

Aritmetički i geometrijski niz

FINANCIJSKA MATEMATIKA, IPS

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Zadatak 1

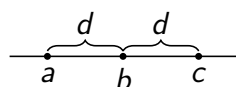
Zbroj tri uzastopna člana aritmetičkog niza iznosi 33, a njihov umnožak je 1287. Odredite te brojeve.

Rješenje

Označimo tražene brojeve s a, b, c . Tada je

$$a + b + c = 33$$

$$abc = 1287$$



$$\begin{aligned} a &= b - d \\ c &= b + d \end{aligned}$$

$$(b - d) + b + (b + d) = 33$$

$$3b = 33$$

$$b = 11$$

$$b = 11$$

$$abc = 1287$$

$$a \cdot 11 \cdot c = 1287 / : 11$$

$$ac = 117$$

$$(11 - d)(11 + d) = 117$$

$$121 - d^2 = 117$$

$$d^2 = 4$$

$$d_1 = 2, d_2 = -2$$

$$\begin{aligned} a &= b - d \\ c &= b + d \end{aligned}$$

Dobivamo dva rješenja:

• prvi niz: 9, 11, 13

• drugi niz: 13, 11, 9

$$a_1 = b - d_1 = 11 - 2 = 9$$

$$c_1 = b + d_1 = 11 + 2 = 13$$

$$a_2 = b - d_2 = 11 - (-2) = 13$$

$$c_2 = b + d_2 = 11 + (-2) = 9$$

Karakterizacija geometrijskog niza

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

• 3, 6, 12, 24, 48, 96, ...

$$a_1 = 3, q = 2$$

$$6 = \sqrt{3 \cdot 12}, \quad 6^2 = 3 \cdot 12$$

• 3, -6, 12, -24, 48, -96, ...

$$a_1 = 3, q = -2$$

$$-6 \neq \sqrt{3 \cdot 12}, \quad (-6)^2 = 3 \cdot 12$$

$$12 = \sqrt{-6 \cdot (-24)}, \quad 12^2 = -6 \cdot (-24)$$

Zadatak 2

Nađite četiri broja tako da prva tri čine geometrijski niz, a posljednja tri aritmetički niz. Koji su to brojevi ako je suma krajnjih članova jednaka 14, a suma srednjih članova je jednaka 12?

Rješenje

Neka su a, b, c, d redom traženi brojevi. Iz uvjeta zadatka vrijedi

$$a + d = 14$$

$$b + c = 12$$

Nadalje, mora biti

$$a, b, c \rightarrow \text{geometrijski niz} \rightarrow b^2 = ac$$

$$b, c, d \rightarrow \text{aritmetički niz} \rightarrow c = \frac{b+d}{2}$$

4 / 44

Zadatak 3

Jedna privatna tvrtka je u razdoblju od 10 godina zaradila ukupno 200 000 €. Koliko je tvrtka zaradila u prvoj i desetoj godini ako se u promatranom razdoblju zarada konstantno povećavala godišnje za 2300 €?

Rješenje

- Neka je a_n zarada tvrtke u n -toj godini.
- Niz (a_n) je aritmetički s razlikom $d = 2300$.
- Znamo da je $S_{10} = 200\,000$, a tražimo a_1 i a_{10} .

6 / 44

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a + d = 14 \rightarrow a = 14 - d = 14 - (24 - 3b) = 3b - 10$

$b + c = 12 \rightarrow c = 12 - b$

$b^2 = ac$

$b + d = 2c \rightarrow d = 2c - b = 2 \cdot (12 - b) - b = 24 - 3b$

$b^2 = ac$

$b^2 = (3b - 10)(12 - b)$

$b^2 = 36b - 3b^2 - 120 + 10b$

$4b^2 - 46b + 120 = 0 : 2$

$2b^2 - 23b + 60 = 0$

$b_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{(-23)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 60}}{2 \cdot 2}$

$a = 3b - 10$

$d = 24 - 3b$

$b_{1,2} = \frac{23 \pm 7}{4}$

$b_1 = \frac{15}{2} \quad b_2 = 4$

$a_1 = \frac{25}{2} \quad a_2 = 2$

$c_1 = \frac{9}{2} \quad c_2 = 8$

$d_1 = \frac{3}{2} \quad d_2 = 12$

5 / 44

$n = 10$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + 9d)$$

$S_{10} = 200\,000$

$200\,000 = 5(2a_1 + 9 \cdot 2300)$
 $200\,000 = 5(2a_1 + 20\,700) : 5$
 $40\,000 = 2a_1 + 20\,700$
 $-2a_1 = -19\,300 : (-2)$
 $a_1 = 9650$

$d = 2300$

Tvrtka je u prvoj godini zaradila 9650 €.

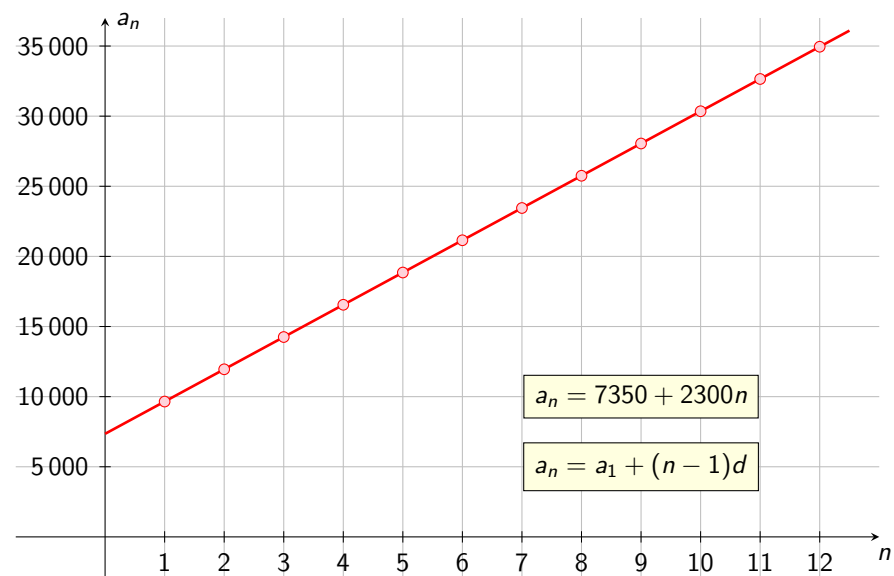
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = 9650 + 9 \cdot 2300 = 30\,350$$

