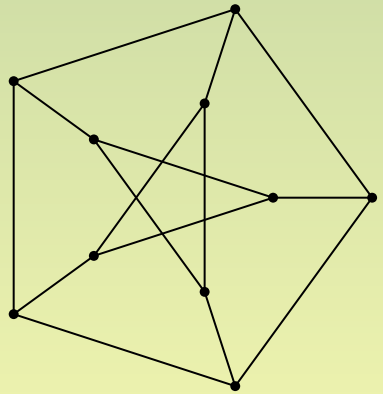
Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak



FOI, Varaždin

Sadržaj

Dio I

Dio II

Dio III

Dio IV

Dio V

Dio VI

Dio VII

Dio VIII

Dio IX

Dio X

Sadržaj prvog dijela

- Matematički modeli i struktura matematike
  - Modeli (ponavljanje)
  - Primjeri matematičkih modela
  - Peanovi aksiomi
  - Zbrajanje u $\mathbb{N}$
  - Množenje u $\mathbb{N}$
  - Matematička indukcija

Sadržaj

Dio I

Dio II

Dio III

Dio IV

Dio V

Dio VI

Dio VII

Dio VIII

Dio IX

Dio X

Sadržaj drugog dijela

- Dokazi u matematici
  - Pojam suda
  - Operacije sa sudovima
  - Teorem
  - Direktni dokaz
  - Dokaz po slučajevima
  - Dokaz kontrapozicijom
  - Dokaz kontradikcijom
  - Ekvivalentne tvrdnje
  - Niz ekvivalentnih tvrdnji
  - Protuprimjer
  - Kvantifikatori

Sadržaj
Dio I
Dio II
Dio III
Dio IV
Dio V
Dio VI
Dio VII
Dio VIII
Dio IX
Dio X

Sadržaj trećeg dijela

- Relacije
  - Skupovi (ponavljanje)
  - Binarne relacije
  - Relacija ekvivalencije
  - Kardinalni broj
  - Relacije uređaja
  - Linearni i dobar uređaj
  - Primjeri uređaja
  - Uređaji na kartezijevom produktu
  - Hasseovi dijagrami

Sadržaj
Dio I
Dio II
Dio III
Dio IV
Dio V
Dio VI
Dio VII
Dio VIII
Dio IX
Dio X

Sadržaj četvrtog dijela

- Skup cijelih brojeva
  - Djeljivost cijelih brojeva
  - Euklidov algoritam
  - Mreže
  - Prosti brojevi
  - Eratostenovo sito
  - Kongruencije
  - Rješavanje kongruencija
  - Eulerov teorem
  - Primitivni korijeni
  - Određivanje brojeva preko ostataka
  - RSA kriptosustav
  - ISBN
  - UPC

Sadržaj petog dijela

- Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
  - Uvod
  - Principi prebrojavanja
  - Permutacije i kombinacije
  - Formula uključivanja–isključivanja
  - Deranžmani
  - Rekurzivne relacije
  - Nelinearne rekurzije i sustavi rekurzija
  - Primjene rekurzija
  - Funkcije izvodnice
  - Diskretna teorija vjerojatnosti
  - Uspoređivanje događaja
  - Definicija vjerojatnosti
  - Klasični vjerojatnosni prostor
  - Uvjetna vjerojatnost
  - Nezavisnost događaja
  - Bayesova formula

Sadržaj šestog dijela

- Osnovni pojmovi iz teorije grafova
  - Osnovne definicije
  - Riješeni primjeri
  - Komplementarni graf
  - Linijski graf
  - Izomorfizam grafova
  - Podgrafovi
  - Matrica susjedstva i matrica incidencije
  - Matrica permutacije
  - Matrice i podgrafovi

Sadržaj
Dio I
Dio II
Dio III
Dio IV
Dio V
Dio VI
Dio VII
Dio VIII
Dio IX
Dio X

Sadržaj sedmog dijela

- Šetnje u grafu. Težinski grafovi
  - Šetnje u grafu
  - Teorem o šetnjama
  - Povezanost grafa
  - Riješeni primjeri
  - Karakterizacija bipartitnih grafova
  - Eulerovi grafovi
  - Hamiltonovi grafovi
  - Težinski grafovi
  - Dijkstrin algoritam
  - Složenost Dijkstrinog algoritma
  - Poboljšani Dijkstrin algoritam
  - Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
  - Floyd-Warshallov algoritam
  - Problem kineskog poštara

Sadržaj osmog dijela

- Stabla
  - Definicija i karakterizacije stabla
  - Riješeni primjeri
  - Korijenska stabla
  - Binarna stabla i algebarski izrazi
  - Stablo sortiranja
  - Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
  - Hrpa
  - Razapinjuća stabla
  - Rekurzija za razapinjuća stabla
  - Riješeni primjeri
  - Matrični teorem o stablima
  - Teoretski primjeri
  - DFS i BFS algoritam
  - DFS algoritam
  - BFS algoritam
  - Povezanost grafa
  - Kruskal i Prim
  - Kruskalov algoritam
  - Implementacija Kruskalovog algoritma
  - Primov algoritam
  - Implementacija Primovog algoritma
  - Još o Hamiltonovom ciklusu

Sadržaj devetog dijela

- Usmjereni grafovi
  - Definicija digrafa
  - Izomorfizam digrafova
  - Šetnje u digrafu
  - Matrica susjedstva digrafa
  - Turnir
  - Tranzitivni turnir
  - Dipovezani turnir
  - Rangiranje
  - Bellman-Fordov algoritam
  - Opis Bellman-Fordovog algoritma
  - Bellman-Ford error
  - Aciklički digraf
  - Topološko sortiranje
  - Bellmanov algoritam
  - Problem rasporeda – 1. tip
  - Problem rasporeda – 2. tip
  - Problem jednosmjernih ulica
  - Transportne mreže
  - Ford-Fulkersonov algoritam

Sadržaj desetog dijela

- Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
  - Planarni grafovi
  - Riješeni primjeri
  - Homeomorfizam grafova
  - Teorem Kuratowskog
  - Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritam
  - Bojanje vrhova grafa
  - Riješeni primjeri
  - Pohlepno bojanje vrhova grafa
  - Pohlepno bojanje – slučajni raspored vrhova
  - Welsh-Powellov algoritam
  - Brèlazov algoritam
  - Bojanje bridova grafa
  - Tipični primjeri
  - Algoritmi za bojanje bridova
  - Sparivanje u grafu
  - Sparivanje u bipartitnom grafu
  - Modificirani DFS i BFS algoritam
  - Alternirajuća stabla
  - Edmondsov algoritam
  - Savršena sparivanja

Mat. modeli i struktura
Modeli (ponavljanje)
Primjeri mat. modela
Peanovi aksiomi
Zbrajanje u $\mathbb{N}$
Množenje u $\mathbb{N}$
Matematička indukcija

Dio I

Matematički modeli i struktura matematike

Sadržaj

- Matematički modeli i struktura matematike
  - Modeli (ponavljanje)
  - Primjeri matematičkih modela
  - Peanovi aksiomi
  - Zbrajanje u $\mathbb{N}$
  - Množenje u $\mathbb{N}$
  - Matematička indukcija

Znanje

- Osnova za razumijevanje svijeta – opažanje (promatranje)
  - dobivanje informacija
- Upotrebljivo znanje
- Generalizacija temeljena na pojedinačnim informacijama

jednostavne klasifikacije $\longrightarrow$ ZNANJE $\longrightarrow$ razumijevanje bazirano na sistemu principa

PRINCIP – poopćenje ili apstraktna tvrdnja

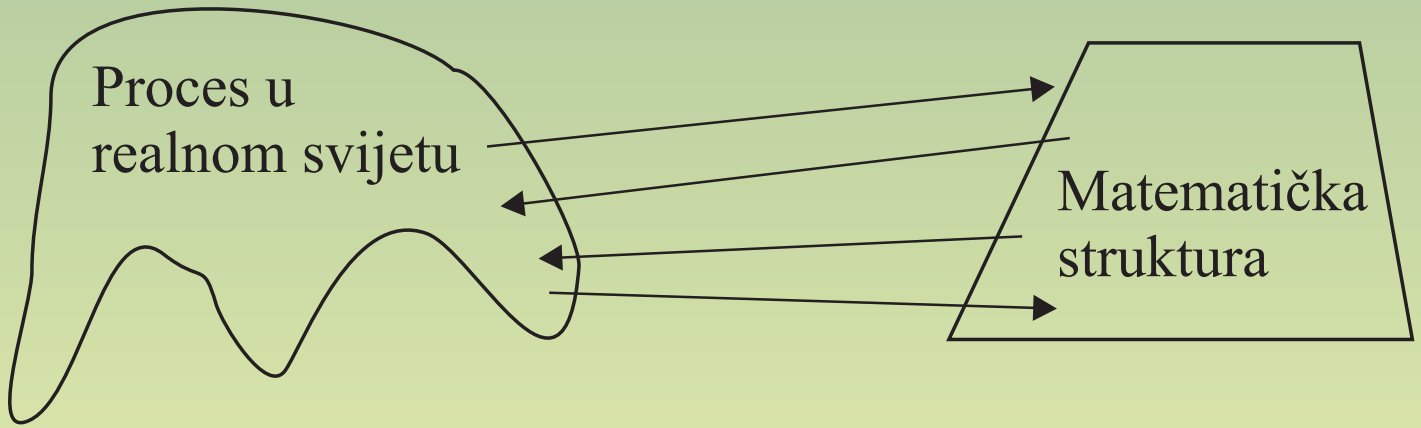
Model

- Model predstavlja zamjenu za neki realni objekt ili pojavu
- Analogija s nekim objektom ili interesantnim modelom
- Koristi se za objašnjenje nekog procesa ili predviđanje događaja
- Pojednostavljuje i objašnjava kompleksnost onoga što se promatra (i modelira)

Matematički modeli

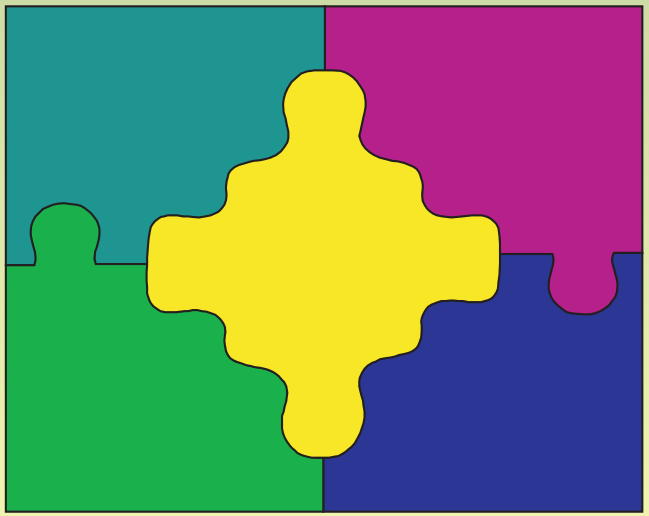
- Matematika – dobro sredstvo (jezik) za izražavanje principa
- Matematički modeli
  - modeli bazirani na matematički postavljenim principima
  - matematička karakterizacija ili opis nekog fenomena ili procesa
- Bitne komponente matematičkog modela:

PROCES $\longrightarrow$ MATEMATIČKA STRUKTURA KORESPODENCIJA


Proces u
realnom svijetu
Matematička
struktura

Svrha (matematičkog) modela

- Prezentacija informacija u lako prihvatljivom obliku (autokarta)
- Omogućavanje "lakog" računanja
- Istraživanje i predviđanje



Matematičko modeliranje

- je proces matematičke reprezentacije nekog fenomena s ciljem njegovog boljeg razumijevanja
- Postupak apstrakcije – elementi bitni za funkcioniranje sustava

Matematičko modeliranje – koraci

1. Pojednostavljivanje (apstrakcija)
2. Prikaz (reprezentacija)
   - matematički simboli, jednadžbe
3. Transformacije – interpretacije
4. Verifikacija
   - usporedba s rezultatima opažanja

Matematički modeli – podjela

- Obzirom na temelje:
  - Deterministički – na temelju fizikalnih zakona
  - Stohastički – na temelju empirijskih podataka
- Obzirom na matematičku strukturu:
  - Linearni – sve jednadžbe i funkcije u modelu su linearne
  - Nelinearni
- Obzirom na odvijanje u vremenu:
  - Modeli u kontinuiranom vremenu
  - Modeli s diskretnim vremenom – pogodniji za računarsku primjenu

Struktura matematike

(Matematički) pojam

- Osnovni – ne definira se
- Izvedeni (složeni) – definira se pomoću osnovnih pojmova

Definicija – sud pomoću kojeg se određuje sadržaj nekog pojma
– definicija nekog pojma na više ekvivalentnih načina

Osnovni matematički pojmovi
– apstrakcija predmeta stvarnog fizičkog svijeta

Induktivno i deduktivno zaključivanje

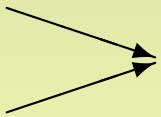
Zaključivanje – način mišljenja kojim se više sudova dovodi u vezu i izvodi novi sud

$$\text{premise} \xrightarrow{zaključivanje} \text{zaključak (rezultat)}$$

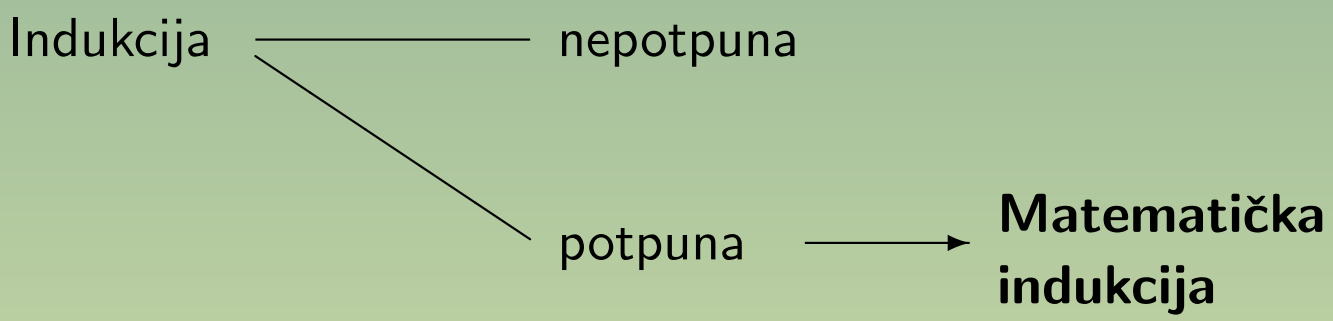
a) po analogiji

b) indukcijom

c) dedukcijom



Matematički oblici



Deduktivna metoda karakterizira viši nivo razvoja neke znanosti

Euklid – primjena deduktivnih metoda u geometriji
– aksiomatska metoda
– S. Mintaković, *Neeuklidska geometrija Lobačevskog*, Školska knjiga Zagreb, 1972.

Bitni elementi matematičke teorije (deduktivni prikaz)

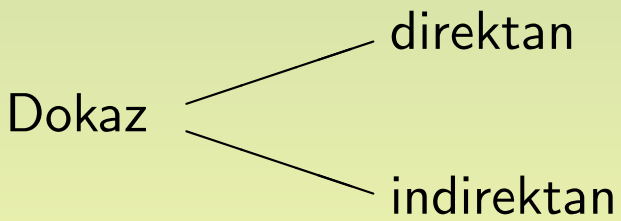
1. Nabrajanje osnovnih pojmova
2. Definiranje složenih pojmova
3. Postavljanje aksioma
4. Iznošenje teorema
5. Dokazi teorema

Aksiomi i teoremi

- **Aksiomi i teoremi** (poučci, stavci) – izriču ekvivalentne tvrdnje i iznose zaključke o matematičkim pojmovima i njihovim međusobnim odnosima i vezama
- **Aksiomi** – tvrdnje koje smatramo istinitima bez posebnog dokaza
- **Teoremi** – tvrdnje koje logički izviru iz aksioma

Teoremi i dokazi

- Svaki teorem treba izvesti (deducirati, dokazati) iz jednog ili više aksioma u **konačno** mnogo koraka.
- **Dokaz** – zaključivanje kojim se pokazuje da je neki teorem logička posljedica nekih aksioma ili već dokazanih teorema



Principi aksiomatike

1. Princip nezavisnosti – zahtjev ekonomičnosti
2. Princip potpunosti
3. Princip neproturječnosti

Deduktivna metoda i aksiomatika

- Ž. Dadić, *Povijest ideja i metoda u matematici i fizici* – aksiomatizacija geometrije
  - Tales, Pitagora, Hipokrat iz Hiosa, Aristotel
  - **Euklid** (rođen oko 365.P.K.) – **Elementi**
  - Arhimed
- Z. Šikić, *Kako je stvarana novovjekovna matematika*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.
  - Aksiomatizacija aritmetike – druga polovica 19. stoljeća
  - Peanova aksiomatizacija prirodnih brojeva 1889.

Primjeri matematičkih modela

Primjer 1.1 (Bacanje kocaka).

Što je vjerojatnije: da se u četiri bacanja jedne kocke bar jednom pojavi šestica ili da se u 24 bacanja dvije kocke bar jednom pojave dvije šestice?

Model za bacanje jedne kocke

$$M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Model za bacanje dvije kocke

$$M_2 = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

$A \leftarrow$ događaj da se u 4 bacanja jedne kocke pojavila bar jedna šestica

$A_i \leftarrow$ događaj da se u i-tom bacanju jedne kocke pojavila šestica, $i = 1, 2, 3, 4$

$B \leftarrow$ događaj da se u 24 bacanja dvije kocke bar jednom pojave dvije šestice

$B_i \leftarrow$ događaj da se u i-tom bacanju dvije kocke pojave dvije šestice, $i = 1, 2, 3, \ldots, 23, 24$

Tada je

$$A = \bigcup_{i=1}^{4} A_i, \quad B = \bigcup_{i=1}^{24} B_i.$$

Prema De Morganovim zakonima je

$$A^c = \bigcap_{i=1}^{4} A_i^c, \quad B^c = \bigcap_{i=1}^{24} B_i^c.$$

Nadalje je

$$P\left(A_i^c\right) = \frac{5}{6}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$P\left(B_i^c\right) = \frac{35}{36}, \quad i = 1, 2, \ldots, 23, 24$$

Kako su A_i međusobno nezavisni događaji, te B_i isto međusobno nezavisni događaji, slijedi

$$P\left(A^c\right) = \prod_{i=1}^{4} P\left(A_i^c\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$P\left(B^c\right) = \prod_{i=1}^{24} P\left(B_i^c\right) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

Stoga je

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.5177$$

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.4914$$

Dakle, događaj A je vjerojatniji od događaja B, tj. veća je vjerojatnost da se u 4 bacanja jedne kocke bar jednom pojavi šestica, nego da se u 24 bacanja dvije kocke bar jednom pojave dvije šestice.

Primjer 1.2 (Predviđanje populacijskog rasta).

- Broj stanovnika na Zemlji nakon 20 godina
- Model: $\big(t, P(t)\big)$
- a – stopa nataliteta, b – stopa smrtnosti
- $P(n+1) = (1+b-a)P(n)$
- Niz? Funkcija?
- Što smo pojednostavnili?
- Kompliciranija pitanja?

Primjer 1.3 (Ponašanje plina).

U realnosti:

- Međudjelovanje molekula (na malim udaljenostima molekule se odbijaju, na većim udaljenostima se privlače
- Gibanje molekula u plinu je vrlo složeno. Molekule se u plinu gibaju, pri čemu se i sudaraju. Sa svakim sudarom molekula mijenja smjer svojeg gibanja.

Model plina (idealni plin):

- Prosječne udaljenosti molekula u plinovima su dovoljno velike pa njihovo međudjelovanje zanemarujemo.
- Molekule se u plinu gibaju kaotično u svim smjerovima. Osim u trenutku sudara molekula, to je gibanje međusobno neovisno.
- Molekulu zamišljamo kao točku (zanemarujemo volumen molekule, ali uzimamo u obzir da molekula ima masu).
- U sudarima sa stijenkama posude ne mijenja se brzina molekule (može se mijenjati samo smjer brzine, ali ne i iznos)

Model idealnog plina nije dobar za opis realnih plinova pri vrlo velikim tlakovima, niti pri niskim i previsokim temperaturama.

Pri tlakovima koji nisu bitno viši 10^6 Pa i u širokom intervalu od sobnih temperatura naviše, većina realnih plinova ponaša se približno kao i idealni plin.

Primjer 1.4 (Modeliranje mozga i kompjutora).

- Razbijanje kodova
- Beletristika Harris – Enigma,. . . , Digitalna tvrđava
- Kako matematički prikazati kompjutor na jednostavan način?

Primjer 1.5 (Bojanje grafova, kromatski broj grafa).

Bojanje karte država tako da susjedne države nisu obojane jednakim bojama

- Objekti: države
- Inkompatibilnost: susjedne države ne smiju biti jednake boje

Slaganje rasporeda za fakultetski program koji se sastoji od modula (predmeta)

- Objekti: predmeti
- Inkompatibilnost: predmeti koji ne smiju biti u koliziji (koji pripadaju istom semestru)

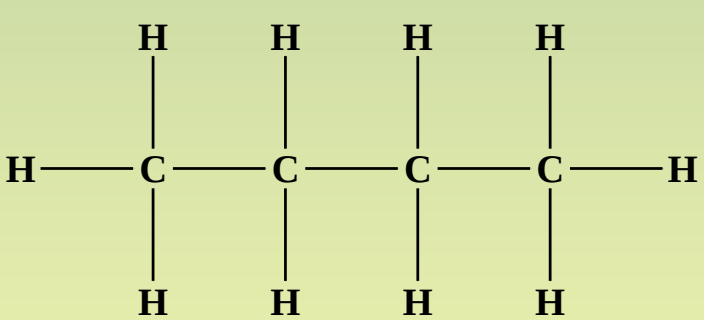
- Objekti (države, predmeti) – vrhovi
- Inkompatibilni objekti spojeni bridovima
- Matematički graf

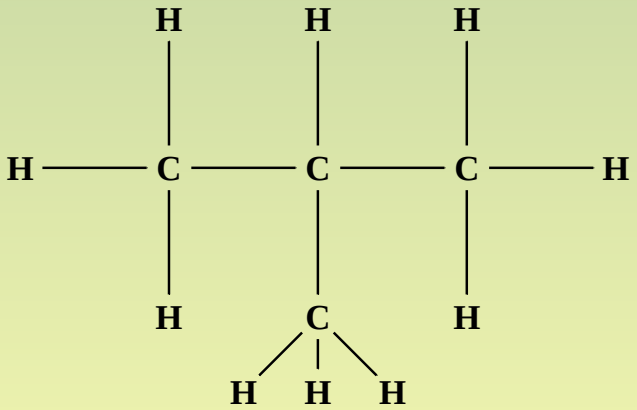
- Zadatak: podijeliti vrhove u najmanji broj grupa tako da u pojedinoj grupi nema vrhova povezanih bridom
- Isti model za različite probleme

Primjer 1.6 (Broj izomera).

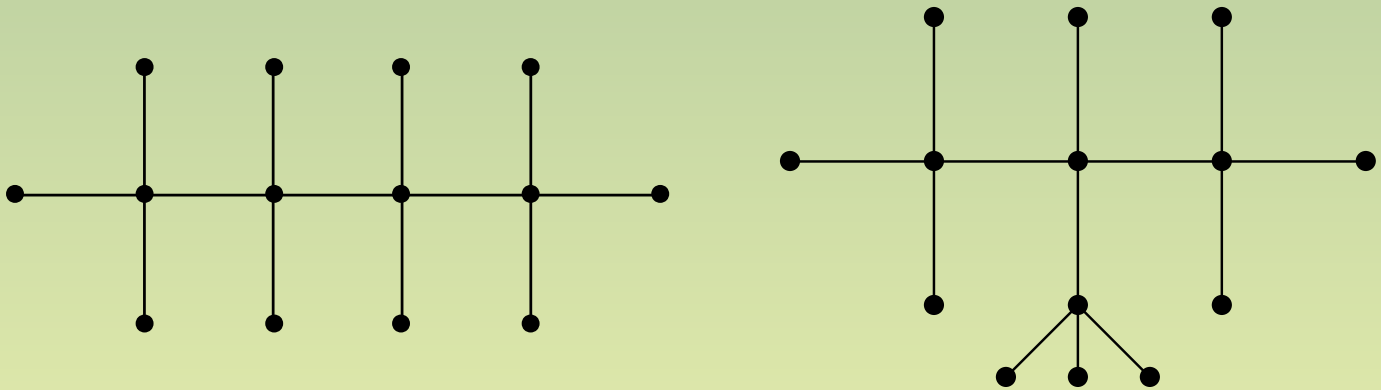
Problem određivanja broja različitih izomera zasićenih ugljikovodika $\mathrm{C}_n\mathrm{H}_{2n+2}$ *proučavao je engleski matematičar Arthur Cayley.*

Na primjer, $\mathrm{C}_4\mathrm{H}_{10}$ može biti butan ili izobutan, čije strukturne formule izgledaju





Taj se problem svodi na to da se pojedini atomi predstave vrhovima, a pojedine veze među njima sa bridovima i opet dobijemo **graf** kao model za taj problem. U tom grafu iz svakog vrha izlaze jedan ili četiri brida, a budući da u njemu nema ciklusa, takav graf se zove još i **stablo**.

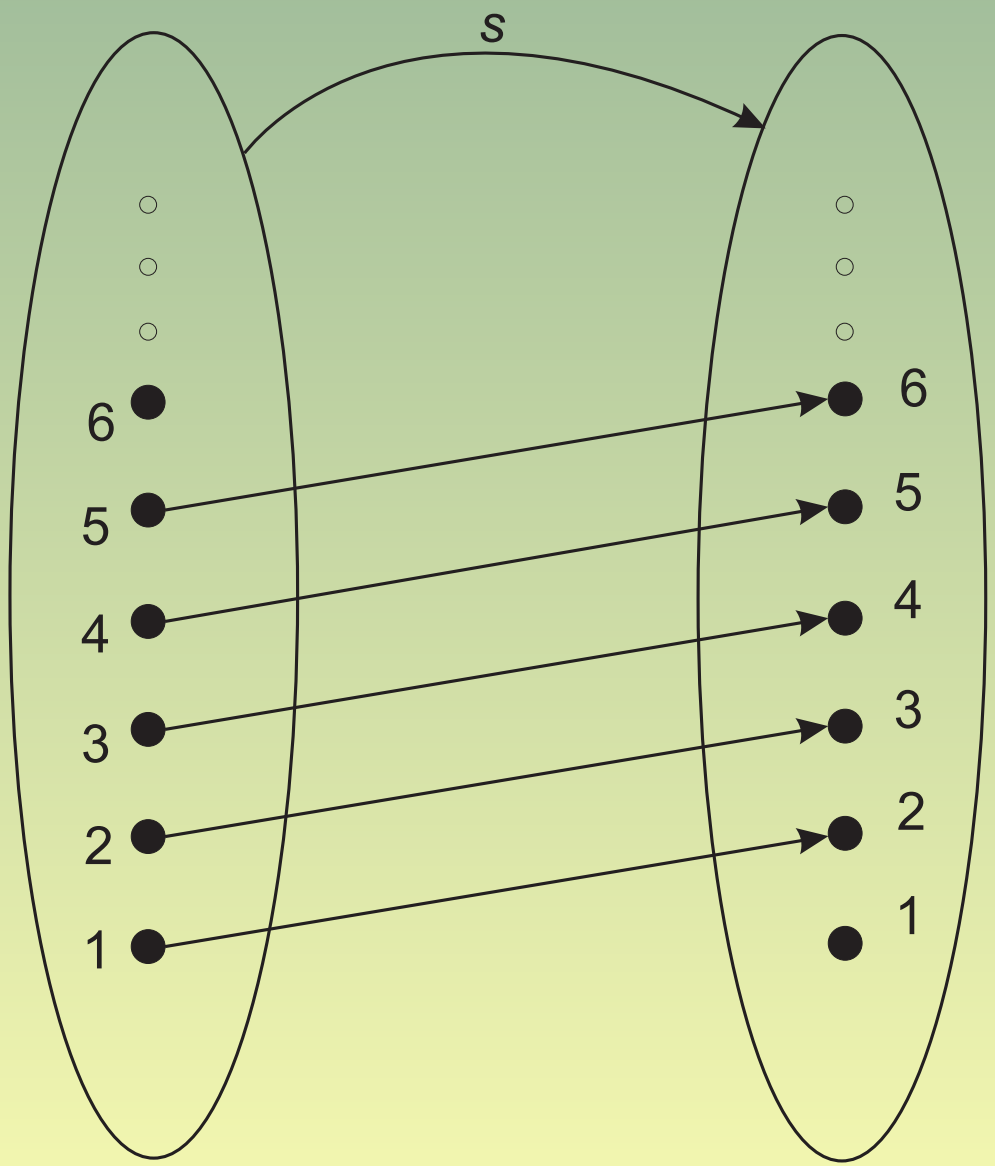


Dakle, izomera od $\mathrm{C}_n\mathrm{H}_{2n+2}$ ima onoliko koliko ima i stabala sa $3n+2$ vrhova iz čijih n vrhova izlaze po 4 brida, a iz preostalih $2n+2$ vrhova izlazi po jedan brid.

Peanovi aksiomi

1. $1 \in \mathbb{N}$. (Znači da $\mathbb{N}$ nije prazan skup, već sadrži najmanje jedan element.)
2. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $s(n) \in \mathbb{N}$ kojeg zovemo sljedbenik od n.
3. $s(n) \neq 1$. (1 nije ničiji sljedbenik.)
4. Ako je $s(n) = s(m)$, tada je $n = m$. (Različiti prirodni brojevi imaju različite sljedbenike.)
5. **Aksiom indukcije.** Neka je M podskup skupa $\mathbb{N}$ sa sljedećim svojstvima:
   1) $1 \in M$,
   2) $n \in M$ povlači $s(n) \in M$.

   Tada je $M = \mathbb{N}$.


s
6
5
4
3
2
1
6
5
4
3
2
1

Zbrajanje u $\mathbb{N}$

Na skupu prirodnih brojeva definiramo zbrajanje

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

na sljedeći način

- $m + 1 = s(m)$
- $m + s(n) = s(m + n)$

Pritom umjesto $+(m, n)$ kratko pišemo $m + n$.

Prvo svojstvo kaže da dodavanjem jedinice bilo kojem prirodnom broju dobivamo njegov sljedbenik, što možemo prihvatiti. Na primjer,

$$17 + 1 = s(17) = 18.$$

Nadalje, drugo svojstvo govori da ako uzmemo bilo koja dva prirodna broja $m, n \in \mathbb{N}$ da je tada suma prvog sa sljedbenikom drugog jednaka sljedbeniku sume odabrana dva broja. Uvjerimo se u to na primjeru $m = 18$, $n = 15$.

$$m + s(n) = s(m + n)$$
$$18 + s(15) = s(18 + 15)$$
$$18 + 16 = s(33)$$
$$34 = 34$$

Primjer 1.7.

Dokažite da je $3 + 5 = 8$.

Primjer 1.7.

Dokažite da je $3+5=8$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
3+5 &= 3+s(4) = s(3+4) = \\
&= s(3+s(3)) = s(s(3+3)) = \\
&= s(s(3+s(2))) = s(s(s(3+2))) = \\
&= s(s(s(3+s(1)))) = s(s(s(s(3+1)))) = \\
&= s(s(s(s(3)))) = s(s(s(4))) = \\
&= s(s(5)) = s(6) = s(7) = 8
\end{aligned}$$

Teorem 1.1 (Asocijativnost zbrajanja).

Za svaka tri prirodna broja m, n, p vrijedi

$$(m + n) + p = m + (n + p).$$

Dokaz.

Matematičkom indukcijom po p. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ bilo koja dva prirodna broja. Neka je M skup svih prirodnih brojeva p za koje vrijedi svojstvo asocijativnosti. Ako je $p = 1$, imamo

$$(m + n) + 1 = s(m + n) = m + s(n) = m + (n + 1)$$

pa je $1 \in M$.

Pretpostavimo da je $p \in M$, tj. da vrijedi

$$(m+n)+p = m+(n+p).$$

Tvrdimo da je tada i $s(p) \in M$. Zaista,

$$\begin{aligned}(m+n)+s(p) &= \text{(definicija zbrajanja)} = s((m+n)+p) = \\ &= \text{(pretpostavka indukcije)} = s(m+(n+p)) = \\ &= \text{(definicija zbrajanja)} = m+s(n+p) = \\ &= \text{(definicija zbrajanja)} = m+(n+s(p))\end{aligned}$$

Dakle, $s(p) \in M$. Prema aksiomu indukcije slijedi da je $M = \mathbb{N}$ pa asocijativnost zbrajanja vrijedi u skupu $\mathbb{N}$. ♡

Lema 1.1.

Za svaka dva prirodna broja m i n vrijedi

$$s(m) + n = s(m + n).$$

Dokaz.

Matematičkom indukcijom po n. Neka je $m \in \mathbb{N}$ bilo koji prirodni broj. Neka je M skup svih prirodnih brojeva n za koje vrijedi svojstvo iz leme. Ako je $n = 1$, imamo

$$s(m) + 1 = (m + 1) + 1 = m + (1 + 1) = m + s(1) = s(m + 1)$$

pa je $1 \in M$.

Pretpostavimo da je $n \in M$, tj. da vrijedi

$$s(m) + n = s(m + n).$$

Tvrdimo da je tada i $s(n) \in M$. Zaista,

$$\begin{aligned} s(m) + s(n) &= \text{(definicija zbrajanja)} = s(s(m) + n) = \\ &= \text{(pretpostavka indukcije)} = s(s(m + n)) = \\ &= \text{(definicija zbrajanja)} = s(m + s(n)) \end{aligned}$$

Dakle, $s(n) \in M$. Prema aksiomu indukcije slijedi da je $M = \mathbb{N}$. ♡

Lema 1.2.

Za svaki prirodni broj m vrijedi

$$1 + m = s(m).$$

Dokaz.

Matematičkom indukcijom po m. Neka je M skup svih prirodnih brojeva m za koje vrijedi svojstvo iz leme. Ako je $m = 1$, tada po definiciji zbrajanja vrijedi

$$1 + 1 = s(1)$$

pa je $1 \in M$.

Pretpostavimo da je $m \in M$, tj. da vrijedi

$$1 + m = s(m).$$

Tvrdimo da je tada i $s(m) \in M$. Zaista,

$$1 + s(m) = \text{(definicija zbrajanja)} = s(1 + m) =$$
$$= \text{(pretpostavka indukcije)} = s(s(m))$$

iz čega slijedi $s(m) \in M$. Prema aksiomu indukcije slijedi da je $M = \mathbb{N}$. ♡

Teorem 1.2 (Komutativnost zbrajanja).

Za svaka dva prirodna broja m i n vrijedi

$$m + n = n + m.$$

Dokaz.

Matematičkom indukcijom po n. Neka je m proizvoljni prirodni broj. Neka je

$$M = \{n \in \mathbb{N} : m + n = n + m\}$$

Ako je $n = 1$, tada prema definiciji zbrajanja i ◂ lemi 1.2.

$$m + 1 = \text{(definicija zbrajanja)} = s(m) = \text{(lema 1.2.)} = 1 + m$$

pa je $1 \in M$.

Pretpostavimo da je $n \in M$, tj. da vrijedi

$$m + n = n + m.$$

Tvrdimo da je tada i $s(n) \in M$. Zaista,

$$\begin{aligned} m + s(n) &= \text{(definicija zbrajanja)} = s(m + n) = \\ &= \text{(pretpostavka indukcije)} = s(n + m) = \\ &= \text{◂ lema 1.1.} = s(n) + m \end{aligned}$$

iz čega slijedi $s(n) \in M$. Prema aksiomu indukcije slijedi da je $M = \mathbb{N}$. ♡

Množenje u $\mathbb{N}$

Na skupu prirodnih brojeva definiramo množenje

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

na sljedeći način

- $m \cdot 1 = m$
- $m \cdot s(n) = (m \cdot n) + m$

Pritom umjesto $\cdot(m, n)$ kratko pišemo $m \cdot n$.

Prvo svojstvo kaže da prirodni broj pomnožen s 1 ostaje isti. Na primjer,

$$17 \cdot 1 = 17.$$

Drugo svojstvo govori da ako uzmemo bilo koja dva prirodna broja $m, n \in \mathbb{N}$ da je tada umnožak prvog sa sljedbenikom drugog jednak umnošku ta dva broja uvećanom za prvi broj. Uvjerimo se u to na primjeru $m = 18$, $n = 15$.

$$\begin{aligned} m \cdot s(n) &= (m \cdot n) + m \\ 18 \cdot s(15) &= (18 \cdot 15) + 18 \\ 18 \cdot 16 &= 270 + 18 \\ 288 &= 288 \end{aligned}$$

Primjer 1.8.

Dokažite da je $4 \cdot 3 = 12$.

Primjer 1.8.

Dokažite da je $4 \cdot 3 = 12$.

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
4 \cdot 3 &= 4 \cdot s(2) = (4 \cdot 2) + 4 = (4 \cdot s(1)) + 4 = \\
&= ((4 \cdot 1) + 4) + 4 = (4 + 4) + 4 = \\
&= (4 + s(3)) + 4 = s(4 + 3) + 4 = \\
&= s(4 + s(2)) + 4 = s(s(4 + 2)) + 4 = \\
&= s(s(4 + s(1))) + 4 = s(s(s(4 + 1))) + 4 = \\
&= s(s(s(s(4)))) + 4 = s(s(s(5))) + 4 = s(s(6)) + 4 = \\
&= s(7) + 4 = 8 + 4 = 8 + s(3) = s(8 + 3) = \\
&= s(8 + s(2)) = s(s(8 + 2)) = s(s(8 + s(1))) = \\
&= s(s(s(8 + 1))) = s(s(s(s(8)))) = s(s(s(9))) = \\
&= s(s(10)) = s(11) = 12
\end{aligned}
$$

Primjer 1.9.

Dokažite da je $x \cdot 3 = x + x + x$ *za bilo koji* $x \in \mathbb{N}$.

Primjer 1.9.

Dokažite da je $x \cdot 3 = x + x + x$ *za bilo koji* $x \in \mathbb{N}$.

Rješenje.

$$x \cdot 3 = x \cdot s(2) = (x \cdot 2) + x = (x \cdot s(1)) + x =$$
$$= ((x \cdot 1) + x) + x = (x + x) + x =$$
$$= \text{(asocijativnost zbrajanja)} = x + x + x$$

Lema 1.3.

Za svaka dva prirodna broja m i n vrijedi

$$s(m) \cdot n = (m \cdot n) + n.$$

Dokaz.

Matematičkom indukcijom po n. Neka je $m \in \mathbb{N}$ proizvoljni prirodni broj. Neka je M skup svih prirodnih brojeva n za koje vrijedi navedeno svojstvo u lemi. Tada za $n = 1$ imamo

$$s(m) \cdot 1 = s(m) = m + 1 = (m \cdot 1) + 1$$

pa je $1 \in M$.

Pretpostavimo da je $n \in M$, tj. da vrijedi

$$s(m) \cdot n = (m \cdot n) + n.$$

Tvrdimo da je tada i $s(n) \in M$. Zaista,

$$\begin{aligned}
s(m) \cdot s(n) &= \text{(definicija množenja)} = (s(m) \cdot n) + s(m) = \\
&= \text{(pretpostavka indukcije)} = ((m \cdot n) + n) + s(m) = \\
&= \text{(asocijativnost zbrajanja)} = (m \cdot n) + (n + s(m)) = \\
&= \text{(definicija zbrajanja)} = (m \cdot n) + s(n + m) = \\
&= \text{(komutativnost zbrajanja)} = (m \cdot n) + s(m + n) = \\
&= \text{(definicija zbrajanja)} = (m \cdot n) + (m + s(n)) = \\
&= \text{(asocijativnost zbrajanja)} = ((m \cdot n) + m) + s(n) = \\
&= \text{(definicija množenja)} = (m \cdot s(n)) + s(n)
\end{aligned}$$

Dakle, $s(n) \in M$. Prema aksiomu indukcije slijedi da je $M = \mathbb{N}$.



Teorem 1.3 (Komutativnost množenja).

Za svaka dva prirodna broja m i n vrijedi

$$m \cdot n = n \cdot m.$$

Dokaz.

Matematičkom indukcijom po n. Neka je m proizvoljni prirodni broj. Neka je

$$M = \{n \in \mathbb{N} : m \cdot n = n \cdot m\}.$$

Za $n = 1$ tvrdimo da za svaki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$m \cdot 1 = 1 \cdot m.$$

Dokaz te tvrdnje provodimo indukcijom po m. Za $m = 1$ očito vrijedi $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $m \in \mathbb{N}$, tj. da je $m \cdot 1 = 1 \cdot m$. Tvrdimo da tada analogna

tvrdnja vrijedi i za $s(m)$. Zaista,

$$\begin{aligned} 1 \cdot s(m) &= \text{(definicija množenja)} = (1 \cdot m) + 1 = \\ &= \text{(pretpostavka indukcije)} = (m \cdot 1) + 1 = \\ &= \text{◂ lema 1.3.} = s(m) \cdot 1 \end{aligned}$$

Dakle, zaista je $m \cdot 1 = 1 \cdot m$ za sve $m \in \mathbb{N}$. Stoga je $1 \in M$.
Pretpostavimo da je $n \in M$, tj. da vrijedi

$$m \cdot n = n \cdot m.$$

Tvrdimo da je tada $s(n) \in M$.

$$\begin{aligned} m \cdot s(n) &= \text{(definicija množenja)} = (m \cdot n) + m = \\ &= \text{(pretpostavka indukcije)} = (n \cdot m) + m = \\ &= \text{◂ lema 1.3.} = s(n) \cdot m \end{aligned}$$

Slijedi da je $s(n) \in M$ pa je prema aksiomu indukcije $M = \mathbb{N}$. ♡

Teorem 1.4 (Distributivnost množenja prema zbrajanju).

Za svaka tri prirodna broja m, n i p vrijedi

$$(m+n)\cdot p = (m\cdot p)+(n\cdot p).$$

Dokaz.

Matematičkom indukcijom po p. Neka su m i n proizvoljni prirodni brojevi i neka je

$$M = \{p : (m+n)\cdot p = (m\cdot p)+(n\cdot p)\}.$$

Za $p = 1$ iz definicije množenja slijedi

$$(m+n)\cdot 1 = m+n = (m\cdot 1)+(n\cdot 1)$$

pa je $1 \in M$.

Pretpostavimo da je $p \in M$, tj. da vrijedi

$$(m+n)\cdot p = (m\cdot p) + (n\cdot p).$$

Tvrdimo da je tada $s(p) \in M$. Zaista,

$$\begin{aligned}
(m+n)\cdot s(p) &= \text{(definicija množenja)} = (m+n)\cdot p + (m+n) = \\
&= \text{(pretpostavka indukcije)} = (m\cdot p + n\cdot p) + (m+n) = \\
&= \text{(asocijativnost zbrajanja)} = m\cdot p + (n\cdot p + m + n) = \\
&= \text{(komutativnost zbrajanja)} = m\cdot p + (m + n\cdot p + n) = \\
&= \text{(asocijativnost zbrajanja)} = (m\cdot p + m) + (n\cdot p + n) = \\
&= \text{(definicija množenja)} = m\cdot s(p) + n\cdot s(p)
\end{aligned}$$

Dakle, $s(p) \in M$. Prema aksiomu indukcije slijedi da je $M = \mathbb{N}$.

♡

Teorem 1.5 (Asocijativnost množenja).

Za svaka tri prirodna broja m, n i p vrijedi

$$(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p).$$

Dokaz.

Matematičkom indukcijom po p. Neka su m i n proizvoljni prirodni brojevi i neka je

$$M = \{p : (m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)\}.$$

Ako je $p = 1$, tada iz definicije množenja slijedi

$$(m \cdot n) \cdot 1 = m \cdot n = m \cdot (n \cdot 1)$$

pa je $1 \in M$.

Pretpostavimo da je $p \in M$, tj. da vrijedi

$$(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p).$$

Tvrdimo da je tada i $s(p) \in M$. Zaista,

$$\begin{aligned}
(m \cdot n) \cdot s(p) &= \text{(definicija množenja)} = (m \cdot n) \cdot p + (m \cdot n) = \\
&= \text{(pretpostavka indukcije)} = m \cdot (n \cdot p) + (m \cdot n) = \\
&= \text{(komutativnost množenja)} = (n \cdot p) \cdot m + (n \cdot m) = \\
&= \text{(distributivnost)} = (n \cdot p + n) \cdot m = \\
&= \text{(komutativnost množenja)} = m \cdot (n \cdot p + n) = \\
&= \text{(definicija množenja)} = m \cdot (n \cdot s(p))
\end{aligned}$$

Dakle, $s(p) \in M$ pa je prema aksiomu indukcije $M = \mathbb{N}$. ♡

Primjer 1.10.

Dokažite da za bilo koja dva prirodna broja m i n vrijedi $m + n \neq m$.

Primjer 1.10.

Dokažite da za bilo koja dva prirodna broja m i n vrijedi $m + n \neq m$.

Rješenje.

Indukcijom po m. Neka je n proizvoljni prirodni broj i

$$M = \{m : m + n \neq m\}.$$

Za $m = 1$ imamo

$$1 + n = n + 1 = s(n) \neq 1,$$

gdje posljednji zaključak slijedi iz aksioma $s(n) \neq 1$, tj. da 1 nije ničiji sljedbenik. Dakle, imamo da je $1 + n \neq 1$ pa je $1 \in M$.

Pretpostavimo da je $m \in M$, tj. da vrijedi $m + n \neq m$. Tada za $s(m)$ vrijedi

$$s(m) + n = n + s(m) = s(n + m) = s(m + n) \neq s(m),$$

gdje posljednji zaključak slijedi iz pretpostavke indukcije i aksioma koji govori da je funkcija s injekcija. Naime, po pretpostavci indukcije je $m + n \neq m$, a kako je po aksiomu s injekcija slijedi da je $s(m + n) \neq s(m)$. Dakle, imamo da je $s(m) + n \neq s(m)$ pa je $s(m) \in M$. Prema aksiomu indukcije slijedi da je $M = \mathbb{N}$. Stoga je $m + n \neq m$ za sve prirodne brojeve m i n.

Primjer 1.11.

Dokažite da za bilo koja tri prirodna broja m, n i p vrijedi

$$m + n = m + p \Rightarrow n = p.$$

Primjer 1.11.

Dokažite da za bilo koja tri prirodna broja m, n i p vrijedi

$$m + n = m + p \Rightarrow n = p.$$

Rješenje.

Indukcijom po m.

$$M = \{m : m + n = m + p \Rightarrow n = p\}.$$

Za $m = 1$ imamo

$$1 + n = 1 + p \Rightarrow s(n) = s(p) \Rightarrow n = p$$

gdje posljednji zaključak slijedi iz aksioma da je s injekcija.
Dakle, imamo da je $1 \in M$.

Pretpostavimo da je $m \in M$, tj. da vrijedi

$$m + n = m + p \Rightarrow n = p.$$

Tada za $s(m)$ vrijedi

$$s(m) + n = s(m) + p \Rightarrow s(m + n) = s(m + p).$$

Kako je s injekcija, slijedi da je $m + n = m + p$, a zbog pretpostavke indukcije slijedi da je $n = p$. Dakle,

$$s(m) + n = s(m) + p \Rightarrow n = p$$

pa je $s(m) \in M$. Prema aksiomu indukcije slijedi da je $M = \mathbb{N}$.

Matematička indukcija

Iako je intuitivno jasno što su prirodni brojevi, u matematici se skup $\mathbb{N}$ uvodi aksiomatski preko Peanovih aksioma. Jedan od tih aksioma je i aksiom matematičke indukcije koji služi za dokazivanje tvrdnji koje vrijede za sve prirodne brojeve (osim možda za konačno mnogo njih). Evo nekoliko primjera takvih tvrdnji:

- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$
- $(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$
- $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
- $5 \mid 8^n - 3^n$
- $2^n > n^2$ za $n \geqslant 5$

Promotrimo izraz oblika

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Htjeli bismo taj izraz zapisati elegantnije i kraće pa stoga uvodimo simbol Σ koji nam označava sumiranje. Pomoću tog simbola gornji izraz bismo napisali u obliku

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

pri čemu je i brojač kojeg možemo označiti bilo kojim drugim slovom (u ovom slučaju brojač ne bi bilo dobro označiti slovom n jer je ono već rezervirano u početnom izrazu).

Dakle,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Isto tako je

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

i

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Dakle, izrazi $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\sum_{k=1}^{n} a_k$ i $\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha$ se razlikuju jedino po imenu brojača, ali svi oni označavaju isti izraz, tj. istu sumu.

Raspišite sljedeće sume:

- $\sum_{r=1}^{4} b_r =$

Raspišite sljedeće sume:

- $\sum_{r=1}^{4} b_r = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$

Raspišite sljedeće sume:

- $\sum_{r=1}^{4} b_r = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$
- $\sum_{k=2}^{3} a_k =$

Raspišite sljedeće sume:

- $\sum_{r=1}^{4} b_r = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$
- $\sum_{k=2}^{3} a_k = a_2 + a_3$

Raspišite sljedeće sume:

- $\sum_{r=1}^{4} b_r = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$
- $\sum_{k=2}^{3} a_k = a_2 + a_3$
- $\sum_{i=1}^{3} a_k =$

Raspišite sljedeće sume:

- $\sum_{r=1}^{4} b_r = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$
- $\sum_{k=2}^{3} a_k = a_2 + a_3$
- $\sum_{i=1}^{3} a_k = a_k + a_k + a_k = 3a_k$

Raspišite sljedeće sume:

- $\sum_{r=1}^{4} b_r = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$
- $\sum_{k=2}^{3} a_k = a_2 + a_3$
- $\sum_{i=1}^{3} a_k = a_k + a_k + a_k = 3a_k$
- $\sum_{i=k}^{k+2} a_i =$

Raspišite sljedeće sume:

- $\sum_{r=1}^{4} b_r = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$
- $\sum_{k=2}^{3} a_k = a_2 + a_3$
- $\sum_{i=1}^{3} a_k = a_k + a_k + a_k = 3a_k$
- $\sum_{i=k}^{k+2} a_i = a_k + a_{k+1} + a_{k+2}$

Napišite sigma zapis sljedećih suma:

- $1 + 2 + 3 + \cdots + n =$

Napišite sigma zapis sljedećih suma:

- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$

Napišite sigma zapis sljedećih suma:

- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$
- $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) =$

Napišite sigma zapis sljedećih suma:

- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$
- $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1)$

Napišite sigma zapis sljedećih suma:

- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$
- $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1)$
- $2^3 + 3^3 + \cdots + (n - 1)^3 =$

Napišite sigma zapis sljedećih suma:

- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$
- $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1)$
- $2^3 + 3^3 + \cdots + (n - 1)^3 = \sum_{j=2}^{n-1} j^3$

Napišite sigma zapis sljedećih suma:

- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$
- $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1)$
- $2^3 + 3^3 + \cdots + (n - 1)^3 = \sum_{j=2}^{n-1} j^3$
- $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} =$

Napišite sigma zapis sljedećih suma:

- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$
- $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1)$
- $2^3 + 3^3 + \cdots + (n - 1)^3 = \sum_{j=2}^{n-1} j^3$
- $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$

Princip matematičke indukcije (slaba forma)

Neka je $P(n)$ tvrdnja koja ovisi o $n \in \mathbb{N}$. Ako vrijedi

1. **Baza indukcije.** $P(n_0)$ je istinita za neki $n_0 \in \mathbb{N}$
2. **Korak indukcije.** Ako je $P(k)$ istinito za neki $k \in \mathbb{N}$, tada je istinito i $P(k+1)$

Tada je $P(n)$ istinita tvrdnja za svaki prirodni broj $n \geqslant n_0$.

Uvijek treba provesti oba koraka jer u suprotnom možemo pogriješiti i "dokazati" tvrdnju koja zapravo ne vrijedi.

Primjer 1.12.

Dokažite da je

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Primjer 1.12.

Dokažite da je

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Rješenje.

Baza indukcije

Za $n = 1$ imamo $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$, što je očito istina.

Primjer 1.12.

Dokažite da je

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Rješenje.

Baza indukcije

Za $n = 1$ imamo $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$, što je očito istina.

Korak indukcije

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. da vrijedi

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Primjer 1.12.

Dokažite da je

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Rješenje.

Baza indukcije

Za $n = 1$ imamo $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$, što je očito istina.

Korak indukcije

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. da vrijedi

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Treba dokazati da tada tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$.

Lijeva strana za $n = k + 1$ jednaka je

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + k}_{\text{pretpostavka indukcije}} + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$$

$$= \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1$$

Desna strana za $n = k + 1$ jednaka je

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1$$

Prema principu matematičke indukcije navedena tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Primjer 1.13.

Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Primjer 1.13.

Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Rješenje.

Za $n = 1$ lijeva strana je jednaka

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{i^2}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1^2}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3},$$

dok je desna strana jednaka

$$\frac{1 \cdot (1+1)}{2 \cdot (2 \cdot 1 + 1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)}.$$

Treba dokazati da tada tvrdnja vrijedi i za $n = k+1$.

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{i^2}{(2i-1)(2i+1)} =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{(2i-1)(2i+1)}}_{\text{pretpostavka indukcije}} + \frac{(k+1)^2}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)} =$$

$$= \frac{k(k+1)}{2(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+1}\left(\frac{k}{2} + \frac{k+1}{2k+3}\right) =$$

$$= \frac{k+1}{2k+1} \cdot \frac{2k^2+5k+2}{2(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+1} \cdot \frac{(2k+1)(k+2)}{2(2k+3)} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2(2(k+1)+1)}$$

Prisjetimo se definicije djeljivosti dva cijela broja. Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Kažemo da a dijeli b i pišemo $a \mid b$ ako postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $b = ak$.

Primjer 1.14.

Dokažite da $3 \mid 10^{n+1} + 10^n + 1$ *za svaki* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Primjer 1.14.

Dokažite da $3 \mid 10^{n+1} + 10^n + 1$ *za svaki* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Rješenje.

Za $n = 0$ tvrdnja vrijedi jer je $10^{0+1} + 10^0 + 1 = 12$, a $3 \mid 12$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj $n \in \mathbb{N}$, tj. da $3 \mid 10^{n+1} + 10^n + 1$. Iz definicije slijedi da postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $10^{n+1} + 10^n + 1 = 3k$. Tada za $n + 1$ imamo

$$10^{(n+1)+1} + 10^{n+1} + 1 = 10^{n+2} + 10^{n+1} + 1 =$$

$$= 10 \cdot 10^{n+1} + 10 \cdot 10^n + 1 = 10 \cdot \big(\underbrace{10^{n+1} + 10^n + 1}_{\text{pretpostavka indukcije}} \big) - 9 =$$

$$= 10 \cdot 3k - 9 = 3 \cdot (10k - 3)$$

Primjer 1.15 (Fermatovi prosti brojevi).

Fermat je izrekao hipotezu da su svi brojevi oblika $2^{2^{n-1}}+1$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *prosti brojevi.*

n	$2^{2^{n-1}}+1$
1	3
2	5
3	17
4	257
5	65537
6	4294967297

Za $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ti brojevi su zaista prosti, ali za $n = 6$ taj broj nije više prost jer je $4294967297 = 641 \cdot 6700417$.

Fermat je za prvih pet brojeva uočio da su prosti i na temelju toga donio hipotezu da su brojevi oblika $2^{2^{n-1}}+1$ prosti za svaki prirodni broj n. No, da je Fermat imao računalo ne bi objavio svoju hipotezu jer programskim paketom sage lagano možemo ispitati, npr. za prvih 10 takvih brojeva da li su prosti ili nisu.

```
f(n)=2^(2^(n-1))+1
[(f(n),is_prime(f(n))) for n in xrange(1,11)]
```

Sage nam odmah daje odgovore da su prvih pet brojeva prosti, a drugih pet su složeni. Mogli bismo prigovoriti Fermatu da je provjerio svoju tvrdnju za premalo pojedinačnih slučajeva. No, da li postoji neki optimalni broj slučajeva koje treba provjeriti da bismo sa sigurnošću mogli reći da je neka tvrdnja istinita ili nije?

Primjer 1.16 (Eulerovi prosti brojevi).

Brojevi oblika $n^2 + n + 41$ *su prosti za svaki* $n \in \mathbb{N}$.

Opet lagano pomoću *Mathematice* vidimo da su prvih 39 brojeva prosti, dok 40-ti više nije. I bez računala je očito da je za $n = 41$ broj $n^2 + n + 41$ složeni. Dakle, ovdje na temelju prvih 39 pojedinačnih provjera ne možemo zaključiti da su brojevi oblika $n^2 + n + 41$ prosti za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Primjer 1.16 (Eulerovi prosti brojevi).

Brojevi oblika $n^2 + n + 41$ *su prosti za svaki* $n \in \mathbb{N}$.

Opet lagano pomoću *Mathematice* vidimo da su prvih 39 brojeva prosti, dok 40-ti više nije. I bez računala je očito da je za $n = 41$ broj $n^2 + n + 41$ složeni. Dakle, ovdje na temelju prvih 39 pojedinačnih provjera ne možemo zaključiti da su brojevi oblika $n^2 + n + 41$ prosti za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Gdje je greška u zaključivanju kod prethodna dva primjera?

Primjer 1.16 (Eulerovi prosti brojevi).

Brojevi oblika $n^2 + n + 41$ *su prosti za svaki* $n \in \mathbb{N}$.

Opet lagano pomoću *Mathematice* vidimo da su prvih 39 brojeva prosti, dok 40-ti više nije. I bez računala je očito da je za $n = 41$ broj $n^2 + n + 41$ složeni. Dakle, ovdje na temelju prvih 39 pojedinačnih provjera ne možemo zaključiti da su brojevi oblika $n^2 + n + 41$ prosti za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Gdje je greška u zaključivanju kod prethodna dva primjera?

U prethodna dva primjera je provedena baza indukcije, ali nije proveden korak indukcije pa su zato "dokazane" tvrdnje koje nisu istinite.

Pogledajmo još zašto je važno provesti i bazu indukciju (iako nam se ona čini možda manje važnom ili čak nepotrebnom).

Primjer 1.17.

Brojevi oblika $2n$ su neparni za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Pretpostavimo da je za neki $n \in \mathbb{N}$ broj $2n$ neparan. Tada za $n+1$ imamo

$$2(n+1) = 2n + 2.$$

Kako je po pretpostavci $2n$ neparan, a broj 2 je paran, tada je njihova suma neparan broj. Zaključujemo da su svi brojevi oblika $2n$ neparni za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Jasno je da tvrdnja prethodnog primjera nije točna, a mi smo "dokazali" da je istinita. **Gdje je greška u zaključivanju?**

Mat. modeli i struktura
Modeli (ponavljanje)
Primjeri mat. modela
Peanovi aksiomi
Zbrajanje u $\mathbb{N}$
Množenje u $\mathbb{N}$
Matematička indukcija

Jasno je da tvrdnja prethodnog primjera nije točna, a mi smo "dokazali" da je istinita. **Gdje je greška u zaključivanju?**

U prethodnom primjeru nije provedena baza indukcije pa je zato "dokazana" tvrdnja koja nije istinita, jer već za $n = 1$ tvrdnja ne vrijedi.

Jasno je da tvrdnja prethodnog primjera nije točna, a mi smo "dokazali" da je istinita. **Gdje je greška u zaključivanju?**
U prethodnom primjeru nije provedena baza indukcije pa je zato "dokazana" tvrdnja koja nije istinita, jer već za $n = 1$ tvrdnja ne vrijedi.

Kada dokazujemo matematičkom indukcijom moramo provesti njezina oba koraka jer u protivnom možemo "dokazati" tvrdnju koja nije istinita.

Primjer 1.18.

Pronađite grešku u sljedećem "dokazu" provedenom matematičkom indukcijom.

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{(2n+1)^2}{8},\quad n\in\mathbb{N} \qquad (*)$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj $k\in\mathbb{N}$, tj. da je $1+2+3+\cdots+k=\frac{(2k+1)^2}{8}$. Tada za $k+1$ imamo

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(2k+1)^2}{8}+(k+1)=$$

$$=\frac{4k^2+12k+9}{8}=\frac{(2k+3)^2}{8}=\frac{(2(k+1)+1)^2}{8}$$

Dakle, $(*)$ vrijedi za svaki prirodni broj n.

Rješenje.

Pogreška je u tome što nemamo bazu indukcije jer već za $n = 1$ tvrdnja ne vrijedi. Dakle, još jednom, kod matematičke indukcije baza je isto jako bitna kao i korak indukcije jer u protivnom možemo svašta "dokazati".

Princip matematičke indukcije (jaka forma)

Neka je $P(n)$ tvrdnja koja ovisi o $n \in \mathbb{N}$. Ako vrijedi

1. $P(n_0)$ je istinita za neki $n_0 \in \mathbb{N}$
2. Neka je $k > n_0$ proizvoljni prirodni broj. Ako je $P(l)$ istinito za svaki prirodni broj l, $n_0 \leqslant l < k$, tada je istinito i $P(k)$.

Tada je $P(n)$ istinita tvrdnja za svaki prirodni broj $n \geqslant n_0$.

Primjer 1.19.

Svaki se prirodni broj $n \geqslant 2$ može napisati kao produkt prostih brojeva.

Primjer 1.19.

Svaki se prirodni broj $n \geqslant 2$ može napisati kao produkt prostih brojeva.

Rješenje.

Kako je 2 prost broj, tvrdnja vrijedi za $n = 2$.
Pretpostavimo da se svaki prirodni broj l, $2 \leqslant l < n$, može napisati kao produkt prostih brojeva. Tvrdimo da se tada i broj n može napisati kao produkt prostih brojeva. Ako je n prost, onda se on na trivijalan način može napisati kao produkt prostih brojeva (produkt se sastoji samo od faktora n). Ako n nije prost, tada je

$$n = n_1 \cdot n_2, \quad 2 \leqslant n_1, n_2 < n.$$

Prema pretpostavci indukcije brojevi n_1 i n_2 se mogu napisati u obliku produkta prostih brojeva. Stoga se i broj $n = n_1 n_2$ može napisati kao produkt prostih brojeva. Dakle, prema principu matematičke indukcije (jaka forma) slijedi da se svaki prirodni broj $n \geqslant 2$ može napisati kao produkt prostih brojeva.

Princip matematičke indukcije (slaba forma, općeniti oblik)

Neka je $P(n)$ tvrdnja koja ovisi o $n \in \mathbb{N}$. Ako vrijedi

1. $P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n_0+m-1)$ su istinite tvrdnje
2. Ako je $P(k)$ istinito za neki $k \geqslant n_0$, tada je istinito i $P(k+m)$

Tada je $P(n)$ istinita tvrdnja za svaki prirodni broj $n \geqslant n_0$.

Primjer 1.20.

Dokažite da svaku cjelobrojnu poštarinu veću ili jednaku od 8 kuna možemo platiti samo pomoću maraka od 3 kune i 5 kuna.

Primjer 1.20.

Dokažite da svaku cjelobrojnu poštarinu veću ili jednaku od 8 kuna možemo platiti samo pomoću maraka od 3 kune i 5 kuna.

Rješenje.

$n = 8$. Poštarinu od 8 kuna moguće je platiti pomoću jedne marke od 3 kune i jedne marke od 5 kuna.

$n = 9$. Poštarinu od 9 kuna moguće je platiti pomoću tri marke od 3 kune.

$n = 10$. Poštarinu od 10 kuna moguće je platiti pomoću dvije marke od 5 kuna.

Pretpostavimo da je poštarinu od k kuna moguće platiti samo pomoću maraka od 3 kune i 5 kuna $(k \geqslant 8)$.

Tvrdimo da je tada i poštarinu od $k+3$ kune moguće platiti samo pomoću maraka od 3 kune i 5 kuna. Prema pretpostavci indukcije, poštarinu od k kuna moguće je platiti samo pomoću maraka od 3 kune i 5 kuna. Ako tom izboru maraka dodamo još jednu marku od 3 kune, na taj način ćemo platiti poštarinu od $k+3$ kune samo pomoću maraka od 3 kune i 5 kuna.
Dakle, prema principu matematičke indukcije (slaba forma, općeniti oblik) slijedi da je svaku cjelobrojnu poštarinu veću ili jednaku od 8 kuna moguće platiti samo pomoću maraka od 3 kune i 5 kuna.

Princip matematičke indukcije za parne brojeve

Neka je $P(n)$ tvrdnja koja ovisi o $n \in \mathbb{N}$. Ako vrijedi

1. $P(2)$ je istinita tvrdnja
2. Ako je $P(k)$ istinita tvrdnja za neki $k \in \mathbb{N}$, tada je i $P(k+2)$ istinita tvrdnja

Tada je $P(n)$ istinita tvrdnja za svaki parni $n \in \mathbb{N}$.

Princip matematičke indukcije za neparne brojeve

Neka je $P(n)$ tvrdnja koja ovisi o $n \in \mathbb{N}$. Ako vrijedi

1. $P(1)$ je istinita tvrdnja
2. Ako je $P(k)$ istinita tvrdnja za neki $k \in \mathbb{N}$, tada je i $P(k+2)$ istinita tvrdnja

Tada je $P(n)$ istinita tvrdnja za svaki neparni $n \in \mathbb{N}$.

Primjer 1.21.

Dokažite da je $n^3 + 2n$ djeljiv s 3 za svaki neparni prirodni broj n.

Primjer 1.21.

Dokažite da je $n^3 + 2n$ djeljiv s 3 za svaki neparni prirodni broj n.

Rješenje.

Za $n = 1$ je $n^3 + 2n = 3$ pa tvrdnja vrijedi u tom slučaju.
Pretpostavimo da je $n^3 + 2n$ djeljiv s 3 za neki prirodni broj n.
Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $n^3 + 2n = 3k$. Želimo dokazati da tada tvrdnja vrijedi i za broj $n + 2$.

$$\begin{aligned}(n+2)^3 + 2(n+2) &= n^3 + 6n^2 + 12n + 8 + 2n + 4 = \\ &= \left(n^3 + 2n\right) + 6n^2 + 12n + 12 = 3k + 3(2n^2 + 4n + 4) = \\ &= 3(k + 2n^2 + 4n + 4)\end{aligned}$$

Dakle $n^3 + 2n$ je djeljiv s 3 za svaki neparni $n \in \mathbb{N}$.

Evo i nekoliko primjera primjene indukcije u svakodnevnom životu tako da ne kažete da indukcija treba samo matematičarima.

Primjer 1.22.

Ako je šalica razbijena na n dijelova, dokažite da je za sastavljanje šalice potrebno $n-1$ ljepljenje. Pretpostavljamo da pri svakom ljepljenju spajamo samo dva dijela, bilo krhotine ili već zaljepljene dijelove.

Evo i nekoliko primjera primjene indukcije u svakodnevnom životu tako da ne kažete da indukcija treba samo matematičarima.

Primjer 1.22.

Ako je šalica razbijena na n dijelova, dokažite da je za sastavljanje šalice potrebno $n-1$ ljepljenje. Pretpostavljamo da pri svakom ljepljenju spajamo samo dva dijela, bilo krhotine ili već zaljepljene dijelove.

Rješenje.

Za $n = 1$ šalica zapravo nije razbijena pa nam je potrebno $1 - 1 = 0$ ljepljenja. Pogledajmo još i što se događa za $n = 2$. Tada je šalica razbijena na dva dijela i jasno je da nam je potrebno $2 - 1 = 1$ ljepljenje da bismo ju ponovno sastavili.

Pretpostavimo da je za sastavljanje šalice koja je razbijena na n komada potrebno točno $n-1$ ljepljenje. Ako se šalica razbila na $n+1$ dijelova, tada će nam nakon prvog ljepljenja ostati još n dijelova koje treba spojiti. Po pretpostavci indukcije njih možemo zalijepiti u $n-1$ koraka pa nam je potrebno ukupno $1+(n-1)=n$ ljepljenja da bismo sastavili šalicu koja je razbijena na $n+1$ komada. Po principu matematičke indukcije tvrdnja slijedi.

Jeste li ikad poželjeli da su svi ljudi jednako stari? Pogledajmo kako nas matematička indukcija može lako prevariti ukoliko ju neoprezno primijenimo.

Primjer 1.23.

Pronađite grešku u sljedećem "dokazu". U bilo kojoj grupi koja se sastoji od samo jednog čovjeka je jasno da su svi u toj grupi jednako stari (jer je u toj grupi samo jedan čovjek).
Pretpostavimo da u bilo kojoj grupi od n ljudi svi imaju jednak broj godina. Neka je $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ grupa od $n+1$ ljudi. Pogledamo li dvije grupe

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \quad i \quad \{a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}\}$$

svaka od njih se sastoji od n ljudi pa prema pretpostavci indukcije $a_1, a_2, \ldots, a_n$ imaju jednak broj godina, te $a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$ imaju isto jednak broj godina. Kako se, npr. a_2 nalazi u obje grupe, zaključujemo da svi ljudi u grupi $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ imaju jednak broj godina. Dakle, prema principu matematičke indukcije smo pokazali da u svakoj grupi od n ljudi, svi ljudi su jednako stari.

Rješenje.

Gdje je greška u "dokazu"? Ima li uopće greške? Možda mi nismo svjesni činjenice da smo svi jednako stari. Pa zar bi to bilo moguće? Kao što možemo vidjeti, u ovom "dokazu" smo proveli i bazu i korak indukcije i čini nam se da je sve korektno napravljeno. Nismo ništa zaboravili napraviti, i baza i korak indukcije su provedeni. Baza je očito u redu, ali je ovdje problem s jednim dijelom koraka indukcije. Problem je za $n = 2$, tj. ne možemo dokazati da $P(1) \Rightarrow P(2)$. Naravno, jasno nam je da nije istina da su u svakoj grupi od dvoje ljudi svi jednako stari. No, pogledajmo da i naš "dokaz" zaista ne funkcionira za $n = 2$. Naime, ako promatramo grupu $G = \{a_1, a_2\}$ od dvoje ljudi, tada kada bismo ju razbili na dvije grupe (kako je to napravljeno u "dokazu") dobili bismo grupe

$$\{a_1\} \quad \text{i} \quad \{a_2\}$$

od po jednog člana i one nemaju zajedničkog čovjeka pa ne možemo zaključiti da a_1 i a_2 imaju jednak broj godina. Primijetimo da je upravo to presudni korak zbog kojeg ne možemo dokazati da u bilo kojoj grupi od n ljudi su svi jednako stari. Naime, kada bi postojao svijet u kojem bi živjela bića za koja bi vrijedilo da u bilo kojoj grupi od dvoje takvih bića su oboje jednake starosti, tada bi u tom svijetu vrijedilo da u bilo kojoj grupi od n takvih bića su svi jednako stari. Kod nas to ne vrijedi.

$$P(1) \not\Rightarrow P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow \cdots \Rightarrow P(n) \Rightarrow P(n+1) \Rightarrow \cdots$$

tu je problem

kad bi prošlo ovo prvo, tada bi sve ostalo prošlo u našem dokazu

Priznajte, već ste se sigurno ponadali da ste možda i mlađi, nego što mislite da jeste. No, ipak je bila greška u dokazu.



Primjer 1.24.

U skupini od 3^n dragulja točno jedan je lažni kojeg je nemoguće razlikovati golim okom od pravih. Jedina je razlika u tome što je on nešto lakši od pravih dragulja, a svi pravi dragulji su jednake težine. Na raspolaganju imate dvostranu vagu. Dokažite da pomoću n vaganja možete pronaći lažni dragulj.

Primjer 1.24.

U skupini od 3^n dragulja točno jedan je lažni kojeg je nemoguće razlikovati golim okom od pravih. Jedina je razlika u tome što je on nešto lakši od pravih dragulja, a svi pravi dragulji su jednake težine. Na raspolaganju imate dvostranu vagu. Dokažite da pomoću n vaganja možete pronaći lažni dragulj.

Rješenje.

Dokaz provodimo indukcijom po n. Za $n = 1$ imamo točno tri dragulja među kojima je jedan lažni. Uzmemo dva dragulja, jednog stavimo na jednu stranu vage, a drugog na drugu stranu. Ako vaga ostane u ravnoteži, odabrani dragulji su pravi pa je lažni onaj kojeg nismo uzeli. Ukoliko vaga ne ostane u ravnoteži, tada se lažni dragulj nalazi na onoj strani vage koja je ostala na većoj visini jer je lažni dragulj lakši od pravog. Dakle, u svakom slučaju, pomoću jednog vaganja smo pronašli lažni dragulj.

Pretpostavimo da u skupini od 3^n dragulja (među kojima je jedan lažni) lažni dragulj možemo otkriti pomoću n vaganja. Promatrajmo skupinu od 3^{n+1} dragulja među kojima je jedan lažni. Tu skupinu dragulja možemo podijeliti u 3 skupine od 3^n dragulja na proizvoljni način. Lažni dragulj se nalazi u jednoj od te tri skupine. Odaberemo dvije takve skupine dragulja. Jednu od njih stavimo na jednu stranu vage, a drugu na drugu stranu vage. Razlikujemo dva slučaja.

- Vaga je ostala u ravnoteži

U tom slučaju se lažni dragulj nalazi u onoj skupini od 3^n dragulja koju nismo stavili na vagu. Po pretpostavci indukcije lažni dragulj iz te skupine možemo otkriti u n vaganja. Dodamo li tim vaganjima i ono početno vaganje odabranih dviju skupina od 3^n dragulja, to će biti sveukupno $n+1$ vaganja.

- Vaga nije ostala u ravnoteži

U tom se slučaju lažni dragulj nalazi jednoj od dvije skupine od po 3^n dragulja koje smo stavili na vagu, točnije u onoj koja je na većoj visini na vagi (zbog toga jer je lažni dragulj lakši od pravih). Ta skupina ima 3^n dragulja pa opet po pretpostavci indukcije možemo otkriti lažni dragulj u njoj pomoću n vaganja. Dodamo li tim vaganjima i ono početno vaganje odabranih dviju skupina od 3^n dragulja, to će biti sveukupno $n+1$ vaganja.

U svakom slučaju, u skupini od 3^{n+1} dragulja (među kojima je jedan lažni) lažni dragulj možemo otkriti pomoću $n+1$ vaganja. Po principu matematičke indukcije slijedi tvrdnja.

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Dio II

Dokazi u matematici

Sadržaj

- Dokazi u matematici
  - Pojam suda
  - Operacije sa sudovima
  - Teorem
  - Direktni dokaz
  - Dokaz po slučajevima
  - Dokaz kontrapozicijom
  - Dokaz kontradikcijom
  - Ekvivalentne tvrdnje
  - Niz ekvivalentnih tvrdnji
  - Protuprimjer
  - Kvantifikatori

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Pojam suda

Sud je izjava za koju se može jednoznačno odrediti da li je istinita ili lažna.

Primjer 2.1.

1. $4 + 7 = 10$

Pojam suda

Sud je izjava za koju se može jednoznačno odrediti da li je istinita ili lažna.

Primjer 2.1.

1. $4 + 7 = 10$ ← *lažni sud*

Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Pojam suda

Sud je izjava za koju se može jednoznačno odrediti da li je istinita ili lažna.

Primjer 2.1.

1. $4 + 7 = 10$ $\leftarrow$ *lažni sud*
2. *8 je paran broj*

Pojam suda

Sud je izjava za koju se može jednoznačno odrediti da li je istinita ili lažna.

Primjer 2.1.

1. $4 + 7 = 10$ $\leftarrow$ *lažni sud*
2. *8 je paran broj* $\leftarrow$ *istiniti sud*

Pojam suda

Sud je izjava za koju se može jednoznačno odrediti da li je istinita ili lažna.

Primjer 2.1.

1. $4 + 7 = 10$ $\leftarrow$ *lažni sud*
2. *8 je paran broj* $\leftarrow$ *istiniti sud*
3. n *je višekratnik broja 100*

Pojam suda

Sud je izjava za koju se može jednoznačno odrediti da li je istinita ili lažna.

Primjer 2.1.

1. $4 + 7 = 10$ $\leftarrow$ *lažni sud*
2. *8 je paran broj* $\leftarrow$ *istiniti sud*
3. n *je višekratnik broja 100* $\leftarrow$ *to nije sud*

Pojam suda

Sud je izjava za koju se može jednoznačno odrediti da li je istinita ili lažna.

Primjer 2.1.

1. $4 + 7 = 10$ ← *lažni sud*
2. *8 je paran broj* ← *istiniti sud*
3. n *je višekratnik broja 100* ← *to nije sud*
4. *24.12.2096. u Varaždinu će padati snijeg*

Pojam suda

Sud je izjava za koju se može jednoznačno odrediti da li je istinita ili lažna.

Primjer 2.1.

1. $4 + 7 = 10$ ← *lažni sud*
2. *8 je paran broj* ← *istiniti sud*
3. n *je višekratnik broja 100* ← *to nije sud*
4. *24.12.2096. u Varaždinu će padati snijeg* ← *to je sud, ali ne postoji način da utvrdimo da li je istinit ili ne*

Sudove ćemo označavati slovima, a za operacije algebre sudova koristit će se posebni simboli.

Za istiniti sud se koristi znak $\top$
Za lažni sud se koristi znak $\bot$

Uobičajeno je da se u algebri sudova istinitom sudu pridružuje vrijednost (valencija) 1, a lažnom 0.

$$x \text{ je lažan} \quad v(x) = 0$$
$$x \text{ je istinit} \quad v(x) = 1$$

Zbog jednostavnosti umjesto $v(x) = 0$ kratko pišemo $x = 0$, a umjesto $v(x) = 1$ kratko pišemo $x = 1$.

Tablica istinitosti ili **semantička tablica** – pomoću nje definiramo i proučavamo operacije algebre sudova, a u njoj se u prvom dijelu nalaze sve moguće kombinacije istinitosti sudova koji su uključeni u operaciju, a u preostalom dijelu se unose rezultati operacije za pojedinu kombinaciju istinitosti sudova

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Operacije sa sudovima

- negiranje suda
- postupak povezivanja dva ili više suda u novi (složeni) sud pomoću veznika *i*, *ili*, *ako*, *onda*,...

Negacija

Negacija je unarna operacija jer djeluje na jedan objekt. Oznaka za negaciju suda a je $\bar{a}$ ili $\neg a$.

Negacija suda a je sud $\bar{a}$ koji je istinit jedino ako je sud a lažan.

Tablica istinitosti za negaciju:

a	$\bar{a}$
1	0
0	1

Primjer 2.2.

Negirajte sud $a \equiv$ "$x < 5$".

Tablica istinitosti za negaciju:

a	$\bar{a}$
1	0
0	1

Primjer 2.2.

Negirajte sud $a \equiv "x < 5"$.

Rješenje.

$\bar{a} \equiv "x \geqslant 5"$

Konjunkcija

Konjunkcija je operacija između dva suda. Oznaka za ovu operaciju je $\wedge$ i ona odgovara vezniku "i".
Konjunkcija sudova a i b je sud $a \wedge b$ koji je istinit jedino ako su oba suda a i b istinita.

Tablica istinitosti za konjunkciju:

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disjunkcija

Disjunkcija je operacija između dva suda. Oznaka za ovu operaciju je $\vee$ i ona odgovara vezniku "ili".
Disjunkcija sudova a i b je sud $a \vee b$ koji je lažan jedino ako su oba suda a i b lažna.

Tablica istinitosti za disjunkciju:

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Napomena.

Poznato je da veznik "ili" ima dvije semantičke interpretacije u složenim rečenicama: razlikuju se **inkluzivno ili** i **ekskluzivno ili**. Disjunkcija odgovara inkluzivnom ili.

Primjer 2.3 (inkluzivno ili).

"Za dobivanje potpisa iz matematike treba skupiti više od 20 bodova ili redovito ići na vježbe i predavanja" (obje su mogućnosti dozvoljene, tj. ako netko zadovolji i jedno i drugo isto će dobiti potpis)

Primjer 2.4 (ekskluzivno ili).

"Položit ćeš taj ispit ili ćeš prestati studirati"

Operaciju između dva suda koja odgovara ekskluzivnom ili označavamo sa $\veebar$

Tablica istinitosti za tu operaciju je

a	b	$a \veebar b$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Negacija, konjunkcija i disjunkcija su osnovne operacije među sudovima.

Svojstva osnovnih operacija algebre sudova

- $a \wedge b \equiv b \wedge a,$ (komutativnost)
- $a \vee b \equiv b \vee a,$ (komutativnost)
- $(a \wedge b) \wedge c \equiv a \wedge (b \wedge c),$ (asocijativnost)
- $(a \vee b) \vee c \equiv a \vee (b \vee c),$ (asocijativnost)
- $\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b,$ (De Morganov zakon)
- $\neg(a \vee b) \equiv \neg a \wedge \neg b,$ (De Morganov zakon)
- $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c),$ (distributivnost)
- $a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$ (distributivnost)

- $a \wedge a \equiv a,$ (idempotentnost za konjunkciju)
- $a \vee a \equiv a,$ (idempotentnost za disjunkciju)
- $\neg(\neg a) \equiv a,$ (zakon involucije)
- $a \wedge 0 \equiv 0,$
- $a \vee 1 \equiv 1,$

Navedena svojstva dokazuju se pomoću tablica istinitosti.

Primjer 2.5.

Dokažite da vrijedi $\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b.$

Primjer 2.5.

Dokažite da vrijedi $\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b.$

Rješenje.

Treba dokazati da sudovi $\neg(a \wedge b)$ i $\neg a \vee \neg b$ imaju iste tablice istinitosti.

a	b	$a \wedge b$	$\neg(a \wedge b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \vee \neg b$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

Implikacija

Implikacija se koristi da bi se izrazila uzročno-posljedična veza između dva suda.

Implikacija sudova a i b je sud $a \Rightarrow b$ koji je lažan jedino ako je sud a istinit, a sud b lažan.

Tablica istinitosti za implikaciju:

a	b	$a \Rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Primjer 2.6.

Odredite istinitost sljedećih implikacija:

a. $-1 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 2+2=5$

b. $4^2 = 16 \Rightarrow (-1)^2 = -1$

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Primjer 2.6.

Odredite istinitost sljedećih implikacija:

a. $-1 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 2+2=5$

b. $4^2 = 16 \Rightarrow (-1)^2 = -1$

Rješenje.

a. Implikacija je istinita $(0 \Rightarrow 0)$

Primjer 2.6.

Odredite istinitost sljedećih implikacija:

a. $-1 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 2+2=5$

b. $4^2 = 16 \Rightarrow (-1)^2 = -1$

Rješenje.

a. Implikacija je istinita $(0 \Rightarrow 0)$

b. Implikacija je lažna $(1 \Rightarrow 0)$

Primjer 2.6.

Odredite istinitost sljedećih implikacija:

a. $-1 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 2+2=5$

b. $4^2 = 16 \Rightarrow (-1)^2 = -1$

Rješenje.

a. Implikacija je istinita $(0 \Rightarrow 0)$

b. Implikacija je lažna $(1 \Rightarrow 0)$

Zadatak 2.1.

Da li za implikaciju vrijedi komutativnost?

Primjer 2.7.

Prikažite implikaciju pomoću osnovnih operacija.

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Primjer 2.7.

Prikažite implikaciju pomoću osnovnih operacija.

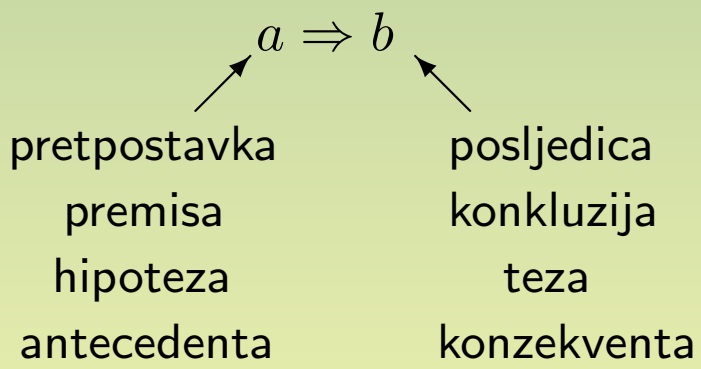
Rješenje.

$$\boxed{a \Rightarrow b \equiv \bar{a} \vee b}$$

a	b	$a \Rightarrow b$	$\bar{a}$	$\bar{a} \vee b$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Izraz $a \Rightarrow b$ čita se "a povlači b", "a implicira b", "iz a slijedi b", "ako je a tada je b", "b je nužan uvjet za a", "b proizlazi iz a", "b je logička posljedica od a".



Teorem

U matematici je za implikaciju

$$A \Rightarrow B$$

uobičajen naziv **teorem**.

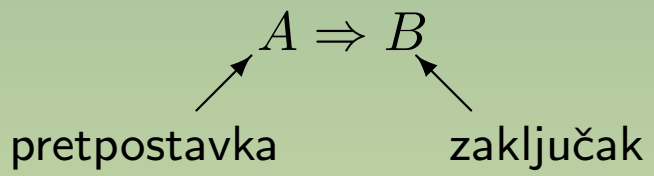
$A \Rightarrow B$	teorem
$B \Rightarrow A$	obrat teorema
$\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$	suprotan teorem
$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$	obrat suprotnog teorema (kontrapozicija)

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$	$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1

Iz tablice vidimo da se istinitost teorema podudara s istinitošću kontrapozicije teorema, a obrnuti teorem je po istinitosti jednak suprotnom teoremu.

$$\boxed{A \Rightarrow B \equiv \overline{B} \Rightarrow \overline{A}}$$



A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Da bismo dokazali istinitost implikacije, dovoljno je ispitati ne pojavljuje li se slučaj da istinita pretpostavka vodi do lažnog zaključka. Ukoliko postoji slučaj kod kojeg istinita pretpostavka vodi do lažnog zaključka, tvrdnja ne vrijedi. Tvrdnja je trivijalno istinita ako je istinit zaključak.

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Direktni dokaz

$$A \Rightarrow B$$

Direktni dokaz se provodi tako da se uzima da je pretpostavka istinita i tada se pomoću konačnog niza implikacija pokaže da je i zaključak istinit.

$$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B$$

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Primjer 2.8.

Ako je n neparan broj, tada je n^2 neparan broj.

Primjer 2.8.

Ako je n neparan broj, tada je n^2 neparan broj.

Rješenje.

$$n \text{ je neparan broj} \quad \Rightarrow \quad n^2 \text{ je neparan broj}$$

n je neparan broj $\Rightarrow$ $n = 2k+1$ za neki $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\underbrace{(2k^2 + 2k)}_{l} + 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad n^2 = 2l + 1 \text{ za neki } l \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad n^2 \text{ je neparan broj}$$

Primjer 2.9.

Dokažite da je $n^2 - n + 5$ neparan za sve $n \in \mathbb{N}$.

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Primjer 2.9.

Dokažite da je $n^2 - n + 5$ neparan za sve $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje.

$$n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad n^2 - n + 5 \text{ je neparan broj}$$

Neka je n bilo koji prirodni broj. Imamo da je

$$n^2 - n + 5 = \underbrace{n(n-1)}_{\text{paran broj}} + 5.$$

Kako je $n(n-1)$ produkt dva uzastopna prirodna broja, slijedi da je $n(n-1)$ paran broj (uzimamo da je i 0 paran broj). Kako je suma parnog i neparnog broja uvijek neparan broj, slijedi da je $n^2 - n + 5$ neparan broj.

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Primjer 2.10.

Dokažite da su dijagonale romba međusobno okomite i da su simetrale unutarnjih kutova romba.

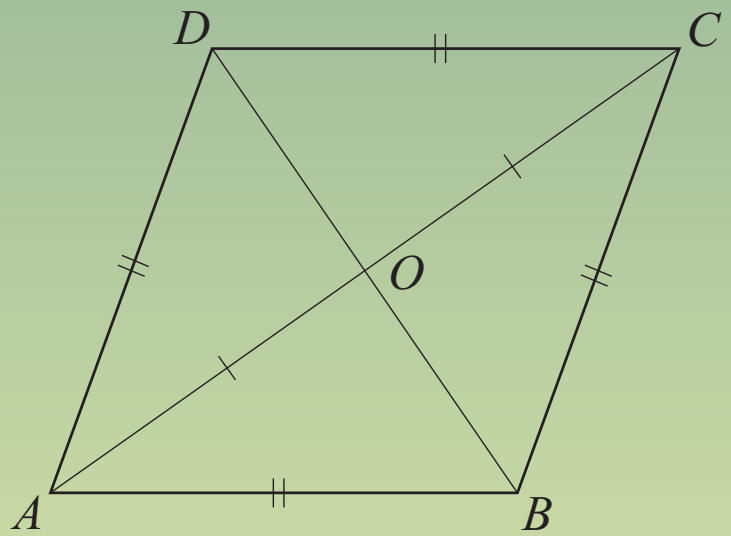
Primjer 2.10.

Dokažite da su dijagonale romba međusobno okomite i da su simetrale unutarnjih kutova romba.

Rješenje.

$$ABCD \text{ je romb } \Rightarrow \begin{array}{l} \text{dijagonale od } ABCD \text{ su} \\ \text{međusobno okomite i} \\ \text{simetrale su unutarnjih} \\ \text{kutova od } ABCD \end{array}$$

Neka je $ABCD$ romb i neka je O sjecište dijagonala romba. Tada je $\triangle AOD \cong \triangle COD$, što slijedi iz $(S-S-S)$ teorema o sukladnosti trokuta jer je



$|AD| = |CD|$, $|OD| = |OD|$ i $|AO| = |OC|$. Naime, ovdje u dokazu već koristimo poznatu (dokazanu) tvrdnju da se dijagonale paralelograma raspolavljaju iz koje slijedi posljednja jednakost ($|AO| = |OC|$). Iz sukladnosti trokutova AOD i COD slijedi i jednakost njihovih odgovarajućih unutarnjih kutova. Specijalno je tada

$$\sphericalangle AOD = \sphericalangle COD.$$

S druge strane je

$$\begin{aligned} \sphericalangle AOD + \sphericalangle COD &= 180^\circ \\ 2\sphericalangle AOD &= 180^\circ \\ \sphericalangle AOD &= 90^\circ \end{aligned}$$

Dakle, dijagonale romba se sijeku pod pravim kutom.

Nadalje, isto tako iz $(S-S-S)$ teorema o sukladnosti trokuta slijedi da je $\triangle ABO \cong \triangle ADO$ jer je $|AB| = |AD|$, $|AO| = |AO|$ i $|BO| = |DO|$. Stoga su im i odgovarajući kutovi jednaki pa je specijalno $\sphericalangle BAO = \sphericalangle DAO$, a iz toga slijedi (pogledaj sliku) da dijagonala $\overline{AC}$ raspoloavlja kut $\sphericalangle BAD$.

Uočite gdje je u dokazu bilo važno da se radi o rombu, a ne samo o paralelogramu!

Dokaz po slučajevima

Ponekad je tvrdnju $A \Rightarrow B$ lakše direktno dokazati tako da se pretpostavka A (ili neka druga tvrdnja koja se dobila iz pretpostavke A) podijeli na više istinitih pojedinačnih slučajeva $A_1, A_2, \ldots, A_k$ od kojih svaki mora dati tvrdnju B.

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k \Rightarrow B$$

$$\downarrow \text{eliminacija disjunkcije}$$

$$A_1 \Rightarrow B,\ A_2 \Rightarrow B, \ldots, A_k \Rightarrow B$$

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Primjer 2.11.

Dokažite da je $n^2 - n + 5$ neparan za sve $n \in \mathbb{N}$.

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Primjer 2.11.

Dokažite da je $n^2 - n + 5$ neparan za sve $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje.

$$n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad n^2 - n + 5 \text{ je neparan broj}$$

Dokaz dijelimo na dva slučaja.

1. n je paran broj. Tada je $n = 2k$ za neki $k \in \mathbb{N}$, pa je

$$n^2 - n + 5 = 4k^2 - 2k + 5 = 2(\underbrace{2k^2 - k + 2}_{l \in \mathbb{Z}}) + 1 = 2l + 1,$$

pa je $n^2 - n + 5$ neparan broj.

2. n je neparan broj. Tada je $n = 2k + 1$ za neki $k \in \mathbb{N}$, pa je

$$n^2 - n + 5 = 4k^2 + 2k + 5 = 2(\underbrace{2k^2 + k + 2}_{l \in \mathbb{Z}}) + 1 = 2l + 1,$$

pa je $n^2 - n + 5$ neparan broj.

Prisjetimo se množenja vektora iz V^3 sa skalarom $\lambda \in \mathbb{R}$.

Umnožak skalara $\lambda \in \mathbb{R}$ i vektora $\vec{a} \in V^3$ je vektor $\lambda\vec{a}$ za kojeg vrijedi

- **Duljina.** $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$
- **Smjer.** $\lambda\vec{a}$ i $\vec{a}$ imaju isti smjer
- **Orijentacija.** $\lambda\vec{a}$ i $\vec{a}$ su iste orijentacije ako je $\lambda > 0$, a suprotne ako je $\lambda < 0$

Prisjetimo se i skalarnog produkta vektora iz V^3.

$$\vec{a}\,\vec{b} = \begin{cases} 0, & \text{ako je } \vec{a} = \vec{0} \text{ ili } \vec{b} = \vec{0} \\ |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right), & \text{ako je } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ i } \vec{b} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Primjer 2.12.

Dokažite da za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ *i za svaka dva vektora* $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ *vrijedi* $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\,\vec{b})$.

Primjer 2.12.

Dokažite da za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ i za svaka dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ vrijedi $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\,\vec{b})$.

Rješenje.

$$\lambda \in \mathbb{R},\ \vec{a}, \vec{b} \in V^3 \quad \Rightarrow \quad (\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\,\vec{b})$$

Razlikujemo nekoliko slučajeva.

1. $\lambda = 0$. Tada je

$$(0 \cdot \vec{a})\vec{b} = \vec{0} \cdot \vec{b} = 0$$
$$0 \cdot \underbrace{(\vec{a}\,\vec{b})}_{\in \mathbb{R}} = 0$$

pa je $(0 \cdot \vec{a})\vec{b} = 0(\vec{a}\,\vec{b})$.

2. $\vec{a} = \vec{0}$. Tada je

$$(\lambda \cdot \vec{0})\vec{b} = \vec{0} \cdot \vec{b} = 0$$
$$\lambda(\vec{0} \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot 0 = 0$$

pa je $(\lambda \cdot \vec{0})\vec{b} = \lambda(\vec{0} \cdot \vec{b})$.

3. $\vec{b} = \vec{0}$. Tada je

$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{0} = 0$$
$$\lambda(\vec{a} \cdot \vec{0}) = \lambda \cdot 0 = 0$$

pa je $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{0} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{0})$.

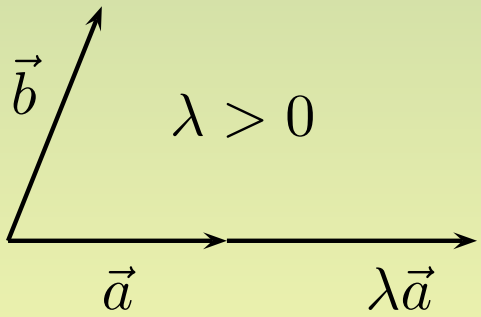
4. $\lambda \neq 0,\ \vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0}$. Ovdje razlikujemo još dva podslučaja.

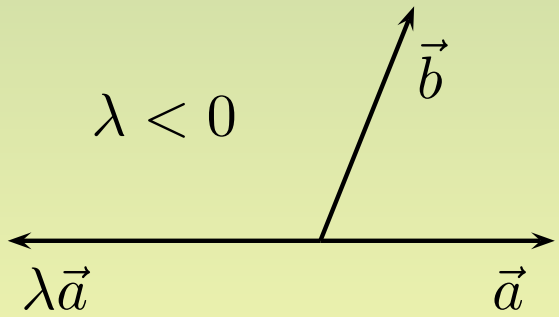
   1. $\lambda > 0$. Tada je $|\lambda\vec{a}| = \lambda|\vec{a}|$ i $\sphericalangle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$.

   $$(\lambda\vec{a})\vec{b} = |\lambda\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}\,\vec{b})$$

   2. $\lambda < 0$. Tada je $|\lambda\vec{a}| = -\lambda|\vec{a}|$ i $\sphericalangle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \pi - \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$.

   $$(\lambda\vec{a})\vec{b} = |\lambda\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = -\lambda|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\pi - (\vec{a}, \vec{b})) =$$
   $$= \lambda|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}\,\vec{b})$$





Dokaz kontrapozicijom

A	B	$A \Rightarrow B$	$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Često je teško ili nemoguće dokazati direktno teorem $A \Rightarrow B$, pa se umjesto toga dokazuje obrat suprotnog teorema $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. Pretpostavi se da je istinita tvrdnja $\overline{B}$ i pokaže se da ta pretpostavka vodi do istinitosti tvrdnje $\overline{A}$.

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Primjer 2.13.

Ako je n^2 neparan broj, tada je n neparan broj. Dokažite.

Primjer 2.13.

Ako je n^2 neparan broj, tada je n neparan broj. Dokažite.

Rješenje.

$A \equiv$ "n^2 je neparan broj"	$\overline{A} \equiv$ "n^2 je paran broj"
$B \equiv$ "n je neparan broj"	$\overline{B} \equiv$ "n je paran broj" Do-
Treba dokazati: $A \Rightarrow B$	kazat ćemo: $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$

Pretpostavimo da je n paran broj. Tada je $n = 2k$ za neki $k \in \mathbb{N}$.

$$n = 2k \quad \Rightarrow \quad n^2 = 4k^2 = 2 \cdot \underbrace{2k^2}_{\in \mathbb{N}}$$

Dakle, n^2 je paran broj.

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Primjer 2.14.

Neka je $n = ab$ *produkt prirodnih brojeva* a *i* b*. Dokažite da je tada* $a \leqslant \sqrt{n}$ *ili* $b \leqslant \sqrt{n}$*.*

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Primjer 2.14.

Neka je $n = ab$ produkt prirodnih brojeva a i b. Dokažite da je tada $a \leqslant \sqrt{n}$ ili $b \leqslant \sqrt{n}$.

Rješenje.

$A \equiv "n = ab"$ $\quad$ $B \equiv "a \leqslant \sqrt{n}$ ili $b \leqslant \sqrt{n}"$

Treba dokazati: $A \Rightarrow B$

$\overline{A} \equiv "n \neq ab"$ $\quad$ $\overline{B} \equiv "a > \sqrt{n}$ i $b > \sqrt{n}"$

Dokazat ćemo: $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$

Pretpostavimo da je $a > \sqrt{n}$ i $b > \sqrt{n}$. Tada je $ab > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$. Dakle, $ab > n$, pa je i $n \neq ab$.

Dokaz kontradikcijom

Dokaz kontradikcijom zasniva se na sljedećem:
Iz $\neg A \Rightarrow \bot$ zaključujemo da je tvrdnja A istinita.

A	$\neg A$	$\neg A \Rightarrow \bot$
1	0	1
0	1	0

Dakle, ako je točno da negacija tvrdnje A implicira laž (kontradikciju), onda je tvrdnja A istinita.

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Primjer 2.15.

Dokažite da ne postoji najmanji pozitivni realni broj.

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Primjer 2.15.

Dokažite da ne postoji najmanji pozitivni realni broj.

Rješenje.

$A \equiv$ "ne postoji najmanji pozitivni realni broj"

$\neg A \equiv$ "postoji najmanji pozitivni realni broj"

Pretpostavimo da postoji najmanji pozitivni realni broj (tj., da vrijedi $\neg A$). Neka je m najmanji pozitivni realni broj. Tada je $m > 0$. S druge strane je broj $\frac{1}{2}m$ također realni pozitivni broj, tj. $\frac{1}{2}m > 0$. Tada zbog pretpostavke da je m najmanji pozitivni realni broj mora biti $\frac{1}{2}m \geqslant m$, što je laž. Dakle, zaključujemo da vrijedi tvrdnja A, tj. da ne postoji najmanji pozitivni realni broj.

Primjer 2.16.

Dokažite da $\sqrt{2}$ nije racionalni broj.

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Primjer 2.16.

Dokažite da $\sqrt{2}$ nije racionalni broj.

Rješenje.

$A \equiv$ "$\sqrt{2}$ nije racionalni broj"

$\neg A \equiv$ "$\sqrt{2}$ je racionalni broj"

Pretpostavimo da vrijedi $\neg A$, tj. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Tada je $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ za neke $m, n \in \mathbb{N}$. Kvadriranjem dobivamo $m^2 = 2n^2$. Ako lijevu i desnu stranu rastavimo na proste faktore, tada će se na lijevoj strani potencija svakog prostog faktora javljati s parnim eksponentom (specijalno i potencija broja 2), a na desnoj strani će se potencija broja 2 javiti s neparnim eksponentom. No, u tom slučaju brojevi m^2 i $2n^2$ ne mogu biti jednaki jer je rastav prirodnog broja na proste faktore jedinstven do na poredak faktora. Dakle, dobili smo kontradikciju pa zaključujemo da vrijedi tvrdnja A, tj. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Ekvivalentne tvrdnje

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

U matematici se ekvivalencija javlja u dva vida: kao relacija (odnos) među nekim objektima koja ima određena svojstva i kao posebna logička operacija.

Ekvivalencija sudova a i b je sud $a \Leftrightarrow b$ koji je istinit ako su oba suda a i b istinita ili ako su oba suda a i b lažna.

Tablica istinitosti za ekvivalenciju:

a	b	$a \Leftrightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Kod dokazivanja tvrdnje

$$A \Leftrightarrow B$$

treba dokazati dvije implikacije

$$A \Rightarrow B \quad \text{i} \quad B \Rightarrow A.$$

U tom slučaju kažemo da su tvrdnje A i B **ekvivalentne**.

$A \Leftrightarrow B$

A je nužan i dovoljan uvjet za B

B je nužan i dovoljan uvjet za A

$A \Rightarrow B$

A je dovoljan uvjet za B (ali ne i nužan)

B je nužan uvjet za A (ali ne i dovoljan)

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

$A \Leftrightarrow B$

A je nužan i dovoljan uvjet za B

A je dovoljan uvjet za B: $A \Rightarrow B$

A je nužan uvjet za B: $\neg A \Rightarrow \neg B, \quad B \Rightarrow A$

B je nužan i dovoljan uvjet za A

B je dovoljan uvjet za A: $B \Rightarrow A$

B je nužan uvjet za A: $\neg B \Rightarrow \neg A, \quad A \Rightarrow B$

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Primjer 2.17.

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira, tada je* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$A \equiv$ "red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira"

$B \equiv$ "$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$"

$$A \Rightarrow B, \quad B \not\Rightarrow A$$

A je dovoljan uvjet za B $(A \Rightarrow B)$

Ako red konvergira, tada njegov opći član teži u nulu

A nije nužan uvjet za B $(B \not\Rightarrow A, \quad \neg A \not\Rightarrow \neg B)$

Ako opći član reda konvergira u nulu, to još uvijek ne povlači da red konvergira. Ili pak, divergencija reda ne povlači da njegov opći član ne teži u nulu, tj. u

divergentnom redu može opći član težiti u nulu. Primjer takvog reda je red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

B je nužan uvjet za A $(A \Rightarrow B)$

Da bi imalo ikakve šanse da red konvergira, mora njegov opći član težiti u nulu.

B nije dovoljan uvjet za A $(B \not\Rightarrow A, \quad \neg A \not\Rightarrow \neg B)$

Ako opći član teži u nulu, to još uvijek ne znači da red konvergira.

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Primjer 2.18.

Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ realna funkcija definirana na otvorenom intervalu I. Ako je f derivabilna u točki $c \in I$, tada je f neprekidna u točki c.

$A \equiv$ "$f : I \to \mathbb{R}$ je derivabilna u točki $c \in I$"

$B \equiv$ "$f : I \to \mathbb{R}$ je neprekidna u točki $c \in I$"

$$A \Rightarrow B, \quad B \not\Rightarrow A$$

Dakle, derivabilnost povlači neprekidnost (derivabilnost je dovoljan uvjet za neprekidnost). Međutim, derivabilnost nije nužan uvjet za neprekidnost. Moguće je da funkcija u nekoj točki nema derivaciju, a da je ipak u toj točki neprekidna.

Primjer takve funkcije je funkcija $f(x) = |x|$ koja nema derivaciju u $x = 0$, ali je ipak neprekidna u toj točki. Isto tako, neprekidnost je nužan uvjet za derivabilnost (da bi imalo ikakve šanse da funkcija bude derivabilna u nekoj točki, mora u toj točki biti neprekidna), ali neprekidnost nije dovoljan uvjet za derivabilnost (ako je funkcija neprekidna u nekoj točki, to još uvijek ne mora značiti da je i derivabilna u toj točki).

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Primjer 2.19 (Roucheov teorem).

Homogeni sustav linearnih jednadžbi u kojemu je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica ima i netrivijalnih rješenja ako i samo ako (akko) je determinanta matrice sustava jednaka 0, tj. $\det M = 0$, *gdje je* M *matrica sustava.*

$A \equiv$ "homogeni sustav linearnih jednadžbi u kojemu je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica ima i netrivijalnih rješenja"

$B \equiv$ "$\det M = 0$"

$$A \Leftrightarrow B$$

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

$A \Rightarrow B$

A je dovoljan uvjet za B, tj. u homogenom sustavu linearnih jednadžbi u kojemu je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica i koji ima i netrivijalnih rješenja sigurno mora biti determinanta matrice sustava jednaka nuli.

$B \Rightarrow A$

No, A je i nužan uvjet za B, tj. ako je determinanta matrice homogenog sustava linearnih jednadžbi, u kojemu je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica, jednaka nula, tada taj sustav ima i netrivijalnih rješenja; ili ako pogledamo kontrapoziciju

$$\neg A \Rightarrow \neg B$$

Ako homogeni sustav linearnih jednadžbi, u kojemu je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica, nema netrivijalnih rješenja (tj., ima samo trivijalno rješenje), tada je determinanta matrice tog sustava različita od nule.

$B \Rightarrow A$

Isto tako, B je dovoljan uvjet za A, tj. ako je determinanta matrice homogenog sustava linearnih jednadžbi, u kojemu je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica, jednaka nula, tada taj sustav ima i netrivijalnih rješenja.

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

$A \Rightarrow B$

No, B je i nužan uvjet za A, tj. ako homogeni sustav linearnih jednadžbi, u kojemu je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica, ima i netrivijalnih rješenja, tada je determinanta matrice tog sustava jednaka nula; ili ako pogledamo kontrapoziciju

$$\neg B \Rightarrow \neg A$$

Ako je determinanta matrice homogenog sustava linearnih jednadžbi, u kojemu je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica, različita od nule, tada taj sustav ima samo trivijalno rješenje.

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Primjer 2.20 (Kronecker-Capellijev teorem).

Sustav linearnih jednadžbi je rješiv akko je rang matrice sustava jednak rangu proširene matrice sustava, tj. $r(M) = r(M_p)$.

$A \equiv$ "sustav linearnih jednadžbi je rješiv"

$B \equiv$ "rang matrice sustava jednak je rangu proširene matrice sustava"

$$A \Leftrightarrow B$$

$A \Rightarrow B$

A je dovoljan uvjet za B, tj. u rješivom sustavu linearnih jednadžbi je rang matrice sustava jednak rangu proširene matrice sustava.

$B \Rightarrow A$

Isto tako, A je i nužan uvjet za B, tj. ako je u sustavu linearnih jednadžbi rang matrice sustava jednak rangu proširene matrice sustava, tada je taj sustav rješiv; ili ako pogledamo kontrapoziciju

$$\neg A \Rightarrow \neg B$$

Ako sustav linearnih jednadžbi nije rješiv, tada je rang matrice sustava različit od ranga proširene matrice sustava.

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

$B \Rightarrow A$

B je dovoljan uvjet za A, tj. ako je u sustavu linearnih jednadžbi rang matrice sustava jednak rangu proširene matrice sustava, tada je taj sustav rješiv.

$A \Rightarrow B$

Isto tako, B je i nužan uvjet za A, tj. ako je sustav linearnih jednadžbi rješiv, tada je rang matrice sustava jednak rangu proširene matrice sustava; ili ako pogledamo kontrapoziciju

$$\neg B \Rightarrow \neg A$$

Ako je rang matrice sustava različit od ranga proširene matrice sustava, tada taj sustav linearnih jednadžbi nema rješenja

Primjer 2.21.

Dokažite da je prirodni broj n djeljiv s 3 ako i samo ako je n^2 djeljiv s 3.

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Primjer 2.21.

Dokažite da je prirodni broj n djeljiv s 3 ako i samo ako je n^2 djeljiv s 3.

Rješenje.

$A \equiv$ "$n \in \mathbb{N}$ je djeljiv s 3"

$B \equiv$ "n^2 je djeljiv s 3"

$$A \Leftrightarrow B$$

Treba dokazati $A \Rightarrow B$ i $B \Rightarrow A$.

$\boxed{A \Rightarrow B}$ (ili kratko $\boxed{\Rightarrow}$)

Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ djeljiv s 3. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $n = 3k$. Tada je

$$n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3 \cdot \underbrace{3k^2}_{\in \mathbb{N}}$$

iz čega slijedi da je n^2 djeljiv s 3.

$\boxed{B \Rightarrow A}$ (ili kratko $\boxed{\Leftarrow}$)

Pretpostavimo da je n^2 djeljiv s 3. Tada se u rastavu broja n^2 na proste faktore mora broj 3 pojaviti kao prosti faktor (u protivnom n^2 ne bi bio djeljiv s 3). Međutim, u rastavu broja n^2 na proste faktore svaki se prosti faktor javlja na parnu potenciju pa se onda i broj 3 mora javiti na parnu potenciju, dakle barem se mora pojaviti 3^2, tj.

$$n^2 = 3^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k},$$

gdje su $3, p_2, \ldots, p_k$ svi različiti prosti faktori broja n^2, a $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$. Iz toga slijedi da je

$$n = 3 \cdot 3^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

pri čemu je $\alpha_1 - 1 \geqslant 0$ jer je $\alpha_1 \in \mathbb{N}$. Stoga je broj n djeljiv s 3.

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Niz ekvivalentnih tvrdnji

U matematici su često teoremi sljedećeg oblika.

Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

i. A
ii. B
iii. C

U takvim izjavama se misli da su istinite ekvivalencije

$$A \Leftrightarrow B, \quad B \Leftrightarrow C, \quad A \Leftrightarrow C.$$

Međutim, pritom ne treba dokazivati svih šest implikacija, nego je, npr. dovoljno dokazati

$$A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow A$$

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

tj., dovoljno je dokazati tri implikacije

$$A \Rightarrow B, \quad B \Rightarrow C, \quad C \Rightarrow A.$$

Općenito, želimo li dokazati da su tvrdnje

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

međusobno ekvivalentne, tj. da su ekvivalencije

$$A_i \Leftrightarrow A_j, \quad i, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad i \neq j$$

istinite, dovoljno je, npr. dokazati

$$A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow A_n \Rightarrow A_1$$

ili na neki drugi način "zatvoriti krug".

Primjer 2.22.

Dokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

i. $x = \pm 1$

ii. $x^2 = 1$

iii. *ako je* $a \in \mathbb{R}$, *tada je* $ax = \pm a$

Primjer 2.22.

Dokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

i. $x = \pm 1$
ii. $x^2 = 1$
iii. *ako je* $a \in \mathbb{R}$, *tada je* $ax = \pm a$

Rješenje.

$$(\text{ii}) \Rightarrow (\text{i}) \Rightarrow (\text{iii}) \Rightarrow (\text{ii})$$

$\boxed{(\text{ii}) \Rightarrow (\text{i})}$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$\boxed{(\text{i}) \Rightarrow (\text{iii})}$

$$x = \pm 1 \,/ \cdot a \quad \Rightarrow \quad ax = \pm a$$

$\boxed{\text{(iii)} \Rightarrow \text{(ii)}}$

$ax = \pm a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Stavimo li $a = 1$, dobivamo $x = \pm 1$, odnosno $x^2 = 1$.

Zadatak 2.2.

Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

a. *Četverokut je paralelogram.*
b. *Četverokut ima jedan par paralelnih stranica jednakih duljina.*
c. *Četverokutu se dijagonale raspolavljaju.*

Dokažite.

Protuprimjer

Da bismo dokazali da neka tvrdnja općenito ne vrijedi, dovoljno je naći jedan primjer na kojem ona ne vrijedi. Takav primjer zovemo **protuprimjerom**.

Primjer 2.23.

Da li je $3x^4 - 4x^2 \geqslant 0$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$*?*

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Protuprimjer

Da bismo dokazali da neka tvrdnja općenito ne vrijedi, dovoljno je naći jedan primjer na kojem ona ne vrijedi. Takav primjer zovemo **protuprimjerom**.

Primjer 2.23.

Da li je $3x^4 - 4x^2 \geqslant 0$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$*?*

Rješenje.

Na primjer, za $x = 1$ tvrdnja ne vrijedi, pa zaključujemo da gornja tvrdnja općenito ne vrijedi (iako ona vrijedi za neke realne brojeve, npr. za $x = 2$, ali ne vrijedi za sve realne brojeve).

Primjer 2.24.

Ako su $a, b \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $a + b \in \mathbb{Q}$*, tada su* $a, b \in \mathbb{Q}$*.*

Dokažite ili opovrgnite.

Primjer 2.24.

Ako su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a + b \in \mathbb{Q}$, tada su $a, b \in \mathbb{Q}$.
Dokažite ili opovrgnite.

