

Funkcije

FINANCIJSKA MATEMATIKA, IPS

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Sadržaj

prvi zadatak

drugi zadatak

treći zadatak

četvrti zadatak

peti zadatak

Eksponencijalni rast i pad

šesti zadatak

Granične funkcije

sedmi zadatak

prvi zadatak

Zadatak 1

Neka je p cijena jednog proizvoda, a količina q prodanih proizvoda ovisi o cijeni p i dana je funkcijom $q(p) = 1200 - 4p$.

- a) *Odredite funkciju prihoda u ovisnosti o cijeni.*
- b) *Odredite funkciju prihoda u ovisnosti o količini prodanih proizvoda.*
- c) *Odredite za koju cijenu se ostvaruje maksimalni prihod.*
- d) *Koliko iznosi maksimalni prihod i koliko se proizvoda proda u tom slučaju?*
- e) *U kojim granicama cijene i količine je prihod pozitivan?*

Rješenje

$$\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}, \quad P = p \cdot q$$

Rješenje

$$\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}, \quad P = p \cdot q$$

a) Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) =$$

Rješenje

$$\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}, \quad P = p \cdot q$$

a) Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) = p \cdot (1200 - 4p)$$

Rješenje

$$\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}, \quad P = p \cdot q$$

a) Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) = p \cdot (1200 - 4p) = -4p^2 + 1200p$$

Rješenje

$$\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}, \quad P = p \cdot q$$

a) Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) = p \cdot (1200 - 4p) = -4p^2 + 1200p$$

b) Prihod kao funkcija količine proizvodnje: $P(q) = p(q) \cdot q$

Rješenje

$$\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}, \quad P = p \cdot q$$

a) Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) = p \cdot (1200 - 4p) = -4p^2 + 1200p$$

b) Prihod kao funkcija količine proizvodnje: $P(q) = p(q) \cdot q$

$$q = 1200 - 4p$$

Rješenje

$$\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}, \quad P = p \cdot q$$

a) Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) = p \cdot (1200 - 4p) = -4p^2 + 1200p$$

b) Prihod kao funkcija količine proizvodnje: $P(q) = p(q) \cdot q$

$$q = 1200 - 4p$$

$$4p = 1200 - q$$

Rješenje

$$\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}, \quad P = p \cdot q$$

a) Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) = p \cdot (1200 - 4p) = -4p^2 + 1200p$$

b) Prihod kao funkcija količine proizvodnje: $P(q) = p(q) \cdot q$

$$q = 1200 - 4p$$

$$4p = 1200 - q \quad / : 4$$

$$p = 300 - \frac{1}{4}q$$

Rješenje

$$\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}, \quad P = p \cdot q$$

a) Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) = p \cdot (1200 - 4p) = -4p^2 + 1200p$$

b) Prihod kao funkcija količine proizvodnje: $P(q) = p(q) \cdot q$

$$q = 1200 - 4p$$

$$4p = 1200 - q \quad / : 4$$

$$p = 300 - \frac{1}{4}q$$

$$P(q) = \left(300 - \frac{1}{4}q \right) \cdot q$$

Rješenje

$$\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}, \quad P = p \cdot q$$

a) Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) = p \cdot (1200 - 4p) = -4p^2 + 1200p$$

b) Prihod kao funkcija količine proizvodnje: $P(q) = p(q) \cdot q$

$$q = 1200 - 4p$$

$$4p = 1200 - q \quad / : 4$$

$$p = 300 - \frac{1}{4}q$$

$$P(q) = \left(300 - \frac{1}{4}q \right) \cdot q = -\frac{1}{4}q^2 + 300q$$

c) Treba pronaći ekstreme funkcije $P(p) = -4p^2 + 1200p$.

c) Treba pronaći ekstreme funkcije $P(p) = -4p^2 + 1200p$.

$$P'(p) =$$

c) Treba pronaći ekstreme funkcije $P(p) = -4p^2 + 1200p$.

$$P'(p) = -8p + 1200$$

c) Treba pronaći ekstreme funkcije $P(p) = -4p^2 + 1200p$.

$$P'(p) = -8p + 1200$$

$$-8p + 1200 = 0$$

c) Treba pronaći ekstreme funkcije $P(p) = -4p^2 + 1200p$.

$$P'(p) = -8p + 1200$$

$$-8p + 1200 = 0$$

$$-8p = -1200$$

c) Treba pronaći ekstreme funkcije $P(p) = -4p^2 + 1200p$.

$$P'(p) = -8p + 1200$$

$$-8p + 1200 = 0$$

$$-8p = -1200 \quad / : (-8)$$

c) Treba pronaći ekstreme funkcije $P(p) = -4p^2 + 1200p$.

$$P'(p) = -8p + 1200$$

$$-8p + 1200 = 0$$

$$-8p = -1200 \quad / : (-8)$$

$$p = 150$$

c) Treba pronaći ekstreme funkcije $P(p) = -4p^2 + 1200p$.

$$P'(p) = -8p + 1200$$

$$-8p + 1200 = 0$$

$$-8p = -1200 \quad / : (-8)$$

$$p = 150$$

$$P''(p) = -8, \quad P''(150) = -8 < 0$$

c) Treba pronaći ekstreme funkcije $P(p) = -4p^2 + 1200p$.

$$P'(p) = -8p + 1200$$

$$-8p + 1200 = 0$$

$$-8p = -1200 \quad / : (-8)$$

$$p = 150$$

$$P''(p) = -8, \quad P''(150) = -8 < 0$$

Maksimalni prihod se postiže po cijeni od 150 novčanih jedinica.

c) Treba pronaći ekstreme funkcije $P(p) = -4p^2 + 1200p$.

$$P'(p) = -8p + 1200$$

$$-8p + 1200 = 0$$

$$-8p = -1200 \quad / : (-8)$$

$$p = 150$$

$$P''(p) = -8, \quad P''(150) = -8 < 0$$

Maksimalni prihod se postiže po cijeni od 150 novčanih jedinica.

d) Maksimalni prihod iznosi

c) Treba pronaći ekstreme funkcije $P(p) = -4p^2 + 1200p$.

$$P'(p) = -8p + 1200$$

$$-8p + 1200 = 0$$

$$-8p = -1200 \quad / : (-8)$$

$$p = 150$$

$$P''(p) = -8, \quad P''(150) = -8 < 0$$

Maksimalni prihod se postiže po cijeni od 150 novčanih jedinica.

d) Maksimalni prihod iznosi

$$P(150) = -4 \cdot 150^2 + 1200 \cdot 150$$

c) Treba pronaći ekstreme funkcije $P(p) = -4p^2 + 1200p$.

$$P'(p) = -8p + 1200$$

$$-8p + 1200 = 0$$

$$-8p = -1200 \quad / : (-8)$$

$$p = 150$$

$$P''(p) = -8, \quad P''(150) = -8 < 0$$

Maksimalni prihod se postiže po cijeni od 150 novčanih jedinica.

d) Maksimalni prihod iznosi 90 000 novčanih jedinica

$$P(150) = -4 \cdot 150^2 + 1200 \cdot 150 = 90\,000$$

c) Treba pronaći ekstreme funkcije $P(p) = -4p^2 + 1200p$.

$$P'(p) = -8p + 1200$$

$$-8p + 1200 = 0$$

$$-8p = -1200 \quad / : (-8)$$

$$p = 150$$

$$P''(p) = -8, \quad P''(150) = -8 < 0$$

Maksimalni prihod se postiže po cijeni od 150 novčanih jedinica.

d) Maksimalni prihod iznosi 90 000 novčanih jedinica i pritom se prodaje ukupno

$$P(150) = -4 \cdot 150^2 + 1200 \cdot 150 = 90\,000$$

$$q(p) = 1200 - 4p$$

c) Treba pronaći ekstreme funkcije $P(p) = -4p^2 + 1200p$.

$$P'(p) = -8p + 1200$$

$$-8p + 1200 = 0$$

$$-8p = -1200 \quad / : (-8)$$

$$p = 150$$

$$P''(p) = -8, \quad P''(150) = -8 < 0$$

Maksimalni prihod se postiže po cijeni od 150 novčanih jedinica.

d) Maksimalni prihod iznosi 90 000 novčanih jedinica i pritom se proda ukupno

$$P(150) = -4 \cdot 150^2 + 1200 \cdot 150 = 90\,000$$

$$q(150) = 1200 - 4 \cdot 150$$

$$q(p) = 1200 - 4p$$

c) Treba pronaći ekstreme funkcije $P(p) = -4p^2 + 1200p$.

$$P'(p) = -8p + 1200$$

$$-8p + 1200 = 0$$

$$-8p = -1200 \quad / : (-8)$$

$$p = 150$$

$$P''(p) = -8, \quad P''(150) = -8 < 0$$

Maksimalni prihod se postiže po cijeni od 150 novčanih jedinica.

d) Maksimalni prihod iznosi 90 000 novčanih jedinica i pritom se prodaje ukupno 600 proizvoda.

$$P(150) = -4 \cdot 150^2 + 1200 \cdot 150 = 90\,000$$

$$q(150) = 1200 - 4 \cdot 150 = 600$$

e)

$$P(p) = -4p^2 + 1200p$$

e)

$$\begin{aligned}P(p) &= -4p^2 + 1200p \\ -4p^2 + 1200p &= 0\end{aligned}$$

e)

$$P(p) = -4p^2 + 1200p$$

$$-4p^2 + 1200p = 0$$

$$-4p^2 + 1200p = 0$$

e)

$$P(p) = -4p^2 + 1200p$$

$$-4p^2 + 1200p = 0$$

$$-4p^2 + 1200p = 0 \quad / : (-4)$$

$$p^2 - 300p = 0$$

e)

$$P(p) = -4p^2 + 1200p$$
$$-4p^2 + 1200p = 0$$

$$-4p^2 + 1200p = 0 \quad / : (-4)$$

$$p^2 - 300p = 0$$

$$p \cdot (p - 300) = 0$$

e)

$$P(p) = -4p^2 + 1200p$$
$$-4p^2 + 1200p = 0$$

$$-4p^2 + 1200p = 0 \quad / : (-4)$$

$$p^2 - 300p = 0$$

$$p \cdot (p - 300) = 0$$

$$p = 0 \quad p - 300 = 0$$

e)

$$P(p) = -4p^2 + 1200p$$
$$-4p^2 + 1200p = 0$$

$$-4p^2 + 1200p = 0 \quad / : (-4)$$

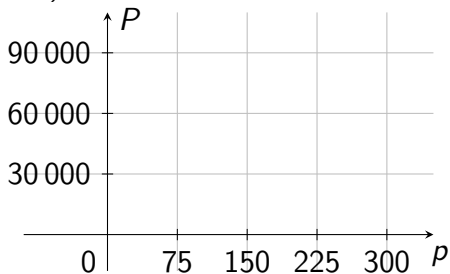
$$p^2 - 300p = 0$$

$$p \cdot (p - 300) = 0$$

$$p = 0 \quad p - 300 = 0$$

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 300$$

e)

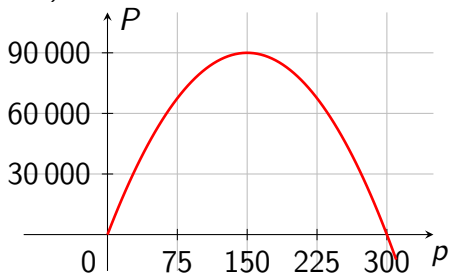


$$P(p) = -4p^2 + 1200p$$

$$-4p^2 + 1200p = 0$$

$$p_1 = 0, p_2 = 300$$

e)

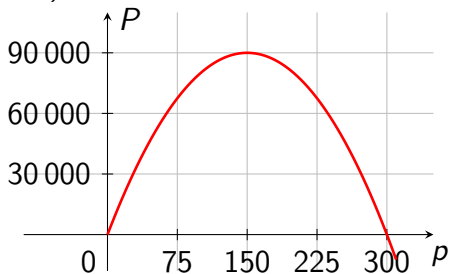


$$P(p) = -4p^2 + 1200p$$

$$-4p^2 + 1200p = 0$$

$$p_1 = 0, p_2 = 300$$

e)



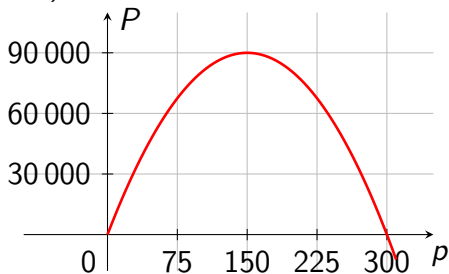
$$P(p) = -4p^2 + 1200p$$

$$-4p^2 + 1200p = 0$$

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 300$$

Prihod je pozitivan za cijene
 $p \in \langle 0, 300 \rangle$.

e)



$$P(p) = -4p^2 + 1200p$$

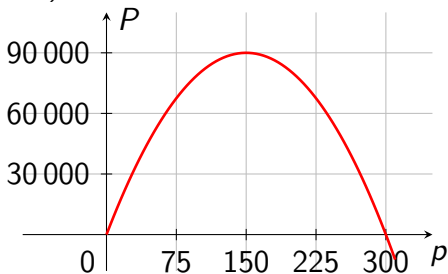
$$-4p^2 + 1200p = 0$$

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 300$$

Prihod je pozitivan za cijene
 $p \in \langle 0, 300 \rangle$.

$$P(q) = -\frac{1}{4}q^2 + 300q$$

e)



$$P(p) = -4p^2 + 1200p$$

$$-4p^2 + 1200p = 0$$

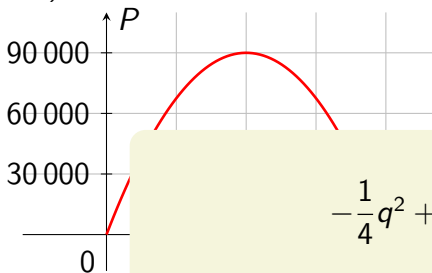
$$p_1 = 0, \quad p_2 = 300$$

Prihod je pozitivan za cijene
 $p \in \langle 0, 300 \rangle$.

