88 - 25\,820 = 7691.88$$

$$\frac{A'_1 - A'}{10} = 769.19$$

Svaki igrač treba platiti 769.19 kn.