Rješenje.

Tvrdnja nije istinita. Na primjer, uzmemo li

$$a = \sqrt{2}, \quad b = 1 - \sqrt{2},$$

tada je

$$a + b = 1 \in \mathbb{Q},$$

ali

$$a \notin \mathbb{Q}, \quad b \notin \mathbb{Q}.$$

Dakle,

$$a + b \in \mathbb{Q} \quad \not\Rightarrow \quad a \in \mathbb{Q} \quad \wedge \quad b \in \mathbb{Q}$$

Uočite da obrnuta implikacija vrijedi!

Kvantifikatori

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Sudovi nisu dovoljni za izricanje svih tipova tvrdnji u matematici. Osim sudova u matematici se koriste i drugi tipovi rečenica. Struktura tih rečenica je takva da one sadrže subjekt (elemente nekog skupa) i predikat (svojstvo koje se pridružuje navedenom elementu, odnosno elementima). Zbog toga se takve rečenice zovu **predikati**.

Jednomjesni predikat je funkcija P koja svakom elementu x iz nekog skupa (univerzum razmatranja) $\mathcal{U}$ pridružuje sud $P(x)$.

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Jednomjesni predikat

- ima jednu varijablu
- $P(x), \quad x \in \mathcal{U}$
- univerzum razmatranja: $\mathcal{U}$

Dvomjesni predikat

- ima dvije varijable
- $P(x, y), \quad x \in \mathcal{U}_1, \quad y \in \mathcal{U}_2$
- univerzum razmatranja: $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$

n-mjesni predikat

- ima n varijabli
- $P(x_1, \ldots, x_n), \quad x_1 \in \mathcal{U}_1, \quad x_2 \in \mathcal{U}_2, \ \ldots, \ x_n \in \mathcal{U}_n$
- univerzum razmatranja: $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \cdots \times \mathcal{U}_n$

$\mathcal{U} = \mathbb{N}$

$P(x) =$ "x je prost broj" $\leftarrow$ predikat

$P(3) =$ "3 je prost broj" $\leftarrow$ istinit sud

$P(8) =$ "8 je prost broj" $\leftarrow$ lažan sud

$\mathcal{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$P(x, y) =$ "$x < y$" $\leftarrow$ predikat

$P(2, 3) =$ "$2 < 3$" $\leftarrow$ istinit sud

$P(3, 2) =$ "$3 < 2$" $\leftarrow$ lažan sud

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Univerzalni kvantifikator

Neka je $P(x)$ predikat sa univerzumom razmatranja $\mathcal{U}$. Onda sa $\forall x P(x)$ označavamo sud koji je istinit ako i samo ako je sud $P(a)$ istinit za svaki $a \in \mathcal{U}$.

Egzistencijalni kvantifikator

Neka je $P(x)$ predikat sa univerzumom razmatranja $\mathcal{U}$. Onda sa $\exists x P(x)$ označavamo sud koji je istinit ako i samo ako je sud $P(a)$ istinit za barem jedan $a \in \mathcal{U}$.

Isto tako, sa $\exists! x P(x)$ označavamo sud koji je istinit ako i samo ako je sud $P(a)$ istinit za jedan i samo jedan $a \in \mathcal{U}$.

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Napomena.

Istinitost sudova $\forall x P(x)$ i $\exists x P(x)$ ovisi o predikatu $P(x)$, ali i o univerzumu razmatranja $\mathcal{U}$ na kojemu promatramo predikat $P(x)$. Stoga, u nekim situacijama kada je potrebno istaknuti univerzum razmatranja često pišemo

$$\big(\forall x \in \mathcal{U}\big) P(x), \quad \big(\exists x \in \mathcal{U}\big) P(x)$$

Negacija kvantifikatora

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

$$P(x) = "x \text{ je prost broj}"$$

$$\mathcal{U}_1 = \mathbb{N}, \quad \mathcal{U}_2 = \text{skup prostih brojeva}, \quad \mathcal{U}_3 = \mathbb{N} \setminus \mathcal{U}_2$$

$$\big(\forall x \in \mathcal{U}_1\big) P(x) \quad \leftarrow \quad \text{lažan sud}$$

$$\big(\forall x \in \mathcal{U}_2\big) P(x) \quad \leftarrow \quad \text{istinit sud}$$

$$\big(\exists x \in \mathcal{U}_1\big) P(x) \quad \leftarrow \quad \text{istinit sud}$$

$$\big(\exists x \in \mathcal{U}_2\big) P(x) \quad \leftarrow \quad \text{istinit sud}$$

$$\big(\exists x \in \mathcal{U}_3\big) P(x) \quad \leftarrow \quad \text{lažan sud}$$

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, kažemo da je neprekidna u točki $c \in I$ ako vrijedi

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big(\forall x \in I\big)\Big(|x - c| < \delta \Rightarrow \big|f(x) - f(c)\big| < \varepsilon\Big)$$

Negacija te tvrdnje glasi:

Funkcija f ima prekid u točki $c \in I$ ako vrijedi

$$\big(\exists \varepsilon > 0\big)\big(\forall \delta > 0\big)\big(\exists x \in I\big)\Big(|x - c| < \delta \ \ \wedge \ \ \big|f(x) - f(c)\big| \geqslant \varepsilon\Big)$$

Negacija implikacije

$$\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$$

Dokazi u matematici
Pojam suda
Operacije sa sudovima
Teorem
Direktni dokaz
Dokaz po slučajevima
Dokaz kontrapozicijom
Dokaz kontradikcijom
Ekvivalentne tvrdnje
Niz ekviv. tvrdnji
Protuprimjer
Kvantifikatori

Napomena.

Poredak kvantifikatora je bitan. Naime, sudovi

$$\forall x \exists y R(x,y) \quad \text{i} \quad \exists y \forall x R(x,y)$$

nisu logički ekvivalentni.

Ako je sud $\exists y \forall x R(x,y)$ istinit, tada je istinit i sud $\forall x \exists y R(x,y)$.

Obrnuto ne mora vrijediti.

$\mathcal{A} \equiv$ "Postoji realni broj koji je veći od svakog realnog broja"

$\mathcal{A} \equiv \big(\exists y \in \mathbb{R}\big)\big(\forall x \in \mathbb{R}\big)\big(y > x\big)$ $\quad \leftarrow$ lažan sud

$\mathcal{B} \equiv$ "Za svaki realni broj postoji realni broj veći od njega"

$\mathcal{B} \equiv \big(\forall x \in \mathbb{R}\big)\big(\exists y \in \mathbb{R}\big)\big(y > x\big)$ $\quad \leftarrow$ istinit sud

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Dio III

Relacije

Sadržaj

- Relacije
  - Skupovi (ponavljanje)
  - Binarne relacije
  - Relacija ekvivalencije
  - Kardinalni broj
  - Relacije uređaja
  - Linearni i dobar uređaj
  - Primjeri uređaja
  - Uređaji na kartezijevom produktu
  - Hasseovi dijagrami

Relacije

Skupovi (ponavljanje)

Binarne relacije

Relacija ekvivalencije

Kardinalni broj

Relacije uređaja

Linearni i dobar uređaj

Primjeri uređaja

Uređaji na $A \times B$

Hasseovi dijagrami

Zadavanje skupa

Georg Cantor – utemeljitelj teorije skupova

Skup je osnovni matematički pojam pa se ne definira. Skup čine elementi koji su po nekom kriteriju povezani u cjelinu.

Prazan skup je skup koji nema niti jedan element. Oznaka za prazan skup je $\emptyset$.

Skup je zadan ako su poznati svi njegovi elementi.

Ako skup A sadrži element a, to zapisujemo u obliku $a \in A$. Ako b nije element skupa A, to zapisujemo u obliku $b \notin A$.

Skup se može zadati na dva načina:

1. Nabrajanjem elemenata skupa – ovaj način je pogodan samo kada se radi o skupovima koji nemaju veliki broj elemenata ili ako se radi o skupovima kod kojih je jasno od kojih se elemenata sastoje ako se navede nekoliko njihovih elemenata

$$A = \{3, 8, 12, -4\}$$
$$B = \{\clubsuit, \heartsuit, 1\}$$
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Evo nekoliko istinitih relacija:

$$8 \in A, \quad 1 \notin A, \quad \clubsuit \in B, \quad 5 \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

2. Definiranjem karakterističnog svojstva koji moraju elementi zadovoljavati da bi pripadali skupu.

   Opći oblik ovako zadanog skupa je $S = \{x \mid P(x)\}$, što znači da skupu S pripadaju samo oni elementi koji zadovoljavaju predikat $P(x)$.

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant x < 6\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

   Naravno, skup C možemo napisati i na prvi način tako da nabrojimo sve njegove elemente $C = \{3, 4, 5\}$.

Sa zadavanjem skupa bilo je dosta problema. Fregeov pristup je bio da svako svojstvo definira neki skup. Međutim, neki matematičari su uočili da takav pristup dovodi do paradoksa, tj. da se može opisati skup i specificirati objekt za koji se ne može utvrditi da li pripada ili ne pripada tom skupu.

Cantor – ne postoji skup svih skupova

Russellov paradoks o brijaču

U nekom selu postoji brijač koji brije sve one i samo one suseljane koji ne briju sami sebe. Pitanje je tko brije brijača?

Ako brijač brije sam sebe, onda on radi ono što ne bi smio jer mu u opisu radnog mjesta stoji da brije samo one koji se sami ne briju.
Ako pak brijač ne brije sam sebe, morao bi to uraditi jer on brije one koji se sami ne briju.

Fregeov princip da svako svojstvo definira skup ne vrijedi.
Zermelo je utvrdio da kod zadavanja skupa treba uvažiti dodatan zahtjev da se elementi koji određuju skup uzimaju iz nekog **univerzalnog skupa** U na kojemu je definirano svojstvo $P(x)$.
Najčešće je jasno o kojem se univerzalnom skupu radi pa se on ne spominje eksplicitno. Skupove brojeva često koristimo kao univerzalne skupove.

Skupovi brojeva

Skup prirodnih brojeva

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Skup cijelih brojeva

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

Skup racionalnih brojeva

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Skup realnih brojeva: $\mathbb{R}$

Skup kompleksnih brojeva

$$\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Kardinalni broj konačnog skupa

Neka je A skup koji ima konačno mnogo elemenata. Kardinalni broj skupa A je broj elemenata koje taj skup sadrži.

Oznake za kardinalni broj skupa A su

$$k(A), \quad \operatorname{card} A, \quad |A|$$

Mi ćemo najćešće koristiti oznaku $k(A)$.

Kasnije ćemo strogo matematički definirati pojam kardinalnog broja za bilo koji skup (koji ne mora imati samo konačno mnogo elemenata).

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.1.

Odredite kardinalne brojeve skupova $A = \{1, 2, 5, 8\}$ *i* $B = \{a, b, c, d\}$.

Primjer 3.1.

Odredite kardinalne brojeve skupova $A = \{1, 2, 5, 8\}$ *i* $B = \{a, b, c, d\}$.

Rješenje.

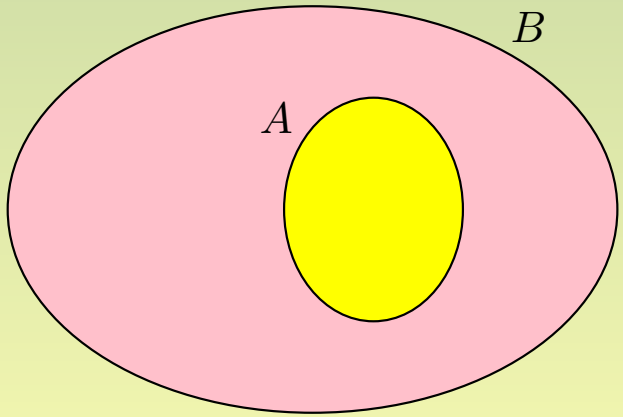
Skup A ima četiri elementa i skup B ima četiri elementa, pa je $k(A) = 4$ i $k(B) = 4$. Ovdje odmah možemo primijetiti da ako dva skupa imaju isti kardinalni broj to ne povlači da oni moraju biti jednaki, tj. da moraju imati iste elemente.

Relacije među skupovima

Relacija sadržavanja

Skup A **je podskup** skupa B ukoliko su svi elementi skupa A ujedno i elementi skupa B.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$$



Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Jednakost skupova

Za dva skupa kažemo da su jednaka ukoliko sadrže iste elemente.

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

Primjer 3.2.

Da li su skupovi $A = \{a, b, c\}$ *i* $B = \{c, c, a, b, b, b\}$ *jednaki?*

Jednakost skupova

Za dva skupa kažemo da su jednaka ukoliko sadrže iste elemente.

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

Primjer 3.2.

Da li su skupovi $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{c, c, a, b, b, b\}$ jednaki?

Rješenje.

$A = B$ zato jer oni sadrže iste elemente. Nije važno ako je neki element napisan više puta i nije važan redoslijed kojim su elementi napisani.

Pravi podskup

Skup A je **pravi podskup** skupa B ako je A podskup od B i B sadrži barem jedan element koji nije sadržan u A.

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

Vrijedi također

$$A \subset B \Leftrightarrow \big(A \subseteq B \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)\big)$$

Neka je $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, 1, b, 3, 2, 2\}$. Tada je $X \subseteq Y$ jer je svaki element skupa X ujedno i element skupa Y. Međutim, vrijedi i $X \subset Y$ jer je $X \subseteq Y$ i $X \neq Y$.

Za skupove brojeva vrijede sljedeće inkluzije

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Očito je da vrijedi

Propozicija 3.1.

Za svaki skup A vrijedi $A \subseteq A$ i $\emptyset \subseteq A$.

$\emptyset \quad \rightarrow$ Ovo je prazan skup i on nema niti jedan element.

$\{\emptyset\} \quad \rightarrow$ Ovo nije prazan skup. To je skup koji sadrži jedan element i taj element je baš prazan skup. Kratko rečeno, ovo je skup koji sadrži prazan skup, tj. $\emptyset \in \{\emptyset\}$.

$\{\{\emptyset\}\} \quad \rightarrow$ Ovo je skup koji sadrži jedan element i taj element je skup koji ima jedan element i taj element je baš prazan skup. Kratko rečeno, to je skup koji sadrži skup koji sadrži prazan skup, tj. $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$, ali $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$.

$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ $\rightarrow$ Ovo je skup koji ima dva elementa $\emptyset$ i $\{\emptyset\}$.

$\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ $\rightarrow$ Ovo je skup koji ima samo jedan element $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ $\rightarrow$ Ovo je skup koji ima dva elementa $\emptyset$ i $\{\emptyset\}$.

$\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ $\rightarrow$ Ovo je skup koji ima samo jedan element $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Primjer 3.3.

Objasnite zašto vrijede sljedeće relacije: $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$ *i* $\{\emptyset\} \not\subseteq \{\{\emptyset\}\}$.

$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ $\rightarrow$ Ovo je skup koji ima dva elementa $\emptyset$ i $\{\emptyset\}$.

$\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ $\rightarrow$ Ovo je skup koji ima samo jedan element $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Primjer 3.3.

Objasnite zašto vrijede sljedeće relacije: $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$ *i* $\{\emptyset\} \not\subseteq \{\{\emptyset\}\}$.

Rješenje.

$\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$ vrijedi zbog toga jer je prazan skup podskup svakog skupa.

Što se tiče druge relacije, s lijeve strane imamo skup koji ima jedan element i to baš prazan skup, tj. $\emptyset \in \{\emptyset\}$, ali $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$ iz čega slijedi $\{\emptyset\} \not\subseteq \{\{\emptyset\}\}$.

Partitivni skup

Partitivni skup skupa A je skup svih podskupova od A.

Partitivni skup skupa A označavamo sa $\mathcal{P}(A)$.

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$$

Kako je $\emptyset \subseteq A$ i $A \subseteq A$, slijedi da je partitivni skup uvijek neprazan skup.

Primjer 3.4.

Odredite partitivni skup skupa $A = \{a, b, c\}$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.4.

Odredite partitivni skup skupa $A = \{a, b, c\}$.

Rješenje.

$$\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\big\}.$$

Primjer 3.4.

Odredite partitivni skup skupa $A = \{a, b, c\}$.

Rješenje.

$$\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\big\}.$$

Uočimo da je u prethodnom primjeru bilo $k(A) = 3$, a $k(\mathcal{P}(A)) = 8 = 2^3 = 2^{k(A)}$. To vrijedi i općenito za bilo koji konačan skup A.

Propozicija 3.2.

Neka je A konačan skup i $k(A) = n$. Tada je $k(\mathcal{P}(A)) = 2^n$.

Dokaz.

Trebamo prebrojiti sve podskupove skupa A. Preciznije, trebamo vidjeti koliko k-članih podskupova ima skup A, pri čemu je $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Broj k-članih podskupova u n-članom skupu jednak je $\binom{n}{k}$. Stoga je ukupni broj podskupova skupa A jednak

$$k(\mathcal{P}(A)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Uvrstimo li $x = y = 1$ u binomnu formulu

$$(x+y)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

dobivamo

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

pa je zaista

$$k(\mathcal{P}(A)) = 2^n.$$

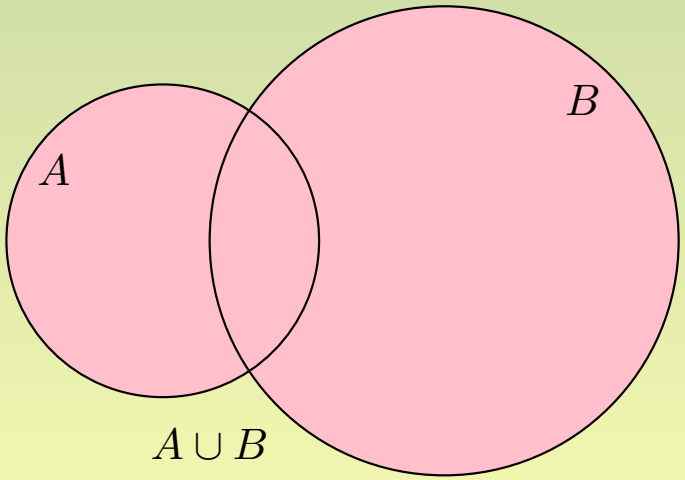


Operacije sa skupovima

Unija

Unija dva skupa A i B je skup $A \cup B$ koji se sastoji od elemenata skupa A i elemenata skupa B.

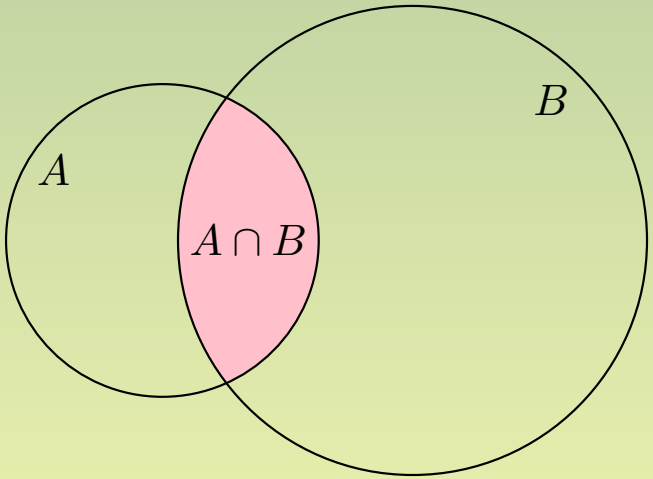
$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$



Presjek

Presjek dva skupa A i B je skup $A \cap B$ koji se sastoji od elemenata koji pripadaju skupu A i skupu B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$



Za skupove A i B kažemo da su **disjunktni** ako nemaju zajedničkih elemenata, tj. ako je $A \cap B = \emptyset$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Definicija unije i presjeka se može proširiti na više od dva skupa.

Unija n skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je skup

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\}$$

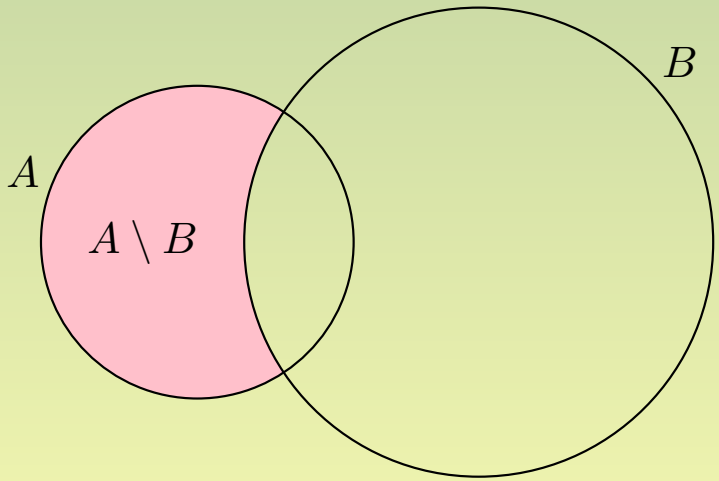
Presjek n skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je skup

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\}$$

Razlika

Razlika dva skupa A i B je skup $A \setminus B$ koji se sastoji od elemenata koji pripadaju skupu A, a ne pripadaju skupu B.

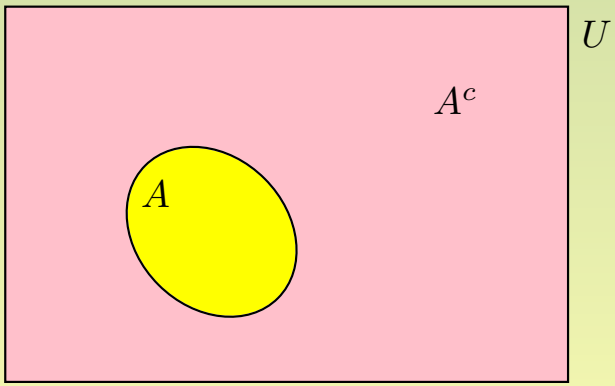
$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$



Komplement

Komplement skupa A je skup A^c koji se sastoji od svih elemenata iz univerzalnog skupa U koji nisu elementi skupa A. Ponekad komplement od A označavamo s CA ili kada želimo naglasiti univerzalni skup s $C_U A$.

$$A^c = U \setminus A = \{x : x \in U \ \wedge \ x \notin A\}$$



Primjer 3.5.

Neka je $U = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leqslant x \leqslant 10\}$ *univerzalni skup i neka je* $A = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$ *i* $B = \{3, 4, 8, 1\}$. *Odredite* $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ *i* A^c.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.5.

Neka je $U = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leqslant x \leqslant 10\}$ *univerzalni skup i neka je* $A = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$ *i* $B = \{3, 4, 8, 1\}$. *Odredite* $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ *i* A^c.

Rješenje.

$$A \cup B = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 3, 4\}$$

$$A \cap B = \{1, 8\}$$

$$A \setminus B = \{2, 5, 6, 7\}$$

$$B \setminus A = \{3, 4\}$$

$$A^c = \{3, 4, 9, 10\}$$

Svojstva skupovskih operacija

- Idempotentnost

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$$

- Komutativnost

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

- Asocijativnost

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

- Distributivnost

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- De Morganovi zakoni

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

- Zakon involucije

$$(A^c)^c = A$$

- Zakon identitete

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A$$

Primjer 3.6.

Dokažite da je $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

- Zakon identitete

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A$$

Primjer 3.6.

Dokažite da je $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Rješenje.

Dokazat ćemo ovu jednakost na dva načina. Prvi način je pomoću tablice pripadnosti koji se ne može uvijek primijeniti, a drugi način je direktan koji se bazira na definiciji jednakosti dva skupa. Drugi način je zapravo pravi matematički dokaz.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Pomoću tablice pripadnosti

Ako izaberemo neki element x iz univerzalnog skupa U, tada u slučaju dva skupa A i B imamo samo 4 moguća slučaja:

$$(1)\ x \in A,\ x \in B \qquad (2)\ x \in A,\ x \notin B$$
$$(3)\ x \notin A,\ x \in B \qquad (4)\ x \notin A,\ x \notin B$$

Na temelju toga radimo tablicu pripadnosti koja se radi na sličan način kao i semantička tablica za formulu algebre sudova.

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B)^c$	A^c	B^c	$A^c \cap B^c$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$

Direktan dokaz preko definicije jednakosti skupova

Relacija $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ je zapravo jednakost dva skupa, a iz definicije jednakosti skupova slijedi da moramo dokazati da vrijede sljedeće inkluzije:

$$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c \quad \text{i} \quad A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c.$$

Direktan dokaz preko definicije jednakosti skupova

Relacija $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ je zapravo jednakost dva skupa, a iz definicije jednakosti skupova slijedi da moramo dokazati da vrijede sljedeće inkluzije:

$$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c \quad \text{i} \quad A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c.$$

Dokažimo prvo da je $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$. Moramo zapravo dokazati da je **svaki** element skupa $(A \cup B)^c$ ujedno i element skupa $A^c \cap B^c$. Uzmimo stoga **bilo koji** $x \in (A \cup B)^c$. To znači da $x \notin A \cup B$. Ako neki element ne pripadi uniji dva skupa, tada on ne pripada niti jednom od ta dva skupa. Dakle, $x \notin A$ i $x \notin B$.

No, tada je $x \in A^c$ i $x \in B^c$. Stoga je $x \in A^c \cap B^c$ (ako neki element pripada nekim dvama skupovima, tada on pripada i njihovom presjeku).

Sjetimo se sada od čega smo krenuli. Uzeli smo **bilo koji** $x \in (A \cup B)^c$ i dokazali da je tada $x \in A^c \cap B^c$, tj. dokazali smo

$$\forall x \big(x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \in A^c \cap B^c \big),$$

a to znači da je

$$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c.$$

Na sličan način dokazujemo da je $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$. Uzmimo **bilo koji** $y \in A^c \cap B^c$. Iz definicije presjeka dva skupa slijedi da je tada $y \in A^c$ i $y \in B^c$. Iz definicije komplementa skupa slijedi $y \notin A$ i $y \notin B$. Iz ovoga slijedi $y \notin A \cup B$ (ako neki element ne pripada nekim dvama skupovima, tada on ne pripada niti njihovoj uniji). No, tada je $y \in (A \cup B)^c$. Dakle, dokazali smo da vrijedi

$$\forall y \big(y \in A^c \cap B^c \Rightarrow y \in (A \cup B)^c \big),$$

odnosno da je

$$A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c.$$

Dakle, dokazali smo da je

$$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c \quad \text{i} \quad A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c,$$

a po definiciji jednakosti dva skupa to znači da je

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Zadatak 3.1.

Dokažite preostala navedena svojstva skupovskih operacija na dva načina, preko tablice pripadnosti i direktno preko definicije jednakosti skupova.

Napomena.

Uočite da u slučaju da se u nekoj skupovnoj jednakosti javlja n skupova, tada tablica pripadnosti ima 2^n redaka pa je u tom slučaju nezgodno dokazivati tu jednakost na taj način zbog prevelikog broja mogućih slučajeva.

Kompliciranije relacije između skupova je nemoguće dokazivati na taj način, čak ako je i broj skupova koji se javljaju u tim relacijama malen.

Najbolji, odnosno pravi način dokazivanja relacija među skupovima provodi se uz korištenje definicija skupovskih operacija, definicije jednakosti skupova i definicije podskupa. Za takav dokaz potrebno je **razumjeti** te definicije i **primijeniti** ih na pravi način kako smo pokazali u primjeru 3.6.

Teorem 3.1.

Za sve skupove A i B vrijedi

a. $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

b. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

c. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Teorem 3.1.

Za sve skupove A i B vrijedi

a. $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
b. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$
c. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

Dokaz.

Za dokaz tvrdnje (a) imamo dva smjera. Dokažimo prvo da $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Teorem 3.1.

Za sve skupove A i B vrijedi

a. $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
b. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$
c. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

Dokaz.

Za dokaz tvrdnje (a) imamo dva smjera. Dokažimo prvo da $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Pretpostavimo da je $A \subseteq B$. Tvrdimo da je tada $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Teorem 3.1.

Za sve skupove A i B vrijedi

a. $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
b. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$
c. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

Dokaz.

Za dokaz tvrdnje (a) imamo dva smjera. Dokažimo prvo da $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Pretpostavimo da je $A \subseteq B$. Tvrdimo da je tada $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Neka je $X \in \mathcal{P}(A)$. To znači da je $X \subseteq A$. Kako je po pretpostavci $A \subseteq B$, slijedi da je tada i $X \subseteq B$, odnosno $X \in \mathcal{P}(B)$. Dakle, zaista je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Dokažimo da vrijedi i $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B$.

Pretpostavimo da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Kako je uvijek $A \in \mathcal{P}(A)$, tada zbog pretpostavke da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ slijedi $A \in \mathcal{P}(B)$, a to znači da je $A \subseteq B$.

Dokažimo da vrijedi i $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B$.
Pretpostavimo da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Kako je uvijek $A \in \mathcal{P}(A)$, tada zbog pretpostavke da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ slijedi $A \in \mathcal{P}(B)$, a to znači da je $A \subseteq B$.

Dokažimo sada tvrdnju (b). U toj tvrdnji imamo jednakost dva skupa pa treba dokazati da je $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$ i $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Dokažimo da vrijedi i $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B$.
Pretpostavimo da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Kako je uvijek $A \in \mathcal{P}(A)$, tada zbog pretpostavke da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ slijedi $A \in \mathcal{P}(B)$, a to znači da je $A \subseteq B$.

Dokažimo sada tvrdnju (b). U toj tvrdnji imamo jednakost dva skupa pa treba dokazati da je $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$ i $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Dokažimo prvo da je $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$.

Dokažimo da vrijedi i $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B$.
Pretpostavimo da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Kako je uvijek $A \in \mathcal{P}(A)$, tada zbog pretpostavke da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ slijedi $A \in \mathcal{P}(B)$, a to znači da je $A \subseteq B$.

Dokažimo sada tvrdnju (b). U toj tvrdnji imamo jednakost dva skupa pa treba dokazati da je $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$ i $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Dokažimo prvo da je $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$.
Neka je $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ proizvoljan. To znači da je $X \in \mathcal{P}(A)$ i $X \in \mathcal{P}(B)$, odnosno $X \subseteq A$ i $X \subseteq B$. No, tada je i $X \subseteq A \cap B$, odnosno $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$. Dakle, zaista je $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$.

Dokažimo da je također $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Neka je $Y \in \mathcal{P}(A \cap B)$. To znači da je $Y \subseteq A \cap B$. No, tada je $Y \subseteq A$ i $Y \subseteq B$. Dakle, $Y \in \mathcal{P}(A)$ i $Y \in \mathcal{P}(B)$ pa je $Y \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Dakle, zaista je $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Dokažimo da je također $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
Neka je $Y \in \mathcal{P}(A \cap B)$. To znači da je $Y \subseteq A \cap B$. No, tada je $Y \subseteq A$ i $Y \subseteq B$. Dakle, $Y \in \mathcal{P}(A)$ i $Y \in \mathcal{P}(B)$ pa je $Y \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Dakle, zaista je $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Dokažimo još tvrdnju (c). Tu treba dokazati inkluziju $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Dokažimo da je također $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
Neka je $Y \in \mathcal{P}(A \cap B)$. To znači da je $Y \subseteq A \cap B$. No, tada je $Y \subseteq A$ i $Y \subseteq B$. Dakle, $Y \in \mathcal{P}(A)$ i $Y \in \mathcal{P}(B)$ pa je $Y \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Dakle, zaista je $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Dokažimo još tvrdnju (c). Tu treba dokazati inkluziju $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.
Neka je $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Tada je $X \in \mathcal{P}(A)$ ili $X \in \mathcal{P}(B)$, odnosno $X \subseteq A$ ili $X \subseteq B$. No, tada je sigurno $X \subseteq A \cup B$ pa je $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Dokažimo da je također $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
Neka je $Y \in \mathcal{P}(A \cap B)$. To znači da je $Y \subseteq A \cap B$. No, tada je $Y \subseteq A$ i $Y \subseteq B$. Dakle, $Y \in \mathcal{P}(A)$ i $Y \in \mathcal{P}(B)$ pa je $Y \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Dakle, zaista je $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Dokažimo još tvrdnju (c). Tu treba dokazati inkluziju $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.
Neka je $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Tada je $X \in \mathcal{P}(A)$ ili $X \in \mathcal{P}(B)$, odnosno $X \subseteq A$ ili $X \subseteq B$. No, tada je sigurno $X \subseteq A \cup B$ pa je $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

Pogledajmo zašto ne vrijedi obrnuta inkluzija.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Neka je $A = \{1, 2\}$, a $B = \{1, 3\}$. Tada je

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$
$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$$
$$\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$
$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$$

Vidimo da je $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$, ali

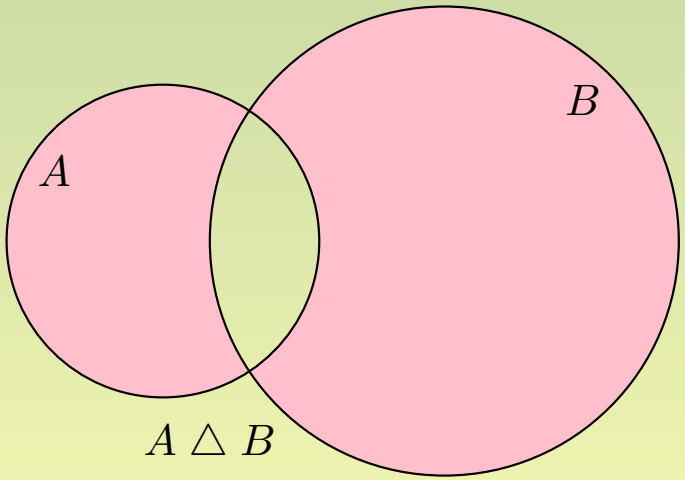
$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B).$$



Simetrična razlika

Simetričnu razliku dva skupa definiramo na dva načina.

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



Zadatak 3.2.

Dokažite da su navedene definicije simetrične razlike ekvivalentne. Dokaz provedite na dva načina, preko tablice pripadnosti i direktno.

Zadatak 3.3.

Dokažite da je simetrična razlika komutativna i asocijativna operacija. Dokaz provedite na dva načina, preko tablice pripadnosti i direktno.

Tablica pripadnosti za simetričnu razliku:

A	B	$A \triangle B$
$\in$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

Kartezijev produkt skupova

Dvočlani skup $\{a, b\}$ zove se **par**. Kako se radi o skupu, vrijedi $\{a, b\} = \{b, a\}$. Ovakav skup može se **urediti** tako da razlikujemo njegovu prvu i drugu komponentu i u tom slučaju ga zovemo **uređenim parom** i za njega koristimo oznaku (a, b). Općenito je $(a, b) \neq (b, a)$, a jednakost vrijedi jedino u slučaju $a = b$.

Definicija uređenog para (**K. Kuratowski**)

$$(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Zadatak 3.4.

Koristeći definiciju Kuratowskog dokažite da vrijedi:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \;\; i \;\; b = d$$

Neka su A i B neprazni skupovi. **Kartezijev produkt** skupova A i B je skup $A \times B$ koji se sastoji od svih uređenih parova čija prva komponenta pripada skupu A, a druga skupu B.

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, \, y \in B\}$$

U slučaju da je $A = \emptyset$ ili $B = \emptyset$, tada je $A \times B = \emptyset$.

Kartezijev produkt $A \times A$ zapisujemo kratko A^2 i zovemo ga **Kartezijevim kvadratom** skupa A.

$$A^2 = A \times A$$

Kartezijev produkt skupova može se proširiti i na konačno mnogo skupova.
Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ neprazni skupovi. Kartezijev produkt skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je skup

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zovemo **uređenom n-torkom** i kod nje je važan poredak elemenata. Element a_i zove se i-ta komponenta n-torke.

U slučaju da je za neki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $A_i = \emptyset$, tada je $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \emptyset$.

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n}$$

Napomena.

Definicija Kartezijevog produkta skupova može se proširiti i na beskonačno mnogo skupova. Međutim, mi ovdje nećemo toliko duboko ulaziti u tu teoriju.

Primjer 3.7.

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ *i* $B = \{a, b\}$. *Odredite* $A \times B$, $B \times A$ *i* A^2.

Primjer 3.7.

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ *i* $B = \{a, b\}$. *Odredite* $A \times B$, $B \times A$ *i* A^2.

Rješenje.

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

$$A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Primjer 3.7.

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ *i* $B = \{a, b\}$. *Odredite* $A \times B$, $B \times A$ *i* A^2.

Rješenje.

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

$$A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Odmah ovdje jedna napomena. Nije $A^2 = \{1, 4, 9\}$ jer smo se dogovorili da kada se radi o skupovima, tada je $A^2 = A \times A$. Također, uočavamo da je

$$A \times B \neq B \times A$$

Primjer 3.8.

Prikažite grafički $A \times B$ ako je

a. $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{1, 3, 5\}$

b. $A = [1, 3],\ B = \langle 2, 5]$

Primjer 3.8.

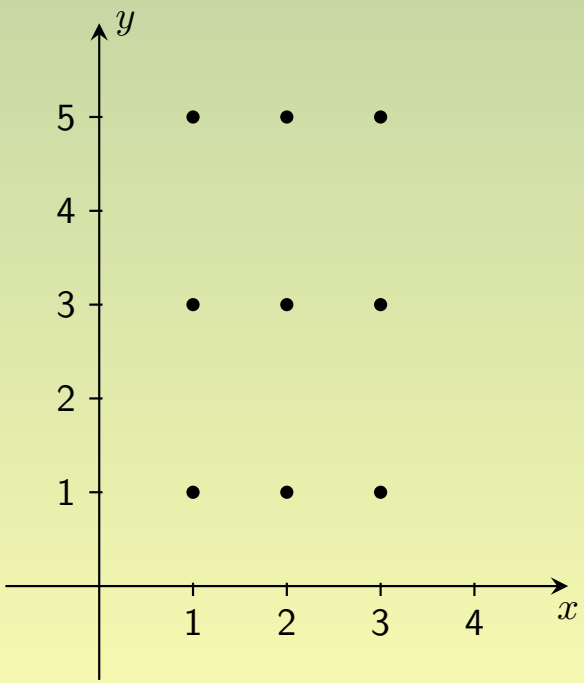
Prikažite grafički $A \times B$ ako je

a) $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{1, 3, 5\}$

b) $A = [1, 3],\ B = \langle 2, 5]$

Rješenje.

a)



Primjer 3.8.

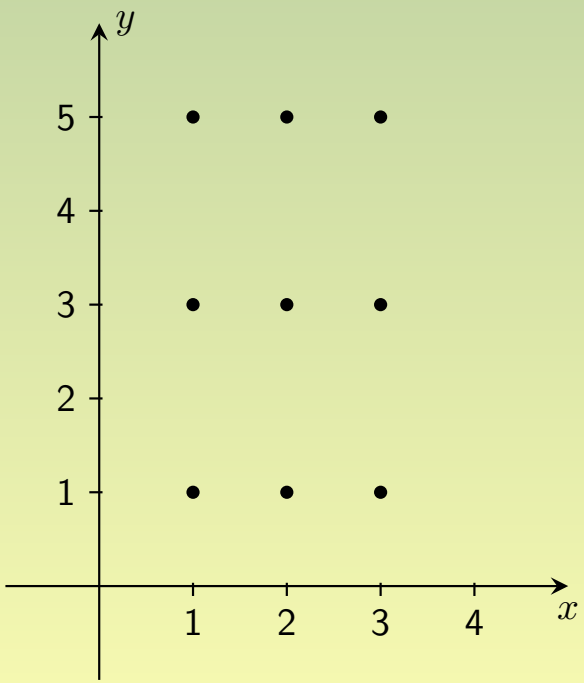
Prikažite grafički $A \times B$ ako je

a) $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{1, 3, 5\}$

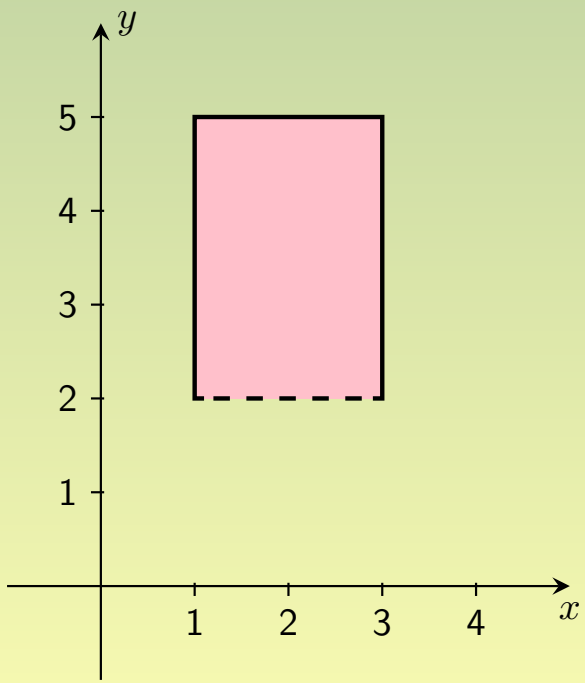
b) $A = [1, 3],\ B = \langle 2, 5]$

Rješenje.

a)



b)



Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.9.

Što predstavljaju sljedeći Kartezijevi produkti:

a. *pravac* $\times$ *pravac*

b. *pravac* $\times$ *kružnica*

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.9.

Što predstavljaju sljedeći Kartezijevi produkti:

a) *pravac* $\times$ *pravac*

b) *pravac* $\times$ *kružnica*

Rješenje.

$$\text{pravac} \times \text{pravac} = \text{ravnina}$$

$$\text{pravac} \times \text{kružnica} = \text{cilindar}$$

Primjer 3.10.

Dokažite da vrijedi $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.10.

Dokažite da vrijedi $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Rješenje.

Treba dokazati jednakost dva skupa, a to znači da treba dokazati da je $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$ i $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.

Primjer 3.10.

Dokažite da vrijedi $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Rješenje.

Treba dokazati jednakost dva skupa, a to znači da treba dokazati da je $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$ i $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.

Dokažimo prvo da je $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$. Neka je $x \in A \times (B \cup C)$ proizvoljan. To znači da je $x = (x_1, x_2)$ pri čemu je $(x_1 \in A) \wedge (x_2 \in B \cup C)$, odnosno $(x_1 \in A) \wedge \big((x_2 \in B) \vee (x_2 \in C)\big)$. Koristeći distributivnost konjunkcije prema disjunkciji, slijedi da je $\big((x_1 \in A) \wedge (x_2 \in B)\big) \vee \big((x_1 \in A) \wedge (x_2 \in C)\big)$.

Kako je $x = (x_1, x_2)$, slijedi da je

$$(x \in A \times B) \vee (x \in A \times C),$$

odnosno

$$x \in (A \times B) \cup (A \times C).$$

Dakle, zaista je $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$.

Kako je $x = (x_1, x_2)$, slijedi da je

$$(x \in A \times B) \vee (x \in A \times C),$$

odnosno

$$x \in (A \times B) \cup (A \times C).$$

Dakle, zaista je $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$.

Dokažimo još da je i $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$. Neka je $y \in (A \times B) \cup (A \times C)$ proizvoljan. To znači da je $(y \in A \times B) \vee (y \in A \times C)$. Slijedi da je $y = (y_1, y_2)$ pri čemu vrijedi

$$\big((y_1 \in A) \wedge (y_2 \in B)\big) \vee \big((y_1 \in A) \wedge (y_2 \in C)\big).$$

Koristeći distributivnost konjunkcije prema disjunkciji, slijedi da je

$$(y_1 \in A) \wedge \big((y_2 \in B) \vee (y_2 \in C)\big),$$

odnosno

$$(y_1 \in A) \wedge (y_2 \in B \cup C).$$

Kako je $y = (y_1, y_2)$, slijedi da je $y \in A \times (B \cup C)$, pa je stvarno $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Binarne relacije

Pojam relacije je važan matematički pojam koji ima široku primjenu u informatici (relacijske baze podataka), gdje se često upotrebljavaju specijalne relacije kao što su relacije ekvivalencije, relacije parcijalnog uređaja i funkcije koje možemo promatrati kao relacije.

Posebno ćemo promatrati binarne relacije koje se najviše pojavljuju u raznim primjenama i njih ćemo kratko zvati relacije.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Neka su A i B neprazni skupovi. Svaki podskup ρ od $A \times B$ zovemo **relacija** na $A \times B$.

Ako je $(a, b) \in \rho$, tada kratko pišemo $a \ \rho \ b$ i kažemo da je a u relaciji ρ sa b.

Ako je $(a, b) \notin \rho$, tada pišemo $a \not\rho \ b$ i kažemo da a nije u relaciji ρ sa b.

Primjer 3.11.

$A = \{Ivo, Jože, Marko, Stjepan\}$, $B = \{Katica, Maja, Ivona\}$

Neka je relacija $\rho =$ *"biti zaljubljen" i uzmimo da je*

$\rho = \{(Ivo, Katica), (Jože, Ivona), (Marko, Katica), (Stjepan, Maja)\}$.

Očito je $\rho \subseteq A \times B$*, pa je* ρ *jedna relacija na* $A \times B$*.*

Npr., $(Ivo, Katica) \in \rho$*, odnosno vrijedi Ivo* ρ *Katica, odnosno riječima bismo rekli "Ivo je zaljubljen u Katicu".*

$(Stjepan, Katica) \notin \rho$*, odnosno vrijedi Stjepan* $\not\rho$ *Katica, odnosno riječima bismo rekli "Stjepan nije zaljubljen u Katicu".*

Primjer 3.12.

Neka je $A = \{a, b, c\}$ *i* $B = \{1, 2\}$. *Napišite barem dvije relacije na* $A \times B$ *i* $B \times A$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.12.

Neka je $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{1, 2\}$. Napišite barem dvije relacije na $A \times B$ i $B \times A$.

Rješenje.

Trebamo zapravo napisati dva proizvoljna podskupa na $A \times B$, odnosno $B \times A$.

$$\rho_1 = \{(a, 1), (b, 1)\} \quad \leftarrow \text{ relacija na } A \times B$$

$$\rho_2 = \{(b, 2)\} \quad \leftarrow \text{ relacija na } A \times B$$

$$\rho_3 = \{(1, c), (1, b), (2, b)\} \quad \leftarrow \text{ relacija na } B \times A$$

$$\rho_4 = \emptyset \quad \leftarrow \text{ relacija na } B \times A \ \textbf{(prazna relacija)}$$

Primjer 3.13.

Ako je $k(A) = m$, $k(B) = n$, koliko ima različitih binarnih relacija na $A \times B$?

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.13.

Ako je $k(A) = m$, $k(B) = n$, koliko ima različitih binarnih relacija na $A \times B$?

Rješenje.

Kako je $k(A) = m$, $k(B) = n$, slijedi da je $k(A \times B) = mn$. Relacija je proizvoljan podskup od $A \times B$ pa je broj različitih relacija na $A \times B$ jednak ukupnom broju podskupova od $A \times B$, a taj broj je jednak 2^{mn}.

Relacije među elementima zadanog skupa

Pretpostavimo da je ρ relacija na skupu A, tj. $\rho \subseteq A \times A$. Takva relacija ρ se može prikazati pomoću grafa. **Čvor** ili **vrh** grafa je svaki element skupa A, a svakom uređenom paru $(a, b) \in \rho$ pridružen je jedan **luk** pri čemu se prva komponenta naziva izlaznim čvorom grafa, a druga komponenta ulaznim čvorom.

Graf relacije $\rho \subseteq A \times A$ je par (A, ρ) pri čemu je A skup čvorova (vrhova) grafa, a ρ skup lukova (bridova) grafa.

Matrica incidencije relacije $\rho \subseteq A \times A$ je tablica u kojoj se na odgovarajućem mjestu nalazi 1 ili 0, ovisno o tome da li su odgovarajući elementi u relaciji ρ ili nisu.

Primjer 3.14.

Prikažite sljedeće relacije pomoću grafa i matrice incidencije:

a. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\rho \subseteq A^2$, $\rho = \{(x, y) : x \mid y\}$

b. $A = \{a, b, c\}$, $\rho \subseteq A^2$, $\rho = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a)\}$

Primjer 3.14.

Prikažite sljedeće relacije pomoću grafa i matrice incidencije:

a. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\rho \subseteq A^2$, $\rho = \{(x, y) : x \mid y\}$

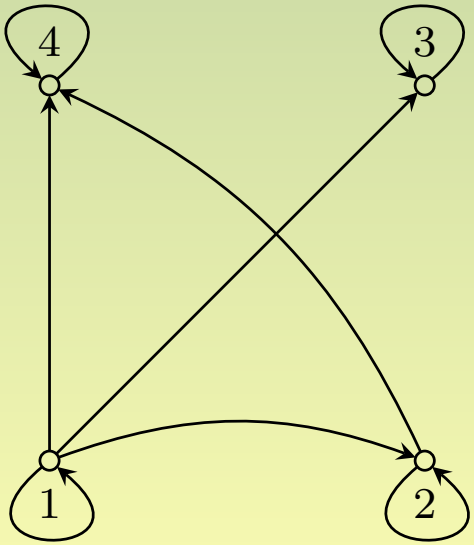
b. $A = \{a, b, c\}$, $\rho \subseteq A^2$, $\rho = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a)\}$

Rješenje.

a. Matrica incidencije

x \ y	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	0	1	0	1
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

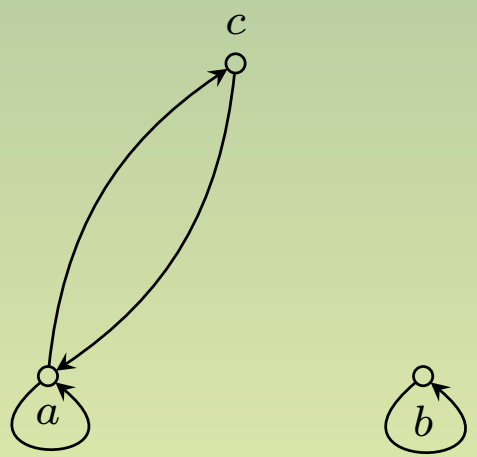
Graf relacije



- Matrica incidencije

x \ y	a	b	c
a	1	0	1
b	0	1	0
c	1	0	0

Graf relacije



Obrat i komplement relacije. Dualna relacija

Neka je $\rho \subseteq A^2$.

Obrat $\bar{\rho}$ relacije ρ

$$(a,b) \in \bar{\rho} \Leftrightarrow (b,a) \in \rho$$

Komplement ρ^c relacije ρ

$$(a,b) \in \rho^c \Leftrightarrow (a,b) \notin \rho$$

Dualna relacija ρ^d relacije ρ

$$(a,b) \in \rho^d \Leftrightarrow (b,a) \notin \rho$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Propozicija 3.3.

Neka je $\rho \subseteq A^2$ relacija. Tada vrijedi $\rho^d = \bar{\rho}^c = \overline{\rho^c}$.

Dokaz.

Dokažimo prvo da je $\rho^d = \overline{\rho^c}$. Treba zapravo dokazati jednakost dva skupa.

$$(a,b) \in \rho^d \Leftrightarrow (b,a) \notin \rho \Leftrightarrow (b,a) \in \rho^c \Leftrightarrow (a,b) \in \overline{\rho^c}$$

Dakle, zaista je $\rho^d = \overline{\rho^c}$. Dokažimo još da je $\bar{\rho}^c = \overline{\rho^c}$.

$$(a,b) \in \bar{\rho}^c \Leftrightarrow (a,b) \notin \bar{\rho} \Leftrightarrow (b,a) \notin \rho \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (b,a) \in \rho^c \Leftrightarrow (a,b) \in \overline{\rho^c}$$

Dakle, zaista je i $\bar{\rho}^c = \overline{\rho^c}$. ♡

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.15.

Neka je $A = \{a, b, c\}$ *i* $\rho = \big\{(a, b), (a, c), (b, a), (b, b)\big\}$. *Odredite obrat, komplement i dualnu relaciju od* ρ.

Primjer 3.15.

Neka je $A = \{a, b, c\}$ *i* $\rho = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, b)\}$. *Odredite obrat, komplement i dualnu relaciju od* ρ.

Rješenje.

$$\bar{\rho} = \{(b, a), (c, a), (a, b), (b, b)\}$$

$$A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

$$\rho^c = (A \times A) \setminus \rho = \{(a, a), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

$$\rho^d = \overline{\rho^c} = \{(a, a), (c, b), (a, c), (b, c), (c, c)\}$$

Svojstva binarnih relacija

Binarna relacija $\rho \subseteq A \times A$ je

1. **refleksivna** ako vrijedi

$$(\forall x \in A)\Big((x,x) \in \rho\Big)$$

2. **simetrična** ako vrijedi

$$(\forall x, y \in A)\Big((x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho\Big)$$

3. **tranzitivna** ako vrijedi

$$(\forall x, y, z \in A)\Big(\big((x,y) \in \rho \wedge (y,z) \in \rho\big) \Rightarrow (x,z) \in \rho\Big)$$

4. **irefleksivna** ako vrijedi

$$(\forall x \in A)\Big((x,x) \notin \rho\Big)$$

5. **antisimetrična** ako vrijedi

$$(\forall x, y \in A)\Big(\big((x,y) \in \rho \wedge (y,x) \in \rho\big) \Rightarrow x = y\Big)$$

ili ekvivalentno

$$(\forall x, y \in A)\Big(\big((x,y) \in \rho \wedge x \neq y\big) \Rightarrow (y,x) \in \rho^c\Big)$$

6. **asimetrična** ako vrijedi

$$(\forall x, y \in A)\Big((x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho^c\Big)$$

7. **kompletna** ako vrijedi

$$(\forall x, y \in A, x \neq y)\Big((x, y) \in \rho \vee (y, x) \in \rho\Big)$$

8. **strogo kompletna** ako vrijedi

$$(\forall x, y \in A)\Big((x, y) \in \rho \vee (y, x) \in \rho\Big)$$

Lema 3.1.

Neka je $\rho \subseteq A^2$ irefleksivna i tranzitivna relacija. Tada je ρ asimetrična relacija.

Dokaz.

Pretpostavimo suprotno, tj. da ρ nije asimetrična relacija. Tada postoje $a, b \in A$ takvi da je $(a, b) \in \rho$ i $(b, a) \in \rho$. Po pretpostavci je ρ tranzitivna pa je tada $(a, a) \in \rho$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je ρ irefleksivna relacija. ♡

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Pogledajmo sada primjer relacije koja je antisimetrična, a nije asimetrična.

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$, a $\rho = \{(1, 1), (2, 2)\}$. Tada je ρ antisimetrična relacija. Dokažimo to. Razlikujemo dva slučaja.

a) Ako je $(x, y) \in \rho$, tada je $x = y$ pa je implikacija

$$\underbrace{\big(\underbrace{\underbrace{(x, y) \in \rho}_{1} \wedge \underbrace{x \neq y}_{0}\big)}_{0} \Rightarrow (y, x) \in \rho^c}$$

istinita (nula povlači bilo što je uvijek istina).

- Ako $(x, y) \notin \rho$, tada je implikacija

$$\underbrace{\Big(\underbrace{(x,y) \in \rho}_{0} \wedge x \neq y\Big)}_{0} \Rightarrow (y,x) \in \rho^c$$

istinita (nula povlači bilo što je uvijek istina).

Međutim ρ nije asimetrična relacija. Naime, da bi ρ bila asimetrična relacija, trebalo bi vrijediti

$$(\forall x, y \in A)\Big((x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho^c\Big).$$

No, to ne vrijedi za $x = 1$ i $y = 1$ zbog

$$\underbrace{\underbrace{(1,1) \in \rho}_{1} \Rightarrow \underbrace{(1,1) \in \rho^c}_{0}}_{0}$$

Vidjeli smo da nije svaka antisimetrična relacija ujedno i asimetrična. Međutim, svaka asimetrična relacija je i antisimetrična relacija. Naime, iz definicije asimetrične relacije slijedi da je uvijek barem jedna od tvrdnji $(x, y) \in \rho$ i $(y, x) \in \rho$ lažna pa je implikacija

$$\Big(\underbrace{(x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho}_{0} \Big) \Rightarrow x = y$$

istinita, što znači da je ta relacija antisimetrična.

Pogledajmo razliku između kompletne i strogo kompletne relacije.

Relacija $\leqslant$ "biti manji od" je strogo kompletna relacija na skupu $\mathbb{R}$ jer za svaka dva broja x i y vrijedi jedna od tvrdnji $x \leqslant y$ ili $y \leqslant x$.

Relacija $<$ "biti strogo manji od" je kompletna relacija na $\mathbb{R}$ jer za svaka dva **različita** broja x i y vrijedi jedna od tvrdnji $x < y$ ili $y < x$. Međutim, ta relacija nije strogo kompletna jer **ne vrijedi** $x < x$, tj. broj nije strogo manji od samog sebe.

Algebarska karakterizacija

Neka je $\rho \subseteq A \times A$. Paru (a, b) pridružuje se **kod** c_{ab} tako da je

$$c_{ab} = 1 \Leftrightarrow (a, b) \in \rho, \qquad c_{ab} = 0 \Leftrightarrow (a, b) \notin \rho.$$

Svojstvo	**Algebarska reprezentacija**
refleksivnost	$c_{aa} = 1, \ \forall a \in A$
irefleksivnost	$c_{aa} = 0, \ \forall a \in A$
simetrija	$c_{ab} - c_{ba} = 0, \ \forall a, b \in A$
antisimetrija	$c_{ab} + c_{ba} \leqslant 1, \ \forall a, b \in A, \ a \neq b$
asimetrija	$c_{ab} + c_{ba} \leqslant 1, \ \forall a, b \in A$
kompletnost	$c_{ab} + c_{ba} \geqslant 1, \ \forall a, b \in A, \ a \neq b$
stroga kompletnost	$c_{ab} + c_{ba} \geqslant 1, \ \forall a, b \in A$
tranzitivnost	$c_{ac} \geqslant c_{ab} + c_{bc} - 1, \ \forall a, b, c \in A$

Zadatak 3.5.

Opišite i implementirajte algoritme koji će za danu relaciju ρ na konačnom skupu X zadanu matricom incidencije provjeriti da li je ta relacija refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična, irefleksivna, asimetrična, kompletna i strogo kompletna.

Relacija ekvivalencije

Relacija ekvivalencije predstavlja oslabljeni oblik jednakosti. Detaljnije ćemo to kasnije objasniti.

Neka je $\rho \subseteq A^2$. Relacija ρ je relacija ekvivalencije ako je

1. **refleksivna**, tj.

$$(\forall x \in A)\Big((x,x) \in \rho\Big)$$

2. **simetrična**, tj.

$$(\forall x, y \in A)\Big((x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho\Big)$$

3. **tranzitivna**, tj.

$$(\forall x, y, z \in A)\Big(\big((x,y) \in \rho \wedge (y,z) \in \rho\big) \Rightarrow (x,z) \in \rho\Big)$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.16.

Primjeri relacija ekvivalencije:

1. *Univerzalna relacija – svi elementi skupa su u relaciji sa svima, tj.* $\rho = A \times A$
2. *Jednakost "=" na skupu* A
3. *Paralelnost "$\parallel$" na skupu svih pravaca ravnine*
4. *Sukladnost trokuta na skupu svih trokuta ravnine*
5. *Sličnost trokuta na skupu svih trokuta ravnine*

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Pogledajmo zašto je relacija "biti paralelan" relacija ekvivalencije na skupu svih pravaca ravnine. Trebamo provjeriti da je ta relacija refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Da li je refleksivna? Drugim riječima, da li je svaki pravac paralelan sam sa sobom? Da.

Da li je simetrična? Drugim riječima, ako je pravac p paralelan s pravcem q, da li je onda pravac q paralelan s pravcem p? Da.

Da li je tranzitivna? Drugim riječima, ako je pravac p paralelan s pravcem q, i ako je pravac q paralelan s pravcem r, da li je onda pravac p paralelan s pravcem r? Da.

Primjer 3.17.

Neka je

$$A = \{1, 2, 3, 4\},\ \rho \subseteq A^2,\ \rho = \big\{(x, y) : |x - y| \text{ je neparan ili } 0\big\}.$$

Ispišite elemente zadane relacije i prikažite ju pomoću tablice i grafa. Da li je to relacija ekvivalencije?

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.17.

Neka je

$$A = \{1, 2, 3, 4\},\ \rho \subseteq A^2,\ \rho = \big\{(x, y) : |x - y| \text{ je neparan ili } 0\big\}.$$

Ispišite elemente zadane relacije i prikažite ju pomoću tablice i grafa. Da li je to relacija ekvivalencije?

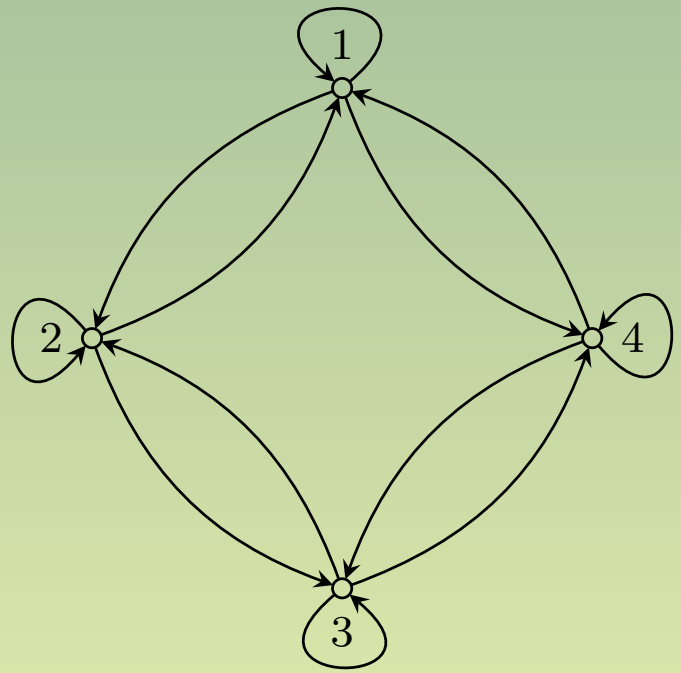
Rješenje.

Elementi relacije ρ su

$$\rho = \big\{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3),$$
$$(3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,3), (4,4)\big\}.$$

Matrica incidencije i graf relacije ρ

x \ y	1	2	3	4
1	1	1	0	1
2	1	1	1	0
3	0	1	1	1
4	1	0	1	1



Relacija ρ je refleksivna jer je svaki element iz A u relaciji sam sa sobom, što se vidi također iz tablice jer se na glavnoj dijagonali nalaze jedinice. Isto tako se vidi i iz grafa jer u svakom vrhu imamo petlju.

Relacija ρ je simetrična jer je njezina matrica incidencije simetrična s obzirom na glavnu dijagonalu, tj. kada god je $(a, b) \in \rho$, tada je i $(b, a) \in \rho$. Također, simetriju možemo lagano vidjeti i sa grafa. Naime, ako imamo neki brid koji počinje u vrhu a, a završava u vrhu b, tada moramo imati i brid koji počinje u vrhu b, a završava u vrhu a da bi relacija bila simetrična.

Zadana relacija ρ nije tranzitivna jer, npr. $(1, 2) \in \rho$ i $(2, 3) \in \rho$, ali $(1, 3) \notin \rho$. Dakle, relacija ρ nije relacija ekvivalencije zbog toga jer nije tranzitivna.

Neka je A skup. **Particijom skupa** A zovemo skup $\{A_i : i \in I\}$ nepraznih podskupova od A takvih da vrijedi:

a. $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

b. $A_i \cap A_j = \emptyset$ ako je $i \neq j$, $\forall i, j \in I$

Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu A. Za $a \in A$ **klasa ekvivalencije** $[a]_\rho$ elementa a s obzirom na relaciju ρ je skup

$$[a]_\rho = \{x \in A : x \ \rho \ a\}.$$

Jednostavnije rečeno, to su svi oni elementi koji su u relaciji ρ s elementom a. Element a (ili bilo koji drugi element iz $[a]_\rho$) zovemo **reprezentantom** te klase.

Primjer 3.18.

Neka je A skup svih stanovnika Hrvatske. Neka je ρ relacija na skupu A definirana sa

$$\rho = \{(a, b) \in A^2 : a \text{ i } b \text{ stanuju u istoj županiji}\}.$$

Odredite klase ekvivalencije relacije ρ.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.18.

Neka je A skup svih stanovnika Hrvatske. Neka je ρ relacija na skupu A definirana sa

$$\rho = \{(a,b) \in A^2 : a \text{ i } b \text{ stanuju u istoj županiji}\}.$$

Odredite klase ekvivalencije relacije ρ.

Rješenje.

Jasno je da je ρ relacija ekvivalencije. Klase ekvivalencije su županije. Npr., ako je $a \in A$ stanovnik Varaždinske županije, tada je $[a]_\rho$ skup svih stanovnika Varaždinske županije pa bismo kratko mogli nazvati klasu $[a]_\rho$ Varaždinskom županijom. Svaki stanovnik te županije je predstavnik te županije (odnosno te klase).

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Županijama (klasama ekvivalencije) je Hrvatska (skup) podijeljena na više manjih dijelova. Kako svake dvije različite županije nemaju ništa zajedničko, županije (klase ekvivalencije) zapravo čine jednu particiju Hrvatske (skupa).

Tako lijepo svojstvo vrijedi za bilo koju relaciju ekvivalencije, što ćemo uskoro i dokazati.

Neka je A skup, a ρ relacija ekvivalencije na skupu A.
Kvocijentni skup A/ρ od A s obzirom na relaciju ρ je skup svih klasa ekvivalencije relacije ρ.



Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Propozicija 3.4.

Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu A. Tada je kvocijentni skup A/ρ particija skupa A.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Propozicija 3.4.

Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu A. Tada je kvocijentni skup A/ρ particija skupa A.

Dokaz.

Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu A. Treba dokazati sljedeće tri tvrdnje:

- klase ekvivalencije od ρ su neprazne
- svaki element iz A nalazi se u nekoj od klasa
- klase su disjunktne

Kako je ρ relacija ekvivalencije, tada je ona refleksivna pa vrijedi $a \ \rho \ a$, pa je $a \in [a]_\rho$, tj. $[a]_\rho \neq \emptyset, \quad \forall a \in A$. Dakle, sve klase su neprazne i svaki element se nalazi u nekoj od tih klasa.

Treba još dokazati da su različite klase međusobno disjunktne. Neka su $[a]_\rho$ i $[b]_\rho$ dvije različite klase ekvivalencije. Pretpostavimo da one nisu disjunktne, tj. da postoji $x \in [a]_\rho \cap [b]_\rho$. Tada vrijedi $x \ \rho \ a$ i $x \ \rho \ b$. Kako je ρ simetrična relacija, tada vrijedi i $a \ \rho \ x$. Nadalje, jer je ρ i tranzitivna relacija, tada iz $a \ \rho \ x$ i $x \ \rho \ b$ slijedi $a \ \rho \ b$. Tvrdimo da je u tom slučaju $[a]_\rho = [b]_\rho$. Trebamo dokazati jednakost dva skupa, odnosno treba dokazati da je $[a]_\rho \subseteq [b]_\rho$ i $[b]_\rho \subseteq [a]_\rho$.

Neka je $c \in [a]_\rho$ proizvoljan. Tada vrijedi $c \ \rho \ a$. No, kako vrijedi $a \ \rho \ b$, tada zbog tranzitivnosti relacije ρ slijedi $c \ \rho \ b$, a to znači da je $c \in [b]_\rho$. Dakle, $[a]_\rho \subseteq [b]_\rho$.

Obrnuto, neka je $d \in [b]_\rho$ proizvoljan. Tada vrijedi $d \ \rho \ b$. No, kako vrijedi $a \ \rho \ b$, tada zbog simetričnosti relacije ρ vrijedi i $b \ \rho \ a$. Sada iz $d \ \rho \ b$ i $b \ \rho \ a$, zbog tranzitivnosti relacije ρ, slijedi $d \ \rho \ a$, što znači da je $d \in [a]_\rho$. Dakle, $[b]_\rho \subseteq [a]_\rho$

Dokazali smo da je $[a]_\rho = [b]_\rho$, što je kontradikcija s pretpostavkom da su $[a]_\rho$ i $[b]_\rho$ različite klase ekvivalencije. Stoga je naša pretpostavka da $[a]_\rho$ i $[b]_\rho$ imaju nešto zajedničko bila pogrešna pa je zaista $[a]_\rho \cap [b]_\rho = \emptyset$.

Dakle, svake dvije klase ekvivalencije, ili su jednake, ili nemaju ništa zajedničko. ♡

Vrijedi i obrnuto.

Propozicija 3.5.

Svaka particija skupa A prirodno definira jednu relaciju ekvivalencije na skupu A.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Vrijedi i obrnuto.

Propozicija 3.5.

Svaka particija skupa A prirodno definira jednu relaciju ekvivalencije na skupu A.

Dokaz.

Relaciju ρ definiramo na sljedeći način. Za $x, y \in A$ definiramo

$$x \ \rho \ y \overset{\text{def}}{\iff} x \text{ i } y \text{ pripadaju istom elementu particije}$$

Dokažimo da je ρ relacija ekvivalencije. Relacija ρ je refleksivna, tj. vrijedi $x \ \rho \ x$ jer x i x pripadaju istom elementu particije (jer se radi zapravo o jednom elementu).

Nadalje, ako vrijedi $x \rho y$, tada iz definicije relacije ρ slijedi da elementi x i y pripadaju istom elementu particije. No, tada elementi y i x pripadaju istom elementu particije pa je ρ simetrična relacija.

Pretpostavimo da vrijedi $x \rho y$ i $y \rho z$. Tada postoje elementi A i B iz zadane particije takvi da je $x, y \in A$ i $y, z \in B$. No, tada je $y \in A \cap B$ pa je $A = B$ jer su A i B elementi particije, a to znači, ili su jednaki ili su disjunktni. Iz toga slijedi da su $x, z \in A$, odnosno elementi x i z pripadaju istom elementu particije pa vrijedi $x \rho z$. Dakle, ρ je i tranzitivna relacija. Stoga je ρ zaista relacija ekvivalencije. ♡

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu A. Preslikavanje

$$p : A \to A/\rho, \quad p(x) = [x]_\rho$$

zove se prirodno ili kvocijentno preslikavanje. To preslikavanje je surjekcija koje svakom elementu iz A pridružuje klasu ekvivalencije kojoj taj element pripada.

Prijelazom sa skupa A na kvocijentni skup A/ρ relacija ekvivalencije se zamjenjuje relacijom jednakosti, tj. ekvivalentni elementi u A prelaze u jednake elemente u A/ρ (identificiraju se). Zato kažemo da relacija ekvivalencije predstavlja oslabljeni oblik jednakosti (jer mi te ekvivalentne elemente koji nisu "baš" jednaki na neki način smatramo jednakima u kvocijentnom skupu).

Sjetimo se primjera sa hrvatskim županijama. Tamo smo rekli da su dva Hrvata ekvivalentna ako žive u istoj županiji. Klase ekvivalencije su hrvatske županije. S obzirom na tu relaciju ekvivalencije svi ljudi iz iste županije su ekvivalentni, tj. smatramo ih "jednakima". Naravno da oni nisu jednaki u pravom smislu te riječi. Međutim, takva identifikacija ponekad olakšava neke stvari osobito ako se odlučuje o nekim pitanjima na nivou županija. U tom slučaju se ne gleda svaki pojedinac posebno jer odluka koja bude donešena se tiče svih ljudi iz te županije, tj. oni su na neki način u istom položaju što se tiče te odluke, odnosno oni su "jednaki".

Kvocijentni skup u većini situacija može imati znatno manje elementa od polaznog skupa pa je onda lakše raditi na njemu, nego na polaznom skupu. Kao primjer, opet možemo uzeti županije kojih ima 21, dok svih ljudi koji žive u Hrvatskoj ima znatno više, pa je jasno da je lakše donijeti neku odluku na nivou županija, nego za svakog pojedinca posebno.

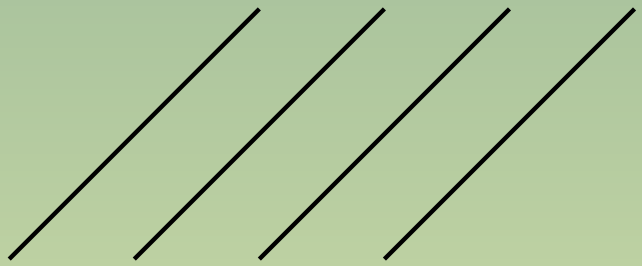
Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Kvocijentni skup u većini situacija može imati znatno manje elementa od polaznog skupa pa je onda lakše raditi na njemu, nego na polaznom skupu. Kao primjer, opet možemo uzeti županije kojih ima 21, dok svih ljudi koji žive u Hrvatskoj ima znatno više, pa je jasno da je lakše donijeti neku odluku na nivou županija, nego za svakog pojedinca posebno.

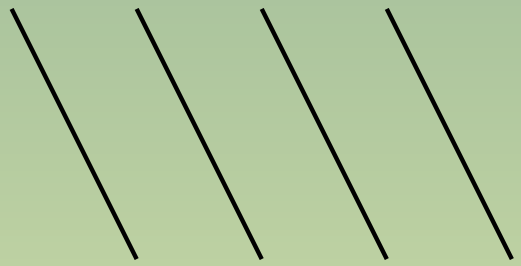
Sjetimo se i relacije "biti paralelan" na skupu svih pravaca ravnine. Što su ovdje klase ekvivalencije? Ovdje klasu ekvivalencije čine svi međusobno paralelni pravci i svakog od tih pravaca možemo uzeti za reprezentanta te klase. Ovdje se svaka od tih klasa zove **smjer** i sve međusobno paralelne pravce smatramo jednakima u smislu da određuju isti smjer.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

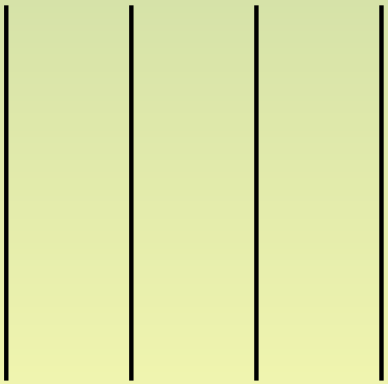
jedan smjer



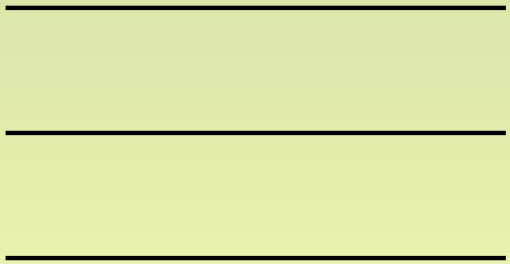
drugi smjer



treći smjer



četvrti smjer



Sjetimo se i logički ekvivalentnih formula logike sudova od n varijabli. Sve takve formule smatramo jednakima u smislu da imaju istu tablicu istinitosti i sve one pripadaju istoj klasi za čijeg predstavnika možemo uzeti disjunktivnu ili konjunktivnu normalnu formu tih formula. Takvih klasa ima samo konačno mnogo i to 2^{2^n}, iako je svih formula od n varijabli beskonačno mnogo.

Uočimo odmah ovdje i praktičnu korist prelaska na kvocijentni skup, tj. na klase formula.

Npr., zašto bi radili neki sklop komplicirane formule koji bi bio skup zbog velikog broja operacija ako možemo minimizirati tu formulu i napraviti jednostavniji sklop koji će imati manje operacija, a davat će isti izlaz kao i kompliciraniji sklop. Dakle, ovdje na logički sklop možemo gledati kao na klasu koja predstavlja sve logički ekvivalentne formule.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

- $A \leftarrow$ skup svih učenika neke škole
  $\rho \leftarrow$ "pohađati isti razred"

  Očito je ρ relacija ekvivalencije na skupu A.

  $[x]_\rho \leftarrow$ razred u školi u kojemu je učenik x

  $A/\rho \leftarrow$ skup svih razreda u školi

- $A \leftarrow$ skup svih ljudi na Zemlji
  $\rho \leftarrow$ "živjeti u istoj državi"

  Očito je ρ relacija ekvivalencije na skupu A.

  $[x]_\rho \leftarrow$ država u kojoj živi čovjek x

  $A/\rho \leftarrow$ skup svih država svijeta

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.19.

Dokažite da je $\rho \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

$$(x, y)\ \rho\ (u, v) \overset{\text{def}}{\iff} x^2 + y^2 = u^2 + v^2$$

relacija ekvivalencije. Odredite klase ekvivalencije.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.19.

Dokažite da je $\rho \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

$$(x, y)\ \rho\ (u, v) \overset{\text{def}}{\iff} x^2 + y^2 = u^2 + v^2$$

relacija ekvivalencije. Odredite klase ekvivalencije.

Rješenje.

Refleksivnost. Kako je $x^2 + y^2 = x^2 + y^2$, slijedi da vrijedi $(x, y)\ \rho\ (x, y)$ za svaki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Simetričnost. Pretpostavimo da vrijedi $(x, y)\ \rho\ (u, v)$. Tada je $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$. No, onda je sigurno i $u^2 + v^2 = x^2 + y^2$, odnosno vrijedi $(u, v)\ \rho\ (x, y)$.

Tranzitivnost. Pretpostavimo da vrijedi $(x, y)\ \rho\ (u, v)$ i $(u, v)\ \rho\ (s, t)$. Tada je

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2, \qquad u^2 + v^2 = s^2 + t^2,$$

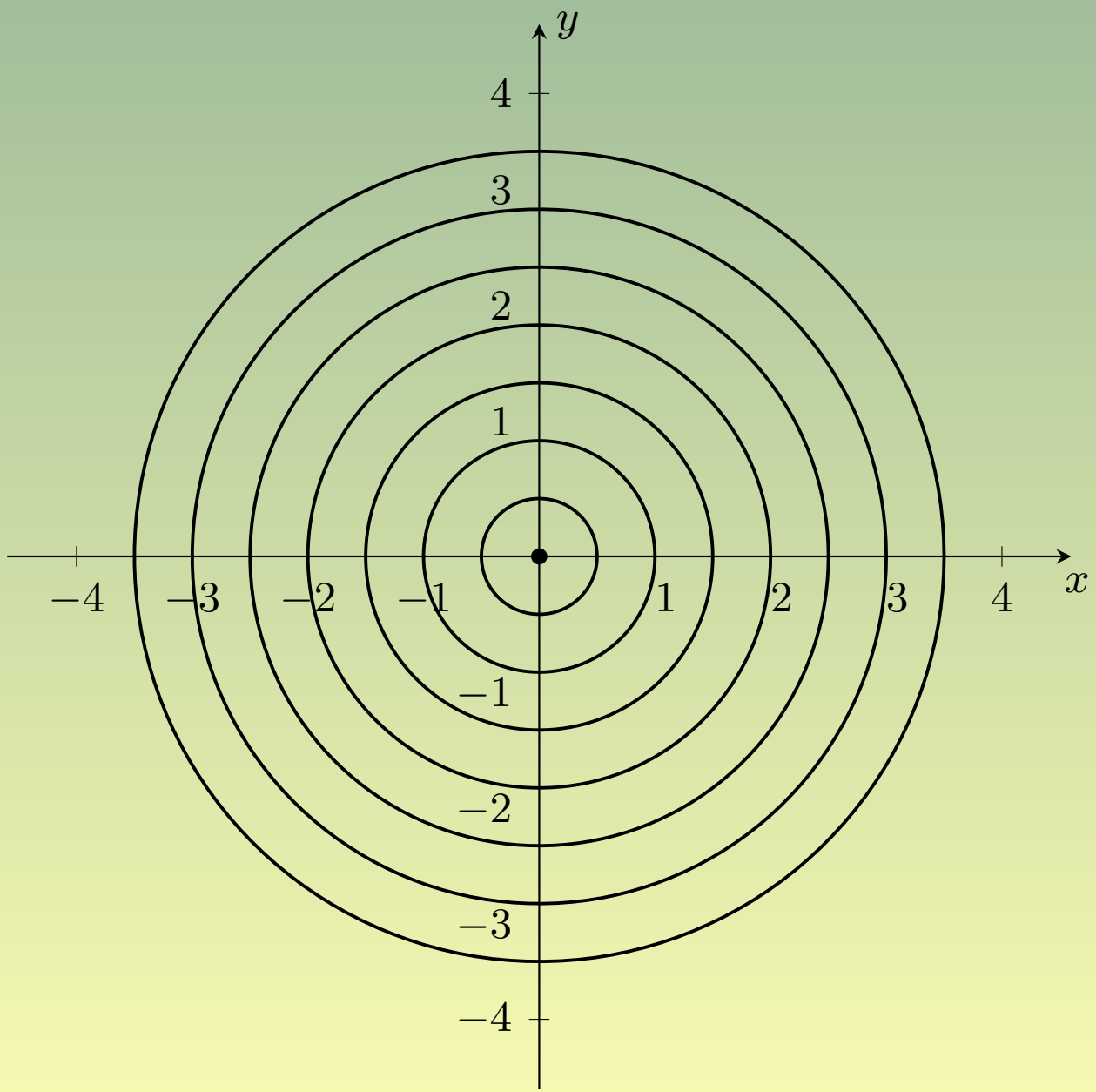
pa je $x^2 + y^2 = s^2 + t^2$, odnosno vrijedi $(x, y)\ \rho\ (s, t)$.

Klase ekvivalencije. Neka je $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ proizvoljan.

$$\begin{aligned}\big[(u, v)\big]_\rho &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)\ \rho\ (u, v)\big\} \\ &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \underbrace{u^2 + v^2}_{\text{const.} \geqslant 0}\big\}\end{aligned}$$

Dakle, klasa $\big[(u, v)\big]_\rho$ elementa (u, v) je zapravo kružnica sa središtem u ishodištu polumjera $\sqrt{u^2 + v^2}$.
Klasa elementa $(0, 0)$ je samo jedna točka i to ishodište (kružnica polumjera nula sa središtem u ishodištu).

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami



Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Dakle, elementi kvocijentnog skupa su kružnice sa središtem u ishodištu. Sve točke koje leže na istoj kružnici sa središtem u ishodištu su međusobno "jednake".

Primjer 3.20.

Na skupu $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *definiramo relaciju* $\sim$ *s*

$$a \sim b \overset{\text{def}}{\iff} ab > 0.$$

a. *Dokažite da je* $\sim$ *relacija ekvivalencije na* $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

b. *Odredite klase ekvivalencije elemenata* 5 *i* -5.

c. *Odredite kvocijentni skup.*

Rješenje.

Refleksivnost. Kako je $a^2 > 0$ za svaki $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, slijedi da vrijedi $a \sim a$ za svaki $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Simetričnost. Pretpostavimo da vrijedi $a \sim b$. Tada je $ab > 0$. No, onda je sigurno i $ba > 0$, odnosno vrijedi $b \sim a$.

Tranzitivnost. Pretpostavimo da vrijedi $a \sim b$ i $b \sim c$. Tada je $ab > 0$ i $bc > 0$. Množenjem tih nejednakosti dobivamo da je $(ab)(bc) > 0$, odnosno $ab^2c > 0$. Kako je $b^2 > 0$, slijedi da mora biti i $ac > 0$ iz čega slijedi $a \sim c$.

$$[5]_\sim = \{a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : 5 \sim a\} =$$
$$= \{a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : 5a > 0\} =$$
$$= \{a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : a > 0\} = \mathbb{N}$$

$$[-5]_\sim = \{a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : -5 \sim a\} =$$
$$= \{a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : -5a > 0\} =$$
$$= \{a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : a < 0\} = -\mathbb{N}$$

Kvocijentni skup se sastoji od dva elementa $\mathbb{N}$ i $-\mathbb{N}$, tj.

$$(\mathbb{Z} \setminus \{0\})/_\sim = \{\mathbb{N}, -\mathbb{N}\}$$

Dakle, ova relacija poistovjećuje sve prirodne brojeve i sve negativne prirodne brojeve.

Otkud znamo da imamo samo dvije klase ekvivalencije?

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.21.

Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. *Na skupu* A *definiramo relaciju* $\sim$ *s*

$$a \sim b \overset{\text{def}}{\iff} ab \text{ je potpuni kvadrat.}$$

a. *Odredite elemente relacije* $\sim$.

b. *Za svaki* $a \in A$ *odredite* $\bar{a} = \{x \in A : x \sim a\}$.

c. *Da li je* $\sim$ *relacija ekvivalencije na* A*? Objasnite!*

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.21.

Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. *Na skupu* A *definiramo relaciju* $\sim$ *s*

$$a \sim b \overset{\text{def}}{\iff} ab \text{ je potpuni kvadrat.}$$

a. *Odredite elemente relacije* $\sim$.

b. *Za svaki* $a \in A$ *odredite* $\bar{a} = \{x \in A : x \sim a\}$.

c. *Da li je* $\sim$ *relacija ekvivalencije na* A*? Objasnite!*

Rješenje.

Kako je $\sim$ relacija na konačnom skupu koji nema puno elemenata, njezine ćemo elemente najlakše odrediti pomoću matrice incidencije.

$x \setminus y$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	0	1	0	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	1	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0
8	0	1	0	0	0	0	0	1	0
9	1	0	0	1	0	0	0	0	1

$$\sim = \{(1,1),(1,4),(1,9),(2,2),(2,8),(3,3),(4,1),(4,4),$$
$$(4,9),(5,5),(6,6),(7,7),(8,2),(8,8),(9,1),(9,4),(9,9)\}$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

$$\bar{1} = \{1, 4, 9\} = \bar{4} = \bar{9}$$
$$\bar{2} = \{2, 8\} = \bar{8}$$
$$\bar{3} = \{3\}, \quad \bar{5} = \{5\}, \quad \bar{6} = \{6\}, \quad \bar{7} = \{7\}$$

Kako skupovi $\{1, 4, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, $\{7\}$ čine particiju skupa A, tada prema ◂ Propoziciji 3.5. određuju jednu relaciju ekvivalencije na skupu A i to relaciju

$$a \; \tau \; b \iff^{\text{def}} a \text{ i } b \text{ pripadaju istom elementu particije}$$

Ali τ je zapravo relacija $\sim$, pa je $\sim$ relacija ekvivalencije.

Drugi način da pokažemo da je $\sim$ relacija ekvivalencije je da ispitamo da li je refleksivna, simetrična i tranzitivna. Refleksivnost i simetričnost su vidljive iz matrice incidencije, dok bi za tranzitivnost trebalo svaki slučaj "pješice" provjeriti, što je ovdje ipak previše slučajeva.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Stoga ćemo tranzitivnost dokazati direktno, a usput možemo refleksivnost i simetričnost isto dokazati direktno.

Refleksivnost

$a \cdot a = a^2 \ \Rightarrow \ a \sim a$

Simetričnost

$a \sim b \ \Rightarrow \ \exists n \in \mathbb{N},\, ab = n^2 \ \Rightarrow \ ba = n^2 \ \Rightarrow \ b \sim a$

Tranzitivnost

$a \sim b,\, b \sim c \ \Rightarrow \ \exists m, n \in \mathbb{N},\, ab = m^2,\, bc = n^2 \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \ (ab)(bc) = m^2 n^2 \ \Rightarrow \ (ac)b^2 = m^2 n^2$

Kako je $m^2 n^2$ potpun kvadrat, tada i broj $(ac)b^2$ mora biti potpun kvadrat, a to će biti jedino ako je ac potpuni kvadrat. Dakle, $a \sim c$.

Kardinalni broj

Već smo prije definirali pojam kardinalnog broja za konačne skupove. Sada bismo željeli definirati kardinalni broj za bilo koji skup koji ne mora nužno imati konačno mnogo elemenata. Sjetimo se da smo za konačan skup definirali njegov kardinalni broj kao broj elemenata koje taj skup sadrži. Mogli bismo naivno reći da beskonačni skup ima beskonačno mnogo elemenata i da je njegov kardinalni broj jednak beskonačno. No, postavlja se pitanje **da li su sve beskonačnosti jednake**.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Da li prirodnih brojeva ima jednako mnogo kao i racionalnih, ili racionalnih brojeva ima više nego prirodnih? Da li realnih brojeva ima više nego racionalnih ili ih ima jednako mnogo? Dakle, željeli bismo na neki način uspoređivati beskonačne skupove s obzirom na broj elemenata koji oni sadrže, a ne samo reći da oni imaju beskonačno mnogo elemenata. Takvim pitanjem se bavio **Cantor** krajem 19. st. pa ćemo ovdje uvesti pojam kardinalnog broja na način kako je to učinio Cantor.

Pojam kardinalnog broja nije nimalo jednostavan kako se to na prvi pogled može učiniti. Stoga ćemo ovdje navesti samo neke osnovne pojmove i razjasniti najosnovnije koncepte.

Ekvipotentni skupovi

Kažemo da je skup A **ekvipotentan** (ekvivalentan, jednakobrojan, bijektivan) skupu B ako postoji barem jedna bijekcija skupa A na skup B.

Oznake: $A \cong B$, $|A| = |B|$, $k(A) = k(B)$

Propozicija 3.6.

$\cong$ *je relacija ekvivalencije.*

Ekvipotentni skupovi

Kažemo da je skup A **ekvipotentan** (ekvivalentan, jednakobrojan, bijektivan) skupu B ako postoji barem jedna bijekcija skupa A na skup B.

Oznake: $A \cong B$, $|A| = |B|$, $k(A) = k(B)$

Propozicija 3.6.

$\cong$ *je relacija ekvivalencije.*

Dokaz.

Refleksivnost. $A \cong A$ jer je identiteta $\mathrm{id} : A \to A$, $\mathrm{id}(x) = x$ bijekcija.

Simetričnost. Neka je $A \cong B$. To znači da postoji bar jedna bijekcija $f : A \to B$. No, kako je inverz bijekcije opet bijekcija, slijedi da je $f^{-1} : B \to A$ također bijekcija, a to znači da je $B \cong A$.

Tranzitivnost. Neka je $A \cong B$ i $B \cong C$. Tada postoje bijekcije $f : A \to B$ i $g : B \to C$. Kako je kompozicija bijekcija opet bijekcija, slijedi da je $g \circ f : A \to C$ bijekcija, što znači da je $A \cong C$. ♡

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Kardinalni broj je klasa ekvivalencije kojoj skup pripada s obzirom na relaciju $\cong$, tj. zajedničko svojstvo svih ekvipotentnih skupova. Stoga za ekvipotentne skupove govorimo da imaju isti kardinalni broj.

Skup A je **konačan** ako je prazan ili postoji bijekcija iz A u $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Ako skup A nije konačan, kažemo da je **beskonačan**.

Ako je skup A konačan, $A \neq \emptyset$ i bijektivan sa $\mathbb{N}_n$, tada on ima n elemenata i pišemo $k(A) = n$. Nadalje, $k(\emptyset) = 0$.

Dakle, mi smo ovdje klasu ekvivalencije po relaciji $\cong$ kojoj pripadaju svi skupovi sa n elemenata nazvali sa n i kažemo da je kardinalni broj tih skupova jednak n.

Definicija kardinalnog broja preko klase ekvivalencije ekvipotentnih skupova je jedna sasvim prirodna definicija, iako se na prvi pogled čini kompliciranа i nejasna. No, sjetimo se kako se u školi uvodi pojam broja. Kako se djeci objašnjava što je to broj 5. Pa upravo na taj način. Objašnjava im se da broj 5 označava skup od 5 jabuka, isto tako da označa skup od 5 automobila, skup od 5 knjiga, skup od dvije jabuke i tri kruške itd., a to drugim riječima znači da svi ti skupovi pripadaju istoj klasi koju označavamo sa 5. Drugim riječima, nije bitno što su elementi tih skupova, nego je samo bitno koliko ih ima, pa na taj način djeca dolaze do apstraktnog pojma broja.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Teorem 3.2 (O konačnim skupovima).

1. *Svaki podskup konačnog skupa je konačan skup.*
2. *Svaki skup bijektivan konačnom skupu je konačan skup.*
3. *Ako je svaki pravi dio od S konačan, tada je i S konačan.*
4. *Ako je S konačan skup, tada je i $S \cup \{t\}$ konačan skup.*
5. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ je konačan i $k(\mathbb{N}_n) = n$.*
6. *Neprazan skup S je konačan akko postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $S \cong \mathbb{N}_n$.*
7. *Skup S je konačan akko svaka injekcija $S \to S$ je ujedno i surjekcija.*
8. *Skup S je konačan akko svaka surjekcija $S \to S$ je ujedno i injekcija.*
9. *Skup S je konačan akko postoji $n \in \mathbb{N}$ i surjekcija $\mathbb{N}_n \to S$.*
10. *Unija konačno mnogo konačnih skupova je konačan skup.*
11. *Kartezijev produkt konačno mnogo konačnih skupova je konačan skup.*

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Karakteristika je beskonačnih skupova da se mogu bijektivno preslikati na svoj pravi podskup, što za konačne skupove ne vrijedi. Skup A je **beskonačan** ako postoji injekcija $f : A \to A$ takva da je $f(A) \subset A$.

Primjer 3.22.

Dokažite da su skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$ beskonačni.

Karakteristika je beskonačnih skupova da se mogu bijektivno preslikati na svoj pravi podskup, što za konačne skupove ne vrijedi. Skup A je **beskonačan** ako postoji injekcija $f : A \to A$ takva da je $f(A) \subset A$.

Primjer 3.22.

Dokažite da su skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$ beskonačni.

Rješenje.

Da bismo dokazali da je skup $\mathbb{N}$ beskonačan, trebamo naći neku bijekciju sa $\mathbb{N}$ na njegov pravi podskup. Neka je $f(n) = 2n$. Tada je f bijekcija sa skupa prirodnih brojeva na skup parnih prirodnih brojeva pa iz toga slijedi da je $\mathbb{N}$ beskonačan skup.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 & \cdots \end{array}$$

Što to zapravo znači? To znači da parnih brojeva ima isto toliko koliko ima i svih prirodnih brojeva, dakle nema ih ništa manje. Uočite ovdje da je skup svih parnih brojeva pravi podskup skupa $\mathbb{N}$, ali ipak ta dva skupa imaju jednak broj elemenata, tj. imaju isti kardinalni broj. Takva situacija se ne može dogoditi kod konačnih skupova.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

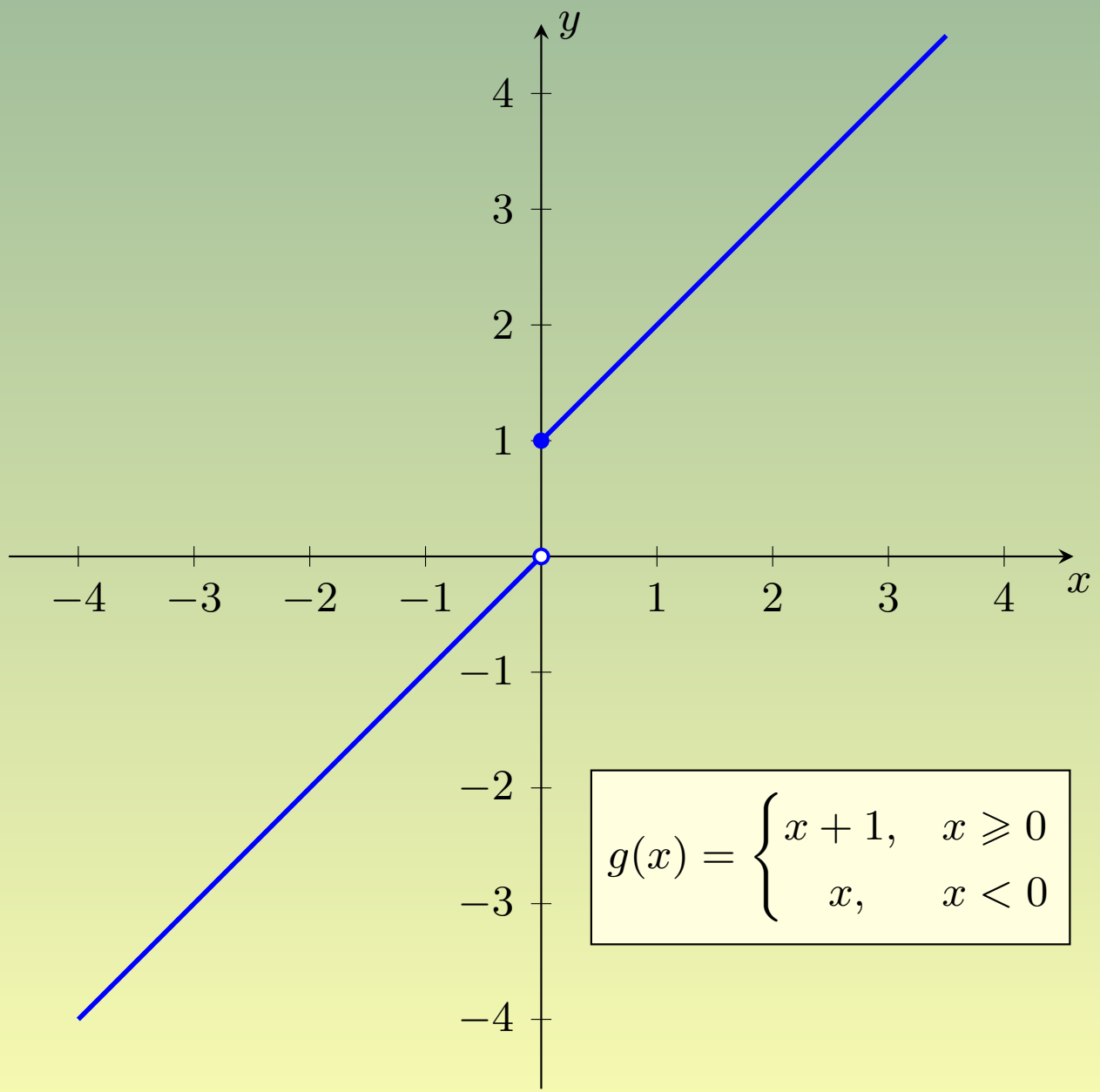
Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Kako je $\mathbb{N}$ beskonačan skup i $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ slijedi da je i $\mathbb{R}$ beskonačan skup. No dokažimo ipak po definiciji da je $\mathbb{R}$ beskonačan skup tako da nađemo neku bijekciju sa $\mathbb{R}$ na njegov pravi podskup. Neka je

$$g(x) = \begin{cases} x+1, & x \geqslant 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

Tada je g bijekcija sa $\mathbb{R}$ na njegov pravi podskup $\mathbb{R} \setminus [0,1\rangle$ kao što možemo vidjeti na sljedećoj slici.

Što nam govori ta bijekcija? Ako iz skupa $\mathbb{R}$ izbacimo interval $[0,1\rangle$, tada u preostalom skupu ima isto toliko elemenata koliko ima i u skupu $\mathbb{R}$.



$$g(x) = \begin{cases} x+1, & x \geqslant 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.23.

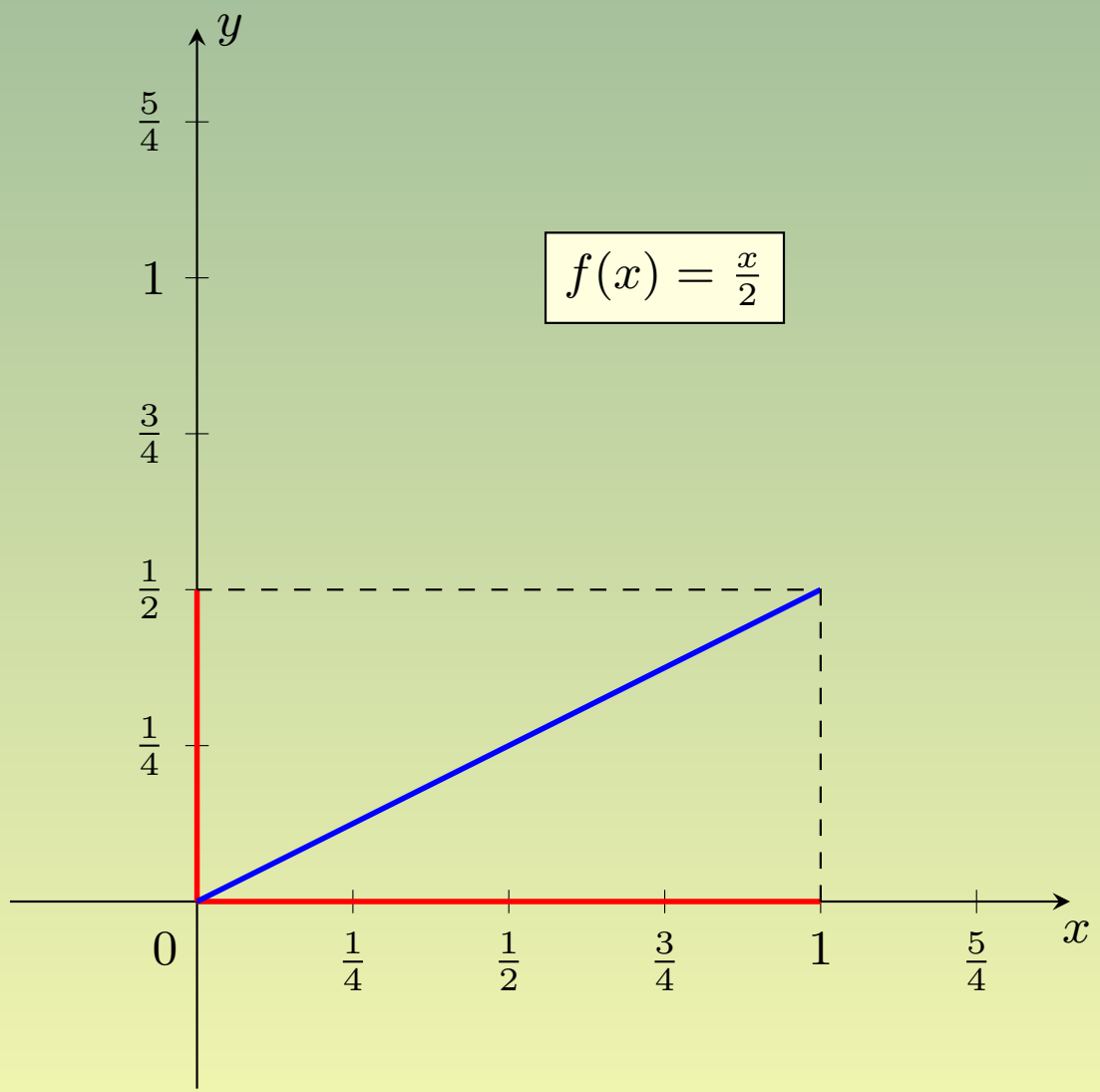
Dokažite da je skup $[0, 1]$ *beskonačan.*

Primjer 3.23.

Dokažite da je skup $[0,1]$ *beskonačan.*

Rješenje.

Da bismo dokazali da je skup $[0,1]$ beskonačan, trebamo pronaći jednu bijekciju sa tog skupa na njegov pravi podskup. Neka je $f(x) = \frac{x}{2}$. Tada je f bijekcija sa skupa $[0,1]$ na njegov pravi podskup $[0, \frac{1}{2}]$ što možemo vidjeti na sljedećoj slici. Dakle, $[0,1]$ je beskonačan skup. Skupovi $[0,1]$ i $[0, \frac{1}{2}]$ imaju isti kardinalni broj, tj. između brojeva 0 i $\frac{1}{2}$ ima jednako mnogo realnih brojeva koliko ih ima i između 0 i 1, dakle nema ih ništa manje kao što bi se na prvi pogled moglo učiniti.


y
$\frac{5}{4}$
1
$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$
$f(x) = \frac{x}{2}$
0
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$
1
$\frac{5}{4}$
x

Zadatak 3.6.

Dokažite da skupovi $[0, 1]$ *i* $[0, \frac{1}{n}]$ *imaju isti kardinalni broj za svaki* $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 3.7.

Dokažite da skupovi $[a, b]$ *i* $[c, d]$ *imaju isti kardinalni broj za svaki* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *pri čemu je* $a \neq b$ *i* $c \neq d$.

Primjer 3.24.

Dokažite da skupovi $\mathbb{R}^+$ *i* $\langle 0, 1\rangle$ *imaju isti kardinalni broj, gdje je* $\mathbb{R}^+ = \langle 0, \infty\rangle$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Rješenje.

Definiramo funkciju $f : \mathbb{R}^+ \to \langle 0, 1\rangle$ sa $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Dokažimo da je f bijekcija iz čega će slijediti tvrdnja.

Injektivnost

$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+1} \Rightarrow xy + x = xy + y \Rightarrow x = y$

Dakle, f je zaista injekcija.

Rješenje.

Definiramo funkciju $f : \mathbb{R}^+ \to \langle 0, 1\rangle$ sa $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Dokažimo da je f bijekcija iz čega će slijediti tvrdnja.

Injektivnost

$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+1} \Rightarrow xy + x = xy + y \Rightarrow x = y$

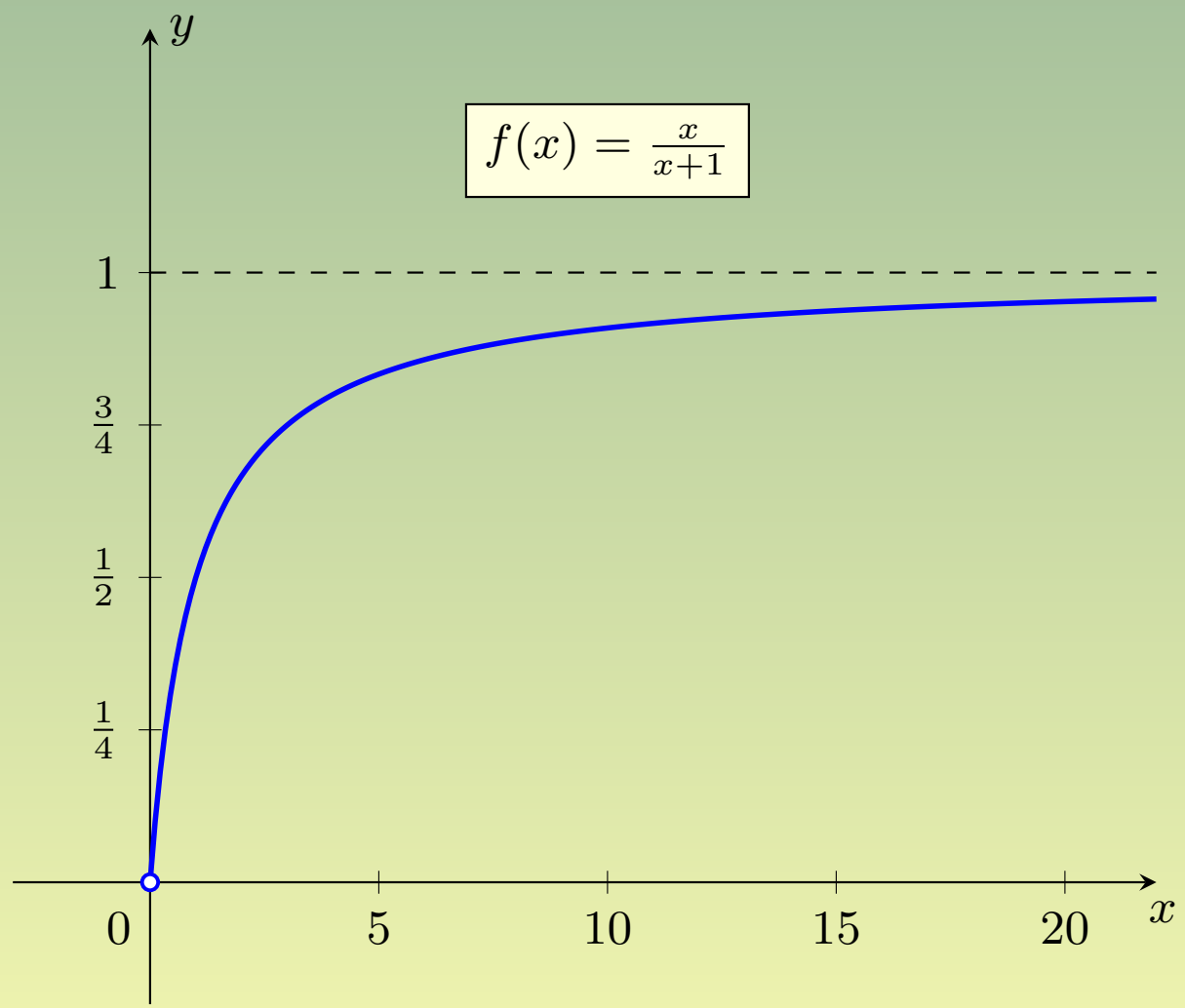
Dakle, f je zaista injekcija.

Surjektivnost

Neka je $y \in \langle 0, 1\rangle$ proizvoljan. Tražimo $x \in \mathbb{R}^+$ takav da je $f(x) = y$, odnosno $\frac{x}{x+1} = y$. Izrazimo li iz te jednadžbe x pomoću y, dobivamo $x = \frac{y}{1-y}$. Kako je $y \in \langle 0, 1\rangle$, slijedi da je $\frac{y}{1-y} \in \mathbb{R}^+$ i vrijedi $f\left(\frac{y}{1-y}\right) = y$ pa je f zaista surjekcija.

Dakle, svih pozitivnih realnih brojeva ima isto toliko koliko i svih realnih brojeva u intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami



Primjer 3.25.

Dokažite da skupovi $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^+$ imaju isti kardinalni broj, tj. da svih pozitivnih realnih brojeva ima isto toliko koliko ima i svih realnih brojeva.

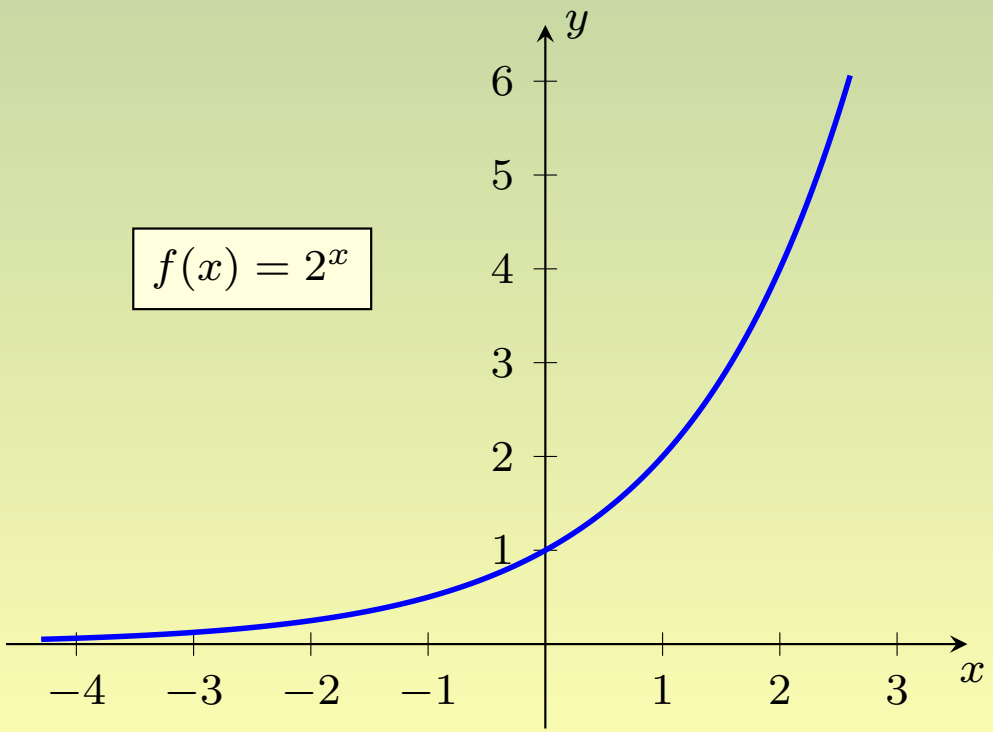
Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.25.

Dokažite da skupovi $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^+$ imaju isti kardinalni broj, tj. da svih pozitivnih realnih brojeva ima isto toliko koliko ima i svih realnih brojeva.

Rješenje.

Bilo koja eksponencijalna funkcija je bijekcija sa $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}^+$, npr. uzmimo $f(x) = 2^x$.



Dokazali smo da je

$$\mathbb{R}^+ \cong \langle 0, 1\rangle \quad \text{i} \quad \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^+.$$

Zbog simetričnosti relacije $\cong$ slijedi da je

$$\langle 0, 1\rangle \cong \mathbb{R}^+ \quad \text{i} \quad \mathbb{R}^+ \cong \mathbb{R},$$

a zbog tranzitivnosti relacije $\cong$ slijedi da je

$$\langle 0, 1\rangle \cong \mathbb{R}.$$

Dakle, svih realnih brojeva ima isto toliko koliko ima i realnih brojeva u intervalu $\langle 0, 1\rangle$, nema ih ništa više.

Primjer 3.26.

Dokažite da skupovi $[0,1]$ *i* $\langle 0,1\rangle$ *imaju isti kardinalni broj.*

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.26.

Dokažite da skupovi $[0,1]$ *i* $\langle 0,1\rangle$ *imaju isti kardinalni broj.*

Rješenje.

Neka je $f : [0,1] \to \langle 0,1\rangle$ definirana sa

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{1}{n+2}, & x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \\ x, & \text{inače} \end{cases}$$

Tvrdimo da je f bijekcija. Neka je

$$S = \left\{ \tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}.$$

Tada vidimo da je funkcija f na skupu $[0,1] \setminus S$ identiteta, pa je $f : [0,1] \setminus S \to [0,1] \setminus S$ bijekcija.