$$P(q) = -\frac{1}{4}q^2 + 300q$$

$$-\frac{1}{4}q^2 + 300q = 0$$

e)



$$P(p) = -4p^2 + 1200p$$

$$-4p^2 + 1200p = 0$$

$$-\frac{1}{4}q^2 + 300q = 0$$

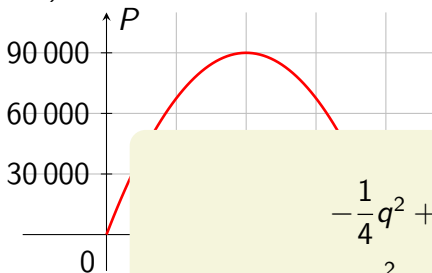
300

cijene

300q

= 0

e)



$$P(p) = -4p^2 + 1200p$$

$$-4p^2 + 1200p = 0$$

$$-\frac{1}{4}q^2 + 300q = 0 \quad / \cdot (-4)$$

$$q^2 - 1200q = 0$$

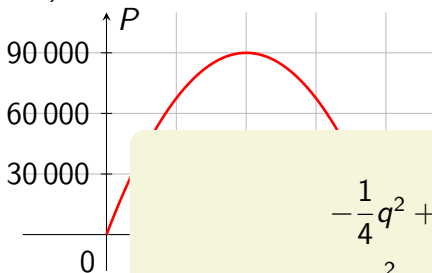
300

cijene

300q

= 0

e)



$$P(p) = -4p^2 + 1200p$$

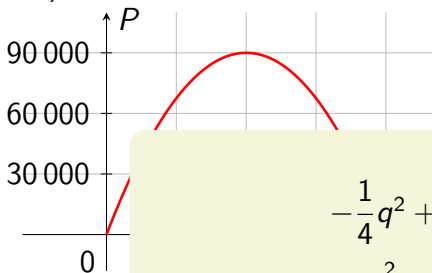
$$-4p^2 + 1200p = 0$$

$$-\frac{1}{4}q^2 + 300q = 0 \quad / \cdot (-4)$$

$$q^2 - 1200q = 0$$

$$q \cdot (q - 1200) = 0$$

e)



$$P(p) = -4p^2 + 1200p$$

$$-4p^2 + 1200p = 0$$

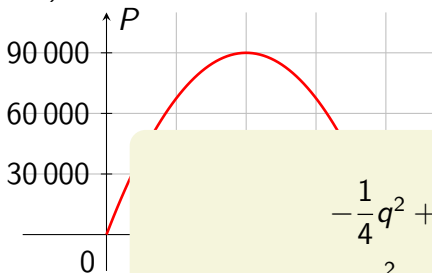
$$-\frac{1}{4}q^2 + 300q = 0 \quad / \cdot (-4)$$

$$q^2 - 1200q = 0$$

$$q \cdot (q - 1200) = 0$$

$$q = 0 \quad q - 1200 = 0$$

e)



$$P(p) = -4p^2 + 1200p$$

$$-4p^2 + 1200p = 0$$

300

cijene

$$-\frac{1}{4}q^2 + 300q = 0 \quad / \cdot (-4)$$

$$q^2 - 1200q = 0$$

$$q \cdot (q - 1200) = 0$$

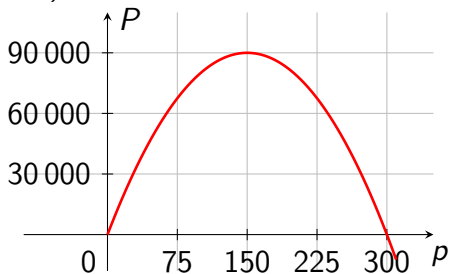
$$q = 0 \quad q - 1200 = 0$$

300q

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 1200$$

= 0

e)

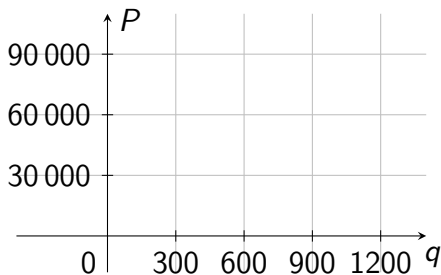


$$P(p) = -4p^2 + 1200p$$

$$-4p^2 + 1200p = 0$$

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 300$$

Prihod je pozitivan za cijene
 $p \in \langle 0, 300 \rangle$.

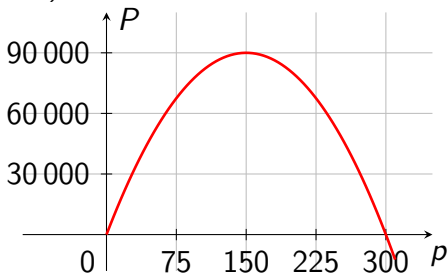


$$P(q) = -\frac{1}{4}q^2 + 300q$$

$$-\frac{1}{4}q^2 + 300q = 0$$

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 1200$$

e)

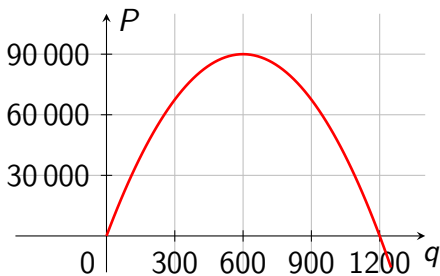


$$P(p) = -4p^2 + 1200p$$

$$-4p^2 + 1200p = 0$$

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 300$$

Prihod je pozitivan za cijene
 $p \in \langle 0, 300 \rangle$.

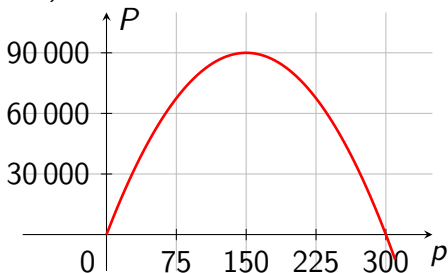


$$P(q) = -\frac{1}{4}q^2 + 300q$$

$$-\frac{1}{4}q^2 + 300q = 0$$

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 1200$$

e)

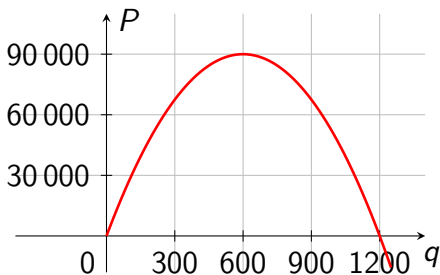


$$P(p) = -4p^2 + 1200p$$

$$-4p^2 + 1200p = 0$$

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 300$$

Prihod je pozitivan za cijene
 $p \in \langle 0, 300 \rangle$.



$$P(q) = -\frac{1}{4}q^2 + 300q$$

$$-\frac{1}{4}q^2 + 300q = 0$$

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 1200$$

Prihod je pozitivan za količine
 $q \in \langle 0, 1200 \rangle$.

drugi zadatak

Zadatak 2

Zadana je funkcija troškova $T(x) = 0.01x^2 + 4x + 680$. Cijena p jednog proizvoda u ovisnosti o broju prodanih proizvoda dana je funkcijom $p(x) = 12 - \frac{1}{500}x$.

- a) *Odredite funkciju profita u ovisnosti o broju proizvoda.*
- b) *Odredite za koju količinu proizvodnje se ostvaruje maksimalni profit i koliko on iznosi.*
- c) *Koliki su troškovi u slučaju maksimalnog profita?*
- d) *Odredite za koje količine proizvodnje je profit pozitivan.*

Rješenje

a)

$$\text{PROFIT (ili DOBIT)} = \text{PRIHOD} - \text{TROŠKOVI}$$

$$\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}$$

Rješenje

a)

$$\text{PROFIT (ili DOBIT)} = \text{PRIHOD} - \text{TROŠKOVI}$$

$$\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}$$

- Prihod kao funkcija potražnje

$$P(x) = p(x) \cdot x =$$

Rješenje

a)

$$\text{PROFIT (ili DOBIT)} = \text{PRIHOD} - \text{TROŠKOVI}$$

$$\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}$$

- Prihod kao funkcija potražnje

$$P(x) = p(x) \cdot x = \left(12 - \frac{1}{500}x\right) \cdot x$$

Rješenje

a)

$$\text{PROFIT (ili DOBIT)} = \text{PRIHOD} - \text{TROŠKOVI}$$

$$\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}$$

- Prihod kao funkcija potražnje

$$P(x) = p(x) \cdot x = \left(12 - \frac{1}{500}x\right) \cdot x = -\frac{1}{500}x^2 + 12x$$

Rješenje

a)

$$\text{PROFIT (ili DOBIT)} = \text{PRIHOD} - \text{TROŠKOVI}$$

$$\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}$$

- Prihod kao funkcija potražnje

$$P(x) = p(x) \cdot x = \left(12 - \frac{1}{500}x\right) \cdot x = -\frac{1}{500}x^2 + 12x$$

- Profit kao funkcija potražnje

$$D(x) = P(x) - T(x) =$$

Rješenje

a)

$$\text{PROFIT (ili DOBIT)} = \text{PRIHOD} - \text{TROŠKOVI}$$

$$\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}$$

- Prihod kao funkcija potražnje

$$P(x) = p(x) \cdot x = \left(12 - \frac{1}{500}x\right) \cdot x = -\frac{1}{500}x^2 + 12x$$

- Profit kao funkcija potražnje

$$\begin{aligned} D(x) &= P(x) - T(x) = \\ &= \left(-\frac{1}{500}x^2 + 12x\right) - (0.01x^2 + 4x + 680) \end{aligned}$$

Rješenje

a)

$$\text{PROFIT (ili DOBIT)} = \text{PRIHOD} - \text{TROŠKOVI}$$

$$\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}$$

- Prihod kao funkcija potražnje

$$P(x) = p(x) \cdot x = \left(12 - \frac{1}{500}x\right) \cdot x = -\frac{1}{500}x^2 + 12x$$

- Profit kao funkcija potražnje

$$\begin{aligned} D(x) &= P(x) - T(x) = \\ &= \left(-\frac{1}{500}x^2 + 12x\right) - (0.01x^2 + 4x + 680) = \\ &= -0.012x^2 + 8x - 680 \end{aligned}$$

b) Treba pronaći ekstreme funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

b) Treba pronaći ekstreme funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

$$D'(x) =$$

b) Treba pronaći ekstreme funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

$$D'(x) = -0.024x + 8$$

b) Treba pronaći ekstreme funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

$$D'(x) = -0.024x + 8$$

$$-0.024x + 8 = 0$$

b) Treba pronaći ekstreme funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

$$D'(x) = -0.024x + 8$$

$$-0.024x + 8 = 0$$

$$-0.024x = -8$$

b) Treba pronaći ekstreme funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

$$D'(x) = -0.024x + 8$$

$$-0.024x + 8 = 0$$

$$-0.024x = -8 \quad / : (-0.024)$$

b) Treba pronaći ekstreme funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

$$D'(x) = -0.024x + 8$$

$$-0.024x + 8 = 0$$

$$-0.024x = -8 \quad / : (-0.024)$$

$$x = 333.33$$

b) Treba pronaći ekstreme funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

$$D'(x) = -0.024x + 8$$

$$-0.024x + 8 = 0$$

$$-0.024x = -8 \quad / : (-0.024)$$

$$x = 333.33$$

$$D''(x) = -0.024, \quad D''(333.33) = -0.024 < 0$$

b) Treba pronaći ekstreme funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

$$D'(x) = -0.024x + 8$$

$$-0.024x + 8 = 0$$

$$-0.024x = -8 \quad / : (-0.024)$$

$$x = 333.33$$

$$D''(x) = -0.024, \quad D''(333.33) = -0.024 < 0$$

Maksimalni profit se postiže za približno 333 proizvoda i iznosi

b) Treba pronaći ekstreme funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

$$D'(x) = -0.024x + 8$$

$$-0.024x + 8 = 0$$

$$-0.024x = -8 \quad / : (-0.024)$$

$$x = 333.33$$

$$D''(x) = -0.024, \quad D''(333.33) = -0.024 < 0$$

$$D(333.33) = -0.012 \cdot 333.33^2 + 8 \cdot 333.33 - 680$$

Maksimalni profit se postiže za približno 333 proizvoda i iznosi

b) Treba pronaći ekstreme funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

$$D'(x) = -0.024x + 8$$

$$-0.024x + 8 = 0$$

$$-0.024x = -8 \quad / : (-0.024)$$

$$x = 333.33$$

$$D''(x) = -0.024, \quad D''(333.33) = -0.024 < 0$$

$$D(333.33) = -0.012 \cdot 333.33^2 + 8 \cdot 333.33 - 680 = 653.33$$

Maksimalni profit se postiže za približno 333 proizvoda i iznosi 653.33 novčane jedinice.

b) Treba pronaći ekstreme funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

$$D'(x) = -0.024x + 8$$

$$-0.024x + 8 = 0$$

$$-0.024x = -8 \quad / : (-0.024)$$

$$T(x) = 0.01x^2 + 4x + 680 \quad x = 333.33$$

$$D''(x) = -0.024, \quad D''(333.33) = -0.024 < 0$$

$$D(333.33) = -0.012 \cdot 333.33^2 + 8 \cdot 333.33 - 680 = 653.33$$

Maksimalni profit se postiže za približno 333 proizvoda i iznosi 653.33 novčane jedinice.

c) Troškovi kod maksimalnog profita iznose

$$T(333.33) =$$

b) Treba pronaći ekstreme funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

$$D'(x) = -0.024x + 8$$

$$-0.024x + 8 = 0$$

$$-0.024x = -8 \quad / : (-0.024)$$

$$T(x) = 0.01x^2 + 4x + 680 \quad x = 333.33$$

$$D''(x) = -0.024, \quad D''(333.33) = -0.024 < 0$$

$$D(333.33) = -0.012 \cdot 333.33^2 + 8 \cdot 333.33 - 680 = 653.33$$

Maksimalni profit se postiže za približno 333 proizvoda i iznosi 653.33 novčane jedinice.

c) Troškovi kod maksimalnog profita iznose

$$T(333.33) = 0.01 \cdot (333.33)^2 + 4 \cdot 333.33 + 680$$

b) Treba pronaći ekstreme funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

$$D'(x) = -0.024x + 8$$

$$-0.024x + 8 = 0$$

$$-0.024x = -8 \quad / : (-0.024)$$

$$T(x) = 0.01x^2 + 4x + 680 \quad x = 333.33$$

$$D''(x) = -0.024, \quad D''(333.33) = -0.024 < 0$$

$$D(333.33) = -0.012 \cdot 333.33^2 + 8 \cdot 333.33 - 680 = 653.33$$

Maksimalni profit se postiže za približno 333 proizvoda i iznosi 653.33 novčane jedinice.

c) Troškovi kod maksimalnog profita iznose 3124.41 novčanih jedinica.

$$T(333.33) = 0.01 \cdot (333.33)^2 + 4 \cdot 333.33 + 680$$

$$T(333.33) = 3124.41$$

d) Tražimo nultočke funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

$$-0.012x^2 + 8x - 680 = 0$$

d) Tražimo nultočke funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

$$-0.012x^2 + 8x - 680 = 0$$

$$0 = 0$$

d) Tražimo nultočke funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

$$-0.012x^2 + 8x - 680 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-0.012) \cdot (-680)}}{2 \cdot (-0.012)} \quad 0 = 0$$

d) Tražimo nultočke funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

$$-0.012x^2 + 8x - 680 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-0.012) \cdot (-680)}}{2 \cdot (-0.012)} \quad 0 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 32.64}}{-0.024}$$

d) Tražimo nultočke funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

$$-0.012x^2 + 8x - 680 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-0.012) \cdot (-680)}}{2 \cdot (-0.012)} \quad 0 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 32.64}}{-0.024}$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{31.36}}{-0.024}$$

d) Tražimo nultočke funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

$$-0.012x^2 + 8x - 680 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-0.012) \cdot (-680)}}{2 \cdot (-0.012)} \quad 0 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 32.64}}{-0.024}$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{31.36}}{-0.024}$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm 5.6}{-0.024}$$

d) Tražimo nultočke funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

$$-0.012x^2 + 8x - 680 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-0.012) \cdot (-680)}}{2 \cdot (-0.012)} \quad 0 = 0$$

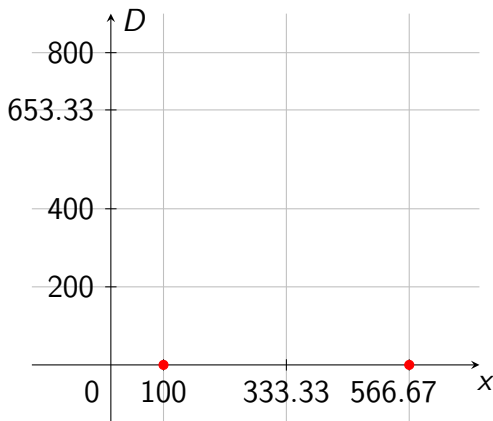
$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 32.64}}{-0.024}$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{31.36}}{-0.024}$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm 5.6}{-0.024}$$

$$x_1 = 100, \quad x_2 = 566.67$$

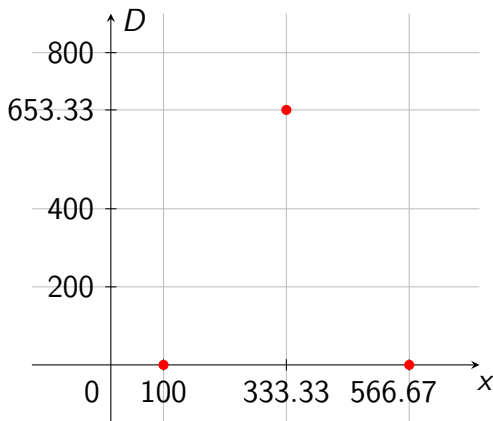
d) Tražimo nultočke funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.



$$-0.012x^2 + 8x - 680 = 0$$

$$x_1 = 100, \quad x_2 = 566.67$$

d) Tražimo nultočke funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

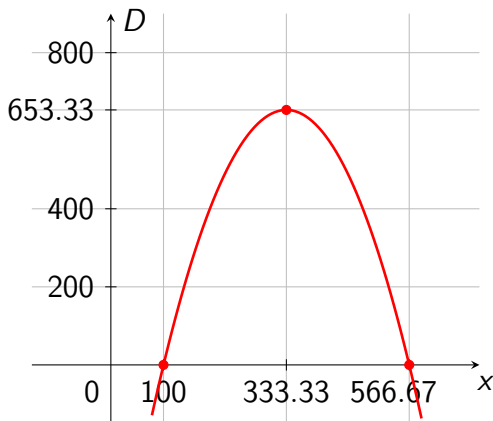


$$-0.012x^2 + 8x - 680 = 0$$

$$x_1 = 100, \quad x_2 = 566.67$$

tjeme: $(333.33, 653.33)$

d) Tražimo nultočke funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.

