

Funkcije

FINANCIJSKA MATEMATIKA, IPS

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Zadatak 1

Neka je p cijena jednog proizvoda, a količina q prodanih proizvoda ovisi o cijeni p i dana je funkcijom $q(p) = 1200 - 4p$.

- Odredite funkciju prihoda u ovisnosti o cijeni.
- Odredite funkciju prihoda u ovisnosti o količini prodanih proizvoda.
- Odredite za koju cijenu se ostvaruje maksimalni prihod.
- Koliko iznosi maksimalni prihod i koliko se proizvoda proda u tom slučaju?
- U kojim granicama cijene i količine je prihod pozitivan?

Rješenje

$$\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}, \quad P = p \cdot q$$

a) Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) = p \cdot (1200 - 4p) = -4p^2 + 1200p$$

b) Prihod kao funkcija količine proizvodnje: $P(q) = p(q) \cdot q$

$$q = 1200 - 4p$$

$$4p = 1200 - q \quad / : 4$$

$$p = 300 - \frac{1}{4}q$$

$$P(q) = \left(300 - \frac{1}{4}q\right) \cdot q = -\frac{1}{4}q^2 + 300q$$

$$q(p) = 1200 - 4p$$

c) Treba pronaći ekstreme funkcije $P(p) = -4p^2 + 1200p$.

$$P'(p) = -8p + 1200$$

$$-8p + 1200 = 0$$

$$-8p = -1200 \quad / : (-8)$$

$$p = 150$$

$$P''(p) = -8, \quad P''(150) = -8 < 0$$

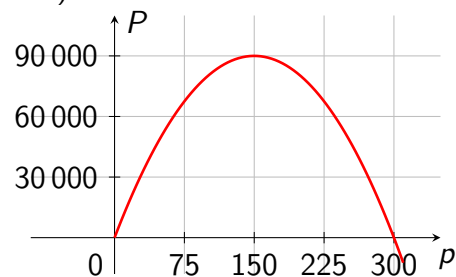
Maksimalni prihod se postiže po cijeni od 150 novčanih jedinica.

d) Maksimalni prihod iznosi 90 000 novčanih jedinica i pritom se proda ukupno 600 proizvoda.

$$P(150) = -4 \cdot 150^2 + 1200 \cdot 150 = 90\,000$$

$$q(150) = 1200 - 4 \cdot 150 = 600$$

e)

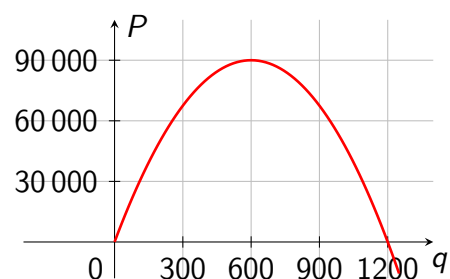


$$P(p) = -4p^2 + 1200p$$

$$-4p^2 + 1200p = 0$$

$$p_1 = 0, p_2 = 300$$

Prihod je pozitivan za cijene $p \in \langle 0, 300 \rangle$.



$$P(q) = -\frac{1}{4}q^2 + 300q$$

$$-\frac{1}{4}q^2 + 300q = 0$$

$$q_1 = 0, q_2 = 1200$$

Prihod je pozitivan za količine $q \in \langle 0, 1200 \rangle$.

4 / 50

Rješenje

a)

PROFIT (ili DOBIT) = PRIHOD – TROŠKOVI

PRIHOD = CIJENA · POTRAŽNJA

- Prihod kao funkcija potražnje

$$P(x) = p(x) \cdot x = \left(12 - \frac{1}{500}x\right) \cdot x = -\frac{1}{500}x^2 + 12x$$

- Profit kao funkcija potražnje

$$D(x) = P(x) - T(x) =$$

$$= \left(-\frac{1}{500}x^2 + 12x\right) - (0.01x^2 + 4x + 680) =$$

$$= -0.012x^2 + 8x - 680$$

6 / 50

Zadatak 2

Zadana je funkcija troškova $T(x) = 0.01x^2 + 4x + 680$. Cijena p jednog proizvoda u ovisnosti o broju prodanih proizvoda dana je funkcijom $p(x) = 12 - \frac{1}{500}x$.

- Odredite funkciju profita u ovisnosti o broju proizvoda.
- Odredite za koju količinu proizvodnje se ostvaruje maksimalni profit i koliko on iznosi.
- Koliki su troškovi u slučaju maksimalnog profita?
- Odredite za koje količine proizvodnje je profit pozitivan.

5 / 50

- Treba pronaći ekstreme funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

$$D'(x) = -0.024x + 8$$

$$-0.024x + 8 = 0$$

$$-0.024x = -8 \quad / : (-0.024)$$

$$T(x) = 0.01x^2 + 4x + 680 \quad x = 333.33$$

$$D''(x) = -0.024, \quad D''(333.33) = -0.024 < 0$$

$$D(333.33) = -0.012 \cdot 333.33^2 + 8 \cdot 333.33 - 680 = 653.33$$

Maksimalni profit se postiže za približno 333 proizvoda i iznosi 653.33 novčane jedinice.