Tvrtka je u desetoj godini zaradila 30 350 €.

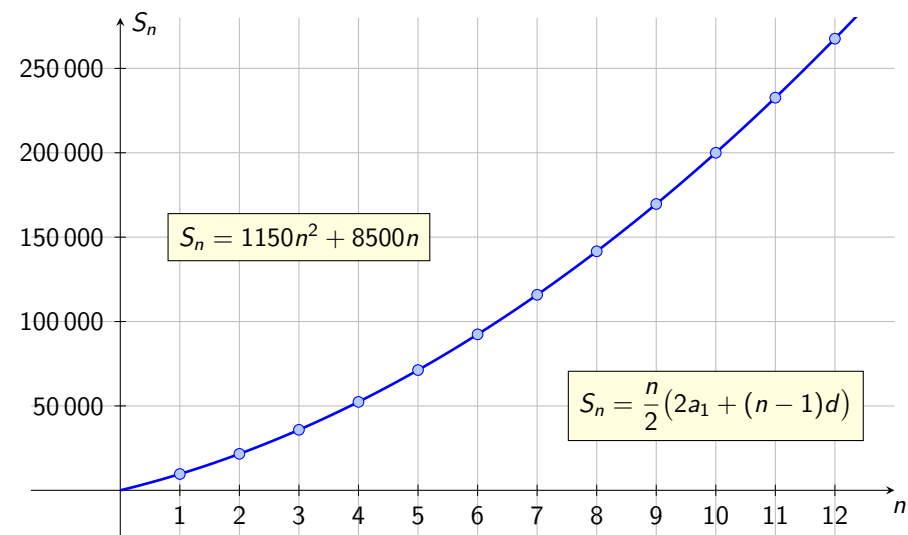
7 / 44

Niz (a_n) – dijagram točkama



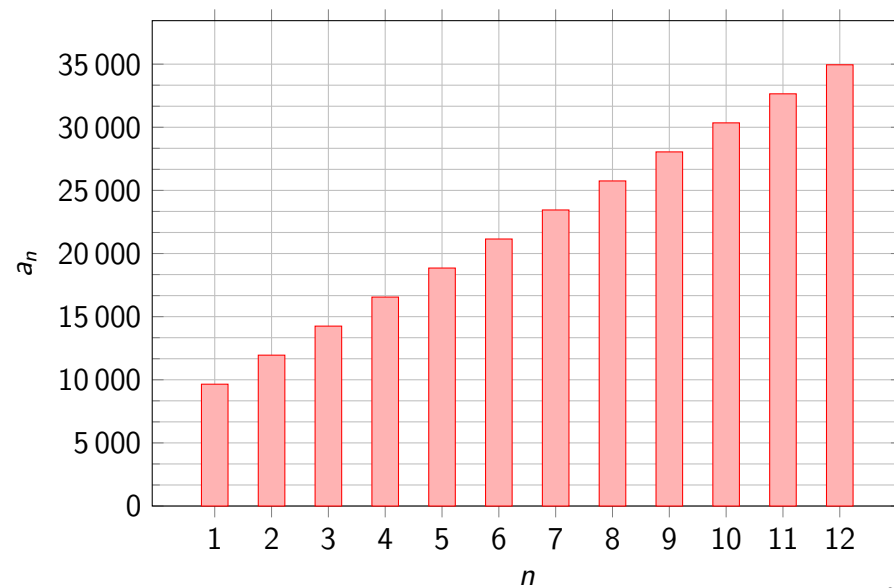
8 / 44

Niz (S_n) – dijagram točkama



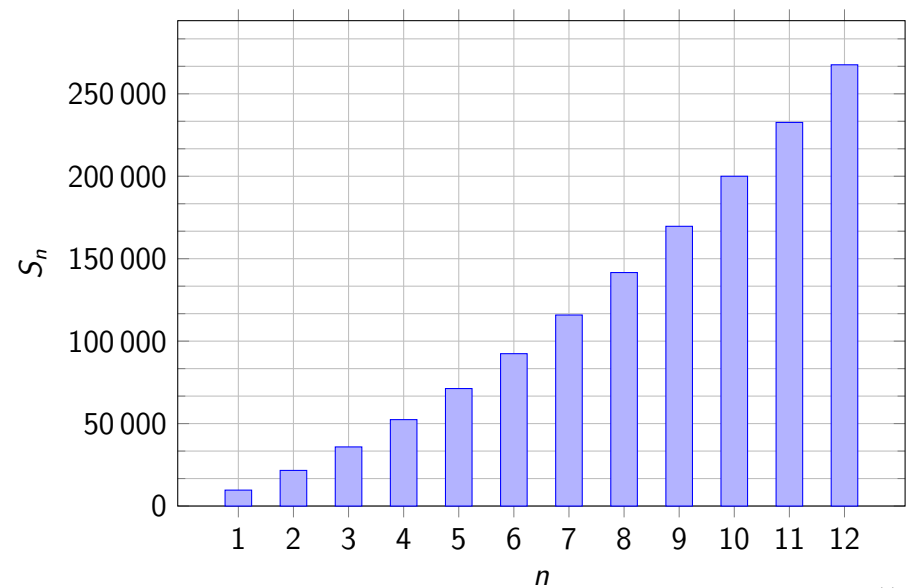
10 / 44

Niz (a_n) – uspravni stupci



9 / 44

Niz (S_n) – uspravni stupci



11 / 44

Zadatak 4

Petar zarađuje godišnje 40 000 kn. Ako mu se svake godine godišnja zarada poveća za 2% u odnosu na prethodnu godinu, koliko će Petar ukupno zaraditi nakon 10 godina?