Treba još pokazati da funkcija f bijektivno preslikava skup S na skup $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2\right\}$. Naime, jedini elementi koje još nismo gledali iz skupa $[0,1]$ su brojevi

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots, \qquad (*)$$

a jedini brojevi koji još nisu "pogođeni" u $\langle 0,1\rangle$ su

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ldots \qquad (**)$$

No funkcija f bijektivno preslikava $(*)$ na $(**)$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \cdots
\end{array}$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Dakle, f je zaista bijekcija pa skupovi $[0,1]$ i $\langle 0,1\rangle$ imaju isti kardinalni broj, tj. imaju jednak broj elemenata.

Dakle, nije istina da skup $[0,1]$ ima dva elementa više od skupa $\langle 0,1\rangle$, oni imaju jednak broj elemenata.

Primjer 3.27.

Dokažite da skupovi $[0,1]$ *i* $[0,1\rangle$ *imaju isti kardinalni broj.*

Dakle, f je zaista bijekcija pa skupovi $[0,1]$ i $\langle 0,1\rangle$ imaju isti kardinalni broj, tj. imaju jednak broj elemenata.

Dakle, nije istina da skup $[0,1]$ ima dva elementa više od skupa $\langle 0,1\rangle$, oni imaju jednak broj elemenata.

Primjer 3.27.

Dokažite da skupovi $[0,1]$ *i* $[0,1\rangle$ *imaju isti kardinalni broj.*

Rješenje.

Definiramo funkciju $f : [0,1] \to [0,1\rangle$ sa

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \\ x, & \text{inače} \end{cases}$$

Tvrdimo da je f bijekcija. Neka je

$$S = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Tada vidimo da je funkcija f na skupu $[0,1] \setminus S$ identiteta, pa je

$$f : [0,1] \setminus S \to [0,1] \setminus S$$

bijekcija. Treba još pokazati da funkcija f bijektivno preslikava skup S na skup $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \right\}$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Naime, jedini elementi koje još nismo gledali iz skupa $[0,1]$ su brojevi

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots, \qquad (\star)$$

a jedini brojevi koji još nisu "pogođeni" u $[0,1\rangle$ su

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ldots \qquad (\star\star)$$

No funkcija f bijektivno preslikava $(\star)$ na $(\star\star)$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \ldots \end{array}$$

Dakle, f je zaista bijekcija pa skupovi $[0,1]$ i $[0,1\rangle$ imaju isti kardinalni broj, tj. imaju jednak broj elemenata.

Dakle, nije istina da skup $[0,1]$ ima jedan element više od skupa $[0,1\rangle$, oni imaju jednak broj elemenata.

Primjer 3.28.

Dokažite da skupovi $[0,1]$ *i* $\langle 0,1]$ *imaju isti kardinalni broj.*

Dakle, f je zaista bijekcija pa skupovi $[0,1]$ i $[0,1\rangle$ imaju isti kardinalni broj, tj. imaju jednak broj elemenata.

Dakle, nije istina da skup $[0,1]$ ima jedan element više od skupa $[0,1\rangle$, oni imaju jednak broj elemenata.

Primjer 3.28.

Dokažite da skupovi $[0,1]$ *i* $\langle 0,1]$ *imaju isti kardinalni broj.*

Rješenje.

Kao prvo, skupovi $\langle 0,1]$ i $[0,1\rangle$ imaju isti kardinalni broj jer je preslikavanje

$$f : \langle 0,1] \to [0,1\rangle, \qquad f(x) = 1 - x$$

bijekcija.

Stoga je $\langle 0,1] \cong [0,1\rangle$. Iz prethodnog primjera znamo da je $[0,1] \cong [0,1\rangle$. Zbog simetričnosti relacije $\cong$ je

$$\langle 0,1] \cong [0,1\rangle \quad \text{i} \quad [0,1\rangle \cong [0,1],$$

a zbog tranzitivnosti relacije $\cong$ slijedi

$$\langle 0,1] \cong [0,1].$$

Napomena.

Neka su $a, b \in \mathbb{R},\ a \neq b$. Tada skupovi $[a,b]$, $[a,b\rangle$, $\langle a,b]$ i $\langle a,b\rangle$ imaju isti kardinalni broj.

Prebrojivi i neprebrojivi skupovi

Sada ćemo konačno vidjeti da nisu sve beskonačnosti jednake.

Kažemo da je skup A **prebrojivo beskonačan** ako i samo ako ima kardinalni broj jednak kardinalnom broju skupa $\mathbb{N}$, tj. ako je $k(A) = k(\mathbb{N})$.

Kažemo da je skup A **prebrojiv** ako je konačan ili prebrojivo beskonačan.

Za skup A kažemo da je **neprebrojiv** ako nije prebrojiv.

Oznaka za kardinalni broj skupa $\mathbb{N}$ je

$$k(\mathbb{N}) = \aleph_0 \qquad \text{(alef nula)}.$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Propozicija 3.7.

Skup $\mathbb{Z}$ *je prebrojiv, tj.* $k(\mathbb{Z}) = \aleph_0$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Propozicija 3.7.

Skup $\mathbb{Z}$ je prebrojiv, tj. $k(\mathbb{Z}) = \aleph_0$.

Dokaz.

Treba dokazati da postoji barem jedna bijekcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

Tražena bijekcija je

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & 5 & \cdots \end{array}$$

odnosno

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{ako je } n \text{ neparan} \end{cases}$$

♡

Teorem 3.3.

Skup $\mathbb{Q}$ je prebrojiv, tj. $k(\mathbb{Q}) = \aleph_0$, odnosno sve racionalne brojeve možemo napisati u jedan niz.

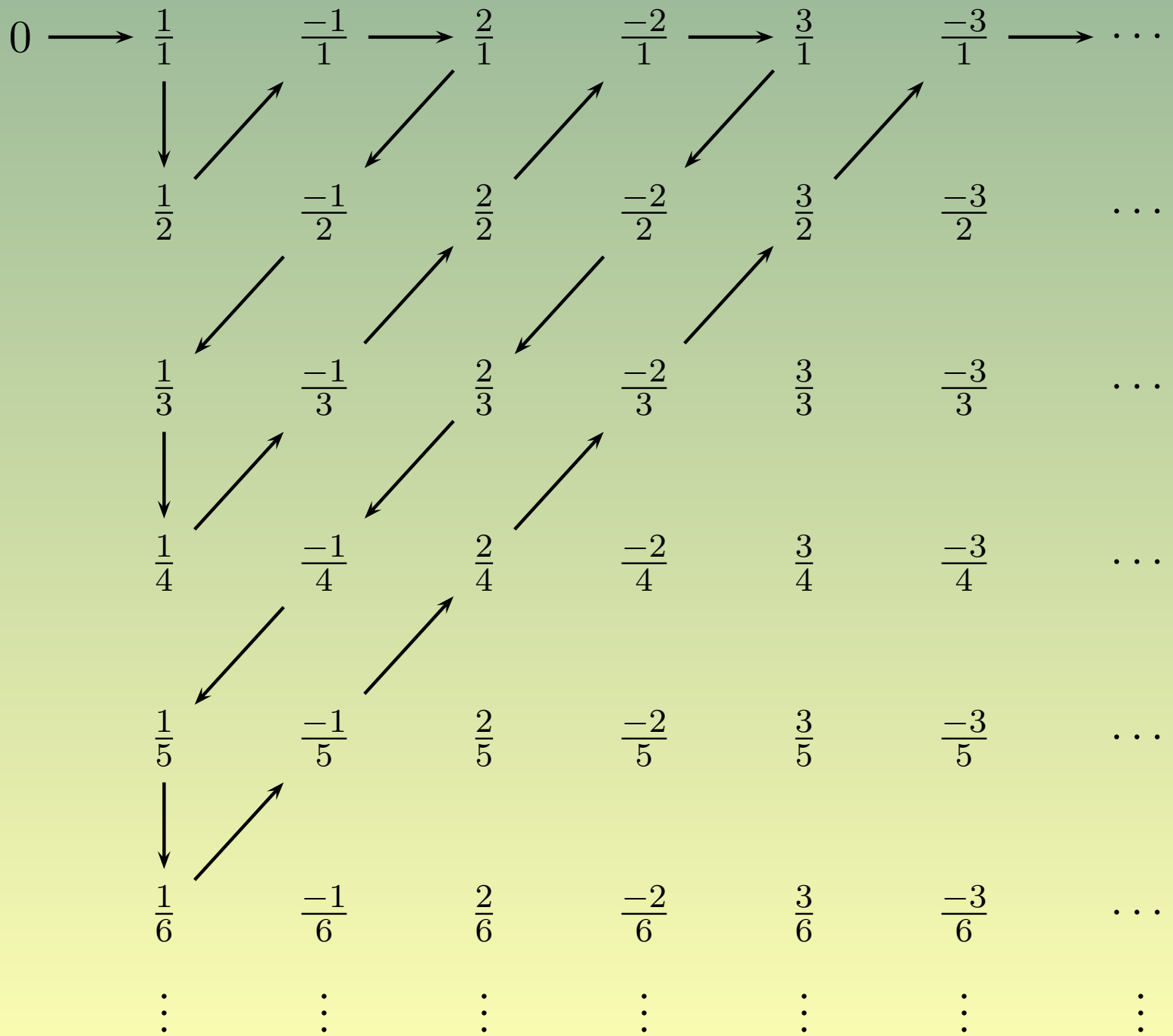
Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Teorem 3.3.

Skup $\mathbb{Q}$ je prebrojiv, tj. $k(\mathbb{Q}) = \aleph_0$, odnosno sve racionalne brojeve možemo napisati u jedan niz.

Dokaz.

Najprije ćemo sve racionalne brojeve različite od nule "zapisati" u jednu tablicu koja će imati beskonačno mnogo redaka i stupaca. U prvi redak smjestimo prvo sve racionalne brojeve s nazivnikom 1 (tj. cijele brojeve) tako da suprotne brojeve pišemo jedan pokraj drugog s time da prvo napišemo pozitivan, a onda negativan broj. Na isti način u drugi redak napišemo sve racionalne brojeve s nazivnikom 2, u treći redak sve racionalne brojeve s nazivnikom 3 itd., kako je prikazano na slici.



Relacije

Skupovi (ponavljanje)

Binarne relacije

Relacija ekvivalencije

Kardinalni broj

Relacije uređaja

Linearni i dobar uređaj

Primjeri uređaja

Uređaji na $A \times B$

Hasseovi dijagrami

Drugi korak je da sada sve racionalne brojeve napišemo u jedan niz obilazeći tablicu po dijagonalama kako je prikazano na slici. Kako je u toj tablici svaki racionalni broj (osim nule) napisan beskonačno puta (jer prikaz racionalnog broja nije jedinstven), tada svaki put kad u tablici naiđemo na neki racionalni broj koji je već napisan u nizu, preskočimo ga tako da u tom nizu svaki racionalni broj bude napisan samo jedanput. Početak toga niza je

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ -1,\ 2,\ \frac{-1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{-1}{3},\ -2,\ 3,\ \frac{2}{3},\ \frac{-1}{4},\ \frac{1}{5},\ \dots$$

Jasno je da će se na taj način u tom nizu nalaziti svi racionalni brojevi. Dakle, uspjeli smo sve racionalne brojeve napisati u jedan niz (pobrojali smo ih), a to znači da ih ima koliko ima i prirodnih brojeva, tj. $k(\mathbb{Q}) = \aleph_0$. ♡

Teorem 3.4.

Skup $\langle 0, 1]$ *je neprebrojiv.*

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Teorem 3.4.

Skup $\langle 0, 1]$ *je neprebrojiv.*

Dokaz.

Pretpostavimo da je skup $\langle 0, 1]$ prebrojiv. Tada ga možemo zapisati u obliku niza

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots \qquad (\clubsuit)$$

Svaki element c_n možemo napisati u obliku decimalnog broja s beskonačno mnogo decimala različitih od nule (npr. $0.5 = 0.4\dot{9}$).

$$c_1 = 0.a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}\cdots$$
$$c_2 = 0.a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}\cdots$$
$$\vdots$$
$$c_n = 0.a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\cdots$$
$$\vdots$$

Neka je $b = 0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$ realni broj definiran na sljedeći način. Neka je $b_n = 1$ ako je $a_{nn} \neq 1$ i $b_n = 2$ ako je $a_{nn} = 1$. Očito je $b \in \langle 0, 1]$ i jasno je da je b različit od svih c_n-ova. Naime $b \neq c_n$ jer je $b_n \neq a_{nn}$. Naša pretpostavka da se u nizu (♣) nalaze svi brojevi iz $\langle 0, 1]$ je pogrešna pa je skup $\langle 0, 1]$ neprebrojiv. ♡

Dakle u skupu $\langle 0, 1]$ ima puno više elemenata, nego što ih ima u skupovima $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$.

Od prije znamo sljedeće

$$\langle 0, 1] \cong \langle 0, 1\rangle \cong \mathbb{R}.$$

Kardinalni broj skupa $\mathbb{R}$ označavamo sa c, tj.

$$k(\mathbb{R}) = c. \qquad \text{(kontinuum)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} k(\mathbb{N}) = k(\mathbb{Z}) = k(\mathbb{Q}) = \aleph_0 \\ k(\mathbb{R}) = k(\langle 0, 1\rangle) = c \end{array}}$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Hipoteza kontinuuma

Cantor je postavio sljedeće pitanje:

Postoji li kardinalni broj k takav da je $\aleph_0 < k < c$?

Paul Cohen je 1966. godine za odgovor na to pitanje dobio Fieldsovu medalju. Odgovor glasi: uz standardni skup aksioma teorije skupova ne može se odgovoriti na to pitanje. Zato matematičari ovu hipotezu ponekad dodaju skupu osnovnih aksioma teorije skupova i na taj način "odlučuju" da hipoteza vrijedi. Sam Cohen je rekao:

"Pojam skupa je previše zamagljen da bi hipoteza kontinuuma mogla biti potvrđena ili oborena."

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Parcijalni uređaj

Kao što relacija ekvivalencije poopćuje relaciju jednakosti, tako relacija parcijalnog uređaja poopćuje relaciju $\leqslant$.

Neka je $\preccurlyeq \subseteq A^2$. Relacija $\preccurlyeq$ je relacija parcijalnog uređaja ako je

1. **refleksivna**, tj.
$$(\forall x \in A)\big(x \preccurlyeq x\big)$$
2. **antisimetrična**, tj.
$$(\forall x, y \in A)\Big(\big(x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x\big) \Rightarrow x = y\Big)$$
3. **tranzitivna**, tj.
$$(\forall x, y, z \in A)\Big(\big(x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z\big) \Rightarrow x \preccurlyeq z\Big)$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Skup zajedno sa parcijalnim uređajem zovemo **parcijalno uređen skup**.

Ako u parcijalno uređenom skupu $\left(A, \preccurlyeq\right)$ za neka dva elementa vrijedi

$$x \preccurlyeq y \quad \text{i} \quad x \neq y,$$

tada to kratko zapisujemo

$$x \prec y.$$

Relacija $\prec$ nije relacija parcijalnog uređaja jer nije refleksivna (antisimetrična i tranzitivna jest).

- $(\mathbb{R}, \leqslant)$ je parcijalno uređen skup

  Refleksivnost. Za svaki realni broj x vrijedi $x \leqslant x$.

  Antisimetričnost. Ako je $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$, tada je $x = y$.

  Tranzitivnost. Ako je $x \leqslant y$ i $y \leqslant z$, tada je $x \leqslant z$.

- $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ je parcijalno uređen skup

  Refleksivnost. Za svaki skup X vrijedi $X \subseteq X$.

  Antisimetričnost. Ako je $X \subseteq Y$ i $Y \subseteq X$, tada je $X = Y$.

  Tranzitivnost. Ako je $X \subseteq Y$ i $Y \subseteq Z$, tada je $X \subseteq Z$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Dok se svaka dva realna broja mogu usporediti, u skupu $\mathcal{P}(A)$ postoje elementi koji nisu usporedivi. Na primjer,

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$$

Elementi $\{1\}$ i $\{2\}$ nisu usporedivi jer

$$\{1\} \not\subseteq \{2\} \quad \text{i} \quad \{2\} \not\subseteq \{1\}.$$

S druge strane, npr. elementi $\{1\}$ i $\{1, 3\}$ su usporedivi jer vrijedi

$$\{1\} \subseteq \{1, 3\}.$$

Primjer 3.29.

Da li je $(\mathbb{Z}, <)$ *parcijalno uređen skup?*

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.29.

Da li je $(\mathbb{Z}, <)$ *parcijalno uređen skup?*

Rješenje.

$(\mathbb{Z}, <)$ nije parcijalno uređen skup jer $<$ nije refleksivna relacija, tj. $x \not< x$.

Primjer 3.29.

Da li je $(\mathbb{Z}, <)$ *parcijalno uređen skup?*

Rješenje.

$(\mathbb{Z}, <)$ nije parcijalno uređen skup jer $<$ nije refleksivna relacija, tj. $x \not< x$.

Podskupovi parcijalno uređenog skupa su također parcijalno uređeni skupovi preko relacije parcijalnog uređaja naslijeđene iz nadskupa.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Neka je $\left(X, \preccurlyeq\right)$ parcijalno uređen skup i $S \subseteq X$.

Kažemo da je $x \in X$ **donja međa** skupa S ako vrijedi

$$x \preccurlyeq s, \forall s \in S.$$

Za skup S kažemo da je **odozdo omeđen** ako skup S ima barem jednu donju među u X.

Kažemo da je $x \in X$ **gornja međa** skupa S ako vrijedi

$$s \preccurlyeq x, \forall s \in S.$$

Za skup S kažemo da je **odozgo omeđen** ako skup S ima barem jednu gornju među u X.

Napomena.

Donja međa ne mora pripadati skupu S, ali mora biti usporediva sa svim elementima skupa S (mora biti manja od svih elemenata skupa S).

Napomena.

Gornja međa ne mora pripadati skupu S, ali s njom moraju biti usporedivi svi elementi skupa S (svi elementi skupa S moraju biti manji od nje).

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Neka je $(X, \preccurlyeq)$ parcijalno uređen skup i $S \subseteq X$.

Element $x \in X$ (ako postoji) zovemo **infimum** skupa S i označavamo s $\inf S$ ako vrijedi:

i. $x = \inf S$ je donja međa skupa S
ii. $x = \inf S$ je najveća donja međa skupa S u X, tj. za svaku donju među $y \in X$ skupa S vrijedi $y \preccurlyeq \inf S$

Ako je skup S takav da je njegov infimum sadržan u skupu S, tj. $\inf S \in S$, tada se $\inf S$ zove **minimum** skupa S (**najmanji element** skupa S) i označava se sa $\min S$.

Neka je $(X, \preccurlyeq)$ parcijalno uređen skup i $S \subseteq X$.

Element $x \in X$ (ako postoji) zovemo **supremum** skupa S i označavamo sa $\sup S$ ako vrijedi:

i. $x = \sup S$ je gornja međa skupa S
ii. $x = \sup S$ je najmanja gornja međa skupa S u X, tj. za svaku gornju među $y \in X$ skupa S vrijedi $\sup S \preccurlyeq y$

Ako je skup S takav da je njegov supremum sadržan u skupu S, tj. $\sup S \in S$, tada se $\sup S$ zove **maksimum** skupa S (**najveći element** skupa S) i označava se sa $\max S$.

Napomena.

Najmanji element skupa S (minimum skupa S) je onaj element $s \in S$ (ako postoji) koji je usporediv sa svim elementima skupa S, tj.

$$s = \min S \overset{\text{def}}{\iff} s \in S \ \wedge \ \big(\forall s' \in S\big)\big(s \preccurlyeq s'\big)$$

Napomena.

Najveći element skupa S (maksimum skupa S) je onaj element $s \in S$ (ako postoji) s kojim su usporedivi svi elementi skupa S, tj.

$$s = \max S \overset{\text{def}}{\iff} s \in S \ \wedge \ \big(\forall s' \in S\big)\big(s' \preccurlyeq s\big)$$

Neka je $\left(X, \preccurlyeq\right)$ parcijalno uređen skup i $S \subseteq X$.

Kažemo da je $a \in S$ **maksimalni element** skupa S ako vrijedi

$$\left(a' \in S \ \wedge \ a \preccurlyeq a'\right) \Rightarrow a' = a.$$

Kažemo da je $a \in S$ **minimalni element** skupa S ako vrijedi

$$\left(a' \in S \ \wedge \ a' \preccurlyeq a\right) \Rightarrow a' = a.$$

Napomena.

Treba razlikovati najveći element od maksimalnog elementa i najmanji element od minimalnog elementa.

Najveći element je onaj element s kojim su svi usporedivi, dok je maksimalni element onaj element od kojeg nema većeg, ali ne moraju svi elementi zadanog skupa biti usporedivi s njim. Odavde odmah zaključujemo da je svaki najveći element ujedno i maksimalni, ali obrnuto ne vrijedi.

Slično, najmanji element je onaj element koji je usporediv sa svima, dok je minimalni element onaj element od kojeg nema manjeg, ali ne mora on biti usporediv sa svim elementima zadanog skupa. Odavde odmah zaključujemo da je svaki najmanji element ujedno i minimalni, ali obrnuto ne vrijedi.

Primjer 3.30.

Zadan je parcijalno uređen skup $\big(\mathcal{P}(\{a,b\}),\subseteq\big)$. *Nacrtajte graf relacije* $\subseteq$ *i ispitajte postojanje najvećeg, najmanjeg, maksimalnog i minimalnog elementa u skupu* B *ako je*

(a) $B=\{\{a\}\}$, *(b)* $B=\{\{a\},\{b\}\}$, *(c)* $B=\{\emptyset,\{a\}\}$

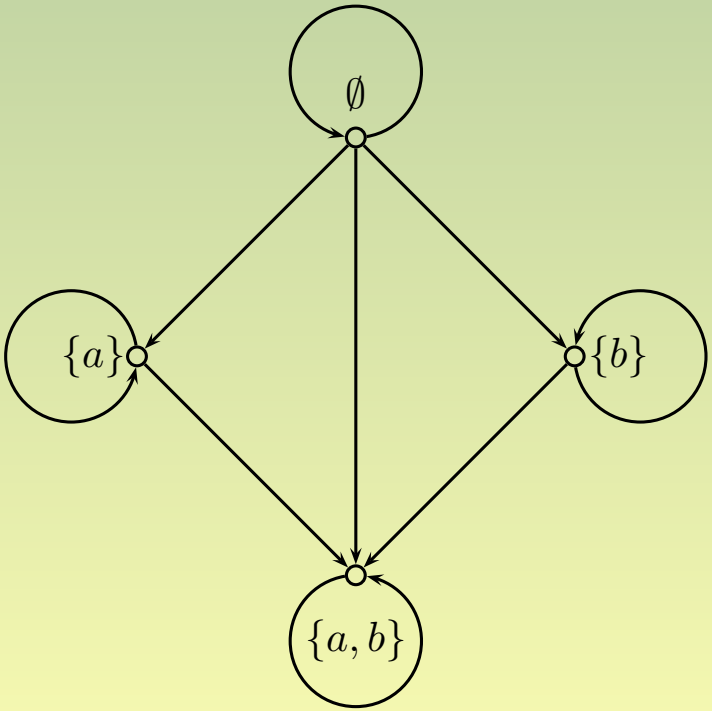
Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.30.

Zadan je parcijalno uređen skup $\big(\mathcal{P}(\{a,b\}), \subseteq\big)$. *Nacrtajte graf relacije* $\subseteq$ *i ispitajte postojanje najvećeg, najmanjeg, maksimalnog i minimalnog elementa u skupu* B *ako je*

(a) $B = \{\{a\}\}$, *(b)* $B = \{\{a\}, \{b\}\}$, *(c)* $B = \{\emptyset, \{a\}\}$

Rješenje.



(a) Kako skup B ima samo jedan element $\{a\}$, onda je taj element najveći i najmanji element skupa B jer je usporediv sa svima (tj., usporediv je sam sa sobom), a nema niti manjeg niti većeg od njega u skupu B jer je on jedini element skupa B. Isto tako on je maksimalni i minimalni element skupa B jer nema većeg niti manjeg elementa od njega u skupu B.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

(a) Kako skup B ima samo jedan element $\{a\}$, onda je taj element najveći i najmanji element skupa B jer je usporediv sa svima (tj., usporediv je sam sa sobom), a nema niti manjeg niti većeg od njega u skupu B jer je on jedini element skupa B. Isto tako on je maksimalni i minimalni element skupa B jer nema većeg niti manjeg elementa od njega u skupu B.

(b) Skup B nema najveći niti najmanji element. Naime, skup B ima dva elementa $\{a\}$ i $\{b\}$ koji nisu međusobno usporedivi, a po definiciji najveći i najmanji element mora biti usporediv sa svima. Međutim, elementi $\{a\}$ i $\{b\}$ su maksimalni elementi skupa B jer nema većih od njih u skupu B. Isto tako, elementi $\{a\}$ i $\{b\}$ su minimalni elementi skupa B jer nema manjih od njih u skupu B.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

(c) Skup B ima dva elementa $\emptyset$ i $\{a\}$. Ta dva elementa jesu usporediva, tj. vrijedi $\emptyset \subseteq \{a\}$. Stoga je $\emptyset$ najmanji element skupa B pa je ujedno i minimalni element skupa B. Element $\{a\}$ je najveći element skupa B pa je ujedno i maksimalni.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

(c) Skup B ima dva elementa $\emptyset$ i $\{a\}$. Ta dva elementa jesu usporediva, tj. vrijedi $\emptyset \subseteq \{a\}$. Stoga je $\emptyset$ najmanji element skupa B pa je ujedno i minimalni element skupa B. Element $\{a\}$ je najveći element skupa B pa je ujedno i maksimalni.

Iz prethodnog primjera vidimo da u slučaju da je postojao najveći element da je on bio jedinstven, dok maksimalnih elemenata može biti i više. Isto vrijedi za najmanji element i minimalni element. Tako nešto vrijedi u bilo kojem parcijalno uređenom skupu.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Propozicija 3.8.

Neka je $(X, \preccurlyeq)$ parcijalno uređen skup, a $S \subseteq X$. Ukoliko postoje $\inf S$ i $\sup S$, tada su oni jedinstveni.

Dokaz.

Pretpostavimo da je $x_1 = \inf S$ i $x_2 = \inf S$. Iz definicije infimuma slijedi da mora biti $x_1 \preccurlyeq x_2$ (jer je $x_2 = \inf S$) i $x_2 \preccurlyeq x_1$ (jer je $x_1 = \inf S$). Sada zbog antisimetričnosti relacije $\preccurlyeq$ slijedi

$$x_1 \preccurlyeq x_2 \quad \text{i} \quad x_2 \preccurlyeq x_1 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2.$$

Sasvim analogno se dokaže da je i supremum jedinstven ukoliko postoji. ♡

Korolar 3.1.

Neka je $(X, \preccurlyeq)$ parcijalno uređen skup, a $S \subseteq X$. Ukoliko postoje $\min S$ i $\max S$, tada su oni jedinstveni.

Napomena.

U parcijalno uređenom skupu su najmanji i najveći element jedinstveni (ukoliko postoje), dok minimalnih i maksimalnih elemenata može biti i više.

Ukoliko skup ima najmanji element, tada je minimalni element jedinstveno određen i jednak je najmanjem elementu.

Isto tako, ukoliko postoji najveći element, tada je maksimalni element jedinstveno određen i jednak je najvećem elementu.

Linearni i dobar uređaj

Za parcijalno uređen skup $(X, \preccurlyeq)$ kažemo da je **totalno** ili **linearno** uređen ako vrijedi

$$(\forall x, y \in X)(x \preccurlyeq y \ \vee \ y \preccurlyeq x),$$

tj. svaka dva elementa se mogu usporediti. Još se kaže u tom slučaju da je X **lanac**.

PARCIJALNI UREĐAJ	$+$	STROGA KOMPLETNOST	$=$	LINEARNI UREĐAJ

Kažemo da je $(X, \preccurlyeq)$ **dobro uređen** skup ako je $(X, \preccurlyeq)$ linearno uređen i ako svaki neprazni podskup od X ima najmanji element.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Napomena.

U linearno uređenom skupu najmanji i minimalni element su ekvivalentni pojmovi i isto tako, najveći i maksimalni element su ekvivalentni pojmovi.

Teorem 3.5 (Teorem o dobrom uređaju).

Svaki skup se može dobro urediti.



Teorem 3.6 (Mat. indukcija i dobar uređaj na $\mathbb{N}$).

Princip matematičke indukcije i princip dobrog uređaja su ekvivalentni pojmovi na skupu prirodnih brojeva $(\mathbb{N}, \leqslant)$.

Dokaz.

matematička indukcija $\Rightarrow$ dobar uređaj

Dokažimo prvo da svaki neprazni konačni podskup od $\mathbb{N}$ ima najmanji element. Dokaz provodimo indukcijom po broju elemenata. Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi. Skup od jednog elementa ima najmanji element i to je upravo baš taj element (zbog refleksivnosti relacije $\leqslant$). Isto tako, očito je da za $n = 2$ tvrdnja isto vrijedi. Naime, ako je $S = \{a, b\}$, tada zbog linearnosti uređaja vrijedi ili $a \leqslant b$ pa je a najmanji element u S, ili $b \leqslant a$ pa je b najmanji element u S.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Pretpostavimo da bilo koji neprazni podskup od n elemenata u $\mathbb{N}$ ima najmanji element. Neka je S neprazni podskup od $\mathbb{N}$ koji ima $n+1$ elemenata. Izbacimo li iz tog skupa jedan element, na primjer element a, tada preostali skup ima n elemenata koji onda prema pretpostavci indukcije ima najmanji element b. Tada je manji od brojeva a i b najmanji element skupa S. Prema principu matematičke indukcije slijedi da svaki neprazni konačni podskup od $\mathbb{N}$ ima najmanji element.

Neka je sada S beskonačni podskup od $\mathbb{N}$. Tvrdimo da on ima najmanji element. Neka je $a \in S$ bilo koji. Definiramo skup

$$S_1 = \{s \in S : s \leqslant a\}.$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Tada je S_1 konačan skup i $S_1 \neq \emptyset$ jer je sigurno $a \in S_1$. Prema dokazanom skup S_1 ima najmanji element koji je ujedno i najmanji element skupa S.

Dakle, dokazali smo, koristeći se principom matematičke indukcije, da svaki neprazni podskup u $\mathbb{N}$ ima najmanji element. Stoga princip matematičke indukcije povlači princip dobrog uređaja na $\mathbb{N}$. Dokažimo da vrijedi i obrnuto.

dobar uređaj $\Rightarrow$ matematička indukcija

Neka je $P(n)$ tvrdnja koja ovisi o prirodnom broju n. Pretpostavimo da vrijedi sljedeće:

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

(i) $P(n)$ je istinita za $n = n_0$

(ii) Ako je $P(n)$ istinita za neki prirodni broj $k \geqslant n_0$, tada je $P(n)$ istinita i za $n = k + 1$.

Želimo dokazati, koristeći se principom dobrog uređaja, da je tada $P(n)$ istinita za svaki prirodni broj $n \geqslant n_0$. Pretpostavimo suprotno, tj. da $P(n)$ nije istinita za svaki prirodni broj $n \geqslant n_0$. Neka je S skup svih takvih prirodnih brojeva za koje tvrdnja P nije istinita.

Prema pretpostavci je $S \neq \emptyset$, pa prema principu dobrog uređaja, S ima najmanji element a. Zbog (i) je $a \neq n_0$ (jer tvrdnja vrijedi za $n = n_0$).

Stoga je $a > n_0$, pa je $a - 1 \geqslant n_0$. Isto tako je $a - 1 < a$, a kako je a najmanji element za koji tvrdnja ne vrijedi, tada je tvrdnja P istinita za $k = a - 1$. Tada prema (ii) slijedi da je P istinita i za $k = a$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je $a \in S$. Iz toga slijedi da mora biti tvrdnja P istinita za svaki prirodni broj $n \geqslant n_0$.

Dakle, dokazali smo da i princip dobrog uređaja na $(\mathbb{N}, \leqslant)$ povlači princip matematičke indukcije. ♡

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Napomena.

Poopćenje principa matematičke indukcije na skupu $(\mathbb{N}, \leqslant)$ je **princip transfinitne indukcije** na bilo koji dobro uređeni skup. Bez da previše ulazimo u detalje, objasnimo to na jednom jednostavnom primjeru. Pogledajmo dobar uređaj na skupu $\mathbb{N}$

$$2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots, 1, 3, 5, \ldots, 2n+1, \ldots$$

gdje je svaki parni broj manji od svakog neparnog, a uređaj između brojeva iste parnosti je standardan (uvjerite se da je to dobar uređaj na $\mathbb{N}$). Uz takav dobar uređaj na $\mathbb{N}$ ne vrijedi princip matematičke indukcije. U čemu je problem?

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Uz standardni uređaj skup $\mathbb{N}$ se sastoji od "jednog komada", tj. jedino broj 1 nema neposrednog prethodnika, a svaki drugi broj ima neposrednog prethodnika. Isto tako svaki broj ima neposrednog sljedbenika (to vrijedi za bilo koji dobro uređeni skup). Princip matematičke indukcije tada kaže da ako tvrdnja vrijedi za broj 1, te ako iz pretpostavke da vrijedi za neki prirodni broj da tada vrijedi i za njegov sljedbenik, možemo u tom slučaju zaključiti da tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj. Što je intuitivno i jasno jer krenemo li od jedinice i "skačemo" li sa svakog broja na njegov sljedbenik, na taj ćemo način pokupiti sve prirodne brojeve.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

U čemu je problem sa "skakanjem" ako imamo spomenuti uređaj

$$2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots, 1, 3, 5, \ldots, 2n+1, \ldots ?$$

Naime, u ovom uređaju skup $\mathbb{N}$ se sastoji od dva "zasebna komada", tj. imamo dva broja koji nemaju neposrednih prethodnika, to su brojevi 1 i 2. Počnemo li "skakanje" od najmanjeg, a to je ovdje broj 2, "skočimo" na njegov neposredni sljedbenik 4, zatim sa 4 "skočimo" na njegov neposredni sljedbenik 6, itd. ovim "skakanjima" nikad nećemo doći na onaj drugi "nivo" koji počinje brojem 1 baš zato jer on nema neposrednog prethodnika s kojeg bismo mogli "skočiti" na njega.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Grubo rečeno, princip transfinitne indukcije nam omogućuje da možemo "skočiti" s jednog na drugi "nivo", dakle u ovom slučaju sa "nivoa" parnih brojeva na "nivo" neparnih brojeva. Matematička indukcija nam to ne omogućuje, ona nam omogućuje samo "skakanje po jednom nivou", dok nam transfinitna indukcija omogućuje i "preskakanje s jednog nivoa na drugi".

Primjeri uređaja

1. $\left(\mathbb{R}, \leqslant\right)$ je linearno uređen skup (svaka dva realna broja se mogu usporediti). $\left(\mathcal{P}(X), \subseteq\right)$ je parcijalno uređen skup, ali nije linearno uređen (osim ako je $k(X) = 1$).

2. $X = \{A, B, C, \check{C}, \acute{C}, D, \ldots, \check{Z}\}$ skup slova hrvatske abecede. Stavimo

$$A \prec B \prec C \prec \check{C} \prec \acute{C} \prec D \prec \cdots \prec \check{Z}.$$

   Tada je $\left(X, \preccurlyeq\right)$ linearno uređen skup.

3. $X = \mathbb{R}, \quad S = \langle 0, 1\rangle$
   $\inf S = 0, \quad \min S$ ne postoji
   $\sup S = 1, \quad \max S$ ne postoji

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

4. $X = \mathbb{R}, \quad S = [0, 1\rangle$
   $\inf S = 0, \quad \min S = 0$
   $\sup S = 1, \quad \max S$ ne postoji

5. $X = \mathbb{R}, \quad S = [0, 1]$
   $\inf S = 0, \quad \min S = 0$
   $\sup S = 1, \quad \max S = 1$

6. $X = \mathbb{R}, \quad S = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
   $\inf S = 1, \quad \min S$ ne postoji
   $\sup S = 2, \quad \max S = 2$

7. $X = \mathbb{R}, \quad S = \langle 1, +\infty\rangle$
   $\inf S = 1, \quad \min S$ ne postoji
   $\sup S$ ne postoji, $\quad \max S$ ne postoji

8. $X = \mathbb{R}, \quad S = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$

   Znamo da je niz $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ strogo rastući i da je omeđen i $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = e$.

   $\inf S = 2, \quad \min S = 2$

   $\sup S = e, \quad \max S$ ne postoji

9. $X = \mathbb{Q}, \quad S = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad S \subseteq \mathbb{Q}$

   $\inf S = 2, \quad \min S = 2$

   $\sup S$ ne postoji jer $e \notin \mathbb{Q}$

   $\max S$ ne postoji

   Skup S ima gornjih međa u $\mathbb{Q}$, ali najmanja gornja međa nije element skupa $\mathbb{Q}$ pa skup S nema supremum u $\mathbb{Q}$.

Napomena.

Svaki neprazni i omeđen podskup skupa $\mathbb{R}$ ima infimum i supremum (aksiom). Zato se za $\mathbb{R}$ kaže da je **potpuno uređeno polje**. Skup $\mathbb{Q}$ nije potpuno uređeno polje.

10. $X = \{1, 2, 3\}, \quad \big(\mathcal{P}(X), \subseteq\big)$

$$\mathcal{P}(X) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\big\}$$

$$\inf \mathcal{P}(X) = \emptyset, \qquad \min \mathcal{P}(X) = \emptyset$$

$$\sup \mathcal{P}(X) = X, \quad \max \mathcal{P}(X) = X$$

Jedini minimalni element od $\mathcal{P}(X)$ je $\emptyset$.

Jedini maksimalni element od $\mathcal{P}(X)$ je X.

$$S_1 = \{\{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}, \quad S_1 \subseteq \mathcal{P}(X)$$

$$\inf S_1 = \emptyset, \qquad \min S_1 \text{ ne postoji}$$
$$\sup S_1 = X, \qquad \max S_1 \text{ ne postoji}$$

Minimalni elementi skupa S_1 su $\{2\}$ i $\{1,3\}$.
Maksimalni elementi skupa S_1 su $\{1,2\}$ i $\{1,3\}$.

Dakle, ovdje uočavamo da je $\{1,3\}$ minimalni i maksimalni element u skupu S_1, što znači da nema elementa u skupu S_1 kojeg bi $\{1,3\}$ sadržavao, ali isto tako ni nema elementa u S_1 koji bi sadržavao $\{1,3\}$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

$S_1 = \{\{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}, \quad S_1 \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$

$\inf S_1$ ne postoji, $\quad \min S_1$ ne postoji

$\sup S_1 = X, \quad \max S_1$ ne postoji

S_1 nema infimum u skupu $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$.

S_1 čak nema niti jednu donju među u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ pa je skup S_1 odozdo neomeđen u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$.

$S_1 = \{\{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}, \quad S_1 \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$

$\inf S_1$ ne postoji, $\quad \sup S_1$ ne postoji

S_1 nema infimum niti supremum u skupu $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$.

S_1 čak nema niti jednu donju, a niti gornju među u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ pa je skup S_1 odozdo i odozgo neomeđen u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

$$S_2 = \{\{2\}, \{1,2\}\}, \quad S_2 \subseteq \mathcal{P}(X)$$

$$\inf S_2 = \{2\}, \qquad \min S_2 = \{2\}$$
$$\sup S_2 = \{1,2\}, \quad \max S_2 = \{1,2\}$$

Minimalni element u S_2 je $\{2\}$, a maksimalni element je $\{1,2\}$.

$\emptyset$ je donja međa skupa S_2, ali $\emptyset$ nije najveća donja međa skupa S_2 u $\mathcal{P}(X)$.

X je gornja međa skupa S_2, ali X nije najmanja gornja međa skupa S_2 u $\mathcal{P}(X)$.

$$S_2 = \{\{2\}, \{1,2\}\}, \quad S_2 \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$$

$$\inf S_2 = \{2\}, \qquad \min S_2 = \{2\}$$
$$\sup S_2 = \{1,2\}, \quad \max S_2 = \{1,2\}$$

Jedina razlika je ovdje što skup S_2 osim $\{1,2\}$ nema drugih gornjih međa u skupu $\mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$.

$S_3 = \{\{3\}, \{1,2\}\}, \quad S_3 \subseteq \mathcal{P}(X)$

$\inf S_3 = \emptyset, \quad \min S_3$ ne postoji

$\sup S_3 = X, \quad \max S_3$ ne postoji

Minimalni elementi u skupu S_3 su $\{3\}$ i $\{1,2\}$.

Maksimalni elementi u skupu S_3 su $\{3\}$ i $\{1,2\}$.

$S_3 = \{\{3\}, \{1,2\}\}, \quad S_3 \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$

$\inf S_3 = \emptyset$

$\sup S_3$ ne postoji u $\mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$

$S_3 = \{\{3\}, \{1,2\}\}, \quad S_3 \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$

$\inf S_3$ ne postoji u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$

$\sup S_3$ ne postoji u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

$$S_4 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}, \quad S_4 \subseteq \mathcal{P}(X)$$

$\inf S_4 = \emptyset$, $\min S_4$ ne postoji

$\sup S_4 = X$, $\max S_4$ ne postoji

Minimalni elementi u S_4 su

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}.$$

Maksimalni elementi u S_4 su

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}.$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

11. $(\mathbb{N}, \leqslant)$ je dobro uređen skup. U dobro uređenom skupu svaki njegov neprazni podskup ima najmanji element.

$$\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \exists \min S$$

U dobro uređenom skupu ne mora svaki njegov podskup imati najveći element.

$S = \{2, 4, 6, \dots\} = 2\mathbb{N}$
$\inf S = \min S = 2$
$\sup S$ ne postoji; $\max S$ ne postoji

12. $\left(\mathbb{N}, \preccurlyeq\right)$ je dobro uređen skup, gdje je $\preccurlyeq$ definirano s

$$2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots, 1, 3, 5, \ldots, 2n+1, \ldots$$

Svaki parni broj je manji od svakog neparnog broja, a uređaj između brojeva iste parnosti je standardan.
Na primjer,

$$6 \preccurlyeq 1, \quad 8 \preccurlyeq 10, \quad 8 \preccurlyeq 7, \quad 15 \preccurlyeq 25, \quad 38 \preccurlyeq 1, \quad 38 \preccurlyeq 3, \quad 2 \preccurlyeq 38$$

Brojevi 2 i 1 nemaju neposrednih prethodnika, ali svatko ima neposrednog sljedbenika. Na primjer

$$S = 2\mathbb{N} \cup \{1\} = \{1, 2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots\}$$

$$\min S = 2, \quad \max S = 1$$

13. $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$ je dobro uređen skup, gdje je $\preccurlyeq$ definirano s

$$\underbrace{3, 6, 9, \ldots}_{\text{brojevi djeljivi s 3}}, \underbrace{1, 4, 7, 10, 13, \ldots}_{\text{pri dijeljenju s 3 daju ostatak 1}}, \underbrace{2, 5, 8, 11, 14, \ldots}_{\text{pri dijeljenju s 3 daju ostatak 2}}$$

Na primjer,

$$3 \preccurlyeq 6, \quad 12 \preccurlyeq 1, \quad 27 \preccurlyeq 4, \quad 10 \preccurlyeq 14$$

Brojevi 3, 1 i 2 nemaju neposrednih prethodnika, ali svatko ima neposrednog sljedbenika. Na primjer

$$S = \{1, 2, 9, 16\}$$
$$\min S = 9, \quad \max S = 2$$

14. $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ nije dobro uređen skup jer, npr. podskup

$$\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$$

nema najmanji element. Međutim, znamo da se svaki skup može dobro urediti. Jedan dobar uređaj na $\mathbb{Z}$ je

$$-1, -2, -3, -4, \dots, 1, 2, 3, 4, \dots$$

gdje su brojevi napisani u rastućem poretku.
Drugi dobar uređaj na $\mathbb{Z}$ je

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots$$

gdje su brojevi napisani u rastućem poretku.
Smislite još neke dobre uređaje na $\mathbb{Z}$.

15. $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ nije dobro uređen skup jer, npr. podskup

$$\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

nema najmanji element.

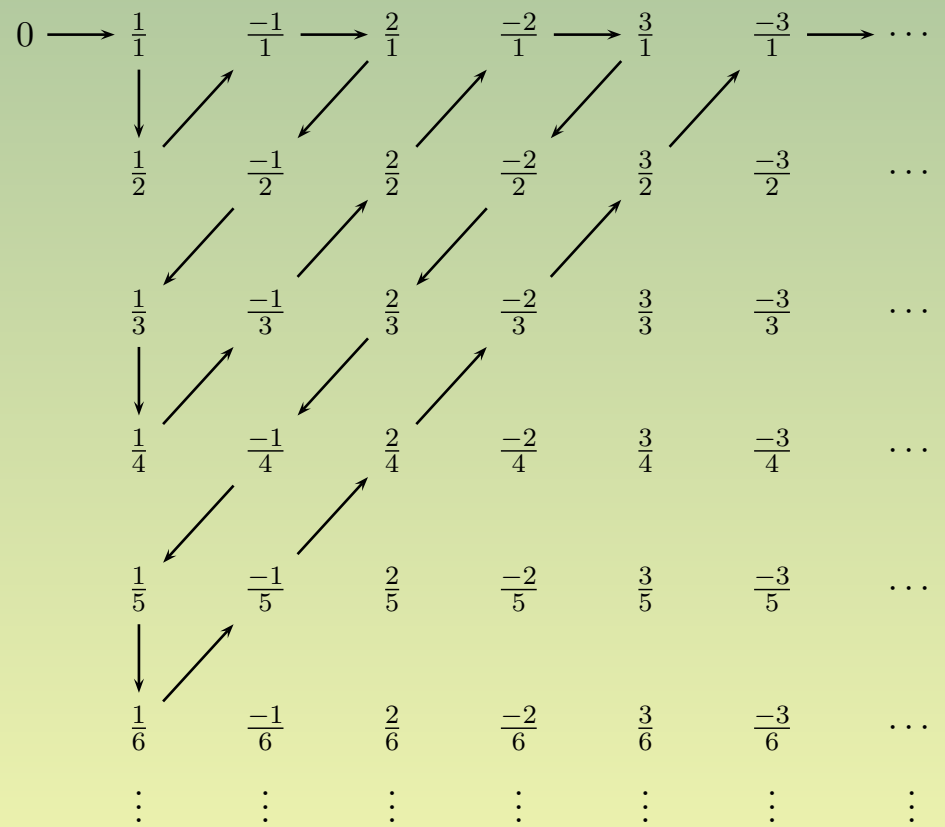
Navedite još neke podskupove od $\mathbb{Q}$ koji nemaju najmanji element.

Međutim, skup $\mathbb{Q}$ je prebrojiv pa nađemo li bar jednu bijekciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, tada će dobar uređaj na $\mathbb{Q}$ biti induciran tom bijekcijom pomoću standardnog dobrog uređaja na $\mathbb{N}$ (ili bilo kojeg drugog dobrog uređaja na $\mathbb{N}$), tj. definiramo

$$\frac{m_1}{n_1} \preccurlyeq \frac{m_2}{n_2} \overset{\text{def}}{\iff} f^{-1}\left(\frac{m_1}{n_1}\right) \preccurlyeq f^{-1}\left(\frac{m_2}{n_2}\right)$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Za različite bijekcije f i različite izbore dobrih uređaja na $\mathbb{N}$ dobivamo dobre uređaje na $\mathbb{Q}$. Evo jednog primjera dobrog uređaja na $\mathbb{Q}$.



$$0, 1, \frac{1}{2}, -1, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, -2, 3, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -3, \ldots$$

Zadatak 3.8.

Konstruirajte još neke dobre uređaje na skupu $\mathbb{Q}$.

Napomena.

Na potpuno isti način se može konstruirati dobar uređaj na bilo kojem prebrojivom skupu X.



Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

16. $(\mathbb{R}, \leqslant)$ nije dobro uređen skup jer, npr. podskup $\langle 0, 1]$ nema najmanji element.

    Navedite još neke podskupove od $\mathbb{R}$ koji nemaju najmanji element.

    Znamo da se svaki skup može dobro urediti pa se stoga i skup $\mathbb{R}$ može dobro urediti. Međutim, problem je u tome što još nije poznat niti jedan dobar uređaj na $\mathbb{R}$, tj. nemamo algoritam pomoću kojeg bismo skup $\mathbb{R}$ dobro uredili (problem je što je skup $\mathbb{R}$ neprebrojiv). Dakle, postoji dobar uređaj na $\mathbb{R}$, ali ne znamo kako doći do njega.



Primjer 3.31.

Neka je $X = \{a, b, c\}$. *Skup* $\left(\mathcal{P}(X), \subseteq\right)$ *nije dobro uređen skup (čak nije niti linearno uređen). Pronađite dva dobra uređaja na* $\mathcal{P}(X)$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.31.

Neka je $X = \{a, b, c\}$. Skup $\left(\mathcal{P}(X), \subseteq\right)$ nije dobro uređen skup (čak nije niti linearno uređen). Pronađite dva dobra uređaja na $\mathcal{P}(X)$.

Rješenje.

$$\mathcal{P}(X) = \left\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\right\}$$

$$\emptyset \preccurlyeq_1 \{a\} \preccurlyeq_1 \{b\} \preccurlyeq_1 \{c\} \preccurlyeq_1 \{a, b\} \preccurlyeq_1 \{a, c\} \preccurlyeq_1 \{b, c\} \preccurlyeq_1 X$$

$$\{b\} \preccurlyeq_2 \{a, b\} \preccurlyeq_2 \{c\} \preccurlyeq_2 \emptyset \preccurlyeq_2 \{a, c\} \preccurlyeq_2 X \preccurlyeq_2 \{b, c\} \preccurlyeq_2 \{a\}$$

Primjer 3.31.

Neka je $X = \{a, b, c\}$. Skup $\left(\mathcal{P}(X), \subseteq\right)$ nije dobro uređen skup (čak nije niti linearno uređen). Pronađite dva dobra uređaja na $\mathcal{P}(X)$.

Rješenje.

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$$

$$\emptyset \preccurlyeq_1 \{a\} \preccurlyeq_1 \{b\} \preccurlyeq_1 \{c\} \preccurlyeq_1 \{a, b\} \preccurlyeq_1 \{a, c\} \preccurlyeq_1 \{b, c\} \preccurlyeq_1 X$$

$$\{b\} \preccurlyeq_2 \{a, b\} \preccurlyeq_2 \{c\} \preccurlyeq_2 \emptyset \preccurlyeq_2 \{a, c\} \preccurlyeq_2 X \preccurlyeq_2 \{b, c\} \preccurlyeq_2 \{a\}$$

Napomena.

Svaki linearni uređaj na konačnom skupu je dobar uređaj.

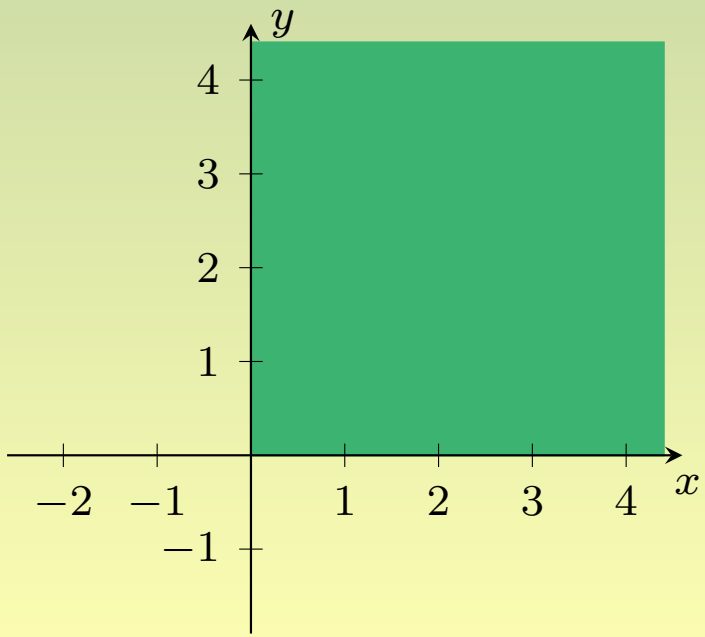
Uređaji na kartezijevom produktu skupova

Neka su $\left(X_1, \preccurlyeq_1\right)$ i $\left(X_2, \preccurlyeq_2\right)$ parcijalno uređeni skupovi. Na skupu $X_1 \times X_2$ definiramo parcijalni uređaj $\preccurlyeq$ sa

$$(a_1, a_2) \preccurlyeq (b_1, b_2) \overset{\text{def}}{\iff} a_1 \preccurlyeq_1 b_1 \quad \wedge \quad a_2 \preccurlyeq_2 b_2$$

Primjer 3.32.

Skup svih točaka u ravnini $\mathbb{R}^2$ koje su $\succcurlyeq (0,0)$ jednak je prvom kvadrantu.



Napomena.

Čak i u slučaju da su $\preccurlyeq_1$ i $\preccurlyeq_2$ linearni uređaji na X_1 odnosno X_2, $\preccurlyeq$ ne mora biti linearni uređaj na $X_1 \times X_2$. Na primjer, ako je $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$, $\preccurlyeq_1 = \preccurlyeq_2 = \leqslant$ standardni uređaj na $\mathbb{R}$, tada elementi $(1,2), (3,1) \in \mathbb{R}^2$ nisu usporedivi.

$$(1,2) \preccurlyeq (3,1) \;\Leftrightarrow\; 1 \leqslant 3 \;\wedge\; \underbrace{2 \leqslant 1}_{\text{laž}}$$

$$(3,1) \preccurlyeq (1,2) \;\Leftrightarrow\; \underbrace{3 \leqslant 1}_{\text{laž}} \;\wedge\; 1 \leqslant 2$$

Neka su $\left(X_i, \preccurlyeq_i\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ parcijalno uređeni skupovi. Na skupu $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ definiramo parcijalni uređaj $\preccurlyeq$ sa

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \preccurlyeq (b_1, b_2, \ldots, b_n) \overset{\text{def}}{\iff}$$
$$a_1 \preccurlyeq_1 b_1 \quad \wedge \quad a_2 \preccurlyeq_2 b_2 \quad \wedge \cdots \wedge \quad a_n \preccurlyeq_n b_n$$

Čak i u slučaju da su svi $\preccurlyeq_i$ linearni uređaji, $\preccurlyeq$ ne mora biti linearni uređaj na $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

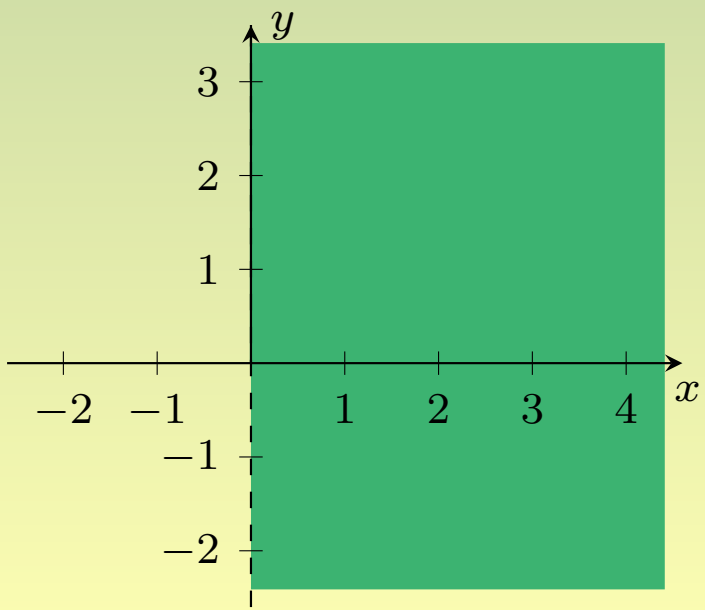
Neka su $\left(X_1, \preccurlyeq_1\right)$ i $\left(X_2, \preccurlyeq_2\right)$ parcijalno uređeni skupovi. Na skupu $X_1 \times X_2$ definiramo parcijalni uređaj $\preccurlyeq_l$ sa

$$(a_1, a_2) \preccurlyeq_l (b_1, b_2) \overset{\text{def}}{\iff} a_1 \prec_1 b_1 \quad \vee \quad \left(a_1 = b_1 \ \wedge \ a_2 \preccurlyeq_2 b_2\right)$$

kojeg zovemo **leksikografski uređaj** na $X_1 \times X_2$.

Primjer 3.33.

Skup svih točaka u ravnini $\mathbb{R}^2$ koje su $\succcurlyeq_l (0,0)$ jednak je desnoj poluravnini bez negativnog dijela y-osi.



Napomena.

U slučaju da su $\preccurlyeq_1$ i $\preccurlyeq_2$ linearni uređaji na X_1 odnosno X_2, tada je i $\preccurlyeq_l$ linearni uređaj na $X_1 \times X_2$. Uzmimo opet $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$, $\preccurlyeq_1 = \preccurlyeq_2 = \leqslant$ standardni uređaj na $\mathbb{R}$, tada su elementi $(1,2), (3,1) \in \mathbb{R}^2$ usporedivi.

$$(1,2) \preccurlyeq_l (3,1) \quad \text{jer je} \quad 1 < 3$$

Isto tako je

$$(1,2) \preccurlyeq_l (1,5) \quad \text{jer je} \quad 1 = 1 \quad \wedge \quad 2 < 5$$

Neka su $\left(X_i, \preccurlyeq_i\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ parcijalno uređeni skupovi. Na skupu $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ definiramo parcijalni uređaj $\preccurlyeq_l$ sa

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \preccurlyeq_l (b_1, b_2, \ldots, b_n) \overset{\text{def}}{\iff}$$
$$(a_1 \prec_1 b_1) \vee (a_1 = b_1 \ \wedge \ a_2 \prec_2 b_2) \vee (a_1 = b_1 \ \wedge \ a_2 = b_2 \ \wedge \ a_3 \prec_3 b_3)$$
$$\vee \cdots \vee (a_1 = b_1 \ \wedge \ a_2 = b_2 \ \wedge \cdots \wedge \ a_{n-1} = b_{n-1} \ \wedge \ a_n \preccurlyeq_n b_n)$$

kojeg zovemo **leksikografski uređaj** na $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

U slučaju da su svi $\preccurlyeq_i$ linearni uređaji, $\preccurlyeq_l$ je linearni uređaj na $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.34 (Riječi hrvatskog jezika).

Neka je $X = \{A, B, C, \check{C}, \acute{C}, D, \ldots, \check{Z}\}$ skup svih slova hrvatske abecede. Tada je, npr.

$$X^4 = X \times X \times X \times X$$

skup svih riječi (smislenih i besmislenih) od četiri slova. Na skupu X imamo linearni uređaj $\preccurlyeq$ zadan s

$$A \prec B \prec C \prec \check{C} \prec \acute{C} \prec \cdots \prec \check{Z}.$$

Na X^4 imamo leksikografski uređaj $\preccurlyeq_l$.
Na riječ od četiri slova možemo gledati kao na uređenu četvorku slova. Na primjer,

$$ELLA \rightsquigarrow (E, L, L, A)$$

$$\text{TINA}, \text{ELLA}, \text{MAJA}, \text{KATA}, \text{TONI}, \text{TOMI}, \text{TATA}, \text{MAMA} \in X^4$$

$$\text{ELLA} \prec_l \text{KATA} \prec_l \text{MAJA} \prec_l \text{MAMA} \prec_l \text{TATA} \prec_l \text{TOMI} \prec_l \text{TONI}$$

Ako označimo s $\mathcal{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ skup svih riječi (smislenih i besmislenih) koje se mogu dobiti pomoću slova hrvatske abecede, tada na $\mathcal{X}$ imamo leksikografski uređaj $\preccurlyeq_l$ tako da stavimo da je praznina (blank) manja od svih slova pa na taj način možemo uspoređivati riječi različitih duljina. Na primjer,

$$\text{MAJ} \prec_l \text{MAJA} \prec_l \text{VALERIJA} \prec_l \text{ZABOK}$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Isto tako, možemo razlikovati velika i mala slova, tj.

$$X = \{A, B, C, \ldots, \check{Z}, a, b, c, \ldots, \check{z}\}.$$

Ako skup X uredimo

$$A \prec B \prec C \prec \cdots \prec \check{Z} \prec a \prec b \prec c \prec \cdots \prec \check{z}$$

tada je, npr.

$$SAn \prec_l San \prec_l sAn \prec_l saN \prec_l san$$

$$Car \prec_l auTO \prec_l auto$$

Ako bismo skup X uredili

$$a \prec A \prec b \prec B \prec c \prec C \prec \cdots \prec \check{z} \prec \check{Z}$$

tada je

$$san \prec_l saN \prec_l sAn \prec_l San \prec_l SAn$$

$$auto \prec_l auTO \prec_l Car$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.35 (Kompleksni brojevi).

Znamo da standardni uređaj na skupu $\mathbb{R}$ ne možemo proširiti na skup $\mathbb{C}$ tako da taj uređaj i dalje ostane u skladu s operacijama zbrajanja i množenja kompleksnih brojeva. Naime, pitamo se što je sa brojem $i = \sqrt{-1}$. Da li je $i > 0$ ili je $i < 0$ (jer očito je $i \neq 0$). Kada bi bilo $i > 0$, onda bi (držeći se pravila da je produkt pozitivnih brojeva pozitivan broj) bilo

$$i \cdot i > 0, \text{ tj. } i^2 > 0, \text{ odnosno } -1 > 0$$

što je nemoguće. Kada bi bilo $i < 0$, onda bi trebalo biti $-i > 0$, a tada bi bilo

$$(-i) \cdot (-i) > 0, \text{ tj. } i^2 > 0, \text{ odnosno } -1 > 0$$

što je nemoguće.

Iz toga slijedi da i nije niti pozitivan niti negativan broj. To pokazuje da se u skupu $\mathbb{C}$ ne može uvesti uređaj koji bi bio u skladu sa zbrajanjem i množenjem kompleksnih brojeva. Stoga kažemo da kompleksne brojeve ne možemo uspoređivati po veličini.

Međutim, nije istina da ne možemo uopće uspoređivati kompleksne brojeve. Sjetimo se teorema o dobrom uređaju koji kaže da se svaki skup može dobro urediti, pa onda sigurno postoji i neki uređaj na $\mathbb{C}$ (koji ne mora nužno biti i dobar uređaj), a koji isto tako neće biti u skladu s operacijama zbrajanja i množenja (ali to ovdje nije sada važno, bitno je samo da na neki način možemo uspoređivati kompleksne brojeve).

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Jedan mogući uređaj na skupu $\mathbb{C}$ je leksikografski uređaj.

$$z_1 \preccurlyeq_l z_2 \overset{\text{def}}{\iff} \operatorname{Re} z_1 < \operatorname{Re} z_2 \ \vee \ \big(\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \ \wedge \ \operatorname{Im} z_1 \leqslant \operatorname{Im} z_2\big)$$

Na primjer

$$1+i \prec_l 2-2i, \quad 0 \prec_l i, \quad -1+3i \prec_l -1+5i$$

Dakle, u ovom uređaju je i pozitivan kompleksni broj, tj. $i \succ_l 0$. Međutim, $i^2 = -1$, pa je $i^2 \prec_l 0$. Dakle, $\preccurlyeq_l$ nije u skladu s operacijom množenja kompleksnih brojeva (produkt pozitivnih kompleksnih brojeva ne mora biti pozitivan kompleksni broj).

Hasseovi dijagrami

Neka je $(X, \preccurlyeq)$ konačni parcijalno uređen skup. Relaciju $\preccurlyeq$ možemo grafički prikazati u ravnini pomoću Hasseovog dijagrama na sljedeći način.
Sve elemente $x \in X$ prikažemo kao točke u ravnini. Nadalje, kažemo da element y pokriva element x ako je $x \prec y$ i između njih ne postoji niti jedan element $z \in X$, tj. vrijedi

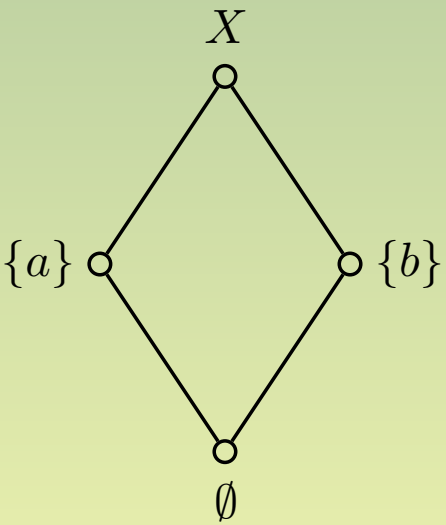
$$x \preccurlyeq z \preccurlyeq y \;\Rightarrow\; z = x \quad \vee \quad z = y.$$

Iz točke x povlačimo spojnicu do svake točke y koja pokriva x. Točke y crtamo iznad vodoravne razine točke x u ravnini. Sa Hasseovim dijagramom je relacija parcijalnog uređaja u potpunosti određena.

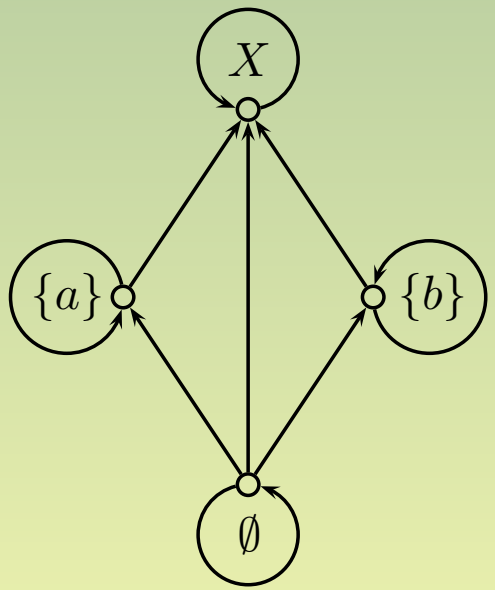
Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Ako za bilo koje točke $a, b \in X$ vrijedi $a \prec b$, onda na Hasseovom dijagramu to znači da je točka b iznad vodoravne razine točke a, i od a do b postoji **uzlazna** linija koja ih spaja.

$$X = \{a, b\},\ \left(\mathcal{P}(X), \subseteq\right)$$



Hasseov dijagram



Graf relacije

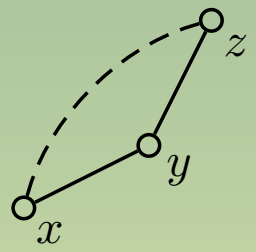
Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Napomena.

Hasseov dijagram služi za grafičko predočavanje relacije parcijalnog uređaja na konačnom skupu. Hasseov dijagram je puno jednostavniji od pripadnog grafa relacije zato jer uzima u obzir svojstva koja ima relacija parcijalnog uređaja. Relacija parcijalnog uređaja je refleksivna pa se onda u Hasseovom dijagramu ne crtaju petlje jer znamo da je svaki element u relaciji sam sa sobom $(x \preccurlyeq x,\ \forall x)$. Isto tako, relacija parcijalnog uređaja je tranzitivna, tj.

$$x \preccurlyeq y \quad \wedge \quad y \preccurlyeq z \quad \Rightarrow \quad x \preccurlyeq z$$

pa stoga ako spojimo x sa y i spojimo y sa z, onda ne treba posebno još spajati x sa z.



Dakle, u Hasseovom dijagramu ne smijemo nigdje direktno spojiti početak i kraj bilo koje uzlazne linije koja sadrži više od dva vrha. Isto tako, ne smijemo direktno spojiti dva elementa koji jesu u relaciji ako između njih postoji još neki element, nego onda moramo ubaciti taj element između njih. Još jednom, Hasseovi dijagrami služe samo za grafički prikaz relacije koja je parcijalni uređaj na konačnom skupu.

Primjer 3.36.

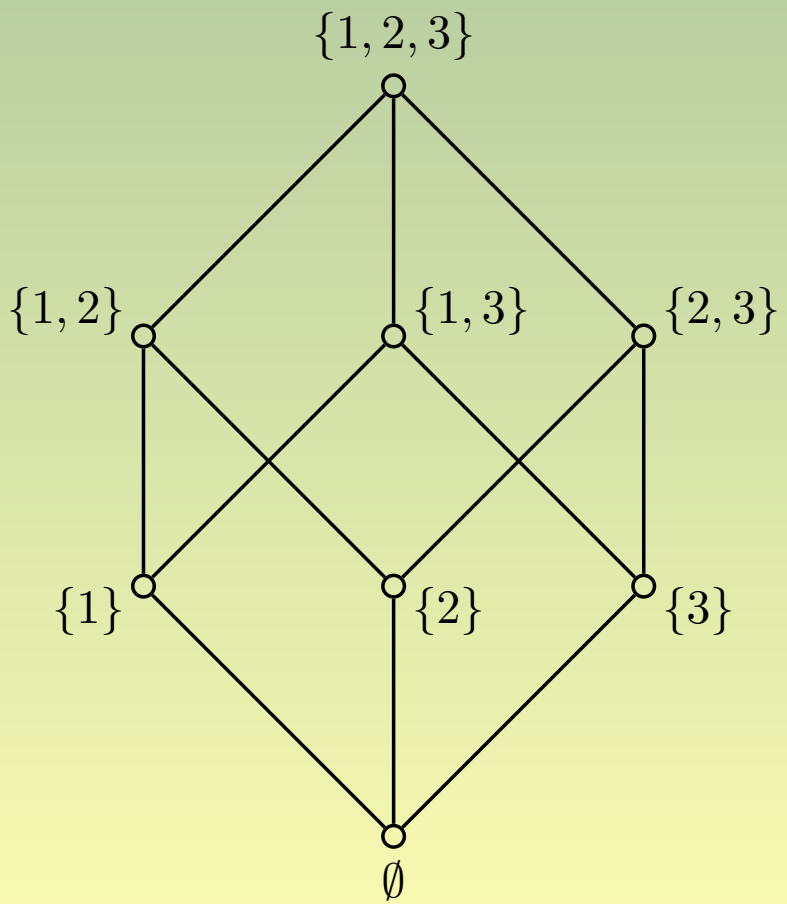
Nacrtajte Hasseov dijagram parcijalno uređenog skupa $\big(\mathcal{P}(X), \subseteq\big)$, *gdje je* $X = \{1, 2, 3\}$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.36.

Nacrtajte Hasseov dijagram parcijalno uređenog skupa $\big(\mathcal{P}(X), \subseteq\big)$, *gdje je* $X = \{1, 2, 3\}$.

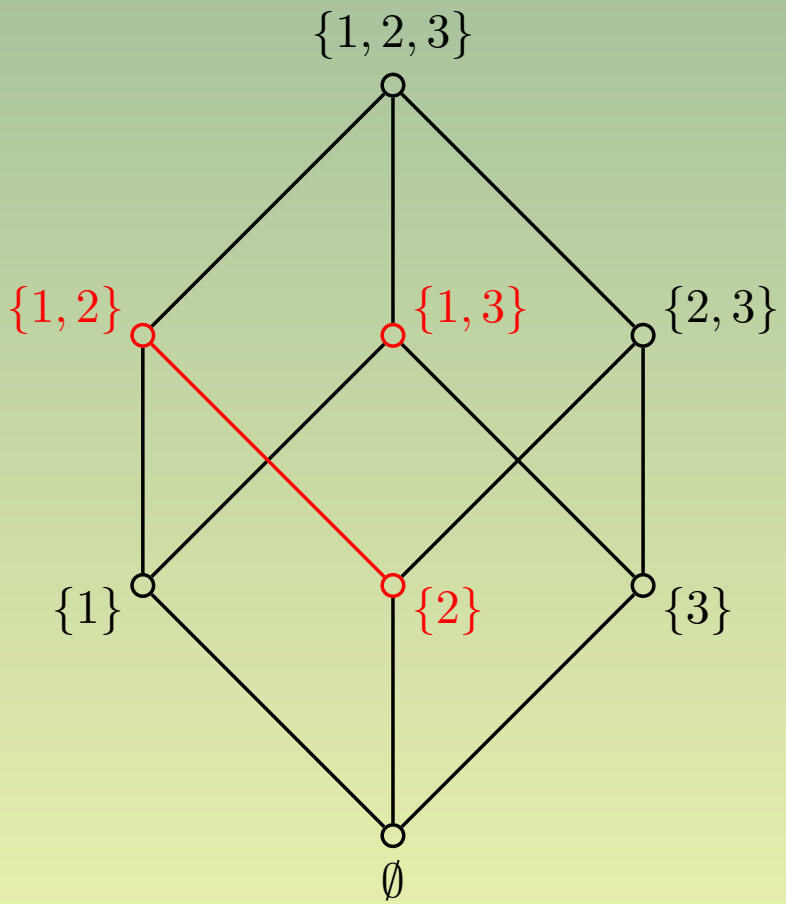
Rješenje.



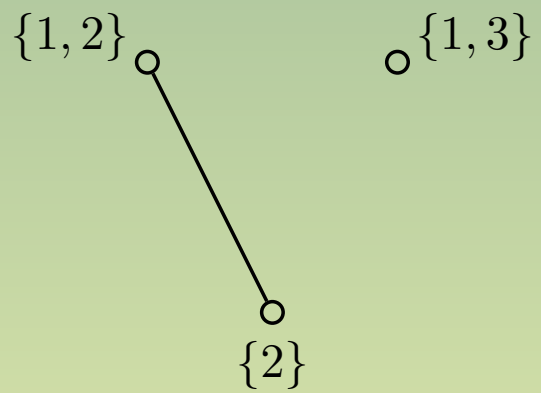
Sa slike lagano vidimo da je $\emptyset$ najmanji element u $\mathcal{P}(X)$ koji je ujedno i jedini minimalni element. Isto tako, $\{1, 2, 3\} = X$ je najveći element skupa $\mathcal{P}(X)$ koji je ujedno i jedini maksimalni element.

Pogledajmo još Hasseove dijagrame nekih podskupova od $\mathcal{P}(X)$.

$$S_1 = \{\{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$



Hasseov dijagram skupa S_1



$\inf S_1 = \emptyset, \qquad \nexists \min S_1$

$\sup S_1 = \{1,2,3\}, \qquad \nexists \max S_1$

Minimalni elementi od S_1:

$\{2\},\ \{1,3\}$

Maksimalni elementi od S_1:

$\{1,2\},\ \{1,3\}$

Relacije

Skupovi (ponavljanje)

Binarne relacije

Relacija ekvivalencije

Kardinalni broj

Relacije uređaja

Linearni i dobar uređaj

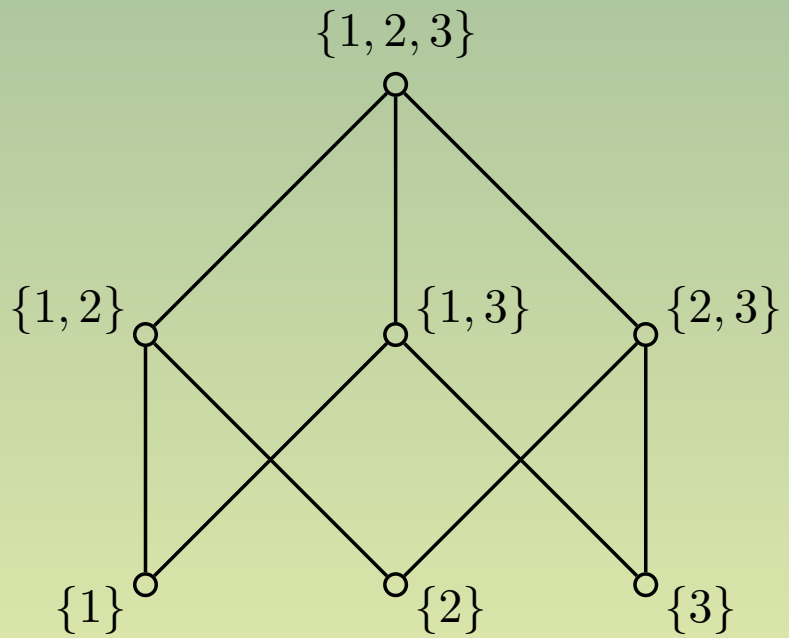
Primjeri uređaja

Uređaji na $A \times B$

Hasseovi dijagrami

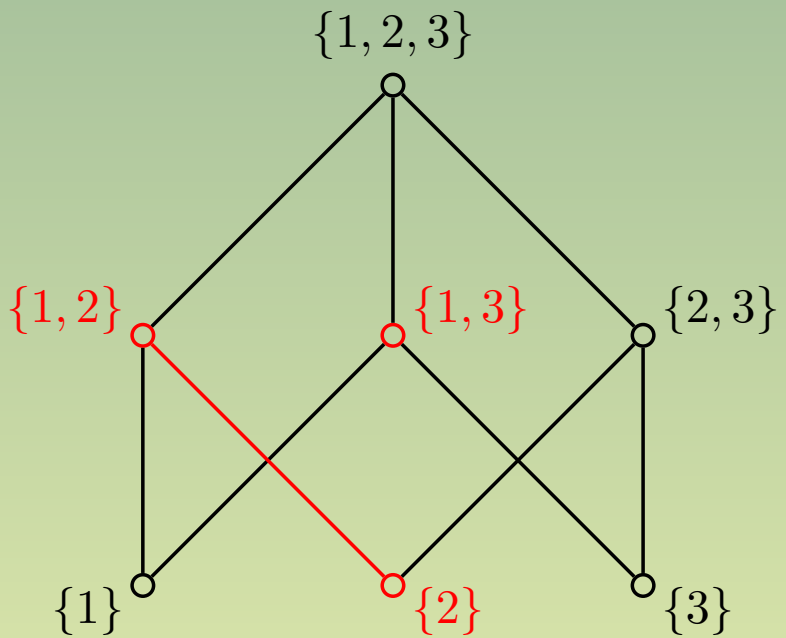
Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Hasseov dijagram skupa $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$

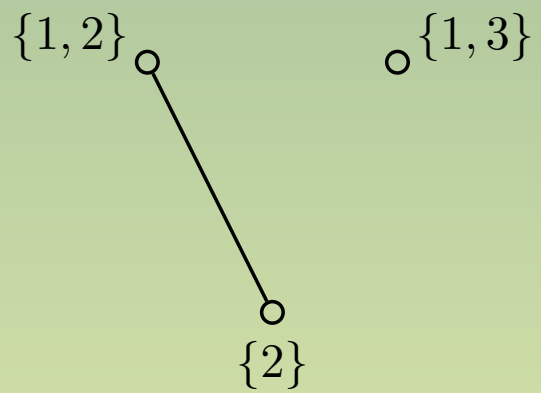


Skup $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ nema najmanji element, ali ima najveći element $\{1, 2, 3\}$ koji je ujedno i jedini njegov maksimalni element.
Minimalni elementi u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ su: $\{1\},\ \{2\},\ \{3\}$

$$S_1 = \{\{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}\} \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$$



Hasseov dijagram skupa S_1



S_1 nema niti jednu donju među u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$

$$\nexists \inf S_1, \quad \nexists \min S_1,$$
$$\sup S_1 = \{1,2,3\}, \quad \nexists \max S_1$$

Minimalni elementi od S_1:

$$\{2\},\ \{1,3\}$$

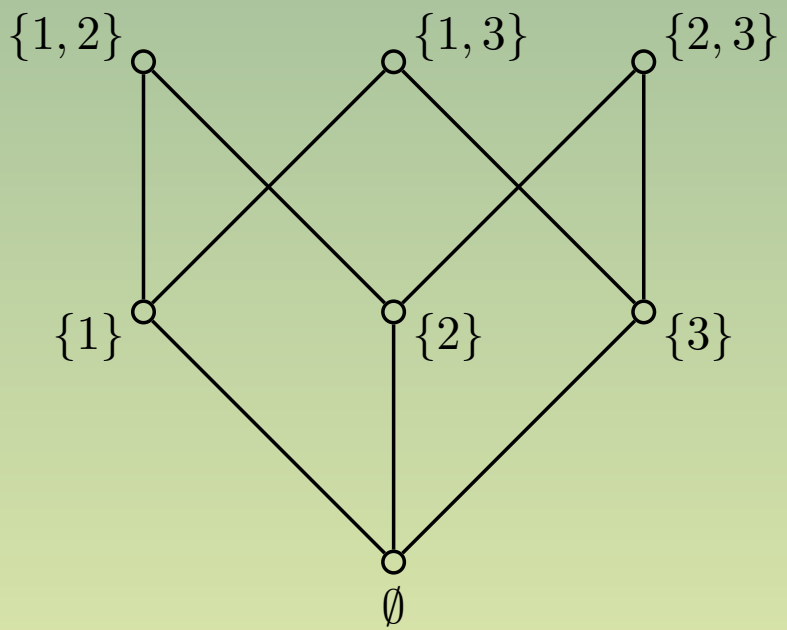
Maksimalni elementi od S_1:

$$\{1,2\},\ \{1,3\}$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Hasseov dijagram skupa $\mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$

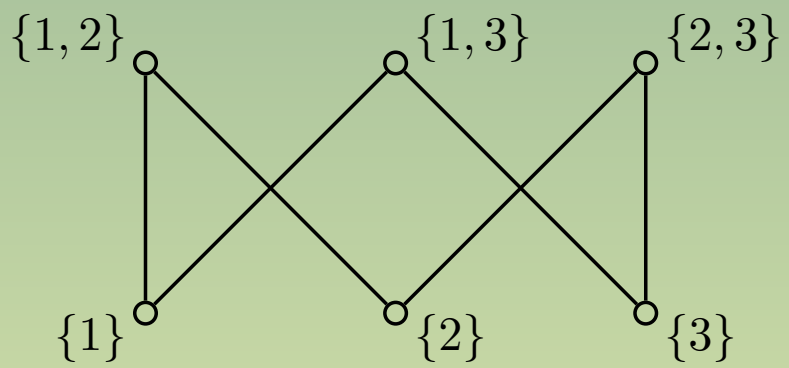


Skup $\mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$ nema najveći element, ali ima najmanji element $\emptyset$ koji je ujedno i jedini njegov minimalni element. Maksimalni elementi u $\mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$ su

$$\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\}$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Hasseov dijagram skupa $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$



Skup $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ nema najveći element, niti najmanji element. Minimalni elementi u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ su

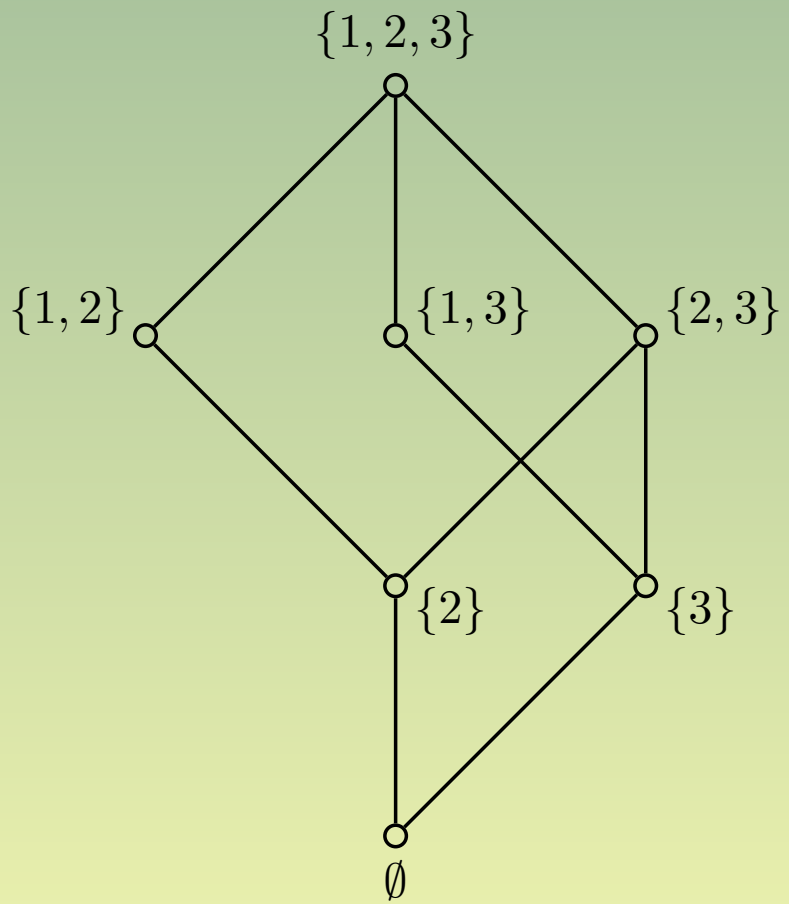
$$\{1\},\ \{2\},\ \{3\}$$

Maksimalni elementi u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ su

$$\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\}$$

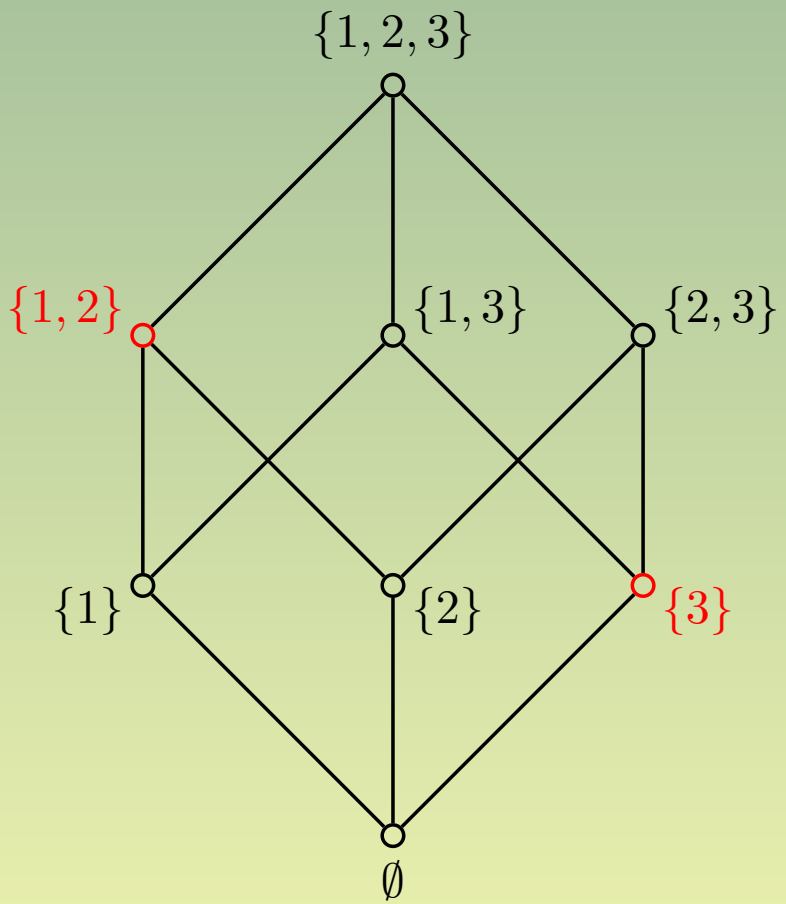
Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Hasseov dijagram skupa $\mathcal{P}(X) \setminus \{\{1\}\}$



$\emptyset$ je najmanji element u skupu $\mathcal{P}(X) \setminus \{\{1\}\}$, a $\{1, 2, 3\}$ je najveći element.

$$S_2 = \{\{3\}, \{1,2\}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$



Hasseov dijagram skupa S_2

$\{1,2\}$ $\circ$ $\quad$ $\circ$ $\{3\}$

$\inf S_2 = \emptyset, \quad \nexists \min S_2$

$\sup S_2 = \{1,2,3\}, \quad \nexists \max S_2$

Minimalni elementi od S_2:

$\{3\},\ \{1,2\}$

Maksimalni elementi od S_2:

$\{3\},\ \{1,2\}$

$\emptyset$ je jedina donja međa skupa S_2 u $\mathcal{P}(X)$

$\{1,2,3\}$ je jedina gornja međa skupa S_2 u $\mathcal{P}(X)$

Relacije

Skupovi (ponavljanje)

Binarne relacije

Relacija ekvivalencije

Kardinalni broj

Relacije uređaja

Linearni i dobar uređaj

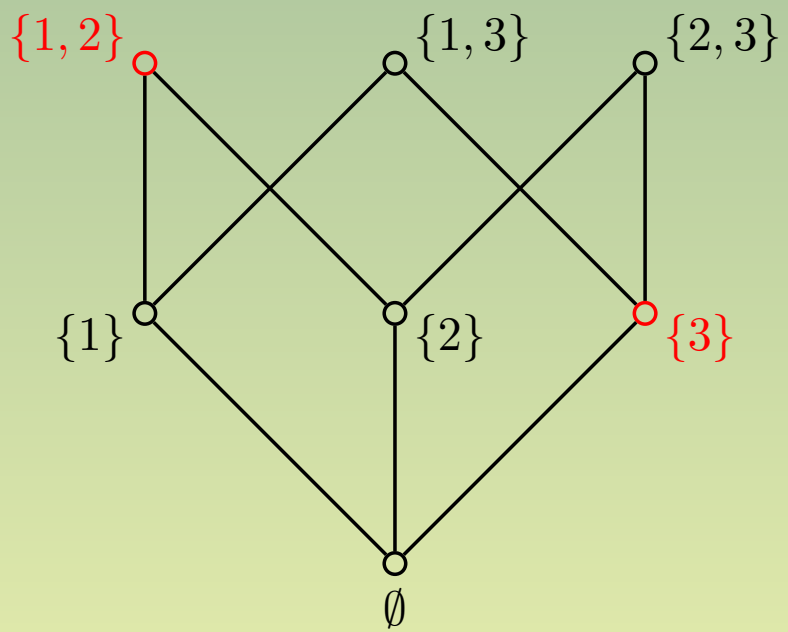
Primjeri uređaja

Uređaji na $A \times B$

Hasseovi dijagrami

$$S_2 = \{\{3\}, \{1,2\}\} \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$$

Hasseov dijagram skupa S_2



$\{1,2\}$ $\circ$ $\quad$ $\circ$ $\{3\}$

$\inf S_2 = \emptyset, \quad \nexists \min S_2$

$\nexists \sup S_2, \quad \nexists \max S_2$

Minimalni elementi od S_2:

$\{3\},\ \{1,2\}$

Maksimalni elementi od S_2:

$\{3\},\ \{1,2\}$

$\emptyset$ je jedina donja međa skupa S_2 u $\mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$

Skup S_2 nema niti jednu gornju među u $\mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$

Relacije

Skupovi (ponavljanje)

Binarne relacije

Relacija ekvivalencije

Kardinalni broj

Relacije uređaja

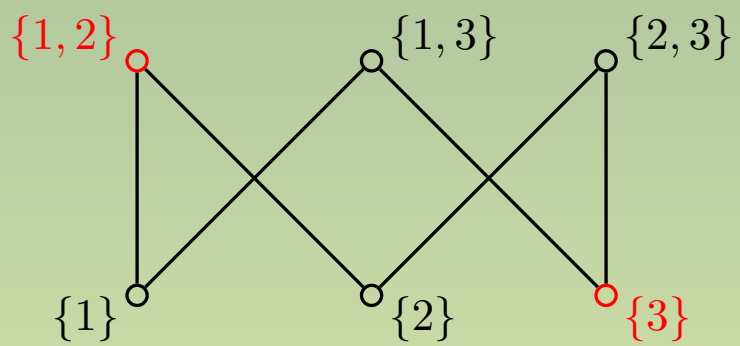
Linearni i dobar uređaj

Primjeri uređaja

Uređaji na $A \times B$

Hasseovi dijagrami

$$S_2 = \{\{3\}, \{1,2\}\} \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$$



Skup S_2 nema niti jednu donju među u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$

Skup S_2 nema niti jednu gornju među u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$

Hasseov dijagram skupa S_2



$\nexists \inf S_2, \quad \nexists \min S_2$

$\nexists \sup S_2, \quad \nexists \max S_2$

Minimalni elementi od S_2:

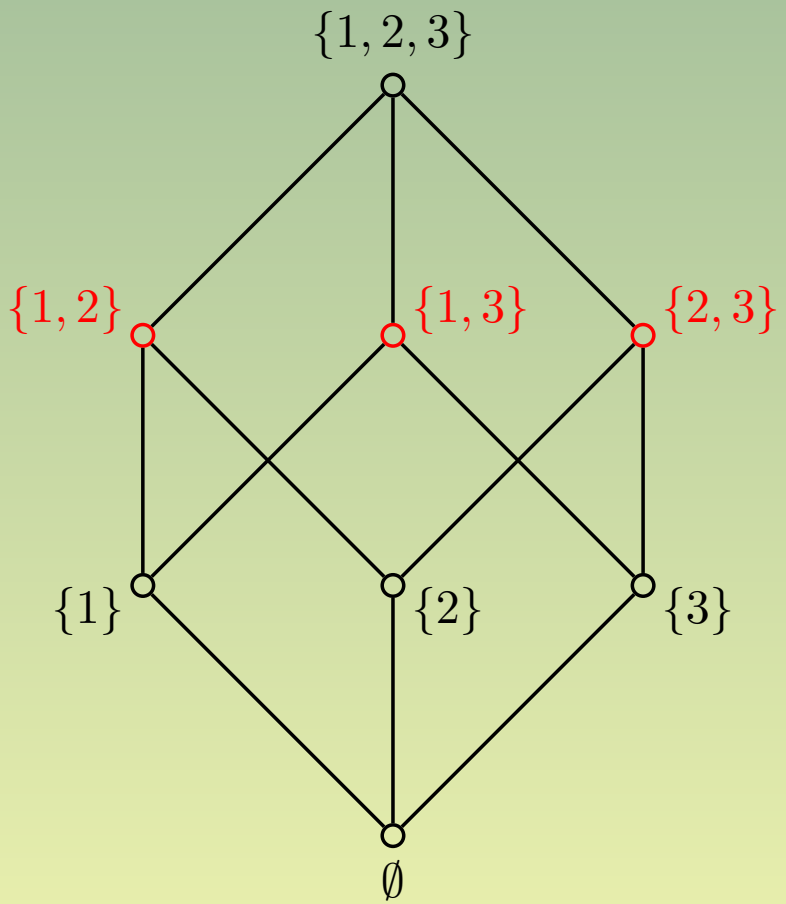
$\{3\},\ \{1,2\}$

Maksimalni elementi od S_2:

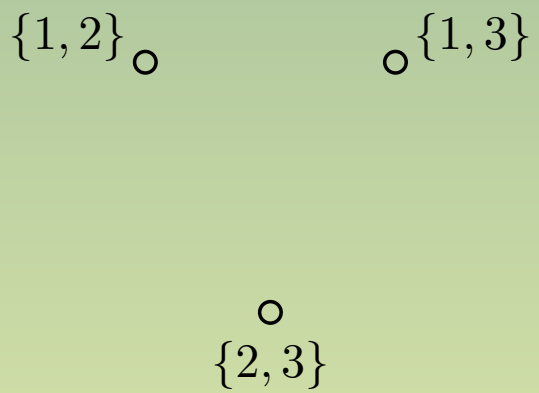
$\{3\},\ \{1,2\}$

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

$$S_3 = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$



Hasseov dijagram skupa S_3



$\inf S_3 = \emptyset, \qquad \nexists \min S_3$

$\sup S_3 = \{1,2,3\}, \qquad \nexists \max S_3$

Minimalni elementi od S_3:

$\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\}$

Maksimalni elementi od S_3:

$\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\}$

Relacije

Skupovi (ponavljanje)

Binarne relacije

Relacija ekvivalencije

Kardinalni broj

Relacije uređaja

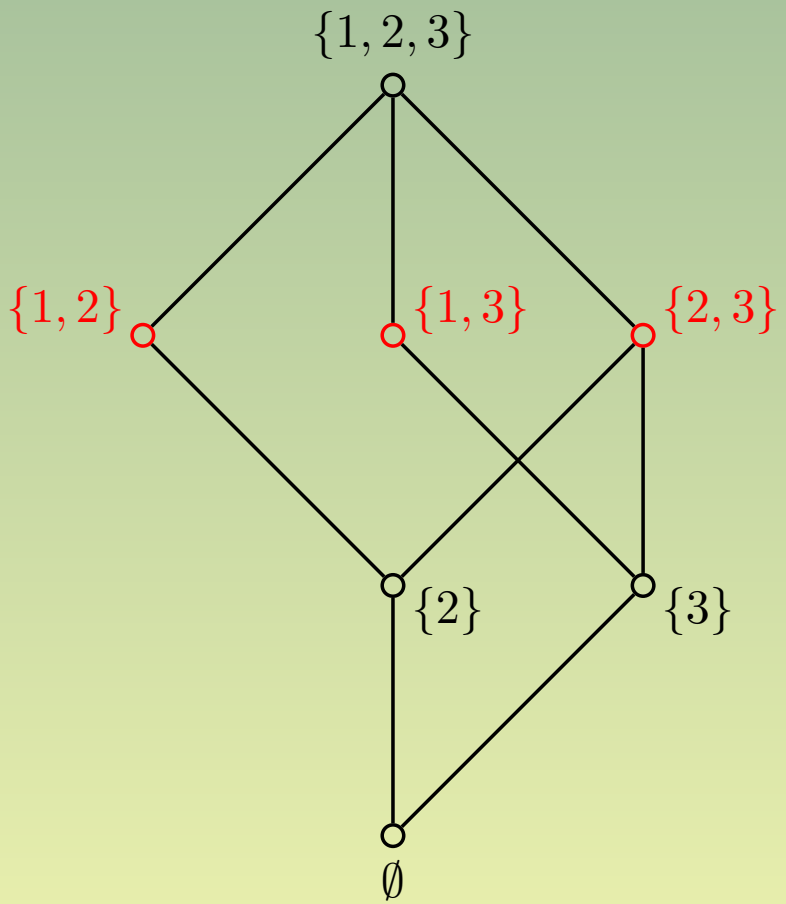
Linearni i dobar uređaj

Primjeri uređaja

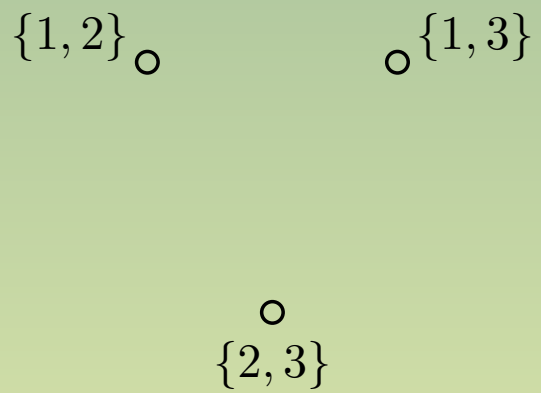
Uređaji na $A \times B$

Hasseovi dijagrami

$$S_3 = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\} \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\{1\}\}$$



Hasseov dijagram skupa S_3



$\inf S_3 = \emptyset, \qquad \nexists \min S_3$

$\sup S_3 = \{1,2,3\}, \qquad \nexists \max S_3$

Minimalni elementi od S_3:

$\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\}$

Maksimalni elementi od S_3:

$\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\}$

Relacije

Skupovi (ponavljanje)

Binarne relacije

Relacija ekvivalencije

Kardinalni broj

Relacije uređaja

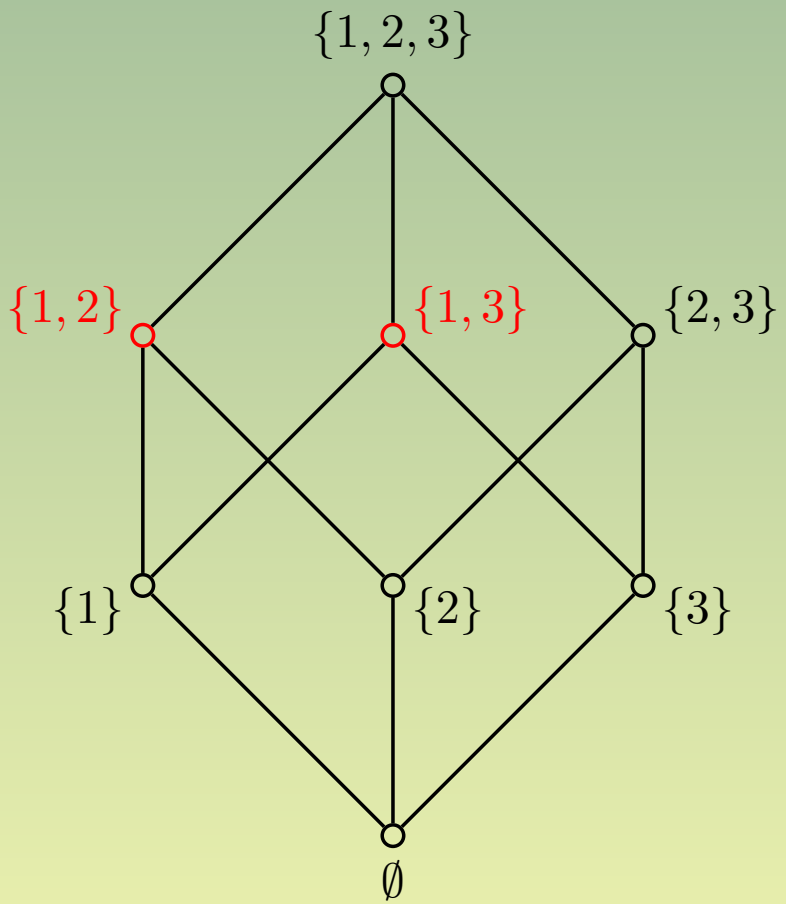
Linearni i dobar uređaj

Primjeri uređaja

Uređaji na $A \times B$

Hasseovi dijagrami

$$S_4 = \{\{1,2\},\{1,3\}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$



Hasseov dijagram skupa S_4

$\{1,2\}$ $\quad$ $\{1,3\}$

$\inf S_4 = \{1\}, \qquad \nexists \min S_4$

$\sup S_4 = \{1,2,3\}, \qquad \nexists \max S_4$

Minimalni elementi od S_4:

$\{1,2\},\ \{1,3\}$

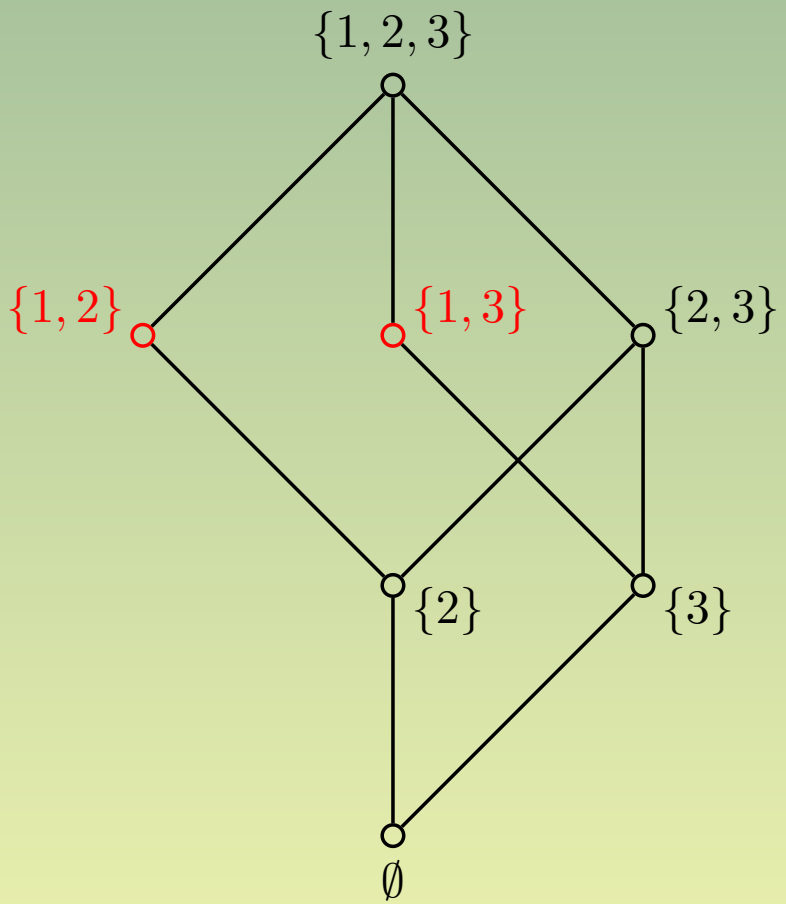
Maksimalni elementi od S_4:

$\{1,2\},\ \{1,3\}$

$\emptyset$ je donja međa skupa S_4 u $\mathcal{P}(X)$,
ali je $\{1\}$ najveća donja međa skupa S_4 u $\mathcal{P}(X)$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

$$S_4 = \{\{1,2\},\{1,3\}\} \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\{1\}\}$$



Hasseov dijagram skupa S_4



$\inf S_4 = \emptyset, \quad \nexists \min S_4$

$\sup S_4 = \{1,2,3\}, \quad \nexists \max S_4$

Minimalni elementi od S_4:

$\{1,2\},\ \{1,3\}$

Maksimalni elementi od S_4:

$\{1,2\},\ \{1,3\}$

Relacije

Skupovi (ponavljanje)

Binarne relacije

Relacija ekvivalencije

Kardinalni broj

Relacije uređaja

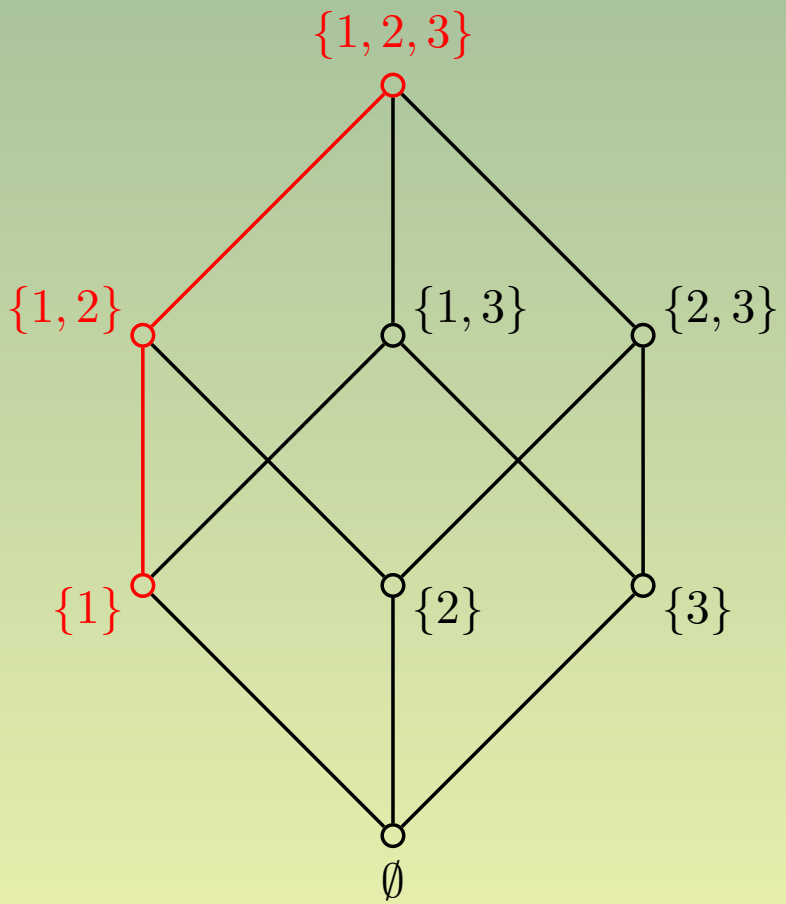
Linearni i dobar uređaj

Primjeri uređaja

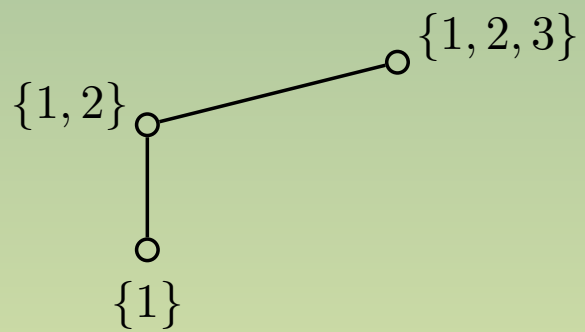
Uređaji na $A \times B$

Hasseovi dijagrami

$$S_5 = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$



Hasseov dijagram skupa S_5



$$\inf S_5 = \min S_5 = \{1\}$$
$$\sup S_5 = \max S_5 = \{1,2,3\}$$

Napomena.

Neka je $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ konačni linearno uređen skup s

$$a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_{n-1} \prec a_n.$$

Hasseov dijagram skupa X tada izgleda



Primjer 3.37.

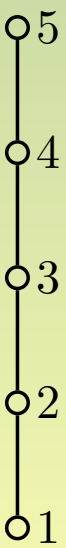
Nacrtajte Hasseov dijagram skupa $\left(\{1,2,3,4,5\},\leqslant\right)$ *gdje je* $\leqslant$ *standardni uređaj na* $\mathbb{R}$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.37.

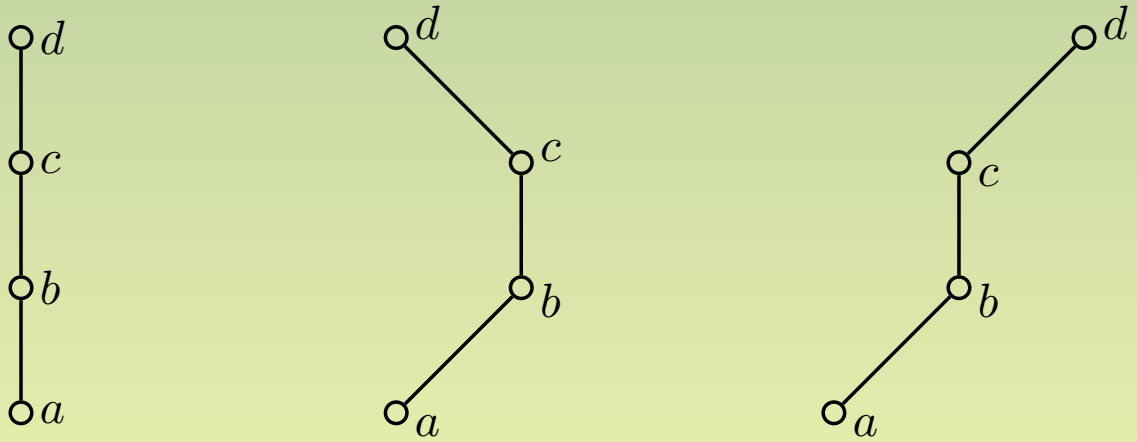
Nacrtajte Hasseov dijagram skupa $\left(\{1,2,3,4,5\}, \leqslant\right)$ *gdje je* $\leqslant$ *standardni uređaj na* $\mathbb{R}$.

Rješenje.



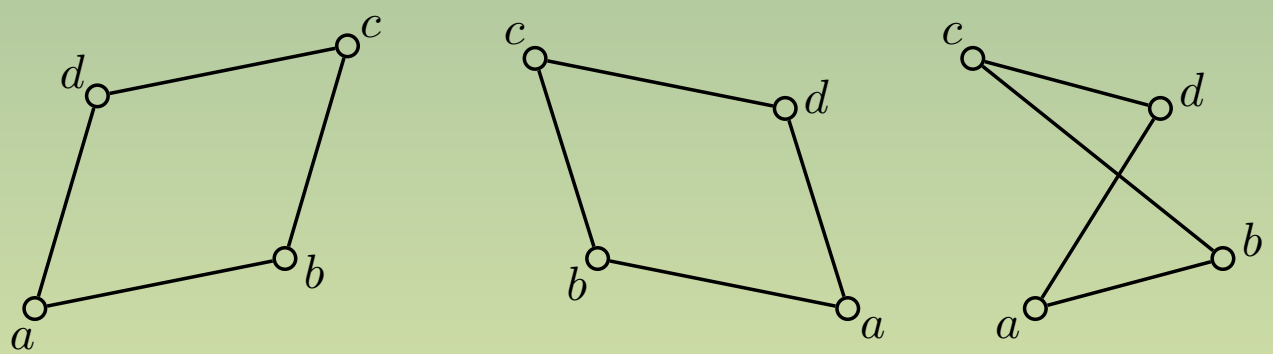
Napomena.

Treba biti oprezan kod crtanja Hasseovih dijagrama i imati na umu navedena pravila po kojima se crtaju Hasseovi dijagrami. Isto tako, Hasseov dijagram konačnog parcijalno uređenog skupa možemo nacrtati na više različitih načina ovisno o tome kako ćemo poredati točke u ravnini. Na primjer



su Hasseovi dijagrami istog parcijalno (u ovom slučaju linearno) uređenog skupa.

Isto tako,



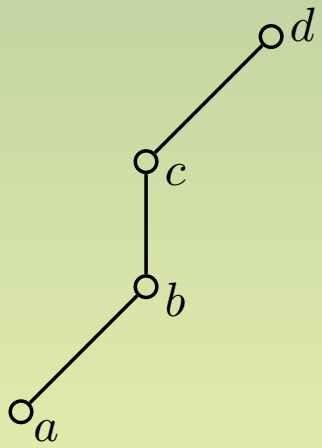
su Hasseovi dijagrami istog parcijalno uređenog skupa.
Uočite da elementi b i d nisu usporedivi jer ne postoji na Hasseovom dijagramu uzlazna linija od jednog elementa prema drugom. Nadalje, a je najmanji element, a c je najveći element.

Ponekad je problem nacrtati "lijepi" Hasseov dijagram.