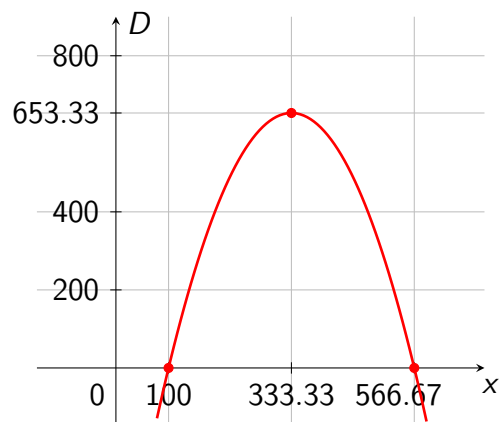
- Troškovi kod maksimalnog profita iznose 3124.41 novčanih jedinica.

$$T(333.33) = 0.01 \cdot (333.33)^2 + 4 \cdot 333.33 + 680$$

$$T(333.33) = 3124.41$$

7 / 50

d) Tražimo nultočke funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.



$$-0.012x^2 + 8x - 680 = 0$$

$$x_1 = 100, \quad x_2 = 566.67$$

$$\text{tjeme: } (333.33, 653.33)$$

Profit je pozitivan za količinu proizvodnje $x \in \langle 100, 566.67 \rangle$.

8 / 50

Zadatak 3

Da bi nešto zaradio, student kroz ljetne mjesecе prodaje ogrlice na plaži. Prošlo ljeto je prodavao ogrlice po 10 € i dnevno je prodao 20 ogrlica. Međutim, kada je povećao cijenu ogrlice za 1 €, prodaja mu se smanjila za dvije ogrlice dnevno.

- Pronađite funkciju potražnje za ogrlicama uz pretpostavku da se radi o linearnoj funkciji.
- Ako za izradu svake ogrlice student treba uložiti 6 €, po kojoj cijeni treba prodavati ogrlice da bi ostvario maksimalni profit? Koliko iznosi maksimalni profit i koliko ogrlica će prodati u tom slučaju?

10 / 50

Prirast linearne funkcije

$$f(x) = ax + b$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = a$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a \end{aligned}$$

9 / 50

Rješenje

$$a) \quad q = ap + b, \quad \Delta p = 1, \quad \Delta q = -2$$

$$a = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$q = -2p + b$$

$$q(10) = 20$$

$$-2 \cdot 10 + b = 20$$

$$b = 40$$

Funkcija potražnje za ogrlicama: $q = -2p + 40$

11 / 50

b) PROFIT (ili DOBIT) = PRIHOD – TROŠKOVI

PRIHOD = CIJENA · POTRAŽNJA

- Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) = p \cdot (-2p + 40) = -2p^2 + 40p$$

- Troškovi kao funkcija cijene

$$T(p) = 6 \cdot (-2p + 40) = -12p + 240$$

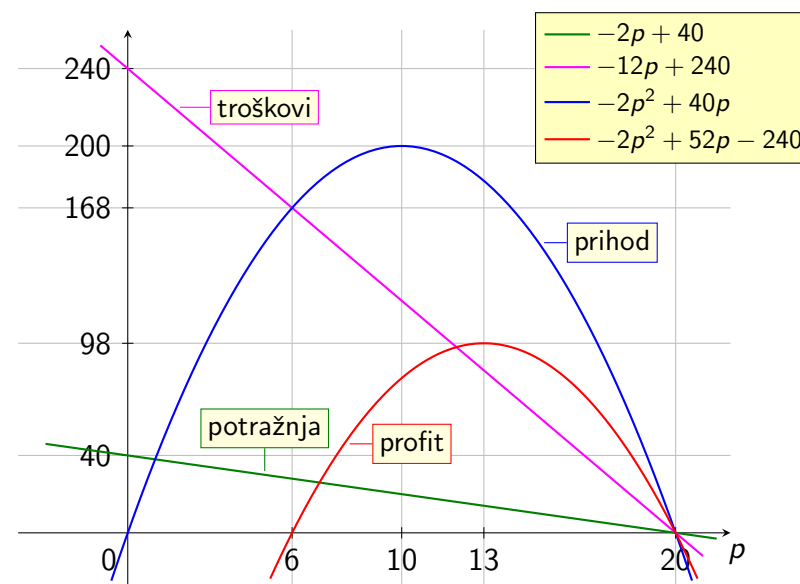
- Profit kao funkcija cijene

$$D(p) = P(p) - T(p) = (-2p^2 + 40p) - (-12p + 240)$$

$$D(p) = -2p^2 + 52p - 240$$

12 / 50

Grafovi funkcija



14 / 50

Tražimo ekstreme funkcije $D(p) = -2p^2 + 52p - 240$.

$$D'(p) = -4p + 52$$

$$-4p + 52 = 0$$

$$-4p = -52 \quad / : (-4)$$

$$p = 13$$

$$D''(p) = -4, \quad D''(13) = -4 < 0$$

$$D(13) = -2 \cdot 13^2 + 52 \cdot 13 - 240 = 98$$

Student mora ogrlice prodavati po cijeni od 13€ ukoliko želi ostvariti maksimalni profit. Maksimalni profit u tom slučaju iznosi 98€, a prodaja se ukupno 14 ogrlica.

$$q(13) = -2 \cdot 13 + 40 = 14$$

$$q = -2p + 40$$

13 / 50

Zadatak 4

Menadžer je utvrdio da je veza između prodajne cijene p robe i broja komada N dana s

$$N(p) = \frac{1500}{p^2 + 100}.$$

Prosječni troškovi za N komada robe jednaki su

$$T_p = 2 + \frac{14}{N}.$$

Odredite cijenu uz koju se ostvaruje maksimalni profit i izračunajte taj profit. Odredite za koje prodajne cijene robe je profit pozitivan.

