

Složeni dekurzivni kamatni račun

FINANCIJSKA MATEMATIKA, IPS

Damir Horvat

FOI, Varaždin

$$C_{32} = C_0 \cdot r_{mj}^{32}$$

$$r_{mj}^{32} = \frac{C_{32}}{C_0}$$

$$r_{mj} = \sqrt[32]{\frac{C_{32}}{C_0}}$$

$$r_{mj} = \sqrt[32]{\frac{9500}{8000}}$$

$$r_{mj} = 1.0053847665 \dots$$

$$r_{mj} = 1 + \frac{p_{mj}}{100}$$

$$p_{mj} = 100(r_{mj} - 1)$$

$$p_{mj} = 0.5384767\%$$

$$r_{god} = r_{mj}^{12}$$

$$r_{god} = 1.066565685 \dots$$

$$r_{god} = 1 + \frac{p_{god}}{100}$$

$$p_{god} = 100(r_{god} - 1)$$

$$p_{god} = 6.65657\%$$

2 / 26

Zadatak 1

Uz koju je mjesečnu kamatnu stopu posuđeno 8000 kn ako nakon 32 mjeseca dužnik treba vratiti 9500 kn? Kolika je ekvivalentna godišnja kamatna stopa? Obračun kamata je složeni i dekurzivni.

Rješenje

- $C_0 = 8000$, $n = 32$, $C_{32} = 9500$
- Koristimo formulu $C_n = C_0 r^n$.

1 / 26

Nekoliko napomena

- kvartalni dekurzivni kamatni faktor

$$r_{kv} = r_{mj}^3 \quad \text{ili} \quad r_{kv} = \sqrt[4]{r_{god}} \quad \text{ili} \quad r_{kv} = \sqrt{r_{pgod}}$$

- polugodišnji dekurzivni kamatni faktor

$$r_{pgod} = r_{mj}^6 \quad \text{ili} \quad r_{pgod} = \sqrt{r_{god}} \quad \text{ili} \quad r_{pgod} = r_{kv}^2$$

- mjesečni dekurzivni kamatni faktor

$$r_{mj} = \sqrt[12]{r_{god}} \quad \text{ili} \quad r_{mj} = \sqrt[3]{r_{kv}} \quad \text{ili} \quad r_{mj} = \sqrt[6]{r_{pgod}}$$

- godišnji dekurzivni kamatni faktor

$$r_{god} = r_{mj}^{12} \quad \text{ili} \quad r_{god} = r_{pgod}^2 \quad \text{ili} \quad r_{god} = r_{kv}^4$$

3 / 26

Zadatak 2

Zadana je glavnica od 1200 kn i godišnja kamatna stopa 5%.

- Odredite vrijednost glavnice nakon 8 mjeseci uz konformno ukamaćivanje.
- Odredite vrijednost glavnice nakon 8 mjeseci uz relativno mjesečno ukamaćivanje.

Obračuna kamata je složeni i dekurzivni.

4 / 26

Zadatak 3

Stipe uplati 10 000 kn, a nakon 15 mjeseci podigne 3800 kn.

- Koliko novaca ima Stipe tri i pol godine nakon prve uplate?
- Nakon koliko će mjeseci, u odnosu na zadnje stanje, Stipe ponovo raspolagati s 10 000 kn?
- Koliko bi novaca morao podići četiri godine nakon prve uplate tako da bi pet godina nakon prve uplate imao polovicu iznosa kojeg je uplatio?

Godišnja kamatna stopa je 11.1%.

6 / 26

Rješenje

- Mjesečni dekurzivni kamatni faktor je $r = \sqrt[12]{1.05}$ pa korištenjem formule $C_n = C_0 r^n$ dobivamo

$$C_8 = 1200 \cdot \sqrt[12]{1.05}^8 = 1239.67$$

- Relativna mjesečna kamatna stopa: $p_r = \frac{5}{12}$

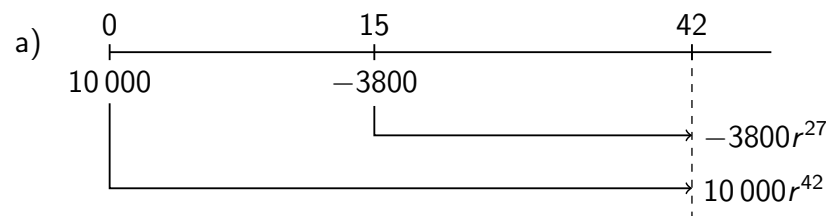
Mjesečni dekurzivni kamatni faktor:

$$r = 1 + \frac{p_r}{100} = 1 + \frac{\frac{5}{12}}{100} = 1 + \frac{5}{1200} = \frac{241}{240}$$