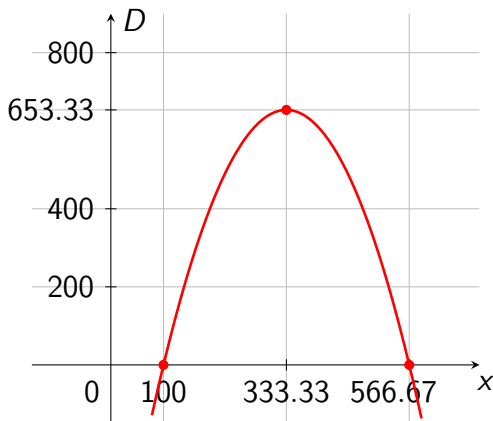


$$-0.012x^2 + 8x - 680 = 0$$

$$x_1 = 100, \quad x_2 = 566.67$$

tjeme: $(333.33, 653.33)$

d) Tražimo nultočke funkcije $D(x) = -0.012x^2 + 8x - 680$.



$$-0.012x^2 + 8x - 680 = 0$$

$$x_1 = 100, \quad x_2 = 566.67$$

tjeme: $(333.33, 653.33)$

Profit je pozitivan za količinu proizvodnje $x \in \langle 100, 566.67 \rangle$.

treći zadatak

Prirast linearne funkcije

$$f(x) = ax + b$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

Prirast linearne funkcije

$$f(x) = ax + b$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} =$$

Prirast linearne funkcije

$$f(x) = ax + b$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} =$$

Prirast linearne funkcije

$$f(x) = ax + b$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\quad}{x_2 - x_1}$$

Prirast linearne funkcije

$$f(x) = ax + b$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b)}{x_2 - x_1}$$

Prirast linearne funkcije

$$f(x) = ax + b$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1}$$

Prirast linearne funkcije

$$f(x) = ax + b$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} =$$

Prirast linearne funkcije

$$f(x) = ax + b$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} =\end{aligned}$$

Prirast linearne funkcije

$$f(x) = ax + b$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}\end{aligned}$$

Prirast linearne funkcije

$$f(x) = ax + b$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a\end{aligned}$$

Prirast linearne funkcije

$$f(x) = ax + b$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = a$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a\end{aligned}$$

Zadatak 3

Da bi nešto zaradio, student kroz ljetne mjesecе prodaje ogrlice na plaži. Prošlo ljeto je prodavao ogrlice po 10 € i dnevno je prodao 20 ogrlica. Međutim, kada je povećao cijenu ogrlice za 1 €, prodaja mu se smanjila za dvije ogrlice dnevno.

- a) Pronađite funkciju potražnje za ogrlicama uz pretpostavku da se radi o linearnoj funkciji.*
- b) Ako za izradu svake ogrlice student treba uložiti 6 €, po kojoj cijeni treba prodavati ogrlice da bi ostvario maksimalni profit? Koliko iznosi maksimalni profit i koliko ogrlica će prodati u tom slučaju?*

Rješenje

$$\text{a) } q = ap + b,$$

$$a = \frac{\Delta q}{\Delta p}$$

Rješenje

$$\text{a) } q = ap + b, \quad \Delta p = 1,$$

$$a = \frac{\Delta q}{\Delta p}$$

Rješenje

$$\text{a) } q = ap + b, \quad \Delta p = 1, \quad \Delta q = -2$$

$$a = \frac{\Delta q}{\Delta p}$$

Rješenje

$$\text{a) } q = ap + b, \quad \Delta p = 1, \quad \Delta q = -2$$

$$a = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{-2}{1}$$

Rješenje

$$\text{a) } q = ap + b, \quad \Delta p = 1, \quad \Delta q = -2$$

$$a = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{-2}{1} = -2$$

Rješenje

$$\text{a) } q = ap + b, \quad \Delta p = 1, \quad \Delta q = -2$$

$$a = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$q = -2p + b$$

Rješenje

$$\text{a) } q = ap + b, \quad \Delta p = 1, \quad \Delta q = -2$$

$$a = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$q = -2p + b$$

$$q(10) = 20$$

Rješenje

$$\text{a) } q = ap + b, \quad \Delta p = 1, \quad \Delta q = -2$$

$$a = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$q = -2p + b$$

$$q(10) = 20$$

$$-2 \cdot 10 + b = 20$$

Rješenje

$$\text{a) } q = ap + b, \quad \Delta p = 1, \quad \Delta q = -2$$

$$a = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$q = -2p + b$$

$$q(10) = 20$$

$$-2 \cdot 10 + b = 20$$

$$b = 40$$

Rješenje

$$\text{a) } q = ap + b, \quad \Delta p = 1, \quad \Delta q = -2$$

$$a = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$q = -2p + b$$

$$q(10) = 20$$

$$-2 \cdot 10 + b = 20$$

$$b = 40$$

Funkcija potražnje za ogrlicama: $q = -2p + 40$

b)

$$\text{PROFIT (ili DOBIT)} = \text{PRIHOD} - \text{TROŠKOVI}$$
$$\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}$$

b) PROFIT (ili DOBIT) = PRIHOD – TROŠKOVI

PRIHOD = CIJENA · POTRAŽNJA

- Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) =$$

b) PROFIT (ili DOBIT) = PRIHOD – TROŠKOVI

 PRIHOD = CIJENA · POTRAŽNJA

- Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) = p \cdot (-2p + 40)$$

b) PROFIT (ili DOBIT) = PRIHOD – TROŠKOVI

PRIHOD = CIJENA · POTRAŽNJA

- Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) = p \cdot (-2p + 40) = -2p^2 + 40p$$

b) PROFIT (ili DOBIT) = PRIHOD – TROŠKOVI

 PRIHOD = CIJENA · POTRAŽNJA

- Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) = p \cdot (-2p + 40) = -2p^2 + 40p$$

- Troškovi kao funkcija cijene

$$T(p) =$$

b) PROFIT (ili DOBIT) = PRIHOD – TROŠKOVI

PRIHOD = CIJENA · POTRAŽNJA

- Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) = p \cdot (-2p + 40) = -2p^2 + 40p$$

- Troškovi kao funkcija cijene

$$T(p) = 6 \cdot (-2p + 40)$$

b) PROFIT (ili DOBIT) = PRIHOD – TROŠKOVI
PRIHOD = CIJENA · POTRAŽNJA

- Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) = p \cdot (-2p + 40) = -2p^2 + 40p$$

- Troškovi kao funkcija cijene

$$T(p) = 6 \cdot (-2p + 40) = -12p + 240$$

b) PROFIT (ili DOBIT) = PRIHOD – TROŠKOVI
PRIHOD = CIJENA · POTRAŽNJA

- Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) = p \cdot (-2p + 40) = -2p^2 + 40p$$

- Troškovi kao funkcija cijene

$$T(p) = 6 \cdot (-2p + 40) = -12p + 240$$

- Profit kao funkcija cijene

$$D(p) = P(p) - T(p) =$$

b) PROFIT (ili DOBIT) = PRIHOD – TROŠKOVI
PRIHOD = CIJENA · POTRAŽNJA

- Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) = p \cdot (-2p + 40) = -2p^2 + 40p$$

- Troškovi kao funkcija cijene

$$T(p) = 6 \cdot (-2p + 40) = -12p + 240$$

- Profit kao funkcija cijene

$$D(p) = P(p) - T(p) = (-2p^2 + 40p)$$

b) PROFIT (ili DOBIT) = PRIHOD – TROŠKOVI

 PRIHOD = CIJENA · POTRAŽNJA

- Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) = p \cdot (-2p + 40) = -2p^2 + 40p$$

- Troškovi kao funkcija cijene

$$T(p) = 6 \cdot (-2p + 40) = -12p + 240$$

- Profit kao funkcija cijene

$$D(p) = P(p) - T(p) = (-2p^2 + 40p) -$$

b) PROFIT (ili DOBIT) = PRIHOD – TROŠKOVI
 PRIHOD = CIJENA · POTRAŽNJA

- Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) = p \cdot (-2p + 40) = -2p^2 + 40p$$

- Troškovi kao funkcija cijene

$$T(p) = 6 \cdot (-2p + 40) = -12p + 240$$

- Profit kao funkcija cijene

$$D(p) = P(p) - T(p) = (-2p^2 + 40p) - (-12p + 240)$$

b) PROFIT (ili DOBIT) = PRIHOD – TROŠKOVI

 PRIHOD = CIJENA · POTRAŽNJA

- Prihod kao funkcija cijene: $P(p) = p \cdot q(p)$

$$P(p) = p \cdot (-2p + 40) = -2p^2 + 40p$$

- Troškovi kao funkcija cijene

$$T(p) = 6 \cdot (-2p + 40) = -12p + 240$$

- Profit kao funkcija cijene

$$D(p) = P(p) - T(p) = (-2p^2 + 40p) - (-12p + 240)$$

$$D(p) = -2p^2 + 52p - 240$$

Tražimo ekstreme funkcije $D(p) = -2p^2 + 52p - 240$.

Tražimo ekstreme funkcije $D(p) = -2p^2 + 52p - 240$.

$$D'(p) =$$

Tražimo ekstreme funkcije $D(p) = -2p^2 + 52p - 240$.

$$D'(p) = -4p + 52$$

Tražimo ekstreme funkcije $D(p) = -2p^2 + 52p - 240$.

$$D'(p) = -4p + 52$$

$$-4p + 52 = 0$$

Tražimo ekstreme funkcije $D(p) = -2p^2 + 52p - 240$.

$$D'(p) = -4p + 52$$

$$-4p + 52 = 0$$

$$-4p = -52$$

Tražimo ekstreme funkcije $D(p) = -2p^2 + 52p - 240$.

$$D'(p) = -4p + 52$$

$$-4p + 52 = 0$$

$$-4p = -52 \quad / : (-4)$$

Tražimo ekstreme funkcije $D(p) = -2p^2 + 52p - 240$.

$$D'(p) = -4p + 52$$

$$-4p + 52 = 0$$

$$-4p = -52 \quad / : (-4)$$

$$p = 13$$

Tražimo ekstreme funkcije $D(p) = -2p^2 + 52p - 240$.

$$D'(p) = -4p + 52$$

$$-4p + 52 = 0$$

$$-4p = -52 \quad / : (-4)$$

$$p = 13$$

$$D''(p) = -4, \quad D''(13) = -4 < 0$$

Student mora ogrlice prodavati po cijeni od 13 € ukoliko želi ostvariti maksimalni profit.

Tražimo ekstrene funkcije $D(p) = -2p^2 + 52p - 240$.

$$D'(p) = -4p + 52$$

$$-4p + 52 = 0$$

$$-4p = -52 \quad / : (-4)$$

$$p = 13$$

$$D''(p) = -4, \quad D''(13) = -4 < 0$$

$$D(13) = -2 \cdot 13^2 + 52 \cdot 13 - 240$$

Student mora ogrlice prodavati po cijeni od 13 € ukoliko želi ostvariti maksimalni profit. Maksimalni profit u tom slučaju iznosi

Tražimo ekstremlne funkcije $D(p) = -2p^2 + 52p - 240$.

$$D'(p) = -4p + 52$$

$$-4p + 52 = 0$$

$$-4p = -52 \quad / : (-4)$$

$$p = 13$$

$$D''(p) = -4, \quad D''(13) = -4 < 0$$

$$D(13) = -2 \cdot 13^2 + 52 \cdot 13 - 240 = 98$$

Student mora ogrlice prodavati po cijeni od 13 € ukoliko želi ostvariti maksimalni profit. Maksimalni profit u tom slučaju iznosi 98 €, a prodaja se ukupno __ ogrlica.

Tražimo ekstreme funkcije $D(p) = -2p^2 + 52p - 240$.

$$D'(p) = -4p + 52$$

$$-4p + 52 = 0$$

$$-4p = -52 \quad / : (-4)$$

$$p = 13$$

$$D''(p) = -4, \quad D''(13) = -4 < 0$$

$$D(13) = -2 \cdot 13^2 + 52 \cdot 13 - 240 = 98$$

Student mora ogrlice prodavati po cijeni od 13 € ukoliko želi ostvariti maksimalni profit. Maksimalni profit u tom slučaju iznosi 98 €, a prodaja se ukupno __ ogrlica.

$$q(13) = -2 \cdot 13 + 40$$

$$q = -2p + 40$$

Tražimo ekstreme funkcije $D(p) = -2p^2 + 52p - 240$.

$$D'(p) = -4p + 52$$

$$-4p + 52 = 0$$

$$-4p = -52 \quad / : (-4)$$

$$p = 13$$

$$D''(p) = -4, \quad D''(13) = -4 < 0$$

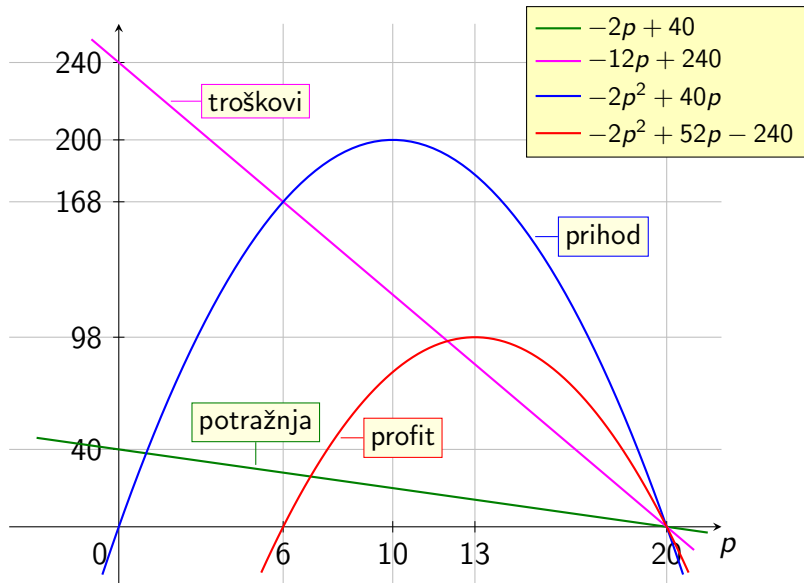
$$D(13) = -2 \cdot 13^2 + 52 \cdot 13 - 240 = 98$$

Student mora ogrlice prodavati po cijeni od 13 € ukoliko želi ostvariti maksimalni profit. Maksimalni profit u tom slučaju iznosi 98 €, a prodaja se ukupno 14 ogrlica.

$$q(13) = -2 \cdot 13 + 40 = 14$$

$$q = -2p + 40$$

Grafovi funkcija



čtvrti zadatak

Zadatak 4

Menadžer je utvrdio da je veza između prodajne cijene p robe i broja komada N dana s

$$N(p) = \frac{1500}{p^2 + 100}.$$

Prosječni troškovi za N komada robe jednaki su

$$T_p = 2 + \frac{14}{N}.$$

Odredite cijenu uz koju se ostvaruje maksimalni profit i izračunajte taj profit. Odredite za koje prodajne cijene robe je profit pozitivan.