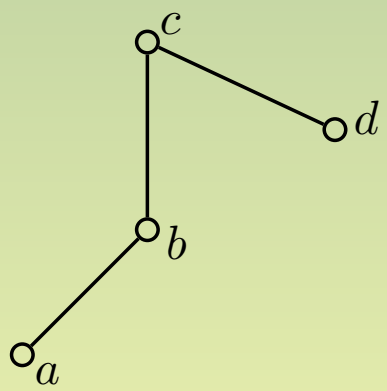
Napomena.

Sljedeći dijagrami jesu Hasseovi dijagrami, ali oni ne predstavljaju isti parcijalno uređeni skup

a)



b)



Pogledajmo da matrice incidencije nisu jednake.

a)

$x \setminus y$	a	b	c	d
a	1	1	1	1
b	0	1	1	1
c	0	0	1	1
d	0	0	0	1

- a je najmanji element (ujedno i minimalni)
- d je najveći element (ujedno i maksimalni)
- radi se o linearno uređenom skupu

b)

$x \setminus y$	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	1	1

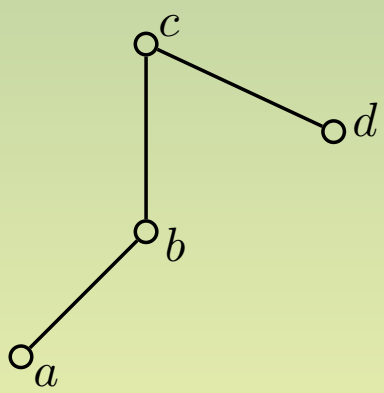
- nema najmanjeg elementa
- c je najveći element (ujedno i maksimalni)
- minimalni elementi su a i d
- nije linearno uređen skup jer, npr. a i d nisu usporedivi

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

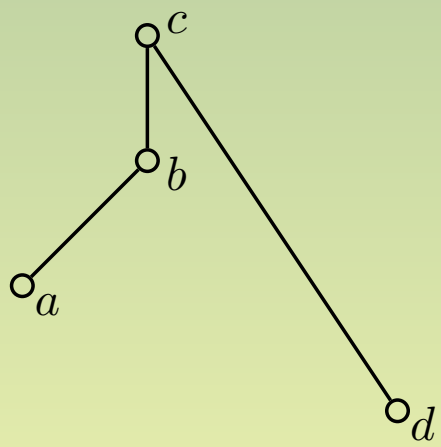
Napomena.

Sljedeći Hasseovi dijagrami predstavljaju isti parcijalno uređeni skup.

a)



b)



Pogledajmo da su matrice incidencije jednake.

a)

$x \setminus y$	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	1	1

b)

$x \setminus y$	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	1	1

Primjer 3.38 (Uređaj na kartezijevom produktu).

$$X_1 = \{1, 2\} \qquad X_2 = \{a, b\}$$

$$1 \preccurlyeq_1 2 \qquad a \preccurlyeq_2 b$$

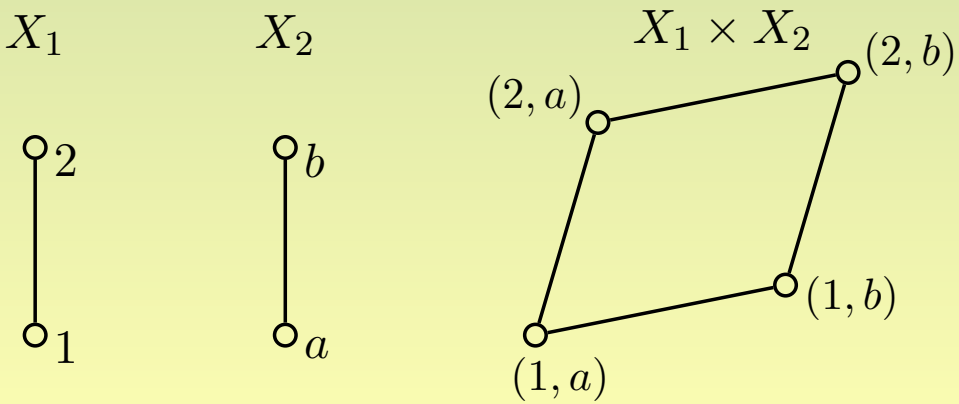
$$X_1 \times X_2 = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$$

$$(x_1, y_1) \preccurlyeq (x_2, y_2) \overset{\text{def}}{\iff} x_1 \preccurlyeq_1 x_2 \quad \wedge \quad y_1 \preccurlyeq_2 y_2$$

$(1, a) \preccurlyeq (1, b),\ (1, a) \preccurlyeq (2, a),\ (1, a) \preccurlyeq (2, b)$

$(1, b)$ i $(2, a)$ nisu usporedivi

$(1, b) \preccurlyeq (2, b),\ (2, a) \preccurlyeq (2, b)$



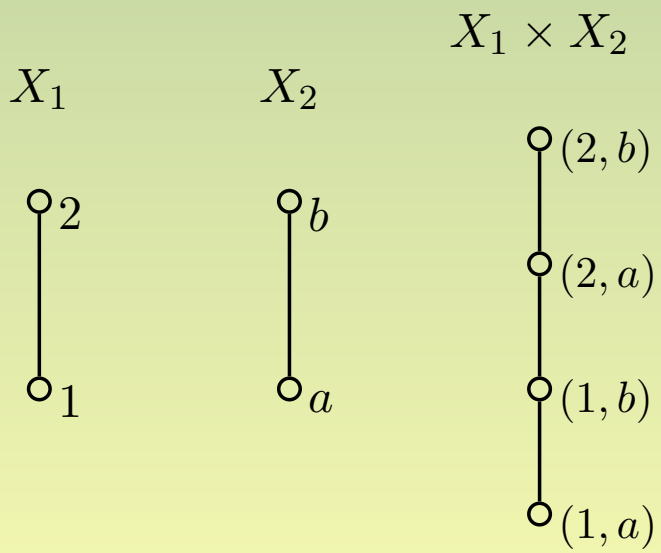
Primjer 3.39 (Leksikografski uređaj).

$$X_1 = \{1, 2\} \qquad X_2 = \{a, b\}$$

$$1 \preccurlyeq_1 2 \qquad a \preccurlyeq_2 b$$

$$X_1 \times X_2 = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$$

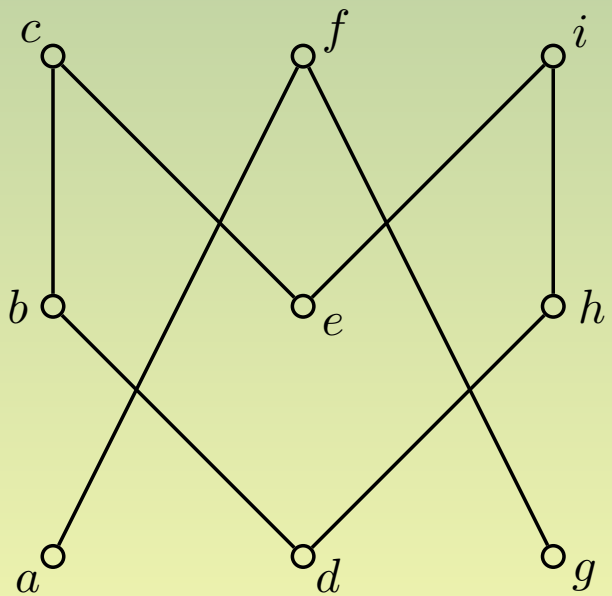
$$(x_1, y_1) \preccurlyeq_l (x_2, y_2) \overset{\text{def}}{\iff} x_1 \prec_1 x_2 \quad \vee \quad \big(x_1 = x_2 \ \wedge \ \ y_1 \preccurlyeq_2 y_2\big)$$



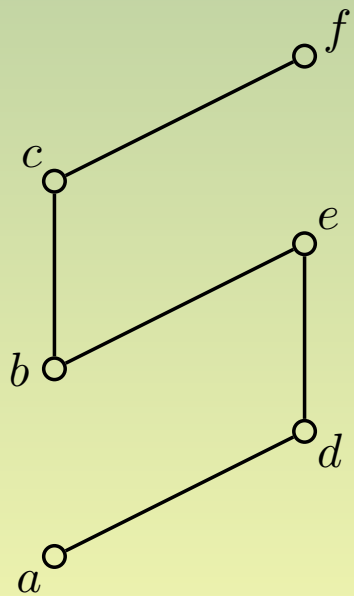
Primjer 3.40.

Ispišite elemente relacije parcijalnog uređaja $\preccurlyeq$ koja je zadana Hasseovim dijagramom. Također, odredite najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente.

a)



b)



Rješenje.

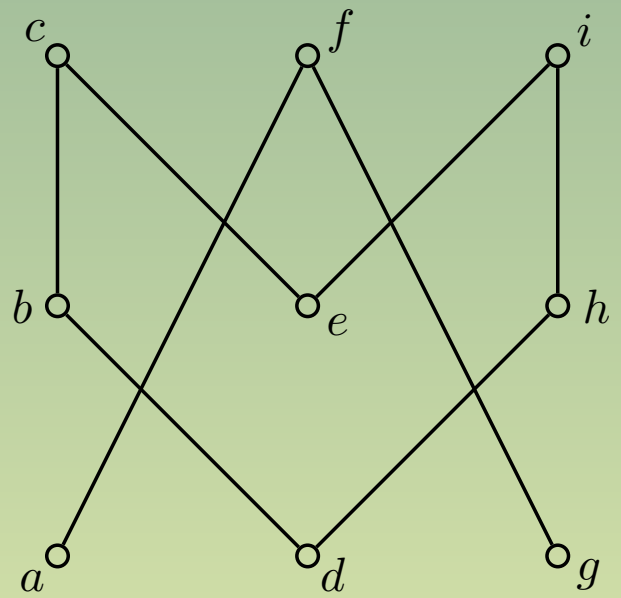
a) $\preccurlyeq = \{(a,a),(a,f),(b,b),(b,c),(c,c),(d,b),(d,c),(d,d),$
$(d,h),(d,i),(e,c),(e,e),(e,i),(f,f),(g,f),(g,g),$
$(h,h),(h,i),(i,i)\}$

- nema najvećeg, niti najmanjeg elementa
- minimalni elementi: a, d, e, g
- maksimalni elementi: c, f, i

b) $\preccurlyeq = \{(a,a),(a,d),(a,e),(b,b),(b,c),(b,e),(b,f),(c,c),$
$(c,f),(d,d),(d,e),(e,e),(f,f)\}$

- nema najvećeg, niti najmanjeg elementa
- minimalni elementi: a, b
- maksimalni elementi: e, f

Napomena.



$$\sup\{b,e\} = c, \quad \nexists \max\{b,e\}, \quad \nexists \inf\{b,e\}, \quad \nexists \min\{b,e\}$$

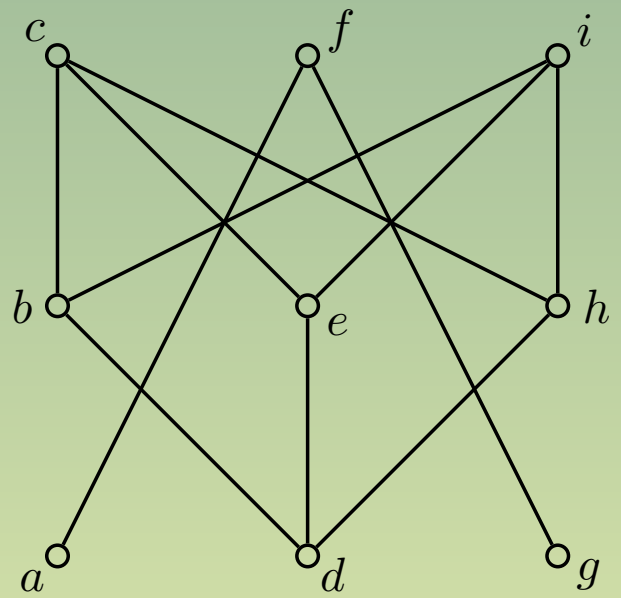
$\{b,e\}$ nema niti jednu donju među

c je jedina gornja međa skupa $\{b,e\}$

$$\nexists \inf\{b,e,h\}, \quad \nexists \sup\{b,e,h\}$$

$\{b,e,h\}$ nema niti jednu donju, niti gornju među

Napomena.



$$\nexists \sup\{b,e\}, \quad \nexists \max\{b,e\}, \quad \inf\{b,e\} = d, \quad \nexists \min\{b,e\}$$

$$\inf\{b,e,h\} = d, \quad \nexists \sup\{b,e,h\}$$

d je jedina donja međa skupa $\{b,e\}$ i skupa $\{b,e,h\}$

c i i su jedine gornje međe skupa $\{b,e\}$ i skupa $\{b,e,h\}$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Pitamo se zašto ne postoji supremum skupa $\{b, e\}$ iako on ima dvije gornje međe c i i. Naime, sjetimo se definicije supremuma. Supremum je po definiciji najmanja gornja međa. Drugim riječima, pogledamo sve gornje međe skupa $\{b, e\}$ i najmanja od njih je supremum tog skupa. Jedine gornje međe skupa $\{b, e\}$ su c i i pa bismo trebali uzeti manju od njih (najmanju), tj. tražimo $\min\{c, i\}$. Međutim, c i i nisu usporedivi pa ne postoji najmanja gornja međa, tj. ne postoji minimum skupa $\{c, i\}$ pa onda ne postoji supremum skupa $\{b, e\}$ (sjetimo se da najmanji element mora biti usporediv sa svima). Isto je objašnjenje za nepostojanje supremuma skupa $\{b, e, h\}$.

Primjer 3.41.

Neka je $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$. *Na skupu* A *definiramo relaciju* $\preccurlyeq$ *sa*

$$a \preccurlyeq b \overset{\text{def}}{\iff} \frac{a}{b} \in \mathbb{N}.$$

a. *Dokažite da je* $\preccurlyeq$ *parcijalni uređaj na* A.

b. *Nacrtajte Hasseov dijagram od* $\preccurlyeq$.

c. *Pronađite najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente skupa* A.

d. *Da li je* $\preccurlyeq$ *linearni uređaj na* A? *Objasnite!*

Rješenje.

i. Refleksivnost

$$\frac{a}{a} = 1 \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; a \preccurlyeq a$$

ii. Antisimetričnost

$$a \preccurlyeq b \;\wedge\; b \preccurlyeq a \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} \in \mathbb{N} \;\wedge\; \frac{b}{a} \in \mathbb{N}$$

$$\underbrace{\frac{a}{b}}_{\in \mathbb{N}} \cdot \underbrace{\frac{b}{a}}_{\in \mathbb{N}} = 1, \quad a, b \in A \;\Rightarrow\; a = b$$

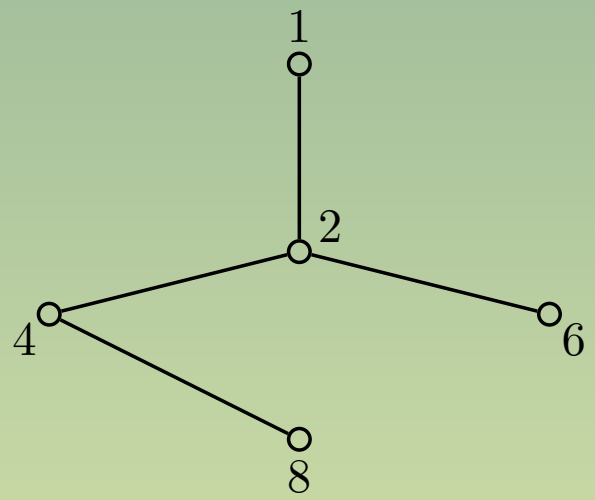
iii. Tranzitivnost

$$a \preccurlyeq b,\; b \preccurlyeq c \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} \in \mathbb{N},\; \frac{b}{c} \in \mathbb{N} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \frac{a}{c} \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; a \preccurlyeq c$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

$x \setminus y$	1	2	4	6	8
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
4	1	1	1	0	0
6	1	1	0	1	0
8	1	1	1	0	1



- ne postoji najmanji element
- najveći element je 1
- maksimalni element je 1
- minimalni elementi: $8, 6$

$\not\asymp$ nije linearni uređaj na A jer, npr. elementi 6 i 8 nisu usporedivi. Isto tako, elementi 4 i 6 nisu usporedivi.

Zadatak 3.9.

a. *Navedite primjer parcijalno uređenog skupa koji ima najveći i najmanji element, ali nije linearno uređen.*

b. *Navedite primjer linearno uređenog skupa koji nema niti najmanji, niti najveći element.*

Teorem 3.7 (Zornova lema).

Svaki neprazni parcijalno uređeni skup u kojemu svaki lanac (linearno uređen podskup) ima gornju među, sadrži barem jedan maksimalni element.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Dio IV

Skup cijelih brojeva

Sadržaj

- Skup cijelih brojeva
  - Djeljivost cijelih brojeva
  - Euklidov algoritam
  - Mreže
  - Prosti brojevi
  - Eratostenovo sito
  - Kongruencije
  - Rješavanje kongruencija
  - Eulerov teorem
  - Primitivni korijeni
  - Određivanje brojeva preko ostataka
  - RSA kriptosustav
  - ISBN
  - UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Djeljivost cijelih brojeva

Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Kažemo da a dijeli b (ili da je b djeljiv s a) ako postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $b = ak$. Pišemo, $a \mid b$.

Definicija djeljivosti

$$a \mid b \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \exists\, k \in \mathbb{Z},\ b = ak$$

Kažemo još da je a **djelitelj** od b ili da je b **višekratnik** od a.

U slučaju da a ne dijeli b (ili da b nije djeljiv s a) pišemo $a \nmid b$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Teorem 4.1 (Teorem o dijeljenju s ostatkom).

Za proizvoljni prirodni broj $a \in \mathbb{N}$ i $b \in \mathbb{Z}$ postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je

$$b = qa + r, \quad 0 \leqslant r < a.$$

Dokaz.

egzistencija

Promotrimo skup $S = \{b - at : t \in \mathbb{Z}\}$. Najmanji nenegativni član ovog skupa označimo sa r (takav postoji jer je $\mathbb{N} \cup \{0\}$ dobro uređen skup uz standardni uređaj). Tada je $r = b - at_0$ za neki $t_0 \in \mathbb{Z}$. Tvrdimo da je $0 \leqslant r < a$. Po pretpostavci je $r \geqslant 0$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Kada bi bilo $r \geqslant a$, tada bi bilo $r - a \geqslant 0$, a kako je $r - a = b - a(t_0 + 1)$, slijedilo bi da je $r - a \in S$. S druge strane, $a > 0$ po pretpostavci teorema, pa slijedi da je $r - a$ nenegativni broj iz S koji je manji od r, što je kontradikcija s minimalnošću broja r. Dakle, zaista je $r < a$. Stavimo li $q = t_0$ dobivamo da je $b = qa + r$, $0 \leqslant r < a$.

jedinstvenost

Pretpostavimo da postoje cijeli brojevi q_1, q_2, r_1, r_2 takvi da je

$$b = q_1 a + r_1, \quad 0 \leqslant r_1 < a \qquad (*)$$

$$b = q_2 a + r_2, \quad 0 \leqslant r_2 < a \qquad (**)$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Pretpostavimo da je $r_1 \neq r_2$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $r_1 < r_2$. Tada je

$$0 < r_2 - r_1 < a. \qquad (\clubsuit)$$

Nadalje, ako od $(**)$ oduzmemo $(*)$, dobivamo

$$0 < r_2 - r_1 = a \underbrace{(q_2 - q_1)}_{\in \mathbb{N}} \geqslant a$$

što je kontradikcija s $(\clubsuit)$. Dakle, mora biti $r_1 = r_2$, a iz toga onda slijedi da je i $q_1 = q_2$. $\heartsuit$

Vrijedi i općenitiji teorem.

Teorem 4.2.

Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. *Tada postoje jedinstveni cijeli brojevi* q *i* r *takvi da je*

$$b = qa + r, \quad 0 \leqslant r < |a|.$$

Dokaz.

Treba još samo dokazati slučaj kada je $a < 0$. Sve ostalo je pokazano u prethodnom teoremu. Ako je $a < 0$, tada je $-a > 0$ pa na brojeve b i $-a$ možemo primijeniti prethodni teorem. Dakle, postoje jedinstveni cijeli brojevi q_1 i r_1 takvi da je

$$b = q_1 \cdot (-a) + r_1, \quad 0 \leqslant r_1 < -a = |a|,$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

odnosno

$$b = -q_1 \cdot a + r_1, \quad 0 \leqslant r_1 < |a|.$$

Stavimo $q = -q_1$, $r = r_1$ i dobivamo traženu tvrdnju. ♡

Napomena.

Ako su $a, b \in \mathbb{N}$, tada su $q, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$b = \underset{\text{KVOCIJENT}}{\uparrow} qa + \underset{\text{OSTATAK}}{\uparrow} r, \quad 0 \leqslant r < a$$

Cjelobrojne funkcije

Najveće cijelo od x, "pod" od x

$$\lfloor x \rfloor = \text{najveći cijeli broj koji je} \leqslant x$$

$$\lfloor 2 \rfloor = 2,\ \lfloor -2 \rfloor = -2,\ \lfloor 3.46 \rfloor = 3,\ \lfloor 3.871 \rfloor = 3,$$
$$\lfloor -3.46 \rfloor = -4,\ \lfloor \pi \rfloor = 3,\ \lfloor e \rfloor = 2,\ \lfloor -3.871 \rfloor = -4$$

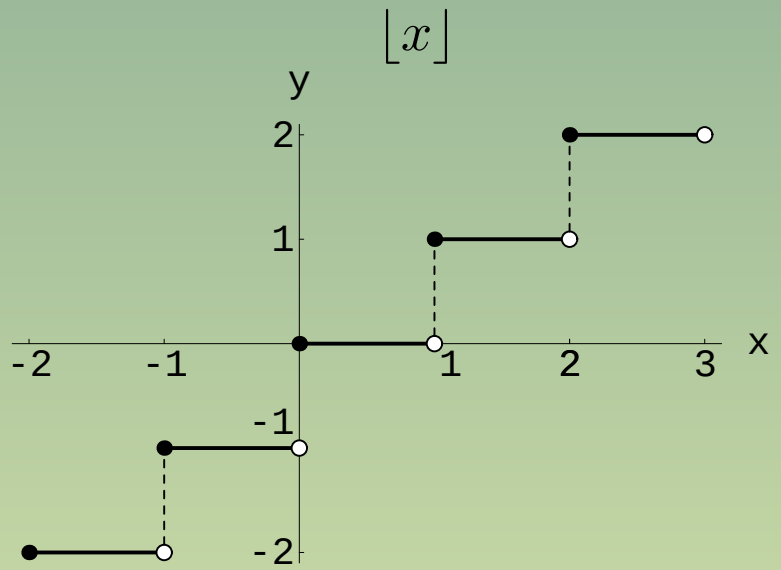
Najmanje cijelo od x, "strop" od x

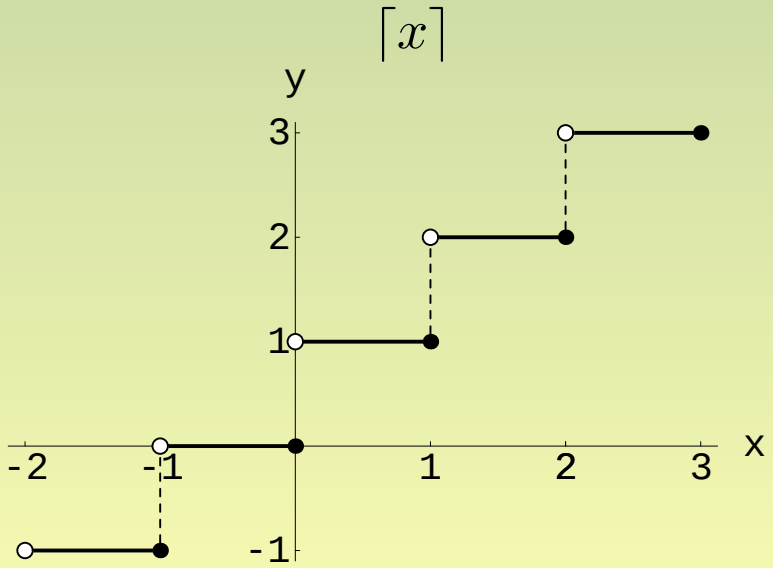
$$\lceil x \rceil = \text{najmanji cijeli broj koji je} \geqslant x$$

$$\lceil 2 \rceil = 2,\ \lceil -2 \rceil = -2,\ \lceil 3.46 \rceil = 4,\ \lceil 3.871 \rceil = 4,$$
$$\lceil -3.46 \rceil = -3,\ \lceil \pi \rceil = 4,\ \lceil e \rceil = 3,\ \lceil -3.871 \rceil = -3$$

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil, \quad \lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC





Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Propozicija 4.1.

Ako je $a = qb + r, \quad 0 \leqslant r < |b|$, *tada je*

$$q = \begin{cases} \lfloor \frac{a}{b} \rfloor, & \text{ako je } b > 0 \\ \lceil \frac{a}{b} \rceil, & \text{ako je } b < 0 \end{cases}$$

Dokaz.

Pogledajmo prvo slučaj $b > 0$. Iz definicije slijedi da je

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Stavimo $x = \frac{a}{b}$ pa dobivamo

$$\frac{a}{b} - 1 < \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \leqslant \frac{a}{b}$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

odnosno nakon množenja sa b $(b > 0)$

$$a - b < \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor b \leqslant a \;\Big/ \cdot (-1)$$

$$-a + b > -\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor b \geqslant -a \;\Big/ + a$$

$$b > a - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor b \geqslant 0$$

Stavimo li $r = a - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor b$, slijedi da je

$$a = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor b + r, \quad 0 \leqslant r < b.$$

Zbog jedinstvenosti od q slijedi da je $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Pogledajmo još slučaj kada je $b < 0$. Tada je $-b > 0$ i prema upravo dokazanom dijelu za brojeve a i $-b$ vrijedi

$$a = \left\lfloor \frac{a}{-b} \right\rfloor \cdot (-b) + r, \quad 0 \leqslant r < -b = |b|.$$

Dakle,

$$a = \left\lfloor \frac{a}{-b} \right\rfloor \cdot (-b) + r$$

$$a = -\left\lfloor -\frac{a}{b} \right\rfloor \cdot b + r$$

$$a = \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil \cdot b + r$$

gdje smo iskoristili da vrijedi $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$. ♡

Primjer 4.1.

Pronađite kvocijent i ostatak pri dijeljenju cijelog broja a sa cijelim brojem $b \neq 0$ ako je

a) $a = 500,\ b = 17$

b) $a = -500,\ b = 17$

c) $a = 500,\ b = -17$

d) $a = -500,\ b = -17$

e) $a = 17,\ b = 500$

f) $a = -17,\ b = 500$

g) $a = 17,\ b = -500$

h) $a = -17,\ b = -500$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.1.

Pronađite kvocijent i ostatak pri dijeljenju cijelog broja a sa cijelim brojem $b \neq 0$ ako je

a) $a = 500,\ b = 17$
b) $a = -500,\ b = 17$
c) $a = 500,\ b = -17$
d) $a = -500,\ b = -17$
e) $a = 17,\ b = 500$
f) $a = -17,\ b = 500$
g) $a = 17,\ b = -500$
h) $a = -17,\ b = -500$

Rješenje.

a) $q = \left\lfloor \frac{500}{17} \right\rfloor = \lfloor 29.41\cdots \rfloor = 29$

$r = a - qb = 500 - 29 \cdot 17 = 7$

$$\begin{array}{ccccccc} 500 & = & 29 & \cdot & 17 & + & 7 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ a & & q & & b & & r \end{array}$$

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

b) $q = \left\lfloor \frac{-500}{17} \right\rfloor = \lfloor -29.41\cdots \rfloor = -30$

$r = a - qb = -500 - (-30) \cdot 17 = 10$

$$\begin{array}{ccccccc} -500 & = & -30 & \cdot & 17 & + & 10 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ a & & q & & b & & r \end{array}$$

c) $q = \left\lceil \frac{500}{-17} \right\rceil = \lceil -29.41\cdots \rceil = -29$

$r = a - qb = 500 - (-29) \cdot (-17) = 7$

$$\begin{array}{ccccccc} 500 & = & -29 & \cdot & (-17) & + & 7 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ a & & q & & b & & r \end{array}$$

d) $q = \left\lceil \frac{-500}{-17} \right\rceil = \lceil 29.41\cdots \rceil = 30$

$r = a - qb = -500 - 30 \cdot (-17) = 10$

$$\begin{array}{ccccccc} -500 & = & 30 & \cdot & (-17) & + & 10 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ a & & q & & b & & r \end{array}$$

e) $q = \left\lfloor \frac{17}{500} \right\rfloor = \lfloor 0.03\cdots \rfloor = 0$

$r = a - qb = 17 - 0 \cdot 500 = 17$

$$\begin{array}{ccccccc} 17 & = & 0 & \cdot & 500 & + & 17 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ a & & q & & b & & r \end{array}$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Skup cijelih brojeva

Djeljivost

Euklidov algoritam

Mreže

Prosti brojevi

Eratostenovo sito

Kongruencije

Rješavanje kongruencija

Eulerov teorem

Primitivni korijeni

Brojevi preko ostataka

RSA kriptosustav

ISBN

UPC

f) $q = \left\lfloor \frac{-17}{500} \right\rfloor = \lfloor -0.03\cdots \rfloor = -1$

$r = a - qb = -17 - (-1)\cdot 500 = 483$

$$\begin{array}{ccccccc} -17 & = & -1 & \cdot & 500 & + & 483 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ a & & q & & b & & r \end{array}$$

g) $q = \left\lceil \frac{17}{-500} \right\rceil = \lceil -0.03\cdots \rceil = 0$

$r = a - qb = 17 - 0\cdot(-500) = 17$

$$\begin{array}{ccccccc} 17 & = & 0 & \cdot & (-500) & + & 17 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ a & & q & & b & & r \end{array}$$

h) $q = \left\lceil \frac{-17}{-500} \right\rceil = \lceil 0.03\cdots \rceil = 1$

$r = a - qb = -17 - 1\cdot(-500) = 483$

$$\begin{array}{ccccccc} -17 & = & 1 & \cdot & (-500) & + & 483 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ a & & q & & b & & r \end{array}$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Konačno, stavimo sve dobivene rezultate u jednu tablicu.

Usporedite dobivene rezultate.

a	b	q	r
500	17	29	7
-500	17	-30	10
500	-17	-29	7
-500	-17	30	10
17	500	0	17
-17	500	-1	483
17	-500	0	17
-17	-500	1	483

Propozicija 4.2.

Neka su a, b i c cijeli brojevi takvi da $c \mid a$ i $c \mid b$. Tada $c \mid ka + lb$ za bilo koje cijele brojeve k i l.

Dokaz.

$$c \mid a \;\Rightarrow\; \exists q_1 \in \mathbb{Z},\; a = q_1 c$$

$$c \mid b \;\Rightarrow\; \exists q_2 \in \mathbb{Z},\; b = q_2 c$$

$$ka + lb = k\big(q_1 c\big) + l\big(q_2 c\big) = \big(kq_1\big)c + \big(lq_2\big)c =$$
$$= \big(\underbrace{kq_1 + lq_2}_{\in \mathbb{Z}}\big)c$$

Dakle, $c \mid ka + lb$. ♡

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Propozicija 4.3.

$(\mathbb{N}, |\ )$ *je parcijalno uređen skup.*

Dokaz.

Treba dokazati da je $|$ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija na skupu $\mathbb{N}$.

i. Refleksivnost

   Za $a \in \mathbb{N}$ vrijedi $a = 1 \cdot a$ iz čega slijedi $a \mid a$.

ii. Antisimetričnost

   Neka su $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da $a \mid b$ i $b \mid a$.

   $$a \mid b \ \Rightarrow\ \exists q_1 \in \mathbb{N},\ b = q_1 a$$
   $$b \mid a \ \Rightarrow\ \exists q_2 \in \mathbb{N},\ a = q_2 b$$

   Sada imamo

$$b = q_1 a = q_1 \big(q_2 b\big) = \big(q_1 q_2\big) b$$

Kako je $b \neq 0$, slijedi da je $q_1 q_2 = 1$, a kako su $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$, slijedi da je $q_1 = q_2 = 1$. Stoga je $a = b$.

- Tranzitivnost

  Neka su $a, b, c \in \mathbb{N}$ takvi da $a \mid b$ i $b \mid c$.

  $a \mid b \;\Rightarrow\; \exists q_1 \in \mathbb{N},\; b = q_1 a$

  $b \mid c \;\Rightarrow\; \exists q_2 \in \mathbb{N},\; c = q_2 b$

  Sada je

  $$c = q_2 b = q_2 \big(q_1 a\big) = \big(q_1 q_2\big) a$$

  pa slijedi da $a \mid c$.



Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Korolar 4.1.

Neka je $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$. *Tada je* $(A, |\ )$ *parcijalno uređen skup.*

Dokaz.

Svaki neprazni podskup parcijalno uređenog skupa je također parcijalno uređen skup s obzirom na isti parcijalni uređaj koji je definiran na većem skupu.

Prema prethodnom teoremu je $(\mathbb{N}, |\ )$ parcijalno uređen skup, a kako je $A \subseteq \mathbb{N}$, onda je i $(A, |\ )$ parcijalno uređen skup. ♡

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Napomena.

$(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, |\ )$ nije parcijalno uređen skup. Naime, relacija $|$ nije antisimetrična na skupu $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ jer, npr.

$$-10 \mid 10 \quad \text{i} \quad 10 \mid -10$$

ali je $-10 \neq 10$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.2.

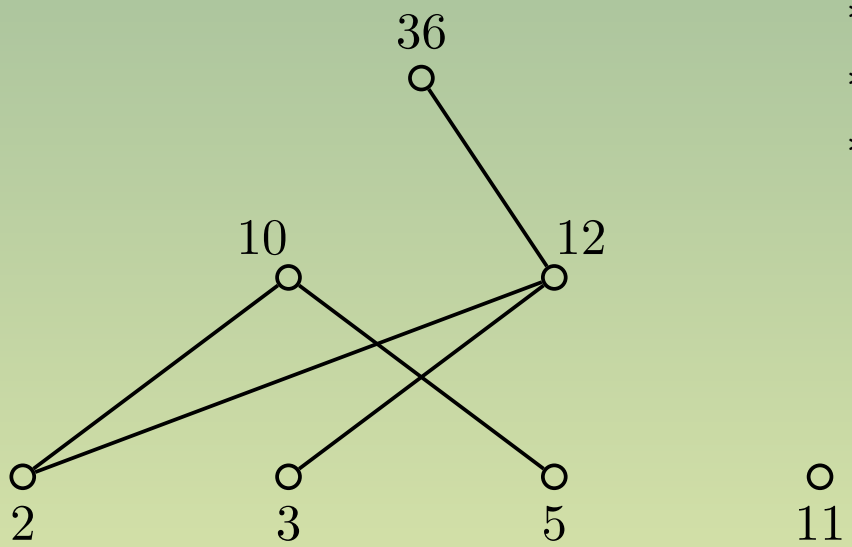
Neka je $A = \{2, 3, 5, 10, 11, 12, 36\}$.

a. *Nacrtajte Hasseov dijagram parcijalno uređenog skupa* $(A, |\ )$.

b. *Odredite najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente skupa* A.

c. *Odredite infimume i supremume skupova* $\{2, 3\}$ *i* $\{10, 12\}$. *Da li ti skupovi imaju najveći i najmanji element?*

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC



* ne postoji najveći element
* ne postoji najmanji element
* minimalni elementi: $2, 3, 5, 11$
* maksimalni elementi: $10, 11, 36$

* $\inf\{2,3\}$ ne postoji
* $\sup\{2,3\} = 12$

* $\min\{2,3\}$ ne postoji
* $\max\{2,3\}$ ne postoji

* $\inf\{10,12\} = 2$
* $\sup\{10,12\}$ ne postoji

* $\min\{10,12\}$ ne postoji
* $\max\{10,12\}$ ne postoji

Primjer 4.3.

Neka je $A = \{1, 3, 9, 81, 243\}$.

a. *Nacrtajte Hasseov dijagram parcijalno uređenog skupa* $(A, |\ )$.

b. *Da li je* A *linearno uređen skup? Da li skup* A *ima najveći i najmanji element?*

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

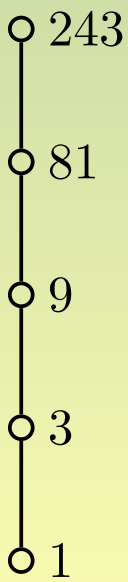
Primjer 4.3.

Neka je $A = \{1, 3, 9, 81, 243\}$.

a. *Nacrtajte Hasseov dijagram parcijalno uređenog skupa* $(A, |\,)$.

b. *Da li je* A *linearno uređen skup? Da li skup* A *ima najveći i najmanji element?*

Rješenje.



- skup $(A, |\,)$ je linearno uređen, što se vidi sa Hasseovog dijagrama
- 1 je najmanji element skupa A (ujedno i minimalni)
- 243 je najveći element skupa A (ujedno i maksimalni)

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.4.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljni prirodni broj i neka je $A \subseteq \mathbb{N}_0$ proizvoljni neprazni podskup. Neka je $\mathcal{N} = \{n^k : k \in A\}$.

a. *Dokažite da je $(\mathcal{N}, |\ )$ linearno uređen skup.*
b. *Da li skup $\mathcal{N}$ ima najmanji i najveći element? Objasnite.*

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.4.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljni prirodni broj i neka je $A \subseteq \mathbb{N}_0$ proizvoljni neprazni podskup. Neka je $\mathcal{N} = \{n^k : k \in A\}$.

a. *Dokažite da je $(\mathcal{N}, |\ )$ linearno uređen skup.*

b. *Da li skup $\mathcal{N}$ ima najmanji i najveći element? Objasnite.*

Rješenje.

a. Znamo da je $(\mathcal{N}, |\ )$ parcijalno uređen skup kao podskup skupa $\mathbb{N}$. Da bismo dokazali da je linearno uređen, trebamo dokazati da su svaka dva elementa iz $\mathcal{N}$ usporediva. Neka su $a, b \in \mathcal{N}$ proizvoljni. Tada postoje $k_1, k_2 \in A$ takvi da je $a = n^{k_1}$ i $b = n^{k_2}$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Ako je $k_1 \leqslant k_2$, tada $a \mid b$, a ako je $k_1 > k_2$, tada $b \mid a$. U svakom slučaju su a i b usporedivi pa je $(\mathcal{N}, \mid)$ linearno uređen skup.

- Kako je $(\mathbb{N}, \leqslant)$ dobro uređen skup, slijedi da svaki njegov neprazni podskup ima najmanji element. Stoga skup A ima najmanji element. Neka je $k_0 = \min A$. Tada je jasno da je n^{k_0} najmanji element skupa $(\mathcal{N}, \mid)$. Dakle, skup $(\mathcal{N}, \mid)$ ima uvijek najmanji element.
  Ako je $(A, \leqslant)$ konačni podskup, tada on ima i najveći element, $K_0 = \max A$, pa je tada n^{K_0} najveći element skupa $(\mathcal{N}, \mid)$.
  Ako je $(A, \leqslant)$ beskonačni podskup, tada on nema najveći element, pa onda niti skup $(\mathcal{N}, \mid)$ nema najveći element.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Zadatak 4.1.

Dokažite da je $(\mathcal{N}, |\ )$ *dobro uređen skup.*

Kažemo da je cijeli broj $a \in \mathbb{Z}$ **zajednički djelitelj** cijelih brojeva b i c ako $a \mid b$ i $a \mid c$. Ako je barem jedan od brojeva b i c različit od nule, onda postoji samo konačno mnogo njihovih zajedničkih djelitelja. Najveći među njima se zove **najveći zajednički djelitelj** ili **najveća zajednička mjera** brojeva b i c. Oznaka je $M(b, c)$.

Općenito, najveća zajednička mjera cijelih brojeva $b_1, b_2, \ldots, b_n$ je najveći cijeli broj koji dijeli svaki od brojeva $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Oznaka je $M(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Napomena.

Iz definicije slijedi da je $M(b, c) \geqslant 1$ i općenito $M(b_1, b_2, \ldots, b_n) \geqslant 1$.

Primjer 4.5.

$$M(30, 18) = 6, \quad M(18, -30) = 6, \quad M(-30, -18) = 6$$
$$M(15, 17) = 1, \quad M(-15, 17) = 1, \quad M(-15, -17) = 1$$

$$M(a, 0) = |a| \quad \text{ako je} \quad a \neq 0$$

ako $a \mid b$, tada $M(a, b) = |a|$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Propozicija 4.4.

Neka su $a, b, q, r \in \mathbb{Z}$ *takvi da je* $b = aq + r$. *Tada je*

$$M(a, b) = M(a, r).$$

Dokaz.

Dovoljno je dokazati da je svaki zajednički djelitelj od a i b ujedno i zajednički djelitelj od a i r, te obrnuto, da je svaki zajednički djelitelj od a i r ujedno i zajednički djelitelj od a i b. Dakle, treba dokazati

$$d \mid a,\ d \mid b \quad \Leftrightarrow \quad d \mid a,\ d \mid r$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$\boxed{\Rightarrow}$

$$d \mid a,\ d \mid b \ \Rightarrow\ \exists\, q_1, q_2 \in \mathbb{Z},\ a = dq_1,\ b = dq_2 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ r = b - aq = dq_2 - \big(dq_1\big)q = d\big(q_2 - q_1 q\big) \ \Rightarrow\ d \mid r$$

$\boxed{\Leftarrow}$

$$d \mid a,\ d \mid r \ \Rightarrow\ \exists\, q_1, q_2 \in \mathbb{Z},\ a = dq_1,\ r = dq_2 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ b = aq + r = \big(dq_1\big)q + dq_2 = d\big(q_1 q + q_2\big) \ \Rightarrow\ d \mid b$$



Euklidov algoritam

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Teorem 4.3 (Euklidov algoritam).

Neka su $a, b \in \mathbb{N}$. *Ako* $b \nmid a$, *tada postoji indeks* $k \in \mathbb{N}$ *takav da vrijedi*

$$\begin{aligned}
a &= bq_1 + r_1, & 0 < r_1 < b \\
b &= r_1 q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 &= r_2 q_3 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\
r_2 &= r_3 q_4 + r_4, & 0 < r_4 < r_3 \\
&\vdots \\
r_{k-2} &= r_{k-1} q_k + r_k, & 0 < r_k < r_{k-1} \\
r_{k-1} &= r_k q_{k+1}
\end{aligned}$$

Nadalje je $M(a, b) = r_k$. *Ako* $b \mid a$, *tada je* $r_1 = 0$ *i* $M(a, b) = b$.

Dokaz.

Ako $b \mid a$, tada je jasno da je $r_1 = 0$ i $M(a, b) = b$. Stoga pretpostavimo da $b \nmid a$. Iz teorema o dijeljenju s ostatkom slijedi da je niz ostataka (r_k) strogo padajući niz, tj.

$$b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \cdots \geqslant 0.$$

Kako je taj niz odozdo omeđen nulom i kako se radi o nizu prirodnih brojeva (uključujući i nulu kao prirodan broj), mora postojati indeks $k \in \mathbb{N}$ takav da je $r_{k+1} = 0$, a $r_k > 0$.
Dokažimo još da je u tom slučaju $M(a, b) = r_k$.

Koristeći se ◂ propozicijom 4.4., slijedi

$$M(a,b) = M(b,a) = M(b,r_1) = M(r_1,b) =$$
$$= M(r_1,r_2) = M(r_2,r_3) = \cdots = M(r_{k-1},r_k) =$$
$$= M(r_k,0) = r_k$$

♡

Napomena.

U Euklidovom algoritmu smo pretpostavili da su $a, b \in \mathbb{N}$. Za traženje najveće zajedničke mjere bilo koja dva cijela broja ta pretpostavka nije neko ograničenje jer je

$$M(a,b) = M\big(|a|,|b|\big).$$

Jasno je da Euklidov algoritam funkcionira i bez te pretpostavke, jedino moramo onda u prva dva koraka

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

paziti na određivanje kvocijenta q jer znamo da je

$$q = \begin{cases} \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor, & \text{ako je } b > 0 \\ \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil, & \text{ako je } b < 0 \end{cases}$$

Od trećeg koraka u svakom slučaju radimo dalje s prirodnim brojevima jer su ostaci r_i veći od nule pa je

$$q_{i+2} = \left\lfloor \frac{r_i}{r_{i+1}} \right\rfloor, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Isto tako, u slučaju da je za $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$, tada je $a = b \cdot 0 + a$, pa zapravo nakon prvog koraka a i b samo zamijene mjesta i dalje se b dijeli sa a. Stoga je razumno na početku Euklidovog algoritma dijeliti veći broj sa manjim.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$$a = 252,\ b = 200,\ M(a,b) = 4$$

$$\begin{aligned}
252 &= 200 \cdot 1 + 52 & a &= b \cdot q_1 + r_1\\
200 &= 52 \cdot 3 + 44 & b &= r_1 \cdot q_2 + r_2\\
52 &= 44 \cdot 1 + 8 & r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3\\
44 &= 8 \cdot 5 + \boxed{4} & r_2 &= r_3 \cdot q_4 + \boxed{r_4}\\
8 &= 4 \cdot 2 & r_3 &= r_4 \cdot q_5
\end{aligned}$$

$$a = -252,\ b = 200,\ M(a,b) = 4$$

$$\begin{aligned}
-252 &= 200 \cdot (\text{-}2) + 148 & a &= b \cdot q_1 + r_1 \\
200 &= 148 \cdot 1 + 52 & b &= r_1 \cdot q_2 + r_2 \\
148 &= 52 \cdot 2 + 44 & r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3 \\
52 &= 44 \cdot 1 + 8 & r_2 &= r_3 \cdot q_4 + r_4 \\
44 &= 8 \cdot 5 + \boxed{4} & r_3 &= r_4 \cdot q_5 + \boxed{r_5} \\
8 &= 4 \cdot 2 & r_4 &= r_5 \cdot q_6
\end{aligned}$$

$$M(-252, 200) = M\big(|-252|, |200|\big) = M(252, 200)$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$$a = 252,\ b = -200,\ M(a,b) = 4$$

$$\begin{aligned} 252 &= -200 \cdot (\text{-}1) + 52 \\ -200 &= 52 \cdot (\text{-}4) + 8 \\ 52 &= 8 \cdot 6 + \boxed{4} \\ 8 &= 4 \cdot 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a &= b \cdot q_1 + r_1 \\ b &= r_1 \cdot q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2 \cdot q_3 + \boxed{r_3} \\ r_2 &= r_3 \cdot q_4 \end{aligned}$$

$$M(252,-200) = M\big(|252|,|-200|\big) = M(252,200)$$

$$a = -252,\ b = -200,\ M(a,b) = 4$$

$$\begin{aligned}
-252 &= -200 \cdot 2 + 148 & \qquad a &= b \cdot q_1 + r_1\\
-200 &= 148 \cdot (\text{-}2) + 96 & b &= r_1 \cdot q_2 + r_2\\
148 &= 96 \cdot 1 + 52 & r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3\\
96 &= 52 \cdot 1 + 44 & r_2 &= r_3 \cdot q_4 + r_4\\
52 &= 44 \cdot 1 + 8 & r_3 &= r_4 \cdot q_5 + r_5\\
44 &= 8 \cdot 5 + \boxed{4} & r_4 &= r_5 \cdot q_6 + \boxed{r_6}\\
8 &= 4 \cdot 2 & r_5 &= r_6 \cdot q_7
\end{aligned}$$

$$M(-252,-200) = M\big(|-252|,|-200|\big) = M(252,200)$$

$$a = bq_1 + r_1$$
$$b = r_1q_2 + r_2$$
$$r_1 = r_2q_3 + r_3$$
$$r_2 = r_3q_4 + r_4$$
$$\vdots$$
$$r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k$$
$$r_{k-1} = r_kq_{k+1}$$

Iz Euklidovog algoritma možemo svaki ostatak r_i izraziti kao cjelobrojnu linearnu kombinaciju brojeva a i b.

$$r_1 = a - q_1b$$
$$r_2 = b - r_1q_2 = b - \big(a - q_1b\big)q_2 = -q_2a + \big(1 + q_1q_2\big)b$$
$$\vdots$$

Na kraju dobivamo da postoje cijeli brojevi $m, n \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$ma + nb = M(a, b).$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$$a = 252,\ b = 200,\ M(a,b) = 4$$

$$\begin{aligned} 252 &= 200 \cdot 1 + 52 & a &= b \cdot q_1 + r_1 \\ 200 &= 52 \cdot 3 + 44 & b &= r_1 \cdot q_2 + r_2 \\ 52 &= 44 \cdot 1 + 8 & r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3 \\ 44 &= 8 \cdot 5 + \boxed{4} & r_2 &= r_3 \cdot q_4 + \boxed{r_4} \\ 8 &= 4 \cdot 2 & r_3 &= r_4 \cdot q_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_4 &= r_2 - r_3 q_4 = r_2 - 5r_3 = r_2 - 5\big(r_1 - r_2 q_3\big) = \\ &= r_2 - 5\big(r_1 - r_2\big) = -5r_1 + 6r_2 = -5r_1 + 6\big(b - r_1 q_2\big) = \\ &= -5r_1 + 6(b - 3r_1) = 6b - 23r_1 = 6b - 23\big(a - bq_1\big) = \\ &= 6b - 23\big(a - b\big) = -23a + 29b \end{aligned}$$

$$-23a + 29b = r_4$$

$$-23a + 29b = M(a,b)$$

$$-23 \cdot 252 + 29 \cdot 200 = 4$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Opišimo sada algoritam za efikasno traženje nekog cjelobrojnog rješenja (x, y) jednadžbe

$$ax + by = M(a, b), \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Opet se koristimo Euklidovim algoritmom.

$$\begin{aligned}
a &= bq_1 + r_1, & 0 < r_1 < b \\
b &= r_1 q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 &= r_2 q_3 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\
r_2 &= r_3 q_4 + r_4, & 0 < r_4 < r_3 \\
&\vdots \\
r_{k-2} &= r_{k-1} q_k + r_k, & 0 < r_k < r_{k-1} \\
r_{k-1} &= r_k q_{k+1} \\
r_k &= M(a, b)
\end{aligned}$$

Stoga definiramo

$$r_{-1} = a, \quad r_0 = b$$
$$r_i = r_{i-2} - q_i r_{i-1}$$

$$x_{-1} = 1, \quad x_0 = 0$$
$$x_i = x_{i-2} - q_i x_{i-1}$$

$$y_{-1} = 0, \quad y_0 = 1$$
$$y_i = y_{i-2} - q_i y_{i-1}$$

Tada je

$$ax_i + by_i = r_i, \quad i = -1, 0, 1, 2, \ldots, k+1.$$

Specijalno je

$$ax_k + by_k = M(a, b).$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Dokažimo ispravnost opisanog algoritma. Dokaz provodimo indukcijom po i. Za $i = -1$ imamo

$$ax_{-1} + by_{-1} = a \cdot 1 + b \cdot 0 = a = r_{-1}.$$

Za $i = 0$ je

$$ax_0 + by_0 = a \cdot 0 + b \cdot 1 = b = r_0.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $i - 2$ i $i - 1$, tj.

$$ax_{i-2} + by_{i-2} = r_{i-2}$$
$$ax_{i-1} + by_{i-1} = r_{i-1}$$

gdje je $1 \leqslant i \leqslant k + 1$. Tada imamo

$$ax_i + by_i = a\big(x_{i-2} - q_i x_{i-1}\big) + b\big(y_{i-2} - q_i y_{i-1}\big) =$$
$$= \big(ax_{i-2} + by_{i-2}\big) - q_i\big(ax_{i-1} + by_{i-1}\big) = r_{i-2} - q_i r_{i-1} = r_i$$

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$$
\begin{array}{rcrcrl}
 & & & q_i & r_i & \\
252 & = & 200 & \cdot\ 1 & + & 52 \\
200 & = & 52 & \cdot\ 3 & + & 44 \\
52 & = & 44 & \cdot\ 1 & + & 8 \\
44 & = & 8 & \cdot\ 5 & + & \boxed{4} \\
8 & = & 4 & \cdot\ 2 & &
\end{array}
$$

$$r_{-1} = 252, \quad r_0 = 200$$

$$r_i = r_{i-2} - q_i r_{i-1}$$

$$x_{-1} = 1, \quad x_0 = 0$$

$$\boxed{x_i = x_{i-2} - q_i x_{i-1}}$$

$$y_{-1} = 0, \quad y_0 = 1$$

$$\boxed{y_i = y_{i-2} - q_i y_{i-1}}$$

i	-1	0	1	2	3	4
q_i			1	3	1	5
x_i	1	0	1	-3	4	-23
y_i	0	1	-1	4	-5	29

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
 & & & q_i & & r_i & \\
252 & = & 200 & \cdot\ 1 & + & 52 & \\
200 & = & 52 & \cdot\ 3 & + & 44 & \\
52 & = & 44 & \cdot\ 1 & + & 8 & \\
44 & = & 8 & \cdot\ 5 & + & \boxed{4} & \\
8 & = & 4 & \cdot\ 2 & & &
\end{array}
$$

$$r_{-1} = 252, \quad r_0 = 200$$

$$r_i = r_{i-2} - q_i r_{i-1}$$

$$x_{-1} = 1, \quad x_0 = 0$$

$$\boxed{x_i = x_{i-2} - q_i x_{i-1}}$$

$$y_{-1} = 0, \quad y_0 = 1$$

$$\boxed{y_i = y_{i-2} - q_i y_{i-1}}$$

i	-1	0	1	2	3	4
q_i			1	3	1	5
x_i	1	0	1	-3	4	-23
y_i	0	1	-1	4	-5	29

$$ax_{-1} + by_{-1} = r_{-1}$$

$$252 \cdot 1 + 200 \cdot 0 = 252$$

$$
\begin{array}{rcrcrl}
 & & & q_i & r_i & \\
252 & = & 200 & \cdot\ 1 & + & 52 \\
200 & = & 52 & \cdot\ 3 & + & 44 \\
52 & = & 44 & \cdot\ 1 & + & 8 \\
44 & = & 8 & \cdot\ 5 & + & \boxed{4} \\
8 & = & 4 & \cdot\ 2 & &
\end{array}
$$

$$r_{-1} = 252, \quad r_0 = 200$$

$$r_i = r_{i-2} - q_i r_{i-1}$$

$$x_{-1} = 1, \quad x_0 = 0$$

$$\boxed{x_i = x_{i-2} - q_i x_{i-1}}$$

$$y_{-1} = 0, \quad y_0 = 1$$

$$\boxed{y_i = y_{i-2} - q_i y_{i-1}}$$

i	-1	0	1	2	3	4
q_i			1	3	1	5
x_i	1	0	1	-3	4	-23
y_i	0	1	-1	4	-5	29

$$ax_0 + by_0 = r_0$$

$$252 \cdot 0 + 200 \cdot 1 = 200$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
 & & & q_i & & r_i & \\
252 & = & 200 & \cdot\ 1 & + & 52 & \\
200 & = & 52 & \cdot\ 3 & + & 44 & \\
52 & = & 44 & \cdot\ 1 & + & 8 & \\
44 & = & 8 & \cdot\ 5 & + & \boxed{4} & \\
8 & = & 4 & \cdot\ 2 & & &
\end{array}
$$

$$r_{-1} = 252, \quad r_0 = 200$$

$$r_i = r_{i-2} - q_i r_{i-1}$$

$$x_{-1} = 1, \quad x_0 = 0$$

$$\boxed{x_i = x_{i-2} - q_i x_{i-1}}$$

$$y_{-1} = 0, \quad y_0 = 1$$

$$\boxed{y_i = y_{i-2} - q_i y_{i-1}}$$

i	-1	0	1	2	3	4
q_i			1	3	1	5
x_i	1	0	1	-3	4	-23
y_i	0	1	-1	4	-5	29

$$ax_1 + by_1 = r_1$$

$$252 \cdot 1 + 200 \cdot (-1) = 52$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$$
\begin{array}{rcrcrl}
 & & & q_i & r_i & \\
252 & = & 200 & \cdot\ 1 & + & 52 \\
200 & = & 52 & \cdot\ 3 & + & 44 \\
52 & = & 44 & \cdot\ 1 & + & 8 \\
44 & = & 8 & \cdot\ 5 & + & \boxed{4} \\
8 & = & 4 & \cdot\ 2 & &
\end{array}
$$

$$r_{-1} = 252, \quad r_0 = 200$$

$$r_i = r_{i-2} - q_i r_{i-1}$$

$$x_{-1} = 1, \quad x_0 = 0$$

$$\boxed{x_i = x_{i-2} - q_i x_{i-1}}$$

$$y_{-1} = 0, \quad y_0 = 1$$

$$\boxed{y_i = y_{i-2} - q_i y_{i-1}}$$

i	-1	0	1	2	3	4
q_i			1	3	1	5
x_i	1	0	1	-3	4	-23
y_i	0	1	-1	4	-5	29

$$ax_2 + by_2 = r_2$$

$$252 \cdot (-3) + 200 \cdot 4 = 44$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$$\begin{array}{rcrcrl} & & & q_i & r_i & \\ 252 & = & 200 & \cdot\ 1 & + & 52 \\ 200 & = & 52 & \cdot\ 3 & + & 44 \\ 52 & = & 44 & \cdot\ 1 & + & 8 \\ 44 & = & 8 & \cdot\ 5 & + & \boxed{4} \\ 8 & = & 4 & \cdot\ 2 & & \end{array}$$

$$r_{-1} = 252, \quad r_0 = 200$$

$$r_i = r_{i-2} - q_i r_{i-1}$$

$$x_{-1} = 1, \quad x_0 = 0$$

$$\boxed{x_i = x_{i-2} - q_i x_{i-1}}$$

$$y_{-1} = 0, \quad y_0 = 1$$

$$\boxed{y_i = y_{i-2} - q_i y_{i-1}}$$

i	-1	0	1	2	3	4
q_i			1	3	1	5
x_i	1	0	1	-3	4	-23
y_i	0	1	-1	4	-5	29

$$ax_3 + by_3 = r_3$$

$$252 \cdot 4 + 200 \cdot (-5) = 8$$

$$
\begin{array}{rcrcrl}
 & & & q_i & r_i & \\
252 & = & 200 & \cdot\ 1 & + & 52 \\
200 & = & 52 & \cdot\ 3 & + & 44 \\
52 & = & 44 & \cdot\ 1 & + & 8 \\
44 & = & 8 & \cdot\ 5 & + & \boxed{4} \\
8 & = & 4 & \cdot\ 2 & &
\end{array}
$$

$$r_{-1} = 252, \quad r_0 = 200$$

$$r_i = r_{i-2} - q_i r_{i-1}$$

$$x_{-1} = 1, \quad x_0 = 0$$

$$\boxed{x_i = x_{i-2} - q_i x_{i-1}}$$

$$y_{-1} = 0, \quad y_0 = 1$$

$$\boxed{y_i = y_{i-2} - q_i y_{i-1}}$$

i	-1	0	1	2	3	4
q_i			1	3	1	5
x_i	1	0	1	-3	4	-23
y_i	0	1	-1	4	-5	29

$$ax_4 + by_4 = r_4$$

$$252 \cdot (-23) + 200 \cdot 29 = 4$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$$
\begin{array}{rcrcrl}
 & & & q_i & r_i & \\
-252 & = & 200 & \cdot\ (\text{-}2) & + & 148 \\
200 & = & 148 & \cdot\ 1 & + & 52 \\
148 & = & 52 & \cdot\ 2 & + & 44 \\
52 & = & 44 & \cdot\ 1 & + & 8 \\
44 & = & 8 & \cdot\ 5 & + & \boxed{4} \\
8 & = & 4 & \cdot\ 2 & &
\end{array}
$$

$$r_{-1} = -252, \quad r_0 = 200$$

$$r_i = r_{i-2} - q_i r_{i-1}$$

$$x_{-1} = 1, \quad x_0 = 0$$

$$\boxed{x_i = x_{i-2} - q_i x_{i-1}}$$

$$y_{-1} = 0, \quad y_0 = 1$$

$$\boxed{y_i = y_{i-2} - q_i y_{i-1}}$$

i	-1	0	1	2	3	4	5
q_i			-2	1	2	1	5
x_i	1	0	1	-1	3	-4	23
y_i	0	1	2	-1	4	-5	29

$$ax_5 + by_5 = r_5$$

$$-252 \cdot 23 + 200 \cdot 29 = 4$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Napomena.

Imali smo $M(252, 200) = 4$ i $M(-252, 200) = 4$, što je jasno zbog $M(a, b) = M\big(|a|, |b|\big)$. Nadalje

$$ma + nb = M(a, b)$$

$$-23 \cdot 252 + 29 \cdot 200 = 4$$

u slučaju $a = 252$, $b = 200$. Isto tako je

$$23 \cdot (-252) + 29 \cdot 200 = 4$$

u slučaju $a = -252$, $b = 200$.

Još jednom vidimo da je dovoljno primjenjivati Euklidov algoritam samo na prirodnim brojevima zbog $M(a, b) = M\big(|a|, |b|\big)$, a u tom slučaju su $|a|, |b| \in \mathbb{N}$ ako su oba broja a i b različita od nule.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Isto tako, ako znamo $m, n \in \mathbb{Z}$ takve da je

$$ma + nb = M(a, b)$$

tada je, npr. za $-a$ i b

$$(-m) \cdot (-a) + n \cdot b = M(-a, b) = M(a, b).$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Napomena.

Cijeli brojevi m i n koji zadovoljavaju jednadžbu

$$ma + nb = M(a, b) \qquad (\star)$$

nisu jedinstveni jer, npr. u tom slučaju također vrijedi

$$(m + b)a + (n - a)b = M(a, b)$$

pa i cijeli brojevi $m + b$ i $n - a$ također zadovoljavaju $(\star)$.

Euklidov algoritam nam daje efikasan postupak pronalaženja jednog para brojeva m i n koji zadovoljavaju jednakost $(\star)$.

Kažemo da su $a, b \in \mathbb{Z}$ **relativno prosti** ako je

$$M(a, b) = 1.$$

Kažemo da su $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ relativno prosti ako je

$$M\big(a_1, a_2, \ldots, a_n\big) = 1.$$

Kažemo da su $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ **u parovima relativno prosti** ako je

$$M\big(a_i, a_j\big) = 1, \text{ za } i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Napomena.

Brojevi $2, 8, 9$ jesu relativno prosti jer je $M(2, 8, 9) = 1$, ali ti brojevi nisu u parovima relativno prosti zbog $M(2, 8) = 2 \neq 1$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Propozicija 4.5.

Ako je $M(a,m)=M(b,m)=1$, *tada je* $M(ab,m)=1$.

Dokaz.

Iz Euklidovog algoritma slijedi da vrijedi sljedeće:

$$M(a,m)=1 \;\Rightarrow\; \exists\, x_0,y_0\in\mathbb{Z},\; ax_0+by_0=1$$
$$M(b,m)=1 \;\Rightarrow\; \exists\, x_1,y_1\in\mathbb{Z},\; ax_1+by_1=1$$

Iz toga slijedi

$$\begin{aligned} ax_0\cdot bx_1 &= \big(1-my_0\big)\big(1-my_1\big) = \\ &= 1-my_1-my_0+m^2y_0y_1 = \\ &= 1-m\big(\underbrace{y_1+y_0-my_0y_1}_{=y_2\in\mathbb{Z}}\big) \end{aligned}$$

odnosno

$$ab \cdot x_0 x_1 + m y_2 = 1.$$

Kada bi bilo $M(ab, m) = d > 1$, tada bi lijeva strana bila djeljiva sa d, pa bi i desna strana morala biti djeljiva sa d, tj. 1 bi bio djeljiv sa d, što je nemoguće. Dakle, zaista je $M(ab, m) = 1$. ♡

Napomena.

Znamo da za $a, b \in \mathbb{Z}$ postoje $m, n \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$ma + nb = M(a, b).$$

Podijelimo li tu jednakost sa $M(a, b)$, dobivamo

$$\frac{a}{M(a,b)} \cdot m + \frac{b}{M(a,b)} \cdot n = 1$$

iz čega slijedi da je $M(m, n) = 1$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.6.

Dokažite da su brojevi n i $2n+1$ relativno prosti za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.6.

Dokažite da su brojevi n i $2n+1$ relativno prosti za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje.

Tvrdimo da je $M(n, 2n+1) = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Pretpostavimo da $d \mid n$ i $d \mid 2n+1$. Tada postoje $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$n = k_1 d, \quad 2n+1 = k_2 d.$$

Iz toga slijedi da je $2k_1 d = k_2 d + 1$, odnosno

$$\big(2k_1 - k_2\big)d = 1,$$

a kako su u prethodnoj jednakosti samo cijeli brojevi, slijedi da je $d = 1$, odnosno $M(n, 2n+1) = 1$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.7.

Odredite sve prirodne brojeve s kojima se može skratiti razlomak $\frac{5n+6}{8n+7}$.

Primjer 4.7.

Odredite sve prirodne brojeve s kojima se može skratiti razlomak $\frac{5n+6}{8n+7}$.

Rješenje.

U biti treba odrediti koje sve vrijednosti može poprimiti $M(5n+6, 8n+7)$. Neka je $d = M(5n+6, 8n+7)$. Tada $d \mid 5n+6$ i $d \mid 8n+7$. No, tada prema propoziciji 4.2. slijedi da $d \mid 8(5n+6) - 5(8n+7)$, tj. $d \mid 13$. Iz toga slijedi da je $d = 1$ ili $d = 13$, tj.

$$M(5n+6, 8n+7) = 1 \quad \text{ili} \quad M(5n+6, 8n+7) = 13.$$

Dakle, razlomak $\frac{5n+6}{8n+7}$ ili se ne može uopće skratiti $(d = 1)$, ili pak se može jedino skratiti sa 13 $(d = 13)$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Neka su $b, c \in \mathbb{Z}$ različiti od nule. Broj $a \in \mathbb{Z}$ zovemo **zajednički višekratnik** od b i c ako $b \mid a$ i $c \mid a$.

Najmanji zajednički višekratnik brojeva $b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je broj $l \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi:

i. $b \mid l$, $c \mid l$
ii. ako za $m \in \mathbb{N}$ vrijedi $b \mid m$ i $c \mid m$, tada je $l \leqslant m$

Oznaka: $l = V(b, c)$

Primjer 4.8.

$$V(-8, 12) = 24, \quad V(-5, -25) = 25, \quad V(8, 12) = 24$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Teorem 4.4.

Za sve $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *vrijedi*

$$M(a,b) \cdot V(a,b) = |ab|.$$

Dokaz.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su $a, b \in \mathbb{N}$ jer su uvijek $M(a,b), V(a,b) \in \mathbb{N}$, pa je zdesne strane apsolutna vrijednost samo zbog toga ako je produkt ab negativan.
Neka je $d = M(a,b)$. Tada postoje $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$a = dx, \quad b = dy \qquad (*)$$

i pri tome je $M(x,y) = 1$ jer u protivnom d ne bi bio najveća zajednička mjera brojeva a i b.

Neka je $v \in \mathbb{N}$ neki zajednički višekratnik (ne nužno najmanji) od a i b. Tada postoje $k, l \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$v = ak, \quad v = bl. \qquad (**)$$

Iz $(*)$ i $(**)$ slijedi

$$l = \frac{v}{b} = \frac{ak}{b} = \frac{dxk}{dy} = \frac{kx}{y}.$$

Kako je $M(x, y) = 1$, slijedi da $y \mid k$ pa postoji $t \in \mathbb{N}$ takav da je $k = yt$. Sada imamo

$$v = ak = a(yt) = a \cdot \frac{b}{d} \cdot t = \frac{ab}{d}t.$$

Dakle, svaki zajednički višekratnik od a i b mora biti oblika $v = \frac{ab}{d}t$ za neki $t \in \mathbb{N}$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Stoga, najmanji zajednički višekratnik dobivamo za $t = 1$, tj. vrijedi

$$V(a,b) = \frac{ab}{M(a,b)}$$

odnosno

$$M(a,b) \cdot V(a,b) = ab.$$

U slučaju da su $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, tada je

$$M(a,b) \cdot V(a,b) = |ab|.$$



Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.9.

Odredite $V(252, 200)$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.9.

Odredite $V(252, 200)$.

Rješenje.

Koristimo jednakost $V(a,b) = \frac{ab}{M(a,b)}$. Dakle, prvo pomoću Euklidovog algoritma odredimo $M(252, 200)$.

$$\begin{aligned} 252 &= 200 \cdot 1 + 52 \\ 200 &= 52 \cdot 3 + 44 \\ 52 &= 44 \cdot 1 + 8 \\ 44 &= 8 \cdot 5 + \boxed{4} \\ 8 &= 4 \cdot 2 \end{aligned}$$

Sada je

$$V(252, 200) = \frac{252 \cdot 200}{M(252, 200)} = \frac{252 \cdot 200}{4} = 12\,600$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.10.

Odredite $V(n, n+1)$ *i* $M(n, n+1)$.

Primjer 4.10.

Odredite $V(n, n+1)$ *i* $M(n, n+1)$.

Rješenje.

Neka je $d = M(n, n+1)$. Tada $d \mid n$ i $d \mid n+1$. No, prema propoziciji 4.2. tada $d \mid (n+1) - n$, tj. $d \mid 1$. Iz toga slijedi da je $d = 1$, tj. $M(n, n+1) = 1$.

Nadalje,

$$V(n, n+1) = \frac{n(n+1)}{M(n, n+1)}$$

iz čega slijedi da je $V(n, n+1) = n(n+1)$.

Mreže

Parcijalno uređeni skup $\left(X, \preccurlyeq\right)$ se zove **mreža** (engl. lattice) ako za svaki par elemenata $a, b \in X$ postoje $\sup\{a, b\}$ i $\inf\{a, b\}$.

Na mreži $\left(X, \preccurlyeq\right)$ se mogu na prirodni način uvesti dvije binarne operacije, zbrajanje i množenje, na sljedeći način:

$$a + b = \sup\{a, b\}, \quad ab = \inf\{a, b\}.$$

Zbrajanje i množenje u mreži

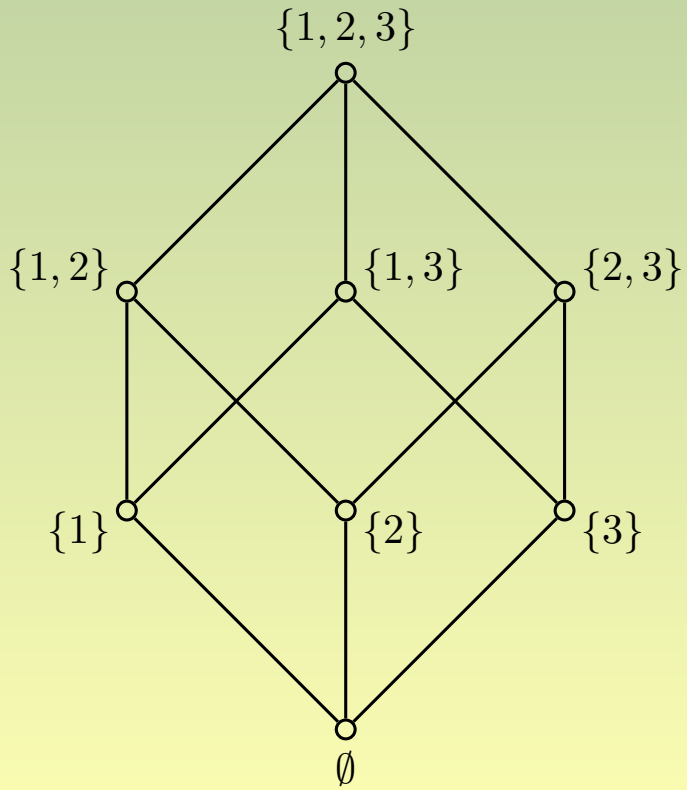
$$a + b = \sup\{a, b\}, \quad ab = \inf\{a, b\}$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjeri mreža

1. $\left(\mathcal{P}(X), \subseteq\right)$ je mreža. Operacija zbrajanja u toj mreži je unija skupova, a operacija množenja je presjek skupova. Pogledajmo to na primjeru $X = \{1, 2, 3\}$.

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$$



Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Na primjer

$$\sup\{\emptyset,\{1\}\} = \{1\} = \emptyset \cup \{1\}$$
$$\inf\{\emptyset,\{1\}\} = \emptyset = \emptyset \cap \{1\}$$

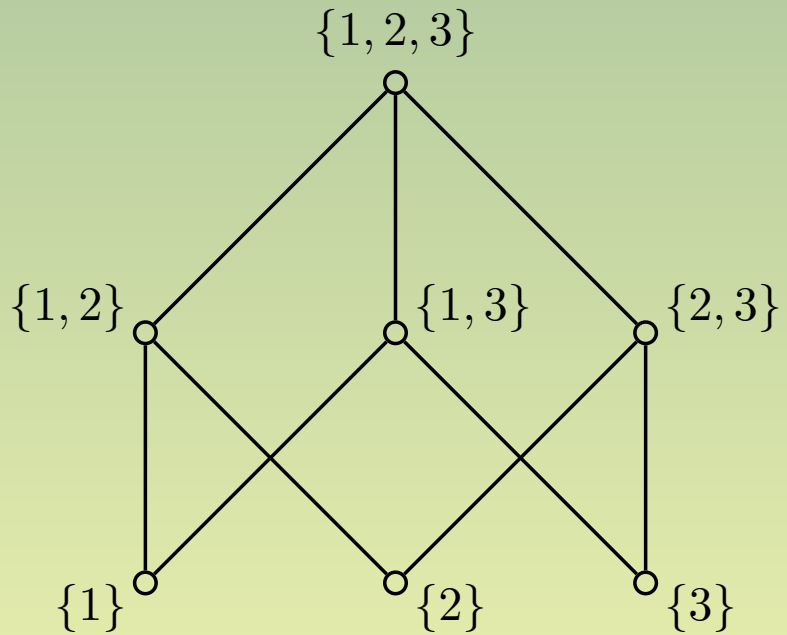
$$\sup\{\{2\},\{1,2\}\} = \{1,2\} = \{2\} \cup \{1,2\}$$
$$\inf\{\{2\},\{1,2\}\} = \{2\} = \{2\} \cap \{1,2\}$$

$$\sup\{\{2\},\{1,3\}\} = \{1,2,3\} = \{2\} \cup \{1,3\}$$
$$\inf\{\{2\},\{1,3\}\} = \emptyset = \{2\} \cap \{1,3\}$$

Uočimo odmah ovdje da skup $\{\{2\},\{1,3\}\}$ nema niti minimum, niti maksimum, ali ima infimum i supremum (kako se i traži u definiciji mreže). Dakle, u mreži ne mora svaki dvočlani podskup imati minimum i maksimum, ali mora imati infimum i supremum.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

2. Neka je $X = \{1, 2, 3\}$. Tada parcijalno uređen skup $\big(\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq\big)$ nije mreža.



Na primjer, skup $\big\{\{1\}, \{2, 3\}\big\}$ nema infimum.

3. $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ je mreža uz standardni uređaj

$$a + b = \max\{a, b\}, \quad ab = \min\{a, b\}$$

4. Svaki linearno uređen skup $(X, \preccurlyeq)$ je mreža. Naime, ako su $a, b \in X$, tada su zbog linearnosti svaka dva elementa usporediva pa je $a \preccurlyeq b$ ili $b \preccurlyeq a$. U prvom slučaju je $\sup\{a, b\} = b$, $\inf\{a, b\} = a$, a u drugom slučaju $\sup\{a, b\} = a$, $\inf\{a, b\} = b$. U svakom slučaju, svaki dvočlani podksup u linearno uređenom skupu ima infimum i supremum (dapače, ima čak minimum i maksimum). Obrnuto naravno ne vrijedi, mreža ne mora biti linearno uređen skup.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Propozicija 4.6.

U svakoj mreži $(X, \preccurlyeq)$ svaki konačni neprazni podskup ima infimum i supremum.

Dokaz.

Dokaz provodimo indukcijom po kardinalnom broju podskupa. Ako je $Y \subseteq X$ i $k(Y) = 1$, tada je $Y = \{a\}$ za neki $a \in X$. No, zbog refleksivnosti od $\preccurlyeq$ je tada jasno da je $\inf Y = \sup Y = a$. Ako je $k(Y) = 2$, tada je $Y = \{a, b\}$. Infimum i supremum skupa Y u tom slučaju postoje jer je $(X, \preccurlyeq)$ mreža.

Pretpostavimo da svaki konačni podskup od $k - 1$ elemenata u X ima infimum i supremum (naravno, za $k > 1$).

Neka je $Y \subseteq X$ i $k(Y) = k$. Tada je

$$Y = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$$

i možemo pisati $Y = \{a_1, \ldots, a_{k-1}\} \cup \{a_k\}$.

Prema pretpostavci indukcije skup $\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$ ima infimum i supremum. Neka je

$$b = \inf \{a_1, \ldots, a_{k-1}\}. \qquad (\diamondsuit)$$

Jer smo u mreži, skup $\{b, a_k\}$ ima infimum i supremum. Neka je

$$c = \inf \{b, a_k\}. \qquad (\clubsuit)$$

Tvrdimo da je tada $c = \inf \{a_1, \ldots, a_k\}$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Treba dokazati da je c donja međa skupa $\{a_1, \ldots, a_k\}$ i da je to najveća donja međa tog skupa. Iz $(\diamondsuit)$ slijedi da je $b \preccurlyeq a_i$ za $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Iz $(\clubsuit)$ slijedi da je $c \preccurlyeq b$ i $c \preccurlyeq a_k$. Stoga imamo

$$c \preccurlyeq a_k, \quad \underbrace{c \preccurlyeq b, \quad b \preccurlyeq a_i}_{\text{tranzitivnost}}, \quad i = 1, \ldots, k-1$$

pa dobivamo da je

$$c \preccurlyeq a_k, \quad c \preccurlyeq a_i, \quad i = 1, \ldots, k-1$$

odnosno

$$c \preccurlyeq a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Dakle, c je donja međa skupa $\{a_1, \ldots, a_k\}$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Dokažimo još da je c najveća donja međa skupa $\{a_1, \ldots, a_k\}$.
Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $d \in X$ takav da je

$$c \preccurlyeq d \quad \text{i} \quad d \not\preccurlyeq a_i, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Specijalno je $d \not\preccurlyeq a_i$ za $i = 1, \ldots, k-1$, a kako je

$$b = \inf \{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$$

slijedi da je $d \not\preccurlyeq b$.
Sada imamo da je $d \not\preccurlyeq b$ i $d \not\preccurlyeq a_k$ pa je d donja međa skupa $\{b, a_k\}$ za koju vrijedi da je $c \not\preccurlyeq d$, što je nemoguće jer je $c = \inf \{b, a_k\}$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Dakle, zaista je $c = \inf\{a_1, \ldots, a_k\}$. Na sličan način se pokaže da skup $\{a_1, \ldots, a_k\}$ ima i supremum.
Prema principu matematičke indukcije slijedi da svaki neprazni konačni podskup u mreži ima infimum i supremum. ♡

Zadatak 4.2.

Proučite još jednom prethodni dokaz i uočite glavne etape u dokazu koraka indukcije, tj. rasčlanite taj dokaz na manje dijelove. Dokaz nije težak, ali za njegovo razumijevanje je ključna stvar da razumijete pojam infimuma i supremuma. Da se uvjerite da li to razumijete, dovršite prethodni dokaz tako da dokažete da svaki konačni neprazni podskup u mreži ima supremum. Dokaz ide sasvim analogno kao i u slučaju infimuma.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Napomena.

Neka je $(X, \preccurlyeq)$ mreža, a X beskonačni skup. Prema dokazanom, svaki konačni neprazni podskup od X ima infimum i supremum. Međutim, beskonačni podskup od X ne mora imati infimum i supremum. Na primjer, $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ je mreža, ali skup $\mathbb{Z}$ nema infimum, niti supremum. Isto tako podskup

$$2\mathbb{Z} = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\} \subset \mathbb{Z}$$

nema infimum, niti supremum, dok podskup $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ima infimum, ali nema supremum.

Parcijalno uređen skup $(X, \preccurlyeq)$ je **potpuna mreža** ako svaki njegov neprazni podskup (bilo konačan ili beskonačan) ima infimum i supremum. Svaka potpuna mreža ima element $\inf X$ koji se zove nula i ima element $\sup X$ koji se zove jedinica.

Napomena.

Ako je $(X, \preccurlyeq)$ mreža, a X konačni skup, tada je $(X, \preccurlyeq)$ potpuna mreža.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

1. $\left(\mathcal{P}(X), \subseteq\right)$ je potpuna mreža. Nula u toj mreži je $\emptyset$, a jedinica je X.
2. $\left(\mathbb{N}, \leqslant\right)$ nije potpuna mreža jer $\sup \mathbb{N}$ ne postoji (nema jedinicu), ali ima nulu koja je jednaka 1, tj. $\inf \mathbb{N} = 1$.
3. $\left(\mathbb{N}, |\right)$ je mreža, ali nije potpuna mreža jer ne postoji $\sup \mathbb{N}$ (ne postoji prirodni broj koji bi sa svima bio djeljiv), dok je $\inf \mathbb{N} = 1$.
4. Ako stavimo da vrijedi $0 \mid 0$, tada je $\left(\mathbb{N} \cup \{0\}, |\right)$ potpuna mreža. U tom slučaju je

$$\inf\left(\mathbb{N} \cup \{0\}\right) = 1, \quad \sup\left(\mathbb{N} \cup \{0\}\right) = 0$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

5. Neka je $D_n = \{a \in \mathbb{N} : a \mid n\}$ skup svih djelitelja broja $n \in \mathbb{N}$. Tada je $(D_n, \mid)$ potpuna mreža koju zovemo mreža djelitelja broja n.

$$\sup D_n = n, \quad \inf D_n = 1$$

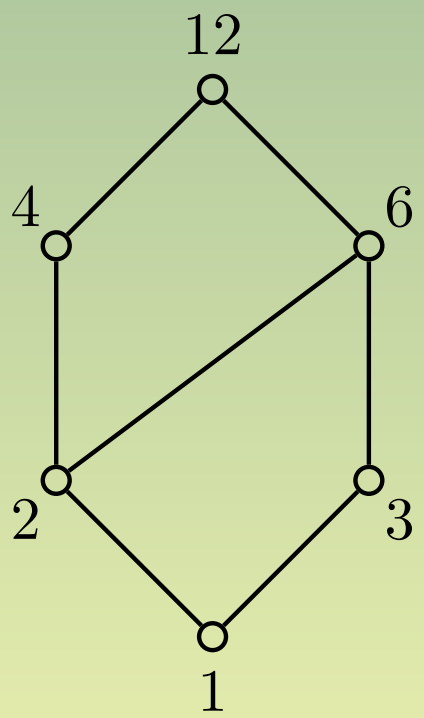
Uočimo da je ovdje

$$\sup\{a, b\} = V(a, b), \quad \inf\{a, b\} = M(a, b)$$

i općenito u mreži $(\mathbb{N}, \mid)$ također vrijedi

$$\sup\{a, b\} = V(a, b), \quad \inf\{a, b\} = M(a, b).$$

$$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

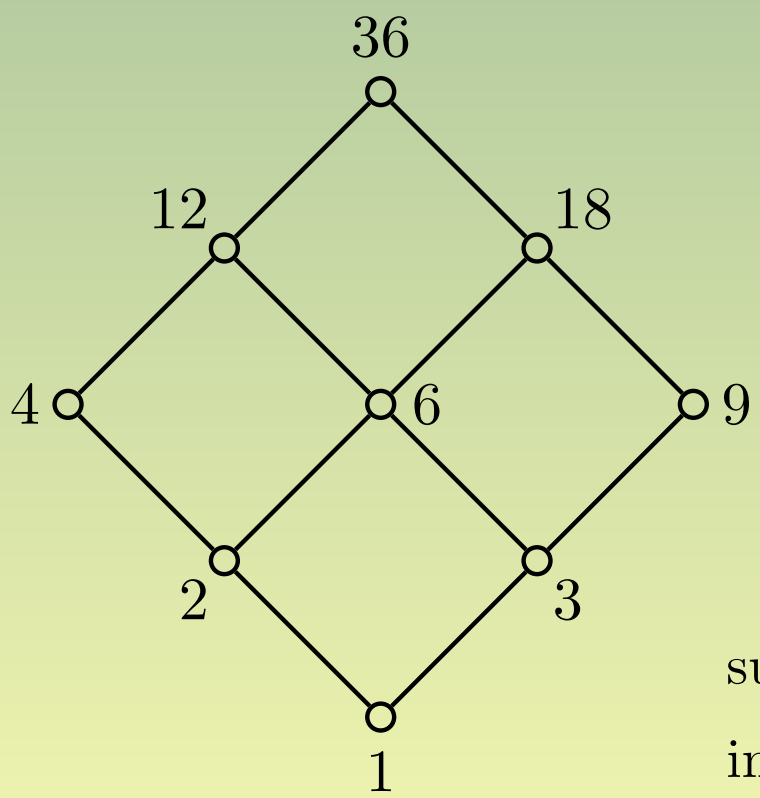


$$\sup\{4, 6\} = 12 = V(4, 6)$$
$$\inf\{4, 6\} = 2 = M(4, 6)$$

$$\sup\{2, 3\} = 6 = V(2, 3)$$
$$\inf\{2, 3\} = 1 = M(2, 3)$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$$D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$



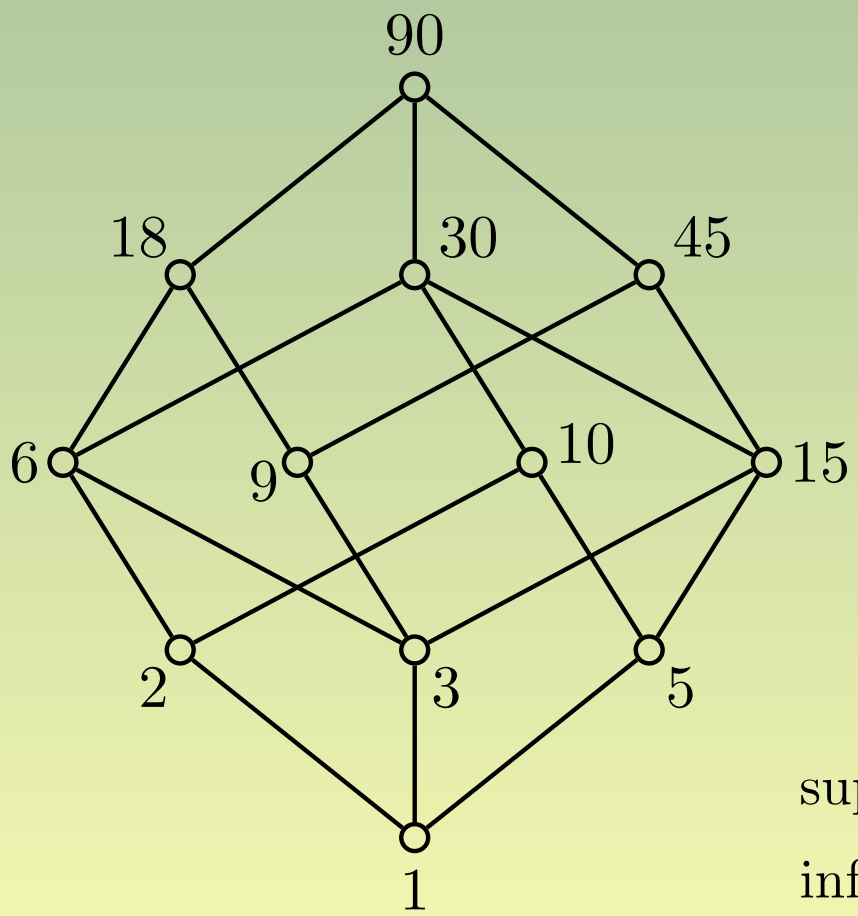
$$\sup\{4, 6\} = 12 = V(4, 6)$$
$$\inf\{4, 6\} = 2 = M(4, 6)$$

$$\sup\{3, 18\} = 18 = V(3, 18)$$
$$\inf\{3, 18\} = 3 = M(3, 18)$$

$$\sup\{2, 6, 9\} = 18 = V(2, 6, 9)$$
$$\inf\{2, 6, 9\} = 1 = M(2, 6, 9)$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$$D_{90} = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$$



$$\sup\{10, 18\} = 90$$

$$\inf\{10, 18\} = 2$$

$$\sup\{6, 15\} = 30$$

$$\inf\{6, 15\} = 3$$

$$\sup\{3, 6, 10\} = 30$$

$$\inf\{3, 6, 10\} = 1$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Teorem 4.5.

Za operacije zbrajanja i množenja na mreži $(X, \preccurlyeq)$ *vrijede ova svojstva:*

a. *Komutativnost:* $a + b = b + a, \quad ab = ba$

b. *Asocijativnost*

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc)$$

c. *Absorpcija:* $a(a + b) = a, \quad a + ab = a$

d. *Idempotentnost:* $a + a = a, \quad aa = a$

Ako je $(X, \preccurlyeq)$ *potpuna mreža, tada još vrijedi*

e. $a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a$

Dokaz.

a) $a + b = \sup\{a, b\} = \sup\{b, a\} = b + a$

$ab = \inf\{a, b\} = \inf\{b, a\} = ba$

b) $(a + b) + c = \sup\{a + b, c\} = \sup\{\sup\{a, b\}, c\}$

$s_1 = \sup\{a, b\}, \quad s_2 = \sup\{s_1, c\}$

Tvrdimo da je tada $s_2 = \sup\{a, b, c\}$.

Treba pokazati da je s_2 gornja međa skupa $\{a, b, c\}$ i da je to njegova najmanja gornja međa. Imamo sljedeće

$$s_1 = \sup\{a, b\} \quad \Rightarrow \quad a \preccurlyeq s_1,\ b \preccurlyeq s_1$$

$$s_2 = \sup\{s_1, c\} \quad \Rightarrow \quad s_1 \preccurlyeq s_2,\ c \preccurlyeq s_2$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Zbog tranzitivnosti je

$$a \preccurlyeq s_1,\ s_1 \preccurlyeq s_2 \quad \Rightarrow \quad a \preccurlyeq s_2$$

$$b \preccurlyeq s_1,\ s_1 \preccurlyeq s_2 \quad \Rightarrow \quad b \preccurlyeq s_2$$

odnosno sve zajedno dobivamo

$$a \preccurlyeq s_2,\ b \preccurlyeq s_2, c \preccurlyeq s_2$$

pa je s_2 gornja međa skupa $\{a, b, c\}$.

Dokažimo još da je s_2 najmanja gornja međa skupa $\{a, b, c\}$. Pretpostavimo da je $k \in X$ neka druga gornja međa skupa $\{a, b, c\}$ koja je manja od s_2, tj.

$$k \preccurlyeq s_2,\ a \preccurlyeq k,\ b \preccurlyeq k,\ c \preccurlyeq k$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Tada je zbog $a \preccurlyeq k$ i $b \preccurlyeq k$, k gornja međa od $\{a, b\}$, a kako je $s_1 = \sup\{a, b\}$, slijedi da je $s_1 \preccurlyeq k$. No, onda imamo

$$s_1 \preccurlyeq k,\ c \preccurlyeq k,\ k \preccurlyeq s_2$$

pa smo dobili da je k gornja međa skupa $\{s_1, c\}$ koja je manja od s_2, no to je nemoguće jer je $s_2 = \sup\{s_1, c\}$. Dakle, zaista je $s_2 = \sup\{a, b, c\}$.

Isto tako je

$$a + (b + c) = \sup\{a, b + c\} = \sup\{a, \sup\{b, c\}\}.$$

Stavimo li

$$s_3 = \sup\{b, c\}, \quad s_4 = \sup\{a, s_3\}$$

analogno bismo pokazali da je $s_4 = \sup\{a, b, c\}$. Stoga je

$$(a + b) + c = s_2 = s_4 = a + (b + c).$$

Sasvim analogno bismo pokazali da je

$$(ab)c = a(bc)$$

samo što bismo umjesto supremuma radili sa infimumima.

- $a(a + b) = \inf\{a, a + b\} = \inf\{a, \sup\{a, b\}\} = a$

  Posljednja jednakost slijedi iz činjenice $a \preccurlyeq \sup\{a, b\}$.

  $a + ab = \sup\{a, ab\} = \sup\{a, \inf\{a, b\}\} = a$

  Posljednja jednakost slijedi iz činjenice $\inf\{a, b\} \preccurlyeq a$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

d) $a + a = \sup\{a, a\} = a, \quad aa = \inf\{a, a\} = a$

e) $a + 0 = a + \inf X = \sup\{a, \inf X\} = a$

Posljednja jednakost slijedi iz činjenice $\inf X \preccurlyeq a$.

$a \cdot 1 = a \cdot \sup X = \inf\{a, \sup X\} = a$

Posljednja jednakost slijedi iz činjenice $a \preccurlyeq \sup X$. ♡

Zadatak 4.3.

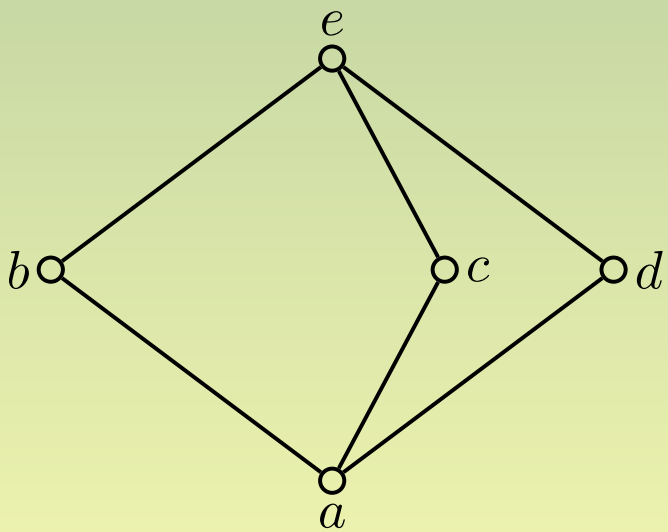
Proučite još jednom dokaz da u mreži vrijedi asocijativnost zbrajanja i uočite glavne etape u tom dokazu, tj. rasčlanite taj dokaz na manje dijelove i proučite što se u kojem dijelu radilo. Dokaz nije težak, ali za njegovo razumijevanje je ključna stvar da razumijete pojam infimuma i supremuma. Da se uvjerite da li to razumijete, dokažite na sasvim analogni način da u mreži vrijedi asocijativnost množenja.

Za potpunu mrežu $(X, \preccurlyeq)$ kažemo da je **distributivna mreža** ako u njoj vrijede zakoni distribucije

$$a(b+c) = ab + ac, \quad a + bc = (a+b)(a+c).$$

Primjer 4.11.

$X = \{a, b, c, d, e\}$, $\preccurlyeq$ *je zadana Hasseovim dijagramom*



$$b(c+d) = be = b$$

$$bc + bd = a + a = a$$

$$b(c+d) \neq bc + bd$$

$(X, \preccurlyeq)$ je potpuna mreža, ali nije distributivna mreža.

Primjer 4.12.

$\big(\mathcal{P}(X), \subseteq\big)$ *je distributivna mreža.*

Naime, za $a, b \in \mathcal{P}(X)$ je

$$a + b = \sup\{a, b\} = a \cup b, \quad ab = \inf\{a, b\} = a \cap b$$

Tada relacija

$$a(b + c) = ab + ac$$

ovdje zapravo znači

$$A \cap \big(B \cup C\big) = \big(A \cap B\big) \cup \big(A \cap C\big)$$

dok relacija

$$a + bc = (a + b)(a + c)$$

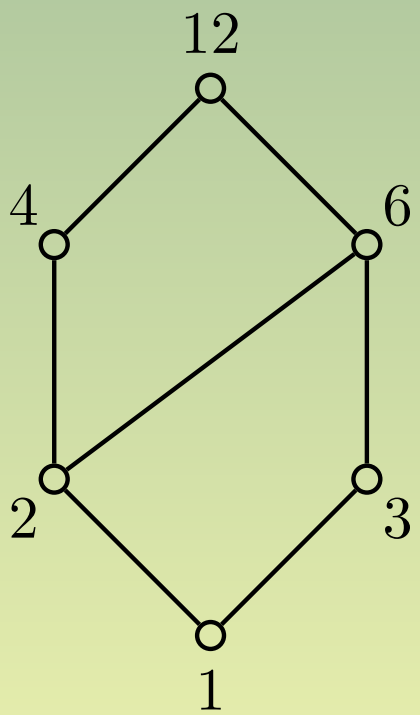
predstavlja

$$A \cup \big(B \cap C\big) = \big(A \cup B\big) \cap \big(A \cup C\big)$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$(D_{12}, |\ )$ je distributivna mreža



$$3(4+2) = 3 \cdot 4 = 1$$

$$3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 1 + 1 = 1$$

$$3(4+2) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2$$

$$3 + 4 \cdot 2 = 3 + 2 = 6$$

$$(3+4)(3+2) = 12 \cdot 6 = 6$$

$$3 + 4 \cdot 2 = (3+4)(3+2)$$

Općenito, ako je D_n skup svih djelitelja broja n, tada je $(D_n, |\ )$ distributivna mreža.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Napomena.

$(\mathbb{N}, |\ )$ je mreža.

$$a + b = \sup\{a, b\} = V(a, b)$$
$$ab = \inf\{a, b\} = M(a, b)$$

$$a + b = b + a \iff V(a, b) = V(b, a)$$
$$ab = ba \iff M(a, b) = M(b, a)$$
$$(a + b) + c = a + (b + c) \iff V\big(V(a, b), c\big) = V\big(a, V(b, c)\big)$$
$$(ab)c = a(bc) \iff M\big(M(a, b), c\big) = M\big(a, M(b, c)\big)$$
$$a(a + b) = a \iff M\big(a, V(a, b)\big) = a$$

Prosti brojevi

Prirodni broj $p > 1$ se zove **prost broj** ili **prim broj** ako su 1 i p jedini djelitelji broja p.

Ako prirodni broj $a > 1$ nije prost, kažemo da je onda a **složen broj**.

Broj 1 nije niti prost, niti složen.

Teorem 4.6.

Svaki prirodni broj $n > 1$ može se prikazati kao produkt prostih brojeva.

Dokaz.

Dokazano u ◂ primjeru 1.19. primjeru iz prvog poglavlja pomoću jake forme matematičke indukcije. ♡

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Propozicija 4.7.

Ako je p prost broj i $p \mid ab$, onda $p \mid a$ ili $p \mid b$. Općenitije, ako $p \mid a_1 a_2 \cdots a_n$, onda p dijeli barem jedan faktor a_i.

Dokaz.

Pretpostavimo da $p \mid ab$ i da $p \nmid a$. Tada je $M(a, p) = 1$ jer je p prost broj. Zbog toga postoje $x, y \in \mathbb{Z}$ takvi da je $ax + py = 1$. Pomnožimo li posljednju jednakost sa b dobivamo

$$(ab)x + pby = b.$$

Kako po pretpostavci $p \mid ab$, slijedi da je lijeva strana djeljiva s p, pa mora i desna strana biti djeljiva s p, tj. $p \mid b$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Drugu tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom. Za $n = 2$ je upravo dokazano. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve produkte s manje od n faktora. Tada za n faktora imamo

$$p \mid a_1(a_2 \cdots a_n) \;\Rightarrow\; p \mid a_1 \text{ ili } \underbrace{p \mid a_2 \cdots a_n}_{\text{pretp. ind.}}$$

Ako $p \mid a_1$, onda je gotovo, u protivnom mora $p \mid a_2 \cdots a_n$ (prema bazi indukcije za dva faktora). Tada prema pretpostavci indukcije (jer tu imamo $n-1$ faktora) p dijeli barem jedan od faktora $a_2, \ldots, a_n$. U svakom slučaju p dijeli barem jedan faktor a_i. ♡

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Teorem 4.7 (Osnovni teorem aritmetike).

Faktorizacija svakog prirodnog broja $n > 1$ na proste faktore je jedinstvena do na poredak prostih faktora.

Dokaz.

Pretpostavimo da prirodni broj $n > 1$ ima dvije različite faktorizacije

$$n = \prod_i p_i, \quad n = \prod_j q_j$$

gdje su p_i, q_j prosti brojevi (ne nužno različiti). Dijeleći s prostim brojevima koji su zajednički u obje faktorizacije dobit ćemo jednakost oblika

$$p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_r$$

pri čemu se niti jedan p_i ne pojavljuje na desnoj strani.

Međutim, $p_1 \mid p_1 p_2 \cdots p_s$, pa onda slijedi $p_1 \mid q_1 q_2 \cdots q_r$. Tada p_1 dijeli neki q_j, pa mora biti $p_1 = q_j$, što je po pretpostavci nemoguće. Dakle, faktorizacija prirodnog broja na proste faktore je jedinstvena do na poredak faktora. ♡

Faktorizacija na proste faktore

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

$$p_1, p_2, \ldots, p_r \leftarrow \text{različiti prosti brojevi}$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Napomena.

$$a = \prod_p p^{\alpha(p)}, \quad b = \prod_p p^{\beta(p)}, \quad c = \prod_p p^{\gamma(p)}$$

$$ab = c \;\Leftrightarrow\; \alpha(p) + \beta(p) = \gamma(p),\ \forall p$$

$$a \mid b \;\Leftrightarrow\; \alpha(p) \leqslant \beta(p),\ \forall p$$

$$M(a,b) = \prod_p p^{\min\{\alpha(p),\,\beta(p)\}}$$

$$V(a,b) = \prod_p p^{\max\{\alpha(p),\,\beta(p)\}}$$

Otuda se sada još jednostavnije vidi da je

$$M(a,b) \cdot V(a,b) = |ab|$$

jer je $\min\{x,y\} + \max\{x,y\} = x + y$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Teorem 4.8 (Euklid).

Skup prostih brojeva je beskonačan.

Dokaz.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je skup prostih brojeva konačan. Neka su

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

svi prosti brojevi i neka je $N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. Broj N nije djeljiv s niti jednim od brojeva p_i. Znamo da se svaki prirodni broj > 1 može rastaviti na proste faktore. Neka je p neki prosti faktor od N. Tada je $p \neq p_1, p_2, \ldots, p_n$, što je nemoguće jer su po pretpostavci $p_1, \ldots, p_n$ svi prosti brojevi. Dakle, skup prostih brojeva je beskonačan. ♡

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Teorem 4.9.

Složeni prirodni broj n ima prosti faktor $p \leqslant \sqrt{n}$.

Dokaz.

Kako je n složeni broj, slijedi

$$n = ab, \quad 1 < a, b < n, \quad a, b \in \mathbb{N}.$$

Pretpostavimo da je $a > \sqrt{n}$ i $b > \sqrt{n}$. Tada je

$$n = ab > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n,$$

što je nemoguće. Dakle, barem jedan od brojeva a i b je $\leqslant \sqrt{n}$. Uzmimo da je $a \leqslant \sqrt{n}$. Neka je p neki prosti faktor od a. Tada je p prosti faktor od n i $p \leqslant \sqrt{n}$. ♡

Napomena.

U praksi je često važno znati odgovoriti na pitanje *"Da li je n prost broj?"*, tj. ispitati da li je neki prirodni broj prost. Prethodni teorem nam daje jedan algoritam za ispitivanje prostosti. Naime, da bismo ispitali da li je n prost broj, dovoljno je provjeriti ima li on prosti faktor $p \leqslant \sqrt{n}$. Ako nema, tada možemo zaključiti da je n prost broj.

Primjer 4.13.

Da li je 89 prost broj?

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Napomena.

U praksi je često važno znati odgovoriti na pitanje *"Da li je n prost broj?"*, tj. ispitati da li je neki prirodni broj prost. Prethodni teorem nam daje jedan algoritam za ispitivanje prostosti. Naime, da bismo ispitali da li je n prost broj, dovoljno je provjeriti ima li on prosti faktor $p \leqslant \sqrt{n}$. Ako nema, tada možemo zaključiti da je n prost broj.

Primjer 4.13.

Da li je 89 prost broj?

Rješenje.

$\sqrt{89} < 10$. Prosti brojevi manji od 10 su: $2, 3, 5, 7$. Niti jedan od tih brojeva nije djelitelj broja 89, iz čega slijedi da je 89 prost broj.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Napomena.

Prethodni algoritam postaje neefikasan za velike prirodne brojeve (zamislite da vas netko pita da li je neki prirodni broj s $10\,000$ znamenaka prost, naravno uz pretpostavku da nije odmah očit odgovor, jer npr. svaki parni broj veći od 2 nije prost). U tom bi slučaju taj algoritam zahtijevao veliki broj operacija i jako puno vremena da se izvrši (ako bi i uopće bilo moguće da se izvrši u nekom razumnom vremenu).

Stoga se u praksi često koriste **vjerojatnosni testovi** za ispitivanje prostosti. Takvi testovi, osim zadanog broja n koji se ispituje da li je prost, koriste i neke druge brojeve $a \in \mathbb{N}$ koji se na slučajan način biraju iz nekog podskupa od $\mathbb{N}$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Struktura takvih testova je sljedeća:

1. Na slučajan način izaberi broj a iz unaprijed zadanog podskupa od $\mathbb{N}$.
2. Provjeri da li za zadani broj n i odabrani broj a vrijedi neka relacija (svaki takav test ima unaprijed zadanu relaciju koja se provjerava). Ako zadana relacija nije zadovoljena, tada je n složen broj (broj a u tom slučaju zovemo "svjedokom" složenosti broja n) i test se zaustavlja.
3. Ponavljaj ponovno od koraka (1) sve dok nije postignuta određena vjerojatnost da je broj n prost.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Ako nakon određenog broja iteracija nije dobiveno da je n složen broj, tada se proglašava da je n **vjerojatno prosti broj**, naravno uz određenu vjerojatnost. Vjerojatnost pogrešnog zaključka se može smanjiti sa većim brojem iteracija (što je broj iteracija veći, manja je vjerojatnost pogreške, tj. veća je vjerojatnost da je broj n prost). Najpoznatiji takvi testovi su:

1. Fermatov test
2. Miller-Rabinov test
3. Solovay-Strassenov test

Postoje i razni drugi testovi za ispitivanje prostosti. Neki od njih su jako efikasni ako se primijene na brojeve specijalnog oblika (Lucas-Lehmerov test, Prothov test).

Godine 2002. otkriven je AKS test (Agrawal-Kayal-Saxena) koji deterministički test za ispitivanje prostosti u polinomijalnom vremenu. Vrijeme izvršavanja algoritma (maksimalno vrijeme) se može izraziti polinomijalno u ovisnosti o broju znamenaka zadanog broja za koji se ispituje da li je prost. Valjanost ovog testa je bezuvjetna (ne koristi nikakve nedokazane hipoteze). Složenost je $O\left(\log^{12+\varepsilon} n\right)$.

Za prosti broj p kažemo da je **Sophie Germain prost** ako je $2p+1$ također prost.

Hipoteza.

Postoji beskonačno mnogo Sophie Germain prostih brojeva.

Napomena.

Ako bi vrijedila prethodna hipoteza, tada bi složenost AKS testa bila $O\left(\log^{6+\varepsilon} n\right)$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Eratostenovo sito

Algoritam za pronalaženje svih prostih brojeva manjih ili jednakih od zadanog prirodnog broja n glasi:

1. Ispiši sve brojeve od 2 do n.
2. Zaokruži broj 2 i precrtaj sve višekratnike broja 2.
3. Zaokruži broj 3 (prvi neprecrtani broj) i precrtaj sve višekratnike broja 3.
4. Zaokruži broj 5 (prvi neprecrtani broj) i precrtaj sve višekratnike broja 5.
5. Nastavi sve dok svi brojevi $\leqslant \sqrt{n}$ nisu zaokruženi ili precrtani. Nakon toga svi brojevi koji su zaokruženi ili nezaokruženi (ali nisu precrtani) su prosti brojevi manji ili jednaki od n.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.14.

Prosti brojevi manji ili jednaki od 50 dobiveni pomoću Eratostenovog sita.

	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	~~4~~	$\boxed{5}$	~~6~~	$\boxed{7}$	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

Prosti brojevi manji ili jednaki od 50 su:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Teorem 4.10 (Čebišev).

Za svaki prirodni broj $n > 1$, između brojeva n i $2n$ postoji barem jedan prosti broj

$\pi(x)$

Neka je x pozitivni realni broj. Definiramo funkciju

$$\pi : \langle 0, \infty \rangle \to \mathbb{N} \cup \{0\}$$

sa

$$\pi(x) = \text{broj prostih brojeva } \leqslant x$$

Teorem 4.11 (Erdős).

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\pi(n) \geqslant \frac{1}{2} \log_2 n$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Teorem 4.12 (Teorem o prostim brojevima).

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1, \ \textit{tj.} \ \ \pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

$\pi(x)$	$\frac{x}{\ln x}$	$\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$
$\pi(50) = 15$	$\frac{50}{\ln 50} \approx 12.7811$	$\frac{15}{12.7811} \approx 1.17361$
$\pi(100) = 25$	$\frac{100}{\ln 100} \approx 21.7147$	$\frac{25}{21.7147} \approx 1.15129$
$\pi(1\,000) = 168,$	$\frac{1\,000}{\ln 1\,000} \approx 144.765$	$\frac{168}{144.765} \approx 1.1605$
$\pi(1\,000\,000) = 78\,498$	$\frac{1\,000\,000}{\ln 1\,000\,000} \approx 72\,382.4$	$\frac{78\,498}{72\,382.4} \approx 1.08449$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.15.

Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ broj 14^n nikada ne završava sa 0, tj. zadnja mu je znamenka uvijek različita od nule.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.15.

Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ broj 14^n nikada ne završava sa 0, tj. zadnja mu je znamenka uvijek različita od nule.

Rješenje.

Kada bi za neki $n \in \mathbb{N}$ broj 14^n završavao sa nulom, tada bi on bio djeljiv sa 10 pa bi broj 5 bio njegov prosti faktor. No, kako je $14 = 2 \cdot 7$, tada je $14^n = 2^n \cdot 7^n$ pa bi u tom slučaju broj 14^n imao dvije različite faktorizacije na proste brojeve, jedna u kojoj nema broja 5 i jedna u kojoj se javlja 5 kao prosti faktor. Međutim, to je kontradikcija s osnovnim teoremom aritmetike. Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$, broj 14^n nikada ne završava sa 0.

Primjer 4.16.

a. *Da li je* $2^{216\,090} - 1$ *prosti broj?*

b. *Dokažite: ako je* $2^n - 1$ *prosti broj, tada je* n *prosti broj.*

c. *Da li vrijedi obrat? Ako je* n *prost broj, mora li i* $2^n - 1$ *biti prosti broj?*

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.16.

a. *Da li je* $2^{216\,090} - 1$ *prosti broj?*

b. *Dokažite: ako je* $2^n - 1$ *prosti broj, tada je* n *prosti broj.*

c. *Da li vrijedi obrat? Ako je* n *prost broj, mora li i* $2^n - 1$ *biti prosti broj?*

Rješenje.

a. $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

$$2^{216\,090} - 1 = \left(2^{72\,030}\right)^3 - 1 = \left(2^{72\,030} - 1\right)\left(2^{144\,060} + 2^{72\,030} + 1\right)$$

Dakle, broj $2^{216\,090} - 1$ je složeni broj.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Mogli smo ići i na razliku kvadrata

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

pa bismo imali

$$2^{216\,090} - 1 = \left(2^{108\,045}\right)^2 - 1 = \left(2^{108\,045} - 1\right)\left(2^{108\,045} + 1\right)$$

iz čega bismo opet zaključili da je broj $2^{216\,090} - 1$ složeni.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

- b $2^n - 1$ je prosti broj $\Rightarrow$ n je prosti broj

  Dokazujemo kontrapoziciju. Pretpostavimo da je n složeni broj. Tada je $n = ab$ za neke prirodne brojeve $a, b > 1$.

  $$2^n - 1 = \left(2^a\right)^b - 1 = \left(2^a - 1\right)\left(\left(2^a\right)^{b-1} + \left(2^a\right)^{b-2} + \cdots + 2^a + 1\right)$$

  Kako je $a > 1$, slijedi da je $2^a - 1 > 1$ pa je zbog toga $2^n - 1$ složeni broj.

- Obrat ne vrijedi. Naime,
  $n = 7$ je prost broj, tada je $2^n - 1 = 127$ isto prosti broj, ali
  $n = 11$ je prosti broj, no $2^n - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ je složeni broj

Napomena.

Brojevi oblika $M_p = 2^p - 1$, gdje je p prosti broj zovu se **Mersenovi brojevi**. Neki od Mersenovih brojeva su prosti, a neki su složeni.

Hipoteza.

Mersenovih brojeva koji su prosti ima beskonačno mnogo.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.17.

a. *Dokažite da je* $2^{20}+1$ *složeni broj.*

b. *Dokažite: ako je* 2^n+1 *prosti broj, tada je* n *potencija broja 2.*

c. *Da li vrijedi obrat? Ako je* n *potencija broja 2, mora li i* 2^n+1 *tada biti prosti broj?*

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.17.

a. *Dokažite da je* $2^{20}+1$ *složeni broj.*

b. *Dokažite: ako je* 2^n+1 *prosti broj, tada je* n *potencija broja 2.*

c. *Da li vrijedi obrat? Ako je* n *potencija broja 2, mora li i* 2^n+1 *tada biti prosti broj?*

Rješenje.

a. $x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

$$2^{20}+1=\left(2^4\right)^5+1=\left(2^4+1\right)\left(\left(2^4\right)^4-\left(2^4\right)^3+\left(2^4\right)^2-2^4+1\right)$$

Dakle, broj $2^{20}+1$ je složeni broj.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

b. $2^n + 1$ je prosti broj $\Rightarrow$ n je potencija broja 2

Dokazujemo kontrapoziciju. Pretpostavimo da n nije potencija broja 2. Tada n ima neki neparni prosti faktor p pa je $n = pm$.

$$2^n + 1 = \left(2^m\right)^p + 1 = \left(2^m + 1\right)\left(2^{m(p-1)} - 2^{m(p-2)} + \cdots + 1\right)$$

Slijedi da je $2^n + 1$ djeljiv s $2^m + 1$ pa je $2^n + 1$ složeni broj.