Rješenje

- Neka je a_n Petrova zarada u n -toj godini.
- Iz uvjeta zadatka imamo

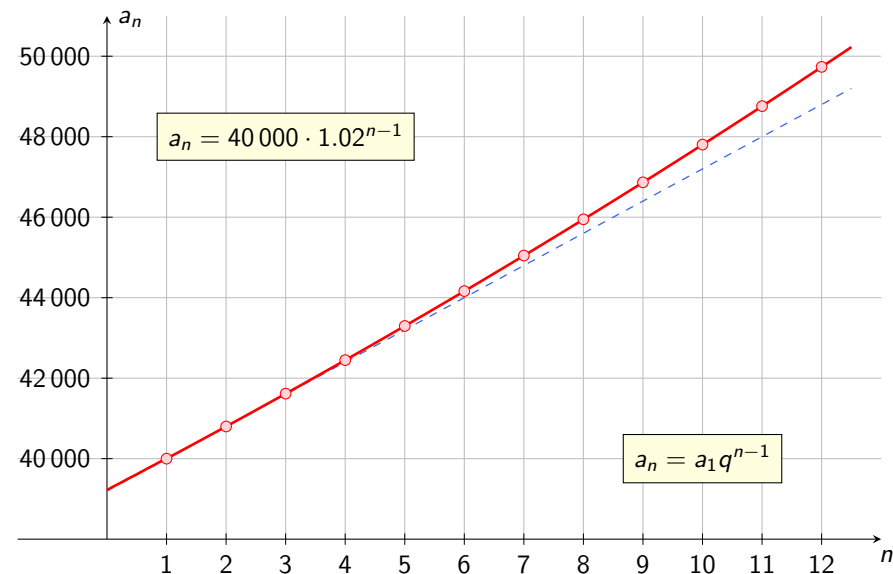
$$a_n = a_{n-1} + \frac{2}{100}a_{n-1} = 1.02a_{n-1}$$

pa je $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1.02$.

- Stoga je (a_n) geometrijski niz u kojemu je $a_1 = 40\,000$ i $q = 1.02$.
Trebamo odrediti S_{10} .

12 / 44

Niz (a_n) – dijagram točkama



14 / 44

$$\begin{aligned} n &= 10 \\ a_1 &= 40\,000 \\ q &= 1.02 \end{aligned}$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

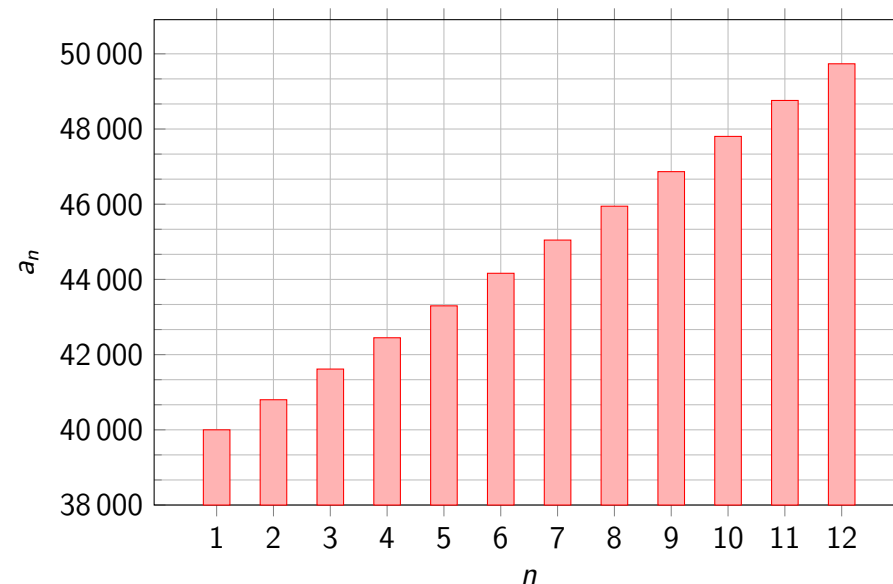
$$S_{10} = 40\,000 \cdot \frac{1.02^{10} - 1}{1.02 - 1}$$

$$S_{10} = 437\,988.84$$

Nakon 10 godina Petar će zaraditi ukupno 437 988.84 kn.