Korištenjem formule $C_n = C_0 r^n$ dobivamo

$$C_8 = 1200 \cdot \left(\frac{241}{240}\right)^8 = 1240.59$$

5 / 26

Rješenje

$$r = \sqrt[12]{1.111} \quad C_{42} = 10\,000r^{42} - 3800r^{27}$$

$$C_{42} = 10\,000 \cdot \sqrt[12]{1.111}^{42} - 3800 \cdot \sqrt[12]{1.111}^{27}$$

$$C_{42} = 9638.88$$

Tri i pol godine nakon prve uplate Stipe ima 9638.88 kn.

7 / 26

b)

$$C_{42}r^n = 10\,000$$

$$r^n = \frac{10\,000}{C_{42}} \bigg/ \log$$

$$n \log r = \log \frac{10\,000}{C_{42}}$$

$$n = \frac{\log \frac{10\,000}{C_{42}}}{\log r}$$

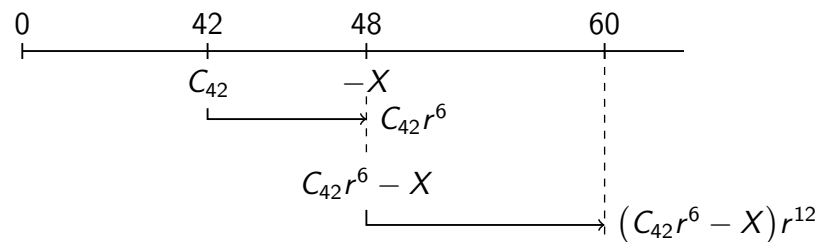
$$n = \frac{\log \frac{10\,000}{9638.88}}{\log \sqrt[12]{1.111}}$$

$$n = 4.19$$

Stipe će ponovo raspolagati s 10 000 kn nakon 5 mjeseci od zadnjeg stanja.

8 / 26

Drugi način razmišljanja



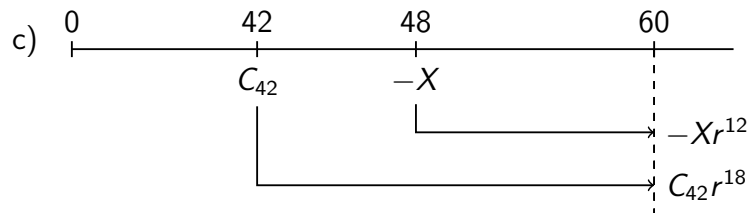
$$(C_{42}r^6 - X)r^{12} = 5000$$

$$C_{42}r^{18} - Xr^{12} = 5000$$

$$\vdots$$

$$X = 5659.32$$

10 / 26



$$C_{42}r^{18} - Xr^{12} = 5000$$

$$Xr^{12} = C_{42}r^{18} - 5000$$

$$X = \frac{C_{42}r^{18} - 5000}{r^{12}}$$

$$X = \frac{9638.88 \cdot \sqrt[12]{1.111}^{18} - 5000}{\sqrt[12]{1.111}^{12}}$$

$$X = 5659.32$$

9 / 26

Zadatak 4

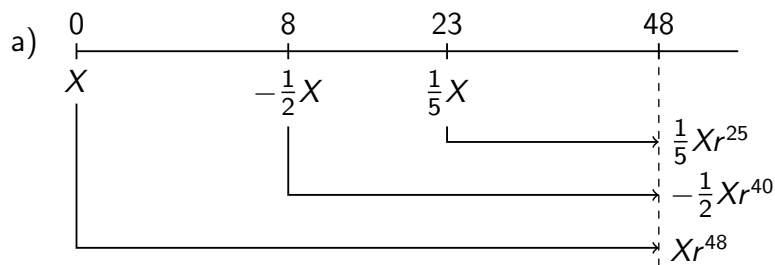
Martina uplati nepoznati iznos. Nakon 8 mjeseci podigne polovinu tog iznosa, a 5 kvartala nakon toga uplati još $\frac{1}{5}$ tog nepoznatog iznosa.