- Obrat ne vrijedi. Naime, za $n = 2^5 = 32$ imamo

$$2^{32} + 1 = 2^4 \cdot 2^{28} + 1 = \left(641 - 5^4\right) \cdot 2^{28} + 1 =$$

$$= 641 \cdot 2^{28} - \left(5 \cdot 2^7\right)^4 + 1 = 641 \cdot 2^{28} - \left(641 - 1\right)^4 + 1 =$$

$$= 641 \cdot \left(2^{28} - 641^3 + 4 \cdot 641^2 - 6 \cdot 641 + 4\right)$$

pa je $2^{32} + 1$ složeni broj.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Napomena.

Brojeve oblika $F_n = 2^{2^n} + 1$ zovemo **Frematovi brojevi**.

Dok su Frematovi brojevi

$$F_0 = 3,\ F_1 = 5,\ F_2 = 17,\ F_3 = 257,\ F_4 = 65\,537$$

prosti, Frematov broj $F_5 = 2^{32} + 1$ je složen.

Hipoteza.

Frematovih brojeva koji su prosti ima samo konačno mnogo.

Primjer 4.18.

Neka je p prost broj i neka je $M\left(a, p^2\right) = p$ i $M\left(b, p^3\right) = p^2$.

Odredite $M\left(ab, p^4\right)$ i $M\left(a + b, p^4\right)$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.18.

Neka je p prost broj i neka je $M(a,p^2)=p$ i $M(b,p^3)=p^2$.

Odredite $M(ab,p^4)$ i $M(a+b,p^4)$.

Rješenje.

p prost broj, $M(a,p^2)=p \;\Rightarrow\; a=pa_1,\ p\nmid a_1$

p prost broj, $M(b,p^3)=p^2 \;\Rightarrow\; b=p^2b_1,\ p\nmid b_1$

Stoga je

$$M(ab,p^4)=M(p^3a_1b_1,p^4)=p^3$$

$$M(a+b,p^4)=M(p(a_1+pb_1),p^4)=p$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Ako su brojevi p i $p+2$ prosti, tada ih zovemo **prosti blizanci** (engl., twin primes).

Na primjer, 3 i 5, 5 i 7, 11 i 13, 41 i 43 su prosti blizanci.

Hipoteza.

Postoji beskonačno mnogo prostih blizanaca.

Primjer 4.19.

Pretpostavimo da su p i $p+2$ prosti blizanci i da je $p > 3$. Dokažite da tada $6 \mid p+1$.

Rješenje.

Kako su po pretpostavci p i $p+2$ prosti blizanci, slijedi da su p i $p+2$ prosti brojevi. Zbog $p > 3$ slijedi da je $p+1$ paran broj pa $2 \mid p+1$.

Tvrdimo da i $3 \mid p+1$, tj. da je $p+1 = 3k$. Kada bi bilo $p+1 = 3k+1$, slijedilo bi da je $p = 3k$. Međutim, po pretpostavci p je prost broj i $p > 3$, pa je to nemoguće jer je za $k > 1$ broj $p = 3k$ složeni.

Kada bi bilo $p+1 = 3k+2$, slijedilo bi da je $p = 3k+1$. Tada bi bilo $p+2 = 3k+3$ pa bi broj $p+2$ bio djeljiv s 3, što je nemoguće jer je po pretpostavci $p+2$ prost i različit od 3.

Dakle, zaista $3 \mid p+1$. Sada imamo

$$2 \mid p+1 \quad \text{i} \quad 3 \mid p+1 \;\Rightarrow\; 6 \mid p+1.$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Goldbachova hipoteza.

Svaki parni prirodni broj veći od 2 se može prikazati kao suma dva prosta broja.

$$4 = 2 + 2, \quad 6 = 3 + 3, \quad 8 = 5 + 3, \quad 16 = 13 + 3$$

Teorem 4.13 (Vinogradov, 1937.).

Svaki dovoljno veliki prirodni broj može se napisati kao suma najviše četiri prosta broja.

Teorem 4.14 (Chen, 1966.).

Svaki dovoljno veliki parni prirodni broj može se napisati u obliku $x + y$, gdje je x prost, a y je ili prost ili je produkt dva prosta broja.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Kongruencije

Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$. Kažemo da je a kongruentno b modulo n i pišemo $a \equiv b \pmod{n}$ akko $n \mid a - b$. Broj n zovemo modul kongruencije.

Definicija kongruencije modulo n

$$a \equiv b \pmod{n} \overset{\text{def}}{\iff} n \mid a - b$$

$$10 \equiv 1 \pmod{3} \quad \text{jer} \quad 3 \mid 10 - 1$$

$$-15 \equiv 13 \pmod{7} \quad \text{jer} \quad 7 \mid -15 - 13$$

$$2 \not\equiv 7 \pmod{12} \quad \text{jer} \quad 12 \nmid 2 - 7$$

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Propozicija 4.8.

Kongruencija modulo n je relacija ekvivalencije na skupu cijelih brojeva.

Dokaz.

i. Refleksivnost

$$n \mid a - a \;\Rightarrow\; a \equiv a \pmod{n}, \quad \forall a \in \mathbb{Z}$$

ii. Simetričnost

$$a \equiv b \pmod{n} \;\Rightarrow\; n \mid a - b \;\Rightarrow\; n \mid b - a \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; b \equiv a \pmod{n}$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

(ii) Tranzitivnost

$$a \equiv b \pmod{n},\ b \equiv c \pmod{n} \ \Rightarrow\ n \mid a-b,\ n \mid b-c$$
$$\Rightarrow\ n \mid (a-b)+(b-c) \ \Rightarrow\ n \mid a-c \ \Rightarrow\ a \equiv c \pmod{n}$$



Napomena.

Klasu ekvivalencije nekog elementa $a \in \mathbb{Z}$ kratko označavamo s $\bar{a}$. Dakle,

$$\bar{a} = [a]_{\equiv \pmod{n}}$$

$$\bar{a} = \{b \in \mathbb{Z} : a \equiv b \pmod{n}\}$$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/_{\equiv \pmod{n}}$$

Primjer 4.20.

Odredite klase kongruencije modulo 4 na skupu $\mathbb{Z}$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.20.

Odredite klase kongruencije modulo 4 na skupu $\mathbb{Z}$.

Rješenje.

$$\bar{0} = \{a \in \mathbb{Z} : a \equiv 0 \pmod 4\} = \{a \in \mathbb{Z} : 4 \mid a - 0\} =$$
$$= \{a \in \mathbb{Z} : a = 4k \text{ za neki } k \in \mathbb{Z}\} =$$
$$= \{4k : k \in \mathbb{Z}\} = 4\mathbb{Z}$$

$$\bar{1} = \{a \in \mathbb{Z} : a \equiv 1 \pmod 4\} = \{a \in \mathbb{Z} : 4 \mid a - 1\} =$$
$$= \{a \in \mathbb{Z} : a = 4k + 1 \text{ za neki } k \in \mathbb{Z}\} =$$
$$= \{4k + 1 : k \in \mathbb{Z}\} = 4\mathbb{Z} + 1$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$$\bar{2} = \{a \in \mathbb{Z} : a \equiv 2 \pmod 4\} = \{a \in \mathbb{Z} : 4 \mid a-2\} =$$
$$= \{a \in \mathbb{Z} : a = 4k+2 \text{ za neki } k \in \mathbb{Z}\} =$$
$$= \{4k+2 : k \in \mathbb{Z}\} = 4\mathbb{Z}+2$$

$$\bar{3} = \{a \in \mathbb{Z} : a \equiv 3 \pmod 4\} = \{a \in \mathbb{Z} : 4 \mid a-3\} =$$
$$= \{a \in \mathbb{Z} : a = 4k+3 \text{ za neki } k \in \mathbb{Z}\} =$$
$$= \{4k+3 : k \in \mathbb{Z}\} = 4\mathbb{Z}+3$$

Dakle, imamo ukupno 4 klase i vrijedi

$$\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z} \uplus (4\mathbb{Z}+1) \uplus (4\mathbb{Z}+2) \uplus (4\mathbb{Z}+3)$$

gdje je $\uplus$ oznaka za disjunktnu uniju (unija međusobno disjunktnih skupova).

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Propozicija 4.9.

Svaki cijeli broj je kongruentan modulo n svojem ostatku pri dijeljenju s n. Stoga imamo n klasa ekvivalencije koje odgovaraju svakom od n mogućih ostataka

$$\begin{aligned}
\bar{0} &= n\mathbb{Z} \\
\bar{1} &= n\mathbb{Z} + 1 \\
\bar{2} &= n\mathbb{Z} + 2 \\
&\vdots \\
\overline{n-1} &= n\mathbb{Z} + n - 1
\end{aligned}$$

i vrijedi

$$\mathbb{Z} = \biguplus_{k=0}^{n-1} (n\mathbb{Z} + k).$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Napomena

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} = \bar{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad a \text{ i } b \text{ daju isti ostatak pri dijeljenju s } n$$

Primjer 4.21.

Odredite klase kojima pripadaju brojevi 1023 i -1023 modulo 18.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Napomena

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} = \bar{b}$$
$$\Leftrightarrow \quad a \text{ i } b \text{ daju isti ostatak pri dijeljenju s } n$$

Primjer 4.21.

Odredite klase kojima pripadaju brojevi 1023 i -1023 modulo 18.

Rješenje.

Tražimo $r \in \{0, 1, \ldots, 17\}$ takav da je

$$r \equiv 1023 \pmod{18}.$$

Iz teorema o dijeljenju s ostatkom slijedi

$$1023 = 18q + r$$
$$q = \left\lfloor \frac{1023}{18} \right\rfloor = \lfloor 56.83\cdots \rfloor = 56$$
$$r = 1023 - 18 \cdot 56 = 15$$

pa je $1023 \in \overline{15}$, odnosno preciznije $1023 \equiv 15 \pmod{18}$.

Isto tako, tražimo $r \in \{0, 1, \ldots, 17\}$ takav da je

$$r \equiv -1023 \pmod{18}.$$

Iz teorema o dijeljenju s ostatkom slijedi

$$-1023 = 18q + r$$
$$q = \left\lfloor \frac{-1023}{18} \right\rfloor = \lfloor -56.83\cdots \rfloor = -57$$
$$r = -1023 - 18 \cdot (-57) = 3$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

pa je $-1023 \in \bar{3}$, ili preciznije $-1023 \equiv 3 \pmod{18}$.

Još pišemo

$$1023 \bmod 18 = 15, \quad -1023 \bmod 18 = 3.$$

Općenito je

$$a \bmod n = r,$$

gdje je $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ostatak pri dijeljenju a sa n.

Redukcija modulo n je proces zamjene cijelog broja a sa $a \bmod n$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Teorem 4.15.

Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

1. *Ako je* $a \equiv b \pmod{n}$ *i* $c \equiv d \pmod{n}$, *tada je*

$$a + c \equiv b + d \pmod{n}$$
$$a - c \equiv b - d \pmod{n}$$
$$ac \equiv bd \pmod{n}$$

2. *Ako je* $a \equiv b \pmod{n}$ *i* $d \mid n$, *tada je* $a \equiv b \pmod{d}$.

3. *Ako je* $a \equiv b \pmod{n}$, *tada je* $ac \equiv bc \pmod{nc}$ *za svaki* $c \in \mathbb{N}$.

Dokaz.

1. $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow n \mid a-b \Rightarrow a-b = nk_1,\ k_1 \in \mathbb{Z}$

   $c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow n \mid c-d \Rightarrow c-d = nk_2,\ k_2 \in \mathbb{Z}$

   Zbrajanjem dobivamo $(a+c)-(b+d) = n\big(k_1+k_2\big)$,

   pa zbog $k_1+k_2 \in \mathbb{Z}$ slijedi $a+c \equiv b+d \pmod{n}$.

   Oduzimanjem dobivamo $(a-c)-(b-d) = n\big(k_1-k_2\big)$,

   pa zbog $k_1-k_2 \in \mathbb{Z}$ slijedi $a-c \equiv b-d \pmod{n}$.

   Konačno, za množenje imamo

$$\begin{aligned} ac &= \big(b+nk_1\big)\big(d+nk_2\big) = \\ &= bd + n\Big(\underbrace{bk_2+dk_1+nk_1k_2}_{=t\in\mathbb{Z}}\Big) \end{aligned}$$

   pa je $ac-bd = nt$, odnosno $ac \equiv bd \pmod{n}$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

2. $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow n \mid a-b \Rightarrow a-b = nk,\ k \in \mathbb{Z}$

   $d \mid n \Rightarrow n = dl,\ l \in \mathbb{Z}$

   Sada imamo

   $$a - b = nk = (dl)k = d(lk)$$

   iz čega slijedi $a \equiv b \pmod{d}$.

3. $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow n \mid a-b \Rightarrow a-b = nk,\ k \in \mathbb{Z}$

   Stoga je

   $$ac - bc = (a-b)c = (nk)c = (nc)k$$

   iz čega slijedi $ac \equiv bc \pmod{nc}$.



Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Teorem 4.16.

Neka je $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima u varijabli x. Ako je $a \equiv b \pmod{n}$, tada je $f(a) \equiv f(b) \pmod{n}$.

Dokaz.

$$f(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0, \quad c_i \in \mathbb{Z}$$

Zbog prethodnog teorema tada vrijedi

$$a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^2 \equiv b^2 \pmod{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^3 \equiv b^3 \pmod{n} \Rightarrow \cdots \Rightarrow a^m \equiv b^m \pmod{n}$$

Stoga je

$$c_i a^i \equiv c_i b^i \pmod{n}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, m$$

pa zbrajanjem slijedi $f(a) \equiv f(b) \pmod{n}$. ♡

Teorem 4.17 (Dijeljenje kongruencija).

Vrijedi sljedeće:

$$ax \equiv ay \pmod{n} \Leftrightarrow x \equiv y \left(\mathrm{mod}\ \tfrac{n}{M(a,n)}\right).$$

Specijalno, ako je $ax \equiv ay \pmod{n}$ *i* $M(a,n) = 1$, *tada je* $x \equiv y \pmod{n}$.

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

$$ax \equiv ay \pmod{n} \Rightarrow n \mid ax - ay$$

pa postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je

$$ax - ay = nk$$

$$a(x - y) = nk$$

$$\tfrac{a}{M(a,n)}(x - y) = \tfrac{n}{M(a,n)}k$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Kako je

$$M\left(\frac{a}{M(a,n)},\ \frac{n}{M(a,n)}\right)=1,$$

slijedi da $\frac{n}{M(a,n)} \mid x-y$ pa je $x \equiv y \left(\mathrm{mod}\ \frac{n}{M(a,n)}\right)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

$$x \equiv y \left(\mathrm{mod}\ \frac{n}{M(a,n)}\right) \ \Rightarrow\ ax \equiv ay \left(\mathrm{mod}\ \frac{an}{M(a,n)}\right)$$

Stoga je $ax \equiv ay\ (\mathrm{mod}\ n)$. ♡

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.22.

$$15 \cdot 4 \equiv 15 \cdot 2 \pmod{30} \not\Rightarrow 4 \equiv 2 \pmod{30}$$

ali

$$15 \cdot 4 \equiv 15 \cdot 2 \pmod{30} \Rightarrow 4 \equiv 2 \pmod{2}$$

$$15 \cdot 6 \equiv 15 \cdot 4 \pmod{10} \not\Rightarrow 6 \equiv 4 \pmod{10}$$

ali

$$15 \cdot 6 \equiv 15 \cdot 4 \pmod{10} \Rightarrow 6 \equiv 4 \pmod{2}$$

Rješavanje kongruencija

Neka je $f(x)$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima. Riješiti kongruenciju

$$f(x) \equiv 0 \pmod{n}$$

znači pronaći sve cijele brojeve x iz skupa $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ koji ju zadovoljavaju. Kada kažemo da je $x = k$ rješenje kongruencije, pritom se misli da je rješenje zapravo čitava klasa $\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Ako je $\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ jedina klasa brojeva koja zadovoljava gornju kongruenciju, tada kažemo da je $x = k$ jedinstveno rješenje gornje kongruencije.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Napomena.

Govoriti da je $x = k$ rješenje kongruencije

$$f(x) \equiv 0 \pmod{n}$$

kada je $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ proizvoljna funkcija (ne nužno polinom) je neprecizno i ponekad opasno. Naime, dogovorili smo se da kada kažemo da je $x = k$ rješenje, mislimo da je rješenje čitava klasa $\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Međutim, može se dogoditi da je rješenje gornje kongruencije neka klasa $\bar{t}$ koja nije iz $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, nego je iz $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ i pri tome je $m \neq n$, što ćemo i kasnije vidjeti kada je f eksponencijalna funkcija. U tom slučaju umjesto da kažemo da je $x = t$ rješenje (što bi bilo jako neprecizno), kažemo da je rješenje $x \equiv t \pmod{m}$.

Dobra navika je uvijek umjesto $x = k$ pisati $x \equiv k \pmod{m}$, tj. uvijek eksplicitno naglasiti u rješenju kongruencije i klasu, a ne samo nekog reprezentanta. Međutim, mi ćemo si u većini situacija dozvoljavati luksuz da kratko pišemo samo $x = k$ i to u slučaju kada se modul u rješenju kongruencije podudara s modulom u početnoj kongruenciji. U slučaju da se modul u rješenju razlikuje od modula u kongruenciji, tada se tog luksuza moramo odreći i navesti u rješenju i modul, tj. precizno zapisati čitavu klasu koja je rješenje zadane kongruencije.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Kažemo da je $x \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ **aditivni inverz** od a modulo n ako vrijedi

$$x + a \equiv 0 \pmod{n}.$$

U slučaju da je $a \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, tada je aditivni inverz od a modulo n jednak $n - a$, a aditivni inverz od 0 je 0.

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$$

$$\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

a	0	1	2	3	4	5
$-a$	0	5	4	3	2	1

$$x + 2 \equiv 0 \pmod 6 \qquad \bar{x} + \bar{2} = \bar{0} \qquad x \underset{6}{+} 2 = 0$$

$$x \equiv 4 \pmod 6 \qquad \bar{x} = \bar{4} \qquad x = 4$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.23.

Riješite kongruenciju $x + 3 \equiv 0 \pmod 8$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.23.

Riješite kongruenciju $x + 3 \equiv 0 \pmod 8$.

Rješenje.

Lako pogodimo da je $x = 5$ rješenje. Međutim, $x = -3$, $x = -11$, $x = 13$, $x = 21$ su također rješenja. Mogli bismo pronaći još neka druga rješenja. Međutim, sva ta rješenja pripadaju klasi $\bar{5}$ iz kvocijentnog skupa $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

$$-3, -11, 5, 13, 21 \in \bar{5}$$

U tom smislu kažemo da gornja kongruencija ima jedinstveno rješenje $x = 5$ (naravno da je i svaki drugi cijeli broj koji pri dijeljenju s 8 daje ostatak 5, također rješenje gornje kongruencije). Dakle, riješiti navedenu kongruenciju znači pronaći sve klase iz kvocijentnog skupa $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ koje ju zadovoljavaju.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Pritom kao rješenje možemo navesti samo po jednog predstavnika iz pojedine klase. Konkretno ovdje, klasa $\bar{5}$ modulo 8 je rješenje gornje kongruencije, međutim mi samo kratko kažemo da je $x = 5$ rješenje. Isto tako smo mogli, na primjer reći da je $x = 13$ rješenje.

Kako je $\bar{5}$ jedina klasa iz $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ koja zadovoljava kongruenciju $x + 3 \equiv 0 \pmod 8$, odnosno jednadžbu $\bar{x} + \bar{3} = \bar{0}$, kažemo da je $x = 5$ jedinstveno rješenje. Isto tako smo mogli reći da je $x = 13$ jedinstveno rješenje, ali po dogovoru navodimo onog predstavnika klase koji je nenegativan i manji je od modula kongruencije. Dakle, navedena kongruencija ima jedinstveno rješenje $x = 5$ ili preciznije $x \equiv 5 \pmod 8$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se zove **potpuni sustav ostataka modulo** n ako za svaki $y \in \mathbb{Z}$ postoji točno jedan x_j takav da je $y \equiv x_j \pmod{n}$.

Skup $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ je primjer potpunog sustava ostataka modulo n kojeg zovemo potpuni sustav najmanjih nenegativnih ostataka modulo n.

$\{0, 1, 2, 3, 4\}$ $\leftarrow$ potpuni sustav najmanjih nenegativnih ostataka modulo 5

$\{5, 6, 7, 8, 9\}$ $\leftarrow$ potpuni sustav ostataka modulo 5

$$5 \in \bar{0},\ 6 \in \bar{1},\ 7 \in \bar{2},\ 8 \in \bar{3},\ 9 \in \bar{4}$$

$\{15, 46, 22, 103, 69\}$ $\leftarrow$ potpuni sustav ostataka modulo 5

$$15 \in \bar{0},\ 46 \in \bar{1},\ 22 \in \bar{2},\ 103 \in \bar{3},\ 69 \in \bar{4}$$

$\{-20, 1, -62, 12, -21\}$ $\leftarrow$ potpuni sustav ostataka modulo 5

$$-20 \in \bar{0},\ 1 \in \bar{1},\ -62 \in \bar{3},\ 12 \in \bar{2},\ -21 \in \bar{4}$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Propozicija 4.10.

Neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *potpuni sustav ostataka modulo* n *i neka je* $M(a,n) = 1$. *Tada je* $\{ax_1, ax_2, \ldots, ax_n\}$ *također potpuni sustav ostataka modulo* n.

Dokaz.

Dovoljno je dokazati da je $ax_i \not\equiv ax_j \pmod{n}$ za $i \neq j$. Kada bi bilo $ax_i \equiv ax_j \pmod{n}$, tada bi zbog $M(a,n) = 1$ i ◂ teorema 4.17. slijedilo da je $x_i \equiv x_j \pmod{n}$, što je nemoguće jer je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ potpuni sustav ostataka modulo n. ♡

$\{8, 1, 14, -9\}$ $\leftarrow$ potpuni sustav ostataka modulo 4

$$8 \in \bar{0},\ 1 \in \bar{1},\ 14 \in \bar{2},\ -9 \in \bar{3}$$

$M(7, 4) = 1$

$\{7 \cdot 8,\ 7 \cdot 1,\ 7 \cdot 14,\ 7 \cdot (-9)\} = \{56, 7, 98, -63\}$

$\{56, 7, 98, -63\}$ $\leftarrow$ potpuni sustav ostataka modulo 4

$$56 \in \bar{0},\ 7 \in \bar{3},\ 98 \in \bar{2},\ -63 \in \bar{1}$$

$M(6, 4) = 2 \neq 1$

$\{6 \cdot 8,\ 6 \cdot 1,\ 6 \cdot 14,\ 6 \cdot (-9)\} = \{48, 6, 84, -54\}$

$\{48, 6, 84, -54\}$ $\leftarrow$ nije potpuni sustav ostataka modulo 4

$$48 \in \bar{0},\ 6 \in \bar{2},\ 84 \in \bar{0},\ -54 \in \bar{2}$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Teorem 4.18.

Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ *i* $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. *Kongruencija*

$$ax \equiv b \pmod{n}$$

ima rješenje akko $M(a, n) = d \mid b$. *Ako je ovaj uvjet zadovoljen, tada gornja kongruencija ima* d *rješenja modulo* n.

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Ako kongruencija $ax \equiv b \pmod{n}$ ima rješenje, onda postoji $y \in \mathbb{Z}$ takav da je $ax - b = ny$, tj. $b = ax - ny$. Kako je u posljednoj jednakosti desna strana djeljiva s $d = M(a, n)$, tada mora i lijeva strana biti djeljiva s d, tj. $d \mid b$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$\Leftarrow$

Pretpostavimo da $d \mid b$. Stavimo

$$a' = \frac{a}{d}, \quad b' = \frac{b}{d}, \quad n' = \frac{n}{d}$$

Tada imamo

$$ax \equiv b \pmod{n}$$
$$a'dx \equiv b'd \pmod{n'd}$$

pa zbog teorema 4.17. slijedi $a'x \equiv b' \pmod{n'}$ i pri tome je još $M(a', n') = 1$. Iz prethodne propozicije slijedi da kada x prolazi potpunim sustavom ostataka modulo n', tada i $a'x$ prolazi potpunim sustavom ostataka modulo n'.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Iz toga slijedi da kongruencija $a'x \equiv b' \pmod{n'}$ ima točno jedno rješenje.
Neka je x' neko rješenje od $a'x \equiv b' \pmod{n'}$. Tada su sva rješenja od $ax \equiv b \pmod{n}$ dana sa

$$x = x' + kn', \quad k = 0, 1, 2, \ldots, d-1.$$

Dakle, ako $d \mid b$, onda $ax \equiv b \pmod{n}$ ima točno d rješenja. ♡

Rješavanje kongruencije $ax \equiv b \pmod{n}$

Neka je $d = M(a, n)$. Ako $d \nmid b$, tada kongruencija nema rješenja. Ako $d \mid b$, tada kongruencija ima točno d rješenja modulo n. Neka je

$$a = a'd, \quad b = b'd, \quad n = n'd$$

Rješavamo prvo kongruenciju

$$a'x \equiv b' \pmod{n'}, \quad M(a', n') = 1$$

koja ima jedinstveno rješenje x_1 modulo n'. Tada su sva rješenja kongruencije $ax \equiv b \pmod{n}$ dana s

$$x = x_1 + kn', \quad k = 0, 1, \ldots, d-1.$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Pitanje je kako doći do broja x_1, $0 \leqslant x_1 < n'$.
Kako je $M(a', n') = 1$, postoje $u, v \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$a'u + n'v = 1.$$

Brojeve u i v možemo pronaći pomoću Euklidovog algoritma i taj smo postupak već ranije opisali .
Sada je

$$a'u \equiv 1 \pmod{n'}$$

pa je

$$a'\left(ub'\right) \equiv b' \pmod{n'}$$

iz čega slijedi da je $x_1 = ub' \bmod n'$.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.24.

Riješite kongruenciju $79x \equiv 15 \pmod{722}$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.24.

Riješite kongruenciju $79x \equiv 15 \pmod{722}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} & & q_i & & r_i \\ 722 &= 79 \cdot 9 &+ 11 \\ 79 &= 11 \cdot 7 &+ 2 \\ 11 &= 2 \cdot 5 &+ \boxed{1} \\ 2 &= 1 \cdot 2 \end{aligned}$$

Dakle, $M(722, 79) = 1$ i $1 \mid 15$ pa zadana kongruencija ima jedinstveno rješenje.

i	-1	0	1	2	3
q_i			9	7	5
y_i	0	1	-9	64	$\boxed{-329}$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Stoga je $x_1 = -329 \cdot 15 \bmod 722 = 119$. Zadana kongruencija ima jedinstveno rješenje $x = 119$, odnosno preciznije $x \equiv 119 \pmod{722}$.

Primjer 4.25.

Riješite kongruenciju $65x \equiv 27 \pmod{169}$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Stoga je $x_1 = -329 \cdot 15 \bmod 722 = 119$. Zadana kongruencija ima jedinstveno rješenje $x = 119$, odnosno preciznije $x \equiv 119 \pmod{722}$.

Primjer 4.25.

Riješite kongruenciju $65x \equiv 27 \pmod{169}$.

Rješenje.

$$\begin{array}{rcrcrl} & & & & q_i & r_i \\ 169 & = & 65 & \cdot & 2 & + \ 39 \\ 65 & = & 39 & \cdot & 1 & + \ 26 \\ 39 & = & 26 & \cdot & 1 & + \ \boxed{13} \\ 26 & = & 13 & \cdot & 2 & \end{array}$$

Dakle, $M(169, 65) = 13$ i $13 \nmid 27$ pa zadana kongruencija nema rješenja.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.26.

Riješite kongruenciju $155x \equiv 1185 \pmod{1405}$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.26.

Riješite kongruenciju $155x \equiv 1185 \pmod{1405}$.

Rješenje.

$$\begin{array}{rcrcrl} & & & & q_i & r_i \\ 1405 & = & 155 & \cdot & 9 & + \ 10 \\ 155 & = & 10 & \cdot & 15 & + \ \boxed{5} \\ 10 & = & 5 & \cdot & 2 & \end{array}$$

Dakle, $M(1405, 155) = 5$ i $5 \mid 1185$ pa zadana kongruencija ima 5 rješenja.

$$155x \equiv 1185 \pmod{1405}$$

$$31 \cdot 5 \cdot x \equiv 237 \cdot 5 \pmod{281 \cdot 5}$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Tražimo rješenje kongruencije $31x \equiv 237 \pmod{281}$.

i	-1	0	1	2
q_i			9	15
y_i	0	1	-9	$\boxed{136}$

Dobivamo da je $x_1 = 136 \cdot 237 \bmod 281 = 198$. Sva rješenja kongruencije $155x \equiv 1185 \pmod{1405}$ su dana s

$$x_k = 198 + 281k, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

odnosno

$$x_0 = 198,\ x_1 = 479,\ x_2 = 760,\ x_3 = 1041,\ x_4 = 1322.$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Neka je $a \in \mathbb{Z}$. **Multiplikativni inverz** od a modulo n je cijeli broj $s \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ za koji vrijedi

$$as \equiv 1 \pmod{n}.$$

Takav s postoji akko $M(a, n) = 1$. U slučaju da je $n = p$ prost broj, tada svi brojevi iz $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ imaju multiplikativne inverze.

Ako je, npr. $n = 6$, tada samo brojevi 1 i 5 imaju multiplikativne inverze modulo 6.

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$$

$$\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

a	0	1	2	3	4	5
a^{-1}		1				5

$2x \equiv 1 \pmod 6$ nema rješenja pa 2 nema multiplikativni inverz modulo 6.

$5x \equiv 1 \pmod 6$ ima jedinstveno rješenje $x = 5$ pa 5 ima multiplikativni inverz modulo 6 i vrijedi $5^{-1} = 5 \bmod 6$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$$

$$\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

a	0	1	2	3	4	5	6
a^{-1}		1	4	5	2	3	6

Kako je 7 prosti broj, svi brojevi iz $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ imaju multiplikativne inverze modulo 7.

$2x \equiv 1 \pmod 7$ ima jedinstveno rješenje $x = 4$ pa 2 ima multiplikativni inverz modulo 7 i vrijedi $2^{-1} = 4 \bmod 7$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.27.

Odredite, ukoliko postoje, multiplikativne i aditivne inverze elemenata 13 i 37 modulo 208. Da li ikoji parni broj ima multiplikativni inverz modulo 208?

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.27.

Odredite, ukoliko postoje, multiplikativne i aditivne inverze elemenata 13 i 37 modulo 208. Da li ikoji parni broj ima multiplikativni inverz modulo 208?

Rješenje.

Aditivni inverz

$$x + 13 \equiv 0 \pmod{208} \Rightarrow x \equiv -13 \pmod{208}$$

Stoga je $x \equiv 195 \pmod{208}$ pa je aditivni inverz od 13 modulo 208 jednak 195. Slično, iz

$$x + 37 \equiv 0 \pmod{208} \Rightarrow x \equiv -37 \pmod{208}$$

slijedi da je $x \equiv 171 \pmod{208}$ pa je aditivni inverz od 37 modulo 208 jednak 171.

Multiplikativni inverz

Pitamo se da li kongruencija $13x \equiv 1 \pmod{208}$ ima rješenja. Kako je $208 = 13 \cdot 16$, slijedi da je $M(208, 13) = 13$. No, $13 \nmid 1$ pa promatrana kongruencija nema rješenja. Stoga broj 13 nema multiplikativni inverz modulo 208.

Nadalje, rješavamo kongruenciju $37x \equiv 1 \pmod{208}$.

$$
\begin{array}{rcrcrl}
 & & & q_i & & r_i \\
208 & = & 37 & \cdot\ 5 & + & 23 \\
37 & = & 23 & \cdot\ 1 & + & 14 \\
23 & = & 14 & \cdot\ 1 & + & 9 \\
14 & = & 9 & \cdot\ 1 & + & 5 \\
9 & = & 5 & \cdot\ 1 & + & 4 \\
5 & = & 4 & \cdot\ 1 & + & \boxed{1} \\
4 & = & 1 & \cdot\ 4 & &
\end{array}
$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

i	-1	0	1	2	3	4	5	6
q_i			5	1	1	1	1	1
y_i	0	1	-5	6	-11	17	-28	$\boxed{45}$

Stoga je $x_1 = 45 \cdot 1 \bmod 208 = 45$ pa je multiplikativni inverz od 37 modulo 208 jednak 45, tj.

$$37^{-1} = 45 \bmod 208.$$

Ako je a paran broj, tada kongruencija $ax \equiv 1 \pmod{208}$ nema rješenja jer je $M(a, 208) \geqslant 2$ pa $M(a, 208) \nmid 1$. Stoga niti jedan paran broj nema multiplikativni inverz modulo 208.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Teorem 4.19 (Kineski teorem o ostacima).

Neka su $n_1, n_2, \ldots, n_r$ u parovima relativno prosti prirodni brojevi, te neka su $a_1, a_2, \ldots, a_r$ cijeli brojevi. Tada sustav kongruencija

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{n_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_r \pmod{n_r} \end{aligned}$$

ima rješenje. Ako je x_0 jedno rješenje, onda su sva rješenja dana sa $x \equiv x_0 \pmod{n_1 n_2 \cdots n_r}$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Dokaz.

Neka je $n = n_1 n_2 \cdots n_r$ i neka je

$$k_j = \frac{n}{n_j}, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Tada je $M(k_j, n_j) = 1$ jer su $n_1, n_2, \ldots, n_r$ u parovima relativno prosti. Stoga postoji $x_j \in \mathbb{Z}$ takav da je

$$k_j x_j \equiv a_j \pmod{n_j}, \quad \forall j = 1, \ldots, r.$$

Neka je $x_0 = k_1 x_1 + \cdots + k_r x_r$. Tada je

$$x_0 - k_j x_j = k_1 x_1 + \cdots + k_{j-1} x_{j-1} + k_{j+1} x_{j+1} + \cdots + k_r x_r$$

Iz definicije slijedi da je k_i djeljivo s n_j za $i \neq j$ pa onda iz posljednje jednakosti slijedi $x_0 \equiv k_j x_j \pmod{n_j}$.

Sada imamo

$$x_0 \equiv k_j x_j \pmod{n_j}, \quad k_j x_j \equiv a_j \pmod{n_j}, \quad j = 1, \ldots, r$$

pa zbog tranzitivnosti kongruencije slijedi da je

$$x_0 \equiv a_j \pmod{n_j}, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Stoga je x_0 zaista rješenje zadanog sustava kongruencija.

Neka su x, y dva rješenja zadanog sustava. Tada je

$$\begin{array}{ll} x \equiv a_1 \pmod{n_1} & y \equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{n_2} & y \equiv a_2 \pmod{n_2} \\ \vdots & \vdots \\ x \equiv a_r \pmod{n_r} & y \equiv a_r \pmod{n_r} \end{array}$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Tada, prvo zbog simetričnosti kongruencije imamo

$$x \equiv a_j \pmod{n_j}, \quad a_j \equiv y \pmod{n_j}, \quad j = 1, \ldots, r$$

a zatim zbog tranzitivnosti

$$x \equiv y \pmod{n_j}, \quad \forall j = 1, \ldots, r.$$

Kako su brojevi n_j u parovima relativno prosti, slijedi da je $x \equiv y \pmod{n_1 n_2 \cdots n_r}$.

Obrazložite ovaj posljednji zaključak i uočite zašto je za ovaj zaključak bilo važno da su brojevi n_j u parovima relativno prosti. ♡

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.28.

Riješite sustav kongruencija

$$x \equiv 1 \pmod 4$$
$$x \equiv 8 \pmod 9$$
$$x \equiv 10 \pmod{25}$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.28.

Riješite sustav kongruencija

$$x \equiv 1 \pmod 4$$
$$x \equiv 8 \pmod 9$$
$$x \equiv 10 \pmod{25}$$

Rješenje.

$$n_1 = 4,\ n_2 = 9,\ n_3 = 25$$
$$n = n_1 n_2 n_3 = 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900$$
$$k_1 = \frac{n}{n_1} = 225,\ k_2 = \frac{n}{n_2} = 100,\ k_3 = \frac{n}{n_3} = 36$$

Sada trebamo riješiti sljedeće kongruencije.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$$225x_1 \equiv 1 \pmod 4 \;\Rightarrow\; x_1 = 1$$

Kada je modul mali možemo i pogađanjem riješiti linearnu kongruenciju.

$$100x_2 \equiv 8 \pmod 9 \;\Rightarrow\; x_2 = 8$$
$$36x_3 \equiv 10 \pmod{25} \;\Rightarrow\; x_3 = 10$$

Sada imamo

$$x_0 = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 = 225 \cdot 1 + 100 \cdot 8 + 36 \cdot 10$$

pa je $x_0 = 1385$, tj. $x_0 \equiv 1385 \pmod{900}$, odnosno

$$x \equiv 485 \pmod{900}.$$

Primjer 4.29.

Riješite sustav kongruencija

$$x \equiv 4 \pmod{5}$$
$$x \equiv 1 \pmod{12}$$
$$x \equiv 7 \pmod{14}$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.29.

Riješite sustav kongruencija

$$x \equiv 4 \pmod 5$$
$$x \equiv 1 \pmod{12}$$
$$x \equiv 7 \pmod{14}$$

Rješenje.

Brojevi $5, 12$ i 14 nisu u parovima relativno prosti pa ne možemo odmah primijeniti kineski teorem o ostacima.

$$\begin{aligned} x \equiv 4 \pmod 5 &\Leftrightarrow x \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 1 \pmod{12} &\Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod 3,\ x \equiv 1 \pmod 4 \\ x \equiv 7 \pmod{14} &\Leftrightarrow x \equiv 7 \pmod 2,\ x \equiv 7 \pmod 7 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod 4 \\ x \equiv 7 \pmod 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod 4 \\ x \equiv 1 \pmod 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod 4$$

Nadalje, $x \equiv 7 \pmod 7 \Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod 7$.

Dakle, početni sustav kongruencija ekvivalentan je sa sustavom

$$x \equiv 4 \pmod 5$$
$$x \equiv 1 \pmod 3$$
$$x \equiv 1 \pmod 4$$
$$x \equiv 0 \pmod 7$$

na kojeg sada možemo primijeniti kineski teorem o ostacima.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$$n_1 = 5,\ n_2 = 3,\ n_3 = 4,\ n_4 = 7$$

$$n = n_1 n_2 n_3 n_4 = 420$$

$$k_1 = \frac{n}{n_1} = 84,\ k_2 = \frac{n}{n_2} = 140,\ k_3 = \frac{n}{n_3} = 105,\ k_4 = \frac{n}{n_4} = 60$$

$$84x_1 \equiv 4 \pmod 5 \ \Rightarrow\ x_1 = 1$$

$$140x_2 \equiv 1 \pmod 3 \ \Rightarrow\ x_2 = 2$$

$$105x_3 \equiv 1 \pmod 4 \ \Rightarrow\ x_3 = 1$$

$$60x_4 \equiv 0 \pmod 7 \ \Rightarrow\ x_4 = 0$$

Sada je

$$x_0 = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x + 3 + k_4 x_4$$

$$x_0 = 84 \cdot 1 + 140 \cdot 2 + 105 \cdot 1 + 60 \cdot 0$$

$$x_0 = 469$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Dakle, $x \equiv 469 \pmod{420}$ pa je rješenje početnog sustava kongruencija $x \equiv 49 \pmod{420}$.

Primjer 4.30.

Riješite sustav kongruencija

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$
$$x \equiv 1 \pmod{12}$$
$$x \equiv 7 \pmod{14}$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Dakle, $x \equiv 469 \pmod{420}$ pa je rješenje početnog sustava kongruencija $x \equiv 49 \pmod{420}$.

Primjer 4.30.

Riješite sustav kongruencija

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$
$$x \equiv 1 \pmod{12}$$
$$x \equiv 7 \pmod{14}$$

Rješenje.

Brojevi $3, 12$ i 14 nisu u parovima relativno prosti pa ne možemo odmah primijeniti kineski teorem o ostacima.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$$x \equiv 2 \pmod 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv 2 \pmod 3$$
$$x \equiv 1 \pmod{12} \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv 1 \pmod 3,\ x \equiv 1 \pmod 4$$
$$x \equiv 7 \pmod{14} \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv 7 \pmod 2,\ x \equiv 7 \pmod 7$$

Nadalje,

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod 4 \\ x \equiv 7 \pmod 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod 4 \\ x \equiv 1 \pmod 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod 4$$

$$x \equiv 7 \pmod 7 \ \Leftrightarrow \ x \equiv 0 \pmod 7.$$

Stoga je početni sustav kongruencija ekvivalentan s

$$x \equiv 2 \pmod 3$$
$$x \equiv 1 \pmod 3$$
$$x \equiv 1 \pmod 4$$
$$x \equiv 0 \pmod 7$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Međutim, taj sustav nema rješenja jer prve dvije kongruencije zahtijevaju postojanje broja koji bi pri dijeljenju s 3 davao ostatak 1 i ostatak 2, a jasno je da takav broj ne postoji jer je ostatak jedinstveno određen. Dakle, početni sustav kongruencija također nema rješenja.

Primjer 4.31.

Riješite sustav kongruencija

$$x + 5y \equiv 3 \pmod 8$$
$$4x + 5y \equiv 1 \pmod 8$$

Rješenje.

To je isto kao da smo rekli da se riješi sustav

$$x + 5y = 3$$
$$4x + 5y = 1$$

u prstenu $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ (ili u $\mathbb{Z}_8$).

Ako od druge kongruencije oduzmemo prvu, dobivamo $3x \equiv -2 \pmod 8$, odnosno $3x \equiv 6 \pmod 8$, pa je $x = 2$. Uvrstimo to u početne kongruencije i dobivamo

$$2 + 5y \equiv 3 \pmod 8$$
$$8 + 5y \equiv 1 \pmod 8$$

iz čega slijedi $5y \equiv 1 \pmod 8$ pa je $y = 5$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Dakle, rješenje zadanog sustava je $x = 2$, $y = 5$ ili preciznije $x \equiv 2 \pmod 8$ i $y \equiv 5 \pmod 8$.

Drugi način rješavanja je Gaussov postupak u $\mathbb{Z}_8$.

x	y	mod 8	
1	5	3	$/ \cdot 4$
4	5	1	$+$
1	5	3	$+$
0	1	5	$/ \cdot 3$
1	0	2	$x = 2$
0	1	5	$y = 5$

Primjer 4.32.

Riješite sustav kongruencija

$$3x + 5y \equiv 14 \pmod{28}$$

$$5x + 9y \equiv 6 \pmod{28}$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.32.

Riješite sustav kongruencija

$$3x + 5y \equiv 14 \pmod{28}$$
$$5x + 9y \equiv 6 \pmod{28}$$

Rješenje.

Zbrajanjem kongruencija dobivamo

$$8x + 14y \equiv 20 \pmod{28}.$$

Pomnožimo li prethodnu kongruenciju s 2, dobivamo

$$16x + 28y \equiv 40 \pmod{28}$$

odnosno

$$16x \equiv 12 \pmod{28}.$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Sada rješavamo kongruenciju $16x \equiv 12 \pmod{28}$. Kako je $M(28, 16) = 4$ i $4 \mid 12$ ta kongruencija ima 4 rješenja. Da bismo pronašli ta rješenja prvo tražimo rješenje kongruencije $4x \equiv 3 \pmod{7}$ koje lagano pogodimo da je $x_1 = 6$. Sva rješenja kongruencije $16x \equiv 12 \pmod{28}$ su

$$x_1 = 6,\ x_2 = 13,\ x_3 = 20,\ x_4 = 27.$$

Sada treba još pronaći pripadne y_i-ove.

Ako je $x_1 = 6$, tada imamo

$$\left.\begin{aligned} 18 + 5y_1 &\equiv 14 \pmod{28} \\ 30 + 9y_1 &\equiv 6 \pmod{28} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 5y_1 &\equiv 24 \pmod{28} \\ 9y_1 &\equiv 4 \pmod{28} \end{aligned}\right\}$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Sada treba riješiti kongruencije

$$5y_1 \equiv 24 \pmod{28}, \quad 9y_1 \equiv 4 \pmod{28}.$$

Ako bi obje imale isto rješenje, tada je moguć slučaj $x_1 = 6$, a ako bi imale različita rješenja, tada slučaj $x_1 = 6$ otpada. Riješimo li te dvije linearne kongruencije na način kako smo ih već prije rješavali, dobit ćemo da obje imaju isto rješenje $y_1 = 16$.

Dakle, $x_1 = 6$, $y_1 = 16$ je jedno rješenje početnog sustava kongruencija, ili preciznije, jedno rješenje je

$$x \equiv 6 \pmod{28}, \quad y \equiv 16 \pmod{28}.$$

Ako je $x_2 = 13$, tada imamo

$$\left.\begin{array}{l} 39 + 5y_2 \equiv 14 \pmod{28} \\ 65 + 9y_2 \equiv 6 \pmod{28} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 5y_2 \equiv 3 \pmod{28} \\ 9y_2 \equiv 25 \pmod{28} \end{array}\right\}$$

Međutim, kongruencije

$$5y_2 \equiv 3 \pmod{28}, \quad 9y_2 \equiv 25 \pmod{28}$$

imaju različita rješenja. Rješenje prve kongruencije je $y_2 = 23$, a rješenje druge $y_2 = 9$. Stoga slučaj $x_2 = 13$ otpada.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Ako je $x_3 = 20$, tada imamo

$$\left.\begin{array}{l} 60 + 5y_3 \equiv 14 \pmod{28} \\ 100 + 9y_3 \equiv 6 \pmod{28} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 5y_3 \equiv 10 \pmod{28} \\ 9y_3 \equiv 18 \pmod{28} \end{array}\right\}$$

Kongruencije

$$5y_3 \equiv 10 \pmod{28}, \quad 9y_3 \equiv 18 \pmod{28}$$

imaju isto rješenje $y_3 = 2$. Stoga je $x_3 = 20$, $y_3 = 2$ još jedno rješenje početnog sustava kongruencija, ili preciznije, drugo rješenje je

$$x \equiv 20 \pmod{28}, \quad y \equiv 2 \pmod{28}.$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Ako je $x_4 = 27$, tada imamo

$$\left.\begin{array}{l} 81 + 5y_4 \equiv 14 \pmod{28} \\ 135 + 9y_4 \equiv 6 \pmod{28} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 5y_4 \equiv 17 \pmod{28} \\ 9y_4 \equiv 11 \pmod{28} \end{array}\right\}$$

Međutim, kongruencije

$$5y_4 \equiv 17 \pmod{28}, \quad 9y_4 \equiv 11 \pmod{28}$$

imaju različita rješenja. Rješenje prve kongruencije je $y_4 = 9$, a rješenje druge $y_4 = 23$. Stoga slučaj $x_4 = 27$ otpada.

Dakle, početni sustav ima dva rješenja. Prvo rješenje je

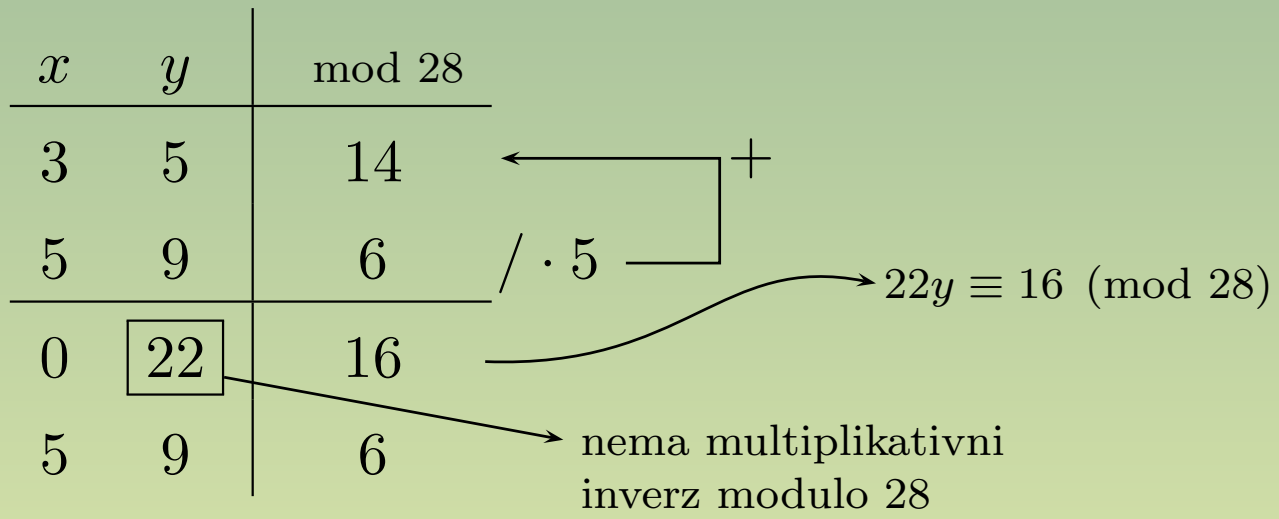
$$x \equiv 6 \pmod{28}, \quad y \equiv 16 \pmod{28},$$

a drugo rješenje je

$$x \equiv 20 \pmod{28}, \quad y \equiv 2 \pmod{28}.$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Drugi način rješavanja je Gaussov postupak u $\mathbb{Z}_{28}$.



Međutim, kako $\mathbb{Z}_{28}$ nije polje, nismo uvijek u mogućnosti provesti Gaussov postupak do kraja jer nemaju svi elementi u prstenu multiplikativni inverz. Takav slučaj je ovdje sa elementom 22 pa nismo više u mogućnosti raditi nule jer 22 nema multiplikativni inverz modulo 28. Stoga rješavamo kongruenciju $22y \equiv 16 \pmod{28}$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$$22y \equiv 16 \pmod{28}$$

$$\begin{array}{rcrcl} & & q_i & & r_i \\ 28 & = & 22 \cdot 1 & + & 6 \\ 22 & = & 6 \cdot 3 & + & 4 \\ 6 & = & 4 \cdot 1 & + & \boxed{2} \\ 4 & = & 2 \cdot 2 & & \end{array}$$

Dakle, $M(28, 22) = 2$ i $2 \mid 16$ pa zadana kongruencija ima 2 rješenja.

$$22y \equiv 16 \pmod{28}$$

$$2 \cdot 11 \cdot y \equiv 2 \cdot 8 \pmod{2 \cdot 14}$$

$$11y \equiv 8 \pmod{14}$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Tražimo rješenje y_1 kongruencije $11y \equiv 8 \pmod{14}$.

i	-1	0	1	2	3
q_i			1	3	1
y_i	0	1	-1	4	$\boxed{-5}$

Dobivamo da je $y_1 = -5 \cdot 8 \bmod 14$, odnosno $y_1 = 2$. Stoga su rješenja kongruencije $22y \equiv 16 \pmod{28}$ jednaka $y_1 = 2$ i $y_2 = 16$.

Drugi redak u tablici iz Gaussovog postupka nam daje

$$5x + 9y \equiv 6 \pmod{28}.$$

Sada rješavamo tu kongruenciju posebno za $y_1 = 2$ i posebno za $y_2 = 16$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$$5x_1 + 9y_1 \equiv 6 \pmod{28}$$

$$5x_1 + 18 \equiv 6 \pmod{28}$$

$$5x_1 \equiv 16 \pmod{28}$$

$$\begin{array}{rcl} & & q_i \quad r_i \\ 28 &=& 5 \cdot 5 + 3 \\ 5 &=& 3 \cdot 1 + 2 \\ 3 &=& 2 \cdot 1 + \boxed{1} \\ 2 &=& 1 \cdot 2 \end{array}$$

i	-1	0	1	2	3
q_i			5	1	1
y_i	0	1	-5	6	$\boxed{-11}$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Dobivamo da je $x_1 = -11 \cdot 16 \bmod 28$, odnosno $x_1 = 20$. Slično je

$$5x_2 + 9y_2 \equiv 6 \pmod{28}$$
$$5x_2 + 144 \equiv 6 \pmod{28}$$
$$5x_2 \equiv 2 \pmod{28}$$

Dobivamo da je $x_2 = -11 \cdot 2 \bmod 28$, odnosno $x_2 = 6$.

Opet smo dobili da je jedno rješenje $x_1 = 20$, $y_1 = 2$, a drugo rješenje $x_2 = 6$, $y_2 = 16$, odnosno preciznije

$$x_1 \equiv 20 \pmod{28}, \quad y_1 \equiv 2 \pmod{28}$$
$$x_2 \equiv 6 \pmod{28}, \quad y_2 \equiv 16 \pmod{28}.$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.33.

Riješite sustav kongruencija

$$2x + 3y \equiv 6 \pmod 7$$
$$3x + y \equiv 2 \pmod 7$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.33.

Riješite sustav kongruencija

$$2x + 3y \equiv 6 \pmod 7$$
$$3x + y \equiv 2 \pmod 7$$

Rješenje.

Pomnožimo li prvu kongruenciju s 2, dobivamo

$$4x + 6y \equiv 5 \pmod 7$$
$$3x + y \equiv 2 \pmod 7$$

Zbrajanjem prethodnih dviju kongruencija dobivamo

$$0 \equiv 0 \pmod 7$$

što znači da imamo ekvivalentne kongruencije pa je stoga dovoljno riješiti samo jednu.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$$2x + 3y \equiv 6 \pmod 7$$

$$2x \equiv 6 - 3y \pmod 7$$

$$\begin{array}{rcl} & q_i & r_i \\ 7 = 2 \cdot 3 & + & \boxed{1} \\ 2 = 1 \cdot 2 & & \end{array}$$

i	-1	0	1
q_i			3
y_i	0	1	$\boxed{-3}$

Tada je $x = -3(6 - 3y) \bmod 7$, odnosno $x = 3 + 2y \bmod 7$.
Kako je $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dobivamo sljedeća rješenja

$$x_1 = 3,\ y_1 = 0 \qquad x_2 = 5,\ y_2 = 1 \qquad x_3 = 0,\ y_3 = 2$$

$$x_4 = 2,\ y_4 = 3 \qquad x_5 = 4,\ y_5 = 4$$

$$x_6 = 6,\ y_6 = 5 \qquad x_7 = 1,\ y_7 = 6$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Drugi način rješavanja je Gaussov postupak u $\mathbb{Z}_7$. Kako je $\mathbb{Z}_7$ polje, moći ćemo uvijek u $\mathbb{Z}_7$ provesti Gaussov postupak do kraja.

x	y	$\mod 7$	
2	3	6	$/\cdot 2$
3	1	2	$+$
2	3	6	
0	0	0	
2	3	6	

Opet dobivamo kongruenciju $2x + 3y \equiv 6 \pmod 7$ koju riješimo na isti način kao i ranije.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Eulerov teorem

Reducirani sustav ostataka modulo n je skup cijelih brojeva r_i sa svojstvom da je

$$M(r_i, n) = 1, \quad r_i \not\equiv r_j \pmod{n} \text{ za } i \neq j$$

i da za svaki $x \in \mathbb{Z}$ takav da je $M(x, n) = 1$ postoji r_i takav da je $x \equiv r_i \pmod{n}$.

Reducirani sustav ostataka modulo n dobijemo iz potpunog sustava ostataka modulo n tako da iz njega izbacimo sve one brojeve koji nisu relativno prosti sa n.

Jedan reducirani sustav ostataka modulo n je skup svih brojeva $a \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ takvih da je $M(a, n) = 1$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Svi reducirani sustavi ostataka modulo n imaju isti broj elemenata i taj broj označavamo sa $\varphi(n)$.

Eulerova funkcija

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$\varphi(n)$ je jednak broju brojeva u nizu $1, 2, \ldots, n$ koji su relativno prosti sa n

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ $\leftarrow$ potpuni sustav ostataka modulo 6

$\{1, 5\}$ $\leftarrow$ reducirani sustav ostataka modulo 6

$$\varphi(6) = 2$$

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\leftarrow$ potpuni sustav ostataka modulo 7

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\leftarrow$ reducirani sustav ostataka modulo 7

$$\varphi(7) = 6$$

Općenito, ako je p prosti broj, tada je $\varphi(p) = p - 1$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Propozicija 4.11.

Neka je $\{r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)}\}$ *reducirani sustav ostataka modulo* n*, te neka je* $M(a,n) = 1$*. Tada je* $\{ar_1, ar_2, \ldots, ar_{\varphi(n)}\}$ *također reducirani sustav ostataka modulo* n*.*

Dokaz.

Kao prvo

$$M(a,n) = 1,\ M(r_i,n) = 1 \ \Rightarrow\ M(ar_i,n) = 1,\ \forall i$$

Nadalje, kada bi bilo $ar_i \equiv ar_j \pmod{n}$, tada bi zbog $M(a,n) = 1$ i ◂ teorema 4.17. slijedilo $r_i \equiv r_j \pmod{n}$. ♡

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Teorem 4.20 (Eulerov teorem).

Ako je $M(a,n)=1$, *tada je* $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Dokaz.

Neka je $\{r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)}\}$ reducirani sustav ostataka modulo n.

Kako je $M(a,n)=1$, prema prethodnoj propoziciji slijedi da je i $\{ar_1, ar_2, \ldots, ar_{\varphi(n)}\}$ reducirani sustav ostataka modulo n.

Zbog toga je

$$\prod_{j=1}^{\varphi(n)} (ar_j) \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} r_i \pmod{n}$$

odnosno

$$a^{\varphi(n)} \prod_{j=1}^{\varphi(n)} r_j \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} r_i \pmod{n}.$$

Nadalje, zbog

$$M(r_i, n) = 1,\ \forall i \ \Rightarrow\ M\left(\prod_{i=1}^{\varphi(n)} r_i,\ n\right) = 1,$$

i ◂ teorema 4.17. slijedi da je

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

♡

Korolar 4.2 (Mali Fermatov teorem).

Neka je p prost broj. Ako $p \nmid a$, onda je

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Nadalje, za svaki $a \in \mathbb{Z}$ vrijedi $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Dokaz.

Prema Eulerovom teoremu je $a^{\varphi(p)} \equiv 1 \pmod{p}$. Kako je $\varphi(p) = p - 1$, slijedi da je $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Dokažite i drugi dio tvrdnje i uočite da u tom dijelu nemamo nikakvu pretpostavku na cijeli broj a. Da li su za svaki cijeli broj a gornje dvije kongruencije ekvivalentne? U kojim slučajevima vrijedi ekvivalencija? U samom zaključivanju opet će trebati

◂ teorem 4.17.



Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Funkciju $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ za koju vrijedi

i. $\theta(1) = 1$

ii. $\theta(mn) = \theta(m)\,\theta(n)$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$, $M(m,n) = 1$

zovemo **multiplikativna funkcija**.

Teorem 4.21.

Eulerova funkcija φ je multiplikativna. Nadalje, za svaki prirodni broj $n > 1$ vrijedi

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{\substack{p \mid n \\ p \text{ je prost}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Dokaz.

Iz definicije je jasno da je $\varphi(1) = 1$. Nadalje, neka su $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $M(m, n) = 1$. Da bismo dokazali da je $\varphi(mn) = \varphi(m)\,\varphi(n)$, dovoljno je dokazati sljedeće:

"ako a prolazi skupom reduciranih ostataka modulo m, te ako b prolazi skupom reduciranih ostataka modulo n, tada $an + bm$ prolazi skupom reduciranih ostataka modulo mn"

Kako je $M(a, m) = 1$ i $M(b, n) = 1$, slijedi da je $M(an + bm, mn) = 1$. Nadalje, ako je

$$an + bm \equiv a'n + b'm \pmod{mn}$$

slijedi da je

$$(a - a')n \equiv (b' - b)m \pmod{mn}$$

iz čega onda zbog $M(m, n) = 1$ slijedi

$$m \mid a - a', \quad n \mid b' - b$$

pa mora biti $a = a'$ i $b = b'$ jer a-ovi i b-ovi prolaze reduciranim sustavima ostataka modulo m, odnosno modulo n. Dakle, svaka dva broja oblika $an + bm$ su nekongruentni modulo mn.

Preostaje još vidjeti da je svaki cijeli broj c za koji je $M(c, mn) = 1$ kongruentan nekom broju $an + bm$ za neke a, b, tj. da je $c \equiv an + bm \pmod{mn}$ za neke a, b.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Kako je $M(m,n)=1$, postoje $x,y\in\mathbb{Z}$ takvi da je

$$mx+ny=1.$$

Pomnožimo li ovu jednakost sa c, dobivamo

$$m\cdot cx+n\cdot cy=c.$$

Nadalje, kako je $M(m,n)=1$, $M(c,mn)=1$, $M(y,m)=1$ i $M(x,n)=1$, slijedi da je $M(cy,m)=1$ i $M(cx,n)=1$. Stoga brojevi definirani s

$$a\equiv cy\pmod{m}$$
$$b\equiv cx\pmod{n}$$

imaju tražena svojstva.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Dakle, φ je zaista multiplikativna funkcija.

Dokažimo još i formulu iz teorema. Neka je

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

rastav broja n na proste faktore. Brojevi u nizu

$$1, 2, \ldots, p_i^{\alpha_i}$$

koji nisu relativno prosti sa $p_i^{\alpha_i}$ su

$$p_i,\ 2p_i,\ 3p_i, \ldots, p_i^{\alpha_i - 1} \cdot p_i$$

pa je

$$\varphi\left(p_i^{\alpha_i}\right) = p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1} = p_i^{\alpha_i}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Kako je φ multiplikativna funkcija, vrijedi

$$\varphi(n) = \varphi\left(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}\right) = \prod_{i=1}^{k} \varphi\left(p_i^{\alpha_i}\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) =$$

$$= n \cdot \prod_{\substack{p \mid n \\ p \text{ je prost}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$



Teorem 4.22 (Wilson).

Ako je p prost broj, tada je $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Dokaz.

Za $p = 2$ i $p = 3$ se tvrdnja lagano provjeri. Neka je $p \geqslant 5$ prost broj. Članove skupa $\{2, 3, \ldots, p-2\}$ grupiramo u parove (i, j) tako da vrijedi

$$i \cdot j \equiv 1 \pmod{p}.$$

To je moguće napraviti zbog toga jer za odabrani $i \in \{2, 3, \ldots, p-2\}$ vrijedi $M(i, p) = 1$ pa kongruencija

$$i \cdot j \equiv 1 \pmod{p}$$

ima jedinstveno rješenje $j \in \{2, 3, \ldots, p-2\}$ (naime, za $i = 1$ je $j = 1$, te za $i = p-1$ je $j = p-1$).

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Nadalje je $i \neq j$ u paru (i, j) jer bi u protivnom bilo

$$i^2 \equiv 1 \pmod{p},$$

odnosno $p \mid i^2 - 1$, tj. $p \mid (i-1)(i+1)$, što je nemoguće jer je $0 < i - 1 < i + 1 < p$ i p je prost broj.

Na taj način dobivamo $\frac{p-3}{2}$ parova. Ako pomnožimo odgovarajućih $\frac{p-3}{2}$ kongruencija, dobivamo

$$2 \cdot 3 \cdots (p-2) \equiv 1 \pmod{p}$$

odnosno $(p-1)! \equiv p - 1 \pmod{p}$, tj.

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$



Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.34.

Odredite ostatke pri dijeljenju brojeva 3^{508}, 3^{509} *i* 3^{512} *sa brojem 509.*

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.34.

Odredite ostatke pri dijeljenju brojeva 3^{508}, 3^{509} i 3^{512} sa brojem 509.

Rješenje.

$p = 509$ je prosti broj. Prema malom Fermatovom teoremu je

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{ako} \quad p \nmid x.$$

Kako $509 \nmid 3$, slijedi da je $3^{508} \equiv 1 \pmod{509}$ pa broj 3^{508} pri dijeljenju s 509 daje ostatak 1.

Nadalje je $3^{509} = 3^{508} \cdot 3 \equiv 3 \pmod{509}$ pa broj 3^{509} pri dijeljenju s 509 daje ostatak 3.

Konačno, $3^{512} = 3^{508} \cdot 3^4 \equiv 81 \pmod{509}$, pa broj 3^{512} pri dijeljenju s 509 daje ostatak 81.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.35.

Odredite ostatak pri dijeljenju broja 19^{403} *s 200.*

Primjer 4.35.

Odredite ostatak pri dijeljenju broja 19^{403} s 200.

Rješenje.

Iz $200 = 2^3 \cdot 5^2$ prema ◂ teoremu 4.21. slijedi da je

$$\varphi(200) = 200 \cdot \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \tfrac{1}{5}\right) = 80.$$

Kako je $M(19, 200) = 1$, prema ◂ Eulerovom teoremu slijedi

$$19^{80} \equiv 1 \pmod{200}.$$

Dignemo li prethodnu kongruenciju na petu potenciju dobivamo

$$19^{400} \equiv 1 \pmod{200}.$$

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Nadalje je $19^3 \equiv 59 \pmod{200}$. Konačno, množenjem kongruencija

$$19^{400} \equiv 1 \pmod{200}$$
$$19^3 \equiv 59 \pmod{200}$$

dobivamo da je

$$19^{403} \equiv 59 \pmod{200},$$

tj. broj 19^{403} daje ostatak 59 pri dijeljenju s brojem 200.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primitivni korijeni

Neka je $M(a,n)=1$. Najmanji prirodni broj d sa svojstvom da je $a^d \equiv 1 \pmod{n}$ zove se **red od** a **modulo** n.

Teorem 4.23.

Neka je d red od a modulo n. Tada za $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a^k \equiv 1 \pmod{n} \Leftrightarrow d \mid k.$$

Posebno, $d \mid \varphi(n)$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Dokaz.

$\boxed{\Leftarrow}$

$$d \mid k \;\Rightarrow\; \exists l \in \mathbb{N},\ k = dl \;\Rightarrow\; a^k = \left(a^d\right)^l \equiv 1 \pmod{n}$$

$\boxed{\Rightarrow}$

Podijelimo k sa d. Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom postoje jedinstveni q i r takvi da je

$$k = dq + r, \quad 0 \leqslant r < d.$$

Sada imamo

$$a^k \equiv 1 \pmod{n} \;\Rightarrow\; a^{dq+r} \equiv 1 \pmod{n} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left(a^d\right)^q \cdot a^r \equiv 1 \pmod{n} \;\Rightarrow\; a^r \equiv 1 \pmod{n}$$

Zbog minimalnosti od d slijedi da je $r = 0$ pa $d \mid k$. ♡

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Ako je red od a modulo n jednak $\varphi(n)$, tada a zovemo **primitivni korijen modulo** n.

Napomena.

Ako je $M(a,n)=1$, tada prema Eulerovom teoremu znamo da je $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. Da bi a bio primitivni korijen modulo n, tada $\varphi(n)$ mora biti najmanji prirodni eksponent za koji je $a^{\varphi(n)}$ kongruentan 1 modulo n.
Ako je $a^d \equiv 1 \pmod{n}$ za neki $0 < d < \varphi(n)$, tada a nije primitivni korijen modulo n. Isto tako, prema prethodnom teoremu, ako $a^d \not\equiv 1 \pmod{n}$ za sve djelitelje od $\varphi(n)$ (manje od $\varphi(n)$), tada je a primitivni korijen modulo n. Naravno, mora biti $M(a,n)=1$ jer u protivnom a nema multiplikativni inverz modulo n, pa onda niti jedna prirodna potencija od a nije kongruentna 1 modulo n.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.36 (Primitivni korijeni modulo 7).

$\varphi(7) = 6$ djelitelji od $\varphi(7)$: $1, 2, 3, 6$

$1^1 \equiv 1 \pmod 7$ $\leftarrow$ 1 nije primitivni korijen modulo 7

$2^3 \equiv 1 \pmod 7$ $\leftarrow$ 2 nije primitivni korijen modulo 7

$4^3 \equiv 1 \pmod 7$ $\leftarrow$ 4 nije primitivni korijen modulo 7

$6^2 \equiv 1 \pmod 7$ $\leftarrow$ 6 nije primitivni korijen modulo 7

3 je primitivni korijen modulo 7 jer

$3^6 \equiv 1 \pmod 7, \quad 3^d \not\equiv 1 \pmod 7$ za $d \in \{1, 2, 3\}$

5 je primitivni korijen modulo 7 jer

$5^6 \equiv 1 \pmod 7, \quad 5^d \not\equiv 1 \pmod 7$ za $d \in \{1, 2, 3\}$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Teorem 4.24.

Ako je p prost broj, onda postoji točno $\varphi(p-1)$ primitivnih korijena modulo p.

Teorem 4.25.

Za prirodni broj n postoji primitivni korijen modulo n akko $n = 2$ ili $n = 4$ ili $n = p^j$ ili $n = 2p^j$, gdje je p neparni prost broj.

Primitivnih korijena modulo 7 ima ukupno $\varphi(6) = 2$ i to su brojevi 3 i 5 kao što smo vidjeli u prethodnom primjeru.
Ne postoji primitivni korijen modulo 12 jer je $12 = 2^2 \cdot 3$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Neka je g primitivni korijen modulo n. Brojevi

$$g^l, \quad l = 0, 1, \ldots, \varphi(n) - 1$$

čine reducirani sustav ostataka modulo n. Stoga za svaki cijeli broj a takav da je $M(a, n) = 1$, postoji jedinstveni l takav da je

$$g^l \equiv a \pmod{n}.$$

Broj l se zove **indeks** ili **diskretni logaritam** od a u odnosu na g. Oznaka: $l = \operatorname{ind}_g a$

Teorem 4.26.

Neka je g primitivni korijen modulo n, te $a, b \in \mathbb{Z}$ takvi da je $M(a,n) = M(b,n) = 1$. Tada vrijedi:

i. $\operatorname{ind}_g a + \operatorname{ind}_g b \equiv \operatorname{ind}_g (ab) \pmod{\varphi(n)}$
ii. $\operatorname{ind}_g 1 = 0,\ \operatorname{ind}_g g = 1$
iii. $\operatorname{ind}_g \left(a^m\right) \equiv m \cdot \operatorname{ind}_g a \pmod{\varphi(n)},\ \ m \in \mathbb{N}$
iv. $\operatorname{ind}_g (-1) = \frac{1}{2}\varphi(n),\ \ n \geqslant 3$

Dokaz.

- Neka su $l_1 = \operatorname{ind}_g a$ i $l_2 = \operatorname{ind}_g b$. Tada je

$$g^{l_1} \equiv a \pmod{n}, \quad g^{l_2} \equiv b \pmod{n}$$

iz čega množenjem kongruencija dobivamo

$$g^{l_1+l_2} \equiv ab \pmod{n}.$$

Iz definicije indeksa tada slijedi

$$l_1 + l_2 \equiv \operatorname{ind}_g (ab) \pmod{\varphi(n)}$$

odnosno

$$\operatorname{ind}_g a + \operatorname{ind}_g b \equiv \operatorname{ind}_g (ab) \pmod{\varphi(n)}.$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

ii. $g^0 \equiv 1 \pmod{n} \Rightarrow \operatorname{ind}_g 1 = 0$

$g^1 \equiv g \pmod{n} \Rightarrow \operatorname{ind}_g g = 1$

iii. Neka je $l = \operatorname{ind}_g a$. Tada je $g^l \equiv a \pmod{n}$. Iz toga slijedi $g^{lm} \equiv a^m \pmod{n}$. Iz definicije indeksa tada slijedi da je

$$lm \equiv \operatorname{ind}_g \left(a^m\right) \pmod{\varphi(n)}$$

odnosno

$$\operatorname{ind}_g \left(a^m\right) \equiv m \cdot \operatorname{ind}_g a \pmod{\varphi(n)}$$

- iv $g^{\operatorname{ind}_g(-1)} \equiv -1 \pmod{n} \Rightarrow g^{2\operatorname{ind}_g(-1)} \equiv 1 \pmod{n}$

  Kako je g primitivni korijen modulo n, mora biti

$$2\operatorname{ind}_g(-1) = \varphi(n)$$

  odnosno $\operatorname{ind}_g(-1) = \frac{1}{2}\varphi(n)$.

♡

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Propozicija 4.12.

Ako je p prost broj i $M(n, p-1) = 1$, onda kongruencija $x^n \equiv a \pmod{p}$ ima jedinstveno rješenje.

Dokaz.

Neka je g primitivni korijen modulo p. Tada iz

$$x^n \equiv a \pmod{p}$$

slijedi

$$n \operatorname{ind}_g x \equiv \operatorname{ind}_g a \pmod{p-1}. \qquad (*)$$

Kako je po pretpostavci $M(n, p-1) = 1$, slijedi da $(*)$ ima jedinstveno rješenje, pa onda i početna kongruencija ima jedinstveno rješenje. ♡

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.37.

Riješite kongruenciju $x^5 \equiv 2 \pmod 7$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.37.

Riješite kongruenciju $x^5 \equiv 2 \pmod 7$.

Rješenje.

Znamo od prije da je 3 primitivni korijen modulo 7. Stoga imamo

$$x^5 \equiv 2 \pmod 7$$
$$5 \operatorname{ind}_3 x \equiv \operatorname{ind}_3 2 \pmod 6$$
$$5 \operatorname{ind}_3 x \equiv 2 \pmod 6$$

Koristili smo da je

$$\operatorname{ind}_3 2 = 2 \quad \text{jer je} \quad 3^2 \equiv 2 \pmod 7.$$

Sada rješavamo linearnu kongruenciju

$$5 \operatorname{ind}_3 x \equiv 2 \pmod 6,$$

gdje je $\operatorname{ind}_3 x$ nepoznanica. Dobivamo da je $\operatorname{ind}_3 x = 4$ pa je $x = 3^4 \bmod 7$, odnosno $x = 4$ ili preciznije

$$x \equiv 4 \pmod 7.$$

Isto tako, znamo da je 5 primitivni korijen modulo 7 pa smo mogli i s njim raditi. Tada bismo imali

$$x^5 \equiv 2 \pmod 7$$
$$5 \operatorname{ind}_5 x \equiv \operatorname{ind}_5 2 \pmod 6$$
$$5 \operatorname{ind}_5 x \equiv 4 \pmod 6$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Koristili smo da je

$$\operatorname{ind}_5 2 = 4 \quad \text{jer je} \quad 5^4 \equiv 2 \pmod 7.$$

Sada rješavamo linearnu kongruenciju

$$5 \operatorname{ind}_5 x \equiv 4 \pmod 6,$$

gdje je $\operatorname{ind}_5 x$ nepoznanica. Dobivamo da je $\operatorname{ind}_5 x = 2$ pa je $x = 5^2 \bmod 7$, odnosno opet dobivamo $x = 4$ ili preciznije

$$x \equiv 4 \pmod 7.$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.38.

Riješite kongruenciju $x^{12} \equiv 37 \pmod{41}$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.38.

Riješite kongruenciju $x^{12} \equiv 37 \pmod{41}$.

Rješenje.

Provjerite da je 6 primitivni korijen modulo 41. $\varphi(41) = 40$

$$x^{12} \equiv 37 \pmod{41}$$

$$12 \operatorname{ind}_6 x \equiv \operatorname{ind}_6 37 \pmod{40}$$

Sada treba izračunati $\operatorname{ind}_6 37$, tj. pronaći l takav da je $6^l \equiv 37 \pmod{41}$, ili pak $6^l \equiv -4 \pmod{41}$ jer je $37 \equiv -4 \pmod{41}$.

Prema malom Fermatovom teoremu je

$$6^{40} \equiv 1 \pmod{41},$$

a kako je 6 primitivni korijen modulo 41, tada je

$$6^{20} \equiv -1 \pmod{41}.$$

Nadalje,

$$6^{6} \equiv -2 \pmod{41},$$

pa je onda

$$6^{12} \equiv 4 \pmod{41}.$$

Sada iz

$$6^{20} \equiv -1 \pmod{41}, \quad 6^{12} \equiv 4 \pmod{41}$$

množenjem slijedi

$$6^{32} \equiv -4 \pmod{41}.$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Stoga je $\operatorname{ind}_6 37 = 32$, pa imamo

$$x^{12} \equiv 37 \pmod{41}$$
$$12 \operatorname{ind}_6 x \equiv \operatorname{ind}_6 37 \pmod{40}$$
$$12 \operatorname{ind}_6 x \equiv 32 \pmod{40}$$

Rješavamo kongruenciju $12 \operatorname{ind}_6 x \equiv 32 \pmod{40}$ po nepoznanici $\operatorname{ind}_6 x$. Kako je $M(40, 12) = 4$, navedena kongruencija ima 4 rješenja, a najprije rješavamo kongruenciju $3 \operatorname{ind}_6 x \equiv 8 \pmod{10}$.

$$\begin{array}{rcl} & & q_i \quad r_i \\ 40 & = & 12 \cdot 3 + \boxed{4} \\ 12 & = & 4 \cdot 3 \end{array}$$

i	-1	0	1
q_i			3
y_i	0	1	$\boxed{-3}$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Dobivamo $\left(\operatorname{ind}_6 x\right)_1 = -3 \cdot 8 \bmod 10 = 6$. Stoga su sva rješenja kongruencije $12 \operatorname{ind}_6 x \equiv 32 \pmod{40}$ dana s

$$\left(\operatorname{ind}_6 x\right)_1 = 6, \quad \left(\operatorname{ind}_6 x\right)_2 = 16, \quad \left(\operatorname{ind}_6 x\right)_3 = 26, \quad \left(\operatorname{ind}_6 x\right)_4 = 36.$$

Stoga je

$$x_1 = 6^6 \bmod 41 = 39, \quad x_2 = 6^{16} \bmod 41 = 18,$$

$$x_3 = 6^{26} \bmod 41 = 2, \quad x_4 = 6^{36} \bmod 41 = 23$$

ili preciznije

$$x_1 \equiv 39 \pmod{41}, \quad x_2 \equiv 18 \pmod{41},$$

$$x_3 \equiv 2 \pmod{41}, \quad x_4 \equiv 23 \pmod{41}$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.39.

Riješite kongruenciju $7^x \equiv 6 \pmod{17}$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.39.

Riješite kongruenciju $7^x \equiv 6 \pmod{17}$.

Rješenje.

Provjerite da je 7 primitivni korijen modulo 17. $\varphi(17) = 16$

$$7^x \equiv 6 \pmod{17}$$
$$x \cdot \operatorname{ind}_7 7 \equiv \operatorname{ind}_7 6 \pmod{16}$$
$$x \equiv \operatorname{ind}_7 6 \pmod{16}$$

Sada treba izračunati $\operatorname{ind}_7 6$, tj. pronaći l takav da je $7^l \equiv 6 \pmod{17}$.

Iz

$$7^2 \equiv -2 \pmod{17}, \quad 7^3 \equiv 3 \pmod{17}$$

slijedi

$$7^5 \equiv -6 \pmod{17}.$$

Nadalje, iz

$$7^8 \equiv -1 \pmod{17}, \quad 7^5 \equiv -6 \pmod{17}$$

slijedi

$$7^{13} \equiv 6 \pmod{17}$$

pa je $\operatorname{ind}_7 6 = 13$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Dakle, dobivamo da je rješenje od

$$7^x \equiv 6 \pmod{17}$$

dano s

$$x \equiv 13 \pmod{16}.$$

Ovdje sada moramo biti oprezni kada kažemo da je rješenje $x = 13$ jer to rješenje je s obzirom na modul 16 koji se ne podudara s modulom u početnoj kongruenciji pa onda izbjegavamo kratki zapis $x = 13$ pa pišemo da je rješenje $x \equiv 13 \pmod{16}$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.40.

Riješite kongruenciju $3^x \equiv 2 \pmod{23}$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.40.

Riješite kongruenciju $3^x \equiv 2 \pmod{23}$.

Rješenje.

3 nije primitivni korijen modulo 23 jer je

$$3^{11} \equiv 1 \pmod{23}, \quad \text{a} \quad \varphi(23) = 22.$$

No, lako se vidi da je 5 primitivni korijen modulo 23.

$$3^x \equiv 2 \pmod{23}$$

$$x \cdot \operatorname{ind}_5 3 \equiv \operatorname{ind}_5 2 \pmod{22}$$

Sada treba izračunati $\operatorname{ind}_5 3$ i $\operatorname{ind}_5 2$.

Kako je $5^2 \equiv 2 \pmod{23}$, slijedi da je $\operatorname{ind}_5 2 = 2$. Nadalje, iz

$$5^5 \equiv -3 \pmod{23}, \quad 5^{11} \equiv -1 \pmod{23}$$

množenjem slijedi

$$5^{16} \equiv 3 \pmod{23}$$

pa je $\operatorname{ind}_5 3 = 16$. Stoga dalje imamo

$$3^x \equiv 2 \pmod{23}$$
$$x \cdot \operatorname{ind}_5 3 \equiv \operatorname{ind}_5 2 \pmod{22}$$
$$16x \equiv 2 \pmod{22}$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Rješavamo kongruenciju $16x \equiv 2 \pmod{22}$. Kako je $M(22, 16) = 2$, navedena kongruencija ima 2 rješenja, a najprije rješavamo kongruenciju $8x \equiv 1 \pmod{11}$.

$$
\begin{array}{rcrcrl}
 & & & & q_i & r_i \\
22 & = & 16 & \cdot & 1 & + \ 6 \\
16 & = & 6 & \cdot & 2 & + \ 4 \\
6 & = & 4 & \cdot & 1 & + \ \boxed{2} \\
4 & = & 2 & \cdot & 2 &
\end{array}
$$

i	-1	0	1	2	3
q_i			1	2	1
y_i	0	1	-1	3	$\boxed{-4}$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Slijedi da je $x_1 = -4 \cdot 1 \bmod 11 = 7$, pa su rješenja početne kongruencije

$$x_1 \equiv 7 \pmod{22}, \quad x_2 \equiv 18 \pmod{22}.$$

Primjer 4.41.

Riješite kongruenciju $2x^8 \equiv 5 \pmod{13}$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Slijedi da je $x_1 = -4 \cdot 1 \bmod 11 = 7$, pa su rješenja početne kongruencije

$$x_1 \equiv 7 \pmod{22}, \quad x_2 \equiv 18 \pmod{22}.$$

Primjer 4.41.

Riješite kongruenciju $2x^8 \equiv 5 \pmod{13}$.

Rješenje.

Provjerite da je 2 primitivni korijen modulo 13. $\varphi(13) = 12$

$$2x^8 \equiv 5 \pmod{13}$$
$$\operatorname{ind}_2 2 + 8 \operatorname{ind}_2 x \equiv \operatorname{ind}_2 5 \pmod{12}$$
$$1 + 8 \operatorname{ind}_2 x \equiv \operatorname{ind}_2 5 \pmod{12}$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Nadalje, iz

$$2^1 \equiv 2 \pmod{13}$$
$$2^2 \equiv 4 \pmod{13}$$
$$2^6 \equiv -1 \pmod{13}$$

slijedi da je $2^9 \equiv -8 \pmod{13}$, tj. $2^9 \equiv 5 \pmod{13}$ pa je $\operatorname{ind}_2 5 = 9$.

$$1 + 8 \operatorname{ind}_2 x \equiv 9 \pmod{12}$$
$$8 \operatorname{ind}_2 x \equiv 8 \pmod{12}$$

Kako je $M(12, 8) = 4$ i $4 \mid 8$, zadana kongruencija ima 4 rješenja. Najprije rješavamo kongruenciju

$$2 \operatorname{ind}_2 x \equiv 2 \pmod{3}$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

čije rješenje je $\operatorname{ind}_2 x = 1$. Stoga su sva rješenja kongruencije $8 \operatorname{ind}_2 x \equiv 8 \pmod{12}$ dana s

$$\operatorname{ind}_2 x = 1, \quad \operatorname{ind}_2 x = 4, \quad \operatorname{ind}_2 x = 7, \quad \operatorname{ind}_2 x = 10$$

pa su rješenja početne kongruencije $2x^8 \equiv 5 \pmod{13}$ jednaka

$$x \equiv 2 \pmod{13}, \quad x \equiv 3 \pmod{13}$$
$$x \equiv 11 \pmod{13}, \quad x \equiv 10 \pmod{13}$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.42.

Riješite kongruenciju $x^5 \equiv 2 \pmod{12}$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.42.

Riješite kongruenciju $x^5 \equiv 2 \pmod{12}$.

Rješenje.

Prema ◂ teoremu 4.25. ne postoji primitivni korijen modulo 12 jer je $12 = 2^2 \cdot 3$. Ostaci pri dijeljenju broja x sa 12 su

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\},$$

a pri dijeljenju broja x^5 sa 12 su

$$\{0, 1, 8, 3, 4, 5, 0, 7, 8, 9, 4, 11\}$$

Stoga zadana kongruencija nema rješenja.

Primjer 4.43.

Riješite kongruenciju $x^5 \equiv 4 \pmod{12}$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.43.

Riješite kongruenciju $x^5 \equiv 4 \pmod{12}$.

Rješenje.

Prema ◂ teoremu 4.25. ne postoji primitivni korijen modulo 12 jer je $12 = 2^2 \cdot 3$. Ostaci pri dijeljenju broja x sa 12 su

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\},$$

a pri dijeljenju broja x^5 sa 12 su

$$\{0, 1, 8, 3, 4, 5, 0, 7, 8, 9, 4, 11\}$$

Stoga kongruencija $x^5 \equiv 4 \pmod{12}$ ima dva rješenja

$$x \equiv 4 \pmod{12}, \quad x \equiv 10 \pmod{12}.$$

Određivanje brojeva preko ostataka

$n \in \mathbb{N},\ n > 1,\ n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$

$p_1, p_2, \ldots, p_t$ različiti prosti brojevi

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t \in \mathbb{N}$

Neka je $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ i neka su a_i ostaci pri dijeljenju a s $p_i^{\alpha_i}$, tj.

$$\begin{aligned} a &\equiv a_1 \pmod{p_1^{\alpha_1}} \\ a &\equiv a_2 \pmod{p_2^{\alpha_2}} \\ &\vdots \\ a &\equiv a_t \pmod{p_t^{\alpha_t}} \end{aligned}$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Kako su $p_1, p_2, \ldots, p_t$ u parovima relativno prosti, prema kineskom teoremu o ostacima broj a je jedinstven modulo n. Stoga, ako je $0 < a < n$, tada je a jedinstveno određen.

Dakle, želimo li u računalo spremiti "veliki" prirodni broj $a < n$, a zbog kapaciteta računala to nije moguće (premalo memorije i slično), dovoljno je spremiti ostatke koje on daje pri dijeljenju s potencijama prostih faktora broja n.

Na primjer, broj a

$$
\begin{aligned}
&114862105222164035798345615459597622609550617535165100371919032132435497642043373785984125919131579698461077002216475597159484743546548727894437992775193004364327233200858843544907140312985451859884526378666685554600120264\\
&162594434925128758515439173917211117981927965130515630402399859944348622842238985212586133584957875781334774790331173457466489493318904594669259395365563897274830987639819636825368369562762540837370673992344930772838013157\\
&160805949357049100357239025485403167593609498873008353474722009673729171931301457263105599117299231192307228998702427859984300478006841919903240470941257454779857233042562846193239693316789484888340515195347012471999731198291092300530263792732749214033381054474586762998791564970022675030912450883442895699762670256825509652406500597820580629451462393424546134887886110\\
&114546641737859525377207121854800324521039729671601401171821736505320347830203200352447510385502620024061635779389854394851803254275940799120959966035389677394088885822303349310872205941565515919625301586581450165743190101\\
&584899110141304296891494942155612098442162272909114691773684811464789856609187549226404478193393741149435497770064730317967721466055370990758071922479300952863074188478927518903862869980144039470131310930539171995703455108\\
&325465217280138783109777496866434758541476170422436197284412560982695043348630815654888549299225463458662128335061095427463008024353983256872439496207820550086727893174324637264992893248560790198098402470350265503029687 6
\end{aligned}
$$

je manji od broja $2^{1000} \cdot 3^{1000} \cdot 5^{1000}$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Stoga, umjesto spremanja broja a u memoriju (što i nije ponekad niti moguće ako nemamo puno memorije na raspolaganju), spremamo njegove ostatke pri dijeljenju s brojevima 2^{1000}, 3^{1000} i 5^{1000}. Kako je

$$a \equiv 300 \pmod{2^{1000}}$$
$$a \equiv 5003 \pmod{3^{1000}}$$
$$a \equiv 1\,000\,001 \pmod{5^{1000}}$$

umjesto broja a spremamo brojeve 300, 5003 i $1\,000\,001$. Jasno, moramo spremiti i brojeve 2^{1000}, 3^{1000} i 5^{1000} koje opet radi uštede memorije spremimo tako da posebno spremimo bazu, a posebno eksponent.

Isto tako, ako su svi naši "veliki" brojevi koje moramo spremati u memoriju manji od $2^{1000} \cdot 3^{1000} \cdot 5^{1000}$, onda je dovoljno brojeve 2^{1000}, 3^{1000} i 5^{1000} spremiti samo jedanput jer ćemo onda svaki puta gledati koje ostatke pojedini "veliki" broj daje pri dijeljenju s brojevima 2^{1000}, 3^{1000} i 5^{1000} kada ćemo ga htjeti spremiti u memoriju. Napomenimo da postoje efikasni algoritmi za redukciju prirodnog broja a modulo n. Kada takvi efikasni algoritmi ne bi postojali, cijela prethodna priča bi bila besmislena, tj. ne bi imala nikakvu praktičnu primjenu.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Neka su $a, b \in \mathbb{N}$, te neka su $m_1, m_2, \ldots, m_t \in \mathbb{N}$ u parovima relativno prosti. Neka su a_i, b_i ostaci koje daju brojevi a i b pri dijeljenju sa m_i redom, tj.

$$a \equiv a_i \pmod{m_i}, \quad b \equiv b_i \pmod{m_i}, \quad i = 1, \ldots, t.$$

Tada je

$$ab \equiv a_i b_i \pmod{m_i}.$$

Prema ◂ kineskom teoremu o ostacima produkt ab je jedinstveno određen modulo $m = m_1 \cdots m_t$ s ostacima $a_1 b_1, \ldots, a_t b_t$. Ova ideja se može iskoristiti kod određivanja produkta ab dva jako velika prirodna broja a i b koji će se izvršiti u kraćem vremenu, nego sa standardnim metodama.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.44.

Odredite, ako je moguće, produkt ab dva prirodna broja $a, b \in \mathbb{N}$ ako se zna da je $ab < 50\,000$ i vrijedi

a)
$$a \equiv 7 \pmod 8 \qquad b \equiv 7 \pmod 8$$
$$a \equiv 9 \pmod{27} \qquad b \equiv 8 \pmod{27}$$
$$a \equiv 29 \pmod{125} \qquad b \equiv 18 \pmod{125}$$

b)
$$a \equiv 1 \pmod 4 \qquad b \equiv 3 \pmod 4$$
$$a \equiv 3 \pmod{25} \qquad b \equiv 4 \pmod{25}$$
$$a \equiv 10 \pmod{343} \qquad b \equiv 79 \pmod{343}$$

Rješenje.

a

$$\begin{aligned} ab &\equiv 49 \pmod 8 \\ ab &\equiv 72 \pmod{27} \\ ab &\equiv 522 \pmod{125} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &\equiv 1 \pmod 8 \\ ab &\equiv 18 \pmod{27} \\ ab &\equiv 22 \pmod{125} \end{aligned}$$

$$n_1 = 8,\ n_2 = 27,\ n_3 = 125$$

$$n = n_1 n_2 n_3 = 8 \cdot 27 \cdot 125 = 27\,000$$

$$k_1 = \frac{n}{n_1} = 3375,\ k_2 = \frac{n}{n_2} = 1000,\ k_3 = \frac{n}{n_3} = 216$$

Sada trebamo riješiti sljedeće kongruencije.

$$3375x_1 \equiv 1 \pmod 8$$
$$1000x_2 \equiv 18 \pmod{27}$$
$$216x_3 \equiv 22 \pmod{125}$$

odnosno

$$75x_1 \equiv 1 \pmod 8$$
$$x_2 \equiv 18 \pmod{27}$$
$$91x_3 \equiv 22 \pmod{125}$$

Kada ih riješimo, dobivamo

$$x_1 = 7, \quad x_2 = 18, \quad x_3 = 117.$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Stoga je

$$ab \equiv k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 \pmod{27\,000}$$

odnosno

$$ab \equiv 12\,897 \pmod{27\,000}.$$

Kako ima više brojeva manjih od $50\,000$ koji su kongruentni $12\,897$ modulo $27\,000$ (konkretno, ovdje su to brojevi $12\,897$ i $39\,897$), produkt $ab < 50\,000$ nije jednoznačno određen. Naime, $ab = 12\,897$ ili $ab = 39\,897$.

b

$$\begin{aligned} ab &\equiv 3 \pmod 4 \\ ab &\equiv 12 \pmod{25} \\ ab &\equiv 790 \pmod{343} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &\equiv 3 \pmod 4 \\ ab &\equiv 12 \pmod{25} \\ ab &\equiv 104 \pmod{343} \end{aligned}$$

$$n_1 = 4,\ n_2 = 25,\ n_3 = 343$$

$$n = n_1 n_2 n_3 = 4 \cdot 25 \cdot 343 = 34\,300$$

$$k_1 = \frac{n}{n_1} = 8575,\ k_2 = \frac{n}{n_2} = 1372,\ k_3 = \frac{n}{n_3} = 100$$

Sada trebamo riješiti sljedeće kongruencije.

$$8575x_1 \equiv 3 \pmod 4$$
$$1372x_2 \equiv 12 \pmod{25}$$
$$100x_3 \equiv 104 \pmod{343}$$

odnosno

$$3x_1 \equiv 3 \pmod 4$$
$$11x_2 \equiv 6 \pmod{25}$$
$$25x_3 \equiv 26 \pmod{343}$$

Kada ih riješimo, dobivamo

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 21, \quad x_3 = 248.$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Stoga je

$$ab \equiv k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 \pmod{27\,000}$$

odnosno

$$ab \equiv 27\,887 \pmod{34\,300}.$$

Kako je $ab < 50\,000$ slijedi da je $ab = 27\,887$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

RSA kriptosustav

1. Izaberemo dva velika prosta broja p i q (sa oko 100 znamenaka). To možemo napraviti tako da generiramo slučajni broj s traženim brojem znamenaka i testiramo da li je prost (možemo koristiti vjerojatnosne testove za ispitivanje prostosti). Kod odabira brojeva p i q trebamo paziti da broj $n = pq$ bude otporan na specijalne metode faktorizacije. Na primjer, brojevi $p \pm 1$ i $q \pm 1$ bi trebali imati jedan veliki prosti faktor. Isto tako, p i q ne smiju biti jako blizu $\sqrt{n}$ i općenito ne smiju biti jako blizu.
2. Izračunamo $n = pq$ i $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

3. Izaberemo $e \in \mathbb{N}$ takav da je $1 < e < \varphi(n)$ i $M\big(e, \varphi(n)\big) = 1$. Popularni izbor za e je $e = 2^{16} + 1 = 65\,537$. Za neke primjene se koriste manje vrijednosti $e = 3, 5$ ili 35. Na taj način se sa manjim e ubrzava postupak šifriranja. Međutim, mali e vodi do veće nesigurnosti i mogućeg razbijanja šifre.
4. Riješimo kongruenciju $de \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$ pomoću Euklidovog algoritma i na taj način dobijemo d.
5. Od pet brojeva n, p, q, d, e brojevi n i e su javni (dakle, slobodno ih kažemo bilo kome, stavimo na web,...), dok brojevi p, q i d moraju ostati tajni i samo ih mi znamo.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Postupak šifriranja

$$x \mapsto x^e \bmod n$$

Dakle, želi li nam netko poslati šifriranu poruku, za njega je dovoljno da zna naše brojeve n i e koji su javni. Naravno, on onda neće nakon toga moći dešifrirati opet svoju poruku jer ne zna faktorizaciju broja n, tj. ne zna proste faktore p i q (koje mi znamo), a niti ne može doći do njih nikakvim algoritmima ako su p i q pažljivo odabrani na prethodno opisani način (barem današnja računala to nisu u stanju napraviti). Međutim, onaj tko je šifrirao poruku, ne treba ju znati dešifrirati kad zna sadržaj te poruke, a jedino ju može dešifrirati samo onaj tko zna faktorizaciju broja n, tj. tko zna brojeve p i q.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Postupak dešifriranja

$$y \mapsto y^d \bmod n$$

Dakle, želi li netko dešifrirati poruku koja je šifrirana javnim dijelom ključa (n, e), on mora znati broj d, a da bi došao do broja d mora prethodno znati faktorizaciju broja $n = pq$, tj. proste brojeve p i q. Stoga je (p, q, d) tajni dio ključa i samo ga mi znamo.

Sigurnost RSA

Sigurnost RSA kriptosustava temelji se na nemogućnosti faktorizacije velikih prirodnih brojeva na proste faktore ako su ti brojevi pažljivo odabrani.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Dokažimo da je postupak dešifriranja ispravan, tj. da ćemo opisanim dešifriranjem dobiti polaznu poruku koja je bila šifrirana. Neka je x poruka (broj) koji želimo šifrirati. Šifriranjem dobivamo poruku y. Vrijedi

$$y = x^e \bmod n.$$

Sada imamo

$$y^d \equiv \left(x^e\right)^d \equiv x^{ed} \pmod{n}.$$

Kako je

$$ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$$
$$ed \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$$

slijedi da je

$$ed \equiv 1 \pmod{p-1}$$
$$ed \equiv 1 \pmod{q-1}$$

pa je $ed-1 = k_1(p-1)$ i $ed-1 = k_2(q-1)$ za neke $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$.

Iz malog Fermatovog teorema slijedi da je tada

$$x^{ed} \equiv x \pmod{p}$$
$$x^{ed} \equiv x \pmod{q}$$

Kako je $M(p,q) = 1$, kineski teorem o ostacima povlači da je

$$x^{ed} \equiv x \pmod{pq}$$

pa je stoga

$$y^d \equiv x \pmod{n}.$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

slovo	broj	slovo	broj
A	01	N	14
B	02	O	15
C	03	P	16
D	04	Q	17
E	05	R	18
F	06	S	19
G	07	T	20
H	08	U	21
I	09	V	22
J	10	W	23
K	11	X	24
L	12	Y	25
M	13	Z	26

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.45.

Neka je $n = pq$, $p = 17$, $q = 23$, $n = 391$. Neka je $e = 5$. Riječ MAT šifrirajte pomoću RSA kriptosustava s navedenim parametrima.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.45.

Neka je $n = pq$, $p = 17$, $q = 23$, $n = 391$. Neka je $e = 5$. Riječ MAT šifrirajte pomoću RSA kriptosustava s navedenim parametrima.

Rješenje.

$$\mathrm{MAT} \mapsto 130120$$

Kako je $130120 > 391$, moramo navedeni tekst podijeliti na blokove. Ovdje ćemo šifrirati slovo po slovo (u praksi to ne radimo jer to dovodi do veće nesigurnosti i razbijanja šifre). U praksi se uzimaju blokovi puno većih duljina i naravno veći n.

$$x^e \bmod n, \quad e = 5,\ n = 391$$

$$13^5 \equiv 234 \pmod{391} \Rightarrow 13 \mapsto 234$$

$$1^5 \equiv 1 \pmod{391} \Rightarrow 01 \mapsto 001$$

$$20^5 \equiv 56 \pmod{391} \Rightarrow 20 \mapsto 056$$

otvoreni tekst: 130120

šifrat: 234001056 ili 234 1 56

Želimo li dešifrirati poruku 234001056 trebamo znati broj d. Međutim, ovdje nije problem razbiti šifru jer je lagano pronaći faktorizaciju broja $n = 391 = 17 \cdot 23$. Tada je

$$\varphi(391) = \varphi(17)\varphi(23) = 352$$

pa možemo pronaći broj d koji nam je potreban za dešifriranje.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Rješavamo kongruenciju

$$de \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$$

odnosno

$$5d \equiv 1 \pmod{352}$$

iz čega dobijemo $d = 141$.

Sada možemo dešifrirati poruku $234|001|056$.

$$y^d \bmod n, \quad d = 141,\ n = 391$$

$$234^{141} \equiv 13 \pmod{391} \ \Rightarrow\ 234 \mapsto 13$$

$$1^{141} \equiv 1 \pmod{391} \ \Rightarrow\ 001 \mapsto 01$$

$$56^{141} \equiv 20 \pmod{391} \ \Rightarrow\ 056 \mapsto 20$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.46.

Neka je $n = pq$, $p = 307$, $q = 911$, $n = 279677$. *Neka je* $e = 19$. *Riječ MAT šifrirajte pomoću RSA kriptosustava s navedenim parametrima.*

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.46.

Neka je $n = pq$, $p = 307$, $q = 911$, $n = 279677$. Neka je $e = 19$. Riječ MAT šifrirajte pomoću RSA kriptosustava s navedenim parametrima.

Rješenje.

$$\mathrm{MAT} \mapsto 130120$$

Kako je $130120 < 279677$, možemo odmah šifrirati cijelu riječ odjednom.

$$130120^{19} \bmod 279677 = 63421$$

otvoreni tekst: 130120

šifrat: 63421

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.47.

Neka je $n = pq$, $p = 307$, $q = 911$, $n = 279677$. *Neka je* $e = 19$. *Riječ MATEMATIKA šifrirajte pomoću RSA kriptosustava s navedenim parametrima.*

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.47.

Neka je $n = pq$, $p = 307$, $q = 911$, $n = 279677$. Neka je $e = 19$. Riječ MATEMATIKA šifrirajte pomoću RSA kriptosustava s navedenim parametrima.

Rješenje.

$$\text{MATEMATIKA} \mapsto 13012005130120091101$$

Ako podijelimo na blokove duljine 2, tada imamo

$$\text{MA TE MA TI KA} \mapsto 1301|2005|1301|2009|1101$$

$$1301^{19} \bmod 279677 = 41346$$

$$2005^{19} \bmod 279677 = 199474$$

$$1301^{19} \bmod 279677 = 41346$$

$$2009^{19} \bmod 279677 = 253525$$

$$1101^{19} \bmod 279677 = 238624$$

šifrat: $41346\ 199474\ 41346\ 253525\ 238624$

Ako bismo podijelili na blokove od tri slova, isto bi u ovom slučaju prošlo, samo što još zadnje slovo A ponovimo dva puta tako da i zadnji blok bude duljine tri.

$$\text{MAT EMA TIK AAA} \mapsto 130120|051301|200911|010101$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$$130120^{19} \bmod 279677 = 63421$$
$$51301^{19} \bmod 279677 = 31019$$
$$200911^{19} \bmod 279677 = 85830$$
$$10101^{19} \bmod 279677 = 213561$$

šifrat: $63421\ 31019\ 85830\ 213561$

Općenito je s parametrom $n = 279677$ moguće šifrirati blokove od dva slova jer već u bloku od tri slova možemo imati šesteroznamenkasti broj pa postoji opasnost da on bude veći od $n = 279677$. Broj n mora biti barem sedmeroznamenkasti da bismo mogli šifrirati blokove od tri slova.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Zapravo, u našoj tablici je broj 26 pridružen slovu Z i ako ne koristimo više nikoje druge znakove možemo šifrirati blokove od tri slova i sa šesteroznamenkastim brojem n ako mu je prva znamenka $\geqslant 3$ ili ako počinje s 27 i slično.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

ISBN

- ISBN $\leftarrow$ International Standard Book Number
- koristi se od 1968. godine

ISBN je deseteroznamenkasti broj koji daje sljedeće informacije:

- državu u kojoj je knjiga izdana (odnosno govorno područje)
- izdavača knjige
- informacije o samoj knjizi

Sve informacije su spremljene u prvih devet znamenaka, a deseta znamenka je znamenka provjere koja nas uvjerava u ispravnost prvih devet znamenaka.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

$$a_1, a_2, \ldots, a_{10} \leftarrow \text{ znamenke ISBN-a}$$

$$a_1, a_2, \ldots, a_9 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$$

$$a_{10} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9, 10\}$$

Ako je $a_{10} = 10$, tada se piše $a_{10} = X$.

Uvjet koji mora biti zadovoljen je

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 9a_9 + 10a_{10} \equiv 0 \pmod{11}$$

Stavimo li

$$w = (1, 2, 3, \ldots, 9, 10), \quad a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9, a_{10})$$

tada se gornji uvjet može elegantno zapisati pomoću skalarnog produkta vektora kao

$$w \cdot a \equiv 0 \pmod{11}.$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.48 (Ispravni ISBN).

$$0-936031-03-4$$

GOVORNO PODRUČJE — IZDAVAČ — KNJIGA — ZNAMENKA PROVJERE

$$1\cdot 0+2\cdot 9+3\cdot 3+4\cdot 6+5\cdot 0+6\cdot 3+7\cdot 1+8\cdot 0+9\cdot 3+10\cdot 4=143$$

Broj 143 je djeljiv s 11 pa je gornji ISBN ispravan.

Evo još nekoliko ispravnih ISBN-ova:

$$0-387-94846-5$$

$$99921-58-10-7$$

$$80-902734-1-6$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.49.

Odredite znamenku A tako da 9−123A45−51−X bude ispravni ISBN.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.49.

Odredite znamenku A tako da 9−123A45−51−X bude ispravni ISBN.

Rješenje.

$$1 \cdot 9 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5A + 6 \cdot 4 + \\ + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 1 + 10 \cdot 10 \equiv 0 \pmod{11}$$

Slijedi da mora biti

$$5A \equiv 5 \pmod{11}$$

odakle se lagano dobije da je $A = 1$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.50.

Dokažite da se greška u jednoj znamenki u ISBN-u uvijek detektira navedenim testom.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.50.

Dokažite da se greška u jednoj znamenki u ISBN-u uvijek detektira navedenim testom.

Rješenje.

Neka je $a_1 a_2 \cdots a_9 a_{10}$ ispravni ISBN. Tada je

$$\sum_{i=1}^{10} i a_i \equiv 0 \pmod{11}.$$

Stoga postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sum_{i=1}^{10} i a_i = 11k.$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Promijenimo i-tu znamenku a_i u znamenku a_i'. Tada imamo

$$a_1 + 2a_2 + \cdots + ia_i' + \cdots + 10a_{10} =$$

$$= \sum_{i=1}^{10} ia_i + ia_i' - ia_i = 11k + i(a_i' - a_i) \not\equiv 0 \pmod{11}$$

jer je $0 < i < 11$ i $0 < \left|a_i' - a_i\right| < 11$.

Dakle, navedeni test uvijek detektira grešku u jednoj znamenci (samo mi ne znamo koja je to znamenka).

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.51.

a) *Promijenite treću i šestu znamenku u ISBN-u*

$$2-429783-29-0$$

tako da dobijete neispravni ISBN.

b) *Promijenite treću i šestu znamenku u ISBN-u iz (a) dijela zadatka tako da dobiveni broj bude i dalje ispravni ISBN.*

c) *Dokažite da se bilo koje dvije znamenke ispravnog ISBN-a mogu uvijek promijeniti tako da se greška ne može detektirati navedenim testom.*

Rješenje.

a

$$2{-}429783{-}29{-}0$$

Na primjer, stavimo $a_3 = 1$, $a_6 = 5$. Tada dobivamo

$$2{-}419753{-}29{-}0$$

Test ispravnosti daje

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 5 + \\ + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 9 + 10 \cdot 0 = 232 \not\equiv 0 \pmod{11}$$

da dobiveni broj nije ispravni ISBN.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

b

$$2-429783-29-0$$

Na primjer, stavimo $a_3 = 1$, $a_6 = 3$. Tada dobivamo

$$2-419733-29-0$$

Test ispravnosti daje

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 3 + \\ + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 9 + 10 \cdot 0 = 232 \equiv 0 \pmod{11}$$

da dobiveni broj jest ispravni ISBN.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

- Neka je $a_1 a_2 \cdots a_9 a_{10}$ ispravni ISBN. Tada je

$$\sum_{t=1}^{10} t a_t \equiv 0 \pmod{11}.$$

Promotrimo i-tu i j-tu znamenku a_i i a_j. Promijenimo li i-tu znamenku u a_i', tada je

$$\sum_{\substack{t=1 \\ t \neq i,\, t \neq j}}^{10} t a_t + i a_i'$$

neki broj koji pri dijeljenju s 11 daje neki ostatak $r \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$.

Dakle,

$$\sum_{\substack{t=1 \\ t\neq i,\, t\neq j}}^{10} ta_t + ia'_i \equiv r \pmod{11}$$

za neki $r \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$.

Općenito je $a'_j \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$, tj. a'_j prolazi potpunim sustavom ostataka modulo 11. Kako je $M(j, 11) = 1$, tada prema propoziciji 4.10. slijedi da i ja'_j prolazi potpunim sustavom ostataka modulo 11. Zbog toga možemo odabrati a'_j takav da vrijedi

$$ja'_j \equiv 11 - r \pmod{11}.$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Tada je

$$\sum_{\substack{t=1 \\ t\neq i,\, t\neq j}}^{10} ta_t + ia'_i + ja'_j \equiv 0 \pmod{11}$$

i dvije greške neće biti detektirane. Sigurno je i $a'_j \neq a_j$ jer u protivnom test ne bi detektirao jednu grešku (koja bi bila na i-toj znamenki), što je nemoguće jer smo u prethodnom primjeru pokazali da ovaj test sigurno detektira jednu grešku.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Napomena.

ISBN-ovi nakon 1.1.2007. su dugački 13 znamenaka raspoređenih u 5 dijelova

- GS1 prefiks 978 ili 979
- govorno područje
- izdavač knjige
- informacija o samoj knjizi
- znamenka provjere

Test ispravnosti za ISBN $a_1a_2\cdots a_{12}a_{13}$ je sljedeći

$$a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + \cdots + 3a_{12} + a_{13} \equiv 0 \pmod{10}$$

Primjer 4.52.

Pretvorite 10-znamenkasti ISBN 0−387−94846−5 u 13-znamenkasti ISBN.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.52.

Pretvorite 10-znamenkasti ISBN 0−387−94846−5 u 13-znamenkasti ISBN.

Rješenje.

Stavimo da je prefiks jednak 978.

$$978-0-387-94846-\mathrm{d}$$

$$9+3\cdot 7+8+3\cdot 0+3+3\cdot 8+$$
$$+7+3\cdot 9+4+3\cdot 8+4+3\cdot 6+d\equiv 0 \pmod{10}$$

Slijedi da mora biti $d+149\equiv 0 \pmod{10}$ odakle se lagano dobije da je $d=1$.

$$978-0-387-94846-1$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Universal Product Code

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

UPC je način reprezentacije UPN-a (Universal product number) preko crnih i bijelih pruga različitih debljina. UPC se još zove i **bar kod**.



UPN ima 12 znamenaka i oblika je

$$x-xxxxx-xxxxx-x$$

pri čemu je svaki od x-ova neka znamenka između 0 i 9.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Zadnja znamenka je znamenka provjere ispravnosti UPN-a. Pravilo za provjeru ispravnosti glasi

$$3 \cdot (\text{suma znamenaka na neparnim mjestima}) + \\ + (\text{suma znamenaka na parnim mjestima}) \equiv 0 \pmod{10}$$

Stavimo li $\mathrm{UPN} = a_1 a_2 \cdots a_{11} a_{12}$, pa definiramo vektore

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_{11}, a_{12}), \quad w = (3, 1, 3, 1, \ldots, 3, 1),$$

tada se test za provjeru ispravnosti UPN-a može elegantno zapisati

$$w \cdot a \equiv 0 \pmod{10}.$$

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.53.

Odredite znamenku x tako da 1−29347−49x26−8 bude ispravni UPN.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.53.

Odredite znamenku x tako da 1−29347−49x26−8 bude ispravni UPN.

Rješenje.

$$3 \cdot 1 + 2 + 3 \cdot 9 + 3 + 3 \cdot 4 + 7 + \\ + 3 \cdot 4 + 9 + 3x + 2 + 3 \cdot 6 + 8 \equiv 0 \pmod{10}$$

Slijedi da mora biti

$$3x + 103 \equiv 0 \pmod{10}$$

odakle se lagano dobije da je $x = 9$.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Promotrimo na kraju strukturu bar koda UPN-a. Na slici vidimo da bar kod počinje i završava s crno-bijelo-crnim nizom tankih linija i da je podijeljen s bijelo-crno-bijelo-crno-bijelim nizom tankih linija na dva dijela.



U svakom od tih dijelova svaka od znamenki odgovara nizu od četiri linije različitih debljina. U lijevom dijelu svaki uzorak je oblika bijelo-crno-bijelo-crno, a u desnom dijelu svaki uzorak je oblika crno-bijelo-crno-bijelo.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Uvedimo sljedeće oznake za crne i bijele linije:

0	$\rightarrow$ tanka bijela linija	1	$\rightarrow$ tanka crna linija
00	$\rightarrow$ deblja bijela linija	11	$\rightarrow$ deblja crna linija
000	$\rightarrow$ još deblja bijela linija	111	$\rightarrow$ još deblja crna linija
0000	$\rightarrow$ najdeblja bijela linija	1111	$\rightarrow$ najdeblja crna linija

Na primjer, znamenka 6 u lijevom dijelu zadanog bar koda je kodirana s 0101111, a to znači

tanka bijela linija, tanka crna linija, tanka bijela linija, najdeblja crna linija.