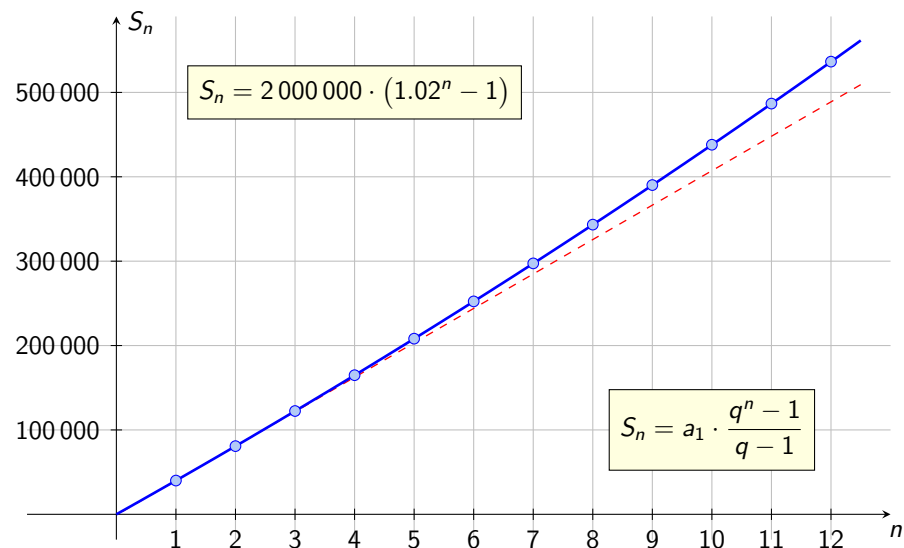
13 / 44

Niz (a_n) – uspravni stupci



15 / 44

Niz (S_n) – dijagram točkama



16 / 44

Zadatak 5

Cijena novog automobila iznosi 20 000 €. Svake godine vrijednost automobila se smanjuje za 8% u odnosu na prethodnu godinu.

- Kolika je vrijednost automobila nakon osam godina?
- Nakon koliko vremena će vrijednost automobila biti jednaka 8 000 €?

Rješenje

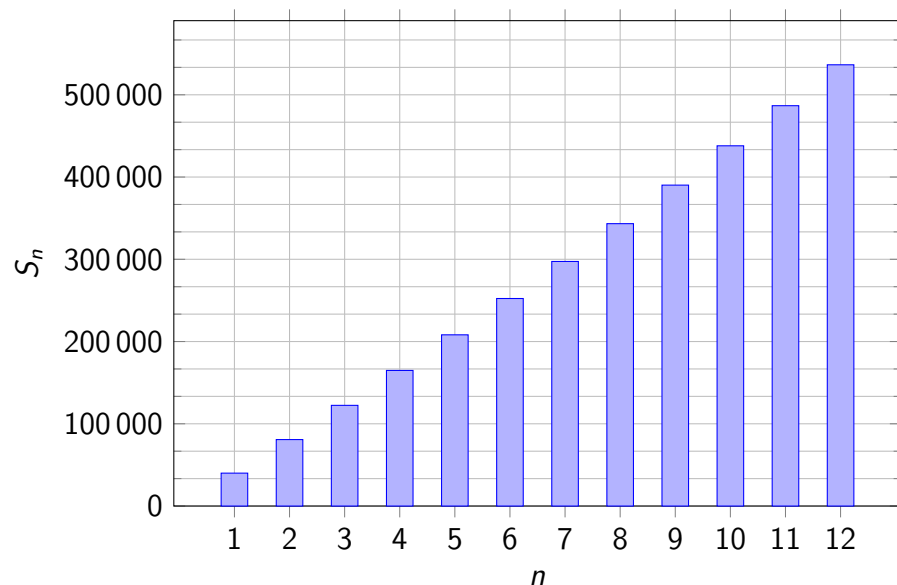
- Neka je a_n vrijednost automobila nakon n godina.
- Iz uvjeta zadatka imamo

$$a_n = a_{n-1} - \frac{8}{100}a_{n-1} = 0.92a_{n-1}$$

pa je $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 0.92$.

18 / 44

Niz (S_n) – uspravni stupci



17 / 44

- Stoga je (a_n) geometrijski niz u kojemu je $q = 0.92$ i

$$a_1 = a_0 \cdot q \quad a_1 = 20\,000 \cdot 0.92 = 18\,400.$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

- Vrijednost automobila nakon 8 godina iznosi 10 264.38 €.

$$a_8 = a_1 q^7 = 18\,400 \cdot 0.92^7 = 10\,264.38$$

19 / 44

b) Nakon 11 godina vrijednost automobila je manja od 8000 €.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_n = 8000$$

$$18\,400 \cdot 0.92^{n-1} = 8000$$

$$0.92^{n-1} = \frac{10}{23} \bigg/ \log$$

$$\log 0.92^{n-1} = \log \frac{10}{23}$$

$$(n-1) \log 0.92 = \log \frac{10}{23}$$

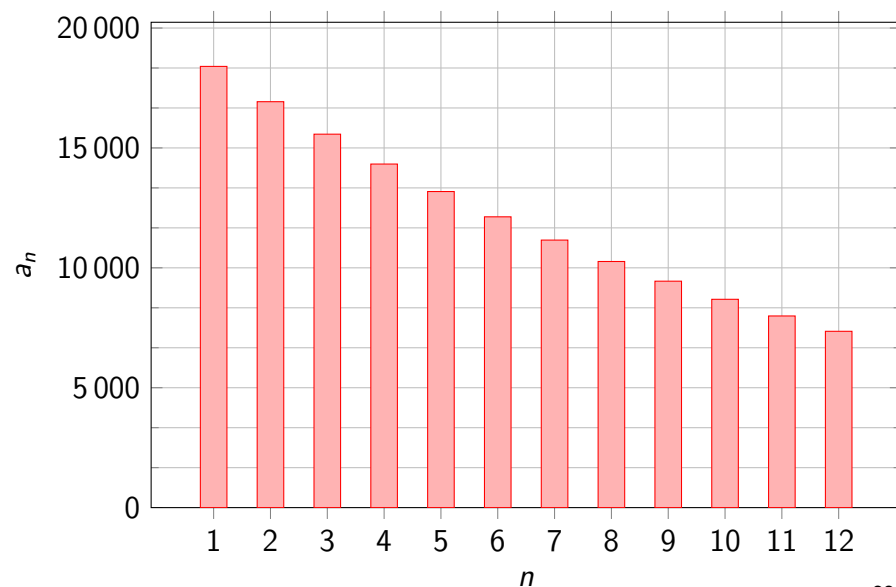
$$n-1 = \frac{\log \frac{10}{23}}{\log 0.92}$$