Rješenje

- Funkcija prosječnih troškova

$$\text{prosječni troškovi} = \frac{\text{troškovi}}{\text{broj proizvoda}}$$

Rješenje

- Funkcija prosječnih troškova

$$\text{prosječni troškovi} = \frac{\text{troškovi}}{\text{broj proizvoda}}$$

$$T_p(N) = \frac{T(N)}{N}$$

Rješenje

- Funkcija prosječnih troškova

$$\text{prosječni troškovi} = \frac{\text{troškovi}}{\text{broj proizvoda}}$$

$$T_p(N) = \frac{T(N)}{N}$$

- Funkcija troškova

$$T(N) = T_p(N) \cdot N$$

$$T_p = 2 + \frac{14}{N}$$

Rješenje

- Funkcija prosječnih troškova

$$\text{prosječni troškovi} = \frac{\text{troškovi}}{\text{broj proizvoda}}$$

$$T_p(N) = \frac{T(N)}{N}$$

- Funkcija troškova

$$T(N) = T_p(N) \cdot N = \left(2 + \frac{14}{N}\right) \cdot N$$

$$T_p = 2 + \frac{14}{N}$$

Rješenje

- Funkcija prosječnih troškova

$$\text{prosječni troškovi} = \frac{\text{troškovi}}{\text{broj proizvoda}}$$

$$T_p(N) = \frac{T(N)}{N}$$

- Funkcija troškova

$$T(N) = T_p(N) \cdot N = \left(2 + \frac{14}{N}\right) \cdot N = 2N + 14$$

$$T_p = 2 + \frac{14}{N}$$

Rješenje

- Funkcija prosječnih troškova

$$\text{prosječni troškovi} = \frac{\text{troškovi}}{\text{broj proizvoda}}$$

$$T_p(N) = \frac{T(N)}{N}$$

- Funkcija troškova

$$T(N) = T_p(N) \cdot N = \left(2 + \frac{14}{N}\right) \cdot N = 2N + 14$$

$$T(p) = 2N(p) + 14$$

Rješenje

$$N(p) = \frac{1500}{p^2 + 100}$$

$$T_p = 2 + \frac{14}{N}$$

- Funkcija prosječnih troškova

$$\text{prosječni troškovi} = \frac{\text{troškovi}}{\text{broj proizvoda}}$$

$$T_p(N) = \frac{T(N)}{N}$$

- Funkcija troškova

$$T(N) = T_p(N) \cdot N = \left(2 + \frac{14}{N}\right) \cdot N = 2N + 14$$

$$T(p) = 2N(p) + 14 = 2 \cdot \frac{1500}{p^2 + 100} + 14$$

Rješenje

$$N(p) = \frac{1500}{p^2 + 100}$$

$$T_p = 2 + \frac{14}{N}$$

- Funkcija prosječnih troškova

$$\text{prosječni troškovi} = \frac{\text{troškovi}}{\text{broj proizvoda}}$$

$$T_p(N) = \frac{T(N)}{N}$$

- Funkcija troškova

$$T(N) = T_p(N) \cdot N = \left(2 + \frac{14}{N}\right) \cdot N = 2N + 14$$

$$T(p) = 2N(p) + 14 = 2 \cdot \frac{1500}{p^2 + 100} + 14 = \frac{3000}{p^2 + 100} + 14$$

- Funkcija prihoda: $\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}$

$$P(p) = p \cdot N(p)$$

- Funkcija prihoda: $\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}$

$$P(p) = p \cdot N(p) = p \cdot \frac{1500}{p^2 + 100}$$

$$N(p) = \frac{1500}{p^2 + 100}$$

- Funkcija prihoda: $\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}$

$$P(p) = p \cdot N(p) = p \cdot \frac{1500}{p^2 + 100} = \frac{1500p}{p^2 + 100}$$

$$N(p) = \frac{1500}{p^2 + 100}$$

- **Funkcija prihoda:** $\text{PRIHOD} = \text{CIJENA} \cdot \text{POTRAŽNJA}$

$$P(p) = p \cdot N(p) = p \cdot \frac{1500}{p^2 + 100} = \frac{1500p}{p^2 + 100}$$

- **Funkcija profita:** $\text{PROFIT} = \text{PRIHOD} - \text{TROŠKOVI}$

$$D(p) = P(p) - T(p)$$

$$N(p) = \frac{1500}{p^2 + 100}$$

- **Funkcija prihoda:** PRIHOD = CIJENA · POTRAŽNJA

$$P(p) = p \cdot N(p) = p \cdot \frac{1500}{p^2 + 100} = \frac{1500p}{p^2 + 100}$$

- **Funkcija profita:** PROFIT = PRIHOD – TROŠKOVI

$$D(p) = P(p) - T(p) = \frac{1500p}{p^2 + 100} - \left(\frac{3000}{p^2 + 100} + 14 \right)$$

$$N(p) = \frac{1500}{p^2 + 100}$$

$$T(p) = \frac{3000}{p^2 + 100} + 14$$

- **Funkcija prihoda:** PRIHOD = CIJENA · POTRAŽNJA

$$P(p) = p \cdot N(p) = p \cdot \frac{1500}{p^2 + 100} = \frac{1500p}{p^2 + 100}$$

- **Funkcija profita:** PROFIT = PRIHOD – TROŠKOVI

$$\begin{aligned} D(p) = P(p) - T(p) &= \frac{1500p}{p^2 + 100} - \left(\frac{3000}{p^2 + 100} + 14 \right) = \\ &= \frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14 \end{aligned}$$

$$N(p) = \frac{1500}{p^2 + 100}$$

$$T(p) = \frac{3000}{p^2 + 100} + 14$$

$$D(p) = \frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$D'(p) =$$

$$D(p) = \frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$D'(p) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$D(p) = \frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$D'(p) = \frac{\quad}{(p^2 + 100)^2}$$

$$D(p) = \frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$D'(p) = \frac{1500}{(p^2 + 100)^2}$$

$$D(p) = \frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$D'(p) = \frac{1500 \cdot}{(p^2 + 100)^2}$$

$$D(p) = \frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$D'(p) = \frac{1500 \cdot (p^2 + 100)}{(p^2 + 100)^2}$$

$$D(p) = \frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$D'(p) = \frac{1500 \cdot (p^2 + 100) -}{(p^2 + 100)^2}$$

$$D(p) = \frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$D'(p) = \frac{1500 \cdot (p^2 + 100) - (1500p - 3000)}{(p^2 + 100)^2}$$

$$D(p) = \frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$D'(p) = \frac{1500 \cdot (p^2 + 100) - (1500p - 3000) \cdot}{(p^2 + 100)^2}$$

$$D(p) = \frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$D'(p) = \frac{1500 \cdot (p^2 + 100) - (1500p - 3000) \cdot 2p}{(p^2 + 100)^2}$$

$$D(p) = \frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$D'(p) = \frac{1500 \cdot (p^2 + 100) - (1500p - 3000) \cdot 2p}{(p^2 + 100)^2} - 0$$

$$D(p) = \frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$D'(p) = \frac{1500 \cdot (p^2 + 100) - (1500p - 3000) \cdot 2p}{(p^2 + 100)^2} - 0$$

$$D'(p) = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$D(p) = \frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$D'(p) = \frac{1500 \cdot (p^2 + 100) - (1500p - 3000) \cdot 2p}{(p^2 + 100)^2} - 0$$

$$D'(p) = \frac{\quad}{(p^2 + 100)^2}$$

$$D(p) = \frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$D'(p) = \frac{1500 \cdot (p^2 + 100) - (1500p - 3000) \cdot 2p}{(p^2 + 100)^2} - 0$$

$$D'(p) = \frac{1500p^2 + 150\,000 - 3000p^2 + 6000p}{(p^2 + 100)^2}$$

$$D(p) = \frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$D'(p) = \frac{1500 \cdot (p^2 + 100) - (1500p - 3000) \cdot 2p}{(p^2 + 100)^2} - 0$$

$$D'(p) = \frac{1500p^2 + 150\,000 - 3000p^2 + 6000p}{(p^2 + 100)^2}$$

$$D'(p) = \frac{-1500p^2 + 6000p + 150\,000}{(p^2 + 100)^2}$$

$$D'(p) = 0$$

$$D'(p) = 0$$

$$\frac{-1500p^2 + 6000p + 150\,000}{(p^2 + 100)^2} = 0$$

$$D'(p) = 0$$

$$\frac{-1500p^2 + 6000p + 150\,000}{(p^2 + 100)^2} = 0$$

$$-1500p^2 + 6000p + 150\,000 = 0$$

$$D'(p) = 0$$

$$\frac{-1500p^2 + 6000p + 150\,000}{(p^2 + 100)^2} = 0$$

$$-1500p^2 + 6000p + 150\,000 = 0 \quad / : (-1500)$$

$$p^2 - 4p - 100 = 0$$

$$D'(p) = 0$$

$$\frac{-1500p^2 + 6000p + 150\,000}{(p^2 + 100)^2} = 0$$

$$-1500p^2 + 6000p + 150\,000 = 0 \quad / : (-1500)$$

$$p^2 - 4p - 100 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 400}}{2}$$

$$D'(p) = 0$$

$$\frac{-1500p^2 + 6000p + 150\,000}{(p^2 + 100)^2} = 0$$

$$-1500p^2 + 6000p + 150\,000 = 0 \quad / : (-1500)$$

$$p^2 - 4p - 100 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 400}}{2}$$

$$p_1 = 12.2, \quad p_2 = -8.2$$

$$D'(p) = 0$$

$$\frac{-1500p^2 + 6000p + 150\,000}{(p^2 + 100)^2} = 0$$

$$-1500p^2 + 6000p + 150\,000 = 0 \quad / : (-1500)$$

$$p^2 - 4p - 100 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 400}}{2}$$

$$p_1 = 12.2, \quad \cancel{p_2 = -8.2}$$

$$D'(p) = 0$$

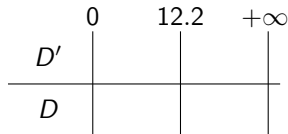
$$\frac{-1500p^2 + 6000p + 150\,000}{(p^2 + 100)^2} = 0$$

$$-1500p^2 + 6000p + 150\,000 = 0 \quad / : (-1500)$$

$$p^2 - 4p - 100 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 400}}{2}$$

$$p_1 = 12.2, \quad \cancel{p_2 = -8.2}$$



$$D'(p) = 0$$

$$\frac{-1500p^2 + 6000p + 150\,000}{(p^2 + 100)^2} = 0$$

$$-1500p^2 + 6000p + 150\,000 = 0 \quad / : (-1500)$$

$$p^2 - 4p - 100 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 400}}{2}$$

$$p_1 = 12.2, \quad \cancel{p_2 = -8.2}$$

	0	12.2	$+\infty$
D'		+	
D			

$$D'(p) = 0$$

$$\frac{-1500p^2 + 6000p + 150\,000}{(p^2 + 100)^2} = 0$$

$$-1500p^2 + 6000p + 150\,000 = 0 \quad / : (-1500)$$

$$p^2 - 4p - 100 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 400}}{2}$$

$$p_1 = 12.2, \quad \cancel{p_2 = -8.2}$$

	0		12.2		$+\infty$
D'		+		-	
D					

$$D'(p) = 0$$

$$\frac{-1500p^2 + 6000p + 150\,000}{(p^2 + 100)^2} = 0$$

$$-1500p^2 + 6000p + 150\,000 = 0 \quad / : (-1500)$$

$$p^2 - 4p - 100 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 400}}{2}$$

$$p_1 = 12.2, \quad \cancel{p_2 = -8.2}$$

	0	12.2	$+\infty$
D'			
	+	-	
D			
	$\nearrow$		

$$D'(p) = 0$$

$$\frac{-1500p^2 + 6000p + 150\,000}{(p^2 + 100)^2} = 0$$

$$-1500p^2 + 6000p + 150\,000 = 0 \quad / : (-1500)$$

$$p^2 - 4p - 100 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 400}}{2}$$

$$p_1 = 12.2, \quad \cancel{p_2 = -8.2}$$

	0	12.2	$+\infty$
D'			
	+	-	
D			
	$\nearrow$	$\searrow$	

$$D'(p) = 0$$

$$\frac{-1500p^2 + 6000p + 150\,000}{(p^2 + 100)^2} = 0$$

$$-1500p^2 + 6000p + 150\,000 = 0 \quad / : (-1500)$$

$$p^2 - 4p - 100 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 400}}{2}$$

$$p_1 = 12.2,$$

p_2

$$D(p) = \frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14$$

	0	12.2	$+\infty$
D'	+	-	
D	$\nearrow$	$\searrow$	

$$D(12.2) =$$

$$D'(p) = 0$$

$$\frac{-1500p^2 + 6000p + 150\,000}{(p^2 + 100)^2} = 0$$

$$-1500p^2 + 6000p + 150\,000 = 0 \quad / : (-1500)$$

$$p^2 - 4p - 100 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 400}}{2}$$

$$p_1 = 12.2,$$

p_2

$$D(p) = \frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14$$

	0	12.2	$+\infty$
D'	+	-	
D	$\nearrow$	$\searrow$	

$$D(12.2) = \frac{1500 \cdot 12.2 - 3000}{12.2^2 + 100} - 14$$

$$D'(p) = 0$$

$$\frac{-1500p^2 + 6000p + 150\,000}{(p^2 + 100)^2} = 0$$

$$-1500p^2 + 6000p + 150\,000 = 0 \quad / : (-1500)$$

$$p^2 - 4p - 100 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 400}}{2}$$

$$p_1 = 12.2,$$

p_2

$$D(p) = \frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14$$

	0	12.2	$+\infty$
D'	+	-	
D	$\nearrow$	$\searrow$	

$$D(12.2) = \frac{1500 \cdot 12.2 - 3000}{12.2^2 + 100} - 14 = 47.49$$

$$D'(p) = 0$$

$$\frac{-1500p^2 + 6000p + 150\,000}{(p^2 + 100)^2} = 0$$

$$-1500p^2 + 6000p + 150\,000 = 0 \quad / : (-1500)$$

$$p^2 - 4p - 100 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 400}}{2}$$

$$p_1 = 12.2,$$

p_2

$$D(p) = \frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14$$

	0	12.2	$+\infty$
D'	+	-	
D	$\nearrow$	$\searrow$	

$$D(12.2) = \frac{1500 \cdot 12.2 - 3000}{12.2^2 + 100} - 14 = 47.49$$

Maksimalni profit jednak je 47.49 novčanih jedinica i ostvaruje se po cijeni od 12.2 novčanih jedinica.

Kada je profit pozitivan?

- Odredimo nultočke funkcije profita $D(p)$

$$D(p) = 0$$

Kada je profit pozitivan?

- Odredimo nultočke funkcije profita $D(p)$

$$D(p) = 0$$

$$\frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14 = 0$$

Kada je profit pozitivan?

- Odredimo nultočke funkcije profita $D(p)$

$$D(p) = 0$$

$$\frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14 = 0 \quad / \cdot (p^2 + 100)$$

$$1500p - 3000 - 14 \cdot (p^2 + 100) = 0$$

Kada je profit pozitivan?