15 / 50

Rješenje

$$N(p) = \frac{1500}{p^2 + 100}$$

$$T_p = 2 + \frac{14}{N}$$

- Funkcija prosječnih troškova

$$\text{prosječni troškovi} = \frac{\text{troškovi}}{\text{broj proizvoda}} \quad T_p(N) = \frac{T(N)}{N}$$

- Funkcija troškova

$$T(N) = T_p(N) \cdot N = \left(2 + \frac{14}{N}\right) \cdot N = 2N + 14$$

$$T(p) = 2N(p) + 14 = 2 \cdot \frac{1500}{p^2 + 100} + 14 = \frac{3000}{p^2 + 100} + 14$$

16 / 50

$$D(p) = \frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$D'(p) = \frac{1500 \cdot (p^2 + 100) - (1500p - 3000) \cdot 2p}{(p^2 + 100)^2} - 0$$

$$D'(p) = \frac{1500p^2 + 150\,000 - 3000p^2 + 6000p}{(p^2 + 100)^2}$$

$$D'(p) = \frac{-1500p^2 + 6000p + 150\,000}{(p^2 + 100)^2}$$

18 / 50

- Funkcija prihoda: PRIHOD = CIJENA · POTRAŽNJA

$$P(p) = p \cdot N(p) = p \cdot \frac{1500}{p^2 + 100} = \frac{1500p}{p^2 + 100}$$

- Funkcija profita: PROFIT = PRIHOD – TROŠKOVI

$$\begin{aligned} D(p) &= P(p) - T(p) = \frac{1500p}{p^2 + 100} - \left(\frac{3000}{p^2 + 100} + 14\right) = \\ &= \frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14 \end{aligned}$$

$$N(p) = \frac{1500}{p^2 + 100}$$

$$T(p) = \frac{3000}{p^2 + 100} + 14$$

17 / 50

$$D'(p) = 0$$

$$\frac{-1500p^2 + 6000p + 150\,000}{(p^2 + 100)^2} = 0$$

$$-1500p^2 + 6000p + 150\,000 = 0 \quad / : (-1500)$$

$$p^2 - 4p - 100 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 400}}{2}$$

$$p_1 = 12.2, \quad p_2 = -8.2$$

	0	12.2	$+\infty$
D'		+	-
D		$\nearrow$	$\searrow$

$$D(12.2) = \frac{1500 \cdot 12.2 - 3000}{12.2^2 + 100} - 14 = 47.49$$

Maksimalni profit jednak je 47.49 novčanih jedinica i ostvaruje se po cijeni od 12.2 novčanih jedinica.

19 / 50

Kada je profit pozitivan?

- Odredimo nultočke funkcije profita $D(p)$

$$D(p) = 0$$

$$\frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14 = 0 \quad / \cdot (p^2 + 100)$$

$$1500p - 3000 - 14 \cdot (p^2 + 100) = 0$$

$$-14p^2 + 1500p - 4400 = 0 \quad / : 2$$

$$-7p^2 + 750p - 2200 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-750 \pm \sqrt{750^2 - 4 \cdot (-7) \cdot (-2200)}}{-14}$$

$$p_1 = 3.02, \quad p_2 = 104.12$$

20 / 50

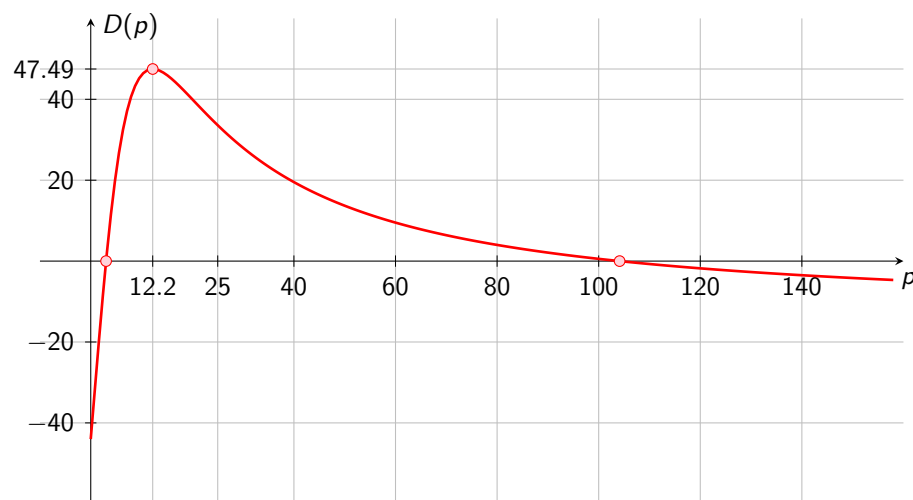
Zadatak 5

Prodaja računala u nekom poduzeću u prvom polugodištu prošle godine mijenjala se od najviše 464 komada na početku godine do najniže 282 komada na kraju polugodišta. Nakon toga do kraja godine zabilježen je linearni rast prodaje pri čemu je u prosincu prodano 564 računala. Napravite sinusoidalni model prodaje za prvo polugodište te odredite koliko je računala prodano u mjesecu listopada.

