

Opće periodske svote. Vječna renta. Periodske svote varijabilnih iznosa

FINANCIJSKA MATEMATIKA, IPS

Damir Horvat

FOI, Varaždin

$$S = R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$S_p = S_m$$

$$W \cdot \sqrt[p]{r} \cdot \frac{\sqrt[p]{r}^{pn} - 1}{\sqrt[p]{r} - 1} = R \cdot \sqrt[m]{r} \cdot \frac{\sqrt[m]{r}^{mn} - 1}{\sqrt[m]{r} - 1}$$

$$W \cdot \sqrt[p]{r} \cdot \frac{r^n - 1}{\sqrt[p]{r} - 1} = R \cdot \sqrt[m]{r} \cdot \frac{r^n - 1}{\sqrt[m]{r} - 1} \Big/ : (r^n - 1)$$

$$W \cdot \sqrt[p]{r} \cdot \frac{1}{\sqrt[p]{r} - 1} = R \cdot \sqrt[m]{r} \cdot \frac{1}{\sqrt[m]{r} - 1} \Big/ \cdot \frac{\sqrt[p]{r} - 1}{\sqrt[p]{r}}$$

$$W = R \cdot \frac{\sqrt[m]{r}}{\sqrt[p]{r}} \cdot \frac{\sqrt[p]{r} - 1}{\sqrt[m]{r} - 1}$$

2 / 29

Zadatak 1

Izvedite formulu za visinu W prenumerando periodskih uplata uplaćivanih p puta godišnje, znajući da su one ekvivalentne prenumerando uplatama visine R uplaćivanih m puta godišnje.

Rješenje

- Godišnji dekurzivni kamatni faktor: r
- $S_p \leftarrow$ konačna vrijednost svih uplata visine W nakon n godina
- $\sqrt[p]{r} \leftarrow$ pripadni dekurzivni kamatni faktor za uplate visine W
- $S_m \leftarrow$ konačna vrijednost svih uplata visine R nakon n godina
- $\sqrt[m]{r} \leftarrow$ pripadni dekurzivni kamatni faktor za uplate visine R
- Što želimo? Želimo $S_p = S_m$.

1 / 29

Opće periodske svote

Opće periodske svote su svote koje se uplaćuju ili isplaćuju u periodima koji se razlikuju od perioda ukamaćivanja.

Rješavaju se tako da se prevedu u probleme u kojima se period uplate ili isplate podudara s periodom ukamaćivanja.

- Promjena zadane kamatne stope u ekvivalentnu stopu koja odgovara intervalu u kojemu se svote uplaćuju ili isplaćuju.
- Zamjena zadanih periodskih svota s proporcionalnim svotama na krajevima intervala ukamaćivanja
- Zamjena zadanih periodskih svota s ekvivalentnim svotama na krajevima intervala ukamaćivanja

3 / 29

Zadatak 2

Pronađite iznos koji se akumulirao nakon 5 godina mjesečnim uplatama od 3000 kn uz ukamaćivanje početkom svakog kvartala i kvartalnu kamatnu stopu 1.5%.

Rješenje

- **1. način:** Ostavimo mjesečne uplate i uzmemo dekurzivni kamatni faktor koji odgovara konformnoj mjesečnoj kamatnoj stopi
- $R = 3000$, $r = \sqrt[3]{1.015}$
- $n = 5 \cdot 12 = 60$ mjeseci

$$S = R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = 3000 \cdot \sqrt[3]{1.015} \cdot \frac{\sqrt[3]{1.015}^{60} - 1}{\sqrt[3]{1.015} - 1} = 210\,190.69$$

4 / 29

$$S = R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$W = R \cdot \frac{\sqrt[m]{r}}{\sqrt[p]{r}} \cdot \frac{\sqrt[p]{r} - 1}{\sqrt[m]{r} - 1}$$

- **3. način:** Mjesečne svote zamijenimo s ekvivalentnim kvartalnim svotama

$$W = 3000 \cdot \frac{\sqrt[3]{1.015}}{1.015} \cdot \frac{1.015 - 1}{\sqrt[3]{1.015} - 1} = 8955.52$$

$$S = W \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = 8955.52 \cdot 1.015 \cdot \frac{1.015^{20} - 1}{1.015 - 1} = 210\,190.73$$

Zbog zaokruživanja svote W na dvije decimale, dobili smo kod akumulirane vrijednosti razliku u nekoliko lipa s obzirom na akumuliranu vrijednost kod prvog načina.