- Odredimo nultočke funkcije profita $D(p)$

$$D(p) = 0$$

$$\frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14 = 0 \quad / \cdot (p^2 + 100)$$

$$1500p - 3000 - 14 \cdot (p^2 + 100) = 0$$

$$-14p^2 + 1500p - 4400 = 0$$

Kada je profit pozitivan?

- Odredimo nultočke funkcije profita $D(p)$

$$D(p) = 0$$

$$\frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14 = 0 \quad / \cdot (p^2 + 100)$$

$$1500p - 3000 - 14 \cdot (p^2 + 100) = 0$$

$$-14p^2 + 1500p - 4400 = 0 \quad / : 2$$

$$-7p^2 + 750p - 2200 = 0$$

Kada je profit pozitivan?

- Odredimo nultočke funkcije profita $D(p)$

$$D(p) = 0$$

$$\frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14 = 0 \quad / \cdot (p^2 + 100)$$

$$1500p - 3000 - 14 \cdot (p^2 + 100) = 0$$

$$-14p^2 + 1500p - 4400 = 0 \quad / : 2$$

$$-7p^2 + 750p - 2200 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-750 \pm \sqrt{750^2 - 4 \cdot (-7) \cdot (-2200)}}{-14}$$

Kada je profit pozitivan?

- Odredimo nultočke funkcije profita $D(p)$

$$D(p) = 0$$

$$\frac{1500p - 3000}{p^2 + 100} - 14 = 0 \quad / \cdot (p^2 + 100)$$

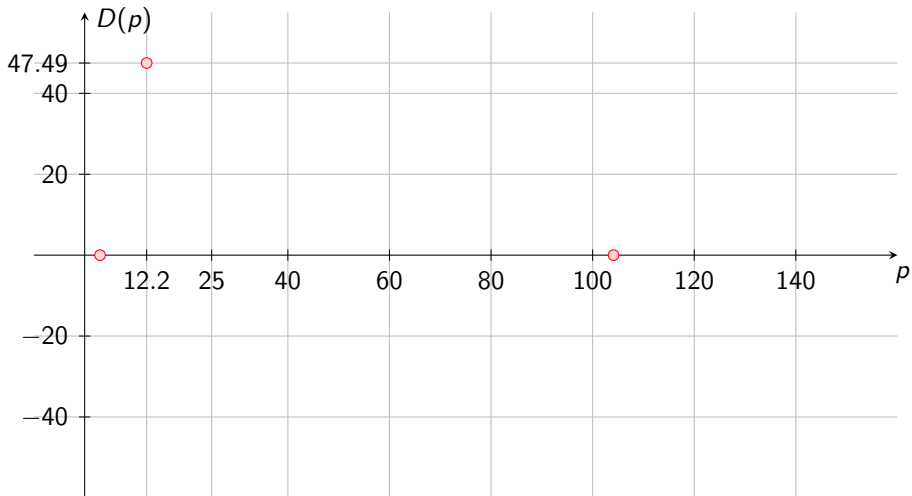
$$1500p - 3000 - 14 \cdot (p^2 + 100) = 0$$

$$-14p^2 + 1500p - 4400 = 0 \quad / : 2$$

$$-7p^2 + 750p - 2200 = 0$$

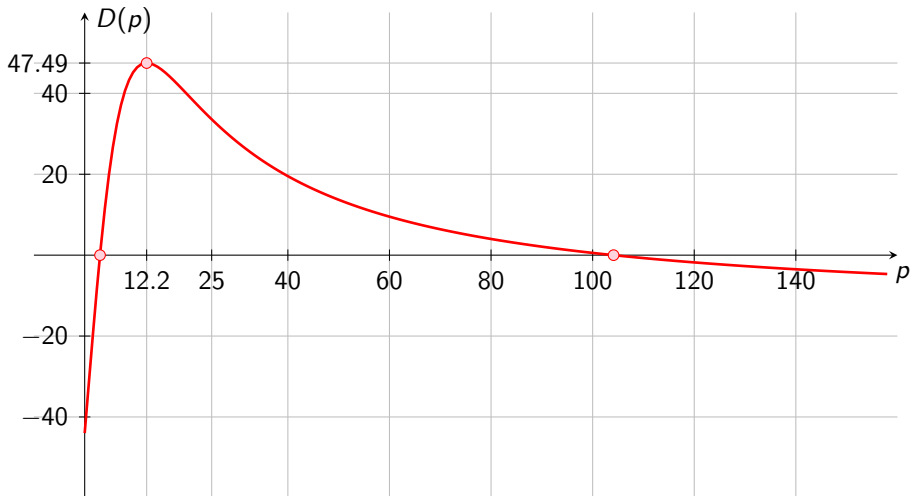
$$p_{1,2} = \frac{-750 \pm \sqrt{750^2 - 4 \cdot (-7) \cdot (-2200)}}{-14}$$

$$p_1 = 3.02, \quad p_2 = 104.12$$



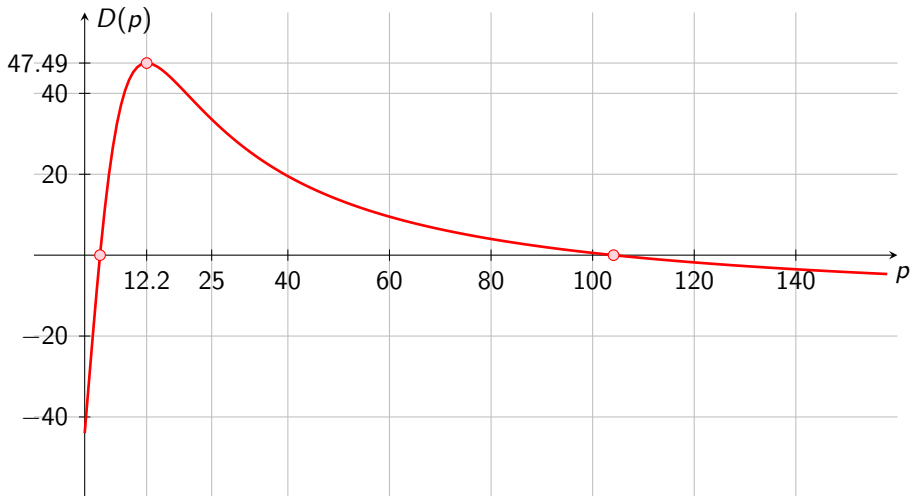
	0	12.2	$+\infty$
D'	+	-	
D	$\nearrow$	$\searrow$	

nultočky: 3.02, 104.12



	0	12.2	$+\infty$
D'	+	-	
D	$\nearrow$	$\searrow$	

nultočky: 3.02, 104.12



	0	12.2	$+\infty$
D'	+	-	
D	$\nearrow$	$\searrow$	

nultočke: 3.02, 104.12

Profit je pozitivan za $p \in \langle 3.02, 104.12 \rangle$.

peti zadatak

Zadatak 5

Prodaja računala u nekom poduzeću u prvom polugodištu prošle godine mijenjala se od najviše 464 komada na početku godine do najniže 282 komada na kraju polugodišta. Nakon toga do kraja godine zabilježen je linearni rast prodaje pri čemu je u prosincu prodano 564 računala. Napravite sinusoidalni model prodaje za prvo polugodište te odredite koliko je računala prodano u mjesecu listopadu.

Zadatak 5

Prodaja računala u nekom poduzeću u prvom polugodištu prošle godine mijenjala se od najviše 464 komada na početku godine do najniže 282 komada na kraju polugodišta. Nakon toga do kraja godine zabilježen je linearni rast prodaje pri čemu je u prosincu prodano 564 računala. Napravite sinusoidalni model prodaje za prvo polugodište te odredite koliko je računala prodano u mjesecu listopadu.

Rješenje

$$P(t) = \begin{cases} A \sin(Bt + C) + D, & t \in [0, 6] \\ Et + F, & t \in [6, 12] \end{cases}$$

$$P(t) = A \sin(Bt + C) + D, \quad t \in [0, 6]$$

$$P(t) = A \sin(Bt + C) + D, \quad t \in [0, 6]$$

- Amplituda: $M = 464$, $m = 282$

$$P(t) = A \sin(Bt + C) + D, \quad t \in [0, 6]$$

- Amplituda: $M = 464$, $m = 282$

$$A = \frac{M - m}{2} = \frac{464 - 282}{2} = 91$$

$$P(t) = A \sin(Bt + C) + D, \quad t \in [0, 6]$$

- Amplituda: $M = 464$, $m = 282$

$$A = \frac{M - m}{2} = \frac{464 - 282}{2} = 91$$

- Pomak po y-osi

$$P(t) = A \sin(Bt + C) + D, \quad t \in [0, 6]$$

- Amplituda: $M = 464$, $m = 282$

$$A = \frac{M - m}{2} = \frac{464 - 282}{2} = 91$$

- Pomak po y-osi

$$D = M - A = 464 - 91 = 373$$

$$P(t) = A \sin(Bt + C) + D, \quad t \in [0, 6]$$

- Amplituda: $M = 464$, $m = 282$

$$A = \frac{M - m}{2} = \frac{464 - 282}{2} = 91$$

- Pomak po y-osi

$$D = M - A = 464 - 91 = 373$$

- Ekstremi moraju biti u točkama $t = 0$ i $t = 6$.

$$P(t) = A \sin(Bt + C) + D, \quad t \in [0, 6]$$

- Amplituda: $M = 464$, $m = 282$

$$A = \frac{M - m}{2} = \frac{464 - 282}{2} = 91$$

- Pomak po y-osi

$$D = M - A = 464 - 91 = 373$$

- Ekstremi moraju biti u točkama $t = 0$ i $t = 6$.

$$B \cdot 0 + C = \frac{\pi}{2}, \quad B \cdot 6 + C = \frac{3}{2}\pi$$

$$P(t) = A \sin(Bt + C) + D, \quad t \in [0, 6]$$

- Amplituda: $M = 464$, $m = 282$

$$A = \frac{M - m}{2} = \frac{464 - 282}{2} = 91$$

- Pomak po y-osi

$$D = M - A = 464 - 91 = 373$$

- Ekstremi moraju biti u točkama $t = 0$ i $t = 6$.

$$B \cdot 0 + C = \frac{\pi}{2}, \quad B \cdot 6 + C = \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{Dobivamo } C = \frac{\pi}{2} \text{ i } B = \frac{\pi}{6}.$$

$$P(t) = A \sin(Bt + C) + D, \quad t \in [0, 6]$$

$$P(t) = 91 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right) + 373, \quad t \in [0, 6]$$

- Amplituda: $M = 464$, $m = 282$

$$A = \frac{M - m}{2} = \frac{464 - 282}{2} = 91$$

- Pomak po y-osi

$$D = M - A = 464 - 91 = 373$$

- Ekstremi moraju biti u točkama $t = 0$ i $t = 6$.

$$B \cdot 0 + C = \frac{\pi}{2}, \quad B \cdot 6 + C = \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{Dobivamo } C = \frac{\pi}{2} \text{ i } B = \frac{\pi}{6}.$$

$$P(t) = Et + F, \quad t \in [6, 12]$$

$$P(t) = Et + F, \quad t \in [6, 12]$$

- $P(6) = 282, \quad P(12) = 564$

$$P(t) = Et + F, \quad t \in [6, 12]$$

- $P(6) = 282, \quad P(12) = 564$

$$6E + F = 282$$

$$12E + F = 564$$

$$P(t) = Et + F, \quad t \in [6, 12]$$

- $P(6) = 282, \quad P(12) = 564$

$$6E + F = 282$$

$$12E + F = 564$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$P(t) = Et + F, \quad t \in [6, 12]$$

- $P(6) = 282, \quad P(12) = 564$

$$6E + F = 282$$

$$12E + F = 564$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 282 & 1 \\ 564 & 1 \end{vmatrix} = -282$$

$$P(t) = Et + F, \quad t \in [6, 12]$$

- $P(6) = 282, \quad P(12) = 564$

$$6E + F = 282$$

$$12E + F = 564$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 282 & 1 \\ 564 & 1 \end{vmatrix} = -282, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 282 \\ 12 & 564 \end{vmatrix} = 0$$

$$P(t) = Et + F, \quad t \in [6, 12]$$

- $P(6) = 282, \quad P(12) = 564$

$$6E + F = 282$$

$$12E + F = 564$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 282 & 1 \\ 564 & 1 \end{vmatrix} = -282, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 282 \\ 12 & 564 \end{vmatrix} = 0$$

$$E = \frac{D_1}{D} = \frac{-282}{-6} = 47, \quad F = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{-6} = 0$$

$$P(t) = Et + F, \quad t \in [6, 12]$$

$$P(t) = 47t, \quad t \in [6, 12]$$

- $P(6) = 282, \quad P(12) = 564$

$$6E + F = 282$$

$$12E + F = 564$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 282 & 1 \\ 564 & 1 \end{vmatrix} = -282, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 282 \\ 12 & 564 \end{vmatrix} = 0$$

$$E = \frac{D_1}{D} = \frac{-282}{-6} = 47, \quad F = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{-6} = 0$$

$$P(t) = Et + F, \quad t \in [6, 12]$$

$$P(t) = 47t, \quad t \in [6, 12]$$

- $P(6) = 282, \quad P(12) = 564$

$$6E + F = 282$$

$$12E + F = 564$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 282 & 1 \\ 564 & 1 \end{vmatrix} = -282, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 282 \\ 12 & 564 \end{vmatrix} = 0$$

$$E = \frac{D_1}{D} = \frac{-282}{-6} = 47, \quad F = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{-6} = 0$$

- U desetom mjesecu prodano je $P(10) = 47 \cdot 10 = 470$ računala.



$$P(t) = \begin{cases} 91 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right) + 373, & t \in [0, 6] \\ 47t, & t \in [6, 12] \end{cases}$$

Eksponencijalni rast i pad

- Niz pozitivnih realnih brojeva

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

- Niz pozitivnih realnih brojeva

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

- Članovi niza rastu s konstantnom stopom rasta p

- Niz pozitivnih realnih brojeva

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

- Članovi niza rastu s konstantnom stopom rasta p

$$a_{n+1} = a_n + \frac{p}{100} a_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right) a_n$$

- Niz pozitivnih realnih brojeva

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

- Članovi niza rastu s konstantnom stopom rasta p

$$a_{n+1} = a_n + \frac{p}{100} a_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right) a_n$$

Niz (a_n) je geometrijski s kvocijentom $q = 1 + \frac{p}{100}$.

- Niz pozitivnih realnih brojeva

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

- Članovi niza rastu s konstantnom stopom rasta p

$$a_{n+1} = a_n + \frac{p}{100} a_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right) a_n$$

Niz (a_n) je geometrijski s kvocijentom $q = 1 + \frac{p}{100}$.

- Članovi niza padaju s konstantnom stopom pada p

- Niz pozitivnih realnih brojeva

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

- Članovi niza rastu s konstantnom stopom rasta p

$$a_{n+1} = a_n + \frac{p}{100} a_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right) a_n$$

Niz (a_n) je geometrijski s kvocijentom $q = 1 + \frac{p}{100}$.

- Članovi niza padaju s konstantnom stopom pada p

$$a_{n+1} = a_n - \frac{p}{100} a_n = \left(1 - \frac{p}{100}\right) a_n$$

- Niz pozitivnih realnih brojeva

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

- Članovi niza rastu s konstantnom stopom rasta p

$$a_{n+1} = a_n + \frac{p}{100} a_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right) a_n$$

Niz (a_n) je geometrijski s kvocijentom $q = 1 + \frac{p}{100}$.

- Članovi niza padaju s konstantnom stopom pada p

$$a_{n+1} = a_n - \frac{p}{100} a_n = \left(1 - \frac{p}{100}\right) a_n$$

Niz (a_n) je geometrijski s kvocijentom $q = 1 - \frac{p}{100}$.