Rješenje

$$P(t) = \begin{cases} A \sin(Bt + C) + D, & t \in [0, 6] \\ Et + F, & t \in [6, 12] \end{cases}$$

22 / 50



	0	12.2	$+\infty$	
D'		+	-	
D		$\nearrow$	$\searrow$	

nultočke: 3.02, 104.12
 Profit je pozitivan za $p \in \langle 3.02, 104.12 \rangle$.

21 / 50

$$P(t) = A \sin(Bt + C) + D, \quad t \in [0, 6]$$

$$P(t) = 91 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right) + 373, \quad t \in [0, 6]$$

- **Amplituda:** $M = 464, m = 282$

$$A = \frac{M - m}{2} = \frac{464 - 282}{2} = 91$$

- **Pomak** po y-osi

$$D = M - A = 464 - 91 = 373$$

- **Ekstremi** moraju biti u točkama $t = 0$ i $t = 6$.

$$B \cdot 0 + C = \frac{\pi}{2}, \quad B \cdot 6 + C = \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{Dobivamo } C = \frac{\pi}{2} \text{ i } B = \frac{\pi}{6}.$$

23 / 50

$$P(t) = Et + F, \quad t \in [6, 12]$$

$$P(t) = 47t, \quad t \in [6, 12]$$

- $P(6) = 282, \quad P(12) = 564$

$$6E + F = 282$$

$$12E + F = 564$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 282 & 1 \\ 564 & 1 \end{vmatrix} = -282, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 282 \\ 12 & 564 \end{vmatrix} = 0$$

$$E = \frac{D_1}{D} = \frac{-282}{-6} = 47, \quad F = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{-6} = 0$$

- U desetom mjesecu prodano je $P(10) = 47 \cdot 10 = 470$ računala.

24 / 50

- Niz pozitivnih realnih brojeva

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

- Članovi niza rastu s konstantnom stopom rasta p

$$a_{n+1} = a_n + \frac{p}{100} a_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right) a_n$$

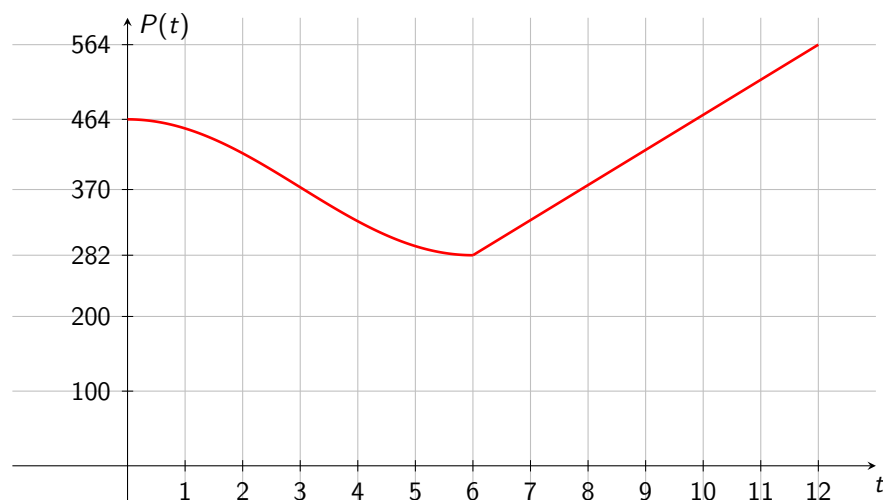
Niz (a_n) je geometrijski s kvocijentom $q = 1 + \frac{p}{100}$.

- Članovi niza padaju s konstantnom stopom pada p

$$a_{n+1} = a_n - \frac{p}{100} a_n = \left(1 - \frac{p}{100}\right) a_n$$

Niz (a_n) je geometrijski s kvocijentom $q = 1 - \frac{p}{100}$.

26 / 50



$$P(t) = \begin{cases} 91 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right) + 373, & t \in [0, 6] \\ 47t, & t \in [6, 12] \end{cases}$$

25 / 50

Eksponencijalni rast

- $a_n = a_0 \cdot q^n, \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
- Ako je $q > 1$, tada je $q = e^k$ za neki $k > 0$.

$$a_n = a_0 \cdot q^n = a_0 \cdot (e^k)^n = a_0 \cdot e^{kn}$$

Kontinuirani slučaj

- Kažemo da veličina $y(x)$ eksponencijalno raste ako vrijedi

$$y(x) = y_0 \cdot e^{kx}$$

gdje je $k > 0$ i $y_0 = y(0)$.

27 / 50

Eksponecijalni pad

- $a_n = a_0 \cdot q^n$, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
- Ako je $0 < q < 1$, tada je $q = e^{-k}$ za neki $k > 0$.