- Koliki je iznos uplaćen ako četiri godine nakon prve uplate Martina ima 8000 kn? Skicirajte tijek novca!
- Nakon koliko će kvartala u odnosu na prvu uplatu Martina raspolagati s dvostruko većim iznosom od prve uplate?

Godišnja dekurzivna kamatna stopa je 7.25%.

11 / 26

Rješenje



$$Xr^{48} - \frac{1}{2}Xr^{40} + \frac{1}{5}Xr^{25} = 8000$$

$$X \left(r^{48} - \frac{1}{2}r^{40} + \frac{1}{5}r^{25} \right) = 8000$$

$$X = \frac{8000}{r^{48} - \frac{1}{2}r^{40} + \frac{1}{5}r^{25}}$$

$$r = \sqrt[12]{1.0725}$$

$$X = 8666.44$$

12 / 26

Zadatak 5

Viktorija uplati nepoznati iznos. Nakon pola godine uloži još šestinu tog iznosa, a četiri mjeseca nakon toga podigne dvije devetine svote s kojom raspolaže u tom trenutku.

- a) Koliki je početni ulog ako na kraju godine Viktorija na računu ima 2950 kn, a godišnja kamatna stopa je 8.25%?
- b) Nakon koliko će polugodišta, u odnosu na zadnje stanje, Viktorija raspolagati s 4500 kn?

14 / 26

- b) U prvih 8 mjeseci uplaćeni iznos se neće udvostručiti.

$$Xr^8 = 8666.44 \cdot \sqrt[12]{1.0725}^8 = 9080.41, \quad 2X = 17332.88$$

Stoga gledamo od zadnjeg stanja.

$$8000 \cdot \sqrt[4]{1.0725}^n = 2X \quad n = \frac{\log \frac{X}{4000}}{\log \sqrt[4]{1.0725}}$$

$$\sqrt[4]{1.0725}^n = \frac{2X}{8000} \quad \log$$

$$n = \frac{\log \frac{8666.44}{4000}}{\log \sqrt[4]{1.0725}}$$

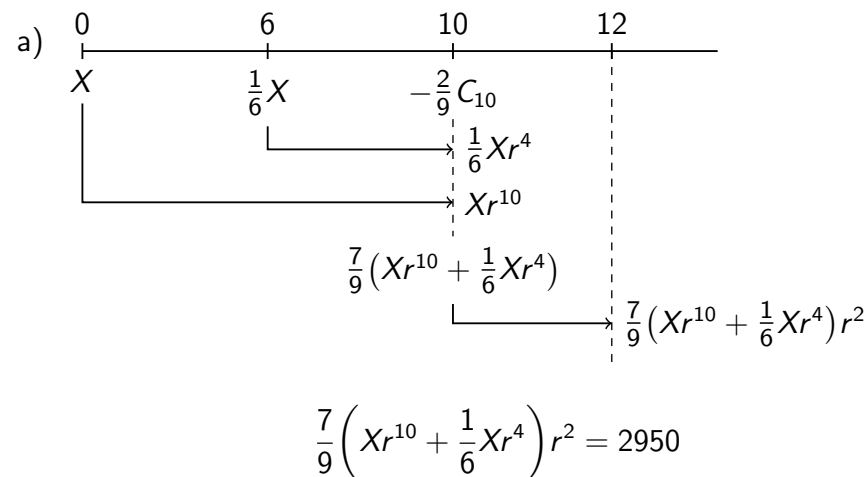
$$n \log \sqrt[4]{1.0725} = \log \frac{X}{4000}$$

$$n = 44.19$$

Martina će raspolagati s dvostruko većim iznosom od uplaćenog nakon $45 + 16 = 61$ kvartala od prve uplate.

13 / 26

Rješenje



15 / 26

$$\frac{7}{9} \left(Xr^{10} + \frac{1}{6}Xr^4 \right) r^2 = 2950$$

$$\frac{7}{9}Xr^{12} + \frac{7}{54}Xr^6 = 2950$$

$$X \left(\frac{7}{9}r^{12} + \frac{7}{54}r^6 \right) = 2950$$

$$r = \sqrt[12]{1.0825}$$

$$X = \frac{2950}{\frac{7}{9}r^{12} + \frac{7}{54}r^6}$$

$$X = 3020.02$$

16 / 26

b)