Isto tako, znamenka 6 u desnom dijelu zadanog bar koda je kodirana s 1010000, a to znači

tanka crna linija, tanka bijela linija, tanka crna linija, najdeblja bijela linija.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Navedimo sada kodove svih znamenaka u bar kodu.

znamenka	s lijeve strane	s desne strane
0	0001101	1110010
1	0011001	1100110
2	0010011	1101100
3	0111101	1000010
4	0100011	1011100
5	0110001	1001110
6	0101111	1010000
7	0111011	1000100
8	0110111	1001000
9	0001011	1110100

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Uočite da se kodovi znamenki s desne strane dobivaju iz kodova znamenki s lijeve strane zamjenom nula i jedinica.

Primjer 4.54.

U praksi skaner za čitanje bar kodova može pročitati bar kod s lijeva na desno ili s desna na lijevo, ovisno o tome kako ga mi provučemo kroz njega. Pronađite jedan jednostavan algoritam na temelju kojeg bi skaner za čitanje bar kodova mogao zaključiti da li on bar kod čita s lijeva na desno ili s desna na lijevo. U tu svrhu, uočite neku zakonitost kodova znamenki s lijeve strane bar koda i neku zakonitost kodova znamenki s desne strane bar koda.

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Rješenje.

Suma znamenki u bilo kojem kodu s lijeve strane bar koda je neparan broj, dok je suma znamenki u bilo kojem kodu s desne strane bar koda paran broj. Stoga ako skaner prvo pročita, npr. 0011101, uočit će da je suma znamenaka paran broj, što znači da čita bar kod s desna na lijevo i prvo je pročitao najdesniju znamenku koja je u ovom slučaju jednaka 4 (naime, moramo tada i 0011101 čitati s desna, tj. 1011100).

Ako bi skaner prvo pročitao, npr. 0110111, uočio bi da je suma znamenaka neparan broj i zaključio da čita bar kod s lijeva na desno i da je prvo pročitao najljeviju znamenku koja je u ovom slučaju jednaka 8 (0110111 je kod s lijeve strane od znamenke 8).

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.55.

UPN-ovi su zadani svojim bar kodovima. Pokušajte otkriti o kojim se UPN-ovima radi.





Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Primjer 4.55.

UPN-ovi su zadani svojim bar kodovima. Pokušajte otkriti o kojim se UPN-ovima radi.





Rješenje.

1−13579−02432−9 1−18579−62485−2

Skup cijelih brojeva
Djeljivost
Euklidov algoritam
Mreže
Prosti brojevi
Eratostenovo sito
Kongruencije
Rješavanje kongruencija
Eulerov teorem
Primitivni korijeni
Brojevi preko ostataka
RSA kriptosustav
ISBN
UPC

Zadatak 4.4 (Bar kod ISBN-a).

Opišite, gledajući donju sliku, strukturu bar koda ISBN-a.
Pronađite na webu detaljnije informacije o tome.



Dio V

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Sadržaj

- Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
  - Uvod
  - Principi prebrojavanja
  - Permutacije i kombinacije
  - Formula uključivanja–isključivanja
  - Deranžmani
  - Rekurzivne relacije
  - Nelinearne rekurzije i sustavi rekurzija
  - Primjene rekurzija
  - Funkcije izvodnice
  - Diskretna teorija vjerojatnosti
  - Uspoređivanje događaja
  - Definicija vjerojatnosti
  - Klasični vjerojatnosni prostor
  - Uvjetna vjerojatnost
  - Nezavisnost događaja
  - Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti

Uvod

Principi prebrojavanja

Permut. i kombinac.

FUI

Deranžmani

Rekurzivne relacije

Nelinearne rekurzije

Primjene rekurzija

Funkcije izvodnice

Diskretna vjerojatnost

Uspoređivanje događaja

Definicija vjerojatnosti

Klasični vjerojatnosni prostor

Uvjetna vjerojatnost

Nezavisnost događaja

Bayesova formula

Uvod

Kombinatorika je grana matematike koja se uglavnom bavi konačnim skupovima i strukturama. U praksi se često javlja potreba da znamo koliko elemenata ima neki konačni skup kojeg promatramo, tj. potrebno je prebrojiti sve njegove elemente, odnosno treba odrediti njegov kardinalni broj. Ponekad je to prebrojavanje jednostavno (npr., prebrojite koliko slova ima na ovom slajdu), no u većini situacija to prebrojavanje može biti veoma kompliciranо.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Naime, poznato nam je da skupove možemo zadati na dva načina, nabrajanjem svih njegovih elemenata i navođenjem karakterističnog svojstva kojeg elementi moraju zadovoljavati da bi pripadali zadanom skupu. U prvom slučaju nije problem prebrojiti sve elemente (u slučaju većeg broja elemenata može nam u tome pomoći računalo ako taj skup imamo spremljen negdje u memoriji ili disku). Međutim, u drugom slučaju se mogu javiti problemi jer karakteristična svojstva pomoću kojih definiramo neki skup mogu biti komplicirana, što nam može otežati prebrojavanje.

Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Ako nas zanima samo broj elemenata takvih skupova, onda ne moramo efektivno brojati elemente, već se možemo poslužiti nekim **metodama prebrojavanja**. Stoga se kombinatorika bavi istraživanjem različitih specijalnih metoda koje daju odgovor na pitanja kao što su: koliko ima objekata sa zadanim svojstvima, na koliko se načina može dogoditi neki događaj i slično.

Nama je ovdje cilj da obradimo neke od tih metoda prebrojavanja, ali opet napominjemo da su to samo one najosnovnije metode i da se u kombinatorici javljaju i mnoge druge metode prebrojavanja koje ovdje nećemo spominjati, a neke od njih ćemo samo djelomično obraditi.

Neke od tih metoda koje ćemo ovdje obraditi su

- Princip sume
- Princip produkta
- Bijektivna korespodencija
- Formula uključivanja-isključivanja
- Rekurzivne relacije
- Funkcije izvodnice

Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

U rješavanju kombinatornih problema potrebna je **dosjetljivost** i **oštroumnost** jer ne postoji neka univerzalna tehnika kojom bi se rješavali kombinatorni zadaci (kao kod deriviranja, računanja limesa i sl.), već je potrebno **razumjeti** spomenute metode i znati u kojim se situacijama one primjenjuju, što isto ponekad nije jednostavno jer to ovisi o težini problema kojeg promatramo (u što ćete se i sami uvjeriti nakon mnogo primjera koje ćemo ovdje riješiti spomenutim metodama).

Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Čovjek na početku može biti zbunjen kombinatornim zadacima i njihovim rješenjima, a ta zbunjenost sve više raste nakon sve većeg broja riješenih zadataka baš zbog toga jer se ne vidi neka pravilnost u tim rješenjima koja bi se mogla primijeniti na više različitih zadataka, a ne može se niti vidjeti zbog toga što uglavnom niti ne postoji.

Ovdje se moramo osloboditi potrebe da imamo neko pravilo koje primijenjujemo gotovo u svakom zadatku (kao kod deriviranja, gdje imamo pravila deriviranja koja cijelo vrijeme primijenjujemo, i da budemo iskreni, u nekom trenutku nam to već i dosadi jer cijelo vrijeme radimo jedno te isto na različitim funkcijama).

U kombinatorici ne postoji opasnost da se pojavi zasićenost nekim zadacima jer je svaki zadatak uglavnom zadatak za sebe. Zbog toga to početnicima može predstavljati problem jer još nemaju razvijen osjećaj za takve zadatke, ali isto tako i svima nama to može predstavljati problem ako se dugo time ne bavimo pa nam taj osjećaj može na trenutak "nestati" i potrebno nam je da ga ponovno obnovimo preko rješavanja različitih zadataka.

Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Međutim, ne treba odmah imati strah prema takvim zadacima jer bitno je **ne tražiti neko pravilo** koje bismo mogli primijeniti na više zadataka, jer uglavnom **svaki zadatak je zadatak za sebe**.

Jasno, ovdje ćemo raditi neke metode koje se primijenjuju u određenim slučajevima i imati za njih neke formule (npr., kod razmještaja objekata gdje nam je važan ili nam možda nije važan poredak objekata, pa možda dozvoljavamo ponavljanje objekata ili možda ne dozvoljavamo), ali pritom je bitno **osjetiti** te metode, a ne gledati koji se sve zadaci pomoću njih mogu riješiti.

Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Dakle, kada riješimo neki kombinatorni zadatak nekom metodom, tada je najbolje da svatko sam za sebe razmisli da li se on može riješiti još na neki drugi način, tj. nekom drugom metodom (možda je moguće prebrojiti elemente nekog skupa na više različitih načina), i isto tako, zašto neka druga metoda ne bi funkcionirala (jer bismo možda brojali neke objekte koji ne pripadaju zadanom skupu, ili bismo možda neke ispustili u takvom načinu prebrojavanja).

Takvim pristupom ćete naprije dobiti potrebni osjećaj za rješavanje kombinatornih zadataka jer svaki zadatak trebate razumjeti da biste mogli imati plan za njegovo rješavanje, a za plan je ponekad potrebna **maštovitost**, ali i **iskustvo** dobiveno iz prethodno riješenih zadataka.

Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Kombinatorika svoje korijene vuče iz zabavne matematike, zagonetaka i početaka teorije vjerojatnosti i zbog toga je ona dugo vremena bila na granici znanosti i razbibrige.

Danas je kombinatorika veoma važna grana matematike koja ima široku primjenu u prirodnim, ali isto tako i u društvenim znanostima. Tome je pridonio i brzi razvoj informatike i računala, gdje se koriste razni kombinatorni algoritmi koji čine osnovu za neke druge algoritme.

Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Principi prebrojavanja

Princip jednakosti (bijektivna korespodencija)

Ako postoji bijekcija između skupova A i B, tada je

$$k(A) = k(B).$$

Princip jednakosti koristimo kada nam je umjesto zadanih objekata jednostavnije prebrojiti neke druge objekte koji su s njima u bijekciji.

Princip sume

Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konačni skupovi koji su u parovima disjunktni, tj.

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{za} \quad i \neq j.$$

Tada je

$$k\big(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\big) = \sum_{i=1}^{n} k\big(A_i\big).$$

Princip sume koristimo kada nam je lakše prvo skup (cjelinu) razbiti na više dijelova, a zatim prebrojiti koliko ima objekata u pojedinim dijelovima.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Princip produkta

Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konačni skupovi, tada je

$$k\big(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n\big) = \prod_{i=1}^{n} k\big(A_i\big).$$

Princip produkta se često formulira u sljedećem obliku:

Teorem 5.1 (O uzastopnom prebrojavanju).

Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konačni skupovi, a $A \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ skup uređenih n-torki $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definiranih ovako: prva komponenta x_1 se može odabrati na p_1 načina; za svaku odabranu prvu komponentu drugu komponentu x_2 možemo odabrati na p_2 načina itd.; za svaki izbor komponenata $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, n-tu komponentu x_n možemo birati na p_n načina. Tada skup A ima $p_1 p_2 \cdots p_n$ elemenata.

Primjer 5.1.

Dijete ima tri zelene bojice različitih nijansi, dvije plave, dvije smeđe i jednu žutu.

a. *Na koliko načina dijete može izabrati jednu bojicu?*

b. *Na koliko načina može izabrati bojice za crtanje stabla sa smeđim deblom i zelenom krošnjom?*

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.1.

Dijete ima tri zelene bojice različitih nijansi, dvije plave, dvije smeđe i jednu žutu.

a. *Na koliko načina dijete može izabrati jednu bojicu?*

b. *Na koliko načina može izabrati bojice za crtanje stabla sa smeđim deblom i zelenom krošnjom?*

Rješenje.

a. Definiramo sljedeće skupove

$$Z = \{z_1, z_2, z_3\} \quad \leftarrow \text{ skup zelenih bojica}$$
$$P = \{p_1, p_2\} \quad \leftarrow \text{ skup plavih bojica}$$
$$S = \{s_1, s_2\} \quad \leftarrow \text{ skup smeđih bojica}$$
$$\check{Z} = \{\check{z}_1\} \quad \leftarrow \text{ skup žutih bojica}$$

Tada je

$$k\big(Z \cup P \cup S \cup \check{Z}\big) = k(Z) + k(P) + k(S) + k\big(\check{Z}\big) =$$
$$= 3 + 2 + 2 + 1 = 8$$

Dijete jednu bojicu može odabrati na 8 načina.

b. Prema principu produkta vrijedi

$$k\big(S \times Z\big) = k(S) \cdot k(Z) = 2 \cdot 3 = 6$$

Smeđu bojicu dijete može izabrati na 2 načina, a za svaki takav izbor smeđe bojice zelenu bojicu može odabrati na 3 načina. Dakle, izbor bojica odgovara uređenim parovima kojima je na prvom mjestu smeđa bojica, a na drugom mjestu zelena bojica.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primijetite ovdje princip jednakosti jer smo izbor bojica poistovjetili sa uređenim parovima. Dakle, za crtanje stabla sa smeđim deblom i zelenom krošnjom, dijete može bojice izabrati na 6 načina.

Primjer 5.2.

U košari se nalazi 12 jabuka i 10 krušaka. Danijela će uzeti jedan komad voća – ili jabuku ili krušku. U kojem od tih slučajeva ostaje veći izbor za Ninu koja namjerava uzeti po jedan komad voća svake vrste?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rješenje.

Ako Danijela uzme jabuku, tada Nina može jabuku birati na 11 načina, a krušku na 10 načina. Tada je ukupni broj Nininih izbora jednak $11 \cdot 10 = 110$.

Ako Danijela uzme krušku, tada je broj Nininih izbora jednak $12 \cdot 9 = 108$.

Dakle, Nina će imati više izbora ako Danijela uzme jabuku.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.3.

a. *Na koliko načina možemo iz skupine od 6 rajčica, 8 paprika i 2 komada luka staviti u košaru nekoliko komada povrća? Košara može ostati i prazna, a bitno je samo koliko je komada pojedinog povrća u košari (povrće iste vrste ne razlikujemo).*

b. *Na koliko načina iz navedene skupine povrća možemo staviti u košaru nekoliko komada povrća ako je bitno da u košari budu barem dvije rajčice, barem jedna paprika i barem jedan luk?*

c. *Na koliko načina iz navedene skupine povrća možemo staviti u košaru nekoliko komada povrća ako je bitno da u košari budu barem dvije rajčice, barem jedna paprika i barem jedan luk, ali isto tako izvan košare moraju ostati barem dvije rajčice, barem jedna paprika i barem jedan luk?*

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rješenje.

a. Moguća stavljanja povrća u košaru možemo prikazati pomoću uređene trojke brojeva: prva komponenta broji moguće načine izbora rajčica, druga komponenta broji paprike, a treća broji luk. Stoga je ukupni broj načina jednak

$$(6+1)\cdot(8+1)\cdot(2+1) = 7\cdot 9\cdot 3 = 189.$$

b. Stavimo u košaru odmah dvije rajčice, jednu papriku i jedan luk. Tada nam preostanu još 4 rajčice, 7 paprika i jedan luk. Preostala povrća možemo u košaru staviti na $(4+1)\cdot(7+1)\cdot(1+1) = 5\cdot 8\cdot 2 = 80$ načina. Dakle, ukupno imamo 80 načina.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- Odvojimo skupinu povrća koju moramo staviti u košaru i koju moramo ostaviti izvan košare da bi uvjet zadatka bio zadovoljen. Nakon toga nam preostanu 2 rajčice, 6 paprika i jedan luk. Stoga je ukupni broj načina jednak

$$(2+1)\cdot(6+1)\cdot(0+1) = 3\cdot 7\cdot 1 = 21.$$

Primjer 5.4.

Promatrajmo šifre koje se sastoje od niza slova hrvatske abecede iza kojeg slijedi niz znamenaka. Koliko ima šifri koje se sastoje od tri slova i četiri znamenke? Koliko ima šifri koje se sastoje od najviše tri slova i četiri znamenke?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rješenje.

Prvo slovo možemo birati na 30 načina, isto tako drugo i treće. Prvu znamenku možemo birati na 10 načina, a isto tako i ostale tri. Stoga šifri koje se sastoje od niza od tri slova iza kojeg ide niz od 4 znamenke ima ukupno

$$30 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 270\,000\,000.$$

Želimo li šifre s najviše tri slova i četiri znamenke, to može biti šifra ili s niti jednim slovom, ili s točno jednim slovom, ili s točno dva slova, ili s točno tri slova. Stoga je ukupni broj takvih šifri jednak

$$10^4 + 30 \cdot 10^4 + 30^2 \cdot 10^4 + 30^3 \cdot 10^4$$

odnosno $27\,931 \cdot 10^4$, tj. $279\,310\,000$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.5.

Na koliko načina se može izvući iz standardnog špila od 52 igraće karte:

a. *srce ili pik?*
b. *as ili kralj?*
c. *karta s brojem između 2 i 10?*
d. *karta s brojem između 2 i 10 ili kralj?*

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.5.

Na koliko načina se može izvući iz standardnog špila od 52 igraće karte:

a. *srce ili pik?*
b. *as ili kralj?*
c. *karta s brojem između 2 i 10?*
d. *karta s brojem između 2 i 10 ili kralj?*

Rješenje.

a. Srce možemo izabrati na 13 načina, pika također na 13 načina. Dakle, srce ili pika možemo izvući na $13 + 13 = 26$ načina.

b. Asa možemo izabrati na 4 načina, kralja također na 4 načina. Dakle, asa ili kralja možemo izvući na $4 + 4 = 8$ načina.

c. U svakoj boji (srce, kara, žir, pik) imamo po 9 karti s brojevima između 2 i 10. Stoga kartu s brojem između 2 i 10 možemo izvući na $9 + 9 + 9 + 9 = 36$ načina.

d. Iz (c) dijela zadatka slijedi da na 36 načina možemo izvući kartu s brojem između 2 i 10. Nadalje, kralja možemo izvući na 4 načina. Stoga je ukupni broj načina jednak $36 + 4 = 40$.

Primjer 5.6.

a. *Koliko ima četveroznamenkastih prirodnih brojeva s različitim znamenkama?*

b. *Koliko ima prirodnih brojeva strogo manjih od* $10\,000$ *s različitim znamenkama?*

c. *Koliko ima prirodnih brojeva većih ili jednakih od 100 i strogo manjih od* $10\,000$ *s različitim znamenkama?*

d. *Koliko ima neparnih četveroznamenkastih brojeva s različitim znamenkama?*

Rješenje.

a) Prvu znamenku možemo birati na 9 načina (ne smije biti 0 na prvom mjestu jer onda ne bismo imali četveroznamenkasti broj). Za odabranu prvu znamenku, drugu znamenku možemo birati isto na 9 načina (sada smijemo uzeti i nulu u obzir), treću znamenku možemo birati na 8 načina (da ne bude jednaka niti jednoj od prve dvije odabrane znamenke), a četvrtu znamenku možemo onda birati na 7 načina (da ne bude jednaka niti jednoj od prve tri odabrane znamenke). Dakle, četveroznamenkastih brojeva s različitim znamenkama ima ukupno $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- Prirodni brojevi $< 10\,000$ su brojevi s najviše 4 znamenke. Svih jednoznamenkastih prirodnih brojeva s različitim znamenkama ima ukupno 9. Svih dvoznamenkastih brojeva s različitim znamenkama ima $9 \cdot 9 = 81$, svih troznamenkastih brojeva s različitim znamenkama ima $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$, a svih četveroznamenkastih brojeva s različitim znamenkama ima $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$. Stoga svih prirodnih brojeva manjih od $10\,000$ koji imaju različite znamenke ima ukupno

$$9 + 9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 \cdot 8 + 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5274.$$

- To su zapravo svi troznamenkasti i četveroznamenkasti brojevi s različitim znamenkama, a njih ima ukupno

$$9 \cdot 9 \cdot 8 + 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5184.$$

- Pokazat ćemo ovdje dva načina prebrojavanja takvih brojeva. Prvi, jednostavniji način je sljedeći. Prvo biramo posljednju znamenku (znamenku jedinica). Kako broj mora biti neparan, tu znamenku možemo izabrati na 5 načina. Zatim za tako odabranu posljednju znamenku biramo prvu znamenku. Kako naš broj mora biti četveroznamenkast (ne smijemo uzeti nulu) i mora imati različite znamenke (ne smijemo uzeti odabranu neparnu znamenku koju smo već odabrali), prvu znamenku možemo odabrati na 8 načina.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Zatim drugu znamenku možemo odabrati isto na 8 načina (smijemo sada uzeti i nulu), a treću znamenku možemo odabrati na 7 načina. Stoga četveroznamenkastih neparnih brojeva koji imaju različite znamenke ima ukupno $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 2240$.

Drugi, kompliciraniji način bio bi da biramo znamenke po redu s lijeva na desno. No, tada nam problem stvara odabir posljednje znamenke jer broj mora biti neparan i mora imati različite znamenke pa je bitno koliko smo već neparnih znamenki potrošili na prva tri mjesta. Stoga razlikujemo više slučajeva i podslučajeva.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- Na prva tri mjesta nismo potrošili niti jednu neparnu znamenku.

  Tada smo na prva tri mjesta birali samo između parnih znamenki. Prvu znamenku smo tada mogli izabrati na 4 načina (ne smijemo uzeti nulu jer ne bismo tada imali četveroznamenkasti broj). Drugu znamenku možemo birati na 4 načina (smijemo uzeti i nulu), treću znamenku možemo izabrati na 3 načina, a četvrtu neparnu znamenku na 5 načina. Stoga takvih brojeva ima ukupno $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- Na prva tri mjesta smo potrošili jednu neparnu znamenku.

  U ovom slučaju razlikujemo još tri podslučaja.

- Neparna znamenka je potrošena na prvom mjestu.

  Tada je na prvom mjestu neparna znamenka koju možemo odabrati na 5 načina. Na drugom i trećem mjestu su parne znamenke, a njih možemo odabrati na 5, odnosno 4 načina, a na zadnjem mjestu mora biti neparna znamenka i nju možemo odabrati na 4 načina (ne smijemo uzeti već odabranu neparnu znamenku na prvom mjestu jer moramo imati neparni broj s različitim znamenkama). Stoga takvih brojeva ima ukupno $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 400$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- Neparna znamenka je potrošena na drugom mjestu.

  Tada je na prvom mjestu parna znamenka koju možemo odabrati na 4 načina. Na drugom mjestu je neparna znamenka i nju možemo odabrati na 5 načina. Na trećem mjestu je parna znamenka koju možemo odabrati na 4 načina (ne smijemo uzeti onu parnu znamenku koju smo potrošili na prvom mjestu, a smijemo uzeti nulu). Na zadnjem mjestu mora biti neparna znamenka i nju možemo odabrati na 4 načina (ne smijemo uzeti onu neparnu znamenku koju smo potrošili za drugo mjesto). Stoga takvih brojeva ima ukupno $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 320$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- Neparna znamenka je potrošena na trećem mjestu.

  Tada su na prva dva mjesta parne znamenke i svaku od njih možemo odabrati na 4 načina (na prvom mjestu ne smije biti nula, a na drugom mjestu ne smije biti potrošena znamenka za prvo mjesto, ali smije biti nula). Na trećem mjestu je neparna znamenka koju možemo odabrati na 5 načina, a na četvrtom mjestu mora biti neparna znamenka koju možemo odabrati na 4 načina. Stoga takvih brojeva ima ukupno $4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 320$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- iii Na prva tri mjesta smo potrošili dvije neparne znamenke.

  U ovom slučaju razlikujemo isto tri podslučaja.

- Neparne znamenke se pojavljuju na prva dva mjesta.

  Na prva dva mjesta se pojavljuju neparne znamenke i njih možemo odabrati na 5, odnosno 4 načina. Treća znamenka je parna i nju možemo odabrati na 5 načina. Posljednja znamenka mora biti neparna i nju možemo odabrati na 3 načina (ne smijemo uzeti potrošene dvije neparne znamenke za prva dva mjesta). Stoga takvih brojeva ima ukupno $5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 = 300$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- Neparne znamenke se pojavljuju na prvom i trećem mjestu.

  Na prvom i trećem mjestu se pojavljuju neparne znamenke i njih možemo odabrati na 5 odnosno 4 načina. Druga znamenka je parna i nju možemo odabrati na 5 načina. Posljednja znamenka mora biti neparna i nju možemo odabrati na 3 načina (ne smijemo uzeti potrošene dvije neparne znamenke za prvo i treće mjesto). Stoga takvih brojeva ima ukupno $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$.

- Neparne znamenke se pojavljuju na drugom i trećem mjestu.

  Na drugom i trećem mjestu se pojavljuju neparne znamenke i njih možemo odabrati na 5 odnosno 4 načina. Prva znamenka je parna i nju možemo odabrati na 4 načina (ne smije biti na prvom mjestu 0). Posljednja znamenka mora biti neparna i nju možemo odabrati na 3 načina (ne smijemo uzeti potrošene dvije neparne znamenke za drugo i treće mjesto). Stoga takvih brojeva ima ukupno $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 240$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- Na prva tri mjesta smo potrošili tri neparne znamenke.

  Na prva tri mjesta su neprane znamenke i njih možemo redom izabrati na 5, 4 odnosno 3 načina. Posljednja znamenka mora biti neparna i nju možemo odabrati na 2 načina (ne smijemo birati potrošene tri neparne znamenke za prva tri mjesta). Stoga takvih brojeva ima ukupno $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Skupimo li zajedno sve slučajeve i njihove podslučajeve, dobivamo da četveroznamenkastih neparnih brojeva s različitim znamenkama ima ukupno

$$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 + \\ + 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 + 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + \\ + 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 2240.$$

Jasno, dobili smo opet isti broj, samo što je ovaj način prebrojavanja bio puno kompliciraniji, ali je pokazan baš zbog toga da se uvjerimo kako na različite načine možemo prebrojavati objekte, samo što su neki od tih načina jednostavniji, a neki su kompliciraniji.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.7.

Na koliko se načina od 10 tenisača i 6 tenisačica mogu formirati četiri mješovita para?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.7.

Na koliko se načina od 10 tenisača i 6 tenisačica mogu formirati četiri mješovita para?

Rješenje.

prvi par	$\rightarrow$	$10 \cdot 6$ načina
drugi par	$\rightarrow$	$9 \cdot 5$ načina
treći par	$\rightarrow$	$8 \cdot 4$ načina
četvrti par	$\rightarrow$	$7 \cdot 3$ načina

Ukupni broj načina je

$$(10 \cdot 6) \cdot (9 \cdot 5) \cdot (8 \cdot 4) \cdot (7 \cdot 3) = \frac{10!}{2}$$

Primjer 5.8.

Od tri osnovna znaka (kružića, križića i trokutića) slažu se novi znakovi. Ako jedan složeni znak sadrži najviše četiri osnovna znaka, koliko ima svih složenih znakova?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.8.

Od tri osnovna znaka (kružića, križića i trokutića) slažu se novi znakovi. Ako jedan složeni znak sadrži najviše četiri osnovna znaka, koliko ima svih složenih znakova?

Rješenje.

Složenih znakova s točno jednim osnovnim znakom ima 3^1, složenih znakova s točno dva osnovna znaka ima 3^2, složenih znakova s točno tri osnovna znaka ima 3^3, a složenih znakova s točno četiri osnovna znaka ima 3^4. Stoga je ukupni broj složenih znakova koji imaju najviše četiri osnovna znaka jednak

$$3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120.$$

Primjer 5.9.

Na putu između mjesta A i mjesta B ima n semafora koji nisu međusobno sinkronizirani i ne mogu se zaobići. Svaki od semafora ima samo crveno i zeleno svjetlo. Na koliko načina vas ti semafori mogu zaustaviti na putu? Da li ima više mogućih prolaza kroz raskrižja pri kojima na više od polovine raskrižja moramo stati ili ima više prolaza pri kojima kroz više od polovine raskrižja prolazimo bez stajanja?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.9.

Na putu između mjesta A i mjesta B ima n semafora koji nisu međusobno sinkronizirani i ne mogu se zaobići. Svaki od semafora ima samo crveno i zeleno svjetlo. Na koliko načina vas ti semafori mogu zaustaviti na putu? Da li ima više mogućih prolaza kroz raskrižja pri kojima na više od polovine raskrižja moramo stati ili ima više prolaza pri kojima kroz više od polovine raskrižja prolazimo bez stajanja?

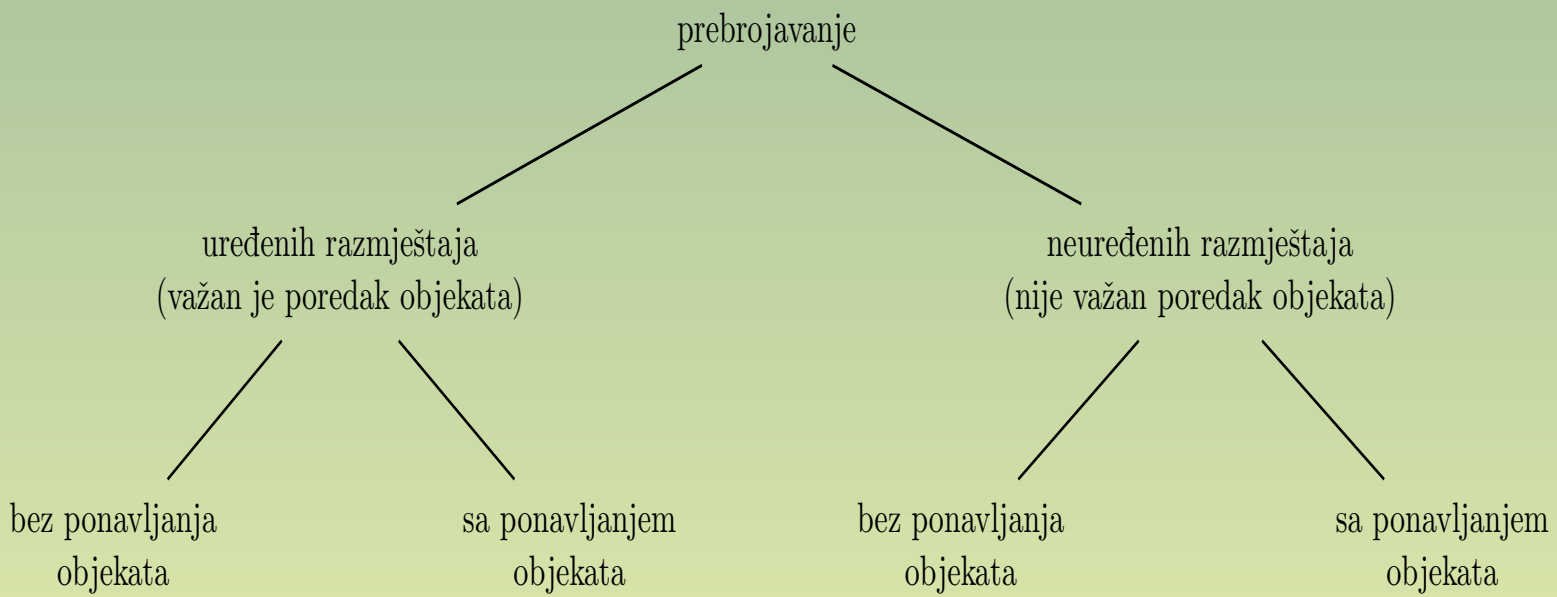
Rješenje.

Na svakom od n semafora može biti crveno ili zeleno svjetlo pa nas ti semafori mogu zaustaviti na 2^n načina.

Nadalje, svakom stanju skupa semafora u kojemu je na više od polovine semafora crveno svjetlo možemo pridružiti točno jedno stanje u kojemu je na više od polovine semafora zeleno svjetlo i obratno (jednostavno na svakom od semafora promijenimo svjetlo). Dakle, uspostavili smo bijekciju između skupa različitih stanja semafora pri kojima se zaustavljamo na više od polovine raskrižja i skupa različitih stanja semafora pri kojima na više od polovine raskrižja prolazimo bez zaustavljanja. Stoga je broj različitih stanja semafora pri kojima se na više od polovine raskrižja zaustavljamo jednak broju različitih stanja semafora pri kojima na više od polovine raskrižja prolazimo bez zaustavljanja.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Permutacije i kombinacije



PERMUTACIJE (VARIJACIJE)

KOMBINACIJE

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

r-permutacija n-članog skupa S je uređena r-torka kod koje su sve komponente međusobno različiti elementi skupa S. U slučaju da je $r = n = k(S)$, tada umjesto n-permutacija kratko govorimo permutacija.

Ukupni broj svih r-permutacija n-članog skupa označavamo s $P(n, r)$.

Broj r-permutacija n-članog skupa

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)$$

Primjer 5.10.

Ispišite sve 3*-permutacije skupa* $\{a, b, c, d\}$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.10.

Ispišite sve 3-permutacije skupa $\{a, b, c, d\}$.

Rješenje.

$$(a,b,c),\ (a,b,d),\ (a,c,b),\ (a,c,d),\ (a,d,b),\ (a,d,c),$$
$$(b,a,c),\ (b,a,d),\ (b,c,a),\ (b,c,d),\ (b,d,a),\ (b,d,c),$$
$$(c,a,b),\ (c,a,d),\ (c,b,a),\ (c,b,d),\ (c,d,a),\ (c,d,b),$$
$$(d,a,b),\ (d,a,c),\ (d,b,a),\ (d,b,c),\ (d,c,a),\ (d,c,b)$$

Ukupno ih ima $P(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$.

Teorem 5.2.

Za $r, n \in \mathbb{N}$ i $r \leqslant n$ vrijedi $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Dokaz.

Želimo vidjeti koliko ima različitih uređenih r-torki $(x_1, \ldots, x_r)$ elemenata n-članog skupa S, pri čemu su svi x_i-ovi međusobno različiti. Prvu komponentu možemo birati na n načina. Nakon što smo izabrali prvu komponentu x_1, drugu komponentu x_2 možemo birati među preostalih $n-1$ elemenata, tj. x_2 možemo odabrati na $n-1$ načina, itd. Nakon što smo izabrali prvih $r-1$ komponenata, r-tu komponentu možemo izabrati na $n-(r-1)$ načina, tj. na $n-r+1$ načina. Tada prema ◂ principu produkta slijedi da je

$$P(n,r) = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

♡

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.11.

Na koliko se načina može napraviti popis od 30 učenika u jednom razredu?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.11.

Na koliko se načina može napraviti popis od 30 učenika u jednom razredu?

Rješenje.

Pitanje je zapravo na koliko načina možemo učenike poredati u red. Taj broj jednak je broju svih permutacija skupa od 30 elemenata koji je jednak $30!$. Dakle, popis od 30 učenika možemo napraviti na $30!$ načina. Samo je jedan od tih popisa abecedni, a ostali nisu.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

r-**kombinacija** n-članog skupa S je r-člani podskup od S. To je zapravo neuređeni izbor od r elemenata u skupu S.

Ukupni broj svih r-kombinacija n-članog skupa označavamo s $C(n,r)$ ili $\binom{n}{r}$, a taj je broj zapravo jednak ukupnom broju svih r-članih podskupova n-članog skupa.

Broj r-kombinacija n-članog skupa

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

Primjer 5.12.

Ispišite sve 3*-kombinacije skupa* $\{a, b, c, d\}$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.12.

Ispišite sve 3*-kombinacije skupa* $\{a, b, c, d\}$.

Rješenje.

$$\{a, b, c\},\ \{a, b, d\},\ \{a, c, d\},\ \{b, c, d\}$$

Ukupno ih ima $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$.

Teorem 5.3.

Za $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *i* $r \leqslant n$ *vrijedi* $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

Dokaz.

Neka je S skup od n elemenata, a $A_1, \ldots, A_p$ svi međusobno različiti r-podskupovi od S. Želimo naći vezu broja p sa brojevima n i r. Označimo sa B_i skup svih r-permutacija skupa A_i za $i = 1, 2, \ldots, p$. Dokažimo prvo da su skupovi $B_1, \ldots, B_p$ međusobno disjunktni.

Neka je $\left(x_1, \ldots, x_r\right) \in B_i \cap B_j$. Tada mora biti $A_i = \left\{x_1, \ldots, x_r\right\}$ i $A_j = \left\{x_1, \ldots, x_r\right\}$ pa je $i = j$. Dakle, zaista je $B_i \cap B_j = \emptyset$ za $i \neq j$. Neka je

$$T = B_1 \cup \cdots \cup B_p.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Skup T sadrži sve r-permutacije skupa S pa je prema teoremu 5.2. $k(T) = \frac{n!}{(n-r)!}$. Nadalje, $B_1, \ldots, B_p$ je particija skupa T i $k(B_i) = r!$ za svaki $i = 1, \ldots, p$ pa prema principu sume slijedi da je $k(T) = p \cdot r!$. Iz toga slijedi

$$p \cdot r! = \frac{n!}{(n-r)!}$$

odnosno

$$p = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Dakle, pokazali smo da je

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$



Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.13.

Na koliko se načina može odabrati početna petorka u košarkaškoj ekipi koja ima 10 igrača?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.13.

Na koliko se načina može odabrati početna petorka u košarkaškoj ekipi koja ima 10 igrača?

Rješenje.

Odabir početne petorke zapravo odgovara peteročlanom podskupu u skupu od 10 elemenata jer jasno je da nam ovdje poredak igrača nije bitan (bitno je samo koji su igrači u igri). Stoga početnu petorku možemo izabrati na $\binom{10}{5}$ načina, odnosno na 252 načina.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

r-permutacija s ponavljanjem n-članog skupa S je uređena r-torka elemenata skupa S u kojoj su dozvoljena ponavljanja elemenata iz skupa S.

Ukupni broj svih r-permutacija s ponavljanjem n-članog skupa označavamo s $\overline{P}(n,r)$.

Uz pretpostavku da svaki element možemo ponoviti po volji mnogo puta (ili barem r puta), vrijedi sljedeća formula

Broj r-permutacija s ponavljanjem n-članog skupa

$$\overline{P}(n,r) = n^r$$

Primjer 5.14.

Ispišite sve 3*-permutacije s ponavljanjem skupa* $\{a, b, c, d\}$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.14.

Ispišite sve 3*-permutacije s ponavljanjem skupa* $\{a, b, c, d\}$.

Rješenje.

$$(a,a,a),\ (a,a,b),\ (a,a,c),\ (a,a,d),\ (a,b,a),\ (a,b,b),$$
$$(a,b,c),\ (a,b,d),\ (a,c,a),\ (a,c,b),\ (a,c,c),\ (a,c,d),$$
$$(a,d,a),\ (a,d,b),\ (a,d,c),\ (a,d,d),\ (b,a,a),\ (b,a,b),$$
$$(b,a,c),\ (b,a,d),\ (b,b,a),\ (b,b,b),\ (b,b,c),\ (b,b,d),$$
$$(b,c,a),\ (b,c,b),\ (b,c,c),\ (b,c,d),\ (b,d,a),\ (b,d,b),$$
$$(b,d,c),\ (b,d,d),\ (c,a,a),\ (c,a,b),\ (c,a,c),\ (c,a,d),$$
$$(c,b,a),\ (c,b,b),\ (c,b,c),\ (c,b,d),\ (c,c,a),\ (c,c,b),$$
$$(c,c,c),\ (c,c,d),\ (c,d,a),\ (c,d,b),\ (c,d,c),\ (c,d,d),$$
$$(d,a,a),\ (d,a,b),\ (d,a,c),\ (d,a,d),\ (d,b,a),\ (d,b,b),$$
$$(d,b,c),\ (d,b,d),\ (d,c,a),\ (d,c,b),\ (d,c,c),\ (d,c,d),$$
$$(d,d,a),\ (d,d,b),\ (d,d,c),\ (d,d,d)$$

Ukupno ih ima $4^3 = 64$.

Teorem 5.4.

Ako svaki element n-članog skupa možemo ponoviti po volji mnogo puta (ili barem r puta), tada je $\overline{P}(n,r) = n^r$.

Dokaz.

Treba pronaći broj svih uređenih r-torki $(x_1, \ldots, x_r)$ elemenata iz n-članog skupa S s time da su dozvoljena ponavljanja elemenata i da svaki element možemo ponoviti po volji mnogo puta. Prvu komponentu x_1 možemo birati na n načina, drugu komponentu x_2 isto na n načina itd. Dakle, svaku komponentu možemo birati na n načina pa je onda prema ◂ principu produkta

$$\overline{P}(n,r) = n^r.$$

♡

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Teorem 5.5.

Ako imamo n predmeta, od kojih je točno n_1 predmeta prve vrste, točno n_2 predmeta druge vrste,..., točno n_k predmeta k-te vrste, $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, pri čemu predmete i-te vrste smatramo jednakima $(i = 1, 2, \ldots, k)$, onda je broj načina na koji možemo te predmete poredati u niz jednak

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

Dokaz.

Dakle, imamo n mjesta na koje želimo staviti navedene predmete. Odredimo prvo na koja ćemo mjesta staviti predmete prve vrste. Kako imamo n_1 predmeta prve vrste, trebamo odabrati od n danih mjesta n_1 mjesta na koje ćemo ih staviti. Ta mjesta možemo odabrati na $\binom{n}{n_1}$ načina. Zatim odredimo na koja ćemo mjesta staviti predmete druge vrste. Kako imamo n_2 predmeta druge vrste i kako nam je nakon postavljanja predmeta prve vrste preostalo još $n - n_1$ slobodnih mjesta, mjesta na koje ćemo postaviti predmete druge vrste možemo odabrati na $\binom{n-n_1}{n_2}$ načina. Dalje, mjesta na koja ćemo postaviti predmete treće vrste možemo odabrati na $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ načina, itd.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Nastavimo li tako dalje (indukcijom) i koristeći se principom produkta

dobivamo da je broj načina na koje zadane predmete možemo poredati u niz jednak

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}=$$

$$=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\cdots-n_k)!}=$$

$$=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!0!}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Dakle, zaista je

$$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$



Primjer 5.15.

Koliko se različitih riječi (smislenih i besmislenih) može dobiti permutiranjem riječi MINIMUM.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.15.

Koliko se različitih riječi (smislenih i besmislenih) može dobiti permutiranjem riječi MINIMUM.

Rješenje.

Ovdje se radi o permutacijama skupa od 7 elemenata u kojemu imamo 3 slova M, 2 slova I, jedno slovo N i jedno slovo U. Stoga permutiranjem riječi MINIMUM možemo dobiti

$$\binom{7}{3,2,1,1} = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 420$$

različitih riječi (smislenih i besmislenih).

r-**kombinacija s ponavljanjem** n-članog skupa S je izbor od r elemenata skupa S pri čemu poredak nije važan, a ponavljanja elemenata su dozvoljena.

Ukupni broj svih r-kombinacija s ponavljanjem n-članog skupa označavamo s $\overline{C}(n, r)$.

Uz pretpostavku da svaki element možemo ponoviti po volji mnogo puta (ili barem r puta), vrijedi sljedeća formula

Broj r-kombinacija s ponavljanjem n-članog skupa

$$\overline{C}(n, r) = \binom{n + r - 1}{r}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.16.

Ispišite sve 3*-kombinacije s ponavljanjem skupa* $\{a, b, c, d\}$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.16.

Ispišite sve 3*-kombinacije s ponavljanjem skupa* $\{a, b, c, d\}$.

Rješenje.

$$\{a,a,a\},\ \{a,a,b\},\ \{a,a,c\},\ \{a,a,d\},\ \{a,b,b\},$$
$$\{a,b,c\},\ \{a,b,d\},\ \{a,c,c\},\ \{a,c,d\},\ \{a,d,d\},$$
$$\{b,b,b\},\ \{b,b,c\},\ \{b,b,d\},\ \{b,c,c\},\ \{b,c,d\},$$
$$\{b,d,d\},\ \{c,c,c\},\ \{c,c,d\},\ \{c,d,d\},\ \{d,d,d\}$$

Ukupno ih ima $\binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Teorem 5.6.

Ako svaki element n-članog skupa možemo ponoviti po volji mnogo puta (ili barem r puta), tada je $\overline{C}(n,r) = \binom{n+r-1}{r}$.

Dokaz.

Neka je $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ skup od n elemenata. Radi jednostavnosti uzmimo da je $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$. Pogledajmo neku njegovu npr., 5-kombinaciju s ponavljanjem, npr. $a_1a_1a_3a_3a_6$. Nju možemo predočiti u obliku $\bullet\bullet\,||\,\bullet\bullet\,|||\,\bullet\,|$, gdje imamo crtu između odabranih elemenata a_k i a_{k+1}. Dvije uzastopne crte nam govore da neki element a_k nije odabran, tri uzastopne crte nam govore da neka dva uzastopna elementa a_k i a_{k+1} nisu odabrana, itd.

Isto tako, $a_2a_2a_2a_3a_3$ bismo mogli prikazati u obliku $|\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet||||$. Općenito, svakoj r-kombinaciji s ponavljanjem n-članog skupa možemo jednoznačno pridružiti niz koji se sastoji od r simbola $\bullet$ i $n-1$ crta $|$ (po jedna između svaka dva elementa a_k i a_{k+1}). Ukupno tih simbola $\bullet$ i crta $|$ ima $n-1+r$. Dakle, uspostavili smo bijekciju između svih r-kombinacija s ponavljanjem n-članog skupa i svih permutacija s ponavljanjem od $n+r-1$ predmeta od kojih imamo r predmeta prve vrste i $n-1$ predmeta druge vrste. Tada iz ◂ teorema 5.5. slijedi da je

$$\overline{C}(n,r) = \frac{(n-1+r)!}{(n-1)!r!} = \binom{n+r-1}{r}.$$

♡

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.17.

Koliko permutacija skupa $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a. *počinje brojem 4,*

b. *ima na prva dva mjesta broj 1, 2 ili 3,*

c. *završava neparnim brojem,*

d. *završava brojem 21,*

e. *ne završava brojem 234?*

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.17.

Koliko permutacija skupa $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a. *počinje brojem 4,*

b. *ima na prva dva mjesta broj 1, 2 ili 3,*

c. *završava neparnim brojem,*

d. *završava brojem 21,*

e. *ne završava brojem 234?*

Rješenje.

a. Na prvom mjestu mora biti broj 4. Na ostalih pet mjesta treba ispermutirati preostalih 5 znamenaka, a to možemo na $5!$ načina. Dakle, svih permutacija skupa S koje počinju brojem 4 ima ukupno 120.

- Na prva dva mjesta mogu biti jedino znamenke 1,2, ili 3. Kako nam je važan poredak, prva dva mjesta možemo popuniti na onoliko načina koliko ima svih 2-permutacija tročlanog skupa, tj. prva dva mjesta možemo popuniti na $P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 3!$ načina. Za svaki takvi način popunjavanja prva dva mjesta, preostala 4 mjesta popunjavamo sa preostale 4 znamenke, a kako nam je važan poredak to možemo napraviti na $4!$ načina. Prema ◂ principu produkta slijedi da svih permutacija skupa S koje na prva dva mjesta imaju znamenke 1, 2 ili 3 ima ukupno $3! \cdot 4! = 144$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- Kako permutacija mora završavati neparnim brojem, na zadnjem mjestu mogu biti jedino znamenke 1, 3 ili 5. Dakle, posljednje mjesto možemo popuniti na 3 načina. Za svaki takav način popunjavanja posljednjeg mjesta, prvih pet mjesta popunjavamo sa preostalih pet znamenaka, a kako nam je važan poredak, to možemo napraviti na $5!$ načina. Prema ◂ principu produkta slijedi da svih permutacija skupa S koje završavaju neparnim brojem ima ukupno $3 \cdot 5! = 360$.

- Kako permutacija mora završavati s 21, na petom mjestu mora biti znamenka 2, a na šestom mjestu mora biti znamenka 1. Prva četiri mjesta popunjavamo sa preostale 4 znamenke, a kako nam je važan poredak, to možemo napraviti na $4!$ načina. Dakle, svih permutacija skupa S koje završavaju sa 21 ima ukupno $4! = 24$.
- Svih permutacija skupa S ima $6!$, a svih onih koje završavaju s 234 ima $3!$. Stoga svih permutacija skupa S koje ne završavaju s 234 ima ukupno $6! - 3! = 714$.

Primjer 5.18.

Na koliko se načina može podijeliti 28 domino pločica između četiri igrača tako da svaki dobije 7 pločica.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.18.

Na koliko se načina može podijeliti 28 domino pločica između četiri igrača tako da svaki dobije 7 pločica.

Rješenje.

1. način

Razmišljamo na sljedeći način. Imamo ukupno 28 mjesta koje treba popuniti sa 28 različitih brojeva (svaki broj predstavlja jednu domino pločicu). Međutim, prvih 7 mjesta pripadaju prvom igraču, drugih sedam mjesta drugom igraču, trećih sedam mjesta trećem igraču i posljednjih sedam mjesta četvrtom igraču. Svih mogućih načina da popunimo 28 mjesta ima ukupno $28!$.

No, permutacije samo unutar pojedinih 7 mjesta koje pripadaju istom igraču nam opet daju istu raspodjelu pločica (to je kao da je taj igrač dobio iste pločice samo ih je dobivamo drukčijim redoslijedom). Stoga, ako nam neka permutacija skupa od 28 elemenata predstavlja jednu raspodjelu domino pločica između 4 igrača, tada i sve ostale permutacije koje su dobivene iz ove permutacije permutiranjem elemenata unutar svakih pojedinih 7 mjesta koje pripadaju istom igraču, predstavljaju istu raspodjelu domino pločica. Dakle, svakih odgovarajućih $(7!)^4$ permutacija predstavlja istu raspodjelu domino pločica. Stoga svih mogućih raspodjela 28 domino pločica između 4 igrača ima ukupno $\frac{28!}{(7!)^4}$, što je jednako $472\,518\,347\,558\,400$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

2. način

Drugi način razmišljanja je sljedeći. Prvi igrač 7 domino pločica od njih 28 može dobiti na $\binom{28}{7}$ načina (nije nam bitan redoslijed jer ako igrač dobije nekih 7 pločica u jednom poretku ili pak dobije tih istih 7 pločica u drugom poretku, u svakom slučaju on ima tih istih 7 pločica). Za svaku takvu moguću podjelu 7 pločica prvom igraču preostaje nam još 21 domino pločica. Od tih 21 pločica, drugom igraču 7 pločica možemo dati na $\binom{21}{7}$ načina. Zatim nam preostane 14 pločica, pa trećem igraču možemo 7 pločica dati na $\binom{14}{7}$ načina. Konačno, četvrtom igraču možemo preostale pločice dati na $\binom{7}{7}$ načina, tj. na samo jedan način. Prema ◂ principu produkta slijedi da je ukupni broj raspodjela jednak $\binom{28}{7}\binom{21}{7}\binom{14}{7}\binom{7}{7}$, što je opet jednako $472\,518\,347\,558\,400$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.19.

Četiri bijele i tri crne kuglice različitih veličina treba poredati u niz tako da dvije jednako obojene ne budu jedna do druge. Koliko ima takvih različitih poretka?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.19.

Četiri bijele i tri crne kuglice različitih veličina treba poredati u niz tako da dvije jednako obojene ne budu jedna do druge. Koliko ima takvih različitih poretka?

Rješenje.

Neka su B_1, B_2, B_3, B_4 bijele kuglice, a C_1, C_2, C_3 crne kuglice.

$$B_{i_1} C_{j_1} B_{i_2} C_{j_2} B_{i_3} C_{j_3} B_{i_4}$$

Iz uvjeta zadatka slijedi da moramo početi s bijelom kuglicom. Dakle, bijele kuglice su na neparnim mjestima, a crne su na parnim mjestima.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Da dvije jednako obojene kuglice ne bi bile jedna do druge, smijemo samo permutirati bijele kuglice unutar neparnih mjesta (što možemo napraviti na $4!$ načina), a crne kuglice smijemo permutirati samo unutar parnih mjesta (što možemo napraviti na $3!$ načina). Prema ◂ principu produkta slijedi da je broj svih mogućih traženih raspodjela jednak $4! \cdot 3! = 144$.

Primjer 5.20.

Pet dječaka i pet djevojčica treba smjestiti na 10 stolica u redu, tako da sjede naizmjenično. Na koliko se načina to može napraviti?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rješenje.

Slično kao i u prethodnom zadatku, npr. dječake smjestimo na neparna mjesta, a djevojčice na parna mjesta i da bi oni sjedili naizmjenično smijemo raditi samo permutacije dječaka unutar neparnih mjesta (što možemo napraviti na $5!$ načina), a permutacije djevojčica unutar parnih mjesta (što možemo napraviti na $5!$ načina). Međutim, kako je broj dječaka jednak broju djevojčica, mogli smo napraviti i obrnuto, tj. djevojčice staviti na neparna mjesta, a dječake na parna mjesta. Stoga je prema ◂ principu produkta ukupni broj raspodjela jednak $2 \cdot 5! \cdot 5! = 28\,800$.

Primjer 5.21.

Na 7 stolica treba smjestiti 7 osoba. Koliko ima mogućnosti ako osobe sjede

a. *u jednom redu,*
b. *oko okruglog stola?*

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.21.

Na 7 stolica treba smjestiti 7 osoba. Koliko ima mogućnosti ako osobe sjede

a. *u jednom redu,*

b. *oko okruglog stola?*

Rješenje.

a. Očito je broj tih mogućnosti jednak svim permutacijama skupa od 7 elemenata. Dakle, takvih mogućnosti ima $7! = 5\,040$.

b. Jednu osobu stavimo na jedno mjesto, a preostalih 6 možemo rasporediti na $6!$ načina. Dakle, ukupno imamo $6! = 720$ mogućnosti. Pojasnite sami sebi ovaj način razmišljanja tako da vam u potpunosti bude jasan i uočite razliku između reda i okruglog stola.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.22.

Koliko dijagonala ima petnaesterokut?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.22.

Koliko dijagonala ima petnaesterokut?

Rješenje.

Izbor jedne dijagonale možemo poistovjetiti sa izborom dva nesusjedna vrha petnaesterokuta. Dakle, broj dijagonala jednak je broju načina na koji možemo od 15 vrhova odabrati dva nesusjedna vrha. Izbor dva susjedna vrha odgovara izboru neke stranice petnaesterokuta pa dva susjedna vrha možemo odabrati na 15 načina. Bilo koja dva vrha možemo odabrati na $\binom{15}{2}$ načina. Stoga, petnaesterokut ima ukupno $\binom{15}{2} - 15 = 90$ dijagonala.

Primjer 5.23.

U koliko se točaka sijeku 9 pravaca od kojih su dva paralelna, a nikoja tri se ne sijeku u jednoj točki?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.23.

U koliko se točaka sijeku 9 pravaca od kojih su dva paralelna, a nikoja tri se ne sijeku u jednoj točki?

Rješenje.

Iz uvjeta zadatka slijedi da je broj sjecišta jednak broju načina na koji možemo od 9 pravaca odabrati 2 pravca, a to možemo na $\binom{9}{2}$ načina. No, kako su dva pravca paralelna, imamo jedno sjecište manje, pa je ukupni broj sjecišta jednak $\binom{9}{2} - 1 = 35$.

Primjer 5.24.

Tri mladića i pet djevojaka igraju na plaži odbojku. Na koliko se načina mogu podijeliti u dvije ekipe po četiri osobe, ali tako da ne budu svi mladići u istoj ekipi?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.24.

Tri mladića i pet djevojaka igraju na plaži odbojku. Na koliko se načina mogu podijeliti u dvije ekipe po četiri osobe, ali tako da ne budu svi mladići u istoj ekipi?

Rješenje.

U jednoj ekipi mora biti jedan mladić i tri djevojke. Za tu ekipu mladića možemo odabrati na $\binom{3}{1}$ načina, a tri djevojke na $\binom{5}{3}$ načina. Prema ◂ principu produkta ekipe se mogu napraviti na $\binom{3}{1}\binom{5}{3} = 30$ načina.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.25.

Na koliko se načina može odabrati šest brojeva u igri LOTO *6 od 45? Koliki je broj načina ako promatramo i dopunski broj?*

Primjer 5.25.

Na koliko se načina može odabrati šest brojeva u igri LOTO *6 od 45? Koliki je broj načina ako promatramo i dopunski broj?*

Rješenje.

Šest brojeva od 45 se može odabrati na $\binom{45}{6}$ načina, tj. na $8\,145\,060$ načina.

Ako promatramo i dopunski broj, tada za svakih izabranih 6 brojeva preostane nam još 39 brojeva između kojih možemo birati dopunski broj. Stoga je prema principu produkta ukupni broj načina u ovom slučaju jednak $\binom{45}{6} \cdot 39 = 317\,657\,340$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.26.

Na koliko se načina iz snopa od 52 karte može izvući 13 karata, ali tako da među njima budu 2 pika, 4 herca, 3 kare i 4 trefa?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.26.

Na koliko se načina iz snopa od 52 karte može izvući 13 karata, ali tako da među njima budu 2 pika, 4 herca, 3 kare i 4 trefa?

Rješenje.

U snopu od 52 karte imamo po 13 karata svake boje. Stoga 2 pika možemo odabrati na $\binom{13}{2}$ načina, 4 herca na $\binom{13}{4}$ načina, 3 kare na $\binom{13}{3}$ načina i 4 trefa na $\binom{13}{4}$ načina. Prema ◂ principu produkta ukupni broj načina je jednak

$$\binom{13}{2}\binom{13}{4}\binom{13}{3}\binom{13}{4} = 11\,404\,407\,300.$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.27.

Na maturalnoj zabavi bilo je 28 učenika jednog razreda, 16 momaka i 12 djevojaka.

a. *Koliko se može složiti plesnih parova u ovom razredu?*

b. *Na koliko se načina mogu odabrati tri plesna para?*

Primjer 5.27.

Na maturalnoj zabavi bilo je 28 učenika jednog razreda, 16 momaka i 12 djevojaka.

a. *Koliko se može složiti plesnih parova u ovom razredu?*
b. *Na koliko se načina mogu odabrati tri plesna para?*

Rješenje.

a. Za plesni par nam treba jedan mladić i jedna djevojka. Mladića možemo odabrati na $\binom{16}{1}$ načina, a djevojku na $\binom{12}{1}$ načina. Stoga, prema ◂ principu produkta možemo složiti ukupno $\binom{16}{1}\binom{12}{1} = 192$ različita plesna para.

- Mogli bismo naivno reći da ako imamo 192 plesna para da onda tri plesna para možemo odabrati na $\binom{192}{3}$ načina. Međutim, to ne bi ovdje bilo dobro. Razmislite zbog čega ovdje ovaj način razmišljanja ne funkcionira. Ispravni način razmišljanja je sljedeći. Za tri plesna para nam trebaju tri mladića i tri djevojke. Tri mladića možemo izabrati na $\binom{16}{3}$ načina. Sada treba izabrati još tri djevojke, ali nam je važan poredak djevojaka jer ćemo prvu odabranu djevojku dati prvom mladiću, drugu djevojku drugom mladiću, a treću djevojku trećem mladiću. Stoga djevojke možemo odabrati na $P(12,3)$ načina. Prema ◂ principu produkta tri plesna para možemo odabrati na $\binom{16}{3} \cdot P(12,3) = 739\,200$ načina.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.28.

U 28 klupa treba smjestiti 25 učenika nekog razreda. Na koliko se načina to može učiniti?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.28.

U 28 klupa treba smjestiti 25 učenika nekog razreda. Na koliko se načina to može učiniti?

Rješenje.

Ovdje se radi zapravo o 25-permutacijama skupa od 28 elemenata. Stoga 25 učenika u 28 klupa možemo smjestiti na $P(28,25) = \frac{28!}{(28-25)!} = \frac{28!}{3!}$ načina.

Drugi način razmišljanja daje isti rezultat samo zapisan u drugačijem obliku: $\binom{28}{25} \cdot 25!$.

Interpretirajte kombinatorno ovaj način razmišljanja.

Primjer 5.29.

Na koliko se načina može podijeliti 12 različitih čokoladica na troje djece tako da jedno dijete dobije tri, drugo četiri, a treće pet čokoladica?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.29.

Na koliko se načina može podijeliti 12 različitih čokoladica na troje djece tako da jedno dijete dobije tri, drugo četiri, a treće pet čokoladica?

Rješenje.

Prvom djetetu od 12 čokoladica 3 čokoladice možemo dati na $\binom{12}{3}$ načina. Preostane nam 9 čokoladica pa drugom djetetu 4 čokoladice možemo dati na $\binom{9}{4}$ načina, a preostale čokoladice dobiva treće dijete. Prema principu produkta slijedi da čokoladice možemo podijeliti na $\binom{12}{3}\binom{9}{4} = 27\,720$ načina.

Mogli smo i drugačije razmišljati. Mogli smo prvo trećem djetetu dati 5 čokoladica, a to možemo napraviti na $\binom{12}{5}$ načina. Preostane nam 7 čokoladica pa onda prvom djetetu 3 čokoladice možemo dati na $\binom{7}{3}$ načina, a preostale 4 čokoladice dobiva drugo dijete. Opet bismo dobili da je ukupni broj načina jednak $\binom{12}{5}\binom{7}{3} = 27\,720$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Ovdje smo zapravo pomoću dva načina prebrojavanja elemenata istog skupa **kombinatorno dokazali** jednakost

$$\binom{12}{3}\binom{9}{4} = \binom{12}{5}\binom{7}{3}.$$

Dakle, nismo raspisivali binomne koeficijente po formuli da bismo dokazali gornju jednakost, nego smo za lijevu i desnu stranu jednakosti tražili kombinatorne interpretacije, tj. tražili smo dva različita načina prebrojavanja elemenata nekog skupa.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.30.

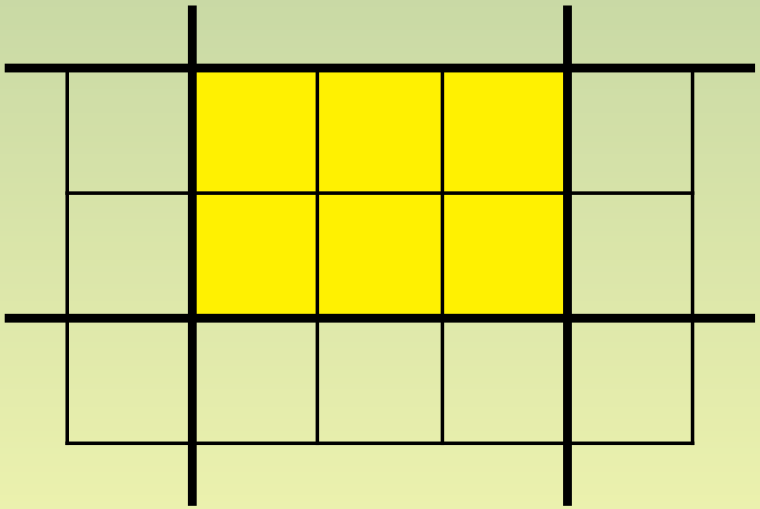
Stranice pravokutnika duge su m i n cm, gdje su $m, n \in \mathbb{N}$. Pravokutnik je podijeljen na $m \cdot n$ jediničnih kvadratića. Koliko se pritom može nabrojati pravokutnika?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.30.

Stranice pravokutnika duge su m i n cm, gdje su $m, n \in \mathbb{N}$. Pravokutnik je podijeljen na $m \cdot n$ jediničnih kvadratića. Koliko se pritom može nabrojati pravokutnika?

Rješenje.



Na slici je nacrtan slučaj za $m = 5$ i $n = 3$. Gledajući sliku možemo doći do sljedećeg općenitog zaključka.

Dvije suprotne stranice pravokutnika možemo odabrati na $\binom{n+1}{2}$ načina, odnosno na $\binom{m+1}{2}$ načina. Prema principu produkta slijedi da u tom slučaju možemo ukupno nabrojati $\binom{n+1}{2}\binom{m+1}{2}$ pravokutnika.

U našem slučaju $m = 5$ i $n = 3$ na slici ukupno možemo pronaći $\binom{3+1}{2}\binom{5+1}{2} = \binom{4}{2}\binom{6}{2} = 90$ pravokutnika.

Pronađite svih tih 90 pravokutnika.



Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.31.

Koliko ima različitih uređenih šestorki čije su komponente znamenke $0, 1, 2 \ldots, 9$ *i koje imaju:*

a. *dvije jedinice, dvije dvojke i još dvije različite znamenke,*
b. *pet jednakih komponenti,*
c. *tri para jednakih komponenata,*
d. *simetrični raspored komponenti,*
e. *sve različite komponente,*
f. *sve različite komponente, ali u rastućem poretku?*

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rješenje.

a. Biramo dva mjesta na koja ćemo staviti jedinice i to možemo napraviti na $\binom{6}{2}$ načina. Preostanu nam 4 mjesta od kojih moramo odabrati dva na koja ćemo staviti dvojke i to možemo napraviti na $\binom{4}{2}$ načina. Na preostala dva mjesta još moramo staviti dvije različite znamenke od preostalih 8 znamenaka, a to možemo napraviti na $P(8,2)$ načina. Prema ◂ principu produkta slijedi da takvih uređenih šestorki ima ukupno

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot P(8,2) = 5\,040.$$

- b) Biramo prvo pet mjesta na koja ćemo staviti jednake znamenke. Ta mjesta možemo odabrati na $\binom{6}{5}$ načina. Zatim biramo koju ćemo znamenku staviti na odabranih pet mjesta, a tu znamenku možemo odabrati na 10 načina. I na kraju od preostalih 9 znamenki biramo koju ćemo staviti na još preostalo neodabrano mjesto. Prema principu produkta ukupno imamo

$$\binom{6}{5} \cdot 10 \cdot 9 = 540$$

takvih uređenih šestorki.

- Ako pretpostavimo da želimo samo različite parove, tada moramo prvo odabrati tri različite znamenke, a to možemo na $\binom{10}{3}$ načina i zatim moramo s tim znamenkama napraviti sve moguće permutacije, a to možemo na $\binom{6}{2,2,2}$ načina. Prema principu produkta ukupno imamo

$$\binom{10}{3}\binom{6}{2,2,2} = 10\,800$$

uređenih šestorki s tri različita para znamenki.
Ako bismo još dozvoljavali duple i troduple parove, tada bi broj takvih uređenih šestorki bio jednak

$$\binom{10}{3}\binom{6}{2,2,2} + 2\binom{10}{2}\binom{6}{4,2} + \binom{10}{1} = 12\,160.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Objasnimo malo detaljnije posljednji zaključak. Naime, trodupli parovi u uređenim šestorkama su zapravo uređene šestorke koje imaju sve jednake komponente i jasno je da njih ima $\binom{10}{1}$ (broj načina da odaberemo jednu znamenku za svih šest mjesta). Za duple parove u uređenim šestorkama moramo odabrati dvije znamenke i to možemo napraviti na $\binom{10}{2}$ načina i zatim s te dvije znamenke raditi sve moguće permutacije na 6 mjesta (jer jedna znamenka se javlja 4 puta, a druga dva puta), a to možemo napraviti na $\binom{6}{4,2}$ načina. Stoga bismo mogli pomisliti da takvih uređenih šestorki koje imaju tri para znamenaka od kojih su dva dupla ima ukupno $\binom{10}{2}\binom{6}{4,2}$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Međutim, zašto to nije točno, tj. zašto je još taj broj $\binom{10}{2}\binom{6}{4,2}$ pomnožen s dva. Moramo se vratiti na dio kad smo birali dvije znamenke i rekli smo da se to može napraviti na $\binom{10}{2}$ načina. Pretpostavimo da smo odabrali znamenke 3 i 5. Međutim, sada se u tom trenutku moramo odlučiti koja će se od tih znamenki pojaviti 4 puta, a koja dvaput. Jasno je da tu odluku možemo donijeti na dva načina i zbog toga ide još puta dva. Dobro razmislite još jednom o ovim zaključcima i pitajte sami sebe da li su vam jasni. Isto tako, zapitajte se da li vam je jasno da broj $\binom{10}{2}$ bira samo dvije znamenke i da unutar njega ne donosimo odluku koja će se od te dvije znamenke pojaviti četiri, a koja dva puta.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

d) Prvu komponentu možemo odabrati na 10 načina, a isto tako drugu i treću. Međutim preostale tri komponente ne možemo više birati (odnosno, možemo ih birati na samo jedan način) jer četvrta komponenta mora biti jednaka trećoj, peta mora biti jednaka drugoj, a šesta komponenta jednaka prvoj. Stoga takvih uređenih šestorki ima ukupno $10^3 = 1\,000$.

e) Ovdje se radi zapravo o 6-permutacijama skupa od 10 elemenata. Stoga takvih uređenih šestorki s različitim komponentama ima ukupno $P(10, 6) = 151\,200$.

- Razmišljamo na sljedeći način. Ako odaberemo neku uređenu šestorku koja ima sve različite komponente i ako njezine komponente nisu u rastućem poretku, tada ih sortiramo tako da budu u rastućem poretku. O tom sortiranju možemo razmišljati kao da nam nije važan poredak tih komponenti kad je već on unaprijed zadan traženim svojstvom. Stoga takvih uređenih šestorki ima isto toliko koliko ima i svih šesteročlanih podskupova u skupu od 10 elemenata, tj. takvih uređenih šestorki ima ukupno $\binom{10}{6}$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.32.

Ako raspolažemo sa po jednim primjerkom kovanica od $1, 2, 5, 10, 20, 50$ *lipa te* $1, 2, 5$ *kuna, koliko različitih svota možemo pomoću njih napraviti?*

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.32.

Ako raspolažemo sa po jednim primjerkom kovanica od $1, 2, 5, 10, 20, 50$ *lipa te* $1, 2, 5$ *kuna, koliko različitih svota možemo pomoću njih napraviti?*

Rješenje.

Uočite da svakoj svoti odgovara po jedan podskup skupa od 9 elemenata (osim praznog skupa) jer različite kombinacije kovanica daju različite svote (naravno to je samo slučaj za ovaj zadatak). Stoga je ukupni broj svota jednak

$$\binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \cdots + \binom{9}{9} = 2^9 - 1 = 511.$$

Primjer 5.33.

Koliko različitih buketa od 2 crvene i 3 bijele ruže možemo složiti ako imamo 10 crvenih i 8 bijelih ruža? Ruže razlikujemo jednu od druge.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.33.

Koliko različitih buketa od 2 crvene i 3 bijele ruže možemo složiti ako imamo 10 crvenih i 8 bijelih ruža? Ruže razlikujemo jednu od druge.

Rješenje.

Dvije crvene ruže možemo odabrati na $\binom{10}{2}$ načina, a tri bijele na $\binom{8}{3}$ načina. Stoga ukupno možemo napraviti $\binom{10}{2}\binom{8}{3} = 2\,520$ buketa koji se sastoje od 2 crvene i 3 bijele ruže.

Primjer 5.34.

Na koliko načina možemo izabrati 5 od 52 karte ako među njima mora biti barem jedan tref?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.34.

Na koliko načina možemo izabrati 5 od 52 karte ako među njima mora biti barem jedan tref?

Rješenje.

1. način

Možemo izabrati 1, 2, 3, 4 ili 5 trefova. Broj načina da odaberemo i trefova jednak je

$$\binom{13}{i}\binom{52-13}{5-i} = \binom{13}{i}\binom{39}{5-i}.$$

Tada je ukupni broj načina da među 5 izabranih karata bude barem jedan tref jednak

$$\sum_{i=1}^{5}\binom{13}{i}\binom{39}{5-i} = 2\,023\,203.$$

2. način

Pet karti od 52 možemo izabrati na $\binom{52}{5}$ načina. Pet karti od 52 u kojima nema niti jednog trefa možemo odabrati na $\binom{39}{5}$ načina. Stoga je broj načina odabira 5 karata od 52, u kojima je barem jedan tref, jednak

$$\binom{52}{5} - \binom{39}{5}.$$

Pogledamo li oba načina rješavanja, možemo uočiti da smo opet na kombinatorni način dokazali jednakost

$$\sum_{i=1}^{5} \binom{13}{i}\binom{39}{5-i} = \binom{52}{5} - \binom{39}{5}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Pogledajmo još zašto bi u ovom slučaju bio pogrešan način razmišljanja da smo rekli da je ukupni broj načina da u izvučenih pet karata bude barem jedan tref jednak $\binom{13}{1}\binom{51}{4}$. Naime, mogli smo razmišljati ovako. Među izvučenih pet karata mora biti barem jedan tref, pa onda tog jednog trefa možemo izvući na $\binom{13}{1}$ načina. Nakon toga nam preostane još 51 karta od kojih biramo još 4 karte, a njih možemo odabrati na $\binom{51}{4}$ načina (a među njima možemo izvući i još kojeg trefa). Tada bi prema principu produkta ukupni broj načina bio $\binom{13}{1}\binom{51}{4}$. Zašto ovo nije dobro u ovom slučaju? Nije dobro zbog toga što na ovaj način brojimo iste stvari više puta.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Naime, na primjer na ovaj način

$$3\clubsuit,\ 2\heartsuit,\ 4\clubsuit,\ 5\diamondsuit,\ A\heartsuit$$

i

$$4\clubsuit,\ 5\diamondsuit,\ 2\heartsuit,\ 3\clubsuit,\ A\heartsuit$$

brojimo kao dvije različite mogućnosti, a to je zapravo ista mogućnost u ovom problemu je nam nije bitno kojeg smo trefa prije izvukli, a kojeg poslije. Ovaj način prebrojavanja razdvaja prvu komponentu od preostale 4, a to nam za ovu prirodu problema ne odgovara.

Zapitajte se opet da li su vam jasne sve navedene činjenice jer jedino na taj način možete svladati ovakve zadatke i izbjeći pogrešne načine prebrojavanja.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.35.

Koliko ima uređenih petorki brojeva čije su komponente iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ *i u rastućem su poretku?*

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.35.

Koliko ima uređenih petorki brojeva čije su komponente iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ *i u rastućem su poretku?*

Rješenje.

Izaberemo pet brojeva i sortiramo ih u rastućem poretku (znači, nije nam važan poredak elemenata i dozvoljena su ponavljanja jer ne tražimo da komponente strogo rastu). Dakle, ovdje se zapravo radi o 5-kombinacijama s ponavljanjem skupa od 20 elemenata. Dakle, ukupni broj takvih petorki jednak je

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{20+5-1}{5} = \binom{24}{5} = 42\,504.$$

Primjer 5.36.

Koliko ima nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžba

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.36.

Koliko ima nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžba

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13.$$

Rješenje.

Broj svih rješenja jednak je ukupnom broju načina na koje je moguće 13 jednakih predmeta razmjestiti u 4 kutije.



Taj broj je jednak ukupnom broju svih permutacija od 16 elemenata od kojih imamo 13 predmeta prve vrste i 3 predmeta druge vrste.

Dakle, ukupni broj nenegativnih cjelobrojnih rješenja dane jednadžbe jednak je

$$\binom{16}{13,3} = \frac{16!}{13! \cdot 3!} = 560.$$

Primjer 5.37.

Koliko rješenja u skupu $\mathbb{N}$ *ima jednadžba*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Dakle, ukupni broj nenegativnih cjelobrojnih rješenja dane jednadžbe jednak je

$$\binom{16}{13,3} = \frac{16!}{13! \cdot 3!} = 560.$$

Primjer 5.37.

Koliko rješenja u skupu $\mathbb{N}$ ima jednadžba

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13.$$

Rješenje.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13, \quad 1 \leqslant x_i \leqslant 10$$

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1) + (x_4 - 1) = 9$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 9, \quad 0 \leqslant y_i \leqslant 9$$

Dakle, sva prirodna rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$$

su u bijekciji sa nenegativnim cjelobrojnim rješenjima jednadžbe

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 9.$$

Stoga zadana jednadžba ima

$$\binom{12}{9,3} = 220$$

rješenja u skupu prirodnih brojeva.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.38.

Koliko ima nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžba

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$$

pri čemu je $x_1 \geqslant 8$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.38.

Koliko ima nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžba

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$$

pri čemu je $x_1 \geqslant 8$.

Rješenje.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$$

$$(x_1 - 8) + x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5, \quad y_i \geqslant 0$$

Dakle, ukupno takvih rješenja ima $\binom{8}{5,3} = 56$.

Formula uključivanja–isključivanja

Propozicija 5.1.

Neka su A i B podskupovi konačnog univerzalnog skupa $\mathcal{U}$. Tada vrijedi:

1. $k\big(A \cup B\big) = k(A) + k(B) - k\big(A \cap B\big)$
2. $k\big(A \cap B\big) \leqslant \min\big\{k(A), k(B)\big\}$
3. $k\big(A \setminus B\big) = k(A) - k\big(A \cap B\big)$
4. $k\big(A^c\big) = k(\mathcal{U}) - k(A)$
5. $k\big(A \times B\big) = k(A) \cdot k(B)$

Primjer 5.39.

Koliko ima prirodnih brojeva manjih od $1\,000$ *koji nisu djeljivi sa 7?*

Primjer 5.39.

Koliko ima prirodnih brojeva manjih od $1\,000$ *koji nisu djeljivi sa 7?*

Rješenje.

Neka je

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x \leqslant 1\,000,\ 7 \nmid x\}.$$

Tada je

$$A^c = \{x \in \mathbb{N} : x \leqslant 1\,000,\ 7 \mid x\}.$$

Nadalje, jasno je da je $k(A^c) = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142$ pa je

$$k(A) = 1\,000 - k(A^c) = 1\,000 - 142 = 858.$$

Primjer 5.40.

Izračunajte broj svih peteroznamenkastih brojeva koji

a. *sadrže barem jednu devetku,*
b. *sadrže barem jednu devetku ili barem jednu osmicu,*
c. *sadrže barem jednu devetku i barem jednu osmicu.*

Primjer 5.40.

Izračunajte broj svih peteroznamenkastih brojeva koji

a. *sadrže barem jednu devetku,*
b. *sadrže barem jednu devetku ili barem jednu osmicu,*
c. *sadrže barem jednu devetku i barem jednu osmicu.*

Rješenje.

$U \leftarrow$ skup svih peteroznamenkastih brojeva

$D \leftarrow$ skup svih peteroznamenkastih brojeva koji imaju barem jednu devetku

$O \leftarrow$ skup svih peteroznamenkastih brojeva koji imaju barem jednu osmicu

a. $k(D) = k(U) - k\big(D^c\big) = 9 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^4 = 37\,512$

b. Imamo

$$k\big(D \cup O\big) = k(U) - k\big((D \cup O)^c\big) =$$

$$= k(U) - k\big(D^c \cap O^c\big) = 9 \cdot 10^4 - 7 \cdot 8^4 = 61\,328$$

c. $k\big(D \cup O\big) = k(D) + k(O) - k\big(D \cap O\big) \;\Rightarrow$

$$k\big(D \cap O\big) = k(D) + k(O) - k\big(D \cup O\big)$$

$$k\big(D \cap O\big) = 37\,512 + 37\,512 - 61\,328 = 13\,696$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Teorem 5.7 (Formula uključivanja–isključivanja).

Za podskupove $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq S$ konačnog skupa S vrijedi

$$k\big(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\big) = \sum k(A_i) - \sum k\big(A_i \cap A_j\big) +$$

$$+ \sum k\big(A_i \cap A_j \cap A_t\big) - \cdots + (-1)^{n-1} k\big(A_1 \cap \cdots \cap A_n\big)$$

gdje je prva suma uzeta po svim $i \in \{1, \ldots, n\}$, druga suma po svim 2-kombinacijama $\{i, j\} \subset \{1, \ldots, n\}$, treća po svim 3-kombinacijama $\{i, j, t\} \subset \{1, \ldots, n\}$, itd.

Dokaz 1. (pomoću matematičke indukcije).

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po n. Za $n = 2$ tvrdnja očito vrijedi, tj. jasno je da vrijedi

$$k\big(A_1 \cup A_2\big) = k\big(A_1\big) + k\big(A_2\big) - k\big(A_1 \cap A_2\big).$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Koristeći da tvrdnja vrijedi za uniju dva skupa, imamo

$$k\big(A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}\big) = k\big((A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}\big) =$$

$$= k\big(A_1 \cup \cdots \cup A_n\big) + k\big(A_{n+1}\big) - k\big((A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}\big) =$$

$$= k\big(A_1 \cup \cdots \cup A_n\big) + k\big(A_{n+1}\big) -$$

$$- k\big((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})\big)$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Sada možemo iskoristiti pretpostavku indukcije na izraze

$$k\big(A_1 \cup \cdots \cup A_n\big) \quad \text{i} \quad k\big((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})\big),$$

pa dobivamo

$$k\big(A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}\big) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} k(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} k\big(A_i \cap A_j\big) +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i < j < t \leqslant n} k\big(A_i \cap A_j \cap A_t\big) - \cdots + (-1)^{n-1} k\big(A_1 \cap \cdots \cap A_n\big) +$$

$$+ k\big(A_{n+1}\big) - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} k\big(A_i \cap A_{n+1}\big) +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} k\big(A_i \cap A_{n+1} \cap A_j\big) - \cdots + (-1)^n k\big(A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}\big)$$

Grupiramo li zajedno odgovarajuće članove, dobivamo da je

$$k\big(A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}\big) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n+1} k(A_i) -$$

$$- \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} k\big(A_i \cap A_j\big) + \sum_{1 \leqslant i < j < t \leqslant n+1} k\big(A_i \cap A_j \cap A_t\big) -$$

$$- \cdots + (-1)^n k\big(A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}\big)$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Dokaz 2. (kombinatorni dokaz).

Sjetimo se najprije binomnog poučka

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

Stavimo li $x = -1$, $y = 1$, dobivamo da je

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

odnosno

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n} = 1. \qquad (*)$$

Prijeđimo sada na dokaz tvrdnje.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Na lijevoj strani jednakosti se nalazi izraz

$$k\big(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\big).$$

Iz definicije kardinalnog broja slijedi da se na lijevoj strani jednakosti svaki element koji se nalazi u bilo kojem od A_i-ova (može se nalaziti u više njih) broji točno jednom. Provjerimo da se i na desnoj strani svaki element koji se nalazi u bilo kojem od A_i-ova broji točno jednom. Na desnoj strani se nalazi izraz

$$\sum k(A_i) - \sum k\Big(A_i \cap A_j\Big) + \sum k\Big(A_i \cap A_j \cap A_t\Big) - \cdots + (-1)^{n-1} k\Big(A_1 \cap \cdots \cap A_n\Big)$$

Ako se neki element pojavljuje u točno r A_i-ova, onda se r puta broji u $\sum k(A_i)$, $\binom{r}{2}$ puta se broji u $\sum k\big(A_i \cap A_j\big)$

$\binom{r}{3}$ puta se broji u $\sum k\big(A_i \cap A_j \cap A_t\big)$, itd., i na kraju točno jednom se broji u $\sum k\big(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}\big)$. U presjecima u kojima se pojavljuje više od r skupova taj element se broji nula puta (zato jer se on pojavljuje u točno r skupova po pretpostavci). Stoga se taj element na desnoj strani broji ukupno $\binom{r}{1}-\binom{r}{2}+\binom{r}{3}-\cdots+(-1)^{r-1}\binom{r}{r}$ puta, a prema $(*)$ je taj izraz jednak 1, pa se i na desnoj strani taj element broji točno jednom. Kako to vrijedi za svaki r (bez obzira koliko se puta pojedini element pojavljuje u bilo kojem od skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$), slijedi da se i na desnoj strani svaki element koji se pojavljuje u bilo kojem od A_i-ova broji točno jednom. ♡

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Teorem 5.8 (FUI, ekvivalentni zapis).

Za podskupove $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq S$ konačnog skupa S vrijedi

$$k\left(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c\right) = k(S) - \sum k(A_i) +$$

$$+ \sum k\left(A_i \cap A_j\right) - \sum k\left(A_i \cap A_j \cap A_t\right) +$$

$$+ \cdots + (-1)^n k\left(A_1 \cap \cdots \cap A_n\right)$$

gdje je prva suma uzeta po svim $i \in \{1, \ldots, n\}$, druga suma po svim 2-kombinacijama $\{i, j\} \subset \{1, \ldots, n\}$, treća po svim 3-kombinacijama $\{i, j, t\} \subset \{1, \ldots, n\}$, itd.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Dokaz.

Primjenom De Morganove formule slijedi

$$k\big(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c\big) = k\big((A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^c\big) =$$

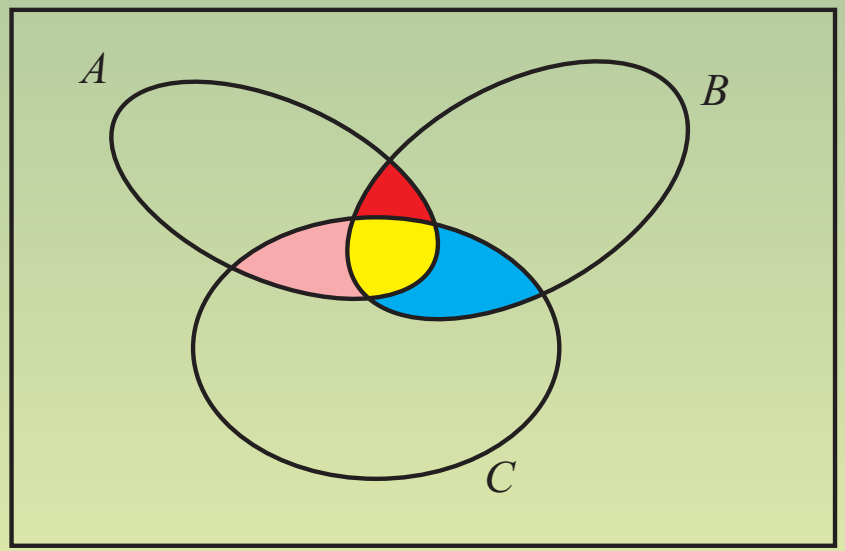
$$= k(S) - k\big(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\big)$$

Primijenimo li prethodni teorem na izraz

$$k\big(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\big),$$

dobivamo navedenu jednakost u teoremu. ♡

Primjer 5.41.



$$k\big(A \cup B \cup C\big) = k(A) + k(B) + k(C) - k\big(A \cap B\big) -$$
$$- k\big(A \cap C\big) - k\big(B \cap C\big) + k\big(A \cap B \cap C\big)$$

Primjer 5.42.

Koliko ima brojeva od 1 do 1000 koji su djeljivi s 3, a nisu djeljivi niti s jednim od brojeva 2, 5 i 7?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.42.

Koliko ima brojeva od 1 do 1000 koji su djeljivi s 3, a nisu djeljivi niti s jednim od brojeva 2, 5 i 7?

Rješenje.

Neka je S skup svih brojeva manjih od 1000 koji su djeljivi s 3.

$A_2 \subset S$ skup brojeva djeljivih s 2 (odnosno sa 6)

$A_5 \subset S$ skup brojeva djeljivih s 5 (odnosno s 15)

$A_7 \subset S$ skup brojeva djeljivih sa 7 (odnosno s 21)

Trebamo pronaći koliko je $k\left(A_2^c \cap A_5^c \cap A_7^c\right)$.

Koristimo formulu uključivanja-isključivanja.

$$k\left(A_2^c \cap A_5^c \cap A_7^c\right) = k(S) - k(A_2) - k(A_5) - k(A_7) +$$

$$+ k\left(A_2 \cap A_5\right) + k\left(A_2 \cap A_7\right) + k\left(A_5 \cap A_7\right) - k\left(A_2 \cap A_5 \cap A_7\right)$$

Računamo

$$k(S) = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333 \qquad k\left(A_2 \cap A_5\right) = \left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 2 \cdot 5} \right\rfloor = 33$$

$$k(A_2) = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166 \qquad k\left(A_2 \cap A_7\right) = \left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 2 \cdot 7} \right\rfloor = 23$$

$$k(A_5) = \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor = 66 \qquad k\left(A_5 \cap A_7\right) = \left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor = 9$$

$$k(A_7) = \left\lfloor \frac{1000}{21} \right\rfloor = 47 \qquad k\left(A_2 \cap A_5 \cap A_7\right) = \left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor = 4$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Konačno dobivamo

$$k\left(A_2^c \cap A_5^c \cap A_7^c\right) = 333 - 166 - 66 - 47 + 33 + 23 + 9 - 4 = 115$$

Dakle, ima ukupno 115 brojeva manjih od 1000 koji su djeljivi s 3, a nisu djeljivi s 2, 5 i 7.

Primjer 5.43.

Na koliko se načina n različitih predmeta može raspodijeliti u 5 različitih kutija tako da bar jedna kutija ostane prazna?

Rješenje.

Za $i \in \{1,2,3,4,5\}$, neka je A_i skup svih razmještaja n različitih predmeta u 5 kutija tako da je i-ta kutija prazna (može i još neka biti možda prazna). Tražimo $k\big(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5\big)$. Iz FUI slijedi da je

$$k\Big(A_1 \cup \cdots \cup A_5\Big) = \sum k(A_i) - \sum k\Big(A_i \cap A_j\Big) + \sum k\Big(A_i \cap A_j \cap A_t\Big) - \\ - \sum k\Big(A_i \cap A_j \cap A_t \cap A_l\Big) + k\Big(A_1 \cap \cdots \cap A_5\Big)$$

Nadalje, dobivamo

$$k(A_i) = 4^n, \quad i = 1,2,3,4,5$$
$$k\big(A_i \cap A_j\big) = 3^n, \quad i < j$$
$$k\big(A_i \cap A_j \cap A_t\big) = 2^n, \quad i < j < t$$
$$k\big(A_i \cap A_j \cap A_t \cap A_l\big) = 1, \quad i < j < t < l$$
$$k\big(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5\big) = 0$$

Stoga je

$$k\big(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5\big) =$$

$$= \binom{5}{1} \cdot 4^n - \binom{5}{2} \cdot 3^n + \binom{5}{3} \cdot 2^n - \binom{5}{4} \cdot 1 + 0 =$$

$$= 5 \cdot 4^n - 10 \cdot 3^n + 10 \cdot 2^n - 5$$

Primjer 5.44.

Neka su A i B konačni skupovi, $k(A) = n$, $k(B) = m$.

a. *Koliko ima funkcija $A \to B$?*
b. *Koliko ima injekcija $A \to B$?*
c. *Koliko ima surjekcija $A \to B$?*

Rješenje.

a. Svaki element skupa A možemo preslikati na m načina. Stoga je broj svih funkcija $A \to B$ jednak m^n.

b. U slučaju da je $n > m$, tada nema niti jedne injekcije $A \to B$. Pretpostavimo da je $n \leqslant m$. Očito je da svakoj injekciji $A \to B$ možemo pridružiti jednu n-permutaciju m-članog skupa i obrnuto, svakoj n-permutaciji m-članog skupa možemo pridružiti jednu injekciju $A \to B$. Stoga je broj injekcija jednak $P(m,n) = \frac{m!}{(m-n)!}$.

c. Ako je $n < m$, tada nema niti jedne surjekcije $A \to B$. Pretpostavimo da je $n \geqslant m$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Neka je S skup svih funkcija $A \to B$. Tada je prema (a) dijelu zadatka $k(S) = m^n$. Možemo uzeti da je

$$A = \{1, 2, \ldots, n\} \quad \text{i} \quad B = \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Neka je

$$A_i = \big\{ f \in S : i \notin \operatorname{Im} f \big\}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Tada je

$$A_i^c = \big\{ f \in S : i \in \operatorname{Im} f \big\}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Stoga je broj svih surjekcija jednak $k\big(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c\big)$.

Nadalje je

$$k(A_i) = (m-1)^n, \quad k\big(A_i \cap A_j\big) = (m-2)^n$$

i općenito

$$k\big(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}\big) = (m-r)^n.$$

Prema FUI slijedi da je

$$k\big(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c\big) =$$

$$= m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n - \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}$$

Napomena.

Broj svih surjekcija može se shvatiti i kao broj načina na koje možemo n različitih predmeta smjestiti u m različitih kutija tako da svaka kutija sadrži barem jedan predmet, jer svakom takvom razmještaju predmeta u kutije možemo pridružiti surjekciju koja predmete preslikava u odgovarajuće kutije.

Nadalje, broj načina na koje možemo n različitih predmeta smjestiti u m istih kutija (kutije ne razlikujemo) tako da niti jedna ne ostane prazna, jednak je

$$\left\{ n \atop m \right\} = \frac{1}{m!} \underbrace{\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} (m-r)^n}_{\text{broj surjekcija}}$$

Naime, svakoj surjektivnoj razdiobi n predmeta u m istih kutija odgovara $m!$ razdioba u m različitih kutija. Na primjer, ako imamo tri predmeta P_1, P_2, P_3 i dvije kutije K_1, K_2 i smjestimo li u kutiju K_1 predmete P_1 i P_2, a P_3 stavimo u kutiju K_2, tada ako kutije razlikujemo, onda navedenu razdiobu predmeta razlikujemo od razdiobe u kojoj su predmeti P_1 i P_2 u kutiji K_2, a predmet P_3 u kutiji K_1. Ako kutije ne razlikujemo, onda navedene dvije razdiobe isto ne razlikujemo.

Broj $\left\{ {n \atop m} \right\}$ se zove **Stirlingov broj druge vrste**.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Zadatak 5.1.

Riješite primjer 5.44. *ako je*

a. $k(A) = 2,\ k(B) = 3$

b. $k(A) = 3,\ k(B) = 2$

c. $k(A) = 3,\ k(B) = 3$

Ispišite eksplicitno i sve moguće funkcije u pojedinim slučajevima.

Zadatak 5.2.

Izračunajte Stirlingove brojeve druge vrste $\left\{ {4 \atop 2} \right\}$ *i* $\left\{ {2 \atop 4} \right\}$ *te dajte njihove kombinatorne interpretacije.*

Rješenje.

$\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7, \quad \left\{ {2 \atop 4} \right\} = 0$

Deranžmani

Postavlja se sljedeće prirodno pitanje. Koliko ima permutacija

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$$

koje nemaju fiksnih točaka, tj. za koje je $f(i) \neq i$ za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$?

Broj takvih permutacija označavamo s D_n i zovemo **broj deranžmana** ili "totalne zbrke" od n elemenata. Po definiciji stavljamo da je $D_0 = 1$, a očito je $D_1 = 0$, a $D_2 = 1$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Teorem 5.9.

Za $n \in \mathbb{N}$ broj deranžmana od n elemenata jednak je

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right).$$

Dokaz.

Neka je S skup svih permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Nadalje, neka je

$$A_j = \{f \in S : f(j) = j\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Tada je $D_n = k\left(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c\right)$. Permutacije iz A_1 su oblika $1i_2 \cdots i_n$, gdje je $i_2 \cdots i_n$ bilo koja permutacija skupa $\{2, 3, \ldots, n\}$. Stoga je $k(A_1) = (n-1)!$. Slično je i $k(A_j) = (n-1)!$ za svaki $j = 1, 2, \ldots, n$.

Permutacije iz $A_1 \cap A_2$ su oblika $12i_3 \dots i_n$, gdje je $i_3 \cdots i_n$ bilo koja permutacija od $\{3, 4, \dots, n\}$. Stoga je $k\big(A_1 \cap A_2\big) = (n-2)!$. Slično je i $k\big(A_i \cap A_j\big) = (n-2)!$ za svaku 2-kombinaciju $\{i, j\}$ skupa $\{1, 2, \dots, n\}$. Općenito, za svaki t, permutacije iz $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_t$ su oblika $12 \cdots t\, i_{t+1} \cdots i_n$, gdje je $i_{t+1} \cdots i_n$ bilo koja permutacija skupa $\{t+1, \dots, n\}$. Stoga je $k\big(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_t\big) = (n-t)!$. Analogno je i $k\big(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_t}\big) = (n-t)!$ za bilo koju t-kombinaciju $\{i_1, i_2, \dots, i_t\}$ skupa $\{1, 2, \dots, n\}$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Iz FUI tada slijedi

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! -$$

$$- \binom{n}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} \cdot 0! =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}(n-i)! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!} = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

♡

Vrijedi da je

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

pa je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{n!} = e^{-1}.$$

Isto tako, vrijedi

$$\left| D_n - \frac{n!}{e} \right| < \frac{1}{n+1}$$

pa je D_n najbliži cijeli broj broju $\frac{n!}{e}$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.45.

Na svečanoj dodjeli diploma bilo je 10 studenata. Na koliko im načina dekan može dodijeliti diplome tako da niti jedan student ne dobije svoju diplomu?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.45.

Na svečanoj dodjeli diploma bilo je 10 studenata. Na koliko im načina dekan može dodijeliti diplome tako da niti jedan student ne dobije svoju diplomu?

Rješenje.

Zapravo je pitanje koliko ima ukupno deranžmana u skupu od 10 elemenata. Znamo da je D_n jednak najbližem cijelom broju broja $\frac{n!}{e}$. Stoga računamo

$$\frac{10!}{e} = \frac{3\,628\,800}{e} \approx 1334960.9161229$$

pa je onda $D_{10} = 1\,334\,961$. Dakle, dekan može studentima dodijeliti diplome na $1\,334\,961$ načina tako da niti jedan student ne dobije svoju diplomu.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rekurzivne relacije

Jedna od vrlo važnih i primjenjivih metoda u kombinatorici su tzv. **rekurzivne relacije** ili krako **rekurzije**. Jednostavno rečeno, rekurzija je formula pomoću koje se n-ti član niza a_n izražava pomoću nekoliko prethodnih članova.

Rekurzivne relacije su važne i u primjenama jer su pogodne za rad na računalu. Kao primjer, spomenimo samo razne iterativne algoritme za numeričko rješavanje sustava linearnih jednadžbi.

U rješavanju nekog problema rekurzije se prirodno javljaju kada taj problem svedemo na više manjih potproblema, tj. problem dimenzije n svedemo na više problema manjih dimenzija, što ćemo kasnije vidjeti na primjerima.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.46.

Niz (a_n) je zadan rekurzivno s

$$a_1 = \tfrac{3}{2}, \quad a_n = 5a_{n-1} - 1,\ n \geqslant 2.$$

Napišite prva četiri člana niza i pronađite formulu za opći član niza.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.46.

Niz (a_n) je zadan rekurzivno s

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_n = 5a_{n-1} - 1,\ n \geqslant 2.$$

Napišite prva četiri člana niza i pronađite formulu za opći član niza.

Rješenje.

$$a_1 = \frac{3}{2}$$

$$a_2 = 5a_1 - 1 = 5 \cdot \frac{3}{2} - 1 = \frac{13}{2}$$

$$a_3 = 5a_2 - 1 = 5 \cdot \frac{13}{2} - 1 = \frac{63}{2}$$

$$a_4 = 5a_3 - 1 = 5 \cdot \frac{63}{2} - 1 = \frac{313}{2}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Da bismo pronašli opći član niza koristit ćemo jednu metodu rješavanja rekurzija koja se zove **teleskopiranje**.

$$a_n = 5a_{n-1} - 1$$

$$a_{n-1} = 5a_{n-2} - 1 \;/\cdot 5$$

$$a_{n-2} = 5a_{n-3} - 1 \;/\cdot 5^2$$

$$\vdots$$

$$a_3 = 5a_2 - 1 \;/\cdot 5^{n-3}$$

$$a_2 = 5a_1 - 1 \;/\cdot 5^{n-2}$$

Nakon odgovarajućih množenja dobivamo

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$a_n = 5a_{n-1} - 1$$
$$5a_{n-1} = 5^2 a_{n-2} - 5$$
$$5^2 a_{n-2} = 5^3 a_{n-3} - 5^2$$
$$\vdots$$
$$5^{n-3} a_3 = 5^{n-2} a_2 - 5^{n-3}$$
$$5^{n-2} a_2 = 5^{n-1} a_1 - 5^{n-2}$$

Zbrojimo li gornje jednakosti dobivamo

$$a_n = 5^{n-1} a_1 - \left(1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{n-3} + 5^{n-2}\right).$$

Uzmemo li u obzir da je $a_1 = \frac{3}{2}$ i da je u zagradi suma prvih $n-1$ članova geometrijskog niza, dobivamo

$$a_n = \frac{3}{2} \cdot 5^{n-1} - \frac{5^{n-1} - 1}{5 - 1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{4}\left(5^n + 1\right)$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.47.

Komad papira prerežemo na 4 dijela. Zatim neke od tih dijelova ponovno prerežemo na 4 dijela. Možemo li nastavljajući postupak u određenom trenutku imati 1989 papirića? Da li možemo imati 2008 papirića?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.47.

Komad papira prerežemo na 4 dijela. Zatim neke od tih dijelova ponovno prerežemo na 4 dijela. Možemo li nastavljajući postupak u određenom trenutku imati 1989 papirića? Da li možemo imati 2008 papirića?

Rješenje.

Neka je k_n broj komada papirića u trenutku n. Jasno je da je $k_1 = 1$ jer na početku imamo jedan komad papira. U trenutku $n-1$ imamo k_{n-1} komada papira i biramo jedan od tih komada i režemo ga na 4 dijela pa ćemo nakon toga imati $k_{n-1}+3$ komada papira i to je broj komada papira u trenutku n, tj. $k_n = k_{n-1}+3$. Dakle, dobili smo rekurziju $k_n = k_{n-1}+3$ uz početni uvjet $k_1 = 1$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Da bismo riješili dobivenu rekurziju, koristimo opet teleskopiranje.

$$\begin{aligned} k_n &= k_{n-1} + 3 \\ k_{n-1} &= k_{n-2} + 3 \\ k_{n-2} &= k_{n-3} + 3 \\ &\vdots \\ k_3 &= k_2 + 3 \\ k_2 &= k_1 + 3 \end{aligned}$$

Zbrajanjem gornjih jednakosti dobivamo

$$k_n = k_1 + (n-1) \cdot 3,$$

a ako uzmemo u obzir da je $k_1 = 1$, slijedi

$$k_n = 3n - 2.$$

Pitamo se da li je moguće da bude $k_n = 1989$ za neki $n \in \mathbb{N}$.

$$k_n = 1989 \Leftrightarrow 3n - 2 = 1989 \Leftrightarrow n = \frac{1991}{3} \notin \mathbb{N}$$

Dakle, ovakvim rezanjem papira nikada nećemo imati 1989 papirića. Pitamo se da li je moguće da bude $k_n = 2008$ za neki $n \in \mathbb{N}$.

$$k_n = 2008 \Leftrightarrow 3n - 2 = 2008 \Leftrightarrow n = 670$$

Dakle, nakon 670 rezanja ćemo imati 2008 komada papirića (naravno, ovdje pod jednim rezanjem računamo sva rezanja koja nam jedan komad papirića dijele na 4 nova komadića).

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

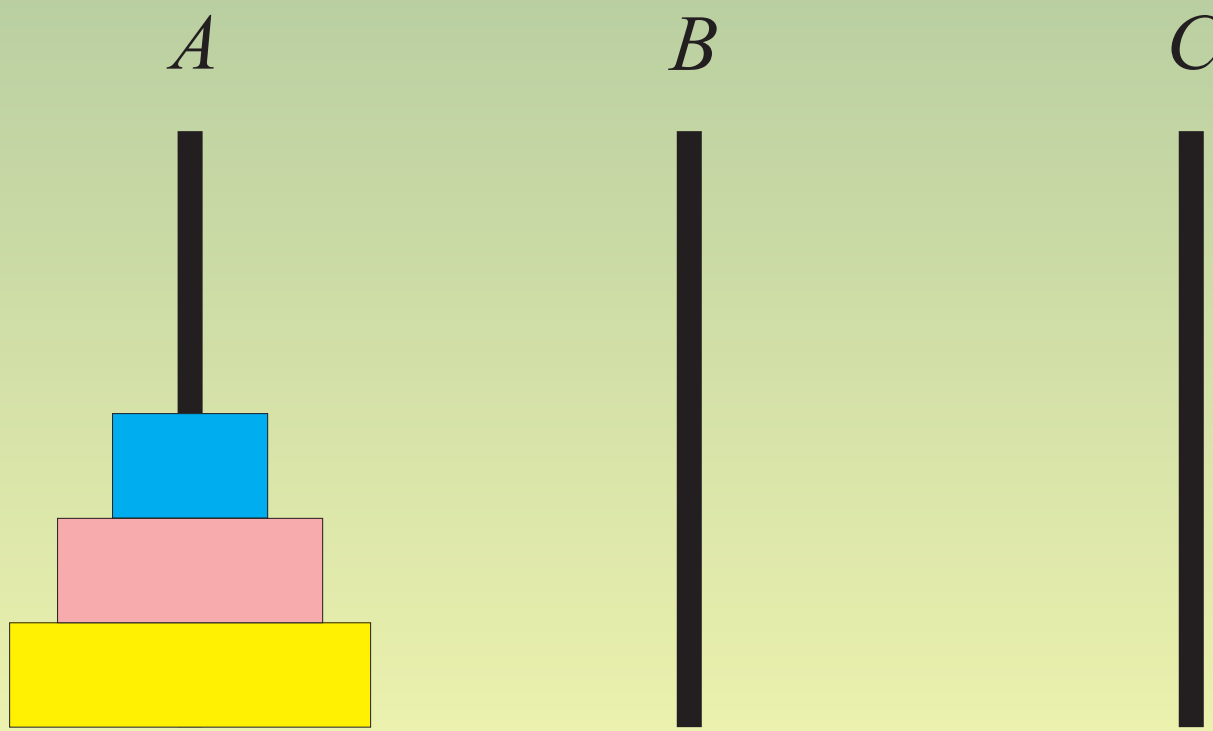
Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.48 (Tornjevi Hanoja).

Na jednom od triju štapova A, B, C, npr. na štapu A, nalazi se n kolutova različitih veličina nanesenih tako da je svaki kolut manji od onog ispod njega. Sve kolutove treba premjestiti na štap B tako da i tamo budu u istom položaju. Pritom se kolutovi prenose sa štapa na štap tako da se svaki put prenese samo jedan kolut i da se nikada veći kolut ne stavlja na manji. Pritom se možemo služiti trećim pomoćnim štapom C. Nađite rekurzivnu formulu za najmanji potrebni broj prijenosa kolutova da se izvrši premještaj s A na B i odredite taj broj.

Rješenje.

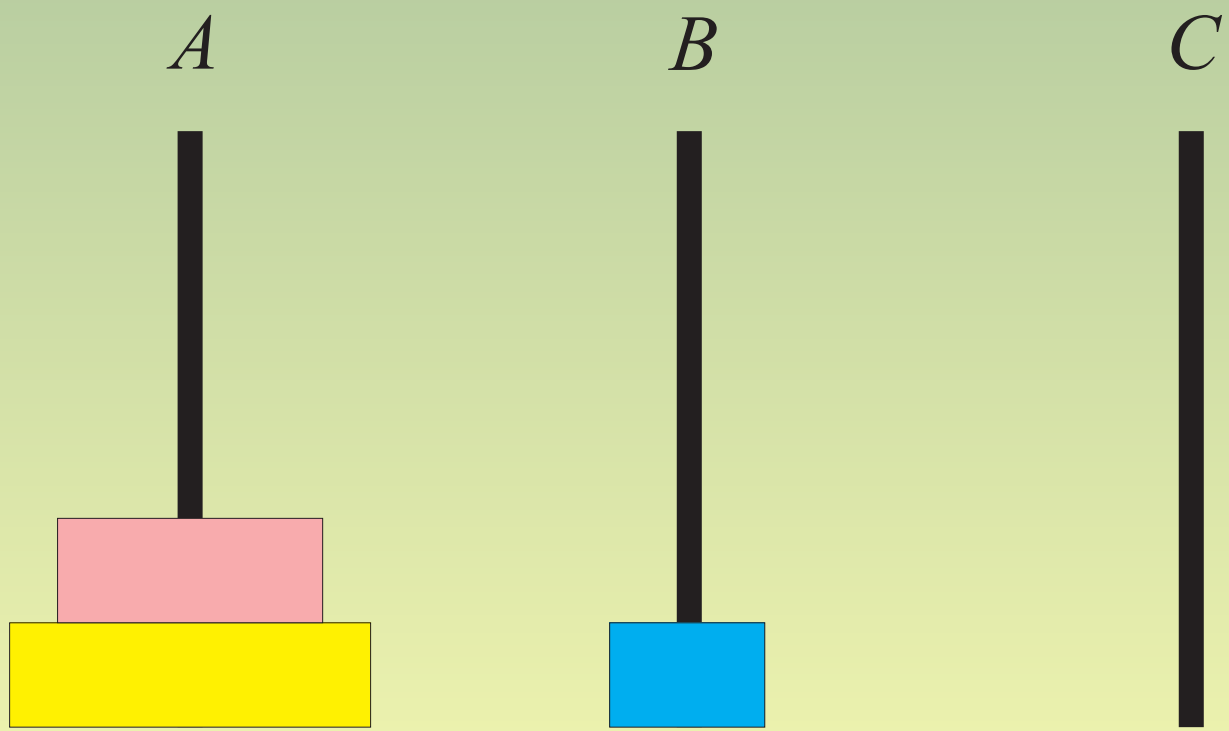
Radi ilustracije i boljeg razumijevanja problema, pogledajmo najprije slučaj sa tri koluta.



Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rješenje.

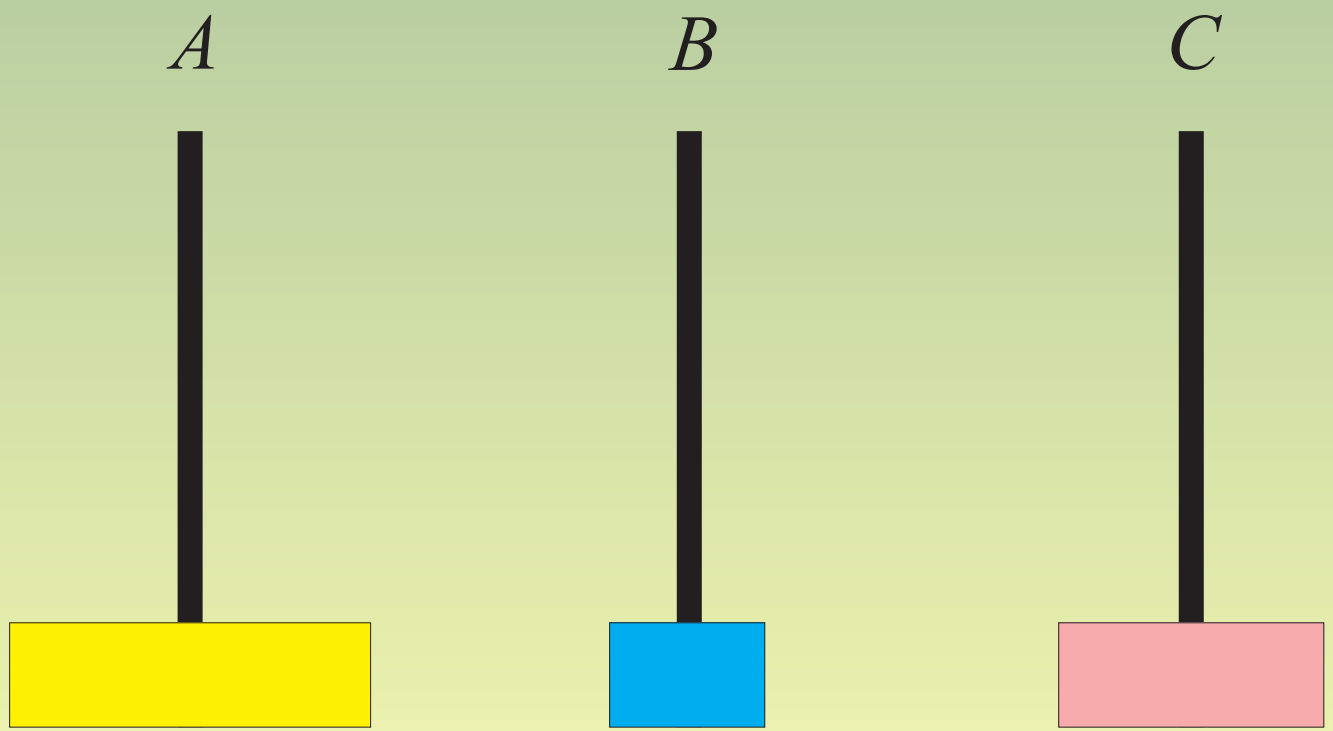
Radi ilustracije i boljeg razumijevanja problema, pogledajmo najprije slučaj sa tri koluta.



Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rješenje.