$$a_n = a_0 \cdot q^n = a_0 \cdot (e^{-k})^n = a_0 \cdot e^{-kn}$$

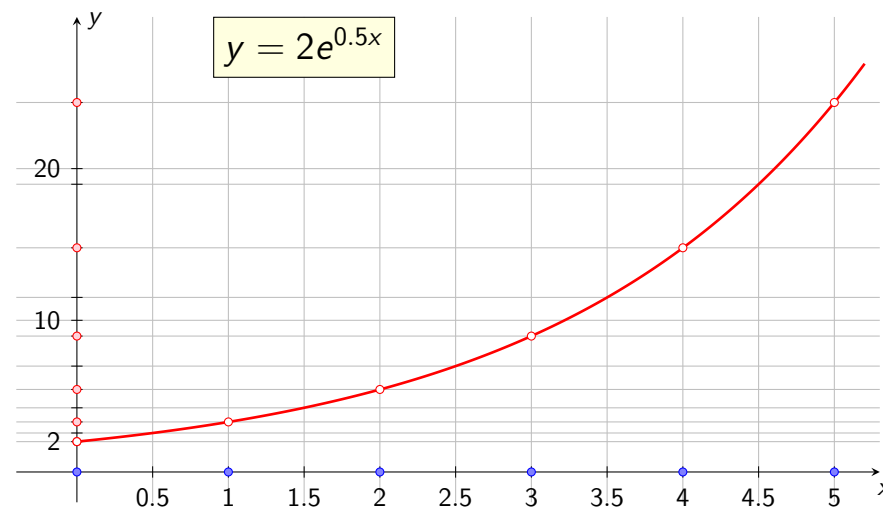
Kontinuirani slučaj

- Kažemo da veličina $y(x)$ eksponencijalno pada ako vrijedi

$$y(x) = y_0 \cdot e^{-kx}$$

gdje je $k > 0$ i $y_0 = y(0)$.

28 / 50



$$\Delta x = 1, \quad a_n = y(n)$$

(a_n) je geometrijski niz s kvocijentom $e^{0.5}$

30 / 50

$$y = y_0 \cdot e^{kx}$$

- Brzina rasta funkcije y u točki x proporcionalna je s vrijednošću funkcije u toj točki. Konstanta proporcionalnosti jednaka je k .

$$y'(x) = y_0 \cdot e^{kx} \cdot k = k \cdot y(x)$$

- **Diskretizacija**

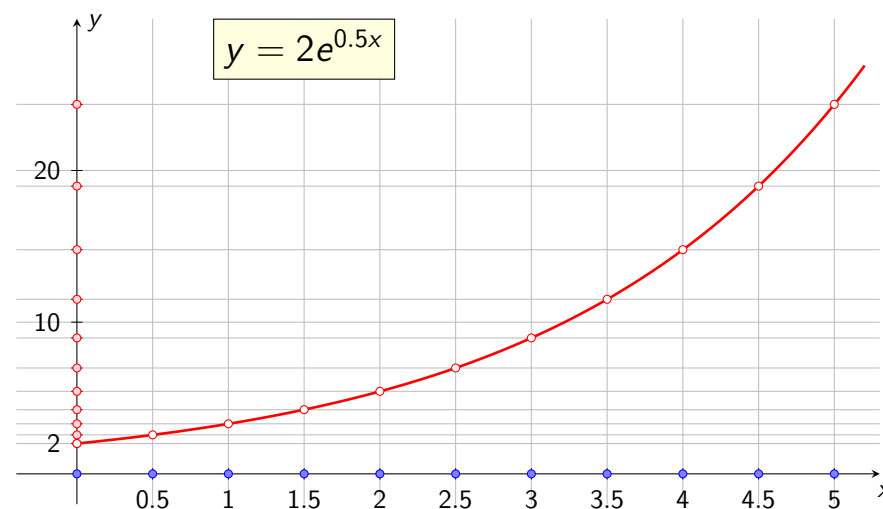
$$\frac{y(x + \Delta x)}{y(x)} = \frac{y_0 \cdot e^{k(x+\Delta x)}}{y_0 \cdot e^{kx}} = \frac{y_0 \cdot e^{kx} \cdot e^{k\Delta x}}{y_0 \cdot e^{kx}} = e^{k\Delta x} = (e^k)^{\Delta x}$$

Niz (a_n) definiran s

$$a_n = y(n \cdot \Delta x), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

za fiksni Δx je geometrijski niz s kvocijentom $q = e^{k\Delta x}$.

29 / 50



$$\Delta x = 0.5, \quad a_n = y(0.5n)$$

(a_n) je geometrijski niz s kvocijentom $e^{0.25}$

31 / 50

$$y = y_0 \cdot e^{-kx}$$

- Brzina pada funkcije y u točki x proporcionalna je s vrijednošću funkcije u toj točki. Konstanta proporcionalnosti jednaka je $-k$.

$$y'(x) = y_0 \cdot e^{-kx} \cdot (-k) = -k \cdot y(x)$$

Diskretizacija

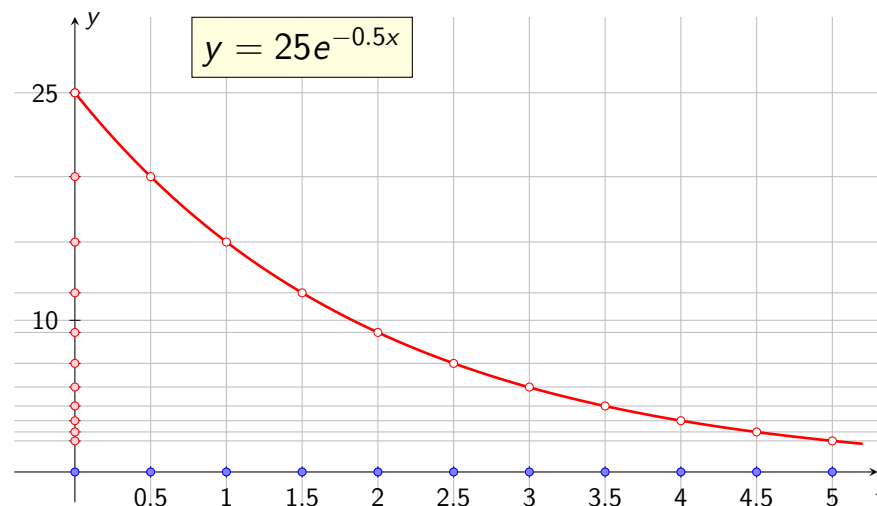
$$\frac{y(x + \Delta x)}{y(x)} = \frac{y_0 \cdot e^{-k(x+\Delta x)}}{y_0 \cdot e^{-kx}} = \frac{y_0 \cdot e^{-kx} \cdot e^{-k\Delta x}}{y_0 \cdot e^{-kx}} = e^{-k\Delta x} = (e^{-k})^{\Delta x}$$