$$2950 \cdot \sqrt{1.0825}^n = 4500$$

$$\sqrt{1.0825}^n = \frac{4500}{2950} \bigg/ \log$$

$$n \log \sqrt{1.0825} = \log \frac{90}{59}$$

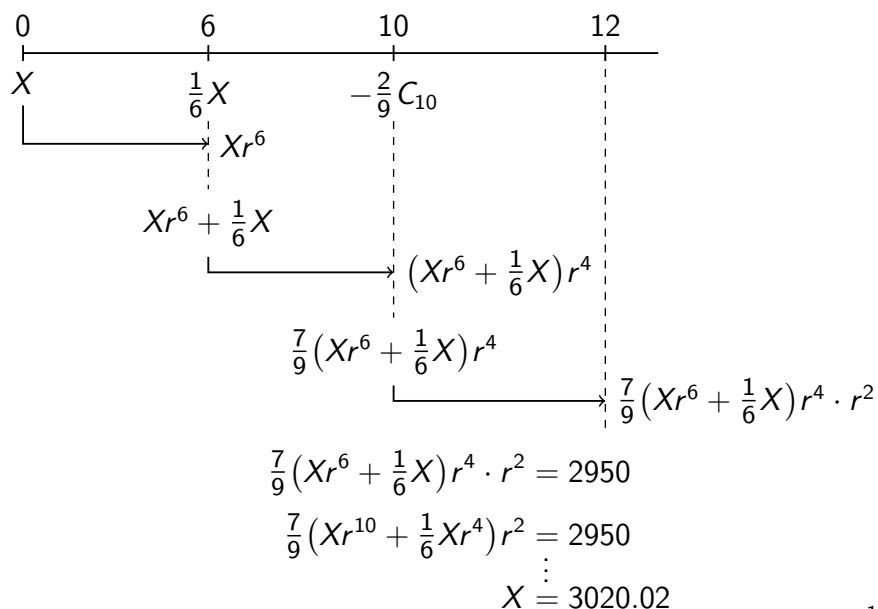
$$n = \frac{\log \frac{90}{59}}{\log \sqrt{1.0825}}$$

$$n = 10.65$$

Viktorija će raspolagati s 4500 kn nakon 11 polugodišta od zadnjeg stanja.

18 / 26

Drugi način razmišljanja



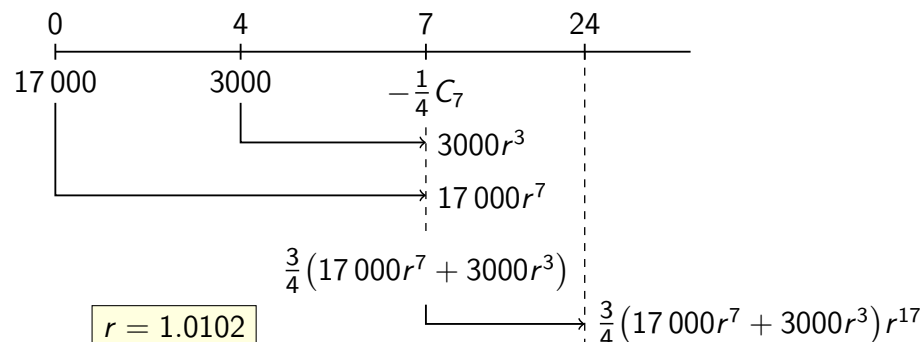
17 / 26

Zadatak 6

Netko uloži 17 000 kn uz mjesečnu kamatnu stopu 1.02%. Nakon četiri mjeseca uloži još 3000 kn, a tri mjeseca poslije podigne četvrtinu iznosa s kojim raspolaže u tom trenutku. S kojom svotom raspolaže dvije godine nakon prve uplate?

19 / 26

Rješenje



$$r = 1.0102$$

$$C_{24} = \frac{3}{4}(17\,000r^7 + 3000r^3)r^{17}$$

$$C_{24} = \frac{3}{4}(17\,000 \cdot 1.0102^7 + 3000 \cdot 1.0102^3) \cdot 1.0102^{17}$$

$$C_{24} = 19\,022.55$$

20 / 26

Zadatak 8

U nekoj šumi prije deset godina bilo je $160\,000\text{ m}^3$ drvne mase. Koliki je prirodni prirast u promilima ako u međuvremenu nije bilo sječe i sada u šumi ima $180\,000\text{ m}^3$ drvne mase?

$$C_n = C_0 e^{\frac{np}{100}}$$

Rješenje

$$C_0 = 160\,000, \quad C_{10} = 180\,000$$

Neprekidno ukamaćivanje

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

$$C_n = C_0 e^{\frac{np}{100}} \quad 1.125 = e^{\frac{p}{100}}$$

$$C_{10} = C_0 e^{\frac{10p}{100}} \quad \frac{p}{100} = \ln 1.125$$

$$p \approx 11.778$$

$$180\,000 = 160\,000 e^{\frac{p}{100}} \quad p = 100 \cdot \ln 1.125$$

Prirodni godišnji prirast jednak je 11.778 ‰.