6 / 29

- **2. način:** Mjesečne svote zamijenimo proporcionalno s kvartalnim svotama
- $r = 1.015$
- $n = 5 \cdot 4 = 20$ kvartala
- $R = 3 \cdot 3000 = 9000$

$$S = R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = 9000 \cdot 1.015 \cdot \frac{1.015^{20} - 1}{1.015 - 1} = 211\,234.70$$

5 / 29

Vječna renta

- **Postnumerando slučaj**

$$\left(A'_\infty - \frac{R}{r}\right) \cdot r = A'_\infty \implies A'_\infty = \frac{R}{r - 1}$$

$$A'_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} A' = \lim_{n \rightarrow \infty} R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r - 1)}$$

- **Prenumerando slučaj**

$$(A_\infty - R) \cdot r = A_\infty \implies A_\infty = \frac{Rr}{r - 1}$$

$$A_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} A = \lim_{n \rightarrow \infty} R \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n-1} \cdot (r - 1)}$$

- Veza između postnumerando i prenumerando vječne rente

$$A_\infty = A'_\infty + R$$

7 / 29

Zadatak 3

Godine 2000. ustanovljena je znanstvena zaklada za školarine s fondom od 300 000 € tako da kamate omogućuju vječne rente visine 40 000 € krajem svake godine.

- Uz koju je godišnju kamatnu stopu uložen polazni iznos?
- Na kraju 2010. godine kamatna stopa je promijenjena na 9.5%. Kolika je u tom slučaju visina godišnjih, a kolika mjesečnih isplata krajem razdoblja?
- Umjesto da se nastavi s vječnim isplatama, od 2015. godine zaklada se odlučila za konačni broj isplata visine 40 000 € krajem svake godine. Koliko je takvih renti moguće isplatiti i kolika je krnja isplata?

8 / 29

$$\text{b) } A'_\infty = 300\,000, \quad R = 40\,000, \quad p = 9.5\%$$

$$A'_\infty = \frac{R}{r - 1}$$

- godišnji kamatni faktor: $r_1 = 1.095$

$$R_{\text{god}} = A'_\infty (r_1 - 1) = 300\,000 \cdot (1.095 - 1) = 28\,500$$

Visina godišnjih isplata jednaka je 28 500 €.

- mjesečni kamatni faktor: $r_2 = \sqrt[12]{1.095}$

$$R_{\text{mj}} = A'_\infty (r_2 - 1) = 300\,000 \cdot (\sqrt[12]{1.095} - 1) = 2277.46$$

Visina mjesečnih isplata jednaka je 2277.46 €.

10 / 29

Rješenje

$$\text{a) } A'_\infty = 300\,000, \quad R = 40\,000$$

$$A'_\infty = \frac{R}{r - 1}$$

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

$$A'_\infty (r - 1) = R$$

$$r - 1 = \frac{p}{100}$$

$$r - 1 = \frac{R}{A'_\infty}$$

$$p = 100(r - 1)$$

$$r = \frac{R}{A'_\infty} + 1$$

$$p = 100 \cdot (1.1333 - 1)$$

$$r = \frac{40\,000}{300\,000} + 1$$

Godišnja kamatna stopa iznosi 13.33%.

$$r = \frac{17}{15} \approx 1.1333$$

9 / 29

$$\text{c) } A' = 300\,000, \quad R = 40\,000, \quad p = 9.5\%$$

- broj isplata

$$n = \frac{\log \frac{R}{R - A' \cdot (r - 1)}}{\log r} = \frac{\log \frac{40\,000}{40\,000 - 300\,000 \cdot (1.095 - 1)}}{\log 1.095}$$

$$n = 13.74 \quad \boxed{n = 13}$$

Moguće je isplatiti ukupno 13 takvih renti visine 40 000 €.

- krnja isplata

$$R' = \left(A' - R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r - 1)} \right) \cdot r^{n+1}$$

$$R' = \left(300\,000 - 40\,000 \cdot \frac{1.095^{13} - 1}{1.095^{13} \cdot (1.095 - 1)} \right) \cdot 1.095^{13+1}$$

$$R' = 29\,760.13$$

11 / 29

Zadatak 4

Poslodavci su odlučili osnovati fond za stipendiranje trideset studenata informatike. Po završetku studija stipendiju dobiva novi student. Stipendije počinju s isplatom 1. rujna, a po studentu iznose 1200 kn mjesečno.