Niz (a_n) definiran s

$$a_n = y(n \cdot \Delta x), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

za fiksni Δx je geometrijski niz s kvocijentom $q = e^{-k\Delta x}$.

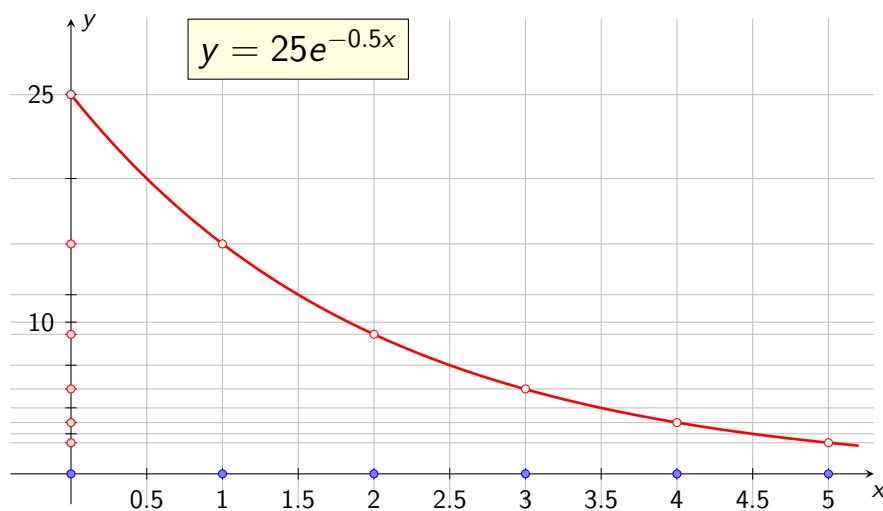
32 / 50



$$\Delta x = 0.5, \quad a_n = y(0.5n)$$

(a_n) je geometrijski niz s kvocijentom $e^{-0.25}$

34 / 50



$$\Delta x = 1, \quad a_n = y(n)$$

(a_n) je geometrijski niz s kvocijentom $e^{-0.5}$

33 / 50

Zadatak 6

Dijete će tijekom svoga života narasti najviše do visine od 185 cm. Prilikom rođenja dijete je imalo visinu od 53 cm, a godišnja stopa rasta je 28%.

a) Pronađite logističku funkciju

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

koja modelira djetetov godišnji rast, tj. $f(t)$ je visina djeteta u centimetrima nakon t godina.

b) Nakon koliko godina će dijete biti visoko 1.5 metara?

c) U kojem trenutku je najveća brzina rasta djeteta?

35 / 50

Rješenje

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

a) Odredimo najprije konstantu A .

Napomena: $k > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{A}{1 + Be^{-kt}} = \frac{A}{1 + B \cdot 0} = A$$

Iz uvjeta zadatka slijedi $A = 185$.

Odredimo sada konstantu B .

$$\begin{aligned} f(0) &= 53 & 1 + B &= \frac{185}{53} \\ \frac{185}{1 + Be^{-k \cdot 0}} &= 53 & B &= \frac{132}{53} \\ \frac{185}{1 + B} &= 53 & B &\approx 2.49057 \end{aligned}$$

36 / 50

b) 1.5 m = 150 cm

$$\begin{aligned} f(t) &= 150 & e^{-0.24686t} &= \frac{0.23333}{2.49057} \\ \frac{185}{1 + 2.49057e^{-0.24686t}} &= 150 & -0.24686t &= \ln \frac{0.23333}{2.49057} \\ 1 + 2.49057e^{-0.24686t} &= \frac{185}{150} & t &= 9.59172 \\ 2.49057e^{-0.24686t} &= \frac{37}{30} - 1 & & \\ 2.49057e^{-0.24686t} &= 0.23333 & & \end{aligned}$$

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

$$0.59172 \text{ god} = 0.59172 \cdot 12 \text{ mjeseci} = 7.10064 \text{ mjeseci}$$

Dijete će biti visoko 1.5 m nakon 9 godina i 7 mjeseci.