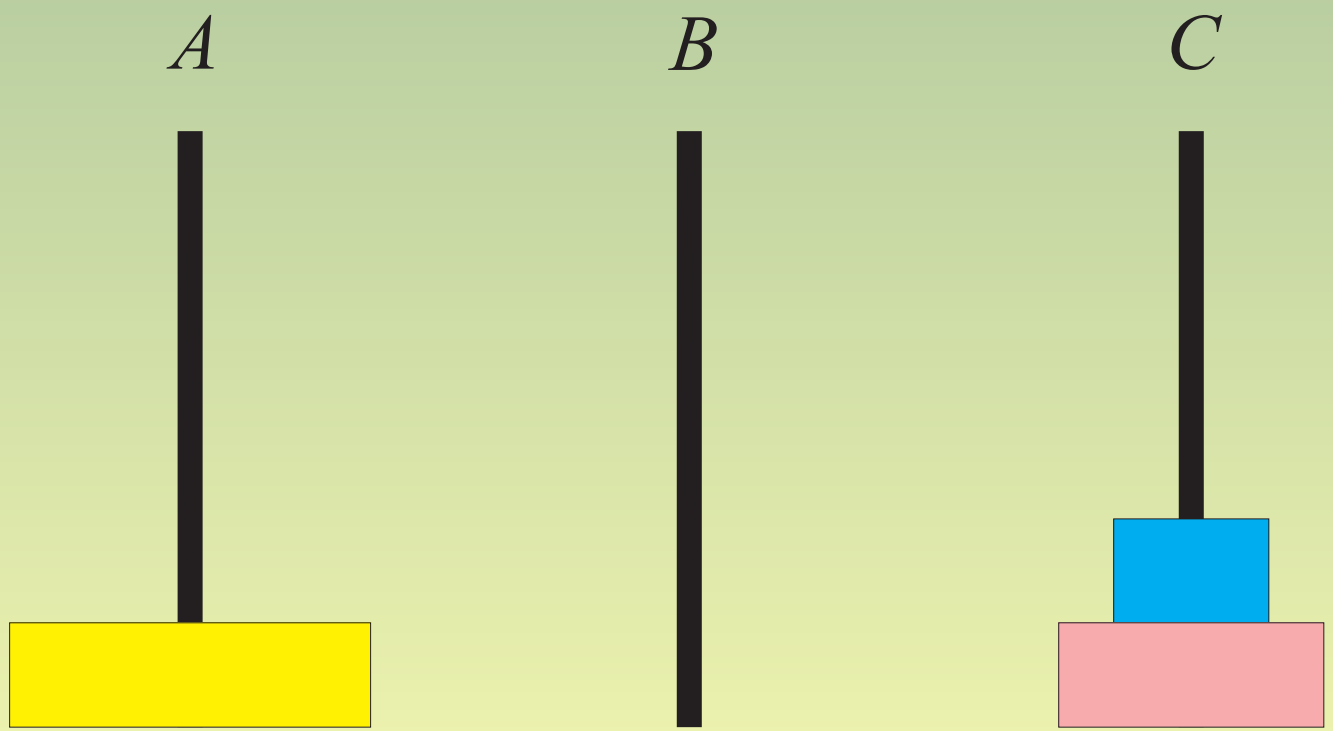
Radi ilustracije i boljeg razumijevanja problema, pogledajmo najprije slučaj sa tri koluta.



Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rješenje.

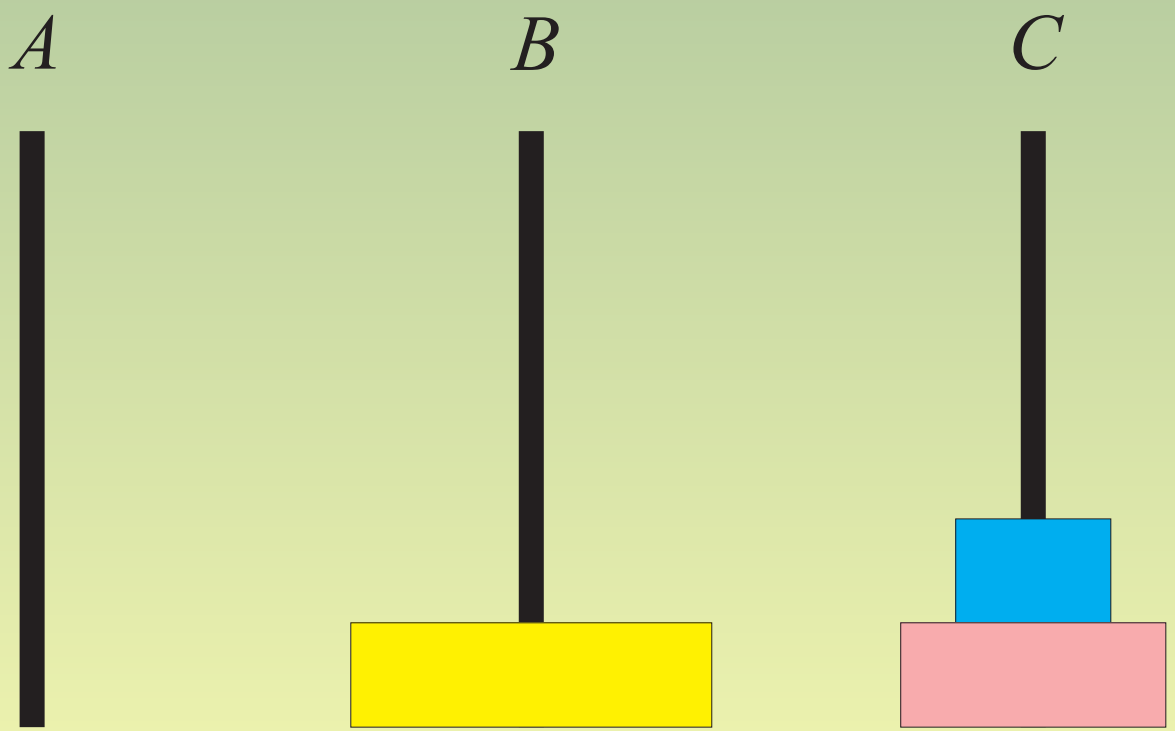
Radi ilustracije i boljeg razumijevanja problema, pogledajmo najprije slučaj sa tri koluta.



Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rješenje.

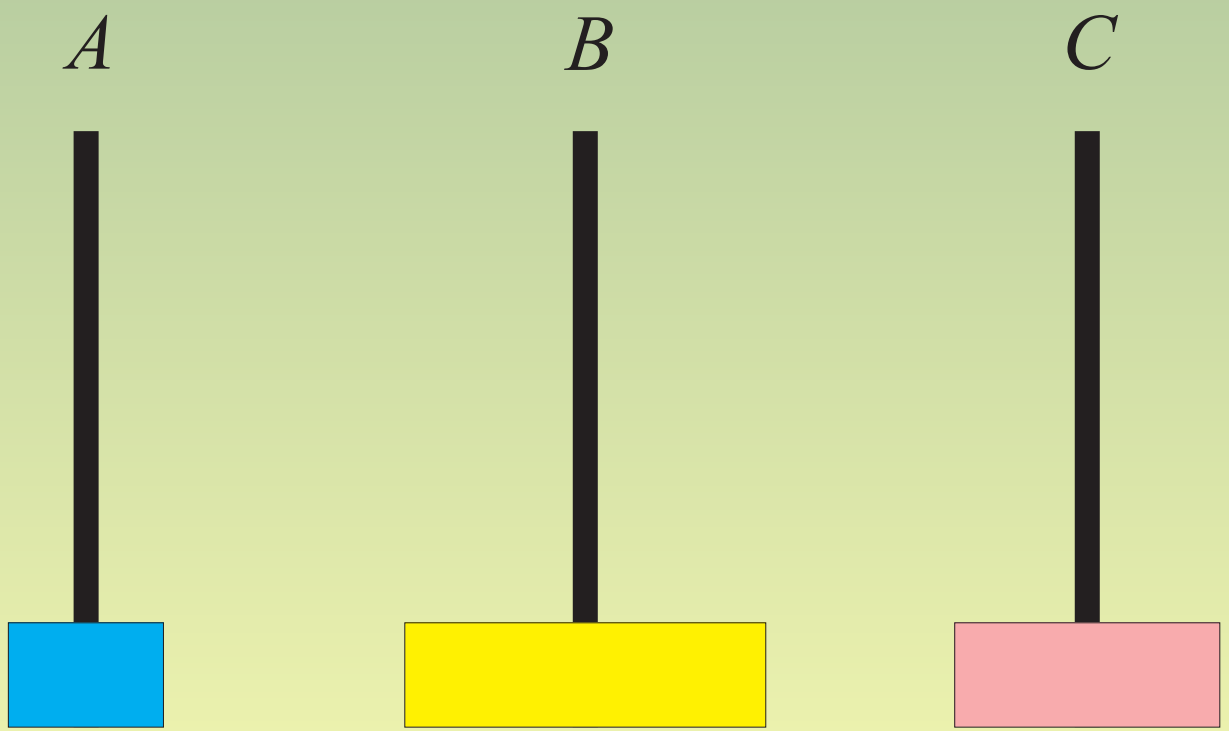
Radi ilustracije i boljeg razumijevanja problema, pogledajmo najprije slučaj sa tri koluta.



Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rješenje.

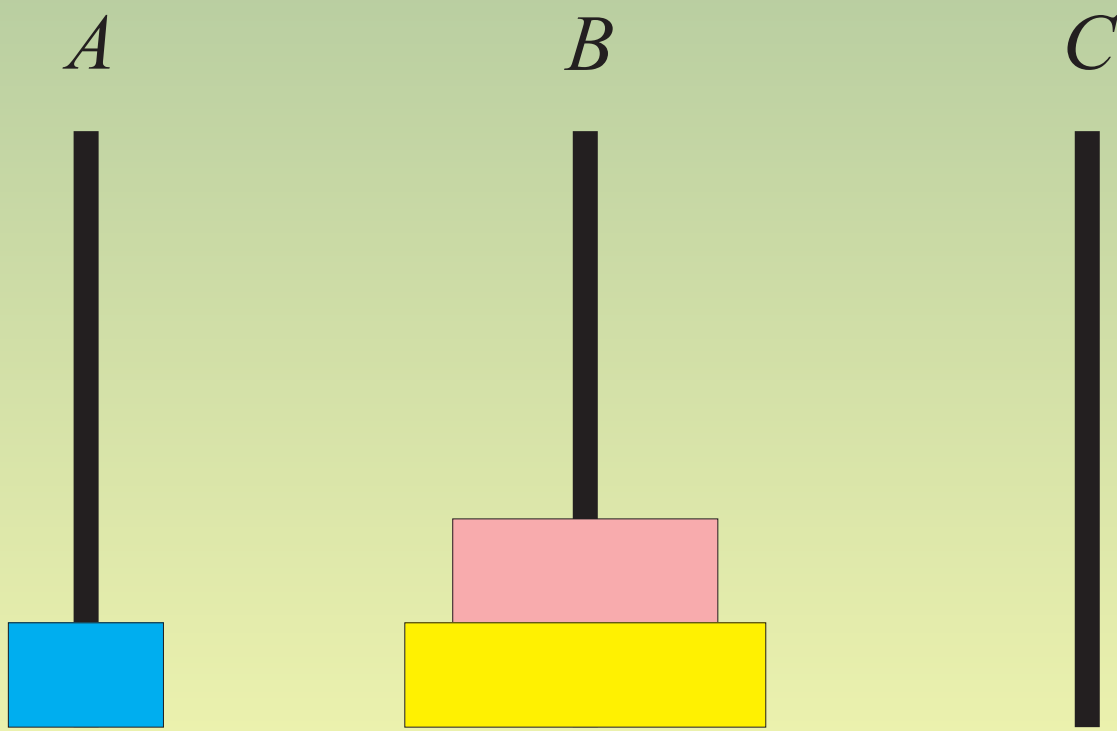
Radi ilustracije i boljeg razumijevanja problema, pogledajmo najprije slučaj sa tri koluta.



Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rješenje.

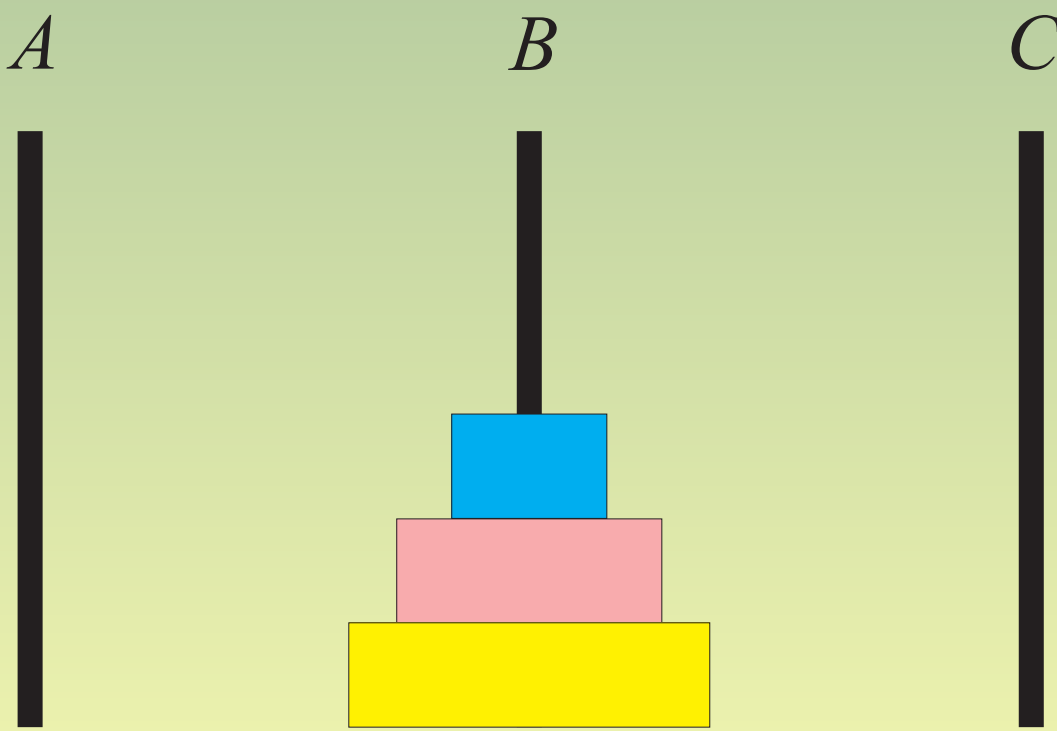
Radi ilustracije i boljeg razumijevanja problema, pogledajmo najprije slučaj sa tri koluta.



Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rješenje.

Radi ilustracije i boljeg razumijevanja problema, pogledajmo najprije slučaj sa tri koluta.



Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Uočavamo da nam je za slučaj tri koluta potrebno minimalno 7 premještaja da bismo kolutove sa štapa A premjestili na štap B držeći se navedenih pravila. Prijeđimo sada na opći slučaj. Neka je H_n minimalni broj premještaja n kolutova sa štapa A na štap B. Očito je $H_0 = 0$ i $H_1 = 1$. Neka je $n \geqslant 2$. Da bismo s A mogli skinuti najdonji kolut, moramo prvo premjestiti $n-1$ kolutova na B i C. Kako n-ti kolut (najveći kolut) ne smije doći na neki manji, moramo prethodno prvih $n-1$ kolutova sve smjestiti na C. Za to nam je potrebno H_{n-1} prijenosa. Nakon toga možemo n-ti kolut staviti na štap B i tada imamo ukupno $H_{n-1}+1$ prijenosa.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Sada moramo sa štapa C prenijeti $n-1$ kolutova na štap B koristeći A kao pomoćni štap. Za to nam treba još H_{n-1} prijenosa. Stoga je $H_n = \big(H_{n-1}+1\big) + H_{n-1}$, tj.

$$H_n = 2H_{n-1}+1,\ H_1 = 1.$$

Pomoću teleskopiranja rješavamo dobivenu rekurziju.

$$H_n = 2H_{n-1}+1$$

$$H_{n-1} = 2H_{n-2}+1 \ \big/ \cdot 2$$

$$H_{n-2} = 2H_{n-3}+1 \ \big/ \cdot 2^2$$

$$\vdots$$

$$H_3 = 2H_2+1 \ \big/ \cdot 2^{n-3}$$

$$H_2 = 2H_1+1 \ \big/ \cdot 2^{n-2}$$

Nakon odgovarajućih množenja dobivamo

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$
$$2H_{n-1} = 2^2 H_{n-2} + 2$$
$$2^2 H_{n-2} = 2^3 H_{n-3} + 2^2$$
$$\vdots$$
$$2^{n-3} H_3 = 2^{n-2} H_2 + 2^{n-3}$$
$$2^{n-2} H_2 = 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2}$$

Zbrajanjem gornjih jednakosti dobivamo

$$H_n = 2^{n-1} H_1 + \left(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-3} + 2^{n-2}\right)$$
$$H_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1}$$
$$H_n = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \Rightarrow H_n = 2^n - 1$$

Linearna homogena rekurzija s konstantnim koeficijentima je rekurzija oblika

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_r a_{n-r} \qquad (*)$$

gdje su $c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$ zadane konstante, a $n \geqslant r$. Ako je pritom $c_r \neq 0$, kažemo da je $(*)$ rekurzivna relacija reda r.
Stavimo li u $(*)$ $a_k = x^k$, dobivamo

$$x^n = c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_r x^{n-r} \;\big/ : x^{n-r}$$

$$x^r - c_1 x^{r-1} - c_2 x^{r-2} - \cdots - c_r = 0 \qquad (**)$$

$(**)$ se zove **karakteristična jednadžba** rekurzivne relacije $(*)$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Prema osnovnom teoremu algebre rješenja od $(**)$ su $x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathbb{C}$ koji ne moraju biti različiti, ali su svi različiti od nule zbog $c_r \neq 0$. Dakle

$$a_n = x^n \text{ je rješenje od } (*) \Leftrightarrow x \text{ je rješenje od } (**)$$

Kako je skup svih rješenja od $(*)$ kompleksni vektorski prostor (uvjerite se u to tako da pokažete da je linearna kombinacija bilo koja dva rješenje od $(*)$ opet rješenje od $(*)$), tada je

$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \cdots + \lambda_r x_r^n$$

također rješenje od $(*)$, gdje su $x_1, x_2, \ldots, x_r$ rješenja od $(**)$, a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

U slučaju da su $x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathbb{C}$ svi međusobno različiti, tada

$$a_n^{(1)} = x_1^n, \quad a_n^{(2)} = x_2^n \ , \ldots , \ a_n^{(r)} = x_r^n$$

čine bazu za vektorski prostor svih rješenja od $(*)$, a o tome govori sljedeći teorem.

Teorem 5.10.

Ako su svi karakteristični korijeni $x_1, x_2, \ldots, x_r$ rekurzivne relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_r a_{n-r}, \quad c_r \neq 0, \ n \geqslant r$$

međusobno različiti, tada je opće rješenje dano s

$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_r x_r^n,$$

gdje su $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ proizvoljni.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Dokaz.

Znamo da a_n zadan s $a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_r x_r^n$ zadovoljava $(*)$, samo još trebamo vidjeti da li svako rješenje b_n možemo dobiti iz te relacije za neke kompleksne brojeve $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Neka je b_n neko rješenje. Tada je b_n potpuno određen sa $(*)$ i sa r svojih početnih vrijednosti $b_0, b_1, \ldots, b_{r-1}$ koji su unaprijed zadani kompleksni brojevi. Pitamo se da li postoje $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ takvi da je

$$b_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_r x_r^n.$$

Uvrstimo li u prethodnu relaciju početne uvjete $b_0, b_1, \ldots, b_{r-1}$, dobivamo

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r = b_0$$
$$x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + \cdots + x_r\lambda_r = b_1$$
$$x_1^2\lambda_1 + x_2^2\lambda_2 + \cdots + x_r^2\lambda_r = b_2$$
$$\vdots$$
$$x_1^{r-1}\lambda_1 + x_2^{r-1}\lambda_2 + \cdots + x_r^{r-1}\lambda_r = b_{r-1}$$

To je linearni sustav r jednadžbi s r nepoznanica $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$.
Determinanta tog sustava je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_r \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_r^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{r-1} & x_2^{r-1} & \cdots & x_r^{r-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

To je Vandermondeova determinanta. Kako su po pretpostavci svi karakteristični korijeni $x_1, x_2, \ldots, x_r$ međusobno različiti, slijedi da je $\prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0$ pa je Vandermondeova determinanta različita od nule. Stoga prema Cramerovom pravilu dobiveni sustav ima jedinstvenio rješenje $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Dakle, bilo koje rješenje b_n od $(*)$ možemo dobiti iz

$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \lambda_r x_r^n$$

za neke $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$. ♡

Primjer 5.49.

Riješite sljedeće rekurzivne relacije:

a. $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n, \;\; a_1 = 1, \, a_2 = 7$

b. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \;\; F_0 = 0, \, F_1 = 1$

c. $a_{n+3} = a_n, \;\; a_0 = 0, \, a_1 = 0, \, a_2 = 1$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.49.

Riješite sljedeće rekurzivne relacije:

a. $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n, \;\; a_1 = 1, \, a_2 = 7$

b. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \;\; F_0 = 0, \, F_1 = 1$

c. $a_{n+3} = a_n, \;\; a_0 = 0, \, a_1 = 0, \, a_2 = 1$

Rješenje.

a. Rješavamo najprije pripadnu karakterističnu jednadžbu.

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 4a_{n+1} - 3a_n \\ a_n &= x^n \\ x^{n+2} &= 4x^{n+1} - 3x^n \;\; / : x^n \\ x^2 &= 4x - 3 \end{aligned}$$

Rješenja jednadžbe $x^2 - 4x + 3 = 0$ su $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$. Stoga je opće rješenje zadane rekurzije dano sa

$$a_n = A \cdot 1^n + B \cdot 3^n$$

odnosno

$$a_n = A + B \cdot 3^n, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Uvrstimo li u opće rješenje početne uvjete dobivamo

$$a_1 = 1 \;\Rightarrow\; A + 3B = 1$$
$$a_2 = 7 \;\Rightarrow\; A + 9B = 7$$

Rješenje dobivenog sustava je $A = -2$ i $B = 1$ pa je

$$a_n = 3^n - 2.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- Rješavamo najprije pripadnu karakterističnu jednadžbu.

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$
$$F_n = x^n$$
$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} \;/ : x^{n-2}$$
$$x^2 = x + 1$$

Dobivamo da je $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Stoga je opće rješenje zadane rekurzije dano sa

$$F_n = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Uvrstimo li u opće rješenje početne uvjete, dobivamo

$$F_0 = 0 \;\Rightarrow\; A + B = 0$$
$$F_1 = 1 \;\Rightarrow\; \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} A + \tfrac{1-\sqrt{5}}{2} B = 1$$

Rješenje dobivenog sustava je $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ i $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ pa je

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

odnosno

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- Rješavamo najprije pripadnu karakterističnu jednadžbu.

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= a_n \\ a_n &= x^n \\ x^{n+3} &= x^n \ /: x^n \\ x^3 &= 1 \end{aligned}$$

Dobivamo da je $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ i $x_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.
Stoga je opće rješenje zadane rekurzije dano sa

$$a_n = A \cdot 1^n + B \cdot \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + C \cdot \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Uvrstimo li u opće rješenje početne uvjete, dobivamo

$$a_0 = 0 \;\Rightarrow\; A + B + C = 0$$

$$a_1 = 0 \;\Rightarrow\; A + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}B + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}C = 0$$

$$a_2 = 1 \;\Rightarrow\; A + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}B + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}C = 1$$

Rješenje dobivenog sustava je $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{-1+i\sqrt{3}}{6}$ i $C = \frac{-1-i\sqrt{3}}{6}$. Oprez, nemojte gornji sustav rješavati tako da grupirate posebno "realne" i "imaginarne" dijelove jer A, B i C ne moraju biti realni brojevi, mogu biti i kompleksni brojevi. Riješite gornji sustav Cramerovim pravilom, pomoću inverzne matrice ili Gaussovim postupkom (preporuča se Gaussov postupak). Način rješavanja je potpuno isti kao i u slučaju da imate samo realne brojeve.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Stoga je

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{-1+i\sqrt{3}}{6}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{-1-i\sqrt{3}}{6}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

odnosno

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

Pogledamo li malo bolje rekurziju $a_{n+3} = a_n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, lako možemo vidjeti da je rješenje zapravo niz

$$0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots$$

gdje nam indeks počinje od nule.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Stoga je

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \equiv 2 \pmod 3 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Međutim, na ovaj način nismo dobili zatvorenu formulu za opći član a_n, tj. ovdje smo zapisali opći član pomoću "više formula". Želimo li dobiti opći član tog niza pomoću jedne formule, tj. u zatvorenoj formi, prisiljeni smo koristiti kompleksne brojeve. Iako se u formuli za opći član javljaju kompleksni brojevi, sjetimo se da smo dobili da je

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1},$$

svejedno je $a_n \in \mathbb{R}$ za svaki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dapače, $a_n \in \{0, 1\}$ za svaki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

U slučaju da nisu svi karakteristični korijeni različiti, tada

$$a_n^{(1)} = x_1^n, \quad a_n^{(2)} = x_2^n \ , \ldots , \ a_n^{(r)} = x_r^n$$

ne čine bazu za prostor rješenja od $(*)$ jer su neka rješenja jednaka. Kako u slučaju višestrukog korijena formirati bazu, govori sljedeća propozicija.

Propozicija 5.2.

Ako je x_0 k-struki korijen karakteristične jednadžbe

$$x^r - c_1 x^{r-1} - c_2 x^{r-2} - \cdots - c_r = 0,$$

onda su

$$a_n = x_0^n, \ a_n = n x_0^n, \ \ldots , \ a_n = n^{k-1} x_0^n$$

rješenja homogene linearne rekurzije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_r a_{n-r}.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Dokaz.

Radi jednostavnosti provedimo dokaz za $k = 3$, tj. za slučaj da je x_0 trostruki korijen. U općem slučaju ideja je potpuno ista. Po pretpostavci je x_0 trostruki korijen karakterističnog polinoma

$$P(x) = x^r - c_1 x^{r-1} - c_2 x^{r-2} - \cdots - c_r.$$

Tada je $P(x) = (x - x_0)^3 Q(x)$ pa je x_0 trostruki korijen i od polinoma

$$P_n(x) = x^{n-r} P(x) = x^n - c_1 x^{n-1} - c_2 x^{n-2} - \cdots - c_r x^{n-r}.$$

Tada je x_0 dvostruki korijen od $P_n'(x)$, pa je dvostruki korijen i od polinoma

$$xP_n'(x) = nx^n - c_1(n-1)x^{n-1} - \cdots - c_r(n-r)x^{n-r}. \quad (\clubsuit)$$

Tada je dalje x_0 jednostruki korijen od $\big(xP_n'(x)\big)'$, pa je također i jednostruki korijen od

$$x \cdot \big(xP_n'(x)\big)' = n^2x^n - c_1(n-1)^2x^{n-1} - \cdots - c_r(n-r)^2x^{n-r}$$

Za $x = x_0$ je vrijednost tog polinoma nula, tj.

$$n^2x_0^n = c_1(n-1)^2x_0^{n-1} + c_2(n-2)^2x_0^{n-2} + \cdots + c_r(n-r)^2x_0^{n-r}$$

iz čega slijedi da je $a_n = n^2x_0^n$ rješenje zadane linearne homogene rekurzije. Isto tako, uvrstimo li $x = x_0$ u $(\clubsuit)$, dobit ćemo da je $a_n = nx_0^n$ također rješenje dane rekurzije. ♡

Teorem 5.11.

Neka su $x_1, \ldots, x_m$ *svi različiti korijeni karakteristične jednadžbe* $x^r - c_1 x^{r-1} - c_2 x^{r-2} - \cdots - c_r = 0$ *homogene linearne rekurzivne relacije*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_r a_{n-r} \qquad (*)$$

s kratnostima $k_1, \ldots, k_m$. *Rješenje* $a_n^{(i)}$ *od* $(*)$ *koje odgovara korijenu* x_i *kratnosti* k_i *je oblika*

$$a_n^{(i)} = \lambda_1^{(i)} x_i^n + \lambda_2^{(i)} n x_i^n + \cdots + \lambda_{k_i}^{(i)} n^{k_i - 1} x_i^n$$

gdje su $\lambda_1^{(i)}, \ldots, \lambda_{k_i}^{(i)} \in \mathbb{C}$. *Opće rješenje u kojem ćemo imati ukupno* $r = k_1 + \cdots + k_m$ *slobodnih koeficijenata je oblika*

$$a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \cdots + a_n^{(m)}.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.50.

Riješite rekurziju $a_{n+4} = 8a_{n+3} - 18a_{n+2} + 27a_n$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.50.

Riješite rekurziju $a_{n+4} = 8a_{n+3} - 18a_{n+2} + 27a_n$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$.

Rješenje.

Rješavamo najprije pripadnu karakterističnu jednadžbu.

$$\begin{aligned} a_{n+4} &= 8a_{n+3} - 18a_{n+2} + 27a_n \\ a_n &= x^n \\ x^{n+4} &= 8x^{n+3} - 18x^{n+2} + 27x^n \ \big/ : x^n \\ x^4 &= 8x^3 - 18x^2 + 27 \end{aligned}$$

Rješenja jednadžbe $x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 27 = 0$ su $x_1 = -1$, $x_2 = x_3 = x_4 = 3$.

Stoga je opće rješenje oblika

$$a_n = A \cdot (-1)^n + \left(B + Cn + Dn^2\right) \cdot 3^n.$$

Uvrstimo li u opće rješenje početne uvjete, dobivamo

$$\begin{aligned} a_1 = 0 \;&\Rightarrow\; -A + 3B + 3C + 3D = 0 \\ a_2 = -1 \;&\Rightarrow\; A + 9B + 18C + 36D = -1 \\ a_3 = 2 \;&\Rightarrow\; -A + 27B + 81C + 243D = 2 \\ a_4 = 5 \;&\Rightarrow\; A + 81B + 324C + 1296D = 5 \end{aligned}$$

Rješenje dobivenog sustava je $A = -\frac{5}{8}$, $B = -\frac{97}{216}$, $C = \frac{5}{18}$, $D = -\frac{1}{27}$ pa je

$$a_n = -\tfrac{5}{8} \cdot (-1)^n + \left(-\tfrac{97}{216} + \tfrac{5}{18}n - \tfrac{1}{27}n^2\right) \cdot 3^n.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Linearna nehomogena rekurzija s konstantnim koeficijentima je rekurzija oblika

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_r a_{n-r} + f(n), \qquad (\diamondsuit)$$

gdje je $n \geqslant r$, $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{C}$ su zadane konstante i $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ neka funkcija. Za $f = 0$ dobivamo pripadnu homogenu linearnu rekurziju.

Teorem 5.12.

Neka je $a_n^{(p)}$ neko partikularno rješenje nehomogene linearne rekurzije $(\diamondsuit)$, a $a_n^{(h)}$ opće rješenje pripadne homogene rekurzije. Tada je opće rješenje od $(\diamondsuit)$ suma općeg rješenja pripadne homogene rekurzije i partikularnog rješenja, tj. $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Dokaz.

Kako je $a_n^{(h)}$ rješenje pripadne homogene rekurzije, slijedi da je

$$a_n^{(h)} = c_1 a_{n-1}^{(h)} + c_2 a_{n-2}^{(h)} + \cdots + c_r a_{n-r}^{(h)}. \qquad (1)$$

Kako je $a_n^{(p)}$ neko partikularno rješenje od $(\diamondsuit)$, slijedi da je

$$a_n^{(p)} = c_1 a_{n-1}^{(p)} + c_2 a_{n-2}^{(p)} + \cdots + c_r a_{n-r}^{(p)} + f(n). \qquad (2)$$

Zbrajanjem (1) i (2) dobivamo

$$a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1 \left(a_{n-1}^{(h)} + a_{n-1}^{(p)} \right) + \cdots + c_r \left(a_{n-r}^{(h)} + a_{n-r}^{(p)} \right) + f(n)$$

iz čega slijedi da je $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ rješenje od $(\diamondsuit)$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Treba još vidjeti da se svako rješenje a_n od $(\diamondsuit)$ može napisati u obliku $a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$. Neka je a_n neko rješenje od $(\diamondsuit)$. Tada vrijedi

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_r a_{n-r} + f(n). \qquad (3)$$

Kako za partikularno rješenje $a_n^{(p)}$ vrijedi (2), oduzmemo li od relacije (3) relaciju (2), dobivamo da $a_n - a_n^{(p)}$ zadovoljava pripadnu homogenu rekurziju od $(\diamondsuit)$. Kako je svako rješenje homogene rekurzije oblika $a_n^{(h)}$, slijedi da je $a_n - a_n^{(p)} = a_n^{(h)}$, tj. $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$. ♡

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Donja tablica pokazuje u kojem se obliku traže partikularna rješenja za neke jednostavnije funkcije f.

$f(n)$	$a_n^{(p)}$
const.	A
dn	$A_1 n + A_0$
dn^2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
d^n	$A d^n$
$n^p d^n$	$d^n \left(A_0 + A_1 n + \cdots + A_p n^p \right)$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.51.

Riješite sljedeće rekurzivne relacije:

a. $2a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 2^n, \;\; a_1 = 0, \, a_2 = -1$

b. $a_{n+1} = 5a_n + 4n^2 + 2n + 5, \;\; a_1 = 2$

c. $2a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n = 10, \;\; a_0 = 6, \, a_1 = -2$

d. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n, \;\; a_1 = 0, \, a_2 = 1$

e. $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n^2 \cdot 3^n, \;\; a_1 = 0, \, a_2 = 1$

f. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 3^n - 2^n, \;\; a_0 = 1, \, a_1 = 3$

Rješenje.

a. Rješavamo najprije pripadnu homogenu rekurziju.

$$2a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$$

$$a_n = x^n$$

$$2x^{n+2} - x^{n+1} - x^n = 0 \;/ : x^n$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\tfrac{1}{2}$$

Dakle, opće rješenje pripadne homogene rekurzije je

$$a_n^{(h)} = A \cdot 1^n + B \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n,$$

odnosno

$$a_n^{(h)} = A + B \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Kako je $f(n) = 2^n$, partikularno rješenje tražimo u obliku $a_n^{(p)} = C \cdot 2^n$. Uvrstimo li to u zadanu rekurziju, dobivamo

$$2a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 2^n$$
$$2 \cdot C \cdot 2^{n+2} - C \cdot 2^{n+1} - C \cdot 2^n = 2^n \ / : 2^n$$
$$5C = 1 \ \Rightarrow \ C = \tfrac{1}{5}$$

Stoga je $a_n^{(p)} = \frac{1}{5} \cdot 2^n$ pa je opće rješenje zadane rekurzije

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$
$$a_n = A + B \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n + \tfrac{1}{5} \cdot 2^n$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Uvrstimo li u opće rješenje početne uvjete, dobivamo

$$a_1 = 0 \;\Rightarrow\; A - \tfrac{1}{2}B + \tfrac{2}{5} = 0$$

$$a_2 = -1 \;\Rightarrow\; A + \tfrac{1}{4}B + \tfrac{4}{5} = -1$$

Rješenje dobivenog sustava je $A = -\frac{4}{3}$, $B = -\frac{28}{15}$.
Stoga je

$$a_n = -\tfrac{4}{3} - \tfrac{28}{15} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n + \tfrac{1}{5} \cdot 2^n$$

- Rješavamo najprije pripadnu homogenu rekurziju.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 5a_n \\ a_n &= x^n \\ x^{n+1} &= 5x^n \ / : x^n \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Dakle, opće rješenje pripadne homogene rekurzije je

$$a_n^{(h)} = A \cdot 5^n.$$

Kako je $f(n) = 4n^2 + 2n + 5$, partikularno rješenje tražimo u obliku $a_n^{(p)} = Bn^2 + Cn + D$. Uvrstimo li to u zadanu rekurziju, dobivamo

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$a_{n+1} = 5a_n + 4n^2 + 2n + 5$$

$$B(n+1)^2 + C(n+1) + D = 5\Big(Bn^2 + Cn + D\Big) + 4n^2 + 2n + 5$$

$$Bn^2 + (2B + C)n + (B + C + D) = (5B + 4)n^2 + (5C + 2)n + (5D + 5)$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće potencije dobivamo sustav

$$\begin{aligned} B &= 5B + 4 \\ 2B + C &= 5C + 2 \\ B + C + D &= 5D + 5 \end{aligned}$$

čije rješenje je $B = -1$, $C = -1$ i $D = -\frac{7}{4}$. Stoga je partikularno rješenje $a_n^{(p)} = -n^2 - n - \frac{7}{4}$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Opće rješenje zadane rekurzije je

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

$$a_n = A \cdot 5^n - n^2 - n - \frac{7}{4}$$

Uvrstimo li u opće rješenje početni uvjet, dobivamo

$$a_1 = 2 \;\Rightarrow\; 5A - 1 - 1 - \frac{7}{4} = 2$$

pa je $A = \frac{23}{20}$. Dakle, dobivamo da je

$$a_n = \frac{23}{20} \cdot 5^n - n^2 - n - \frac{7}{4}.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- Rješavamo najprije pripadnu homogenu rekurziju.

$$2a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n = 0$$
$$a_n = x^n$$
$$2x^{n+2} - 5x^{n+1} + 2x^n = 0 \;/ : x^n$$
$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$
$$x_1 = 2, \quad x_2 = \tfrac{1}{2}$$

Dakle, opće rješenje pripadne homogene rekurzije je

$$a_n^{(h)} = A \cdot 2^n + B \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

Kako je $f(n) = 10$, partikularno rješenje tražimo u obliku $a_n^{(p)} = C$. Uvrstimo li to u zadanu rekurziju, dobivamo

$$2a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n = 10$$

$$2C - 5C + 2C = 10 \;\Rightarrow\; C = -10$$

Stoga je $a_n^{(p)} = -10$. Opće rješenje zadane rekurzije je

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n - 10$$

Uvrstimo li u opće rješenje početne uvjete, dobivamo

$$a_0 = 6 \;\Rightarrow\; A + B - 10 = 6$$

$$a_1 = -2 \;\Rightarrow\; 2A + \tfrac{1}{2}B - 10 = -2$$

pa je $A = 0$ i $B = 16$. Stoga je $a_n = 2^{4-n} - 10$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- Rješavamo najprije pripadnu homogenu rekurziju.

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$$
$$a_n = x^n$$
$$x^{n+2} - 4x^{n+1} + 4x^n = 0 \;/ : x^n$$
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$x_1 = x_2 = 2$$

Dakle, opće rješenje pripadne homogene rekurzije je

$$a_n^{(h)} = (A + Bn) \cdot 2^n$$

Partikularno rješenje tražimo u obliku $a_n^{(p)} = Cn^2 \cdot 2^n$ jer se 2^n i $n \cdot 2^n$ već javljaju u općem rješenju pripadne homogene rekurzije. Uvrstimo li to u zadanu rekurziju, dobivamo

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n$$

$$C(n+2)^2 \cdot 2^{n+2} - 4C(n+1)^2 \cdot 2^{n+1} + 4Cn^2 \cdot 2^n = 2^n \ /: 2^n$$

$$4C(n^2 + 4n + 4) - 8C(n^2 + 2n + 1) + 4Cn^2 = 1$$

Odavde se dobije $C = \frac{1}{8}$ pa je $a_n^{(p)} = \frac{1}{8}n^2 \cdot 2^n$.

Stoga je opće rješenje zadane rekurzije

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

$$a_n = (A + Bn) \cdot 2^n + \frac{1}{8}n^2 \cdot 2^n$$

Uvrstimo li u opće rješenje početne uvjete, dobivamo

$$a_1 = 0 \;\Rightarrow\; 2(A+B) + \tfrac{1}{8}\cdot 2 = 0$$

$$a_2 = 1 \;\Rightarrow\; 4(A+2B) + \tfrac{1}{8}\cdot 4 \cdot 4 = 1$$

pa je $A = 0$ i $B = -\frac{1}{8}$. Stoga je

$$a_n = -\tfrac{1}{8}n \cdot 2^n + \tfrac{1}{8}n^2 \cdot 2^n$$

odnosno

$$a_n = \left(\tfrac{1}{8}n^2 - \tfrac{1}{8}n\right) \cdot 2^n.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- Rješavamo najprije pripadnu homogenu rekurziju.

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$$
$$a_n = x^n$$
$$x^{n+2} - 4x^{n+1} + 4x^n = 0 \;/ : x^n$$
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$x_1 = x_2 = 2$$

Dakle, opće rješenje pripadne homogene rekurzije je

$$a_n^{(h)} = (A + Bn) \cdot 2^n$$

Kako je $f(n) = n^2 \cdot 3^n$, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$a_n^{(p)} = \left(Cn^2 + Dn + E\right) \cdot 3^n.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Uvrstimo li to u zadanu rekurziju, dobivamo

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = n^2 \cdot 3^n$$

$$\Big(C(n+2)^2 + D(n+2) + E\Big)\cdot 3^{n+2} - 4\Big(C(n+1)^2 + D(n+1) + E\Big)\cdot 3^{n+1} +$$

$$+ 4\Big(Cn^2 + Dn + E\Big)\cdot 3^n = n^2 \cdot 3^n \quad /:3^n$$

$$Cn^2 + (12C + D)n + (24C + 6D + E) = n^2$$

Nakon izjednačavanja odgovarajućih koeficijenata dobivamo sustav

$$\begin{aligned} C &= 1 \\ 12C + D &= 0 \\ 24C + 6D + E &= 0 \end{aligned}$$

čije rješenje je $C = 1$, $D = -12$ i $E = 48$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Stoga je partikularno rješenje dano s

$$a_n^{(p)} = \left(n^2 - 12n + 48\right) \cdot 3^n.$$

Opće rješenje zadane rekurzije je

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

$$a_n = (A + Bn) \cdot 2^n + \left(n^2 - 12n + 48\right) \cdot 3^n$$

Uvrstimo li u opće rješenje početne uvjete, dobivamo

$$a_1 = 0 \;\Rightarrow\; 2A + 2B = -111$$

$$a_2 = 1 \;\Rightarrow\; 4A + 8B = -251$$

odakle dobivamo $A = -\frac{193}{4}$ i $B = -\frac{29}{4}$. Konačno je

$$a_n = \left(-\tfrac{193}{4} - \tfrac{29}{4}n\right) \cdot 2^n + \left(n^2 - 12n + 48\right) \cdot 3^n$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- Rješavamo najprije pripadnu homogenu rekurziju.

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$$

$$a_n = x^n$$

$$x^{n+2} - 4x^{n+1} + 4x^n = 0 \ / : x^n$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x_1 = x_2 = 2$$

Dakle, opće rješenje pripadne homogene rekurzije je

$$a_n^{(h)} = (A + Bn) \cdot 2^n$$

Partikularno rješenje tražimo u obliku

$$a_n^{(p)} = C \cdot 3^n + Dn^2 \cdot 2^n.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Uvrstimo li to u zadanu rekurziju, dobivamo

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 3^n - 2^n$$

$$C \cdot 3^{n+2} + D(n+2)^2 \cdot 2^{n+2} - 4\left(C \cdot 3^{n+1} + D(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}\right) +$$

$$+ 4\left(C \cdot 3^n + Dn^2 \cdot 2^n\right) = 3^n - 2^n$$

$$C \cdot 3^n + 8D \cdot 2^n = 3^n - 2^n$$

odakle je $C = 1$ i $D = -\frac{1}{8}$. Slijedi da je partikularno rješenje oblika

$$a_n^{(p)} = 3^n - \tfrac{1}{8} n^2 \cdot 2^n.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Opće rješenje zadane rekurzije je

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

$$a_n = (A + Bn) \cdot 2^n + 3^n - \tfrac{1}{8} n^2 \cdot 2^n$$

$$a_n = \left(A + Bn - \tfrac{1}{8} n^2\right) \cdot 2^n + 3^n$$

Uvrstimo li u opće rješenje početne uvjete, dobivamo

$$a_0 = 1 \;\Rightarrow\; A + 1 = 1$$

$$a_1 = 3 \;\Rightarrow\; \left(A + B - \tfrac{1}{8}\right) \cdot 2 + 3 = 3$$

pa je $A = 0$ i $B = \frac{1}{8}$. Konačno je

$$a_n = \left(n - n^2\right) \cdot 2^{n-3} + 3^n.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Nelinearne rekurzije i sustavi rekurzija

Do sada smo samo promatrali linearne rekurzije s konstantnim koeficijentima. Sada ćemo pogledati još neke jednostavnije tipove rekurzija i vidjeti kako se rješavaju neki jednostavniji sustavi linearnih rekurzija.

Primjer 5.52.

Riješite sustav rekurzija

$$a_{n+1} = 2a_n - 8b_n$$
$$b_{n+1} = 2a_n - 6b_n$$

uz početne uvjete $a_0 = -1$, $b_0 = 2$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rješenje.

Iz prve jednakosti dobivamo da je $b_n = \frac{1}{8}\left(2a_n - a_{n+1}\right)$.

Uvrstimo li to u drugu jednakost, dobivamo

$$\frac{1}{8}\left(2a_{n+1} - a_{n+2}\right) = 2a_n - \frac{6}{8}\left(2a_n - a_{n+1}\right)$$

$$2a_{n+1} - a_{n+2} = 16a_n - 12a_n + 6a_{n+1}$$

$$a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n = 0$$

$$a_n = x^n$$

$$x^{n+2} + 4x^{n+1} + 4x^n = 0 \;/ : x^n$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 = -2$$

$$a_n = (A + Bn) \cdot (-2)^n$$

Nadalje, iz $b_n = \frac{1}{8}\left(2a_n - a_{n+1}\right)$ dobivamo

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$b_n = \tfrac{1}{8}\Big(2(A+Bn)(-2)^n - \big(A+B(n+1)\big)(-2)^{n+1}\Big)$$

$$b_n = \tfrac{1}{8}\big(4Bn+4A+2B\big)\cdot(-2)^n$$

Dakle, dobili smo da je

$$a_n = (A+Bn)\cdot(-2)^n$$
$$b_n = \tfrac{1}{8}\big(4Bn+4A+2B\big)\cdot(-2)^n$$

Uvrstimo li početne uvjete, dobivamo

$$a_0 = -1 \;\Rightarrow\; A = -1$$
$$b_0 = 2 \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{8}(4A+2B) = 2$$

pa je $A=-1$ i $B=10$. Stoga je

$$a_n = (10n-1)\cdot(-2)^n, \qquad b_n = (5n+2)\cdot(-2)^n.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rekurzija oblika $a_n = f(n)\, a_{n-1}$, gdje je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ proizvoljna funkcija rješava se teleskopiranjem na sljedeći način.

$$
\begin{aligned}
a_n &= f(n)\, a_{n-1} \\
a_{n-1} &= f(n-1)\, a_{n-2} \\
a_{n-2} &= f(n-2)\, a_{n-3} \\
&\vdots \\
a_2 &= f(2)\, a_1 \\
a_1 &= f(1)\, a_0
\end{aligned}
$$

Množenjem gornjih jednakosti dobivamo

$$a_n = f(1) f(2) \cdots f(n)\, a_0.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.53.

Riješite rekurziju $a_n = n^2 a_{n-1}$, $a_0 = 1$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.53.

Riješite rekurziju $a_n = n^2 a_{n-1}$, $a_0 = 1$.

Rješenje.

Ovo je rekurzija oblika $a_n = f(n)\, a_{n-1}$, pri čemu je je $f(n) = n^2$. Stoga je

$$a_n = f(1) f(2) \cdots f(n)\, a_0$$
$$a_n = 1^2 \cdot 2^2 \cdots n^2 \cdot 1$$
$$a_n = (n!)^2$$

Rekurzija oblika

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s}, \quad a_0 = a$$

se rješava na sljedeći način. Neka su (b_n) i (c_n) nizovi koji zadovoljavaju sustav rekurzija

$$b_{n+1} = pb_n + qc_n$$
$$c_{n+1} = rb_n + sc_n$$

s početnim uvjetima $b_0 = a$, $c_0 = 1$. Tada je $a_n = \frac{b_n}{c_n}$. Zaista, $a_0 = \frac{b_0}{c_0} = \frac{a}{1} = a$ i

$$a_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{c_{n+1}} = \frac{pb_n + qc_n}{rb_n + sc_n} = \frac{p \cdot \frac{b_n}{c_n} + q}{r \cdot \frac{b_n}{c_n} + s} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s}.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.54.

Riješite sljedeće rekurzivne relacije:

a. $a_{n+1} = \frac{a_n - 2}{a_n + 4}, \quad a_0 = 0$

b. $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}, \quad a_0 = 1$

c. $a_{n+1} = a_n - a_n a_{n+1}, \quad a_0 = 1$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.54.

Riješite sljedeće rekurzivne relacije:

a. $a_{n+1} = \frac{a_n - 2}{a_n + 4}, \quad a_0 = 0$

b. $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}, \quad a_0 = 1$

c. $a_{n+1} = a_n - a_n a_{n+1}, \quad a_0 = 1$

Rješenje.

a. Stavimo $a_n = \frac{b_n}{c_n}, \quad b_0 = a_0 = 0, \, c_0 = 1.$

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 2}{a_n + 4}$$

$$\frac{b_{n+1}}{c_{n+1}} = \frac{\frac{b_n}{c_n} - 2}{\frac{b_n}{c_n} + 4}$$

$$\frac{b_{n+1}}{c_{n+1}} = \frac{b_n - 2c_n}{b_n + 4c_n}$$

Dobivamo sustav rekurzija

$$b_{n+1} = b_n - 2c_n$$
$$c_{n+1} = b_n + 4c_n$$

Iz druge jednakosti dobivamo da je $b_n = c_{n+1} - 4c_n$ pa uvrstimo li to u prvu jednakost, dobivamo

$$c_{n+2} - 4c_{n+1} = \left(c_{n+1} - 4c_n\right) - 2c_n$$
$$c_{n+2} - 5c_{n+1} + 6c_n = 0$$
$$c_n = x^n$$
$$x^{n+2} - 5x^{n+1} + 6x^n = 0 \ / : x^n$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2$$

Stoga je $c_n = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n$. Nadalje,

$$b_n = c_{n+1} - 4c_n$$
$$b_n = A \cdot 3^{n+1} + B \cdot 2^{n+1} - 4\left(A \cdot 3^n + B \cdot 2^n\right)$$
$$b_n = -A \cdot 3^n - 2B \cdot 2^n$$

Dakle, dobili smo da je

$$c_n = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n$$
$$b_n = -A \cdot 3^n - 2B \cdot 2^n$$

Uvažimo li početne uvjete, dobivamo

$$b_0 = 0 \;\Rightarrow\; -A - 2B = 0$$
$$c_0 = 1 \;\Rightarrow\; A + B = 1$$

Rješenje dobivenog sustava je $A = 2$ i $B = -1$. Stoga je

$$c_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$
$$b_n = 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n$$

Konačno, zbog $a_n = \frac{b_n}{c_n}$ slijedi

$$a_n = \frac{2^{n+1} - 2 \cdot 3^n}{2 \cdot 3^n - 2^n},$$

odnosno nakon kraćenja s 2

$$a_n = \frac{2^n - 3^n}{3^n - 2^{n-1}}.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

b. Svedemo sve najprije na zajednički nazivnik.

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{a_n}$$

Stavimo $a_n = \frac{b_n}{c_n}$, $b_0 = a_0 = 1$, $c_0 = 1$.

$$\frac{b_{n+1}}{c_{n+1}} = \frac{\frac{b_n}{c_n} + 1}{\frac{b_n}{c_n}}$$

$$\frac{b_{n+1}}{c_{n+1}} = \frac{b_n + c_n}{b_n}$$

Dobivamo sustav rekurzija

$$b_{n+1} = b_n + c_n$$

$$c_{n+1} = b_n$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Iz druge jednakosti dobivamo da je $b_n = c_{n+1}$ pa uvrstimo li to u prvu jednakost, dobivamo

$$c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$$
$$c_n = x^n$$
$$x^{n+2} = x^{n+1} + x^n \ /: x^n$$
$$x^2 - x - 1 = 0$$
$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Stoga je

$$c_n = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$
$$b_n = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Uvažimo li početne uvjete, dobivamo

$$b_0 = 1 \;\Rightarrow\; \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}A + \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}B = 1$$

$$c_0 = 1 \;\Rightarrow\; A + B = 1$$

iz čega slijedi da je

$$A = \frac{5+\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$B = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Dobivamo da je

$$c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) = F_{n+1}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right) = F_{n+2}$$

Kako je $a_n = \frac{b_n}{c_n}$, slijedi

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- Napišemo najprije rekurziju u obliku razlomka.

$$a_{n+1} = a_n - a_n a_{n+1}$$

$$\big(1 + a_n\big) a_{n+1} = a_n$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$$

Stavimo $a_n = \frac{b_n}{c_n}$, $b_0 = a_0 = 1$, $c_0 = 1$.

$$\frac{b_{n+1}}{c_{n+1}} = \frac{\frac{b_n}{c_n}}{\frac{b_n}{c_n} + 1}$$

$$\frac{b_{n+1}}{c_{n+1}} = \frac{b_n}{b_n + c_n}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Dobivamo sustav rekurzija

$$b_{n+1} = b_n$$
$$c_{n+1} = b_n + c_n$$

Iz $b_{n+1} = b_n$ i $b_0 = 1$ slijedi da je $b_n = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Uvrstimo li to u drugu jednkost, dobivamo

$$c_{n+1} = c_n + 1.$$

Ovu rekurziju možemo riješiti teleskopiranjem (naravno možemo ju riješiti i preko karakteristične jednadžbe i partikularnog rješenja). Ovdje ćemo ju riješiti teleskopiranjem. Za vježbu ju riješite i na drugi spomenuti način.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$c_n = c_{n-1} + 1$$
$$c_{n-1} = c_{n-2} + 1$$
$$c_{n-2} = c_{n-3} + 1$$
$$\vdots$$
$$c_2 = c_1 + 1$$
$$c_1 = c_0 + 1$$

Zbrajanjem gornjih jednakosti dobivamo

$$c_n = c_0 + n \;\Rightarrow\; c_n = n + 1.$$

Dakle, $b_n = 1$, $c_n = n + 1$, a kako je $a_n = \frac{b_n}{c_n}$ slijedi da je

$$a_n = \frac{1}{n+1}.$$

Neke nelinearne rekurzije se mogu supstitucijama svesti na linearne rekurzije. Pogledajmo to na sljedeća dva primjera.

Primjer 5.55.

Riješite rekurziju

$$a_{n+2}^2 = 5a_{n+1}^2 - 4a_n^2, \quad a_0 = 4,\ a_1 = 13.$$

Neke nelinearne rekurzije se mogu supstitucijama svesti na linearne rekurzije. Pogledajmo to na sljedeća dva primjera.

Primjer 5.55.

Riješite rekurziju

$$a_{n+2}^2 = 5a_{n+1}^2 - 4a_n^2, \quad a_0 = 4,\ a_1 = 13.$$

Rješenje.

Stavimo $b_n = a_n^2$. Tada dobivamo linearnu rekurziju

$$b_{n+2} = 5b_{n+1} - 4b_n, \quad b_0 = 16,\ b_1 = 169.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$b_{n+2} = 5b_{n+1} - 4b_n$$

$$b_n = x^n$$

$$x^{n+2} = 5x^{n+1} - 4x^n \ / : x^n$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 1$$

$$b_n = A \cdot 4^n + B \cdot 1^n$$

$$b_n = A \cdot 4^n + B$$

$$b_0 = 16 \ \Rightarrow \ A + B = 16$$

$$b_1 = 169 \ \Rightarrow \ 4A + B = 169$$

$$A = 51, \quad B = -35$$

$$b_n = 51 \cdot 4^n - 35 \ \Rightarrow \ a_n^2 = 51 \cdot 4^n - 35$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Tada je $a_n = \pm\sqrt{51 \cdot 4^n - 35}$. Kako su $a_0, a_1 > 0$, slijedi da je $a_n = \sqrt{51 \cdot 4^n - 35}$.

Primjer 5.56.

Riješite rekurziju

$$a_{n+2} = a_{n+1}^3 \cdot a_n^{-2}, \quad a_0 = 1,\ a_1 = 2.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Tada je $a_n = \pm\sqrt{51 \cdot 4^n - 35}$. Kako su $a_0, a_1 > 0$, slijedi da je $a_n = \sqrt{51 \cdot 4^n - 35}$.

Primjer 5.56.

Riješite rekurziju

$$a_{n+2} = a_{n+1}^3 \cdot a_n^{-2}, \quad a_0 = 1,\ a_1 = 2.$$

Rješenje.

Uočimo da je $a_n > 0$. Stoga možemo staviti

$$b_n = \log_2 a_n, \quad b_0 = 0,\ b_1 = 1$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$a_{n+2} = a_{n+1}^3 \cdot a_n^{-2} \ / \log_2$$

$$\log_2 a_{n+2} = 3 \log_2 a_{n+1} - 2 \log_2 a_n$$

$$b_{n+2} = 3b_{n+1} - 2b_n, \quad b_0 = 0, \ b_1 = 1$$

$$b_n = x^n$$

$$x^{n+2} = 3x^{n+1} - 2x^n \ / : x^n$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_1 = 1, \ x_2 = 2$$

$$b_n = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n$$

$$b_n = A + B \cdot 2^n$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$b_0 = 0 \;\Rightarrow\; A + B = 0$$
$$b_1 = 1 \;\Rightarrow\; A + 2B = 1$$

Dobivamo da je $A = -1$ i $B = 1$. Dalje imamo

$$b_n = 2^n - 1$$
$$\log_2 a_n = 2^n - 1$$
$$a_n = 2^{2^n - 1}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjene rekurzija

Na početku smo imali nekoliko uvodnih primjera u kojima su se prirodno pojavile rekurzije (primjer sa rezanjem papira i primjer sa Hanojevim tornjevima). Kako smo do sada razvili neke tehnike rješavanja rekurzija, sada ćemo navesti još nekoliko jednostavnijih problema koji se mogu riješiti pomoću rekurzija.

Primjer 5.57.

Na koliko je načina moguće $2n$ tenisačica razvrstati u parove?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rješenje.

1. način

Riješit ćemo prvo taj primjer bez upotrebe rekurzija. Prvi par možemo odabrati na $\binom{2n}{2}$ načina. Za odabrani prvi par, drugi par možemo odabrati na $\binom{2n-2}{2}$ načina, itd. Tada je prema pravilu produkta ukupni broj načina jednak

$$\frac{\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\cdots\binom{2}{2}}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$

Morali smo podijeliti sa $n!$ jer nam nije važan poredak parova. Npr., za 4 tenisačice a, b, c, d su

$$\{\{a,b\},\{c,d\}\} \quad \text{i} \quad \{\{c,d\},\{a,b\}\}$$

isti načini izbora parova.

2. način (pomoću rekurzija)

Neka je p_n broj načina na koji se $2n$ tenisačica može razvrstati u parove. Tada je očito $p_1 = 1$ jer se dvije tenisačice mogu samo na jedan način spojiti u par.

Ako dodamo još dvije tenisačice postojećim $2n$ tenisačicama, tada razlikujemo dva slučaja:

- Nove dvije tenisačice čine par. Tada ostalih $2n$ tenisačica možemo razvrstati u parove na p_n načina.
- Nove dvije tenisačice ne čine par. Tada jednu od njih grupiramo s jednom od postojećih $2n$ tenisačica (to možemo na $2n$ načina), a preostale onda možemo grupirati na p_n načina. Prema pravilu produkta je ukupni broj načina u ovom slučaju jednak $2n \cdot p_n$.

Spojimo li oba slučaja, prema pravilu sume slijedi da je ukupni broj načina da $2n+2 = 2(n+1)$ tenisačice razvrstamo u parove jednak $p_n + 2np_n$, tj.

$$p_{n+1} = p_n + 2np_n, \quad p_1 = 1$$

odnosno

$$p_{n+1} = (2n+1)p_n, \quad p_1 = 1.$$

Da bismo odredili p_n, trebamo riješiti dobivenu rekurzivnu relaciju. Koristit ćemo se teleskopiranjem.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$p_n = (2n-1)p_{n-1}$$
$$p_{n-1} = (2n-3)p_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$p_2 = 3p_1$$

Množenjem gornjih jednakosti dobivamo

$$p_n = (2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot p_1$$
$$p_n = 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)(2n-1)$$
$$p_n = \frac{(2n)!}{2 \cdot 4 \cdots 2n} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)}$$
$$p_n = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$

Primjer 5.58.

Na koliko najviše dijelova n kružnica dijeli ravninu?

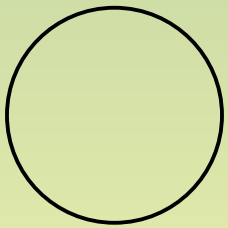
Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.58.

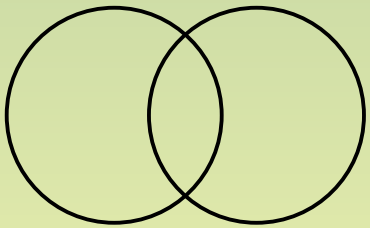
Na koliko najviše dijelova n kružnica dijeli ravninu?

Rješenje.

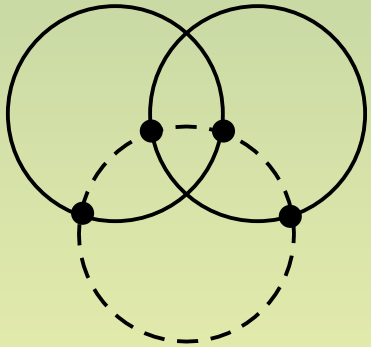
Neka je K_n najveći mogući broj dijelova na koje n kružnica dijeli ravninu.



$K_1 = 2$



$K_2 = 4$



$K_3 = 8$

n kružnica dijeli ravninu na najviše K_n dijelova. Uočimo da će broj dijelova biti maksimalan ako se svake dvije kružnice sijeku u dvije točke. Dodamo li postojećim n kružnicama još jednu kružnicu koja se sa svakom od kružnica siječe u dvije točke, tada je tim sjecištima nova kružnica podijeljena na $2n$ dijelova (lukova). Svaki od tih lukova dijeli neko od starijih područja na 2 dijela, pa dodavanjem nove kružnice dobivamo najviše $2n$ dijelova više, tj. $K_{n+1} = K_n + 2n$. Dakle, dobivamo rekurziju

$$K_n = K_{n-1} + 2(n-1), \quad K_1 = 2.$$

Dobivenu rekurziju riješit ćemo teleskopiranjem.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$K_n = K_{n-1} + 2(n-1)$$
$$K_{n-1} = K_{n-2} + 2(n-2)$$
$$\vdots$$
$$K_2 = K_1 + 2 \cdot 1$$

Zbrajanjem gornjih jednakosti dobivamo

$$K_n = K_1 + 2\big(1 + 2 + \cdots + (n-1)\big)$$
$$K_n = 2 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2}$$
$$K_n = n^2 - n + 2$$

Dakle, n kružnica dijeli ravninu na najviše $n^2 - n + 2$ dijelova.

Primjer 5.59.

Na koliko najviše dijelova n elipsa dijeli ravninu?

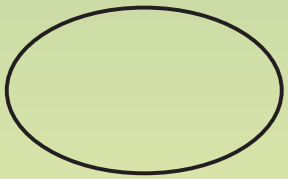
Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.59.

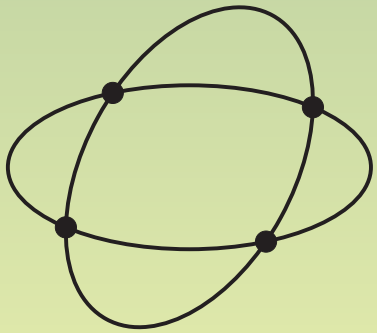
Na koliko najviše dijelova n elipsa dijeli ravninu?

Rješenje.

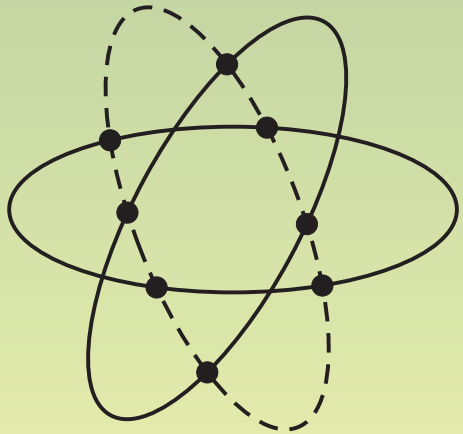
Neka je E_n najveći mogući broj dijelova na koje n elipsa dijeli ravninu.



$E_1 = 2$



$E_2 = 6$



$E_3 = 14$

n elipsa dijeli ravninu na najviše E_n dijelova. Uočimo da će broj dijelova biti maksimalan ako se svake dvije elipse sijeku u četiri točke. Dodamo li postojećim n elipsama još jednu elipsu koja se sa svakom od postojećih elipsi siječe u četiri točke, tada je tim sjecištima nova elipsa podijeljena na $4n$ dijelova. Svaki od tih dijelova dijeli neko od starijih područja na 2 dijela, pa dodavanjem nove elipse dobivamo najviše $4n$ dijelova više, tj. $E_{n+1} = E_n + 4n$. Dakle, dobivamo rekurziju

$$E_n = E_{n-1} + 4(n-1), \quad E_1 = 2.$$

Dobivenu rekurziju riješit ćemo teleskopiranjem.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$E_n = E_{n-1} + 4(n-1)$$
$$E_{n-1} = E_{n-2} + 4(n-2)$$
$$\vdots$$
$$E_2 = E_1 + 4 \cdot 1$$

Zbrajanjem gornjih jednakosti dobivamo

$$E_n = E_1 + 4\big(1 + 2 + \cdots + (n-1)\big)$$
$$E_n = 2 + 4 \cdot \frac{(n-1)n}{2}$$
$$E_n = 2n^2 - 2n + 2$$

Dakle, n elipsa dijeli ravninu na najviše $2n^2 - 2n + 2$ dijelova.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.60.

Koliko ima ternarnih nizova (nizovi u kojima se pojavljuju samo znamenke 0, 1 i 2) duljine n u kojima se ne pojavljuju dvije znamenke 0 zaredom?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.60.

Koliko ima ternarnih nizova (nizovi u kojima se pojavljuju samo znamenke 0, 1 i 2) duljine n u kojima se ne pojavljuju dvije znamenke 0 zaredom?

Rješenje.

Neka je t_n broj ternarnih nizova duljine n u kojima se ne pojavljuju dvije znamenke 0 zaredom. Razlikujemo dva slučaja s obzirom na postavljanje znamenke na zadnje mjesto.

- Na zadnjem mjestu se nalazi 1 ili 2. Tada se znamenke na prvih $n-1$ mjesta mogu postaviti na t_{n-1} načina za znamenku 1 na zadnjem mjestu, ali isto na toliko načina za znamenku 2 na zadnjem mjestu, dakle sveukupno na $2t_{n-1}$ načina.

- Na zadnjem mjestu se nalazi 0. Tada na predzadnjem mjestu može biti 1 ili 2 (jer se ne smiju pojaviti dvije nule zaredom), a na prvih $n-2$ mjesta se znamenke mogu rasporediti na t_{n-2} načina za svaku od znamenki 1 i 2 na predzadnjem mjestu, odakle imamo sveukupno $2t_{n-2}$ načina.

Konačno, skupimo li oba slučaja zajedno, prema pravilu sume slijedi da je $t_n = 2t_{n-1} + 2t_{n-2}$.
Očito je $t_1 = 3$, a $t_2 = 8$ jer jedini ternarni niz duljine 2 u kojemu se javljaju dvije nule zaredom je $(0, 0)$. Dakle, trebamo riješiti rekurziju

$$t_n = 2t_{n-1} + 2t_{n-2}, \quad t_1 = 3,\ t_2 = 8.$$

$$t_n = 2t_{n-1} + 2t_{n-2}$$

$$t_n = x^n$$

$$x^n = 2x^{n-1} + 2x^{n-2} \ / : x^{n-2}$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{3}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{3}$$

$$t_n = A \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)^n + B \cdot \left(1 - \sqrt{3}\right)^n$$

Uvažimo li početne uvjete $t_1 = 3$ i $t_2 = 8$, dobivamo da je

$$A = \frac{5+3\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}}, \quad B = \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}$$

iz čega slijedi

$$t_n = \frac{5+3\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}}\left(1 + \sqrt{3}\right)^n + \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}\left(1 - \sqrt{3}\right)^n.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Uočimo ovdje još jednu stvar. Kako je t_n broj ternarnih nizova duljine n u kojima se ne pojavljuju dvije znamenke 0 zaredom, slijedi da je $t_n \in \mathbb{N}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa smo na kombinatorni način dokazali da je

$$\frac{5+3\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}}\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}\left(1-\sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Iz samog oblika broja t_n možemo zaključiti da bismo bez upotrebe rekurzivnih relacija jako teško prebrojili sve takve ternarne nizove.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.61.

Odredite rekurziju za broj načina na koji se može prijeći n stepenica ako odjednom možemo zakoračiti jednu, dvije ili tri stepenice.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

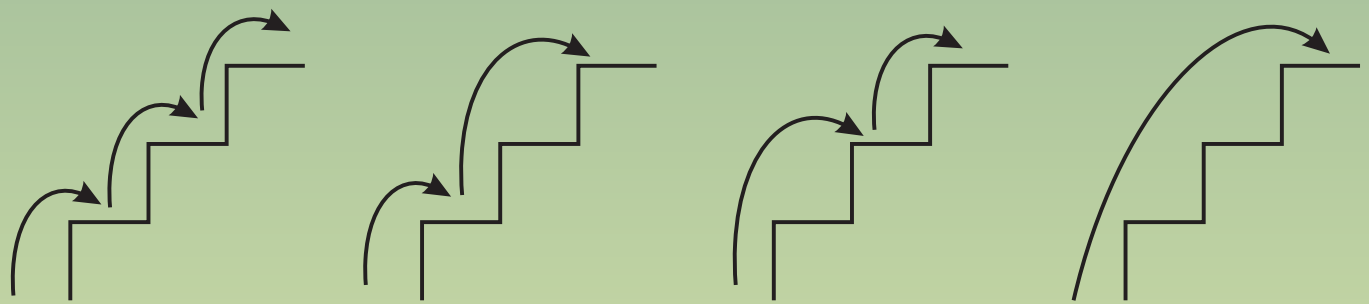
Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.61.

Odredite rekurziju za broj načina na koji se može prijeći n stepenica ako odjednom možemo zakoračiti jednu, dvije ili tri stepenice.

Rješenje.

Neka je a_n broj načina na koje se može prijeći n stepenica uz navedene uvjete. Očito je $a_1 = 1$ jer jednu stepenicu možemo prijeći na samo jedan način pomoću jednog koraka. Nadalje, $a_2 = 2$ jer dvije stepenice možemo prijeći pomoću dva koraka ili pak odjednom zakoračimo preko obje stepenice.



Sa slike vidimo da je $a_3 = 4$. Pretpostavimo da imamo n stepenica i da je $n \geqslant 4$. Ako smo u prvom koraku prekoračili jednu stepenicu, tada preostalih $n-1$ stepenica možemo možemo prijeći na a_{n-1} načina. Ako smo u prvom koraku prekoračili dvije stepenice, tada preostale $n-2$ stepenice možemo prijeći na a_{n-2} načina. Ako smo u prvom koraku prekoračili tri stepenice, tada preostale $n-3$ stepenice možemo prijeći na a_{n-3} načina.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Prema pravilu sume slijedi da je

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}, \quad a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4.$$

Ovo je homogena linearna rekurzija koju znamo riješiti, samo što je njezina karakteristična jednadžba trećeg stupnja koja nema racionalnih rješenja pa bismo preko Cardanove formule dobili "ružni" izraz za opći član a_n. Možete za vježbu riješiti ovu rekurziju da se uvjerite da je formula za a_n "ružna" i da još jednom vidite kako bi prebrojavanje bez korištenja rekurzije bilo kompliciranо i teško, iako možda zadani problem ne izgleda kompliciran. Imate li vi kakvu ideju za prebrojavanje bez korištenja rekurzije?



Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rekurzije oblika

$$a_n = ca_{\frac{n}{d}} + f(n), \quad d \mid n$$

javljaju se kod analize nekih rekurzivnih algoritama. Takvi algoritmi tipa "podijeli pa vladaj" rekurzivno reduciraju problem u nekoliko manjih potproblema.

Primjer 5.62.

Da bi se pomnožila dva n-znamenkasta broja treba n^2 množenja tipa znamenka puta znamenka. Pokažite da se metodom "podijeli pa vladaj" to množenje može učiniti puno efikasnijim.

Rješenje.

Pretpostavimo na trenutak da je n potencija broja 2. Neka su p i q n-znamenkasti brojevi. Svakog od njih rastavimo na dva $\frac{n}{2}$-znamenkasta dijela

$$p = p_1 \cdot 10^{\frac{n}{2}} + p_2, \quad q = q_1 \cdot 10^{\frac{n}{2}} + q_2.$$

Tada je

$$p \cdot q = p_1 q_1 \cdot 10^n + \big(p_1 q_2 + p_2 q_1\big) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + p_2 q_2$$

$$p_1 q_2 + p_2 q_1 = \big(p_1 + p_2\big)\big(q_1 + q_2\big) - p_1 q_1 - p_2 q_2$$

pa trebamo samo tri množenja $\frac{n}{2}$-znamenkastih brojeva $p_1 q_1$, $p_2 q_2$ i $\big(p_1 + p_2\big)\big(q_1 + q_2\big)$ da se odredi $p \cdot q$. Uočimo još da $p_1 + p_2$ i $q_1 + q_2$ mogu biti $(\frac{n}{2} + 1)$-znamenkasti brojevi, ali to bitno ne mijenja red veličine rješenja.

Neka je a_n broj potrebnih množenja tipa znamenka puta znamenka da se pomnože dva n-znamenkasta broja na gornji način. Tada iz prethodnih razmatranja slijedi

$$a_n = 3a_{\frac{n}{2}}, \quad a_1 = 1.$$

Ovu rekurziju rješavamo supstitucijom

$$b_n = a_{2^n}, \quad b_0 = a_1 = 1.$$

Iz toga slijedi

$$b_n = a_{2^n} = 3a_{\frac{2^n}{2}} = 3a_{2^{n-1}} = 3b_{n-1}$$

odnosno

$$b_n = 3b_{n-1}, \quad b_0 = 1.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Dobivenu rekurziju ćemo riješiti teleskopiranjem.

$$\begin{aligned} b_n &= 3b_{n-1} \\ b_{n-1} &= 3b_{n-2} \\ &\vdots \\ b_2 &= 3b_1 \\ b_1 &= 3b_0 \end{aligned}$$

Množenjem gornjih jednakosti dobivamo da je $b_n = 3^n b_0$, odnosno $b_n = 3^n$. Iz toga slijedi da je $a_{2^n} = 3^n$, tj. $a_n = 3^{\log_2 n}$. Stoga je

$$a_n = 3^{\log_2 n} \;\Rightarrow\; a_n = 3^{\frac{\log_3 n}{\log_3 2}} \;\Rightarrow\; a_n = \left(3^{\log_3 n}\right)^{\log_2 3}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

pa je $a_n = n^{\log_2 3}$, odnosno $a_n \approx n^{1.58}$. Dakle, složenost takvog algoritma je $O\left(n^{1.58}\right)$, što je znatno bolje od klasičnog množenja čija je složenost $O\left(n^2\right)$.

Primjer 5.63.

Odredite broj a_n usporedbi potrebnih da se u skupu S od n elemenata pronađu najmanji i najveći element ako je n potencija broja 2.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

pa je $a_n = n^{\log_2 3}$, odnosno $a_n \approx n^{1.58}$. Dakle, složenost takvog algoritma je $O\left(n^{1.58}\right)$, što je znatno bolje od klasičnog množenja čija je složenost $O\left(n^2\right)$.

Primjer 5.63.

Odredite broj a_n usporedbi potrebnih da se u skupu S od n elemenata pronađu najmanji i najveći element ako je n potencija broja 2.

Rješenje.

Ako je $k(S) = 2$, tada je $a_2 = 1$. Neka su m_1 i M_1 najmanji i najveći element redom u prvoj polovici skupa S (prvih $\frac{n}{2}$ brojeva), a m_2 i M_2 najmanji i najveći element redom u drugoj polovici skupa S.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Tada dvije usporedbe m_1 i m_2, te M_1 i M_2 određuju najmanji i najveći broj u čitavom skupu S. Stoga je

$$a_n = 2a_{\frac{n}{2}} + 2, \quad a_2 = 1.$$

Stavimo supstituciju $b_n = a_{2^n}$.

$$b_n = a_{2^n} = 2a_{\frac{2^n}{2}} + 2 = 2a_{2^{n-1}} + 2 = 2b_{n-1} + 2.$$

Dakle,

$$b_n = 2b_{n-1} + 2, \quad b_1 = 1.$$

Rješavamo najprije pripadnu homogenu rekurziju.

$$b_n = 2b_{n-1}$$
$$b_n = x^n$$
$$x^n = 2x^{n-1} \ / : x^{n-1}$$
$$x = 2$$
$$b_n^{(h)} = A \cdot 2^n$$

Partikularno rješenje tražimo u obliku $b_n^{(p)} = B$ iz čega dobivamo $B = -2$. Stoga je

$$b_n = A \cdot 2^n - 2.$$

Uvažimo li početni uvjet $b_1 = 1$ slijedi da je $b_n = \frac{3}{2} \cdot 2^n - 2$ pa je $a_n = \frac{3}{2}n - 2$.

Funkcije izvodnice

Do sada smo se upoznali s mnogim metodama prebrojavanja. Vidjeli smo da je dobro imati što više takvih metoda. Sjetimo se samo primjera u kojima je prebrojavanje takoreći bilo nemoguće bez korištenja rekurzija. Međutim, u mnogo problema je teško pronaći pravu rekurziju, a još teže ju riješiti.

Metoda funkcija izvodnica je jedna od najvažnijih metoda u kombinatorici. Funkcija izvodnica je jedan objekt koji zamjenjuje čitav niz brojeva pa je stoga lakše raditi s njom kao jednim objektom, nego s nizom koji ima beskonačno mnogo objekata.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Neka je $(a_n)_{n\geqslant 0}$ niz realnih ili kompleksnih brojeva. **Funkcija izvodnica** niza (a_n) je formalni red potencija

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

a **eksponencijalna funkcija izvodnica** tog niza je

$$e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = a_0 + \frac{a_1}{1!} x + \frac{a_2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!} x^n + \cdots$$

Da je $f(x)$ funkcija izvodnica niza $(a_n)_{n\geqslant 0}$ kratko ćemo pisati

$$f(x) \overset{FI}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geqslant 0},$$

a da je $g(x)$ njegova eksponencijalna funkcija izvodnica kratko pišemo

$$g(x) \overset{EFI}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geqslant 0}.$$

Ako je $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, tada sa $\left\langle x^r \right\rangle$ označavamo koeficijent uz x^r, tj.

$$\left\langle x^r \right\rangle f(x) = a_r.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Funkcije izvodnice općenito nećemo tretirati kao obične funkcije, osim kada je varijabla x u području konvergencije. Naime, sjetimo se geometrijskog reda i formule koju ćemo ovdje često koristiti

Geometrijski red

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

Znamo da ta formula vrijedi samo za $-1 < x < 1$, tj. samo za takve x-ove red na lijevoj strani konvergira. Međutim, mi ovdje nećemo ništa uvrštavati umjesto varijable x, nego će nam to ovdje biti samo još jedna metoda prebrojavanja čiji način funkcioniranja ćemo uskoro objasniti.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Stoga kažemo da smo izraz (funkciju) $\frac{1}{1-x}$ razvili u **formalni** red potencija $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$ pri čemu ne marimo za područje konvergencije. Jasno, ako bi nam ikada palo na pamet da nešto uvrštavamo umjesto varijable x, onda moramo brinuti o području konvergencije. No, kao što smo već spomenuli, ovdje nećemo ništa uvrštavati umjesto varijable x.

Binomni teorem

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = (a+b)^n$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Za $n \in \mathbb{N}$ binomni koeficijent smo definirali s

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Slično, za $\alpha \in \mathbb{R}$ možemo definirati binomni koeficijent s

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, \ k = 1, 2, \ldots$$

Na primjer

$$\binom{2}{5} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-1) \cdot (-2)}{5!} = 0$$

$$\binom{\frac{-1}{2}}{3} = \frac{\frac{-1}{2} \cdot \left(\frac{-1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{-1}{2} - 2\right)}{3!} = -\frac{5}{16}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Binomni red

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} x^i = (1+x)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Gornja formula opet vrijedi samo za $-1 < x < 1$. No, mi umjesto varijable x nećemo ništa uvrštavati pa ne trebamo o tome ovdje brinuti.

Poopćenje binomnog teorema je

Teorem 5.13 (Multinomni teorem).

Neka su $k, n \in \mathbb{N}$. Tada za sve $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_k)\in\mathbb{N}_0 \\ n_1+\cdots+n_k=n}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Dokaz.

$$\left(x_1 + \cdots + x_k\right)^n = \underbrace{\left(x_1 + \cdots + x_k\right) \cdots \left(x_1 + \cdots + x_k\right)}_{n \text{ faktora}}$$

Da bismo se riješili svih zagrada treba izvršiti k^n množenja i zatim skupiti istoimene sumande. Svaki sumand je oblika $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$, gdje su $n_1, \ldots, n_k \geqslant 0$ i $n_1 + \cdots + n_k = n$, jer biramo po jedan x_i iz svakog od n faktora. Od prije ◂ već znamo da je broj takvih sumanada jednak $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ iz čega slijedi tvrdnja teorema. ♡

Neka su

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{i} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

funkcije izvodnice nizova (a_n) i (b_n).

i. Jednakost funkcija izvodnica

$$f = g \;\Leftrightarrow\; a_n = b_n,\ \forall n \geqslant 0$$

ii. Zbrajanje funkcija izvodnica

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- Množenje funkcija izvodnica

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$c_0 = a_0 b_0,\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0,\ \ldots,\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},\ \ldots$$

Specijalno, stavimo li gore $b_n = 1$, tada dobivamo da ako je

$$f(x) \overset{FI}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n \geqslant 0}$$

tada je

$$\frac{f(x)}{1-x} \overset{FI}{\longleftrightarrow} (s_n)_{n \geqslant 0}$$

gdje je (s_n) niz parcijalnih suma niza (a_n), tj.

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \overset{FI}{\longleftrightarrow} \quad (a_n)_{n \geqslant 0}$$

Formalna derivacija od f je

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n =$$

$$= a_1 + 2a_2 x + \cdots + (n+1) a_{n+1} x^n + \cdots$$

Drugim riječima, funkciju izvodnicu deriviramo član po član.

Odmah uočavamo da vrijedi

$$x f'(x) \quad \overset{FI}{\longleftrightarrow} \quad \big((n+1) a_{n+1}\big)_{n \geqslant 0}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \overset{FI}{\longleftrightarrow} \quad (a_n)_{n \geqslant 0}$$

Formalni integral od f je

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n =$$

$$= a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \cdots + \frac{1}{n} a_{n-1} x^n + \cdots$$

Drugim riječima, funkciju izvodnicu integriramo član po član.

Odmah uočavamo da vrijedi

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \overset{FI}{\longleftrightarrow} \quad \left(\frac{1}{n} a_{n-1}\right)_{n \geqslant 1}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.64.

Odredite funkciju izvodnicu niza $a_n = n^2 + 2n$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.64.

Odredite funkciju izvodnicu niza $a_n = n^2 + 2n$.

Rješenje.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n^2 + 2n\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

Treba još dobiti izraze (sume) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$ u zatvorenoj formi.

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \;\Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2} \;\Big/ \cdot\, x$$

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2} \;\Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

$$1 + 4x + 9x^2 + \cdots + n^2x^{n-1} + \cdots = \frac{1+x}{(1-x)^3} \;\Big/ \cdot\, x$$

$$x + 4x^2 + 9x^3 + \cdots + n^2x^n + \cdots = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Stoga je

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3} + 2 \cdot \frac{x}{(1-x)^2}$$

odnosno

$$f(x) = \frac{3x - x^2}{(1-x)^3}.$$

Primjer 5.65.

Odredite funkciju izvodnicu niza $a_n = \frac{1}{n}$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Stoga je

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3} + 2 \cdot \frac{x}{(1-x)^2}$$

odnosno

$$f(x) = \frac{3x - x^2}{(1-x)^3}.$$

Primjer 5.65.

Odredite funkciju izvodnicu niza $a_n = \frac{1}{n}$.

Rješenje.

Neka je $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, tj. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \; / \int \mathrm{d}x$$

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n+1}x^{n+1} = -\ln|1-x|$$

Iz toga slijedi da je $f(x) = \ln \frac{1}{|1-x|}$.

U prethodnim primjerima smo imali zadane nizove brojeva i tražili zatvorene forme njihovih funkcija izvodnica. Međutim, prava korist od funkcija izvodnica u kombinatorici je upravo obrnuta situacija. Naime, obično se traže brojevi a_n s nekim kombinatornim značenjem. Da se oni odrede prvo se nađe pripadna funkcija izvodnica, a zatim se ona razvije u formalni red otkud se dobije formula za a_n.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Funkcije izvodnice se u biti koriste za dvije vrste problema:

- Za prebrojavanje objekata pri čemu nije važan njihov poredak. U tim slučajevima se koriste funkcije izvodnice.
- Za prebrojavanje objekata pri čemu je važan njihov poredak. U tim slučajevima se koriste eksponencijalne funkcije izvodnice.

Pogledajmo sada na nekim primjerima primjenu funkcija izvodnica.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.66.

Odredite pomoću funkcija izvodnica broj načina na koje je moguće odabrati r predmeta od n predmeta ako svaki predmet možemo odabrati najviše jedanput.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.66.

Odredite pomoću funkcija izvodnica broj načina na koje je moguće odabrati r predmeta od n predmeta ako svaki predmet možemo odabrati najviše jedanput.

Rješenje.

Zapravo se traži broj r-kombinacija bez ponavljanja n-članog skupa. Znamo da je taj broj jednak $\binom{n}{r}$, ali pogledajmo kako do njega možemo doći pomoću funkcija izvodnica. Razmišljamo na sljedeći način. Prvi predmet možemo i ne moramo izabrati. Tome možemo pridružiti simbolički zapis $1 + x$. Isto tako, drugi predmet možemo i ne moramo izabrati. Tome isto možemo pridružiti simbolički zapis $1 + x$, itd.

$$\begin{array}{lcl} 1.\ \text{predmet} & \to & 1+x \\ 2.\ \text{predmet} & \to & 1+x \\ \vdots & & \\ n\text{-ti predmet} & \to & 1+x \end{array}$$

Prema pravilu produkta slijedi da je pripadna funkcija izvodnica

$$f(x) = \underbrace{(1+x)\cdots(1+x)}_{n \text{ faktora}} = (1+x)^n$$

Kako nas zanima broj načina izbora r predmeta od n predmeta, trebamo ovu funkciju razviti u red i pogledati koeficijent uz x^r. Iz binomnog poučka slijedi da je

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

pa je $\langle x^r \rangle f(x) = \binom{n}{r}$, što nam je poznati rezultat od prije, a ovdje smo ga ponovno dobili na jedan elegantan način. Ovdje smo dobili konačnu sumu, što je i bilo za očekivati jer, npr. $\langle x^{n+1} \rangle f(x) = 0$ jer $n+1$ predmeta između n predmeta možemo odabrati na nula načina ako nisu dozvoljena ponavljanja.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.67.

Odredite pomoću funkcija izvodnica broj načina na koje je moguće odabrati r predmeta od n predmeta ako su dozvoljena ponavljanja predmeta.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.67.

Odredite pomoću funkcija izvodnica broj načina na koje je moguće odabrati r predmeta od n predmeta ako su dozvoljena ponavljanja predmeta.

Rješenje.

Zapravo se traži broj r-kombinacija s ponavljanjem n-članog skupa. Prvi predmet možemo odabrati niti jedanput, jedanput, dvaput,... Tome možemo pridružiti simbolički zapis $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$. Drugi predmet možemo odabrati niti jedanput, jedanput, dvaput,... Tome možemo pridružiti simbolički zapis $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, itd.

$$
\begin{array}{lcl}
1.\ \text{predmet} & \to & 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\
2.\ \text{predmet} & \to & 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\
\vdots & & \\
n\text{-ti predmet} & \to & 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots
\end{array}
$$

Prema pravilu produkta slijedi da je pripadna funkcija izvodnica

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)^n$$

Iskoristimo formulu ◂ pa dobivamo

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}.$$

Sada funkciju f treba razviti u red. Prema ◂ slijedi

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$(1-x)^{-n} = \big(1+(-x)\big)^{-n} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} (-x)^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{-n}{i} x^i$$

Nas zanima $\langle x^r \rangle f(x)$.

$$\langle x^r \rangle f(x) = (-1)^r \binom{-n}{r} =$$

$$= (-1)^r \cdot \frac{-n(-n-1)\cdots(-n-r+1)}{r!} =$$

$$= (-1)^r \cdot (-1)^r \cdot \frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!} =$$

$$= \frac{(n+r-1)\cdots(n+1)n}{r!} = \binom{n+r-1}{r}$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Dakle, opet smo dobili poznati nam rezultat od prije da je $\overline{C}(n,r) = \binom{n+r-1}{r}$.

Primjer 5.68.

Pomoću funkcija izvodnica odredite broj r-permutacija u n-članom skupu.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Dakle, opet smo dobili poznati nam rezultat od prije da je $\overline{C}(n,r) = \binom{n+r-1}{r}$.

Primjer 5.68.

Pomoću funkcija izvodnica odredite broj r-permutacija u n-članom skupu.

Rješenje.

Koristit ćemo eksponencijalnu funkciju izvodnicu jer nam je bitan poredak elemenata. Dakle,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i!} x^i.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Prvi predmet možemo i ne moramo izabrati. Tome možemo pridružiti simbolički zapis $1 + \frac{x}{1!}$. Isto tako, drugi predmet možemo i ne moramo izabrati. Tome isto možemo pridružiti simbolički zapis $1 + \frac{x}{1!}$, itd.

$$\begin{aligned} &1.\text{ predmet} && \to && 1 + \tfrac{x}{1!} \\ &2.\text{ predmet} && \to && 1 + \tfrac{x}{1!} \\ &\qquad\vdots \\ &n\text{-ti predmet} && \to && 1 + \tfrac{x}{1!} \end{aligned}$$

Tada je

$$f(x) = \underbrace{(1 + \tfrac{x}{1!}) \cdots (1 + \tfrac{x}{1!})}_{n \text{ faktora}} = (1 + x)^n$$

Razvijemo li funkciju u formalni red, dobivamo

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

pa je

$$a_r = r! \cdot \langle x^r \rangle f(x) = r! \binom{n}{r} = r! \cdot \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Dakle, opet smo dobili na elegantan način poznati rezultat od prije da je $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.69.

Na koliko je načina moguće razmjestiti 20 jednakih kuglica u 5 različitih kutija tako da u svakoj kutiji budu barem dvije, a najviše sedam kuglica?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.69.

Na koliko je načina moguće razmjestiti 20 jednakih kuglica u 5 različitih kutija tako da u svakoj kutiji budu barem dvije, a najviše sedam kuglica?

Rješenje.

Kako kuglice ne razlikujemo koristimo (običnu) funkciju izvodnicu za prebrojavanje. U svakoj kutiji moraju biti barem dvije, a najviše sedam kuglica pa svakoj kutiji možemo pridružiti simbolički zapis

$$x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7.$$

Stoga je pripadna funkcija izvodnica za naš problem

$$f(x) = \left(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7\right)^5.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Zanima nas $\langle x^{20} \rangle f(x)$. Stoga računamo

$$\begin{aligned}
\langle x^{20} \rangle f(x) &= \langle x^{20} \rangle \left(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7\right)^5 = \\
&= \langle x^{20} \rangle x^{10} \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right)^5 = \\
&= \langle x^{10} \rangle \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right)^5 = \\
&= \langle x^{10} \rangle \left(\tfrac{1-x^6}{1-x}\right)^5 = \langle x^{10} \rangle \left(1 - x^6\right)^5 (1-x)^{-5} = \\
&= \langle x^{10} \rangle \left(\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \left(-x^6\right)^k\right) \left(\sum_{r=0}^{\infty} \binom{-5}{r} (-x)^r\right) = \\
&= (-1)^0 \binom{5}{0} \cdot (-1)^{10} \binom{-5}{10} + (-1)^1 \binom{5}{1} \cdot (-1)^4 \binom{-5}{4} \\
&= \binom{-5}{10} - 5 \binom{-5}{4} = 1001 - 5 \cdot 70 = 651
\end{aligned}$$

Dakle, imamo ukupno 651 načina.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.70.

Koliko rješenja ima jednadžba

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13,$$

gdje su x_1, x_2, x_3, x_4 *nenegativni cijeli brojevi i* $x_1 \geqslant 8$*?*

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.70.

Koliko rješenja ima jednadžba

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13,$$

gdje su x_1, x_2, x_3, x_4 *nenegativni cijeli brojevi i* $x_1 \geqslant 8$*?*

Rješenje.

Već smo prije riješili ovaj primjer. Pokažimo kako se on sada elegantno rješava pomoću funkcija izvodnica. Zbog $x_1 \geqslant 8$ nepoznanici x_1 pridružujemo simbolički zapis $x^8 + x^9 + x^{10} + \cdots$, a svakoj od preostalih nepoznanica pridružujemo simbolički zapis $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$.

$$
\begin{aligned}
x_1 &\to x^8 + x^9 + x^{10} + \cdots \\
x_2 &\to 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\
x_3 &\to 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\
x_4 &\to 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

Stoga je pripadna funkcija izvodnica za ovaj problem

$$f(x) = \left(x^8 + x^9 + x^{10} + \cdots\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)^3.$$

Nas zanima $\left\langle x^{13} \right\rangle f(x)$. Napišimo f u zatvorenoj formi.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(x^8 + x^9 + x^{10} + \cdots\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)^3 = \\
&= x^8\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)^3 = \\
&= x^8\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)^4 = \frac{x^8}{(1-x)^4} = x^8(1-x)^{-4}
\end{aligned}
$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti

Uvod

Principi prebrojavanja

Permut. i kombinac.

FUI

Deranžmani

Rekurzivne relacije

Nelinearne rekurzije

Primjene rekurzija

Funkcije izvodnice

Diskretna vjerojatnost

Uspoređivanje događaja

Definicija vjerojatnosti

Klasični vjerojatnosni prostor

Uvjetna vjerojatnost

Nezavisnost događaja

Bayesova formula

Sada računamo $\langle x^{13} \rangle f(x)$ tako da f razvijemo u formalni red potencija.

$$\langle x^{13} \rangle f(x) = \langle x^{13} \rangle x^8 (1-x)^{-4} = \langle x^5 \rangle (1-x)^{-4} =$$

$$= \langle x^5 \rangle \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-4}{k} (-x)^k = \langle x^5 \rangle \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-4}{k} x^k =$$

$$= (-1)^5 \binom{-4}{5} = 56$$

Dakle, zadana jednadžba ima ukupno 56 nenegativnih cjelobrojnih rješenja u kojima je $x_1 \geqslant 8$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.71.

Odredite funkciju izvodnicu za broj načina da se postigne suma n pri bacanju deset različitih igraćih kocki. Izvedite iz te funkcije izvodnice funkciju izvodnicu za broj načina da se postigne parna suma, te izračunajte broj različitih načina dobivanja parne sume.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.71.

Odredite funkciju izvodnicu za broj načina da se postigne suma n pri bacanju deset različitih igraćih kocki. Izvedite iz te funkcije izvodnice funkciju izvodnicu za broj načina da se postigne parna suma, te izračunajte broj različitih načina dobivanja parne sume.

Rješenje.

Na svakoj kocki se nalaze napisani brojevi od 1 do 6 pa svakoj kocki pridružujemo simbolički izraz

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6.$$

Kako imamo ukupno deset kocaka, funkcija izvodnica za ovaj problem je

$$f(x) = \left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)^{10}.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Parne sume se nalaze uz parne potencije od $f(x)$ pa je funkcija izvodnica za parne sume jednaka

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}. \qquad (\star)$$

Nadalje je

$$f(x) = \left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)^{10} =$$

$$= x^{10}\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right)^{10} =$$

$$= x^{10} \cdot \left(\frac{1 - x^6}{1 - x}\right)^{10}$$

pa uvrštavanjem u $(\star)$ dobivamo

$$p(x) = \frac{1}{2}\left[x^{10}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^{10} + (-x)^{10}\left(\frac{1-(-x)^6}{1-(-x)}\right)^{10}\right]$$

$$p(x) = \frac{1}{2}\left[x^{10}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^{10} + x^{10}\left(\frac{1-x^6}{1+x}\right)^{10}\right]$$

$$p(x) = \frac{1}{2}x^{10}(1-x^6)^{10}\left[\frac{1}{(1-x)^{10}} + \frac{1}{(1+x)^{10}}\right]$$

Zanima nas ukupni broj svih parnih suma, dakle moramo pogledati brojeve uz sve potencije u $p(x)$ i njih zbrojiti, a to ćemo dobiti tako da izračunamo $p(1)$. Međutim, ne možemo uvrštavati $x = 1$ u gornji izraz za $p(x)$ jer on vrijedi uz uvjet da je $x \neq 1$, nego moramo računati na sljedeći način.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$f(x) = \left(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)^{10}$$

$$f(1) = \left(1 + 1^2 + 1^3 + 1^4 + 1^5 + 1^6\right)^{10} = 6^{10}$$

$$f(-1) = 0$$

$$p(1) = \frac{f(1) + f(-1)}{2} = \frac{6^{10} + 0}{2} = \frac{6^{10}}{2} = 3 \cdot 6^9$$

Pri bacanju deset različitih igraćih kocki parna suma se može postići na $3 \cdot 6^9$ načina.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.72.

Pomoću funkcija izvodnica riješite rekurzije

a. $a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6a_n = 0, \;\; a_0 = 1, \, a_1 = 1,$

b. $a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = n \cdot 2^n, \;\; a_0 = 1, \, a_1 = 1.$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.72.

Pomoću funkcija izvodnica riješite rekurzije

a) $a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6a_n = 0, \;\; a_0 = 1, \, a_1 = 1,$

b) $a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = n \cdot 2^n, \;\; a_0 = 1, \, a_1 = 1.$

Rješenje.

a) Neka je $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ funkcija izvodnica niza (a_n).

$$a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \;\big/ \cdot x^{n+2}$$

$$a_{n+2}x^{n+2} + 5a_{n+1}x^{n+2} + 6a_n x^{n+2} = 0 \;\Big/ \sum_{n=0}^{\infty}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^{n+2} + 5\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+2} + 6\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^{n+2} + 5x\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} + 6x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\big(f(x) - a_0 - a_1 x\big) + 5x\big(f(x) - a_0\big) + 6x^2 f(x) = 0$$

$$f(x) - 1 - x + 5x\big(f(x) - 1\big) + 6x^2 f(x) = 0$$

$$\big(6x^2 + 5x + 1\big) f(x) = 6x + 1$$

$$f(x) = \frac{6x+1}{6x^2+5x+1} = \frac{6x+1}{(1+2x)(1+3x)}$$

Sada treba dobivenu funkciju f razviti u formalni red potencija.

$$\frac{6x+1}{(1+2x)(1+3x)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{B}{1+3x} = \frac{A(1+3x)+B(1+2x)}{(1+2x)(1+3x)}$$

$$6x + 1 = A(1+3x) + B(1+2x)$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$x = -\tfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; A = 4$$

$$x = -\tfrac{1}{3} \;\Rightarrow\; B = -3$$

Stoga je prema

$$f(x) = \frac{4}{1+2x} - \frac{3}{1+3x} =$$

$$= 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-3x)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[4 \cdot (-2)^n - 3 \cdot (-3)^n \right] x^n$$

Otuda dobivamo da je

$$a_n = 4 \cdot (-2)^n - 3 \cdot (-3)^n.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- Neka je $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ funkcija izvodnica niza (a_n).

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = n \cdot 2^n \ / \cdot x^{n+2}$$

$$a_{n+2}x^{n+2} - a_{n+1}x^{n+2} - 2a_n x^{n+2} = n \cdot 2^n \cdot x^{n+2} \ \Big/ \sum_{n=0}^{\infty}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^{n+2} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} -$$

$$- 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 2^n x^n$$

$$\big(f(x) - a_0 - a_1 x\big) - x\big(f(x) - a_0\big) - 2x^2 f(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 2^n x^n$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$f(x) - 1 - x - xf(x) + x - 2x^2 f(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 2^n x^n$$

$$\left(1 - x - 2x^2\right) f(x) - 1 = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 2^n x^n \qquad (\spadesuit)$$

Trebamo još dobiti zatvorenu formu izraza na desnoj strani.

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \;\Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

$$1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Stavimo li umjesto x u posljednju jednakost $2x$, dobivamo

$$1 + 2 \cdot (2x) + \cdots + n \cdot (2x)^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-2x)^2}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Tada je

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 2^n x^n = 2x \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (2x)^{n-1} = \frac{2x}{(1-2x)^2}.$$

Sada dobiveno uvrstimo u (♠) pa slijedi

$$\left(1 - x - 2x^2\right) f(x) - 1 = \frac{2x^3}{(1-2x)^2}$$

$$f(x) = \frac{2x^3}{(1-2x)^3(1+x)} + \frac{1}{(1+x)(1-2x)}$$

Rastavljanjem na parcijalne razlomke i razvojem u formalni red potencija dobivamo

$$f(x) = \frac{7}{27} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{55}{54} \cdot \frac{1}{1-2x} - \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{(1-2x)^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(1-2x)^3}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$f(x) = \frac{7}{27}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + \frac{55}{54}\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n -$$

$$- \frac{4}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}(-2)^n x^n + \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}(-2)^n x^n$$

Stoga je

$$a_n = \frac{7}{27}\cdot(-1)^n + \frac{55}{54}\cdot 2^n - \frac{4}{9}\binom{-2}{n}(-2)^n + \frac{1}{6}\binom{-3}{n}\cdot(-2)^n$$

Nadalje je

$$\binom{-2}{n} = \frac{-2\cdot(-3)\cdot(-4)\cdots(-(n+1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)\cdot n} = (-1)^n(n+1)$$

$$\binom{-3}{n} = \frac{-3\cdot(-4)\cdot(-5)\cdots(-(n+2))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)\cdot n} = \frac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{2}$$

pa nakon sređivanja dobivamo

$$a_n = \frac{7}{27}\cdot(-1)^n + \left(\frac{1}{12}n^2 - \frac{7}{36}n + \frac{20}{27}\right)\cdot 2^n$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.73.

Riješite sustav rekurzija

$$a_{n+1} = 2a_n - 8b_n, \quad b_{n+1} = 2a_n - 6b_n, \quad a_0 = -1,\ b_0 = 2$$

pomoću funkcija izvodnica.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.73.

Riješite sustav rekurzija

$$a_{n+1} = 2a_n - 8b_n, \quad b_{n+1} = 2a_n - 6b_n, \quad a_0 = -1,\ b_0 = 2$$

pomoću funkcija izvodnica.

Rješenje.

Neka su $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ redom funkcije izvodnice nizova (a_n) i (b_n).

$$a_{n+1} = 2a_n - 8b_n \;/\cdot x^{n+1}$$

$$b_{n+1} = 2a_n - 6b_n \;/\cdot x^{n+1}$$

$$a_{n+1}x^{n+1} = 2a_n x^{n+1} - 8b_n x^{n+1} \;/\sum_{n=0}^{\infty}$$

$$b_{n+1}x^{n+1} = 2a_n x^{n+1} - 6b_n x^{n+1} \;/\sum_{n=0}^{\infty}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} = 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 8x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1}x^{n+1} = 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 6x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$f(x) - a_0 = 2xf(x) - 8xg(x)$$

$$g(x) - b_0 = 2xf(x) - 6xg(x)$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$f(x)+1=2xf(x)-8xg(x)$$
$$g(x)-2=2xf(x)-6xg(x)$$

$$(1-2x)f(x)+8xg(x)=-1$$
$$-2xf(x)+(1+6x)g(x)=2$$

Iz prve jednadžbe dobivamo $g(x)=\frac{(2x-1)f(x)-1}{8x}$ pa uvrstimo li to u drugu jednadžbu dobivamo

$$f(x)=-\frac{22x+1}{(1+2x)^2}$$

pa je

$$g(x)=\frac{2-6x}{(1+2x)^2}.$$

$$f(x) = -\frac{22x+1}{(1+2x)^2}$$

$$f(x) = \frac{10}{(1+2x)^2} - \frac{11}{1+2x}$$

$$f(x) = 10\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}\cdot(2x)^n - 11\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[10\binom{-2}{n}\cdot 2^n - 11\cdot(-2)^n\right]x^n$$

$$a_n = 10\binom{-2}{n}\cdot 2^n - 11\cdot(-2)^n$$

$$a_n = 10\cdot(-1)^n(n+1)\cdot 2^n - 11\cdot(-2)^n$$

$$a_n = (10n-1)\cdot(-2)^n$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$g(x) = \frac{2-6x}{(1+2x)^2}$$

$$g(x) = \frac{5}{(1+2x)^2} - \frac{3}{1+2x}$$

$$g(x) = 5\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}\cdot(2x)^n - 3\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[5\binom{-2}{n}\cdot 2^n - 3\cdot(-2)^n\right]x^n$$

$$b_n = 5\binom{-2}{n}\cdot 2^n - 3\cdot(-2)^n$$

$$b_n = 5\cdot(-1)^n(n+1)\cdot 2^n - 3\cdot(-2)^n$$

$$b_n = (5n+2)\cdot(-2)^n$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.74.

Pomoću funkcija izvodnica odredite broj r-permutacija s ponavljanjem n-članog skupa.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.74.

Pomoću funkcija izvodnica odredite broj r-permutacija s ponavljanjem n-članog skupa.

Rješenje.

Kako nam je važan poredak elemenata, koristimo eksponencijalnu funkciju izvodnicu. Prvi predmet možemo izabrati niti jedanput, jedanput, dvaput,... Tome možemo pridružiti simbolički izraz $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$. Drugi predmet možemo izabrati niti jedanput, jedanput, dvaput, ... Tome možemo isto pridružiti simbolički izraz $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$, itd.

$$
\begin{aligned}
&1.\ \text{predmet} && \to && 1+\tfrac{x}{1!}+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!}+\cdots \\
&2.\ \text{predmet} && \to && 1+\tfrac{x}{1!}+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!}+\cdots \\
&\qquad\vdots \\
&n\text{-ti predmet} && \to && 1+\tfrac{x}{1!}+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!}+\cdots
\end{aligned}
$$

Stoga je eksponencijalna funkcija izvodnica za ovaj problem jednaka

$$f(x)=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^n.$$

Nadalje, vrijedi

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Napomenimo samo (iako nam to u ovom trenutku nije važno) da red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergira za svaki realni broj x. Dakle, dobivamo da je

$$f(x) = \left(e^x\right)^n$$

odnosno

$$f(x) = e^{nx}.$$

Razvijanjem u red potencija dobivamo

$$e^{nx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{x^k}{k!}$$

pa je $a_r = r! \left\langle x^r \right\rangle e^{nx} = r! \cdot \frac{n^r}{r!} = n^r$, što nam je već dobro poznati rezultat od prije.

Primjer 5.75.

a. *Na koliko je načina moguće podijeliti 18 različitih igrački između troje djece tako da svako dijete dobije barem jednu igračku?*

b. *Na koliko je načina moguće podijeliti 18 različitih igrački između troje djece tako da svako dijete dobije barem dvije igračke, ali ne više od 6 igrački?*

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.75.

a. *Na koliko je načina moguće podijeliti 18 različitih igrački između troje djece tako da svako dijete dobije barem jednu igračku?*

b. *Na koliko je načina moguće podijeliti 18 različitih igrački između troje djece tako da svako dijete dobije barem dvije igračke, ali ne više od 6 igrački?*

Rješenje.

a. Kako igračke razlikujemo, koristimo eksponencijalnu funkciju izvodnicu. Kako svakom djetetu moramo dati barem jednu igračku, tada svako dijete može dobiti jednu igračku, ili dvije igračke, ili tri igračke, ili...

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Stoga svakom djetetu možemo pridružiti simbolički izraz $\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$.

1. dijete $\rightarrow$ $\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
2. dijete $\rightarrow$ $\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
3. dijete $\rightarrow$ $\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

Stoga je eksponencijalna funkcija izvodnica za ovaj problem

$$f(x) = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right)^3,$$

odnosno

$$f(x) = \left(e^x - 1\right)^3.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$f(x) = e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{k!} - 3\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} + 3\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(3^k - 3 \cdot 2^k + 3\right) \frac{x^k}{k!} - 1$$

Nas zanima $\left\langle \frac{x^{18}}{18!} \right\rangle f(x)$.

$$\left\langle \frac{x^{18}}{18!} \right\rangle f(x) = 3^{18} - 3 \cdot 2^{18} + 3 = 386\,634\,060$$

Dakle 18 različitih igračaka između troje djece možemo podijeliti na $386\,634\,060$ načina tako da svako dijete dobije barem jednu igračku.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

b) Kako svako dijete mora dobiti barem dvije, ali ne više od šest igrački, svakom djetetu možemo pridružiti simbolički izraz $\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}$.

1. dijete $\rightarrow$ $\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}$
2. dijete $\rightarrow$ $\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}$
3. dijete $\rightarrow$ $\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}$

Stoga je eksponencijalna funkcija izvodnica za ovaj problem

$$g(x)=\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}\right)^3.$$

Nas zanima $\left\langle \frac{x^{18}}{18!} \right\rangle g(x)$.

Prema multinomnom teoremu slijedi

$$\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}\right)^3 =$$

$$= \sum_{n_1+\cdots+n_5=3} \binom{3}{n_1,n_2,\ldots,n_5} \left(\frac{x^2}{2!}\right)^{n_1} \left(\frac{x^3}{3!}\right)^{n_2} \left(\frac{x^4}{4!}\right)^{n_3} \left(\frac{x^5}{5!}\right)^{n_4} \left(\frac{x^6}{6!}\right)^{n_5}$$

Stoga je

$$\left\langle \frac{x^{18}}{18!} \right\rangle g(x) = \sum_{\sum_{i=2}^{6} i n_{i-1}=18} \frac{1}{(2!)^{n_1}(3!)^{n_2}(4!)^{n_3}(5!)^{n_4}(6!)^{n_5}} \binom{3}{n_1,n_2,\ldots,n_5}$$

Ovdje sada ima dosta posla s traženjem svih nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$2n_1 + 3n_2 + 4n_3 + 5n_4 + 6n_5 = 18$$

po kojima se uzima gornja suma.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Kada se to napravi, dobiva se

$$\left\langle \frac{x^{18}}{18!} \right\rangle g(x) = 17\,153\,136.$$

Jasno, jednostavniji način je da koristimo računalo tako da razvijemo izraz

$$\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} \right)^3$$

i pogledamo koji broj stoji uz x^{18} i onda njega još pomnožimo s $18!$. Na primjer, u `Mathematici` možemo iskoristiti naredbu `Expand` za kubiranje gornjeg izraza. Isto tako možemo iskoristiti naredbu `Coefficient` koja nam daje broj uz odgovarajuću potenciju.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Dakle, 18 igračaka između troje djece možemo podijeliti na $17\,153\,136$ načina tako da svako dijete dobije barem dvije igračke, ali ne više od 6 igrački.

Primjer 5.76.

Odredite pomoću funkcija izvodnica sumu prvih n prirodnih brojeva.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Dakle, 18 igračaka između troje djece možemo podijeliti na $17\,153\,136$ načina tako da svako dijete dobije barem dvije igračke, ali ne više od 6 igrački.

Primjer 5.76.

Odredite pomoću funkcija izvodnica sumu prvih n prirodnih brojeva.

Rješenje.

Neka je $a_n = n$ i $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ funkcija izvodnica niza (a_n).

Neka je $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ i $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$. Tada je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + 2 + \cdots + n)x^n$$

Tražimo zatvorenu formu funkcije g.

Zbog ◂ je

$$g(x) = \frac{f(x)}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^3}.$$

Sada razvijamo funkciju g u formalni red potencija.

$$g(x) = x(1-x)^{-3} = x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-3}{k} (-x)^k$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-3}{k} x^{k+1}$$

$$s_n = \langle x^n \rangle g(x) = (-1)^{n-1} \binom{-3}{n-1}$$

$$s_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{-3 \cdot (-4) \cdot (-5) \cdots (-(n+1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dakle,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Diskretna teorija vjerojatnosti

U ovom ćemo dijelu samo ukratko proći kroz najelementarnije pojmove diskretne teorije vjerojatnosti. Riječ "diskretna" ovdje naglašava da će prostor elementarnih događaja biti diskretan skup (konačan ili najviše prebrojiv skup). Ovdje ćemo promatrati samo primjere kod kojih je prostor elementarnih događaja konačan skup. Teorija vjerojatnosti se bavi i slučajevima kada je prostor elementarnih događaja i neprebrojiv skup, ali za takvu teoriju je potrebno znanje iz teorije mjere i Lebesgueovih integrala pa se ovdje u to nećemo upuštati.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnovni pojam u teoriji vjerojatnosti jest **slučajni pokus**.
Slučajni pokus je pokus čiji ishodi nisu jednoznačno određeni uvjetima u kojima se izvodi. Skup svih mogućih ishoda slučajnog pokusa zove se **prostor elementarnih događaja** i taj skup se označava sa Ω. **Događaj** je neki podskup skupa Ω.
Kako su $\emptyset$ i Ω podskupovi od Ω, oni su također događaji. Prvog od njih zovemo **nemoguć događaj**, a drugog **siguran događaj**.
Svaki mogući događaj je unija nekih elementarnih događaja.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.77 (Bacanje igraće kocke).

Slučajni pokus je "bacanje igraće kocke". Mogući ishodi tog pokusa su sljedeći:

$$\begin{aligned} 1 &\to \text{"pao je broj 1"} \\ 2 &\to \text{"pao je broj 2"} \\ 3 &\to \text{"pao je broj 3"} \\ 4 &\to \text{"pao je broj 4"} \\ 5 &\to \text{"pao je broj 5"} \\ 6 &\to \text{"pao je broj 6"} \end{aligned}$$

Stoga je skup elementarnih događaja

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Neki mogući događaji vezani uz bacanje igraće kocke:

$$A = \{\text{pao je parni broj}\} = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{\text{pao je broj veći od 4}\} = \{5, 6\}$$

$$C = \{\text{pao je neparni broj manji od 5}\} = \{1, 3\}$$

Primjer 5.78 (Bacanje novčića).