- Koliki iznos trebaju poslodavci uplatiti u fond 1. rujna da bi fond imao dostatna sredstva?
- Ukoliko odluče stipendije isplaćivati kvartalno u iznosu od 3600 kn, hoće li isti iznos biti dostatan?

Godišnja kamatna stopa iznosi 8%.

12 / 29

Zadatak 5

Pretpostavimo da dvojimo između kupnje stana vrijednosti 50 000 € u svrhu iznajmljivanja s mjesečnim primicima od 250 € (nakon troškova održavanja stana i plaćenih poreznih obaveza) i oročenja istog iznosa uz kamatnu stopu od 5%. Koristeći račun vječne rente ocijenite koja je investicija isplativija.

14 / 29

Rješenje

$$A_{\infty} = \frac{Rr}{r-1}$$

$$a) R_1 = 30 \cdot 1200 = 36\,000, \quad r_1 = \sqrt[12]{1.08}$$

$$A_{\infty} = \frac{R_1 r_1}{r_1 - 1} = \frac{36\,000 \cdot \sqrt[12]{1.08}}{\sqrt[12]{1.08} - 1} = 5\,631\,248.92$$

Poslodavci trebaju uplatiti 5 631 248.92 kn.

$$b) R_2 = 30 \cdot 3600 = 108\,000, \quad r_2 = \sqrt[4]{1.08}$$

$$A_{\infty} = \frac{R_2 r_2}{r_2 - 1} = \frac{108\,000 \cdot \sqrt[4]{1.08}}{\sqrt[4]{1.08} - 1} = 5\,667\,402.84$$

U ovom slučaju poslodavci bi trebali uplatiti veći iznos.

13 / 29

Rješenje

$$\bullet A'_{\infty} = 50\,000, \quad R = 250$$

$$A'_{\infty} = \frac{R}{r-1}$$

$$A'_{\infty}(r-1) = R$$

$$r-1 = \frac{R}{A'_{\infty}}$$

$$r = \frac{R}{A'_{\infty}} + 1$$

$$r = \frac{250}{50\,000} + 1$$

$$r = \frac{201}{200}$$

$$r_{mj} = 1.005$$

$$r_{god} = r_{mj}^{12}$$

$$r_{god} = 1 + \frac{p_{god}}{100}$$

$$r_{god} - 1 = \frac{p_{god}}{100}$$

$$p_{god} = 100(r_{god} - 1)$$

$$p_{god} = 100 \cdot (1.005^{12} - 1)$$

$$p_{god} = 6.17$$

Isplativije je iznajmljivati stan jer na godišnjoj razini ostvaruje se veći povrat nego od oročene štednje.

15 / 29

Zadatak 6

Netko na početku svog radnog vijeka mjesečno zarađuje 8 000 kn. Krajem svakog mjeseca se 20% tog iznosa izdvaja u mirovinski fond koji svoju imovinu ukamaćuje uz godišnju kamatnu stopu 4%. Koliku mirovinu može očekivati navedena osoba ako je duljina njezinog radnog vijeka 40 godina, a godišnja stopa rasta plaće 2%?

16 / 29

$$\text{uplate: } R, qR, q^2R, \dots, q^{n-1}R \quad \hat{S}' = R \cdot \frac{q^n - r^n}{q - r} \quad A'_\infty = \frac{R}{r - 1}$$

- Ukupna vrijednost svih uplata nakon 40 godina

$$\hat{S}' = S' \cdot \frac{q^n - r^n}{q - r} = 19\,549.51 \cdot \frac{1.02^{40} - 1.04^{40}}{1.02 - 1.04} = 2\,534\,575.37$$

- Ako je mirovina vječna renta s isplatama na kraju razdoblja, godišnja mirovina iznosi

$$R_{\text{god}} = \hat{S}' \cdot (r_{\text{god}} - 1) = 2\,534\,575.37 \cdot (1.04 - 1) = 101\,383.01$$

- Mjesečne isplate iznose

$$R_{\text{mj}} = \hat{S}' \cdot (r_{\text{mj}} - 1) = 2\,534\,575.37 \cdot (\sqrt[12]{1.04} - 1) = 8297.54$$