38 / 50

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

Konačno odredimo konstantu k .

$$\begin{aligned} p &= 28, & q &= 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{28}{100} = 1.28 \\ q &= e^k, & e^k &= 1.28, & k &= \ln 1.28, & k &\approx 0.24686 \\ f(t) &= \frac{185}{1 + 2.49057e^{-0.24686t}} \end{aligned}$$

37 / 50

c) Brzinu rasta funkcije f mjeri derivacija f' . Najveća brzina se postiže u točki infleksije.

$$\begin{aligned} A, B, k &> 0 & f(t) &= \frac{A}{1 + Be^{-kt}} & f &\text{ strogo raste} \\ f'(t) &= \frac{ABke^{-kt}}{(1 + Be^{-kt})^2} & f' &> 0 \\ f\left(\frac{\ln B}{k}\right) &= \frac{A}{2} & f''(t) &= \frac{ABk^2e^{-kt}(Be^{-kt} - 1)}{(1 + Be^{-kt})^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(t) = 0 &\Rightarrow Be^{-kt} - 1 = 0 \Rightarrow e^{-kt} = \frac{1}{B} \Rightarrow -kt = \ln \frac{1}{B} \Rightarrow \\ \Rightarrow t &= -\frac{1}{k} \ln \frac{1}{B} \Rightarrow t = -\frac{1}{k} \ln B^{-1} \Rightarrow t = \frac{\ln B}{k} \end{aligned}$$

39 / 50

U našem slučaju je

$$t = \frac{\ln B}{k} = \frac{\ln 2.49057}{0.24686} = 3.69647$$

$$0.69647 \text{ god} = 0.69647 \cdot 12 \text{ mjeseci} = 8.35764 \text{ mjeseci}$$

$$\frac{A}{2} = \frac{185}{2} = 92.5$$

Dijete najbrže raste nakon približno 3 godine i 8 mjeseci. U trenutku najbržeg rasta ima visinu od 92.5 cm.

Zadaća

Odredite prvu i drugu derivaciju te točku infleksije za konkretnu funkciju

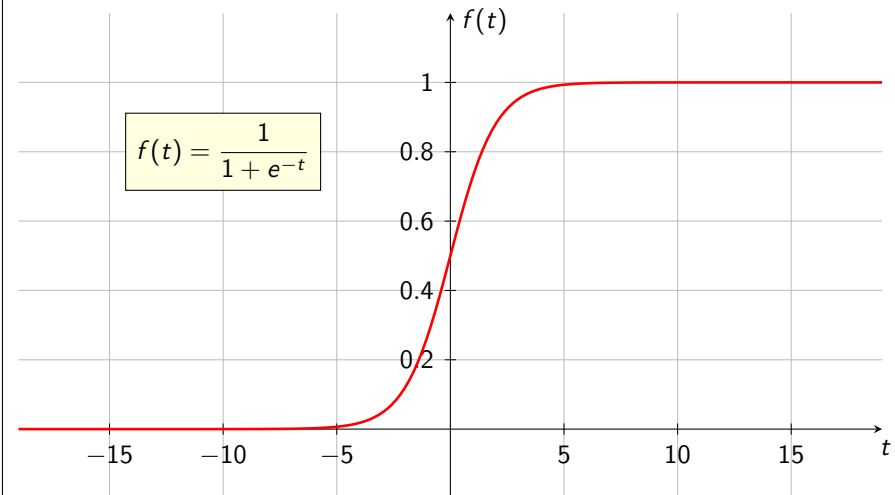
$$f(t) = \frac{185}{1 + 2.49057e^{-0.24686t}}$$

Provjerite da funkcija zaista ima točku infleksije.

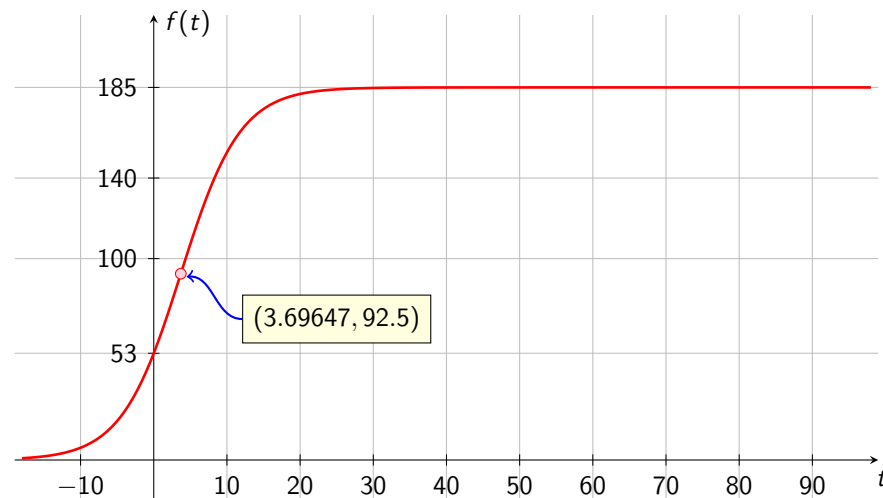
40 / 50

Logistička regresija (klasifikacija)