$$n = \frac{\log \frac{10}{23}}{\log 0.92} + 1$$

$$n \approx 10.989$$

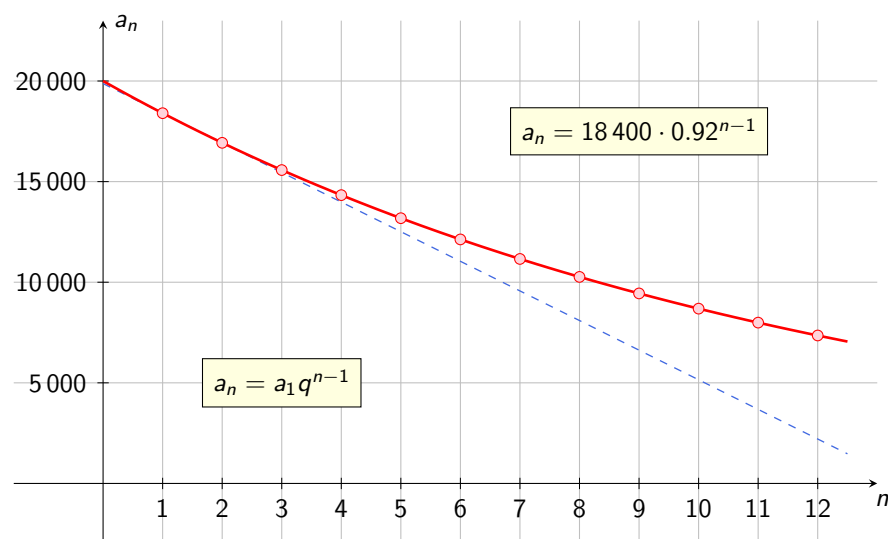
20 / 44

Niz (a_n) – uspravni stupci



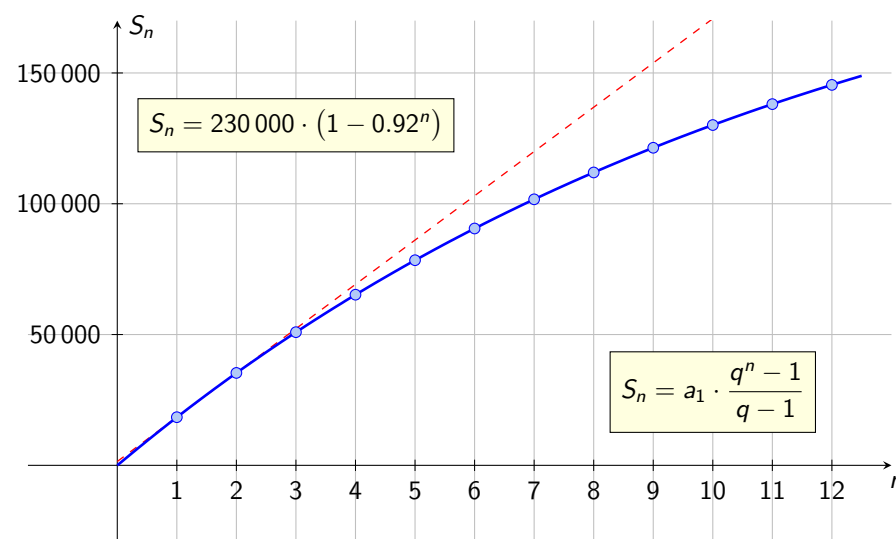
22 / 44

Niz (a_n) – dijagram točkama



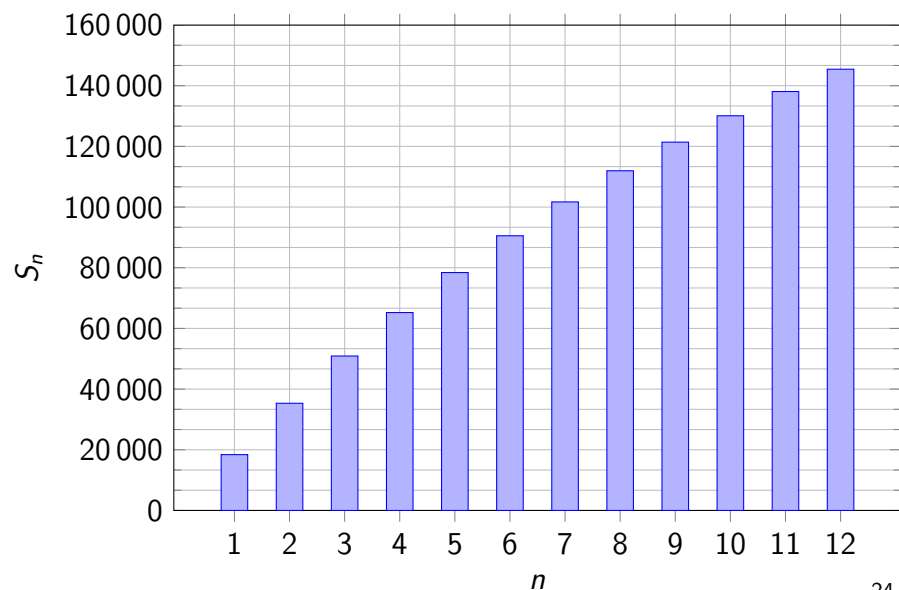
21 / 44

Niz (S_n) – dijagram točkama



23 / 44

Niz (S_n) – uspravni stupci



24 / 44

- $a_{2001} = 25\,538$, $a_{2005} = 35\,725$

$$a_n = a_m \cdot q^{n-m}$$

$$a_{2005} = a_{2001} \cdot q^4$$

$$q^4 = \frac{a_{2005}}{a_{2001}}$$

$$q = \sqrt[4]{\frac{a_{2005}}{a_{2001}}}$$

$$q = \sqrt[4]{\frac{35\,725}{25\,538}}$$

$$q = 1.087542753$$

$$p = 100(q - 1) = 8.7542753$$

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

Uz pretpostavku da godišnji BDP-ovi čine geometrijski niz, godišnja stopa rasta BDP-a je 8.75%.

$$a_{2008} = a_{2005} \cdot q^3$$

$$a_{2008} = 35\,725 \cdot 1.087542753^3$$

$$a_{2008} = 45\,952.72$$

BDP u 2008. godini iznosio je oko 45 953 milijuna eura.

26 / 44

Zadatak 6

Prema podacima, dostupnima na stanicama HNB-a, BDP Hrvatske u 2001. godini iznosio je 25 538, a 2005. godine 35 725 milijuna eura. Uz pretpostavku da BDP ima konstantnu stopu rasta procijenite BDP za 2008. godinu i usporedite s dostupnim podatkom od 47 370 milijuna eura.

Rješenje

- Neka je a_n vrijednost BDP-a u milijunima eura n -te godine
- Iz uvjeta zadatka imamo

$$a_n = a_{n-1} + \frac{p}{100} a_{n-1} = \left(1 + \frac{p}{100}\right) a_{n-1}$$

pa je (a_n) geometrijski niz s kvocijentom $q = 1 + \frac{p}{100}$ pri čemu je p godišnja stopa rasta BDP-a.

25 / 44

- Procijenjena vrijednost BDP-a za 2008. godinu

$$a_{2008} = 45\,953$$

- Stvarna vrijednost BDP-a za 2008. godinu

$$X = 47\,370$$

- Apsolutna greška

$$|X - a_{2008}| = |47\,370 - 45\,953| = 1417$$

Apsolutna greška je 1417 milijuna eura.

- Relativna greška