22 / 26

Zadatak 7

Količina pastrva u ribogojilištu za 3 mjeseca se poveća za 70%.

Odredite prosječnu stopu godišnjeg prirasta pastrva.

Rješenje

$$C_n = C_0 e^{\frac{np}{100}}$$

$$\bullet \quad 3 \text{ mjeseca} = 0.25 \text{ godina}$$

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

$$\bullet \quad C_{0.25} = C_0 + \frac{70}{100} C_0 = 1.7 C_0$$

Neprekidno ukamaćivanje

$$C_n = C_0 e^{\frac{np}{100}} \quad 1.7 = e^{\frac{p}{400}}$$

$$C_{0.25} = C_0 e^{\frac{0.25p}{100}} \quad \frac{p}{400} = \ln 1.7$$

$$p \approx 212.25$$

$$1.7 C_0 = C_0 e^{\frac{p}{400}} \quad p = 400 \cdot \ln 1.7$$

Prosječna stopa godišnjeg prirasta pastrva jednaka je 212.25%.

21 / 26

Domaća zadaća

Zadatak 9

Kolika će glavnica uz složeni dekurzivni obračun kamata i godišnju kamatnu stopu 10% donijeti 64 000 kn kamata ako je novac oročen na 13 kvartala?

Rješenje

$$\bullet \quad C_n = C_0 r^n, \quad r = \sqrt[4]{1.1}, \quad n = 13$$

$$\bullet \quad \text{Kamate: } I = 64\,000$$

$$I = C_n - C_0 = C_0 r^n - C_0 = C_0 (r^n - 1)$$

$$C_0 = \frac{I}{r^n - 1} = \frac{64\,000}{\sqrt[4]{1.1}^{13} - 1} = 176\,262.26$$

23 / 26

Domaća zadaća

Zadatak 10

Nakon koliko će mjeseci glavnica udvostručiti svoju vrijednost uz složeni dekurzivni obračun kamata i godišnju kamatnu stopu 12%?

Rješenje

$$\bullet C_n = 2C_0, \quad r = \sqrt[12]{1.12}$$

$$\begin{aligned} C_n &= C_0 r^n & n &= \frac{\log 2}{\log r} \\ 2C_0 &= C_0 r^n & n &= \frac{\log 2}{\log \sqrt[12]{1.12}} \\ r^n &= 2 & n &= 73.395 \\ n &= \log_r 2 & n &= 73.395 \end{aligned}$$

Glavnica će udvostručiti svoju vrijednost nakon 74 mjeseca.

24 / 26

$$C_n = C_0 e^{\frac{np}{100}}$$

$$C_5 = C_0 e^{\frac{5p}{100}}$$

$$24\,000 = 19\,000 e^{\frac{p}{20}}$$

$$\frac{24}{19} = e^{\frac{p}{20}}$$

$$\frac{p}{20} = \ln \frac{24}{19}$$

$$p = 20 \cdot \ln \frac{24}{19}$$

$$p = 4.6723$$

Godišnja stopa rasta stanovništva jednaka je 4.6723%.

$$C_{12} = C_5 e^{\frac{7p}{100}}$$

$$C_{12} = 24\,000 \cdot e^{\frac{7 \cdot 4.6723}{100}}$$

$$C_{12} = 33\,285.27$$

Grad će imati 33 285 stanovnika.

26 / 26

Domaća zadaća

Zadatak 11

Neki grad imao je prije pet godina 19 000 stanovnika, a danas ima 24 000 stanovnika. Koliko će taj grad imati stanovnika za sedam godina ako godišnja stopa rasta ostane ista?

Rješenje

$$\bullet C_0 = 19\,000, \quad C_5 = 24\,000$$

$$\bullet \text{Neprekidno ukamaćivanje: } C_n = C_0 e^{\frac{np}{100}}$$

25 / 26