- **mail:** spam, nije spam **student:** kolokvirao, nije kolokvirao



42 / 50



$$f(t) = \frac{185}{1 + 2.49057e^{-0.24686t}}$$

41 / 50

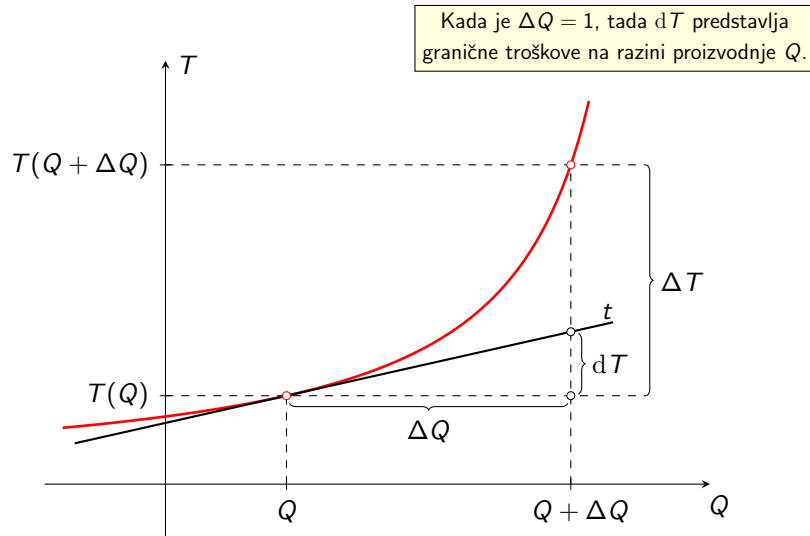
Granični trošak pokazuje za koliko se poveća trošak ako se proizvodnja poveća za jedan proizvod. Funkcija graničnih ili marginalnih troškova T_g dobije se kao derivacija funkcije troškova, tj. $T_g(Q) = T'(Q)$.

Granična potražnja pokazuje za koliko se smanji potražnja ako se cijena poveća za jednu novčanu jedinicu. Funkcija granične ili marginalne potražnje q_g dobije se kao derivacija funkcije potražnje, tj. $q_g(p) = q'(p)$.

Granična ponuda pokazuje za koliko se poveća ponuda ako se cijena poveća za jednu novčanu jedinicu. Funkcija granične ili marginalne ponude q_g dobije se kao derivacija funkcije ponude, tj. $q_g(p) = q'(p)$.

43 / 50

Vizualizacija graničnih troškova



44 / 50

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$T = \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q) \cdot (-e^{-Q})' dQ =$$

$$= (1 + Q) \cdot (-e^{-Q}) - \int (1 + Q)' \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} - \int 1 \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} + \int e^{-Q} dQ = -(1 + Q)e^{-Q} - e^{-Q} + C =$$

$$= (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

46 / 50

Zadatak 7

Zadana je funkcija graničnih troškova $T_G = (1 + Q)e^{-Q}$.

- Odredite za koliko se promijene troškovi ako se proizvodnja s dva proizvoda poveća na pet proizvoda.
- Odredite funkciju troškova ako fiksni troškovi iznose 100 novčanih jedinica.

45 / 50

$$T'(Q) = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$T(5) - T(2) = \int_2^5 T'(Q) dQ = \int_2^5 (1 + Q)e^{-Q} dQ =$$

$$= (-Q - 2)e^{-Q} \Big|_2^5 = (-5 - 2)e^{-5} - (-2 - 2)e^{-2} =$$

$$= 4e^{-2} - 7e^{-5} \approx 0.49418$$

Troškovi se promijene za približno 0.49 novčanih jedinica.

Ova promjena troškova vrijedi za svaki $C \in \mathbb{R}$.

47 / 50

b)

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$T(0) = 100$$

$$(-0 - 2) \cdot e^{-0} + C = 100$$

$$-2 + C = 100$$

$$C = 102$$

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + 102$$

48 / 50

Domaća zadaća

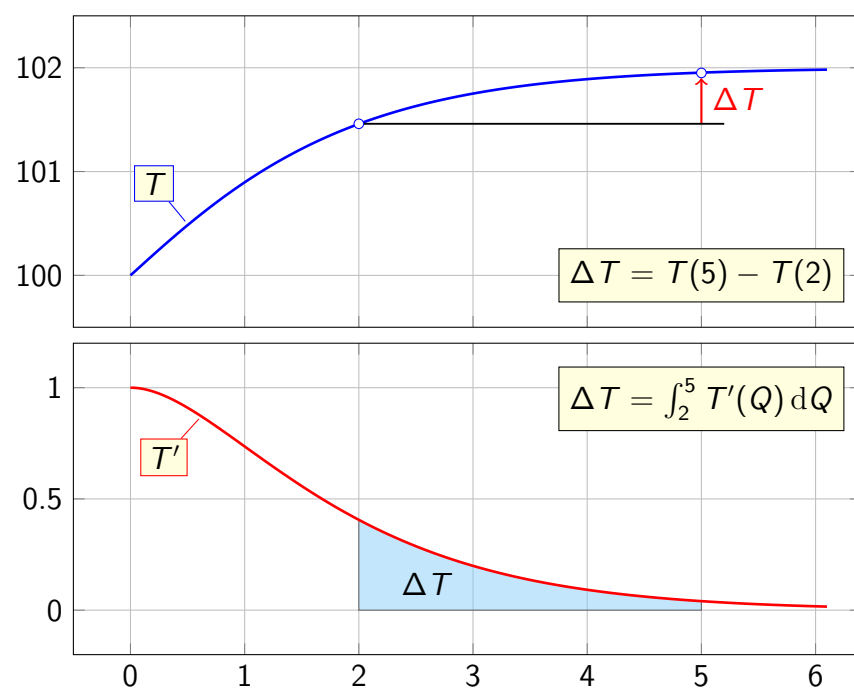
Zadatak 8

Zadana je funkcija troškova

$$T(Q) = 2Q^3 + 5Q^2 + 3Q + 1.$$

- Odredite granične troškove na razini proizvodnje od 5 proizvoda i interpretirajte dobiveni rezultat.
- Odredite stvarnu promjenu troškova kada se proizvodnja s 5 proizvoda poveća na 6 proizvoda.
- Usporedite rezultate iz a) i b) dijela zadatka i prikažite ih grafički na slici zajedno s grafom funkcije troškova.

50 / 50



49 / 50