$$\frac{|X - a_{2008}|}{|X|} = \frac{1417}{47\,370} = 0.029913447$$

Relativna greška je 2.99%.

27 / 44

Zadatak 7

Peć za pečenje keramike u hladnom stanju ima sobnu temperaturu 21°C . Kada se peć uključi, temperatura joj svake minute naraste za 9°C .

- Kolika je temperatura peći nakon pola sata?
- Glineni lonac treba peći na temperaturi od 480°C . Koliko minuta treba čekati za zagrijavanje peći?

Rješenje

- Neka je a_n temperatura peći u $^{\circ}\text{C}$ nakon n minuta.
- Tada je (a_n) aritmetički niz u kojemu je $d = 9$ i $a_1 = 21 + 9 = 30$.

28 / 44

Zadatak 8

Na nekom natjecanju je podijeljeno ukupno 15 nagrada. Uz prvu nagradu dodjeljuje se i novčani iznos od 5000 kn, a uz svaku sljedeću novčani iznos za 250 kn manji nego uz prethodnu nagradu.

- Koliki se novčani iznos dodjeljuje uz petnaestu nagradu?
- Koliki je ukupni novčani fond za nagrade?
- Koliko je ukupno novaca podijeljeno od devete do četrnaeste nagrade?

Rješenje

- Neka je a_n iznos u kunama koji se dodjeljuje za n -tu nagradu.
- Tada je (a_n) aritmetički niz u kojemu je $a_1 = 5000$ i $d = -250$.

30 / 44

- Temperatura peći nakon pola sata jednaka je 291°C .

$$a_{30} = a_1 + 29d = 30 + 29 \cdot 9 = 291$$

- Iz $a_n = 480$ slijedi

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_1 + (n - 1)d = 480$$

$$30 + (n - 1) \cdot 9 = 480$$

$$30 + 9n - 9 = 480$$

$$9n + 21 = 480$$

$$9n = 459$$

$$n = 51$$

Za zagrijavanje peći potrebno je čekati 51 minutu.

29 / 44

- Za petnaestu nagradu dodjeljuje se 1500 kn.

$$a_{15} = a_1 + 14d = 5000 + 14 \cdot (-250) = 1500$$

- Iz $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ slijedi

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(a_1 + a_{15})$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(5000 + 1500)$$

$$S_{15} = \frac{15}{2} \cdot 6500$$

$$S_{15} = 48\,750$$

Ukupni novčani fond za nagrade iznosi 48 750 kn.