18 / 29

Rješenje

- 20% mjesečne plaće: $R = \frac{20}{100} \cdot 8000 = 1600$
- Ukupna vrijednost uplata na kraju prve godine

$$S' = R \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = 1600 \cdot \frac{\sqrt[12]{1.04}^{12} - 1}{\sqrt[12]{1.04} - 1} = 19\,549.51$$

- Plaća godišnje raste za 2% pa je godišnji faktor rasta plaće $q = 1.02$. Stoga se mjesečne i godišnje ukupne uplate povećavaju za isti postotak.
- Mjesečne uplate tijekom pojedine godine kroz 40 godina

$$R, qR, q^2R, \dots, q^{39}R.$$

- Ukupne uplate tijekom pojedine godine kroz 40 godina

$$S', qS', q^2S', \dots, q^{39}S'.$$

17 / 29

Zadatak 7

U dogovoru s poslodavcem sindikat radnika je zaostajanje plaća odlučio riješiti na način da uz osnovnu neto mjesečnu plaću od 3000 kn svaki mjesec dobivaju 50 kn više nego protekli mjesec tako dugo dok im se plaća ne udvostruči. Koliki bi dodatni iznos za povećanje plaća po jednom zaposleniku trebao osigurati poslodavac u trenutku sklapanja ugovora, znajući da radnici plaću dobivaju krajem mjeseca, a novac za plaće je uložen uz godišnju kamatnu stopu 3.2%?

19 / 29

$$\text{isplate: } R, 2R, 3R, \dots, nR \quad \hat{A}' = \frac{R}{r-1} \left(\frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)} - \frac{n}{r^n} \right)$$

Rješenje

- Plaća će se udvostručiti nakon 60 mjeseci ($60 \cdot 50 = 3000$).
- Iznos potreban za povećanje plaće

$$\hat{A}' = \frac{R}{r-1} \left(\frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)} - \frac{n}{r^n} \right)$$

$$\hat{A}' = \frac{50}{\sqrt[12]{1.032} - 1} \left(\frac{\sqrt[12]{1.032}^{60} - 1}{\sqrt[12]{1.032}^{60-1} (\sqrt[12]{1.032} - 1)} - \frac{60}{\sqrt[12]{1.032}^{60}} \right)$$

$$\hat{A}' = 82\,366.06$$

20 / 29

Zadatak 8

Rajka je odlučila štedjeti na način da krajem svakog mjeseca idućih 10 godina uplaćuje na posebni bankovni račun 10% svoje plaće. Trenutno zarađuje 3500 kn mjesečno, a godišnja stopa rasta plaće je 2.1%.

Banka svoju imovinu ukamaćuje uz godišnju kamatnu stopu od 4.3%.

Nakon isteka 10 godina, dvije godine nije trošila ušteđevinu, a zatim je odlučila da krajem svakog mjeseca idućih 5 godina podigne određeni iznos tako da svaki mjesec podigne 20 kn više nego prethodni mjesec. Koliko je Rajka uštedjela tijekom deset godina? Kolika je visina prve i posljednje isplate?

22 / 29

$$A' = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r - 1)}$$

- Fiksni dio plaće

$$A' = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r - 1)} = 3000 \cdot \frac{\sqrt[12]{1.032}^{60} - 1}{\sqrt[12]{1.032}^{60} \cdot (\sqrt[12]{1.032} - 1)}$$

$$A' = 166\,322.84$$

- Novac koji poslodavac treba osigurati po jednom zaposleniku

$$A' + \hat{A}' = 166\,322.84 + 82\,366.06 = 248\,688.90$$

21 / 29

Rješenje

- 10% Rajkine mjesečne plaće: $R = \frac{10}{100} \cdot 3500 = 350$

- Ukupna vrijednost uplata na kraju prve godine

$$S' = R \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = 350 \cdot \frac{\sqrt[12]{1.043}^{12} - 1}{\sqrt[12]{1.043} - 1} = 4282.15$$

- Plaća godišnje raste za 2.1% pa je godišnji faktor rasta plaće $q = 1.021$. Stoga se mjesečne i godišnje ukupne uplate povećavaju za isti postotak.