Eksponencijalni rast

- $a_n = a_0 \cdot q^n$, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
- Ako je $q > 1$, tada je $q = e^k$ za neki $k > 0$.

$$a_n = a_0 \cdot q^n = a_0 \cdot (e^k)^n = a_0 \cdot e^{kn}$$

Kontinuirani slučaj

- Kažemo da veličina $y(x)$ eksponencijalno raste ako vrijedi

$$y(x) = y_0 \cdot e^{kx}$$

gdje je $k > 0$ i $y_0 = y(0)$.

Eksponencijalni pad

- $a_n = a_0 \cdot q^n$, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
- Ako je $0 < q < 1$, tada je $q = e^{-k}$ za neki $k > 0$.

$$a_n = a_0 \cdot q^n = a_0 \cdot (e^{-k})^n = a_0 \cdot e^{-kn}$$

Kontinuirani slučaj

- Kažemo da veličina $y(x)$ eksponencijalno pada ako vrijedi

$$y(x) = y_0 \cdot e^{-kx}$$

gdje je $k > 0$ i $y_0 = y(0)$.

$$y = y_0 \cdot e^{kx}$$

- Brzina rasta funkcije y u točki x proporcionalna je s vrijednošću funkcije u toj točki. Konstanta proporcionalnosti jednaka je k .

$$y = y_0 \cdot e^{kx}$$

- Brzina rasta funkcije y u točki x proporcionalna je s vrijednošću funkcije u toj točki. Konstanta proporcionalnosti jednaka je k .

$$y'(x) = y_0 \cdot e^{kx} \cdot k = k \cdot y(x)$$

$$y = y_0 \cdot e^{kx}$$

- Brzina rasta funkcije y u točki x proporcionalna je s vrijednošću funkcije u toj točki. Konstanta proporcionalnosti jednaka je k .

$$y'(x) = y_0 \cdot e^{kx} \cdot k = k \cdot y(x)$$

- Diskretizacija

$$\frac{y(x + \Delta x)}{y(x)} = \frac{y_0 \cdot e^{k(x+\Delta x)}}{y_0 \cdot e^{kx}} = \frac{y_0 \cdot e^{kx} \cdot e^{k\Delta x}}{y_0 \cdot e^{kx}} = e^{k\Delta x} = (e^k)^{\Delta x}$$

$$y = y_0 \cdot e^{kx}$$

- Brzina rasta funkcije y u točki x proporcionalna je s vrijednošću funkcije u toj točki. Konstanta proporcionalnosti jednaka je k .

$$y'(x) = y_0 \cdot e^{kx} \cdot k = k \cdot y(x)$$

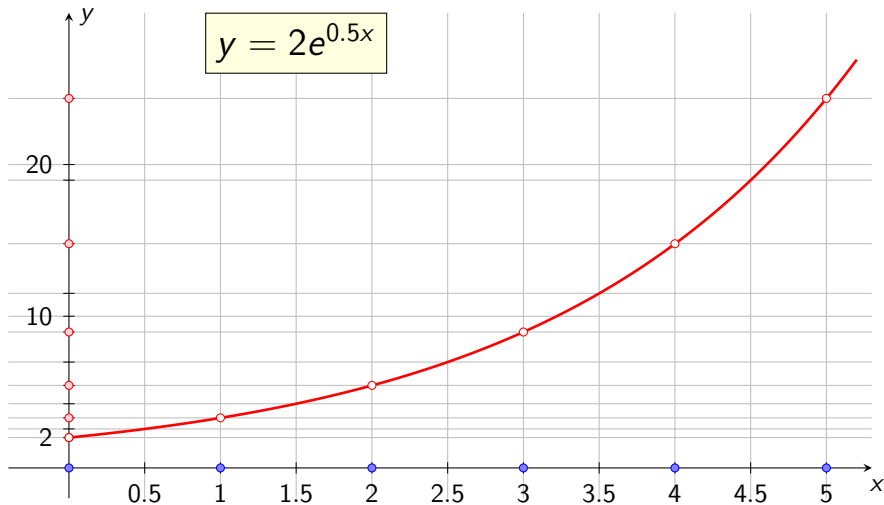
- Diskretizacija

$$\frac{y(x + \Delta x)}{y(x)} = \frac{y_0 \cdot e^{k(x+\Delta x)}}{y_0 \cdot e^{kx}} = \frac{y_0 \cdot e^{kx} \cdot e^{k\Delta x}}{y_0 \cdot e^{kx}} = e^{k\Delta x} = (e^k)^{\Delta x}$$

Niz (a_n) definiran s

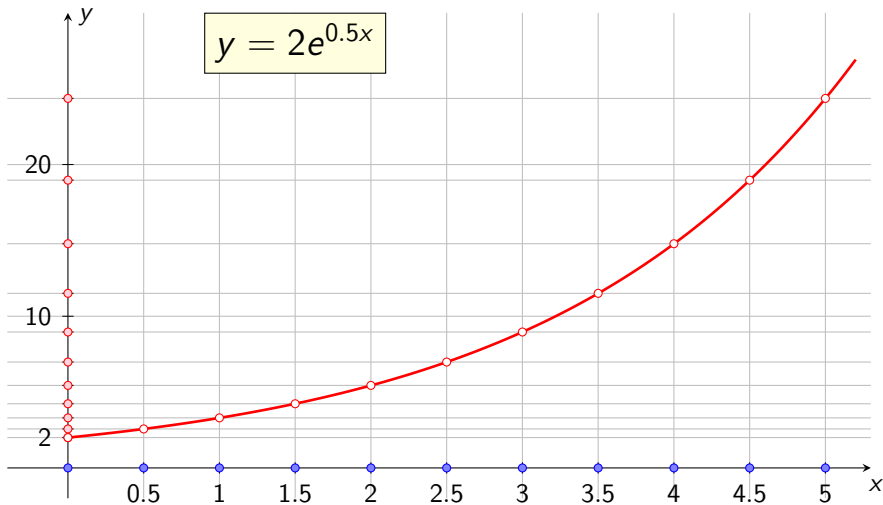
$$a_n = y(n \cdot \Delta x), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

za fiksni Δx je geometrijski niz s kvocijentom $q = e^{k\Delta x}$.



$$\Delta x = 1, \quad a_n = y(n)$$

(a_n) je geometrijski niz s kvocijentom $e^{0.5}$



$$\Delta x = 0.5, \quad a_n = y(0.5n)$$

(a_n) je geometrijski niz s kvocijentom $e^{0.25}$

$$y = y_0 \cdot e^{-kx}$$

- Brzina pada funkcije y u točki x proporcionalna je s vrijednošću funkcije u toj točki. Konstanta proporcionalnosti jednaka je $-k$.

$$y = y_0 \cdot e^{-kx}$$

- Brzina pada funkcije y u točki x proporcionalna je s vrijednošću funkcije u toj točki. Konstanta proporcionalnosti jednaka je $-k$.

$$y'(x) = y_0 \cdot e^{-kx} \cdot (-k) = -k \cdot y(x)$$

$$y = y_0 \cdot e^{-kx}$$

- Brzina pada funkcije y u točki x proporcionalna je s vrijednošću funkcije u toj točki. Konstanta proporcionalnosti jednaka je $-k$.

$$y'(x) = y_0 \cdot e^{-kx} \cdot (-k) = -k \cdot y(x)$$

- Diskretizacija

$$\frac{y(x + \Delta x)}{y(x)} = \frac{y_0 \cdot e^{-k(x+\Delta x)}}{y_0 \cdot e^{-kx}} = \frac{y_0 \cdot e^{-kx} \cdot e^{-k\Delta x}}{y_0 \cdot e^{-kx}} = e^{-k\Delta x} = (e^{-k})^{\Delta x}$$

$$y = y_0 \cdot e^{-kx}$$

- Brzina pada funkcije y u točki x proporcionalna je s vrijednošću funkcije u toj točki. Konstanta proporcionalnosti jednaka je $-k$.

$$y'(x) = y_0 \cdot e^{-kx} \cdot (-k) = -k \cdot y(x)$$

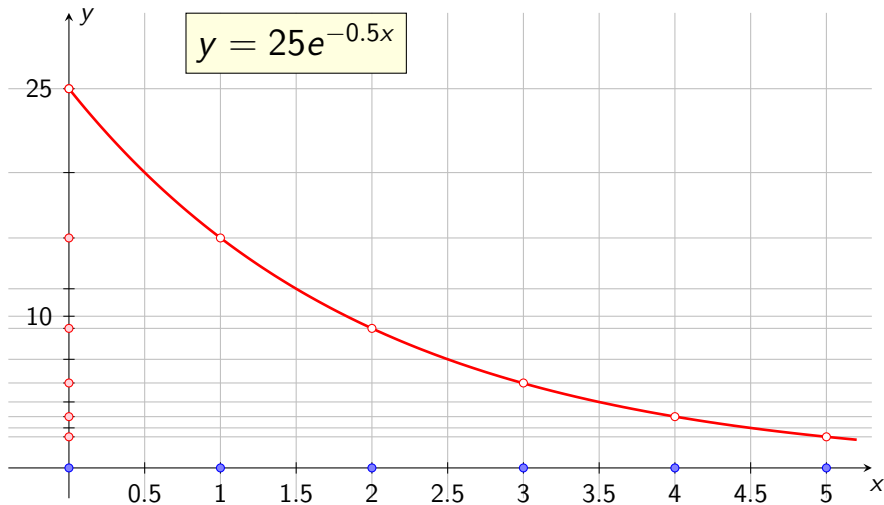
- Diskretizacija

$$\frac{y(x + \Delta x)}{y(x)} = \frac{y_0 \cdot e^{-k(x+\Delta x)}}{y_0 \cdot e^{-kx}} = \frac{y_0 \cdot e^{-kx} \cdot e^{-k\Delta x}}{y_0 \cdot e^{-kx}} = e^{-k\Delta x} = (e^{-k})^{\Delta x}$$

Niz (a_n) definiran s

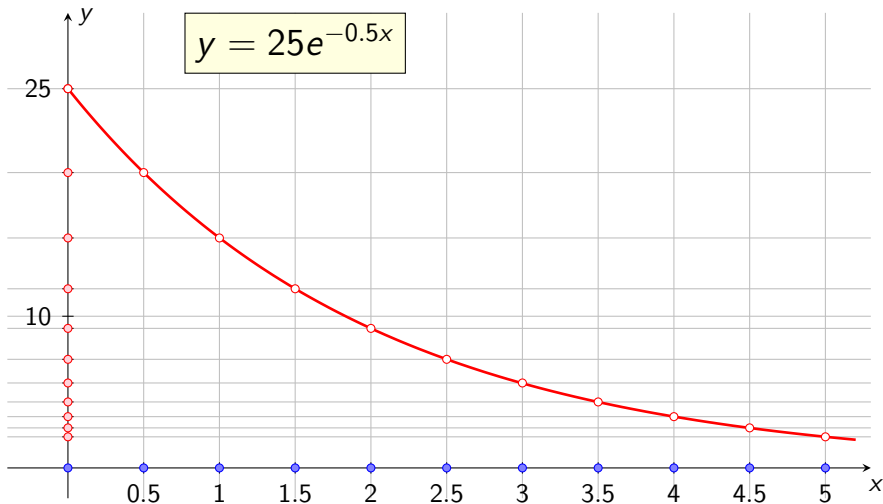
$$a_n = y(n \cdot \Delta x), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

za fiksni Δx je geometrijski niz s kvocijentom $q = e^{-k\Delta x}$.



$$\Delta x = 1, \quad a_n = y(n)$$

(a_n) je geometrijski niz s kvocijentom $e^{-0.5}$



$$\Delta x = 0.5, \quad a_n = y(0.5n)$$

(a_n) je geometrijski niz s kvocijentom $e^{-0.25}$

šesti zadatak

Zadatak 6

Dijete će tijekom svoga života narasti najviše do visine od 185 cm. Prilikom rođenja dijete je imalo visinu od 53 cm, a godišnja stopa rasta je 28%.

a) *Pronađite logističku funkciju*

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

koja modelira djetetov godišnji rast, tj. $f(t)$ je visina djeteta u centimetrima nakon t godina.

b) *Nakon koliko godina će dijete biti visoko 1.5 metara?*

c) *U kojem trenutku je najveća brzina rasta djeteta?*

Rješenje

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

a) Odredimo najprije konstantu A .

Rješenje

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

a) Odredimo najprije konstantu A .

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) =$$

Rješenje

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

a) Odredimo najprije konstantu A .

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

Rješenje

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

a) Odredimo najprije konstantu A .

Napomena: $k > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{A}{1 + Be^{-kt}} = \frac{A}{1 + B \cdot 0}$$

Rješenje

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

a) Odredimo najprije konstantu A .

Napomena: $k > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{A}{1 + Be^{-kt}} = \frac{A}{1 + B \cdot 0} = A$$

Rješenje

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

a) Odredimo najprije konstantu A .

Napomena: $k > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{A}{1 + Be^{-kt}} = \frac{A}{1 + B \cdot 0} = A$$

Iz uvjeta zadatka slijedi $A = 185$.

Rješenje

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

a) Odredimo najprije konstantu A .

Napomena: $k > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{A}{1 + Be^{-kt}} = \frac{A}{1 + B \cdot 0} = A$$

Iz uvjeta zadatka slijedi $A = 185$.

Odredimo sada konstantu B .

Rješenje

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

a) Odredimo najprije konstantu A .

Napomena: $k > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{A}{1 + Be^{-kt}} = \frac{A}{1 + B \cdot 0} = A$$

Iz uvjeta zadatka slijedi $A = 185$.

Odredimo sada konstantu B .

$$f(0) = 53$$

Rješenje

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

a) Odredimo najprije konstantu A .

Napomena: $k > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{A}{1 + Be^{-kt}} = \frac{A}{1 + B \cdot 0} = A$$

Iz uvjeta zadatka slijedi $A = 185$.

Odredimo sada konstantu B .

$$f(0) = 53$$

$$\frac{185}{1 + Be^{-k \cdot 0}} = 53$$

Rješenje

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

a) Odredimo najprije konstantu A .

Napomena: $k > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{A}{1 + Be^{-kt}} = \frac{A}{1 + B \cdot 0} = A$$

Iz uvjeta zadatka slijedi $A = 185$.

Odredimo sada konstantu B .

$$f(0) = 53$$

$$\frac{185}{1 + Be^{-k \cdot 0}} = 53$$

$$\frac{185}{1 + B} = 53$$

Rješenje

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

a) Odredimo najprije konstantu A .

Napomena: $k > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{A}{1 + Be^{-kt}} = \frac{A}{1 + B \cdot 0} = A$$

Iz uvjeta zadatka slijedi $A = 185$.

Odredimo sada konstantu B .

$$f(0) = 53$$

$$1 + B = \frac{185}{53}$$

$$\frac{185}{1 + Be^{-k \cdot 0}} = 53$$

$$\frac{185}{1 + B} = 53$$

Rješenje

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

a) Odredimo najprije konstantu A .

Napomena: $k > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{A}{1 + Be^{-kt}} = \frac{A}{1 + B \cdot 0} = A$$

Iz uvjeta zadatka slijedi $A = 185$.

Odredimo sada konstantu B .

$$f(0) = 53$$

$$1 + B = \frac{185}{53}$$

$$\frac{185}{1 + Be^{-k \cdot 0}} = 53$$

$$B = \frac{132}{53}$$

$$\frac{185}{1 + B} = 53$$

Rješenje

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

a) Odredimo najprije konstantu A .

Napomena: $k > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{A}{1 + Be^{-kt}} = \frac{A}{1 + B \cdot 0} = A$$

Iz uvjeta zadatka slijedi $A = 185$.