31 / 44

c) Iz $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ slijedi

$$S_{14} = \frac{14}{2}(2 \cdot 5000 + 13 \cdot (-250)) \quad S_8 = \frac{8}{2}(2 \cdot 5000 + 7 \cdot (-250))$$

$$S_{14} = \frac{14}{2} \cdot 6750$$

$$S_8 = \frac{8}{2} \cdot 8250$$

$$S_{14} = 47\,250$$

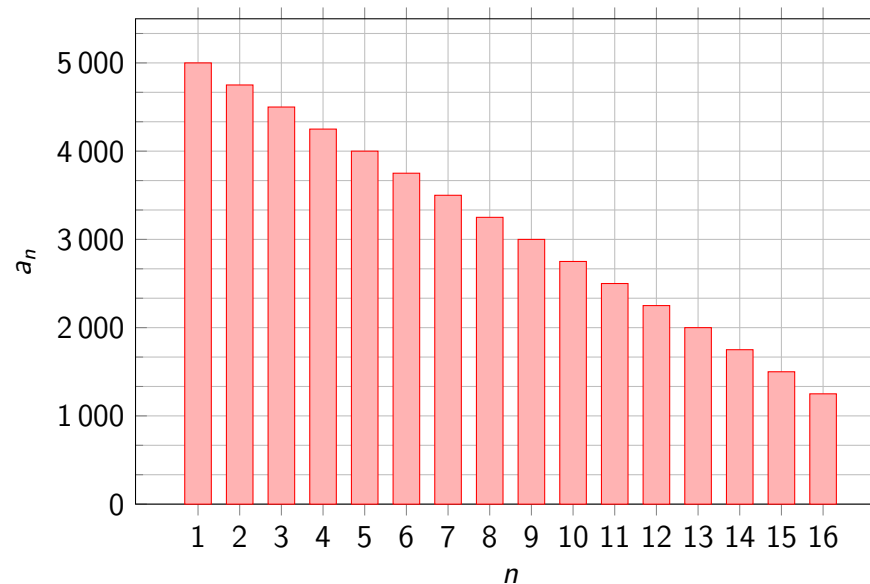
$$S_8 = 33\,000$$

$$S_{14} - S_8 = 47\,250 - 33\,000 = 14\,250$$

Od devete do četrnaeste nagrade podijeljeno je ukupno 14 250 kn.