- Mjesečne uplate tijekom pojedine godine kroz 10 godina

$$R, qR, q^2R, \dots, q^9R.$$

- Ukupne uplate tijekom pojedine godine kroz 10 godina

$$S', qS', q^2S', \dots, q^9S'.$$

23 / 29

$$\text{uplate: } R, qR, q^2R, \dots, q^{n-1}R \quad \hat{S}' = R \cdot \frac{q^n - r^n}{q - r}$$

- Ukupna vrijednost svih uplata nakon 10 godina

$$\hat{S}' = S' \cdot \frac{q^n - r^n}{q - r} = 4282.15 \cdot \frac{1.021^{10} - 1.043^{10}}{1.021 - 1.043} = 56\,933.91$$

- Dvije godine nije bilo isplate uštede

$$X = \hat{S}' \cdot 1.043^2 = 56\,933.91 \cdot 1.043^2 = 61\,935.5$$

24 / 29

$$A' = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r - 1)}$$

- Dio za fiksnu isplatu

$$\hat{F} = X - \hat{A}' = 61\,935.5 - 31\,810.74 = 30\,124.76$$

$$\hat{R} = \hat{F} \cdot \frac{r^n(r - 1)}{r^n - 1}$$

$$\hat{R} = 30\,124.76 \cdot \frac{\sqrt[12]{1.043}^{60} \cdot (\sqrt[12]{1.043} - 1)}{\sqrt[12]{1.043}^{60} - 1}$$

$$\hat{R} = 557.76$$

- Prva isplata: $557.76 + 1 \cdot 20 = 577.76$
- Posljednja isplata: $557.76 + 60 \cdot 20 = 1757.76$

26 / 29

$$\text{isplate: } R, 2R, 3R, \dots, nR \quad \hat{A}' = \frac{R}{r - 1} \left(\frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r - 1)} - \frac{n}{r^n} \right)$$

- Iznos potreban za povećanje isplata (20 kn)

$$\hat{A}' = \frac{R}{r - 1} \left(\frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r - 1)} - \frac{n}{r^n} \right)$$

$$\hat{A}' = \frac{20}{\sqrt[12]{1.043} - 1} \left(\frac{\sqrt[12]{1.043}^{60} - 1}{\sqrt[12]{1.043}^{60-1} (\sqrt[12]{1.043} - 1)} - \frac{60}{\sqrt[12]{1.043}^{60}} \right)$$

$$\hat{A}' = 31\,810.74$$

25 / 29

Domaća zadaća

Zadatak 9

Izvedite formulu za visinu W postnumerando periodskih uplata uplaćivanih p puta godišnje, znajući da su one ekvivalentne prenumerando uplatama visine R uplaćivanih m puta godišnje.

27 / 29

Rješenje

- Godišnji dekurzivni kamatni faktor: r
- $S'_p \leftarrow$ konačna vrijednost svih postnumerando uplata visine W nakon n godina
- $\sqrt[p]{r} \leftarrow$ pripadni dekurzivni kamatni faktor za uplate visine W
- $S_m \leftarrow$ konačna vrijednost svih prenumerando uplata visine R nakon n godina
- $\sqrt[m]{r} \leftarrow$ pripadni dekurzivni kamatni faktor za uplate visine R
- Što želimo? Želimo $S'_p = S_m$.

28 / 29

$$S' = R \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$S = R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$S'_p = S_m$$

$$W \cdot \frac{\sqrt[p]{r}^{pn} - 1}{\sqrt[p]{r} - 1} = R \cdot \sqrt[m]{r} \cdot \frac{\sqrt[m]{r}^{mn} - 1}{\sqrt[m]{r} - 1}$$

$$W \cdot \frac{r^n - 1}{\sqrt[p]{r} - 1} = R \cdot \sqrt[m]{r} \cdot \frac{r^n - 1}{\sqrt[m]{r} - 1} \Bigg/ : (r^n - 1)$$

$$W \cdot \frac{1}{\sqrt[p]{r} - 1} = R \cdot \sqrt[m]{r} \cdot \frac{1}{\sqrt[m]{r} - 1} \Bigg/ \cdot (\sqrt[p]{r} - 1)$$

$$W = R \cdot \sqrt[m]{r} \cdot \frac{\sqrt[p]{r} - 1}{\sqrt[m]{r} - 1}$$

29 / 29