Odredimo sada konstantu B .

$$f(0) = 53$$

$$1 + B = \frac{185}{53}$$

$$\frac{185}{1 + Be^{-k \cdot 0}} = 53$$

$$B = \frac{132}{53}$$

$$\frac{185}{1 + B} = 53$$

$$B \approx 2.49057$$

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

Konačno odredimo konstantu k .

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

Konačno odredimo konstantu k .

$$p = 28, \quad q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{28}{100} = 1.28$$

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

Konačno odredimo konstantu k .

$$p = 28, \quad q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{28}{100} = 1.28$$

$$q = e^k,$$

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

Konačno odredimo konstantu k .

$$p = 28, \quad q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{28}{100} = 1.28$$

$$q = e^k, \quad e^k = 1.28,$$

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

Konačno odredimo konstantu k .

$$p = 28, \quad q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{28}{100} = 1.28$$

$$q = e^k, \quad e^k = 1.28, \quad k = \ln 1.28,$$

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

Konačno odredimo konstantu k .

$$p = 28, \quad q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{28}{100} = 1.28$$

$$q = e^k, \quad e^k = 1.28, \quad k = \ln 1.28, \quad k \approx 0.24686$$

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

Konačno odredimo konstantu k .

$$p = 28, \quad q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{28}{100} = 1.28$$

$$q = e^k, \quad e^k = 1.28, \quad k = \ln 1.28, \quad k \approx 0.24686$$

$$f(t) = \frac{185}{1 + 2.49057e^{-0.24686t}}$$

b) $1.5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$

$$f(t) = 150$$

b) $1.5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$

$$f(t) = 150$$

$$\frac{185}{1 + 2.49057e^{-0.24686t}} = 150$$

b) $1.5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$

$$f(t) = 150$$

$$\frac{185}{1 + 2.49057e^{-0.24686t}} = 150$$

$$1 + 2.49057e^{-0.24686t} = \frac{185}{150}$$

b) $1.5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$

$$f(t) = 150$$

$$\frac{185}{1 + 2.49057e^{-0.24686t}} = 150$$

$$1 + 2.49057e^{-0.24686t} = \frac{185}{150}$$

$$2.49057e^{-0.24686t} = \frac{37}{30} - 1$$

b) $1.5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$

$$f(t) = 150$$

$$\frac{185}{1 + 2.49057e^{-0.24686t}} = 150$$

$$1 + 2.49057e^{-0.24686t} = \frac{185}{150}$$

$$2.49057e^{-0.24686t} = \frac{37}{30} - 1$$

$$2.49057e^{-0.24686t} = 0.23333$$

b) $1.5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$

$$f(t) = 150$$

$$e^{-0.24686t} = \frac{0.23333}{2.49057}$$

$$\frac{185}{1 + 2.49057e^{-0.24686t}} = 150$$

$$1 + 2.49057e^{-0.24686t} = \frac{185}{150}$$

$$2.49057e^{-0.24686t} = \frac{37}{30} - 1$$

$$2.49057e^{-0.24686t} = 0.23333$$

b) $1.5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$

$$f(t) = 150$$

$$\frac{185}{1 + 2.49057e^{-0.24686t}} = 150$$

$$1 + 2.49057e^{-0.24686t} = \frac{185}{150}$$

$$2.49057e^{-0.24686t} = \frac{37}{30} - 1$$

$$2.49057e^{-0.24686t} = 0.23333$$

$$e^{-0.24686t} = \frac{0.23333}{2.49057}$$

$$-0.24686t = \ln \frac{0.23333}{2.49057}$$

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

b) $1.5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$

$$f(t) = 150$$

$$\frac{185}{1 + 2.49057e^{-0.24686t}} = 150$$

$$1 + 2.49057e^{-0.24686t} = \frac{185}{150}$$

$$2.49057e^{-0.24686t} = \frac{37}{30} - 1$$

$$2.49057e^{-0.24686t} = 0.23333$$

$$e^{-0.24686t} = \frac{0.23333}{2.49057}$$

$$-0.24686t = \ln \frac{0.23333}{2.49057}$$

$$t = 9.59172$$

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

b) $1.5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$

$$f(t) = 150$$

$$\frac{185}{1 + 2.49057e^{-0.24686t}} = 150$$

$$1 + 2.49057e^{-0.24686t} = \frac{185}{150}$$

$$2.49057e^{-0.24686t} = \frac{37}{30} - 1$$

$$2.49057e^{-0.24686t} = 0.23333$$

$$0.59172 \text{ god} =$$

$$e^{-0.24686t} = \frac{0.23333}{2.49057}$$

$$-0.24686t = \ln \frac{0.23333}{2.49057}$$

$$t = 9.59172$$

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

b) $1.5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$

$$f(t) = 150$$

$$\frac{185}{1 + 2.49057e^{-0.24686t}} = 150$$

$$1 + 2.49057e^{-0.24686t} = \frac{185}{150}$$

$$2.49057e^{-0.24686t} = \frac{37}{30} - 1$$

$$2.49057e^{-0.24686t} = 0.23333$$

$$e^{-0.24686t} = \frac{0.23333}{2.49057}$$

$$-0.24686t = \ln \frac{0.23333}{2.49057}$$

$$t = 9.59172$$

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

$$0.59172 \text{ god} = 0.59172 \cdot 12 \text{ mjeseci}$$

b) $1.5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$

$$f(t) = 150$$

$$\frac{185}{1 + 2.49057e^{-0.24686t}} = 150$$

$$1 + 2.49057e^{-0.24686t} = \frac{185}{150}$$

$$2.49057e^{-0.24686t} = \frac{37}{30} - 1$$

$$2.49057e^{-0.24686t} = 0.23333$$

$$e^{-0.24686t} = \frac{0.23333}{2.49057}$$

$$-0.24686t = \ln \frac{0.23333}{2.49057}$$

$$t = 9.59172$$

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

$$0.59172 \text{ god} = 0.59172 \cdot 12 \text{ mjeseci} = 7.10064 \text{ mjeseci}$$

b) $1.5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$

$$f(t) = 150$$

$$\frac{185}{1 + 2.49057e^{-0.24686t}} = 150$$

$$1 + 2.49057e^{-0.24686t} = \frac{185}{150}$$

$$2.49057e^{-0.24686t} = \frac{37}{30} - 1$$

$$2.49057e^{-0.24686t} = 0.23333$$

$$e^{-0.24686t} = \frac{0.23333}{2.49057}$$

$$-0.24686t = \ln \frac{0.23333}{2.49057}$$

$$t = 9.59172$$

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

$$0.59172 \text{ god} = 0.59172 \cdot 12 \text{ mjeseci} = 7.10064 \text{ mjeseci}$$

Dijete će biti visoko 1.5 m nakon 9 godina i 7 mjeseci.

- c) Brzinu rasta funkcije f mjeri derivacija f' . Najveća brzina se postiže u točki infleksije.

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

$$f'(t) = \frac{ABke^{-kt}}{(1 + Be^{-kt})^2}$$

$$f''(t) = \frac{ABk^2e^{-kt}(Be^{-kt} - 1)}{(1 + Be^{-kt})^3}$$

- c) Brzinu rasta funkcije f mjeri derivacija f' . Najveća brzina se postiže u točki infleksije.

$$A, B, k > 0$$

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

$$f'(t) = \frac{ABke^{-kt}}{(1 + Be^{-kt})^2}$$

$$f' > 0$$

$$f''(t) = \frac{ABk^2 e^{-kt} (Be^{-kt} - 1)}{(1 + Be^{-kt})^3}$$

- c) Brzinu rasta funkcije f mjeri derivacija f' . Najveća brzina se postiže u točki infleksije.

$$A, B, k > 0$$

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

f strogo raste

$$f'(t) = \frac{ABke^{-kt}}{(1 + Be^{-kt})^2}$$

$$f' > 0$$

$$f''(t) = \frac{ABk^2 e^{-kt} (Be^{-kt} - 1)}{(1 + Be^{-kt})^3}$$

- c) Brzinu rasta funkcije f mjeri derivacija f' . Najveća brzina se postiže u točki infleksije.

$$A, B, k > 0$$

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

f strogo raste

$$f'(t) = \frac{ABke^{-kt}}{(1 + Be^{-kt})^2}$$

$$f' > 0$$

$$f''(t) = \frac{ABk^2 e^{-kt} (Be^{-kt} - 1)}{(1 + Be^{-kt})^3}$$

$$f''(t) = 0$$

- c) Brzinu rasta funkcije f mjeri derivacija f' . Najveća brzina se postiže u točki infleksije.

$$A, B, k > 0$$

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

f strogo raste

$$f'(t) = \frac{ABke^{-kt}}{(1 + Be^{-kt})^2}$$

$$f' > 0$$

$$f''(t) = \frac{ABk^2 e^{-kt} (Be^{-kt} - 1)}{(1 + Be^{-kt})^3}$$

$$f''(t) = 0 \Rightarrow Be^{-kt} - 1 = 0$$

- c) Brzinu rasta funkcije f mjeri derivacija f' . Najveća brzina se postiže u točki infleksije.

$$A, B, k > 0$$

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

f strogo raste

$$f'(t) = \frac{ABke^{-kt}}{(1 + Be^{-kt})^2}$$

$$f' > 0$$

$$f''(t) = \frac{ABk^2 e^{-kt} (Be^{-kt} - 1)}{(1 + Be^{-kt})^3}$$

$$f''(t) = 0 \Rightarrow Be^{-kt} - 1 = 0 \Rightarrow e^{-kt} = \frac{1}{B}$$

- c) Brzinu rasta funkcije f mjeri derivacija f' . Najveća brzina se postiže u točki infleksije.

$$A, B, k > 0$$

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

f strogo raste

$$f'(t) = \frac{ABke^{-kt}}{(1 + Be^{-kt})^2}$$

$$f' > 0$$

$$f''(t) = \frac{ABk^2 e^{-kt} (Be^{-kt} - 1)}{(1 + Be^{-kt})^3}$$

$$f''(t) = 0 \Rightarrow Be^{-kt} - 1 = 0 \Rightarrow e^{-kt} = \frac{1}{B} \Rightarrow -kt = \ln \frac{1}{B}$$

- c) Brzinu rasta funkcije f mjeri derivacija f' . Najveća brzina se postiže u točki infleksije.

$$A, B, k > 0$$

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

f strogo raste

$$f'(t) = \frac{ABke^{-kt}}{(1 + Be^{-kt})^2}$$

$$f' > 0$$

$$f''(t) = \frac{ABk^2 e^{-kt} (Be^{-kt} - 1)}{(1 + Be^{-kt})^3}$$

$$f''(t) = 0 \Rightarrow Be^{-kt} - 1 = 0 \Rightarrow e^{-kt} = \frac{1}{B} \Rightarrow -kt = \ln \frac{1}{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{k} \ln \frac{1}{B}$$

- c) Brzinu rasta funkcije f mjeri derivacija f' . Najveća brzina se postiže u točki infleksije.

$$A, B, k > 0$$

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

f strogo raste

$$f'(t) = \frac{ABke^{-kt}}{(1 + Be^{-kt})^2}$$

$$f' > 0$$

$$f''(t) = \frac{ABk^2 e^{-kt} (Be^{-kt} - 1)}{(1 + Be^{-kt})^3}$$

$$f''(t) = 0 \Rightarrow Be^{-kt} - 1 = 0 \Rightarrow e^{-kt} = \frac{1}{B} \Rightarrow -kt = \ln \frac{1}{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{k} \ln \frac{1}{B} \Rightarrow t = -\frac{1}{k} \ln B^{-1}$$

- c) Brzinu rasta funkcije f mjeri derivacija f' . Najveća brzina se postiže u točki infleksije.

$$A, B, k > 0$$

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

f strogo raste

$$f'(t) = \frac{ABke^{-kt}}{(1 + Be^{-kt})^2}$$

$$f' > 0$$

$$f''(t) = \frac{ABk^2 e^{-kt} (Be^{-kt} - 1)}{(1 + Be^{-kt})^3}$$

$$f''(t) = 0 \Rightarrow Be^{-kt} - 1 = 0 \Rightarrow e^{-kt} = \frac{1}{B} \Rightarrow -kt = \ln \frac{1}{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{k} \ln \frac{1}{B} \Rightarrow t = -\frac{1}{k} \ln B^{-1} \Rightarrow t = \frac{\ln B}{k}$$

- c) Brzinu rasta funkcije f mjeri derivacija f' . Najveća brzina se postiže u točki infleksije.

$$A, B, k > 0$$

$$f(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

f strogo raste

$$f'(t) = \frac{ABke^{-kt}}{(1 + Be^{-kt})^2}$$

$$f' > 0$$

$$f\left(\frac{\ln B}{k}\right) = \frac{A}{2}$$

$$f''(t) = \frac{ABk^2 e^{-kt}(Be^{-kt} - 1)}{(1 + Be^{-kt})^3}$$

$$f''(t) = 0 \Rightarrow Be^{-kt} - 1 = 0 \Rightarrow e^{-kt} = \frac{1}{B} \Rightarrow -kt = \ln \frac{1}{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{k} \ln \frac{1}{B} \Rightarrow t = -\frac{1}{k} \ln B^{-1} \Rightarrow t = \frac{\ln B}{k}$$

U našem slučaju je

$$t = \frac{\ln B}{k} = \frac{\ln 2.49057}{0.24686} = 3.69647$$

$$0.69647 \text{ god} = 0.69647 \cdot 12 \text{ mjeseci} = 8.35764 \text{ mjeseci}$$

$$\frac{A}{2} = \frac{185}{2} = 92.5$$

Dijete najbrže raste nakon približno 3 godine i 8 mjeseci. U trenutku najbržeg rasta ima visinu od 92.5 cm.

U našem slučaju je

$$t = \frac{\ln B}{k} = \frac{\ln 2.49057}{0.24686} = 3.69647$$

$$0.69647 \text{ god} = 0.69647 \cdot 12 \text{ mjeseci} = 8.35764 \text{ mjeseci}$$

$$\frac{A}{2} = \frac{185}{2} = 92.5$$

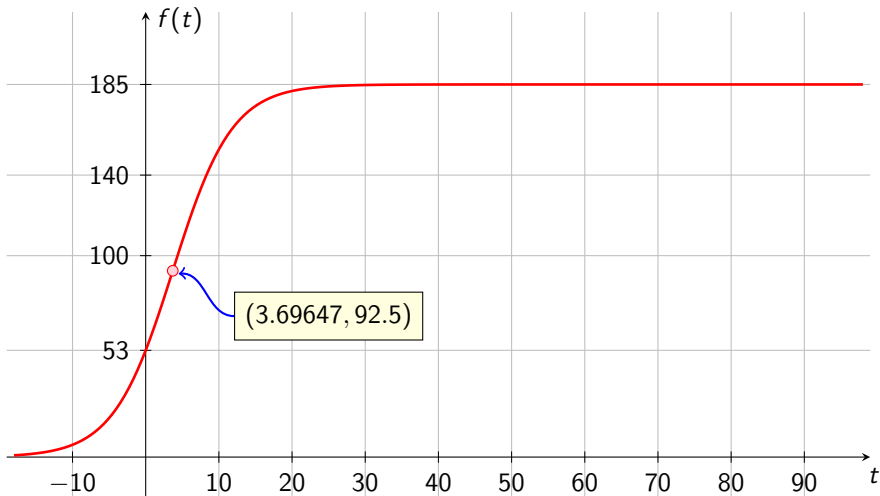
Dijete najbrže raste nakon približno 3 godine i 8 mjeseci. U trenutku najbržeg rasta ima visinu od 92.5 cm.