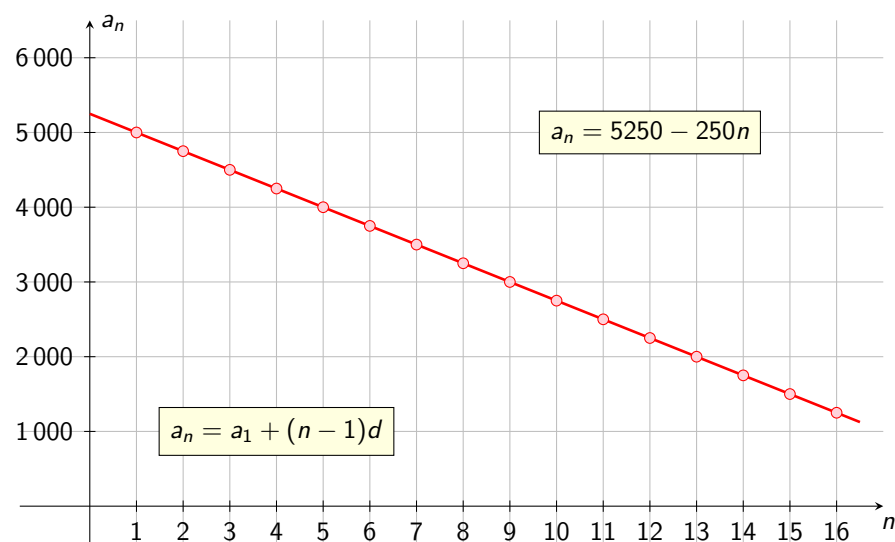
32 / 44

Niz (a_n) – uspravni stupci



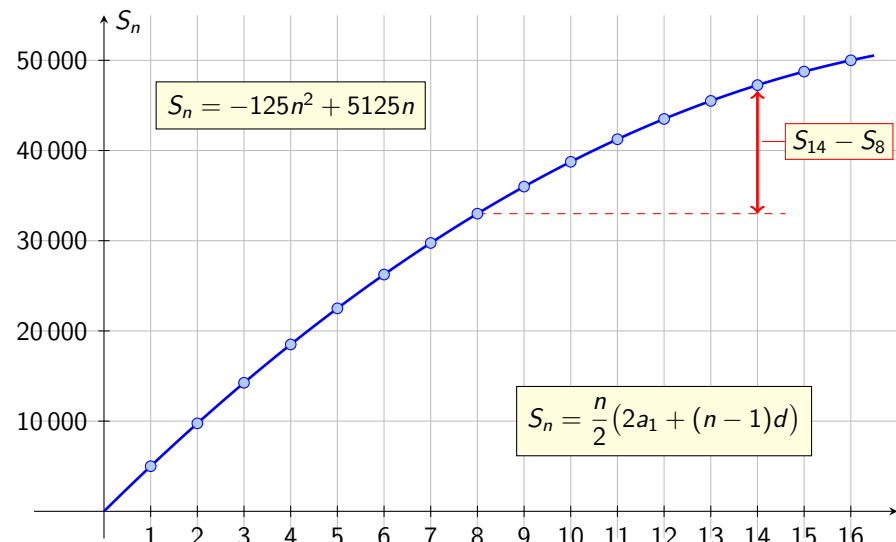
34 / 44

Niz (a_n) – dijagram točkama



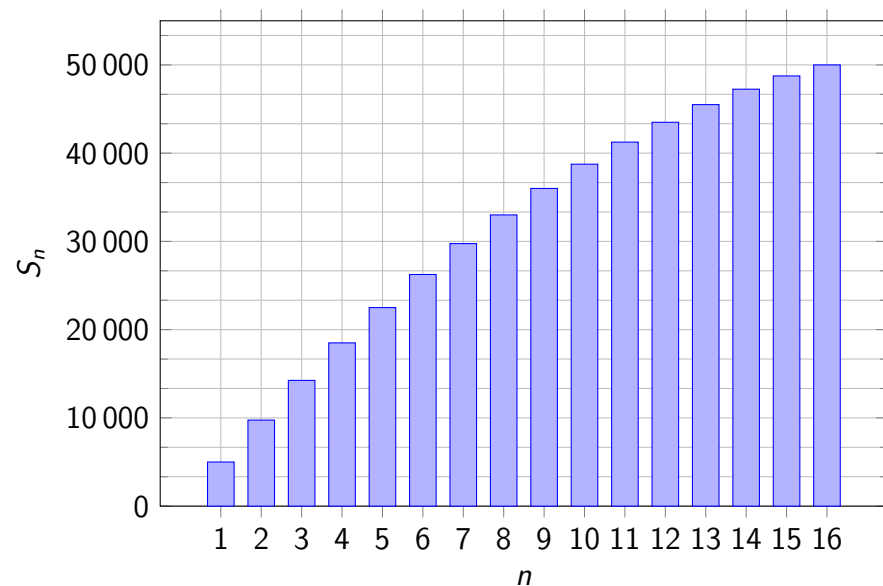
33 / 44

Niz (S_n) – dijagram točkama



35 / 44

Niz (S_n) – uspravni stupci



36 / 44

a) Iz $t_n = t_1 q^{n-1}$ slijedi

$$t_n = 27\,000 \cdot 2.25^{n-1}$$

b) Kako je $\frac{150}{25} = 6$, dobivamo

$$t_6 = 27\,000 \cdot 2.25^5 = 1\,556\,956.05$$

Vrijednost stola nakon 150 godina je 1 556 956.05 €.

38 / 44

Zadatak 9

Antikni stol košta 12 000 €, a njegova vrijednost se povećava za 125% svakih 25 godina. Neka je t_1 vrijednost stola nakon 25 godina, t_2 vrijednost stola nakon 50 godina i općenito t_n vrijednost stola nakon $25n$ godina.

- Odredite formulu za opći član niza (t_n).
- Odredite vrijednost stola nakon 150 godina.

Rješenje

- Iz uvjeta zadatka imamo $t_{n+1} = t_n + \frac{125}{100}t_n = 2.25t_n$ pa je $\frac{t_{n+1}}{t_n} = 2.25$.
- Stoga je (t_n) geometrijski niz u kojemu je $q = 2.25$ i $t_1 = 12\,000 \cdot 2.25 = 27\,000$.

39 / 44

Domaća zadaća

Zadatak 10

Brod je bio 200 kilometara udaljen od obale kada se pokvario motor. U prvom satu brod prevali 40 km. U tom vremenu motor izgubi 20% snage, kao i svaki naredni sat vremena.

- Koliko vremena će trebati brodu da prevali 75 km s pokvarenim motorom?
- Koja je najveća udaljenost koju brod može prijeći s pokvarenim motorom? Može li doći do obale?

39 / 44

Rješenje

- Neka je a_n put u kilometrima kojeg brod prewali nakon n sati.
- Iz uvjeta zadatka imamo

$$a_n = a_{n-1} - \frac{20}{100}a_{n-1} = 0.8a_{n-1}$$

pa je $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 0.8$.

- Stoga je (a_n) geometrijski niz u kojemu je $q = 0.8$ i $a_1 = 40$.

b) Radi se o geometrijskom redu s $a_1 = 40$ i $q = 0.8$.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$S = \frac{40}{1 - 0.8}$$

$$S = \frac{40}{0.2}$$

$$S = 200$$

Najveća udaljenost koju brod može prijeći s pokvarenim motorom je 200 km. Dakle, može doći proizvoljno blizu obale, ali nikad neće doći do obale.

a) Brod će s pokvarenim motorom prewalki put od 75 km za 2 h 6 min 22 s.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$0.8^n = \frac{5}{8} \Big/ \log$$

$$75 = 40 \cdot \frac{0.8^n - 1}{0.8 - 1}$$

$$n \cdot \log 0.8 = \log \frac{5}{8}$$

$$75 = \frac{40}{-0.2} \cdot (0.8^n - 1)$$

$$n = \frac{\log \frac{5}{8}}{\log 0.8}$$

$$75 = -200 \cdot (0.8^n - 1)$$

$$n = 2.1063$$

$$-\frac{3}{8} = 0.8^n - 1$$

$$0.1063 \text{ h} = 0.1063 \cdot 60 \text{ min} = 6.378 \text{ min}$$

$$0.378 \text{ min} = 0.378 \cdot 60 \text{ s} = 22.68 \text{ s}$$

Domaća zadaća**Zadatak 11**

Poslodavac A nudi 60 000 € prve godine. Kroz sljedeće četiri godine plaća će rasti po stopi od 6%. Poslodavac B nudi 64 000 € sa godišnjim rastom od 3%. Koji poslodavac nudi bolju ukupnu plaću za razdoblje od 5 godina? Za koliko je bolja ponuda veća od slabije ponude?

Rješenje

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

- $a_1 = 60\,000$, $q_1 = 1.06$

$$S_5^{(a)} = a_1 \cdot \frac{q_1^5 - 1}{q_1 - 1} = 60\,000 \cdot \frac{1.06^5 - 1}{1.06 - 1} = 338\,225.58$$

- $b_1 = 64\,000$, $q_2 = 1.03$

$$S_5^{(b)} = b_1 \cdot \frac{q_2^5 - 1}{q_2 - 1} = 64\,000 \cdot \frac{1.03^5 - 1}{1.03 - 1} = 339\,784.69$$

Poslodavac B je dao bolju ponudu. Ponuda je povoljnija za 1559.11 €.

$$339\,784.69 - 338\,225.58 = 1559.11$$