Zadaća

Odredite prvu i drugu derivaciju te točku infleksije za konkretnu funkciju

$$f(t) = \frac{185}{1 + 2.49057e^{-0.24686t}}.$$

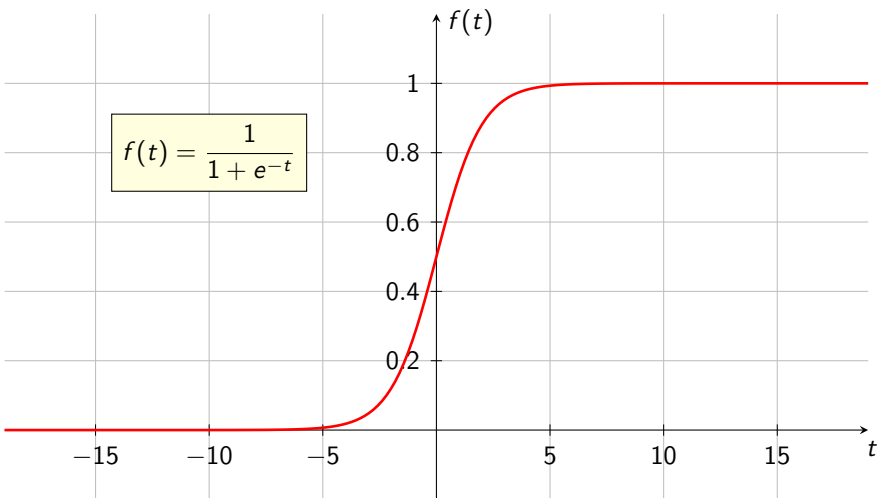
Provjerite da funkcija zaista ima točku infleksije.



$$f(t) = \frac{185}{1 + 2.49057e^{-0.24686t}}$$

Logistička regresija (klasifikacija)

- **mail:** spam, nije spam **student:** kolokvirao, nije kolokvirao



Granične funkcije

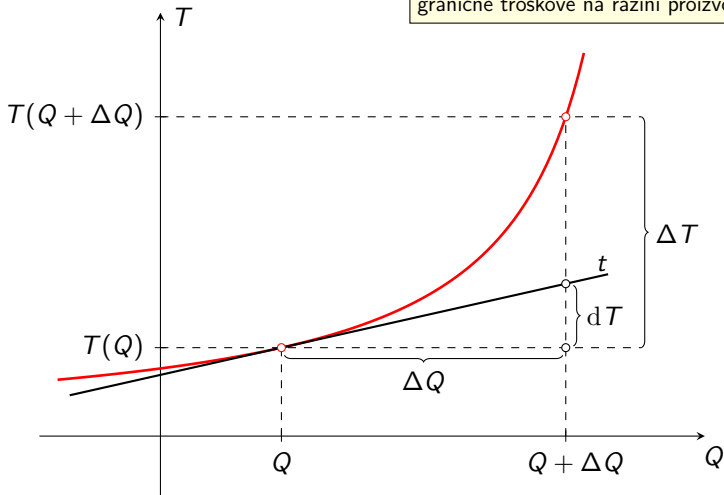
Granični trošak pokazuje za koliko se poveća trošak ako se proizvodnja poveća za jedan proizvod. Funkcija graničnih ili marginalnih troškova T_g dobije se kao derivacija funkcije troškova, tj. $T_g(Q) = T'(Q)$.

Granična potražnja pokazuje za koliko se smanji potražnja ako se cijena poveća za jednu novčanu jedinicu. Funkcija granične ili marginalne potražnje q_g dobije se kao derivacija funkcije potražnje, tj. $q_g(p) = q'(p)$.

Granična ponuda pokazuje za koliko se poveća ponuda ako se cijena poveća za jednu novčanu jedinicu. Funkcija granične ili marginalne ponude q_g dobije se kao derivacija funkcije ponude, tj. $q_g(p) = q'(p)$.

Vizualizacija graničnih troškova

Kada je $\Delta Q = 1$, tada dT predstavlja granične troškove na razini proizvodnje Q .



sedmi zadatak

Zadatak 7

Zadana je funkcija graničnih troškova $T_G = (1 + Q)e^{-Q}$.

- a) *Odredite za koliko se promijene troškovi ako se proizvodnja s dva proizvoda poveća na pet proizvoda.*
- b) *Odredite funkciju troškova ako fiksni troškovi iznose 100 novčanih jedinica.*

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T = \int (1 + Q)e^{-Q} dQ$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T = \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T = \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q)$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T = \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q) \cdot$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T = \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q) \cdot (-e^{-Q})'$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T = \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q) \cdot (-e^{-Q})' dQ$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$\begin{aligned} T &= \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q) \cdot (-e^{-Q})' dQ = \\ &= (1 + Q) \cdot (-e^{-Q}) \end{aligned}$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T = \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q) \cdot (-e^{-Q})' dQ =$$

$$= (1 + Q) \cdot (-e^{-Q}) -$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$\begin{aligned} T &= \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q) \cdot (-e^{-Q})' dQ = \\ &= (1 + Q) \cdot (-e^{-Q}) - \int (1 + Q)' \cdot (-e^{-Q}) dQ \end{aligned}$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T = \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q) \cdot (-e^{-Q})' dQ =$$

$$= (1 + Q) \cdot (-e^{-Q}) - \int (1 + Q)' \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q}$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T = \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q) \cdot (-e^{-Q})' dQ =$$

$$= (1 + Q) \cdot (-e^{-Q}) - \int (1 + Q)' \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} -$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T = \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q) \cdot (-e^{-Q})' dQ =$$

$$= (1 + Q) \cdot (-e^{-Q}) - \int (1 + Q)' \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} - \int 1 \cdot (-e^{-Q}) dQ$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T = \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q) \cdot (-e^{-Q})' dQ =$$

$$= (1 + Q) \cdot (-e^{-Q}) - \int (1 + Q)' \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} - \int 1 \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q}$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T = \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q) \cdot (-e^{-Q})' dQ =$$

$$= (1 + Q) \cdot (-e^{-Q}) - \int (1 + Q)' \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} - \int 1 \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} + \int e^{-Q} dQ$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T = \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q) \cdot (-e^{-Q})' dQ =$$

$$= (1 + Q) \cdot (-e^{-Q}) - \int (1 + Q)' \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} - \int 1 \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} + \int e^{-Q} dQ =$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T = \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q) \cdot (-e^{-Q})' dQ =$$

$$= (1 + Q) \cdot (-e^{-Q}) - \int (1 + Q)' \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} - \int 1 \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} + \int e^{-Q} dQ = -(1 + Q)e^{-Q}$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T = \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q) \cdot (-e^{-Q})' dQ =$$

$$= (1 + Q) \cdot (-e^{-Q}) - \int (1 + Q)' \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} - \int 1 \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} + \int e^{-Q} dQ = -(1 + Q)e^{-Q} - e^{-Q}$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$\begin{aligned} T &= \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q) \cdot (-e^{-Q})' dQ = \\ &= (1 + Q) \cdot (-e^{-Q}) - \int (1 + Q)' \cdot (-e^{-Q}) dQ = \\ &= -(1 + Q)e^{-Q} - \int 1 \cdot (-e^{-Q}) dQ = \\ &= -(1 + Q)e^{-Q} + \int e^{-Q} dQ = -(1 + Q)e^{-Q} - e^{-Q} + C \end{aligned}$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T = \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q) \cdot (-e^{-Q})' dQ =$$

$$= (1 + Q) \cdot (-e^{-Q}) - \int (1 + Q)' \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} - \int 1 \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} + \int e^{-Q} dQ = -(1 + Q)e^{-Q} - e^{-Q} + C =$$

$$= (\quad)e^{-Q}$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T = \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q) \cdot (-e^{-Q})' dQ =$$

$$= (1 + Q) \cdot (-e^{-Q}) - \int (1 + Q)' \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} - \int 1 \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} + \int e^{-Q} dQ = -(1 + Q)e^{-Q} - e^{-Q} + C =$$

$$= (-Q - 1)e^{-Q}$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T = \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q) \cdot (-e^{-Q})' dQ =$$

$$= (1 + Q) \cdot (-e^{-Q}) - \int (1 + Q)' \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} - \int 1 \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} + \int e^{-Q} dQ = -(1 + Q)e^{-Q} - e^{-Q} + C =$$

$$= (-Q - 2)e^{-Q}$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T = \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q) \cdot (-e^{-Q})' dQ =$$

$$= (1 + Q) \cdot (-e^{-Q}) - \int (1 + Q)' \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} - \int 1 \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} + \int e^{-Q} dQ = -(1 + Q)e^{-Q} - e^{-Q} + C =$$

$$= (-Q - 2)e^{-Q} + C$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T = \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q) \cdot (-e^{-Q})' dQ =$$

$$= (1 + Q) \cdot (-e^{-Q}) - \int (1 + Q)' \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} - \int 1 \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} + \int e^{-Q} dQ = -(1 + Q)e^{-Q} - e^{-Q} + C =$$

$$= (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Rješenje

a)

$$T_G = T'$$

$$T' = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$T = \int (1 + Q)e^{-Q} dQ = \int (1 + Q) \cdot (-e^{-Q})' dQ =$$

$$= (1 + Q) \cdot (-e^{-Q}) - \int (1 + Q)' \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} - \int 1 \cdot (-e^{-Q}) dQ =$$

$$= -(1 + Q)e^{-Q} + \int e^{-Q} dQ = -(1 + Q)e^{-Q} - e^{-Q} + C =$$

$$= (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$T'(Q) = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$T(5) - T(2) =$$

$$T'(Q) = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$T(5) - T(2) = \int_2^5 T'(Q) \, dQ$$

$$T'(Q) = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$T(5) - T(2) = \int_2^5 T'(Q) \, dQ = \int_2^5 (1 + Q)e^{-Q} \, dQ$$

$$T'(Q) = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} T(5) - T(2) &= \int_2^5 T'(Q) \, dQ = \int_2^5 (1 + Q)e^{-Q} \, dQ = \\ &= (-Q - 2)e^{-Q} \Big|_2^5 \end{aligned}$$

$$T'(Q) = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} T(5) - T(2) &= \int_2^5 T'(Q) \, dQ = \int_2^5 (1 + Q)e^{-Q} \, dQ = \\ &= (-Q - 2)e^{-Q} \Big|_2^5 = (-5 - 2)e^{-5} \end{aligned}$$

$$T'(Q) = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} T(5) - T(2) &= \int_2^5 T'(Q) \, dQ = \int_2^5 (1 + Q)e^{-Q} \, dQ = \\ &= (-Q - 2)e^{-Q} \Big|_2^5 = (-5 - 2)e^{-5} - \end{aligned}$$

$$T'(Q) = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} T(5) - T(2) &= \int_2^5 T'(Q) \, dQ = \int_2^5 (1 + Q)e^{-Q} \, dQ = \\ &= (-Q - 2)e^{-Q} \Big|_2^5 = (-5 - 2)e^{-5} - (-2 - 2)e^{-2} \end{aligned}$$

$$T'(Q) = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} T(5) - T(2) &= \int_2^5 T'(Q) \, dQ = \int_2^5 (1 + Q)e^{-Q} \, dQ = \\ &= (-Q - 2)e^{-Q} \Big|_2^5 = (-5 - 2)e^{-5} - (-2 - 2)e^{-2} = \\ &= 4e^{-2} - 7e^{-5} \end{aligned}$$

$$T'(Q) = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} T(5) - T(2) &= \int_2^5 T'(Q) \, dQ = \int_2^5 (1 + Q)e^{-Q} \, dQ = \\ &= (-Q - 2)e^{-Q} \Big|_2^5 = (-5 - 2)e^{-5} - (-2 - 2)e^{-2} = \\ &= 4e^{-2} - 7e^{-5} \approx 0.49418 \end{aligned}$$

$$T'(Q) = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} T(5) - T(2) &= \int_2^5 T'(Q) \, dQ = \int_2^5 (1 + Q)e^{-Q} \, dQ = \\ &= (-Q - 2)e^{-Q} \Big|_2^5 = (-5 - 2)e^{-5} - (-2 - 2)e^{-2} = \\ &= 4e^{-2} - 7e^{-5} \approx 0.49418 \end{aligned}$$

Troškovi se promijene za približno 0.49 novčanih jedinica.

$$T'(Q) = (1 + Q)e^{-Q}$$

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} T(5) - T(2) &= \int_2^5 T'(Q) \, dQ = \int_2^5 (1 + Q)e^{-Q} \, dQ = \\ &= (-Q - 2)e^{-Q} \Big|_2^5 = (-5 - 2)e^{-5} - (-2 - 2)e^{-2} = \\ &= 4e^{-2} - 7e^{-5} \approx 0.49418 \end{aligned}$$

Troškovi se promijene za približno 0.49 novčanih jedinica.

Ova promjena troškova vrijedi za svaki $C \in \mathbb{R}$.

b)

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

b)

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$T(0) = 100$$

b)

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$T(0) = 100$$

$$(-0 - 2) \cdot e^{-0} + C = 100$$

b)

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$T(0) = 100$$

$$(-0 - 2) \cdot e^{-0} + C = 100$$

$$-2 + C = 100$$

b)

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$T(0) = 100$$

$$(-0 - 2) \cdot e^{-0} + C = 100$$

$$-2 + C = 100$$

$$C = 102$$

b)

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

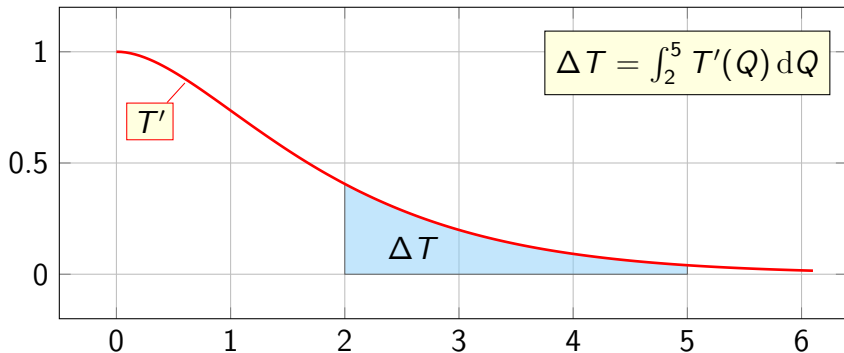
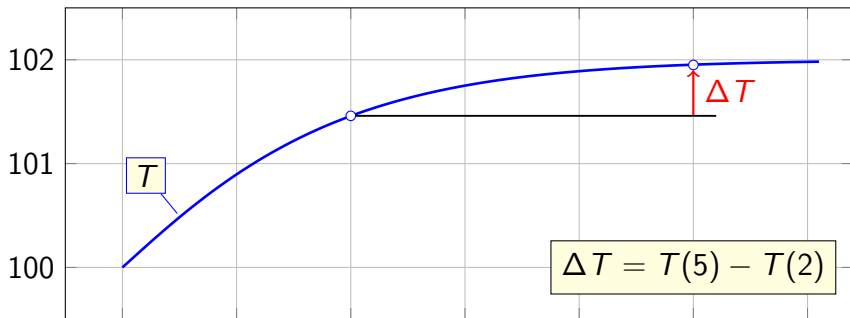
$$T(0) = 100$$

$$(-0 - 2) \cdot e^{-0} + C = 100$$

$$-2 + C = 100$$

$$C = 102$$

$$T(Q) = (-Q - 2)e^{-Q} + 102$$



Domaća zadaća

Zadatak 8

Zadana je funkcija troškova

$$T(Q) = 2Q^3 + 5Q^2 + 3Q + 1.$$

- a) *Odredite granične troškove na razini proizvodnje od 5 proizvoda i interpretirajte dobiveni rezultat.*
- b) *Odredite stvarnu promjenu troškova kada se proizvodnja s 5 proizvoda poveća na 6 proizvoda.*
- c) *Usporedite rezultate iz a) i b) dijela zadatka i prikažite ih grafički na slici zajedno s grafom funkcije troškova.*