Slučajni pokus je "bacanje novčića". Mogući ishodi tog pokusa su sljedeći:

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &\to \text{"pojavilo se pismo"} \\ \mathrm{G} &\to \text{"pojavila se glava"} \end{aligned}$$

Stoga je skup elementarnih događaja

$$\Omega = \{\mathrm{P}, \mathrm{G}\}.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.79 (Bacanje dvije igraće kocke).

Slučajni pokus je "bacanje igraće kocke". Mogući ishodi tog pokusa su sljedeći:

$$\omega_{ij} = (i, j) \ \rightarrow \ \text{"na prvoj kocki je pao broj } i\text{, a na drugoj broj } j\text{"}$$

pri čemu su $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dakle, prostor elementarnih događaja je

$$\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, \ldots, 6\}\}$$

pa imamo ukupno 36 elementarnih događaja.

Na primjer,

$$A = \{\text{na obje kocke su brojevi manji od tri}\}$$
$$= \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

$$B = \{\text{suma brojeva na obje kocke je 7}\}$$
$$= \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

su neki od mogućih događaja vezanih uz slučajni pokus bacanja dvije igraće kocke.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.80 (Bacanje novčića tri puta).

Slučajni pokus je "bacanje novčića tri puta". Mogući ishodi tog pokusa su sljedeći:

$$\omega_1 = (\mathrm{G},\mathrm{G},\mathrm{G}),\ \ \omega_2 = (\mathrm{G},\mathrm{G},\mathrm{P}),\ \ \omega_3 = (\mathrm{G},\mathrm{P},\mathrm{G}),\ \ \omega_4 = (\mathrm{P},\mathrm{G},\mathrm{G})$$
$$\omega_5 = (\mathrm{G},\mathrm{P},\mathrm{P}),\ \ \omega_6 = (\mathrm{P},\mathrm{G},\mathrm{P}),\ \ \omega_7 = (\mathrm{P},\mathrm{P},\mathrm{G}),\ \ \omega_8 = (\mathrm{P},\mathrm{P},\mathrm{P})$$

Stoga je prostor elementarnih događaja

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Neki od mogućih događaja vezanih uz slučajni pokus bacanja novčića tri puta:

$$A = \{\text{pismo se pojavilo točno jednom}\} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

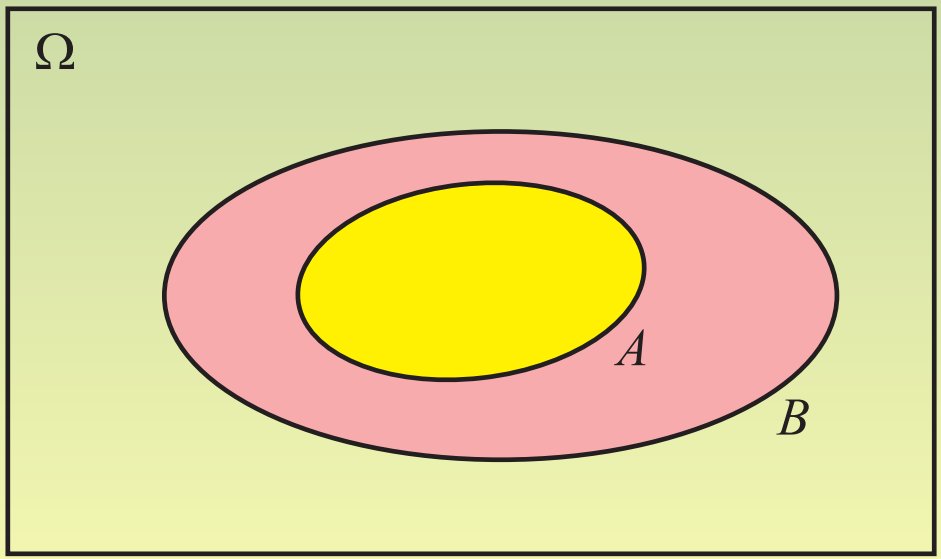
$$B = \{\text{pismo se pojavilo u 2. bacanju}\} = \{\omega_3, \omega_5, \omega_7, \omega_8\}$$

$$C = \{\text{glava se pojavila dva puta zaredom}\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Uspoređivanje događaja

Kažemo da događaj A **povlači** događaj B ako realizacija događaja A povlači realizaciju događaja B. To znači da događaj B sadrži sve elementarne događaje koje sadrži i događaj A. U tom slučaju pišemo $A \subset B$. Ako se dogodio događaj A, tada se sigurno dogodio i događaj B.



Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.81 (Bacanje dvije igraće kocke).

Bacamo dvije kocke. Neka su

$$A = \{\text{na obje kocke su brojevi veći od 4}\},$$

$$B = \{\text{suma brojeva na obje kocke je veća od 8}\}.$$

Tada događaj A povlači događaj B, tj. $A \subset B$, jer ako su oba broja veća od 4, tada je njihova suma veća od 8. Međutim, događaj B ne povlači događaj A, jer moguće je da na jednoj kocki padne broj 3, a na drugoj 6 (tada nisu na obje kocke brojevi veći od 4), ali je suma ipak veća od 8. Dakle, ako se ostvario događaj A, tada se sigurno ostvario i događaj B, ali obrnuto ne mora vrijediti.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Za događaje A i B kažemo da su **ekvivalentni** i pišemo $A = B$ ako je $A \subset B$ i $B \subset A$. Ekvivalentni događaji se sastoje od istih elementarnih događaja. Događaj A se ostvario ako i samo ako se ostvario događaj B.

Primjer 5.82 (Bacanje novčića).

Bacamo ispravni novčić četiri puta. Neka su

$$A = \{\text{pojavila su se točno tri pisma}\},$$

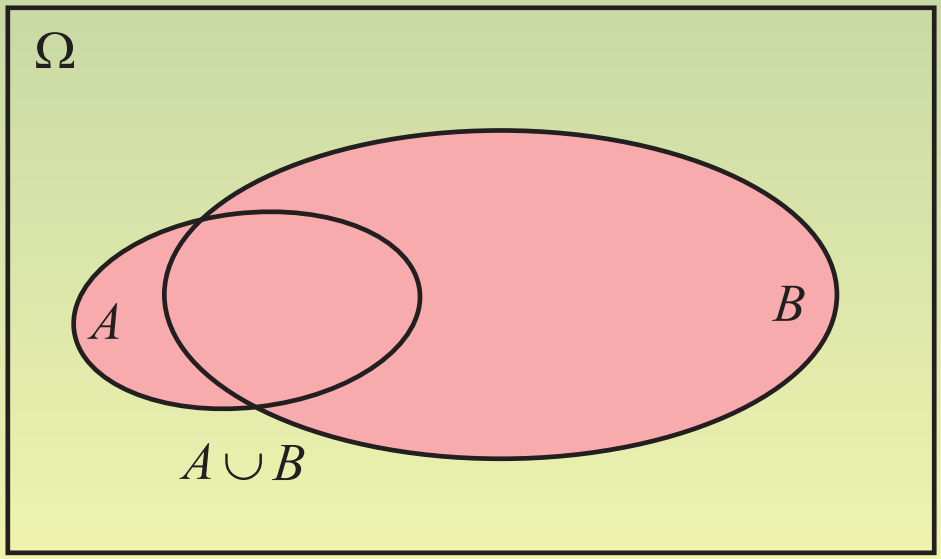
$$B = \{\text{pojavila se točno jedna glava}\}.$$

Tada su događaji A i B ekvivalentni.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Događaj koji se ostvaruje ako se ostvario barem jedan od događaja A i B zovemo **unija događaja** A i B te ga označavamo s $A \cup B$.

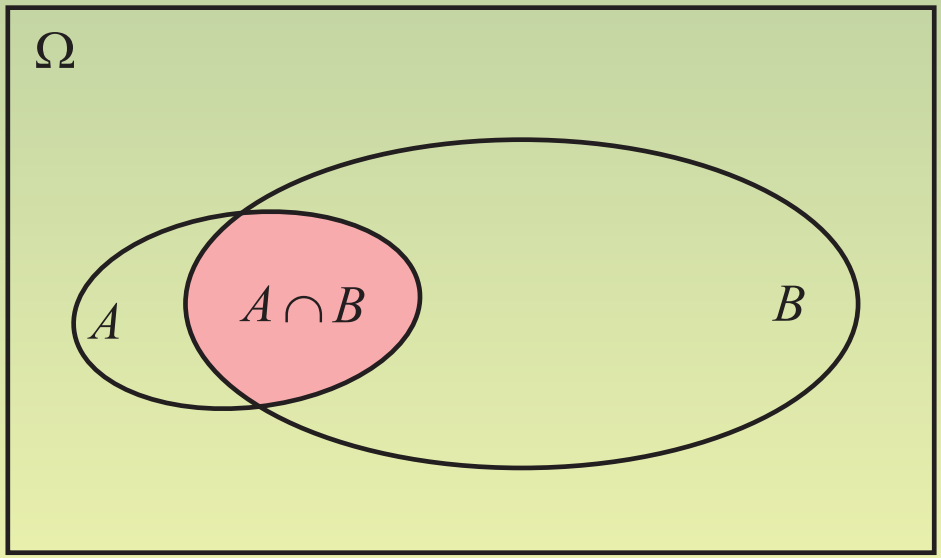
Općenito, događaj koji se ostvaruje ako se ostvario barem jedan od događaja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ zovemo **unija događaja** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ te ga označavamo s $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.



Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Događaj koji se ostvaruje ako se ostvario svaki od događaja A i B zovemo **presjek događaja** A i B te ga označavamo s $A \cap B$.

Općenito, događaj koji se ostvaruje ako se ostvario svaki od događaja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ zovemo **presjek događaja** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ te ga označavamo s $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$.



Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.83 (Bacanje igraće kocke).

Bacamo igraću kocku. Neka su

$$A = \{\text{pao je parni broj}\} = \{2, 4, 6\},$$

$$B = \{\text{pao je broj veći od } 2\} = \{3, 4, 5, 6\}.$$

Tada je

$$A \cup B = \{\text{pao je broj veći od } 1\} = \{2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$A \cap B = \{\text{pao je parni broj veći od } 2\} = \{4, 6\}.$$

Za događaje A i B kažemo da se **međusobno isključuju** ili da su **disjunktni** ako se istovremeno ne mogu ostvariti oba događaja, tj. $A \cap B = \emptyset$.

Primjer 5.84 (Bacanje igraće kocke).

Bacamo igraću kocku. Neka su

$$A = \{\text{pao je parni broj}\} = \{2, 4, 6\},$$

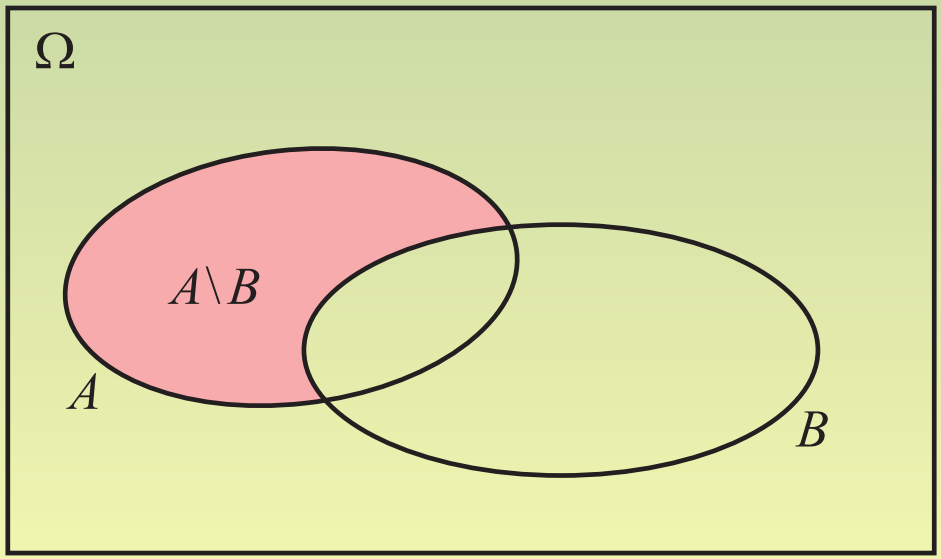
$$B = \{\text{pao je neparni broj veći od } 1\} = \{3, 5\}.$$

Tada su događaji A i B disjunktni.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Događaj koji se ostvaruje ako se ostvario događaj A, a nije se ostvario događaj B zovemo **razlika događaja** A i B te ga označavamo s $A \setminus B$.

Specijalno, događaj $\Omega \setminus A$ naziva se **komplementom** ili **suprotnim događajem** događaja A kojeg označavamo s A^c ili $\overline{A}$. Događaj A^c se ostvaruje ako i samo ako se nije ostvario događaj A.



Osnove kombinatorike i vjerojatnosti

Uvod

Principi prebrojavanja

Permut. i kombinac.

FUI

Deranžmani

Rekurzivne relacije

Nelinearne rekurzije

Primjene rekurzija

Funkcije izvodnice

Diskretna vjerojatnost

Uspoređivanje događaja

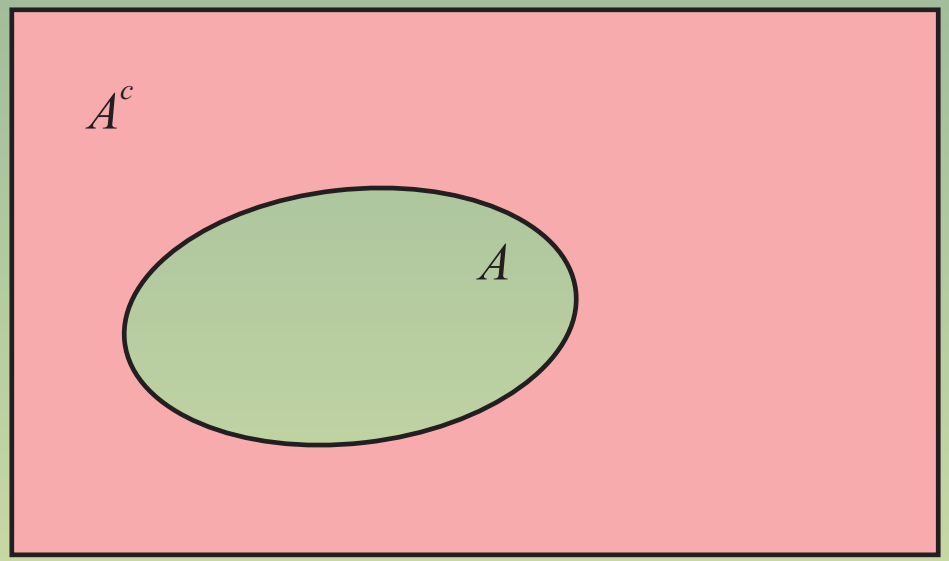
Definicija vjerojatnosti

Klasični vjerojatnosni prostor

Uvjetna vjerojatnost

Nezavisnost događaja

Bayesova formula



Primjer 5.85 (Bacanje igraće kocke).

Bacamo igraću kocku.

$$A = \{\text{pao je parni broj}\} = \{2, 4, 6\},$$

$$A^c = \{\text{pao je neparni broj}\} = \{1, 3, 5\}.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Definicija vjerojatnosti

Neka je X neprazan skup. **Sigma algebra** podskupova od X je familija Σ podskupova od X sa sljedećim svojstvima:

- $\Sigma \neq \emptyset$
- $E \in \Sigma \Rightarrow X \setminus E \in \Sigma$
- Ako je $E_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, tada je

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \Sigma$$

Uređen par (X, Σ) zovemo **izmjeriv prostor**, a elemente skupa Σ **izmjerivim skupovima**.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Neka je (X, Σ) izmjeriv prostor. **Pozitivna mjera** na tom prostoru je funkcija

$$\mu : \Sigma \to [0, \infty]$$

sa sljedećim svojstvima:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Za svaki niz E_n izmjerivih skupova koji su u parovima međusobno disjunktni, tj.

$$E_i \cap E_j = \emptyset, \quad \text{za} \quad i \neq j$$

vrijedi da je

$$\mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Uređenu trojku (X, Σ, μ) zovemo **prostor mjere**.

Vjerojatnost je jedna specijalna mjera na sigma algebri događaja koja ima vrijednosti u skupu $[0, 1]$. Preciznije, neka je Ω prostor elementarnih događaja. **Vjerojatnost** je funkcija definirana na sigma algebri $\mathcal{F}$ od Ω

$$P : \mathcal{F} \to [0, 1]$$

sa sljedećim svojstvima:

- $P(\Omega) = 1$
- Za svaku konačnu ili beskonačnu familiju $A_1, A_2, A_3, \ldots$ u parovima disjunktnih podskupova od Ω vrijedi

$$P\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ koja se sastoji od prostora elementarnih događaja Ω i vjerojatnosti P definirane na sigma algebri $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ zovemo **vjerojatnosni prostor**.

Teorem 5.14.

Neka je (Ω, P) vjerojatnosni prostor. Tada vrijedi:

a. $P(\emptyset) = 0$,

b. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$,

c. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

d. $P(A^c) = 1 - P(A)$,

e. *Ako je $A \subseteq B$, tada je $P(A) \leqslant P(B)$.*

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Dokaz.

a) Prema prvom svojstvu vjerojatnosti je $P(\Omega) = 1$. Kako su skupovi Ω i $\emptyset$ disjunktni, prema drugom svojstvu je

$$P(\Omega) + P(\emptyset) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) = 1,$$

a odavde slijedi da je

$$P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0.$$

b) Jasno je da vrijedi

$$\big(A \setminus B\big) \cup \big(A \cap B\big) = A, \quad \big(A \setminus B\big) \cap \big(A \cap B\big) = \emptyset$$

pa iz drugog svojstva vjerojatnosti slijedi

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B),$$

odakle slijedi tvrdnja.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- Jasno je da vrijedi

$$A \cup B = A \cup \big(B \setminus A\big), \quad A \cap \big(B \setminus A\big) = \emptyset$$

pa iz drugog svojstva vjerojatnosti slijedi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A). \qquad (*)$$

Iz dokazanog svojstva (b) slijedi

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$$

pa uvrstimo li to u $(*)$ dobivamo

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

d) Znamo da je

$$A \cup A^c = \Omega, \ A \cap A^c = \emptyset.$$

Stoga je

$$1 = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

iz čega slijedi tvrdnja.

e) Očito vrijedi

$$\big(B \setminus A\big) \cup A = B, \quad \big(B \setminus A\big) \cap A = \emptyset$$

pa iz toga slijedi

$$P(B) = P(B \setminus A) + P(A).$$

Kako je $P(B \setminus A) \geqslant 0$, slijedi da je $P(B) \geqslant P(A)$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Ovdje ćemo promatrati od sada samo **konačni vjerojatnosni prostor** kod kojeg skup Ω ima samo konačno mnogo elemenata. Neka je

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}.$$

Događaj u ovakvom prostoru je svaki podskup od Ω. Napomenimo samo da u slučaju da je skup Ω neprebrojiv to nije tako, ali u te detalje se ovdje nećemo upuštati. Vjerojatnost bilo kojeg događaja možemo tada odrediti ako znamo vjerojatnosti elementarnih događaja, tj. ako znamo brojeve

$$p_1 = P\big(\{\omega_1\}\big), \quad p_2 = P\big(\{\omega_2\}\big), \ldots, \quad p_n = P\big(\{\omega_n\}\big).$$

Ovi brojevi zbog $P(\Omega) = 1$ imaju svojstvo

$$p_1 > 0,\ p_2 > 0, \ldots,\ p_n > 0, \quad p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

Ako je $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ bilo koji događaj, tada je on unija nekih elementarnih događaja, tj.

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$$

pa je vjerojatnost tog događaja jednaka sumi vjerojatnosti elementarnih događaja koji se nalaze u A (jer su elementarni događaji međusobno disjunktni), tj.

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_k}.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Klasični vjerojatnosni prostor

Ako promatramo slučajni pokus koji ima konačno mnogo ishoda u većini situacija je razumno pretpostaviti da su svi ti ishodi (elementarni događaji) jednako vjerojatni. U tom slučaju takav vjerojatnosni prostor zovemo **klasični vjerojatnosni prostor**.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

$$p_i = P\big(\{\omega_i\}\big) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad A = \big\{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\big\}$$

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_k} = \frac{k}{n}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Klasični vjerojatnosni prostor

$$P(A) = \frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj mogućih ishoda}}$$

Primjer 5.86 (Bacanje novčića).

Znamo od prije da imamo dva elementarna događaja $\omega_1 = \mathrm{P}$ (pojavilo se pismo) i $\omega_2 = \mathrm{G}$ (pojavila se glava). Prirodno je pretpostaviti da je

$$P\big(\{\omega_1\}\big) = \tfrac{1}{2}, \quad P\big(\{\omega_2\}\big) = \tfrac{1}{2},$$

tj., da je jednako vjerojatno kod bacanja novčića da se pojavi pismo ili glava.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.87 (Bacanje neispravnog novčića).

Opet su dva elementarna događaja $\omega_1 = \mathrm{P}$ (pojavilo se pismo) i $\omega_2 = \mathrm{G}$ (pojavila se glava). No zbog nesimetričnosti novčića jedna njegova strana (npr., P) se pojavljuje češće od druge, pa

$$P\big(\{\omega_1\}\big) = p_1, \quad P\big(\{\omega_2\}\big) = p_2,$$

gdje je $p_1 > p_2$ i $p_1 + p_2 = 1$. Ovo nije klasični vjerojatnosni prostor jer nisu svi ishodi jednako vjerojatni.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.88 (Bacanje igraće kocke).

Znamo da u ovom slučaju postoji 6 elementarnih događaja i svi su jednako vjerojatni da se dogode, tj.

$$P(\{i\}) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Na primjer,

$$P(\{\text{pao je paran broj}\}) = P(\{2, 4, 6\}) = \tfrac{3}{6}$$

$$P(\{\text{pao je broj veći od 1}\}) = P(\{2, 3, 4, 5, 6\}) = \tfrac{5}{6}$$

su vjerojatnosti nekih događaja vezanih uz bacanje kocke.

Primjer 5.89 (Bacanje dvaju novčića, prvi model).

Četiri su elementarna događaja

$$\Omega = \big\{(\mathrm{P},\mathrm{P}),(\mathrm{P},\mathrm{G}),(\mathrm{G},\mathrm{P}),(\mathrm{G},\mathrm{G})\big\}$$

i svi su jednako vjerojatni, tj.

$$P\big((\mathrm{P},\mathrm{P})\big) = P\big((\mathrm{P},\mathrm{G})\big) = P\big((\mathrm{G},\mathrm{P})\big) = P\big((\mathrm{G},\mathrm{G})\big) = \tfrac{1}{4}$$

Elementarne događaje (P,G) i (G,P) možemo razlikovati na način da bacamo dva različita novčića.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.90 (Bacanje dvaju novčića, drugi model).

Stavljamo da imamo tri elementarna događaja

$$\{\mathrm{P},\mathrm{P}\},\ \{\mathrm{P},\mathrm{G}\},\ \{\mathrm{G},\mathrm{G}\}$$

jer razmišljamo na način da se mogu pojaviti dva pisma, ili dvije glave, ili jedno pismo i jedna glava. I ovaj pristup je ispravan, samo što u ovom slučaju nisu svi ishodi jednako vjerojatni, već je

$$P\big(\{\mathrm{P},\mathrm{P}\}\big)=\tfrac{1}{4},\quad P\big(\{\mathrm{P},\mathrm{G}\}\big)=\tfrac{1}{2},\quad P\big(\{\mathrm{G},\mathrm{G}\}\big)=\tfrac{1}{4}.$$

Primjer 5.91.

Želeći se našaliti s prijateljima u igri "Čovječe, ne ljuti se", dječak je izbrisao jednu točku sa strane kocke koja označava broj 5, a ucrtao dvije na stranu na kojoj je broj 1. Kolika je vjerojatnost sljedećih događaja ako bacamo ovakvu kocku:

$$A = \{\textit{pojavio se paran broj}\}$$

$$B = \{\textit{pojavio se broj veći od 2}\}$$

$$C = \{\textit{pojavio se broj 1}\}$$

Rješenje.

Kocka koju bacamo zapravo ima sljedeće brojeve na svojim stranama: $3, 2, 3, 4, 4, 6$. Stoga imamo ukupno četiri moguća ishoda

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 3, \quad \omega_3 = 4, \quad \omega_4 = 6.$$

Ako je kocka ispravna (u smislu da je jednaka vjerojatnost da se pojavi kod bacanja bilo koja od njezinih šest strana), tada su vjerojatnosti elementarnih događaja sljedeće:

$$P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{6}, \quad P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{3}, \quad P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{3}, \quad P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{6}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Da bismo izračunali vjerojatnosti događaja A, B i C **ne smijemo** koristiti formulu

$$P(A) = \frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj mogućih ishoda}}$$

jer naš model nije klasični vjerojatnosni prostor, tj. kod nas nemaju svi elementarni događaji jednaku vjerojatnost pojavljivanja.

$$P(A) = P\big(\{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}\big) = p_1 + p_3 + p_4 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$
$$P(B) = P\big(\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}\big) = p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$
$$P(C) = P(\emptyset) = 0$$

Mogli smo vjerojatnost događaja B izračunati i preko suprotnog događaja, tj.

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - p_1 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Napomena.

Kod rješavanja zadataka, ako neće biti ništa spomenuto, smatrat ćemo da se radi o klasičnom vjerojatnosnom prostoru i to posebno nećemo napominjati jer će iz konteksta biti jasno.

Primjer 5.92.

Kolika je vjerojatnost da ćemo slučajnim odabirom nekog prirodnog broja između 1 i 30 odabrati broj koji je djelitelj broja 30?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rješenje.

Neka je A događaj "odabran je djelitelj broja 30". Jedan broj iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 29, 30\}$ možemo odabrati na 30 načina. Djelitelj broja 30 iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 29, 30\}$ možemo odabrati na 8 načina. Stoga je

$$P(A) = \frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj mogućih ishoda}} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}.$$

Primjer 5.93.

Brojevi $1, 2, \ldots, n$ napisani su u slučajnom poretku. Kolika je vjerojatnost da se znamenka 2 pojavi neposredno nakon znamenke 1?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rješenje.

Zapravo je pitanje kolika je vjerojatnost da među permutacijama skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ odaberemo neku u kojoj se javlja 12. Svih permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ ima ukupno $n!$. O permutacijama u kojima se javlja znamenka 2 neposredno nakon znamenke 1 možemo razmišljati kao o permutacijama skupa $\{3, 4, 5, \ldots, n\} \cup \{12\}$, a njih ima $(n-1)!$. Stoga je tražena vjerojatnost jednaka

$$\frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj mogućih ishoda}} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Primjer 5.94.

Ako se zna da je od 100 žarulja njih 8 neispravnih, kolika je vjerojatnost da će od četiri odabrane žarulje sve četiri biti ispravne?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.94.

Ako se zna da je od 100 žarulja njih 8 neispravnih, kolika je vjerojatnost da će od četiri odabrane žarulje sve četiri biti ispravne?

Rješenje.

Od 100 žarulja njih 4 možemo odabrati na $\binom{100}{4}$ načina. Četiri ispravne žarulje možemo odabrati na $\binom{92}{4}$ načina. Stoga je vjerojatnost da sve četiri odabrane žarulje budu ispravne jednaka

$$\frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj mogućih ishoda}} = \frac{\binom{92}{4}}{\binom{100}{4}} \approx 0.713$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.95.

U kutiji se nalazi 5 crvenih i 4 bijele kuglice. Kolika je vjerojatnost da ćemo birajući na sreću 6 kuglica izvući tri crvene i tri bijele kuglice?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.95.

U kutiji se nalazi 5 crvenih i 4 bijele kuglice. Kolika je vjerojatnost da ćemo birajući na sreću 6 kuglica izvući tri crvene i tri bijele kuglice?

Rješenje.

6 kuglica od njih 9 možemo izvući na $\binom{9}{6}$ načina. Tri bijele možemo izvući na $\binom{4}{3}$ načina, a tri crvene na $\binom{5}{3}$ načina. Stoga tri bijele i tri crvene možemo izvući na $\binom{4}{3} \cdot \binom{5}{3}$ načina.

Vjerojatnost da od šest izvučenih kuglica budu tri crvene i tri bijele jednaka je

$$\frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj mogućih ishoda}} = \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{3}}{\binom{9}{6}} = \frac{10}{21} \approx 0.476$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.96.

Netko je zaboravio tri posljednje znamenke telefonskog broja i sjeća se samo da su sve tri različite i da je posljednja neparan broj. Kolika je vjerojatnost da će slučajnim odabirom pogoditi pravi broj?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.96.

Netko je zaboravio tri posljednje znamenke telefonskog broja i sjeća se samo da su sve tri različite i da je posljednja neparan broj. Kolika je vjerojatnost da će slučajnim odabirom pogoditi pravi broj?

Rješenje.

Posljednju znamenku može izabrati na 5 načina (jer zna da je neparan broj), drugu znamenku onda može odabrati na 9 načina, a prvu na 8 načina. Stoga posljednje tri znamenke može odabrati na $5 \cdot 9 \cdot 8 = 360$ načina. Vjerojatnost da odabere ispravni broj jednaka je

$$\frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj mogućih ishoda}} = \frac{1}{360}.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.97.

Kolika je vjerojatnost da se u igri LOTO *6 od 45 u jednoj kombinaciji postigne dobitak od 6, 5 ili 4 pogotka?*

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.97.

Kolika je vjerojatnost da se u igri LOTO *6 od 45 u jednoj kombinaciji postigne dobitak od 6, 5 ili 4 pogotka?*

Rješenje.

6 brojeva od njih 45 možemo izabrati na $\binom{45}{6}$ načina. Samo jedan od tih izbora je povoljan pa je vjerojatnost da pogodimo svih 6 brojeva jednaka

$$\frac{1}{\binom{45}{6}} \approx 1.23 \cdot 10^{-7}.$$

Zgoditak od 5 brojeva možemo imati na $\binom{6}{5} \cdot \binom{39}{1}$ načina jer moramo od 6 "dobrih" brojeva izabrati njih 5 i od preostalih 39 "loših" brojeva izabrati jednog. Stoga je vjerojatnost da pogodimo 5 brojeva jednaka

$$\frac{\binom{6}{5}\binom{39}{1}}{\binom{45}{6}} \approx 2.87 \cdot 10^{-5}.$$

Zgoditak od 4 broja možemo imati na $\binom{6}{4} \cdot \binom{39}{2}$ načina jer moramo od 6 "dobrih" brojeva izabrati njih 4 i od preostalih 39 "loših" brojeva izabrati dva. Stoga je vjerojatnost da pogodimo 4 broja jednaka

$$\frac{\binom{6}{4}\binom{39}{2}}{\binom{45}{6}} \approx 0.00136.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.98.

Podijelimo li 52 karte po 13 svakoj od 4 osobe, kolika je vjerojatnost da

a. *osoba A dobije sva četiri asa,*
b. *osoba A ne dobije niti jednog asa,*
c. *osoba A dobije 5 trefa, 5 kari, 2 herca i 1 pika,*
d. *osobe A i B između sebe podijele sve pikove?*

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.98.

Podijelimo li 52 karte po 13 svakoj od 4 osobe, kolika je vjerojatnost da

a. *osoba A dobije sva četiri asa,*
b. *osoba A ne dobije niti jednog asa,*
c. *osoba A dobije 5 trefa, 5 kari, 2 herca i 1 pika,*
d. *osobe A i B između sebe podijele sve pikove?*

Rješenje.

a. Osoba A 13 karti može dobiti na $\binom{52}{13}$ načina. 4 asa može dobiti na $\binom{48}{9}$ načina jer treba izabrati još 9 karti od preostalih 48. Stoga je vjerojatnost da osoba A dobije 4 asa jednaka

$$\frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj mogućih ishoda}} = \frac{\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}} = \frac{11}{4165} \approx 0.0026$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

b. Da osoba A ne bi dobila niti jednog asa, zapravo joj moramo od 48 karti (u kojima nema aseva) dati 13 karti, a to možemo na $\binom{48}{13}$ načina. Stoga je vjerojatnost da osoba A ne dobije niti jednog asa jednaka

$$\frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj mogućih ishoda}} = \frac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}} \approx 0.3038$$

c. Osoba A 5 trefova može dobiti na $\binom{13}{5}$ načina, 5 kari na $\binom{13}{5}$ načina, 2 herca na $\binom{13}{2}$ načina i jednog pika na $\binom{13}{1}$ načina, dakle sveukupno je prema principu produkta $\binom{13}{5}\binom{13}{5}\binom{13}{2}\binom{13}{1}$ načina. Stoga je vjerojatnost da osoba A dobije 5 trefa, 5 kari, 2 herca i jednog pika jednaka

$$\frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj mogućih ishoda}} = \frac{\binom{13}{5}\binom{13}{5}\binom{13}{2}\binom{13}{1}}{\binom{52}{13}} \approx 0.0026$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- Osobi A možemo 13 karti dati na $\binom{52}{13}$ načina, a osobi B zatim na $\binom{39}{13}$ načina. Dakle, na $\binom{52}{13}\binom{39}{13}$ načina možemo osobama A i B podijeliti po 13 karti. Da bi svi pikovi bili među osobama A i B, tada zapravo drugim dvjema osobama možemo podijeliti karte na $\binom{39}{13}\binom{26}{13}$ (moramo ukloniti pikove pa imamo ukupno 39 karti). Stoga je vjerojatnost da svi pikovi budu raspodijeljeni između osoba A i B jednaka

$$\frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj mogućih ishoda}} = \frac{\binom{39}{13}\binom{26}{13}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}} \approx 1.6379 \cdot 10^{-5}.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.99.

U razredu od 30 učenika 4 su odlikaša. Ako odaberemo 5 učenika, kolika je vjerojatnost da su među njima

a. *točno dva odlikaša,*
b. *barem dva odlikaša?*

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.99.

U razredu od 30 učenika 4 su odlikaša. Ako odaberemo 5 učenika, kolika je vjerojatnost da su među njima

a. *točno dva odlikaša,*

b. *barem dva odlikaša?*

Rješenje.

a. 5 učenika možemo odabrati na $\binom{30}{5}$ načina. Dva odlikaša možemo odabrati na $\binom{4}{2}$ načina, a preostala tri učenika na $\binom{26}{3}$ načina. Dakle, na $\binom{4}{2}\binom{26}{3}$ načina možemo odabrati 5 učenika od njih 30 tako da među njima bude točno dvoje odlikaša. Stoga je vjerojatnost da među odabranih 5 učenika bude točno dvoje odlikaša jednaka

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$\frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj mogućih ishoda}} = \frac{\binom{4}{2}\binom{26}{3}}{\binom{30}{5}} \approx 0.109469.$$

b. Definiramo tri događaja.

$$O_2 = \{\text{od 5 odabranih učenika dvoje je odlikaša}\}$$

$$O_3 = \{\text{od 5 odabranih učenika troje je odlikaša}\}$$

$$O_4 = \{\text{od 5 odabranih učenika četvero je odlikaša}\}$$

Nas zanima $P\big(O_2 \cup O_3 \cup O_4\big)$. Kako su događaji O_2, O_3 i O_4 međusobno disjunktni, vrijedi

$$P\big(O_2 \cup O_3 \cup O_4\big) = P(O_2) + P(O_3) + P(O_4).$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Vjerojatnost događaja O_2 smo već izračunali

$$P(O_2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{26}{3}}{\binom{30}{5}} \approx 0.109469$$

Na potpuno analogni način dobivamo da je

$$P(O_3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{26}{2}}{\binom{30}{5}} \approx 0.00912242$$

$$P(O_4) = \frac{\binom{4}{4}\binom{26}{1}}{\binom{30}{5}} \approx 0.000182448$$

Stoga je

$$P\big(O_2 \cup O_3 \cup O_4\big) \approx 0.109469 + 0.00912242 + 0.000182448$$

odnosno $P\big(O_2 \cup O_3 \cup O_4\big) \approx 0.118773868.$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.100.

Izvlačimo jednu kartu iz snopa od 52 karte. Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta dama ili pik boje?

Primjer 5.100.

Izvlačimo jednu kartu iz snopa od 52 karte. Kolika je vjerojatnost da je izvučena karta dama ili pik boje?

Rješenje.

Definiramo dva događaja

$$A = \{\text{izvučena karta je dama}\}$$

$$B = \{\text{izvučena karta je pik boje}\}$$

Nas zanima $P(A \cup B)$. Događaji A i B nisu disjunktni pa je

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Naime, $A \cap B = \{\text{izvučena je pikova dama}\}$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Nadalje, kako postoje četiri dame, slijedi da je $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

Isto tako, kako postoji 13 karti pik boje, slijedi $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

Kako postoji samo jedna pik dama, slijedi da je $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$.

Konačno je

$$P(A \cup B) = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}.$$

Primjer 5.101.

Bacamo pet jednakih igraćih kocki. Kolika je vjerojatnost da su pale barem tri šestice?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rješenje.

Definiramo tri događaja

$$A_3 = \{\text{pale su tri šestice}\}$$

$$A_4 = \{\text{pale su četiri šestice}\}$$

$$A_5 = \{\text{palo je pet šestica}\}$$

Nas zanima $P\big(A_3 \cup A_4 \cup A_5\big)$. Kako su A_3, A_4 i A_5 međusobno disjunktni događaji, slijedi

$$P\big(A_3 \cup A_4 \cup A_5\big) = P(A_3) + P(A_4) + P(A_5).$$

Uočimo da svih mogućih ishoda ima onoliko koliko ima 5-permutacija s ponavljanjem u skupu od 6 elemenata.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Naravno, pitamo se zašto nam je bitan poredak kad nam je samo bitno koliko kojih brojeva ima, a nije važno kojim su se redoslijedom oni pojavili, tj. na kojim su se kockama pojavili. Mogli smo uzeti takav model vjerojatnosnog prostora da uzmemo za elementarne događaje 5-kombinacije s ponavljanjem u skupu od 6 elemenata, ali onda ne bi vjerojatnosti svih elementarnih događaja bile jednake pa ne bismo imali klasični vjerojatnosni prostor i ne bismo mogli koristiti formulu

$$P(A) = \frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj mogućih ishoda}}$$

pa bi računanje vjerojatnosti pojedinih događaja bilo malo kompliciranije. Pogledajte primjere ◀ i ◀.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Svih ishoda ima stoga ukupno $6^5 = 7776$. Ishoda u kojima su pale točno tri šestice ima ukupno $\binom{5}{3} \cdot 5^2$. Naime, od 5 mjesta moramo izabrati tri mjesta za šestice, a to možemo na $\binom{5}{3}$ načina, a preostala dva mjesta moramo popuniti s preostalih pet znamenki s time da su dozvoljena ponavljanja. Stoga je

$$P(A_3) = \frac{\binom{5}{3} \cdot 5^2}{6^5} \approx 0.0321502.$$

Analognim zaključivanjem dobivamo

$$P(A_4) = \frac{\binom{5}{4} \cdot 5^1}{6^5} \approx 0.00321502$$

$$P(A_5) = \frac{1}{6^5} \approx 0.000128601$$

pa je $P\big(A_3 \cup A_4 \cup A_5\big) \approx 0.035493821.$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Teorem 5.15 (Sylvestrova formula).

Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ događaji na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada je

$$P\big(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\big) = \sum P(A_i) - \sum P\big(A_i \cap A_j\big) +$$

$$+ \sum P\big(A_i \cap A_j \cap A_t\big) - \cdots + (-1)^{n-1} P\big(A_1 \cap \cdots \cap A_n\big)$$

gdje je prva suma uzeta po svim $i \in \{1, \ldots, n\}$, druga suma po svim 2-kombinacijama $\{i, j\} \subset \{1, \ldots, n\}$, treća po svim 3-kombinacijama $\{i, j, t\} \subset \{1, \ldots, n\}$, itd.

Dokaz.

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po n. Za $n = 2$ imamo

$$P\big(A_1 \cup A_2\big) = P\big(A_1\big) + P\big(A_2\big) - P\big(A_1 \cap A_2\big),$$

a to smo već prije dokazali. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Koristeći da tvrdnja vrijedi za uniju dva skupa, imamo

$$P\big(A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}\big) = P\big((A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}\big) =$$

$$= P\big(A_1 \cup \cdots \cup A_n\big) + P\big(A_{n+1}\big) - P\big((A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}\big) =$$

$$= P\big(A_1 \cup \cdots \cup A_n\big) + P\big(A_{n+1}\big) -$$

$$- P\big((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})\big)$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Sada možemo iskoristiti pretpostavku indukcije na izraze

$$P\big(A_1 \cup \cdots \cup A_n\big) \quad \text{i} \quad P\big((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})\big),$$

pa dobivamo

$$P\big(A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}\big) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P\big(A_i \cap A_j\big) +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i < j < t \leqslant n} P\big(A_i \cap A_j \cap A_t\big) - \cdots + (-1)^{n-1} P\big(A_1 \cap \cdots \cap A_n\big) +$$

$$+ P\big(A_{n+1}\big) - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} P\big(A_i \cap A_{n+1}\big) +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P\big(A_i \cap A_{n+1} \cap A_j\big) - \cdots + (-1)^n P\big(A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}\big)$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Grupiramo li zajedno odgovarajuće članove, dobivamo da je

$$P\big(A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}\big) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n+1} P(A_i) -$$

$$- \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} P\big(A_i \cap A_j\big) + \sum_{1 \leqslant i < j < t \leqslant n+1} P\big(A_i \cap A_j \cap A_t\big) -$$

$$- \cdots + (-1)^n P\big(A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}\big)$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. ♡

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.102.

Bacamo četiri jednake igraće kocke. Kolika je vjerojatnost da se pojave barem dva ista broja?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.102.

Bacamo četiri jednake igraće kocke. Kolika je vjerojatnost da se pojave barem dva ista broja?

Rješenje.

Kod bacanja četiri igraće kocke imamo ukupno $6^4 = 1296$ ishoda i svi su jednako vjerojatni (to je zapravo broj svih uređenih četvorki s komponentama iz skupa $\{1, 2, \ldots, 6\}$). Za $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ definiramo događaje

$$A_i = \{\text{na barem dvije kocke se pojavio broj } i\}.$$

Nas zanima $P\left(\bigcup_{i=1}^{6} A_i\right)$. Kako događaji A_i nisu međusobno disjunktni, trebat će nam Sylvestrova formula.

Za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ događaj A_i možemo podijeliti na tri međusobno disjunktna događaja

$$A_i^{(2)} = \{\text{na točno dvije kocke se pojavio broj } i\}$$

$$A_i^{(3)} = \{\text{na točno tri kocke se pojavio broj } i\}$$

$$A_i^{(4)} = \{\text{na sve četiri kocke se pojavio broj } i\}$$

Stoga je

$$P(A_i) = P\left(A_i^{(2)}\right) + P\left(A_i^{(3)}\right) + P\left(A_i^{(4)}\right)$$

$$P(A_i) = \frac{\binom{4}{2} \cdot 5^2 + \binom{4}{3} \cdot 5 + 1}{6^4} = \frac{19}{144}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Nadalje je

$$A_i \cap A_j = \{\text{na dvije kocke se pojavio broj } i\text{, a na druge dvije broj } j\}.$$

Stoga je

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{\binom{4}{2}}{6^4} = \frac{1}{216}$$

jer moramo odabrati dva mjesta na koje ćemo staviti broj i, a za broj j nemamo što više birati, nego ga moramo staviti na preostala dva mjesta. Možemo razmišljati i na način da imamo permutacije od 4 elementa od kojih su dva elementa prve vrste i dva elementa druge vrste, a njih ima ukupno $\frac{4}{2!\cdot 2!}$, što je jednako $\binom{4}{2}$, tj. 6.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Presjeci od po tri i više različitih događaja A_i su prazni skupovi, tj. nemogući događaji pa su njihove vjerojatnosti jednake nula te ih onda ne moramo uključivati u Sylvestrovu formulu. Npr., $A_i \cap A_j \cap A_k$ znači da se na barem dvije kocke mora pojaviti broj i, na barem dvije kocke broj j i na barem dvije kocke broj k, što bi značilo da moramo bacati barem 6 kocki, a bacamo samo 4 kocke. Kako imamo ukupno $\binom{6}{2}$ događaja oblika $A_i \cap A_j$ i svi imaju istu vjerojatnost, iz Sylvestrove formule slijedi

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{6} A_i\right) = 6 \cdot \frac{19}{144} - \binom{6}{2} \cdot \frac{1}{216} = \frac{13}{18}$$

Dakle, dosta je velika vjerojatnost da će se kod bacanja 4 kocke pojaviti barem dva ista broja.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Uvjetna vjerojatnost

Zanima nas kolika je vjerojatnost nekog događaja A ako znamo da se dogodio događaj B. Na primjer, pri bacanju jedne kocke vjerojatnost da se pojavi broj 5 jednaka je $\frac{1}{6}$. Nakon bacanja sa sigurnošću znamo da li se taj događaj realizirao ili nije. Međutim, pretpostavimo da je netko pogledao kocku i rekao nam da je kocka pala na neparan broj. Očito se nakon te informacije vjerojatnost događaja "kocka je pala na broj 5" promijenila i nije više $\frac{1}{6}$, nego je jednaka $\frac{1}{3}$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Kako računamo vjerojatnost događaja A ako znamo da se dogodio događaj B? U slučaju da znamo da se dogodio događaj B, tada samo promatramo elementarne događaje koji pripadaju događaju B, tj. njega uzimamo za prostor elementarnih događaja i tražimo među njima one koji su povoljni za događaj A, odnosno tražimo povoljne elementarne događaje za $A \cap B$. Stoga ima smisla sljedeća definicija.

Uvjetna vjerojatnost

Uvjetna vjerojatnost događaja A, ako je poznato da se ostvario događaj B takav da je $P(B) > 0$, je broj $P(A \mid B)$ definiran s

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Formulu uvjetne vjerojatnosti možemo pisati i u obliku

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$$

koja se koristi kod računanja presjeka dva događaja jer se uvjetna vjerojatnost puno lakše računa od vjerojatnosti presjeka događaja. Isto tako, zamijenimo li uloge događaja A i B (ako oba imaju pozitivnu vjerojatnost), slijedi

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A)$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.103 (Bacanje igraće kocke).

$$A = \{\text{pao je broj 5}\}$$

$$B = \{\text{pao je neparan broj}\}$$

$$C = \{\text{pao je paran broj}\}$$

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \mid B) = \frac{1}{3}$$

$$P(A \mid C) = 0$$

$$P(B \mid A) = 1$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.104.

U kutiji se nalazi šest bijelih i četiri crne kuglice. Kolika je vjerojatnost da će prve dvije kuglice koje izvučemo biti bijele?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.104.

U kutiji se nalazi šest bijelih i četiri crne kuglice. Kolika je vjerojatnost da će prve dvije kuglice koje izvučemo biti bijele?

Rješenje.

1. način

Zamislimo da kuglicu izvlačimo jednu po jednu. Definiramo događaje

$$A = \{\text{prva izvučena kuglica je bijela}\}$$

$$B = \{\text{druga izvučena kuglica je bijela}\}$$

Mi tražimo $P(A \cap B)$. Koristit ćemo formulu

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A).$$

Očito je $P(A) = \frac{6}{10}$ jer bijelu kuglicu možemo izvući na 6 načina između 10 kuglica. Nakon što izvučemo bijelu kuglicu u kutiji preostane 9 kuglica od kojih je 5 bijelih. Stoga je $P(B \mid A) = \frac{5}{9}$. Konačno je

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) = \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{10} = \frac{1}{3}.$$

2. način

Dvije kuglice možemo izvući na $\binom{10}{2}$ načina, a dvije bijele na $\binom{6}{2}$ načina pa je vjerojatnost da dvije izvučene kuglice budu bijele jednaka

$$\frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Za tri događaja vrijedi

$$P\big(A \cap B \cap C\big) = P\big((A \cap B) \cap C\big) =$$
$$= P(C \mid A \cap B) P(A \cap B) =$$
$$= P(C \mid A \cap B) P(B \mid A) P(A)$$

Zbog komutativnosti presjeka skupova moguće su i druge kombinacije događaja s desne strane.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.105.

Kolika je vjerojatnost da tri na sreću odabrane karte iz snopa od 52 karte budu tref boje?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.105.

Kolika je vjerojatnost da tri na sreću odabrane karte iz snopa od 52 karte budu tref boje?

Rješenje.

1. način

Neka je A događaj da su odabrane tri karte tref boje. Tri karte od 52 možemo odabrati na $\binom{52}{3}$ načina, a tri trefa na $\binom{13}{3}$ načina pa je

$$P(A) = \frac{\binom{13}{3}}{\binom{52}{3}} \approx 0.013.$$

2. način

Za $i = 1, 2, 3$ definiramo događaje

$$A_i = \{i\text{-ta odabrana karta je tref boje}\}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Tada nas zanima $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Koristit ćemo formulu

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)P(A_2 \mid A_1)P(A_1).$$

Očito je $P(A_1) = \frac{13}{52}$. Nakon što izvučemo jednog trefa, preostane nam 51 karta među kojima je 12 tref boje pa je $P(A_2 \mid A_1) = \frac{12}{51}$. Nakon što izvučemo dva trefa, preostane na 50 karti od kojih je 11 tref boje pa je $P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = \frac{11}{50}$. Stoga je

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{11}{50} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{13}{52} \approx 0.013.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Propozicija 5.3.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor, a* $A_1, A_2, A, B \in \mathcal{F}$ *događaji i neka je* $P(B) > 0$. *Tada vrijedi:*

a. $P(\emptyset \mid B) = 0$

b. $P(A^c \mid B) = 1 - P(A \mid B)$

c. $P(A_1 \cup A_2 \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) - P(A_1 \cap A_2 \mid B)$

Dokaz.

a. $$P(\emptyset \mid B) = \frac{P(\emptyset \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$$

b. $$P(A^c \mid B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \setminus A)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A \mid B)$$

- $P(A_1 \cup A_2 \mid B) = \dfrac{P\big((A_1 \cup A_2) \cap B\big)}{P(B)} =$

$$= \frac{P\big((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)\big)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) - P(A_1 \cap A_2 \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} - \frac{P\big((A_1 \cap A_2) \cap B\big)}{P(B)} =$$

$$= P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) - P(A_1 \cap A_2 \mid B)$$

♡

Nezavisnost događaja

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.106.

U kutiji se nalazi šest bijelih i četiri crne kuglice. Izvlačimo jednu po jednu dvije kuglice. Kolika je vjerojatnost da će druga kuglica biti bijela ako je prva kuglica bila bijela? Kolika je ta vjerojatnost ako je prva kuglica bila crna? Odredite obje vjerojatnosti za sljedeće dvije situacije:

a. *prva se kuglica nakon izvlačenja ne vraća u kutiju,*
b. *prva se kuglica nakon izvlačenja vraća u kutiju.*

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rješenje.

Definiramo događaje

$$A = \{\text{prva izvučena kuglica je bijela}\}$$

$$B = \{\text{druga izvučena kuglica je bijela}\}$$

Nas zanimaju uvjetne vjerojatnosti $P(B \mid A)$ i $P(B \mid A^c)$. Očito je $P(A) = \frac{6}{10}$ i $P(A^c) = \frac{4}{10}$.

a) Nakon izvlačenja prve kuglice u kutiji imamo jednu kuglicu manje. Stoga je

$$P(B \mid A) = \frac{5}{9}, \quad P(B \mid A^c) = \frac{6}{9}.$$

- Ako kuglicu nakon izvlačenja vratimo natrag u kutiju, prije izvlačenja druge kuglice imat ćemo u kutiji identičnu situaciju kao i prije izvlačenja prve kuglice: šest bijelih i četiri crne kuglice. Bez obzira da li se ostvario događaj A ili nije vrijedi

$$P(B \mid A) = \frac{6}{10}, \quad P(B \mid A^c) = \frac{6}{10}, \quad P(B) = \frac{6}{10}.$$

Kažemo da realizacija događaja A ne utječe na vjerojatnost realizacije događaja B.

Motivirani prethodnim primjerom uvodimo sljedeću definiciju.

Nezavisni događaji

Događaji A i B su **nezavisni** ako vrijedi

$$P(A \mid B) = P(A) \quad \text{ili} \quad P(B \mid A) = P(B).$$

Nužan i dovoljan uvjet za nezavisnost je

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Općenito, događaji $A_1, A_2, \ldots, A_n$ su nezavisni akko

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n).$$

Propozicija 5.4.

Ako su A i B nezavisni događaji, tada su A^c i B^c također nezavisni događaji.

Dokaz.

Trebamo dokazati da je $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$ uz pretpostavku da je $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Stoga je

$$\begin{aligned} P(A^c)P(B^c) &= \big(1 - P(A)\big)\big(1 - P(B)\big) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = \\ &= 1 - P(A \cup B) = P\big((A \cup B)^c\big) = \\ &= P(A^c \cap B^c) \end{aligned}$$

♡

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.107.

Ako su dvije kocke pale na različite brojeve, kolika je vjerojatnost da je zbroj tih brojeva veći od 8?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.107.

Ako su dvije kocke pale na različite brojeve, kolika je vjerojatnost da je zbroj tih brojeva veći od 8?

Rješenje.

Definiramo sljedeće događaje

$$A = \{\text{suma brojeva na obje kocke je veća od } 8\}$$

$$B = \{\text{kocke su pale na različite brojeve}\}$$

Tražimo $P(A \mid B)$. Kako je

$$A \cap B = \{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5)\}$$

slijedi da je

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{8}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.108.

Ispravni novčić se baca 10 puta. Kolika je vjerojatnost da će svih 10 puta pasti pismo ako je poznato da je pismo palo prvih devet puta?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.108.

Ispravni novčić se baca 10 puta. Kolika je vjerojatnost da će svih 10 puta pasti pismo ako je poznato da je pismo palo prvih devet puta?

Rješenje.

Za $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ definiramo događaje

$$A_i = \{\text{u } i\text{-tom bacanju je palo pismo}\}.$$

Tražimo $P\left(A_{10} \mid \bigcap_{i=1}^{9} A_i\right)$. Kako su $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ međusobno nezavisni događaji, slijedi da je

$$P\left(A_{10} \mid \bigcap_{i=1}^{9} A_i\right) = P(A_{10}) = \frac{1}{2}.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.109.

Vjerojatnosti pojavljivanja triju nezavisnih događaja su $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$. *Kolika je vjerojatnost da će se ostvariti točno jedan od njih?*

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.109.

Vjerojatnosti pojavljivanja triju nezavisnih događaja su $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$. Kolika je vjerojatnost da će se ostvariti točno jedan od njih?

Rješenje.

Neka su A, B, C nezavisni događaji i $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{3}{5}$ i $P(C) = \frac{1}{2}$. Vjerojatnost da se ostvari točno jedan od njih jednaka je

$$P(A \cap B^c \cap C^c) + P(A^c \cap B \cap C^c) + P(A^c \cap B^c \cap C).$$

Kako su A, B, C nezavisni događaji, slijedi

$$P(A \cap B^c \cap C^c) + P(A^c \cap B \cap C^c) + P(A^c \cap B^c \cap C) =$$

$$= P(A)P(B^c)P(C^c) + P(A^c)P(B)P(C^c) +$$

$$+ P(A^c)P(B^c)P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

Primjer 5.110.

Strijelac gađa metu dok je ne pogodi. Vjerojatnost pogotka u svakom gađanju je 0.6. Odredite vjerojatnosni prostor. Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:

a. *meta je pogođena u trećem pokušaju,*
b. *meta je pogođena u prva tri pokušaja,*
c. *meta je pogođena nakon četvrtog pokušaja.*

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rješenje.

Za $i \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\omega_i = \{\text{meta je pogođena u } i\text{-tom pokušaju}\}.$$

Tada je

$$\Omega = \{\omega_i : i \in \mathbb{N}\}$$

pa je vjerojatnosni prostor beskonačan (ali još uvijek prebrojiv, tj. diskretan). Neka je p_n vjerojatnost elementarnog događaja ω_n. Kako su pojedini pokušaji gađanja strijelca međusobno nezavisni događaji, slijedi da je

$$p_1 = 0.6, \quad p_2 = 0.4 \cdot 0.6, \quad p_3 = 0.4^2 \cdot 0.6, \ldots$$

i općenito

$$p_n = 0.4^{n-1} \cdot 0.6, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Naime, da bi strijelac pogodio metu u n-tom pokušaju, morao ju je u prvih $n-1$ pokušaja promašiti, a vjerojatnost da promaši jednaka je 0.4. Kako su pokušaji gađanja međusobno nezavisni događaji, iz toga onda zaista slijedi da je $p_n = 0.4^{n-1} \cdot 0.6$.

a. Da bi meta bila pogođena u trećem pokušaju, morala je biti u prva dva pokušaja promašena pa je vjerojatnost da je ona pogođena u trećem pokušaju jednaka $p_3 = 0.4^2 \cdot 0.6 = 0.096$.

b. Ako je meta pogođena u prva tri pokušaja, to se onda moglo dogoditi u prvom, drugom ili trećem pokušaju pa je tražena vjerojatnost jednaka

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0.6 + 0.4 \cdot 0.6 + 0.4^2 \cdot 0.6 = 0.936.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- Ako je meta pogođena nakon četvrtog pokušaja, to znači da je u prva četiri pokušaja bila promašena pa je tražena vjerojatnost jednaka $0.4^4 = 0.0256$.

Primjer 5.111.

Ako igraću kocku bacimo tri puta zaredom, kolika je vjerojatnost da će se dobiti tri različita broja?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- Ako je meta pogođena nakon četvrtog pokušaja, to znači da je u prva četiri pokušaja bila promašena pa je tražena vjerojatnost jednaka $0.4^4 = 0.0256$.

Primjer 5.111.

Ako igraću kocku bacimo tri puta zaredom, kolika je vjerojatnost da će se dobiti tri različita broja?

Rješenje.

1. način

Ukupno imamo 6^3 mogućih ishoda, a povoljnih ima $6 \cdot 5 \cdot 4$ pa je tražena vjerojatnost jednaka

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

2. način

Promatrajmo svako bacanje posebno. Jasno je da su ta bacanja međusobno nezavisni događaji. Kod bacanja igraće kocke imamo ukupno šest različitih ishoda. Nakon prvog bacanja svi ishodi su nam povoljni, nakon drugog bacanja je pet ishoda povoljnih, a nakon trećeg bacanja su 4 ishoda povoljna, pa je tražena vjerojatnost jednaka

$$\frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{9}.$$

Možemo o tome razmišljati kao da smo za $i = 1, 2, 3$ definirali događaje $A_i = \{i\text{-to bacanje je ispravno}\}$, gdje ispravnost podrazumijeva da se u i-tom bacanju nije pojavio niti jedan od brojeva koji se pojavio u nekom od prethodnih bacanja. Tada tražimo $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.112.

Dva strijelca gađaju u istu metu. Vjerojatnosti njihovih pogodaka su 0.4 i 0.8. Kolika je vjerojatnost da će meta biti pogođena? Ako je pogođena točno jednom, kolika je vjerojatnost da ju je pogodio drugi strijelac?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.112.

Dva strijelca gađaju u istu metu. Vjerojatnosti njihovih pogodaka su 0.4 i 0.8. Kolika je vjerojatnost da će meta biti pogođena? Ako je pogođena točno jednom, kolika je vjerojatnost da ju je pogodio drugi strijelac?

Rješenje.

Definiramo sljedeće događaje

$$A = \{\text{meta je pogođena}\}$$

$$B = \{\text{prvi strijelac je pogodio metu}\}$$

$$C = \{\text{drugi strijelac je pogodio metu}\}$$

$$D = \{\text{meta je pogođena točno jednom}\}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Nas zanima $P(A)$ i $P(C \mid D)$. Nadalje, iz definicije slijedi da je $A = B \cup C$. Stoga je $A^c = B^c \cap C^c$. Jasno je da su događaji B i C nezavisni pa su onda nezavisni i događaji B^c i C^c. Stoga je

$$P(A^c) = P(B^c)P(C^c) = 0.6 \cdot 0.2 = 0.12$$

pa je

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.12 = 0.88.$$

Nadalje, iz definicije slijedi

$$D = \big(B \cap C^c\big) \cup \big(B^c \cap C\big)$$

a kako su događaji $B \cap C^c$ i $B^c \cap C$ disjunktni, vrijedi

$$P(D) = P\big(B \cap C^c\big) + P\big(B^c \cap C\big).$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Kako su B i C nezavisni događaji, konačno slijedi

$$P(D) = P(B)P(C^c) + P(B^c)P(C).$$

Stoga je

$$P(D) = 0.4 \cdot 0.2 + 0.6 \cdot 0.8 = 0.56.$$

Uočimo da je $C \cap D = B^c \cap C$ pa je

$$P(C \cap D) = P(B^c \cap C) = P(B^c)P(C) = 0.6 \cdot 0.8 = 0.48.$$

Konačno dobivamo

$$P(C \mid D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0.48}{0.56} \approx 0.857$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.113.

Bačene su dvije kocke. Označimo događaje

$$A = \{\textit{pojavila se barem jedna jedinica}\}$$

$$B = \{\textit{pojavila su se dva različita broja}\}$$

Izračunajte $P(A)$, $P(B)$ *i* $P(A \mid B)$. *Jesu li događaji* A *i* B *nezavisni?*

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.113.

Bačene su dvije kocke. Označimo događaje

$$A = \{\textit{pojavila se barem jedna jedinica}\}$$

$$B = \{\textit{pojavila su se dva različita broja}\}$$

Izračunajte $P(A)$, $P(B)$ i $P(A \mid B)$. Jesu li događaji A i B nezavisni?

Rješenje.

Kako je $P(A^c) = \frac{25}{36}$, slijedi da je

$$P(A) = 1 - P(A^c) = \frac{11}{36}.$$

Očito je $P(B) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$. Nadalje,

$$A \cap B = \left\{\text{pojavila se jedna jedinica i još jedan broj različit od 1}\right\}$$

pa je $P(A \cap B) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$. Zato je

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{18}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{3}$$

Kako je $P(A \mid B) \neq P(A)$, događaji A i B su zavisni.

Primjer 5.114.

U susretu dvije momčadi vjerojatnost pobjede momčadi A jednaka je $\frac{2}{3}$. Ako se igraju četiri igre, kolika je vjerojatnost da će A pobijediti u

a. *točno dvije,*
b. *barem jednoj,*
c. *više od dvije igre?*

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.114.

U susretu dvije momčadi vjerojatnost pobjede momčadi A jednaka je $\frac{2}{3}$. Ako se igraju četiri igre, kolika je vjerojatnost da će A pobijediti u

a. *točno dvije,*
b. *barem jednoj,*
c. *više od dvije igre?*

Rješenje.

a. Ako momčad A mora pobijediti u točno dvije igre, onda u točno dvije mora i izgubiti. U koje dvije od četiri igre će pobijediti možemo odabrati na $\binom{4}{2}$ načina, a kako su sve igre međusobno nezavisni događaji, slijedi da je tražena vjerojatnost jednaka $\binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

- b Računamo vjerojatnost suprotnog događaja, tj. vjerojatnost da momčad A izgubi u sve četiri igre. Ta vjerojatnost je jednaka $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$. Stoga je vjerojatnost da momčad A pobijedi u barem jednoj igri jednaka $1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81}$.
- c Ako momčad A mora pobijediti u više od dvije igre, onda mora pobijediti u tri igre ili u sve četiri igre. Stoga je tražena vjerojatnost jednaka

$$\binom{4}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{32}{81} + \frac{16}{81} = \frac{48}{81} = \frac{16}{27}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.115.

Na nekom fakultetu ispit iz matematike nije položilo $25\,\%$ studenata, ispit iz informatike $15\,\%$, a $10\,\%$ nije uspjelo niti na ispitu iz matematike, niti na ispitu iz informatike.

a. *Kolika je vjerojatnost da je netko pao matematiku ako je pao na ispitu iz informatike?*

b. *Kolika je vjerojatnost da je netko pao informatiku ako je pao na ispitu iz matematike?*

c. *Kolika je vjerojatnost da je netko pao na ispitu iz matematike ili na ispitu iz informatike?*

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Rješenje.

Definiramo sljedeće događaje

$$M = \{\text{student je pao matematiku}\}$$

$$I = \{\text{student je pao informatiku}\}$$

Tada iz uvjeta zadatka slijedi da je

$$P(M) = 0.25, \quad P(I) = 0.15, \quad P(M \cap I) = 0.1$$

a. $P(M \mid I) = \dfrac{P(M \cap I)}{P(I)} = \dfrac{0.1}{0.15} = \dfrac{2}{3}$

b. $P(I \mid M) = \dfrac{P(M \cap I)}{P(M)} = \dfrac{0.1}{0.25} = \dfrac{2}{5}$

c. $P(M \cup I) = P(M) + P(I) - P(M \cap I) = \dfrac{3}{10}$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

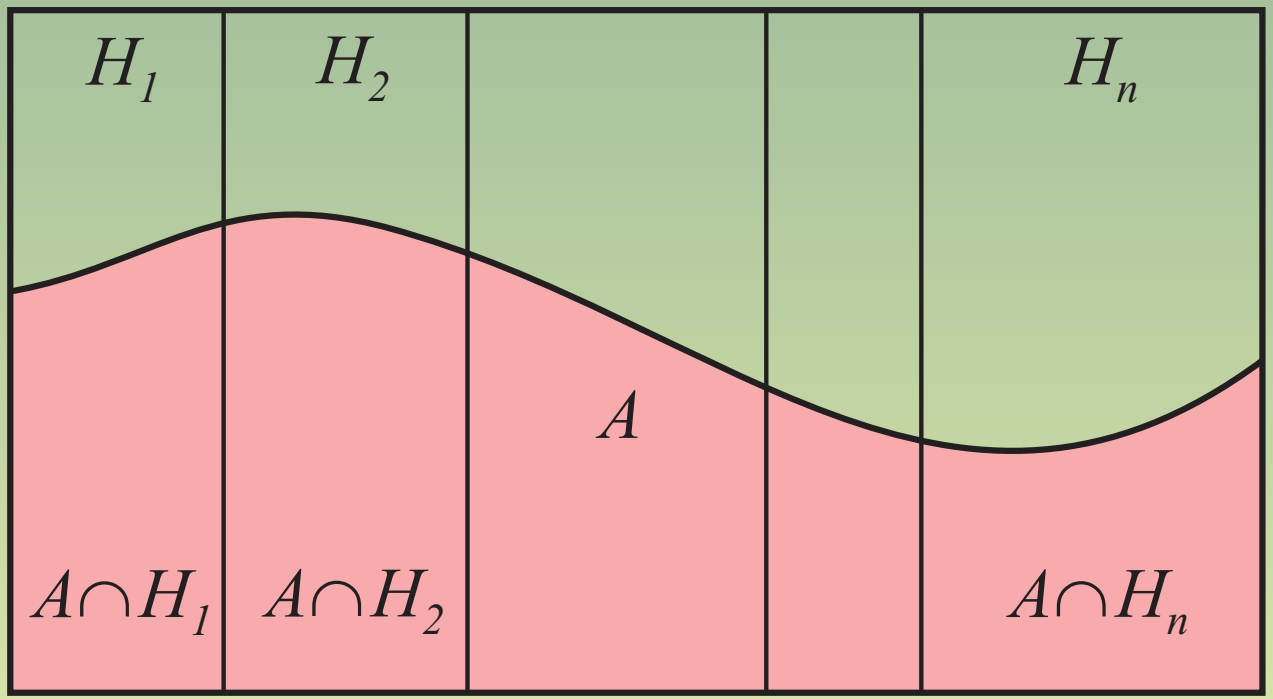
Bayesova formula

Pretpostavimo da skup elementarnih događaja možemo rastaviti na n međusobno disjunktnih događaja

$$\Omega = H_1 \uplus H_2 \uplus \cdots \uplus H_n$$

pri čemu je $P(H_i) > 0$ za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ovakav rastav zovemo **particija vjerojatnosnog prostora**. Kažemo još da familija $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ čini **potpun sustav događaja**.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula



Bilo koji događaj A je familijom $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ razbijen na međusobno disjunktne događaje

$$A = (A \cap H_1) \uplus (A \cap H_2) \uplus \cdots \uplus (A \cap H_n).$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Teorem 5.16 (Formula potpune vjerojatnosti).

Neka je $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ *potpun sustav događaja u vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Tada za svaki događaj* $A \in \mathcal{F}$ *vrijedi*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A \mid H_i).$$

Dokaz.

Neka je $A \in \mathcal{F}$ proizvoljni događaj. Tada je

$$A = (A \cap H_1) \uplus (A \cap H_2) \uplus \cdots \uplus (A \cap H_n),$$

pa je

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \cdots + P(A \cap H_n). \quad (\star)$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Iz definicije uvjetne vjerojatnosti slijedi da je

$$P(A \cap H_i) = P(H_i)P(A \mid H_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

pa uvrstimo li to u $(\star)$ dobivamo

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i).$$



Teorem 5.17 (Bayesova formula).

Neka je $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ *potpun sustav događaja u vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Tada za svaki događaj* $A \in \mathcal{F}$ *za koji je* $P(A) > 0$ *vrijedi*

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A \mid H_j)}$$

Dokaz.

Iz definicije uvjetne vjerojatnosti slijedi da je

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)}. \tag{1}$$

Nadalje,

$$P(H_i \cap A) = P(A \cap H_i) = P(H_i)P(A \mid H_i), \tag{2}$$

a prema prethodnom teoremu je

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A \mid H_j). \tag{3}$$

Uvrstimo li (2) i (3) u (1), dobivamo

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A \mid H_j)}.$$



Napomena.

Korisno je događaje $H_1, H_2, \ldots, H_n$ zvati **hipotezama**, što će postati jasno kroz primjere. Tijekom realizacije nekog slučajnog pokusa ostvaruje se točno jedna hipoteza.

Bayesovu formulu koristimo pri računanju **aposteriornih vjerojatnosti** pojedinih hipoteza. Naime, prije početka slučajnog pokusa svaka hipoteza ima svoju vjerojatnost realizacije $P(H_i)$. Nakon realizacije pokusa, ako znamo koji se elementarni događaj ostvario, tada nestaje neizvjesnost jer se ostvarila samo jedna od mogućih hipoteza $H_1, \ldots, H_n$, dok za ostale znamo sa sigurnošću da se nisu ostvarile.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

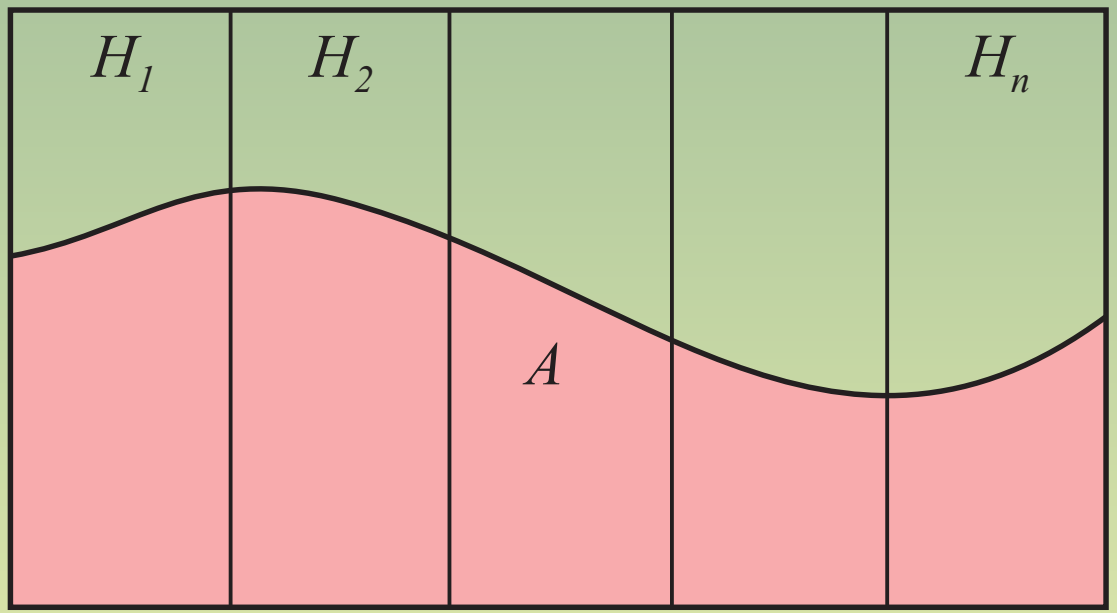
Pretpostavimo međutim da nam nije poznato koji se elementarni događaj ostvario, već umjesto toga znamo da se ostvario neki događaj A. U tom slučaju ne znamo koja je od hipoteza $H_1, \ldots, H_n$ nastupila, ali dodatna informacija o realizaciji događaja A mijenja **apriorne vjerojatnosti** pojedinih hipoteza. Pomoću Bayesove formule računamo uvjetne vjerojatnosti

$$P(H_1 \mid A), \ldots, P(H_n \mid A)$$

koje nazivamo **aposteriornim vjerojatnostima** pojedinih hipoteza.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula



Na slici je prikazana situacija kada su apriorne vjerojatnosti svih hipoteza jednake. Nakon realizacije događaja A vjerojatnosti pojedinih hipoteza se mijenjaju.

Primjer 5.116.

U prvoj se kutiji nalaze četiri bijele i dvije crne kuglice, u drugoj tri bijele i dvije crne. Iz prve kutije prebacimo u drugu jednu slučajno odabranu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da nakon toga na sreću odabrana kuglica iz druge kutije bude bijela?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.116.

U prvoj se kutiji nalaze četiri bijele i dvije crne kuglice, u drugoj tri bijele i dvije crne. Iz prve kutije prebacimo u drugu jednu slučajno odabranu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da nakon toga na sreću odabrana kuglica iz druge kutije bude bijela?

Rješenje.

Neka je A događaj da je izvučena kuglica iz druge kutije bijela nakon što smo iz prve kutije u drugu premjestili jednu slučajno odabranu kuglicu. Definiramo hipoteze

$$H_1 = \{\text{iz prve kutije u drugu je prebačena bijela kuglica}\}$$

$$H_2 = \{\text{iz prve kutije u drugu je prebačena crna kuglica}\}$$

Kako u prvoj kutiji imamo 4 bijele i 2 crne kuglice, vjerojatnosti pojedinih hipoteza su

$$P(H_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad P(H_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Pojedine uvjetne vjerojatnosti su

$$P(A \mid H_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad P(A \mid H_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Prema formuli potpune vjerojatnosti je

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2)$$

$$P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$P(A) = \frac{11}{18}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.117.

U dva snopa karata nalaze se po 52 karte, sa po 4 asa. Iz jednog snopa izvučemo jednu kartu, a iz drugog dvije. Zatim tri izvučene karte promiješamo i otkrijemo jednu. Kolika je vjerojatnost da je ta karta as?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.117.

U dva snopa karata nalaze se po 52 karte, sa po 4 asa. Iz jednog snopa izvučemo jednu kartu, a iz drugog dvije. Zatim tri izvučene karte promiješamo i otkrijemo jednu. Kolika je vjerojatnost da je ta karta as?

Rješenje.

Neka je A događaj da je otkrivena karta as. Definiramo hipoteze

$$H_1 = \{\text{otkrivena karta pripada prvom snopu}\}$$

$$H_2 = \{\text{otkrivena karta pripada drugom snopu}\}$$

Kako od tri izvučene karte jedna pripada prvom snopu, a dvije drugom slijedi da je

$$P(H_1) = \frac{1}{3}, \quad P(H_2) = \frac{2}{3}.$$

Nadalje, pojedine uvjetne vjerojatnosti su

$$P(A \mid H_1) = P(A) = \frac{4}{52}, \quad P(A \mid H_2) = P(A) = \frac{4}{52}$$

jer su A i H_1, odnosno A i H_2 međusobno nezavisni. Iz formule potpune vjerojatnosti slijedi

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2)$$

$$P(A) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{4}{52} + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{52}$$

$$P(A) = \tfrac{1}{13}$$

Uočimo da je vjerojatnost jednaka vjerojatnosti da iz jednog snopa od 52 karte izvučena karta bude as.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.118.

Dva igrača bacaju kocku. Ako je prvi dobio veći broj, kolika je vjerojatnost da je taj broj jednak 6?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.118.

Dva igrača bacaju kocku. Ako je prvi dobio veći broj, kolika je vjerojatnost da je taj broj jednak 6?

Rješenje.

Neka je $A = \{\text{prvi igrač je dobio veći broj}\}$.

Za $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ definiramo hipoteze

$$H_i = \{\text{prvi igrač je dobio broj } i\}.$$

Kako nemamo nekog razloga da je neka od gornjih hipoteza vjerojatnija od druge, stavljamo da svih 6 hipoteza imaju jednaku vjerojatnost da se dogode, tj.

$$P(H_i) = \frac{1}{6}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, 6\}.$$

Nas zanima $P(H_6 \mid A)$.

Pojedine uvjetne vjerojatnosti su

$$P(A \mid H_1) = 0, \quad P(A \mid H_2) = \tfrac{1}{6}, \quad P(A \mid H_3) = \tfrac{1}{3}$$
$$P(A \mid H_4) = \tfrac{1}{2}, \quad P(A \mid H_5) = \tfrac{2}{3}, \quad P(A \mid H_6) = \tfrac{5}{6}$$

Iz formule potpune vjerojatnosti slijedi

$$P(A) = \sum_{j=1}^{6} P(H_j)P(A \mid H_j) = \frac{5}{12}.$$

Prema Bayesovoj formuli je tada

$$P(H_6 \mid A) = \frac{P(H_6)P(A \mid H_6)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{3}.$$

Dakle, u slučaju da znamo da se dogodio događaj A, raste vjerojatnost da se ostvarila hipoteza H_6.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.119.

U jednoj velikoj seriji $96\,\%$ proizvoda zadovoljava tehničke uvjete propisane standardom. Proizvodi se podvrgavaju kontroli koja proglašava proizvod dobrim uz vjerojatnost 0.98 ako je on stvarno dobar, a uz vjerojatnost 0.05 ako je on stvarno loš. Kolika je vjerojatnost da je proizvod stvarno dobar ako ga je kontrola proglasila dobrim? Kolika je vjerojatnost da je proizvod stvarno dobar ako ga je kontrola proglasila lošim?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.119.

U jednoj velikoj seriji $96\,\%$ proizvoda zadovoljava tehničke uvjete propisane standardom. Proizvodi se podvrgavaju kontroli koja proglašava proizvod dobrim uz vjerojatnost 0.98 ako je on stvarno dobar, a uz vjerojatnost 0.05 ako je on stvarno loš. Kolika je vjerojatnost da je proizvod stvarno dobar ako ga je kontrola proglasila dobrim? Kolika je vjerojatnost da je proizvod stvarno dobar ako ga je kontrola proglasila lošim?

Rješenje.

Definiramo hipoteze

$$H_1 = \{\text{odabrani proizvod je dobar}\}$$

$$H_2 = \{\text{odabrani proizvod je lošš}\}$$

Iz uvjeta zadatka je $P(H_1) = 0.96$, $P(H_2) = 0.04$.
Nadalje, definiramo događaj

$$A = \{\text{kontrola je proglasila proizvod dobrim}\}.$$

Nas zanima $P(H_1 \mid A)$ i $P(H_1 \mid A^c)$. Iz uvjeta zadatka slijedi da je

$$P(A \mid H_1) = 0.98, \quad P(A \mid H_2) = 0.05.$$

Iz formule potpune vjerojatnosti slijedi da je

$$P(A) = \sum_{j=1}^{2} P(H_j)P(A \mid H_j) = 0.9428.$$

Prema Bayesovoj formuli je

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{0.96 \cdot 0.98}{0.9428} = 0.997879.$$

Dakle, ako je kontrola proglasila proizvod dobrim, gotovo sigurno je da je on zaista dobar.

Nadalje, iz svojstava uvjetne vjerojatnosti slijedi da je

$$P(A^c \mid H_1) = 1 - P(A \mid H_1) = 1 - 0.98 = 0.02$$

Isto tako,

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0.9428 = 0.0572$$

pa opet iz Bayesove formule slijedi

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

$$P(H_1 \mid A^c) = \frac{P(H_1)P(A^c \mid H_1)}{P(A^c)} = \frac{0.96 \cdot 0.02}{0.0572} = 0.335664.$$

Dakle, ako je kontrola proglasila proizvod lošim, vjerojatnost da je on dobar je 0.34, što i nije tako mala vjerojatnost s obzirom na situaciju, pa ipak u tom slučaju moramo s nekom "rezervom" uzeti procjenu kontrole jer ipak je u $34\,\%$ slučajeva proizvod vjerojatno dobar, iako ga je kontrola proglasila lošim.

Pogledajmo još, iako se to ne traži, koliko je $P(H_2 \mid A)$. Naime, pitamo se kolika je vjerojatnost da je proizvod zaista loš ako ga je kontrola proglasila dobrim. Iz Bayesove formule bismo dobili da je vjerojatnost jednaka 0.0021. Dakle, od 1000 proizvoda koje je kontrola proglasila dobrim, moguće je da su otprilike dva proizvoda ipak loša. Zamislite da ste kupili npr. padobran i prirodno je pitati se prije nego krenete s njim skakati, da li možda nije to jedan od ta dva "navodno ispravna" padobrana. Jeste li ikad o tome razmišljali?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.120.

U devet od deset jednakih pregrada nalaze se po 2 crne i 2 bijele kuglice, a u desetoj pregradi je 5 bijelih i jedna crna kuglica. Izvučena je bijela kuglica. Kolika je vjerojatnost da je ona izvučena iz desete pregrade?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.120.

U devet od deset jednakih pregrada nalaze se po 2 crne i 2 bijele kuglice, a u desetoj pregradi je 5 bijelih i jedna crna kuglica. Izvučena je bijela kuglica. Kolika je vjerojatnost da je ona izvučena iz desete pregrade?

Rješenje.

Za $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ definiramo hipoteze

$$H_i = \{\text{odabrana je kuglica iz } i\text{-te pregrade}\}.$$

Neka je

$$A = \{\text{izvučena je bijela kuglica}\}.$$

Nas zanima $P(H_{10} \mid A)$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Kako su sve hipoteze jednako vjerojatne (nemamo razloga neku više preferirati), slijedi

$$P(H_i) = \frac{1}{10}, \quad i = 1, 2, \ldots, 10.$$

Pojedine uvjetne vjerojatnosti jednake su

$$P(A \mid H_i) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, 9$$

dok je $P(A \mid H_{10}) = \frac{5}{6}$. Iz formule potpune vjerojatnosti slijedi da je

$$P(A) = \sum_{j=1}^{10} P(H_j) P(A \mid H_j) = \frac{8}{15}.$$

Iz Bayesove formule tada slijedi

$$P(H_{10} \mid A) = \frac{P(H_{10})P(A \mid H_{10})}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6}}{\frac{8}{15}} = \frac{5}{32}$$

Dakle, vjerojatnost da je izvučena bijela kuglica pripadala desetoj pregradi je $\frac{5}{32}$.

Primjer 5.121.

U skupini od 10 strijelaca nalaze se 4 izvrsna i 6 dobrih. Vjerojatnost pogotka za izvrsne strijelce je 0.9, a za dobre 0.7. Iz grupe na sreću odabiremo dva strijelca koji gađaju u metu jedanput. Kolika je vjerojatnost da će oba strijelca pogoditi metu?

Rješenje.

Definiramo hipoteze

$$H_i = \{\text{odabranao je } i \text{ izvrsnih strijelaca}\} \quad i = 0, 1, 2.$$

Tada je

$$P(H_0) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(H_1) = \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{8}{15}$$

$$P(H_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{15}$$

Neka je $A = \{\text{meta je pogođena dvaput}\}$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Nas zanima $P(A)$. Iz uvjeta zadatka slijedi da je

$$P(A \mid H_0) = 0.7^2, \quad P(A \mid H_1) = 0.9 \cdot 0.7, \quad P(A \mid H_2) = 0.9^2.$$

Iz formule potpune vjerojatnosti tada slijedi

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{j=0}^{2} P(H_j) P(A \mid H_j) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 0.7^2 + \frac{8}{15} \cdot 0.9 \cdot 0.7 + \frac{2}{15} \cdot 0.9^2 \\ &= 0.607 \end{aligned}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.122.

U posudi se nalazi pet kuglica bijele ili crne boje. Sve su pretpostavke o broju bijelih kuglica jednako vjerojatne. U tri izvlačenja izvukli smo kuglice bijele boje (kuglica se nakon izvlačenja vraća u posudu). Izračunajte vjerojatnost da su u posudi sve kuglice bijele boje.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.122.

U posudi se nalazi pet kuglica bijele ili crne boje. Sve su pretpostavke o broju bijelih kuglica jednako vjerojatne. U tri izvlačenja izvukli smo kuglice bijele boje (kuglica se nakon izvlačenja vraća u posudu). Izračunajte vjerojatnost da su u posudi sve kuglice bijele boje.

Rješenje.

Za $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ definiramo hipoteze

$$H_i = \{\text{u posudi je } i \text{ kuglica bijele boje}\}.$$

Kako su sve hipoteze jednako vjerojatne, tada je $P(H_i) = \frac{1}{6}$ za svaki $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Neka je

$$A = \{\text{u tri izvlačenja su izvučene bijele kuglice}\}.$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Nas zanima $P(H_5 \mid A)$. Nadalje, pojedine uvjetne vjerojatnosti su jednake

$$P(A \mid H_0) = 0, \quad P(A \mid H_1) = \left(\tfrac{1}{5}\right)^3, \quad P(A \mid H_2) = \left(\tfrac{2}{5}\right)^3$$

$$P(A \mid H_3) = \left(\tfrac{3}{5}\right)^3, \quad P(A \mid H_4) = \left(\tfrac{4}{5}\right)^3, \quad P(A \mid H_5) = 1$$

Iz Bayesove formule tada slijedi

$$P(H_5 \mid A) = \frac{P(H_5)P(A \mid H_5)}{\sum_{j=0}^{5} P(H_j)P(A \mid H_j)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \cdot 1}{\frac{1}{6}\left((\frac{1}{5})^3 + (\frac{2}{5})^3 + (\frac{3}{5})^3 + (\frac{4}{5})^3 + 1\right)} =$$

$$= 0.556$$

Primjer 5.123.

U kutiji se nalazi 5 kuglica, od kojih svaka može biti crvena ili plava s jednakom vjerojatnošću. Na sreću izabrana kuglica iz kutije je imala crvenu boju. Koji je najvjerojatniji broj plavih kuglica u kutiji?

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Primjer 5.123.

U kutiji se nalazi 5 kuglica, od kojih svaka može biti crvena ili plava s jednakom vjerojatnošću. Na sreću izabrana kuglica iz kutije je imala crvenu boju. Koji je najvjerojatniji broj plavih kuglica u kutiji?

Rješenje.

Razmišljamo li intuitivno, rekli bismo da ih je pola-pola, odnosno kako je izvučena crvena kuglica, intuitivni odgovor bi bio da u kutiji imamo najvjerojatnije dvije plave i tri crvene kuglice. Pogledajmo da li će nam i stroga matematička teorija dati takav odgovor. Pokazat ćemo dva načina razmišljanja. Jedan od njih nam neće potvrditi gornje razmatranje, a drugi hoće.

Za $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$ definiramo hipoteze

$$H_i = \{\text{u posudi je } i \text{ kuglica plave boje}\},$$

te neka je još

$$A = \{\text{izvučena je kuglica crvene boje}\}.$$

Pojedine uvjetne vjerojatnosti su jednake

$$P(A \mid H_0) = 1, \quad P(A \mid H_1) = \tfrac{4}{5}, \quad P(A \mid H_2) = \tfrac{3}{5}$$

$$P(A \mid H_3) = \tfrac{2}{5}, \quad P(A \mid H_4) = \tfrac{1}{5}, \quad P(A \mid H_5) = 0$$

Nas zanimaju $P(H_i \mid A)$ za $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$ i najveći od tih brojeva će onda dati najvjerojatniji broj plavih i crvenih kuglica u kutiji.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Jedino čime mi možemo utjecati na brojeve $P(H_i \mid A)$ su načini na koje ćemo početnim hipotezama H_i pridružiti njihove vjerojatnosti da se one ostvare.

1. način razmišljanja je sljedeći. Kako ne znamo koliko ima kojih kuglica u kutiji, pretpostavljamo da svaka hipoteza ima jednaku vjerojatnost da se ostvari. Stoga stavljamo da je

$$P(H_i) = \frac{1}{6}, \quad i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Tada iz Bayesove formule dobivamo

$$P(H_0 \mid A) = \tfrac{1}{3}, \quad P(H_1 \mid A) = \tfrac{4}{15}, \quad P(H_2 \mid A) = \tfrac{1}{5}$$

$$P(H_3 \mid A) = \tfrac{2}{15}, \quad P(H_4 \mid A) = \tfrac{1}{15}, \quad P(H_5 \mid A) = 0$$

Uočavamo da je $P(H_0 \mid A)$ najveći od tih brojeva, pa zaključujemo, nakon što je izvučena crvena kuglica iz kutije, da su u kutiji najvjerojatnije sve kuglice crvene boje, tj. da u kutiji nema niti jedne plave kuglice. Pomalo nelogičan zaključak. Pa koja će osoba nakon što je izvučena jedna kuglica crvene boje iz kutije, tvrditi da su u kutiji najvjerojatnije sve kuglice crvene boje? Pa teško da postoji takva osoba. No, da li to znači da matematička teorija ovdje "pada u vodu"? Naravno da ne.



Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

U čemu je onda problem? Zašto teorija nije potvrdila našu intuiciju? Problem je u tome što smo pretpostavili da su sve hipoteze jednako moguće. Zašto to ne opisuje dobro realnu situaciju, iako nam se činilo da je to kao najrealnije s obzirom da ne znamo ništa o broju kuglica u kutiji (osim da smo izvukli jednu crvenu kuglicu)? Pa u stvarnom životu uvijek pretpostavljamo da su one ekstremne situacije najmanje vjerojatne, a da su najvjerojatnije nekako "one u sredini". Stoga, da u kutiji ima nula plavih ili da su sve kuglice plave je manje vjerojatno od toga da imamo otprilike podjednak broj plavih i crvenih kuglica u kutiji. Svi ćemo se s time u velikoj mjeri i složiti.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Stoga je **2. način razmišljanja** sljedeći. Kolika je vjerojatnost da u kutiji imamo 0 kuglica plave boje? Razmišljamo ovako. Da smo punili kutiju sa plavim i crvenim kuglicama prirodno je pretpostaviti da je jednaka vjerojatnost da izaberemo plavu ili crvenu kuglicu, tj. vjerojatnost je jednaka $\frac{1}{2}$. Da bi u kutiji bilo nula plavih kuglica u svakom od pet punjenja smo trebali izabrati crvenu kuglicu, a vjerojatnost da ju izaberemo je $\frac{1}{2}$. Kako su ta biranja nezavisni događaji stavljamo da je $P(H_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^5$. Dalje, kolika je vjerojatnost da je u kutiji jedna plava kuglica? Da smo punili kutiju, u jednom od punjenja smo morali izabrati plavu kuglicu, a u preostala četiri crvenu kuglicu. Međutim, plavu kuglicu smo mogli izabrati u jednom od bilo kojih pet punjenja, dakle na $\binom{5}{1}$ načina, pa je $P(H_1) = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Slično zaključivanje vrijedi i za preostale hipoteze pa dobivamo

$$P(H_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$P(H_1) = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$$

$$P(H_2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

$$P(H_3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$$

$$P(H_4) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}$$

$$P(H_5) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

U ovom slučaju iz Bayesove formule dobivamo

$$P(H_0 \mid A) = \frac{1}{16}, \quad P(H_1 \mid A) = \frac{1}{4}, \quad P(H_2 \mid A) = \frac{3}{8}$$

$$P(H_3 \mid A) = \frac{1}{4}, \quad P(H_4 \mid A) = \frac{1}{16}, \quad P(H_5 \mid A) = 0$$

pa vidimo da u ovom slučaju $P(H_2 \mid A)$ ima najveću vrijednost, odnosno nakon što je izvučena iz kutije crvena kuglica, zaključujemo da su u kutiji najvjerojatnije 2 plave i 3 crvene kuglice, a ovo potvrđuje naše intuitivno razmišljanje. Stoga imamo razloga za veselje.



Osnove kombinatorike i vjerojatnosti
Uvod
Principi prebrojavanja
Permut. i kombinac.
FUI
Deranžmani
Rekurzivne relacije
Nelinearne rekurzije
Primjene rekurzija
Funkcije izvodnice
Diskretna vjerojatnost
Uspoređivanje događaja
Definicija vjerojatnosti
Klasični vjerojatnosni prostor
Uvjetna vjerojatnost
Nezavisnost događaja
Bayesova formula

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Dio VI

Osnovni pojmovi iz teorije grafova

Sadržaj

- Osnovni pojmovi iz teorije grafova
  - Osnovne definicije
  - Riješeni primjeri
  - Komplementarni graf
  - Linijski graf
  - Izomorfizam grafova
  - Podgrafovi
  - Matrica susjedstva i matrica incidencije
  - Matrica permutacije
  - Matrice i podgrafovi

Osnovni pojmovi iz teorije grafova

Osnovne definicije

Riješeni primjeri

Komplementarni graf

Linijski graf

Izomorfizam grafova

Podgrafovi

Matrice i grafovi

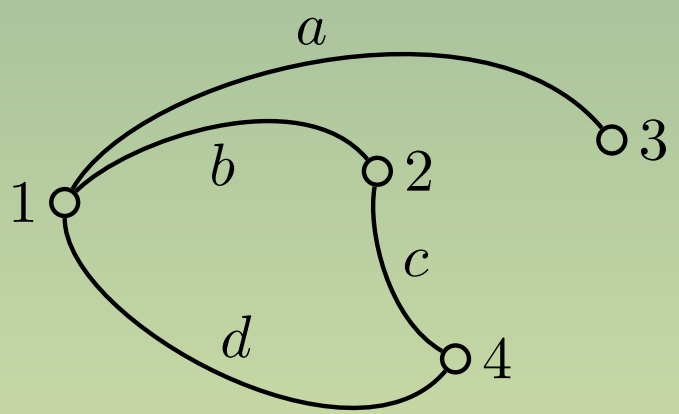
Matrica permutacije

Matrice i podgrafovi

Osnovne definicije

(Neusmjereni) graf G je uređeni par $G = (V, E)$, gdje je $V = V(G) \neq \emptyset$ skup **vrhova**, a $E = E(G)$ skup **bridova** pri čemu je $E \cap V = \emptyset$, a svaki brid $e \in E$ spaja dva vrha $u, v \in V$ koji se zovu krajevi brida e. Kažemo još da su vrhovi u i v **incidentni** s bridom e, odnosno da su vrhovi u i v **susjedni** i pišemo $u \underset{e}{\sim} v$ ili $e = uv$, ili pak $e = \{u, v\}$. Analogno, bridove s barem jednim zajedničkim krajem također zovemo incidentnima.

Graf G je **konačan** ako su V i E konačni skupovi, u protivnom je beskonačan. Ovdje ćemo se baviti samo konačnim grafovima.



$$V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$E(G) = \big\{\{1, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\big\}$$

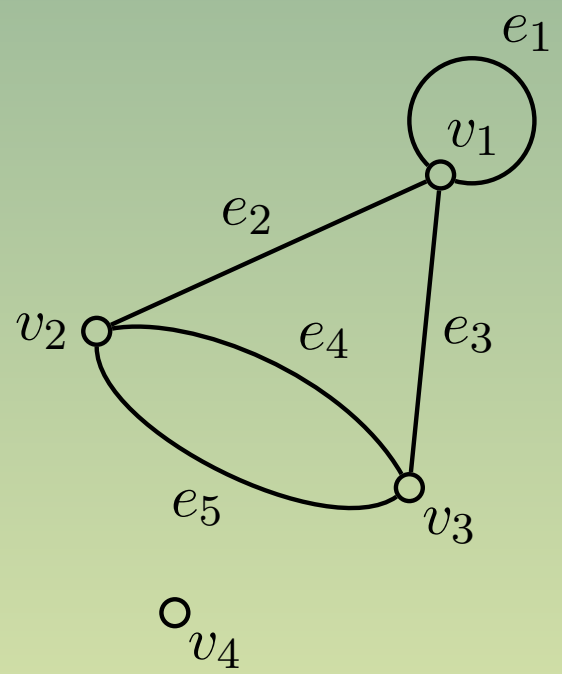
$$a = \{1, 3\}, \quad b = \{1, 2\}, \quad c = \{2, 4\}, \quad d = \{1, 4\}$$

Petlja je brid koji je incidentan samo s jednim vrhom.

Graf G je **jednostavan** ako nema petlji i ako ne postoje dva brida koji spajaju isti par vrhova.

Pseudograf je graf koji može sadržavati petlje i višestruke bridove.

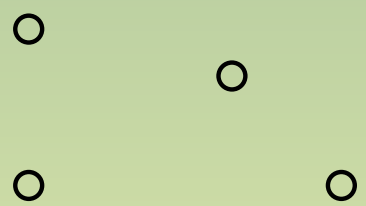
Graf G je **planarni (ravninski)** ako se grafički može predočiti u ravnini tako da se bridovi sijeku samo u vrhovima.



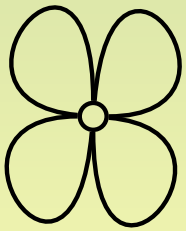
- Graf nije jednostavan. To je pseudograf.
- Graf sadrži jednu petlju e_1.
- Vrh v_4 nije incidentan s niti jednim vrhom i niti jednim bridom.
- Graf je planarni.

Graf $G = (V, E)$ zovemo **nulgraf** ili **prazan graf** ako je $E = \emptyset$, tj. ako nema niti jednog brida. Graf G je **trivijalan** ako je $k(V) = 1$, tj. ako ima samo jedan vrh.

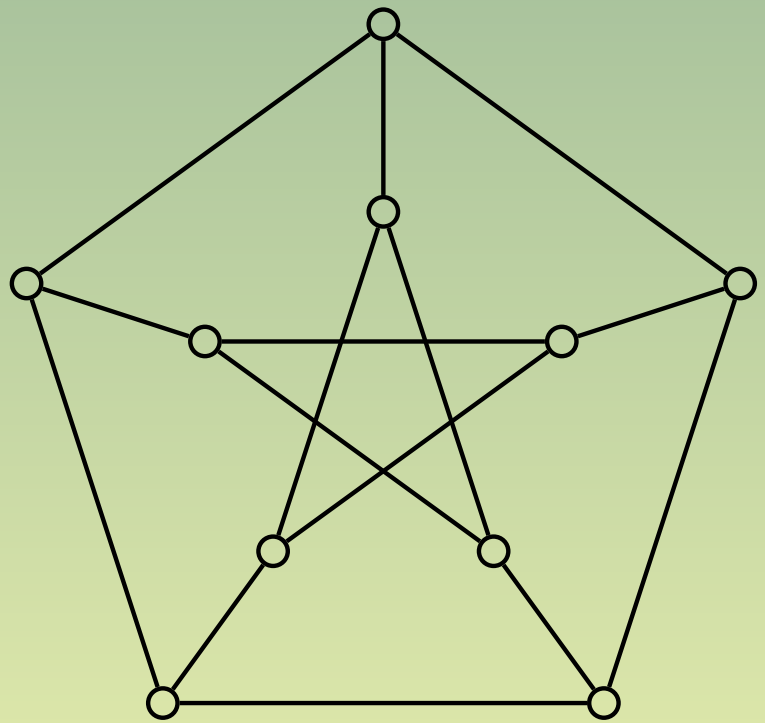
Prazan graf



Trivijalni graf ("bouqet")

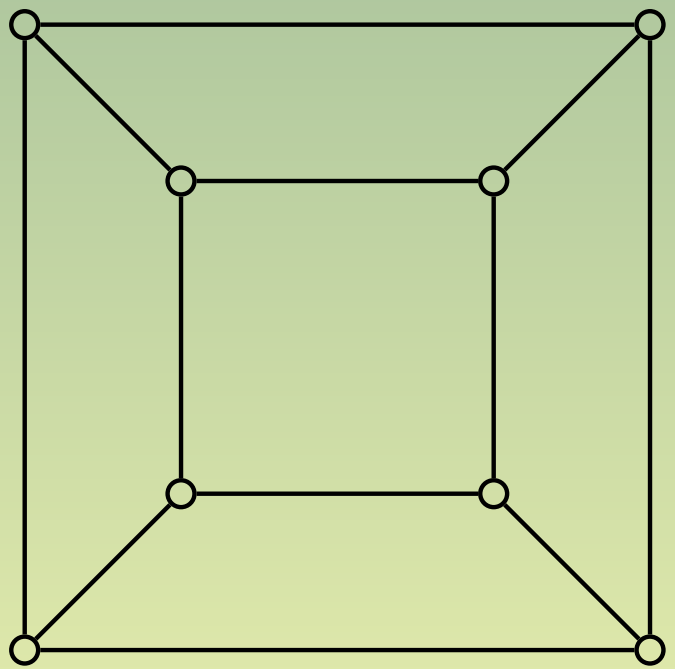


Petersenov graf



- Petersonov graf je jednostavni graf.
- Pokazuje se da Petersonov graf nije planarni, tj. nemoguće ga je prikazati u ravnini tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima.

Kubni graf



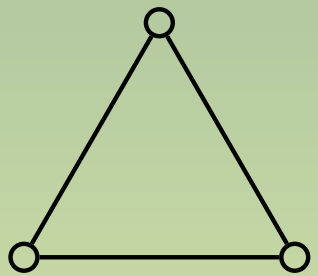
- Kubni graf je jednostavni graf.
- Kubni graf je planarni graf.

Potpuni graf je jednostavni graf u kojemu su svaka dva vrha incidentna.

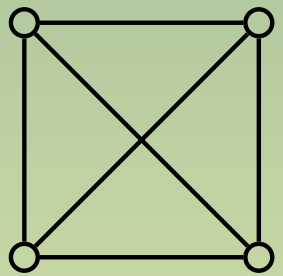
Potpuni graf s n vrhova označavamo s K_n.



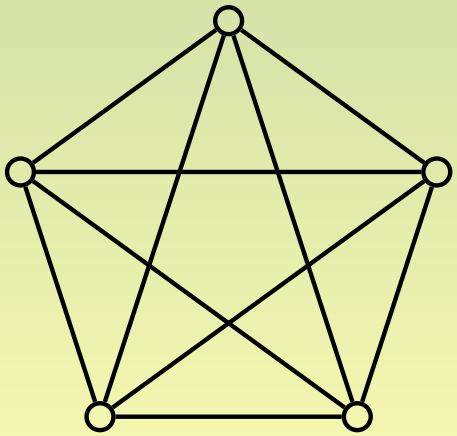
K_2



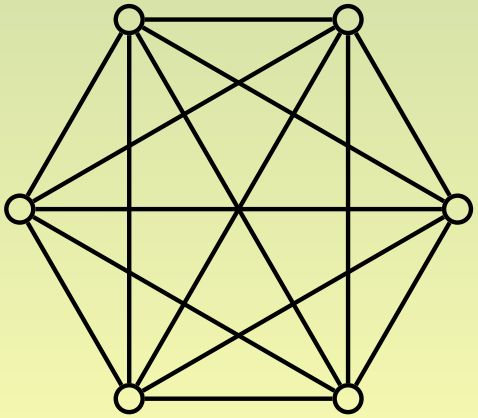
K_3



K_4

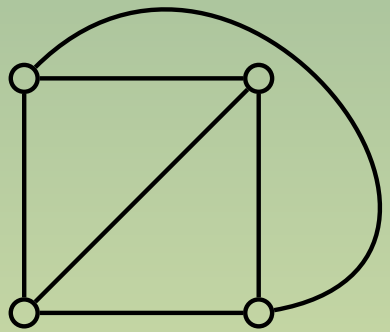


K_5

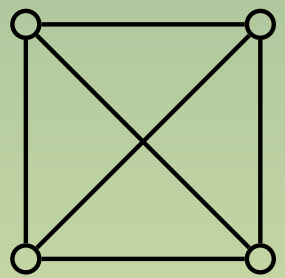


K_6

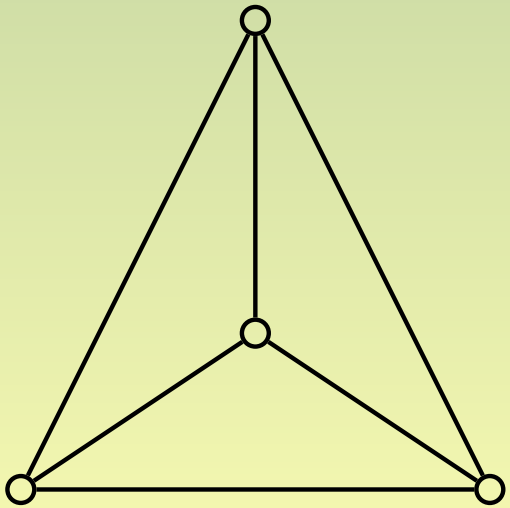
- K_n je planarni graf za $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.
- K_n nije planarni graf za $n \geqslant 5$.



K_4



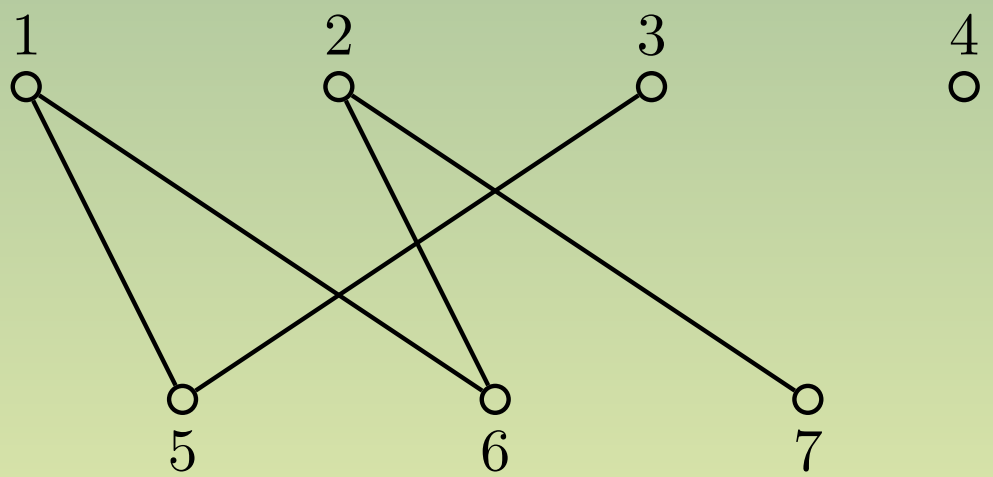
K_4



K_4

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Bipartitni graf je graf za čiji skup vrhova postoji particija $V = \{X, Y\}$ tako da svaki brid ima jedan kraj u X, a drugi u Y.

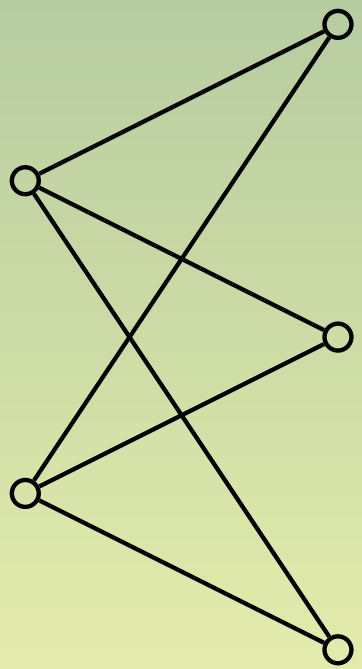


$$X = \{1, 2, 3, 4\}, \quad Y = \{5, 6, 7\}$$

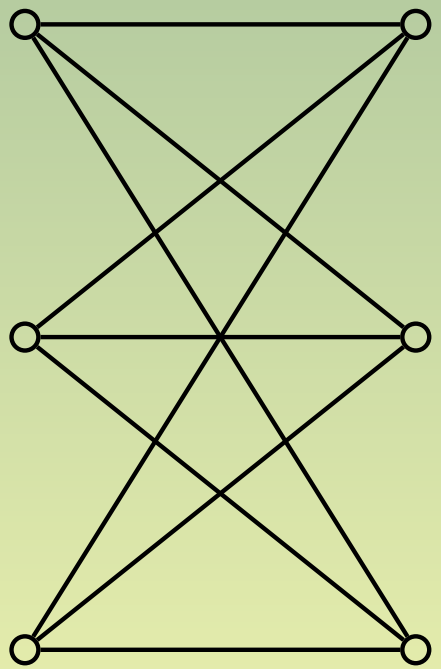
ili pak

$$X = \{1, 2, 3\}, \quad Y = \{4, 5, 6, 7\}$$

Potpuni bipartitni graf je jednostavni bipartitni graf kod kojeg je svaki vrh iz X spojen sa svakim vrhom u Y. Ako je $k(X) = m$ i $k(Y) = n$, tada potpuni bipartitni graf označavamo s $K_{m,n}$.

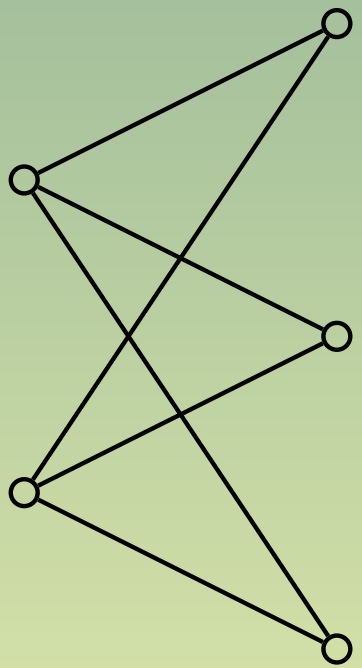


$K_{2,3}$

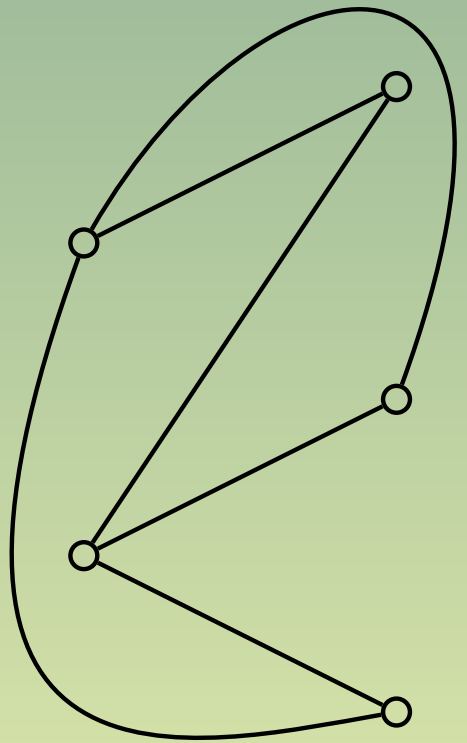


$K_{3,3}$

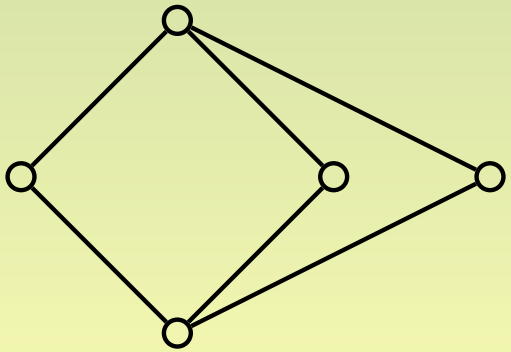
$K_{2,3}$ je planarni graf, dok $K_{3,3}$ nije planarni graf.



$K_{2,3}$



$K_{2,3}$



$K_{2,3}$

Neka je $G = (V, E)$ graf. **Red** od G je broj vrhova od G i označavamo ga s $\nu(G)$. **Veličina** od G je broj bridova od G i označavamo ga s $\varepsilon(G)$.

Stupanj ili **valencija** vrha v je broj $d(v)$ bridova od G incidentnih s v. Pri tome petlja podiže stupanj vrha za dva.

Red i veličina grafa $G = (V, E)$

Red od G: $\nu(G) = k(V)$, Veličina od G: $\varepsilon(G) = k(E)$

Propozicija 6.1.

U svakom grafu $G = (V, E)$ je zbroj svih stupnjeva vrhova jednak dvostrukom broju bridova, tj.

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon$$

Dokaz.

U grafu bez petlji sumiranje stupnjeva vrhova svodi se na prebrojavanje bridova koji su incidentni svakom pojedinom vrhu. Kako pri tome svaki brid brojimo dvaput (jedanput iz jednog kraja, a drugi put iz drugog kraja), a i svaku petlju po definiciji brojimo dvaput, tvrdnja slijedi. ♡

Korolar 6.1 (Lema o rukovanju, "Handshaking Lemma").

U svakom je grafu broj vrhova neparnog stupnja paran broj.

Dokaz.

Zbog prethodne propozicije je

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon$$

$$\sum_{\substack{v \in V \\ d(v) \text{ je paran}}} d(v) + \sum_{\substack{v \in V \\ d(v) \text{ je neparan}}} d(v) = 2\varepsilon$$

iz čega slijedi da mora biti $\sum_{\substack{v \in V \\ d(v) \text{ je neparan}}} d(v)$ paran broj. Stoga je broj vrhova neparnog stupnja paran broj. ♡

Uz identifikaciju

$$\text{vrhovi} \leftrightarrow \text{ljudi}, \qquad \text{bridovi} \leftrightarrow \text{rukovanja}$$

slobodna interpretacija Handshaking leme je sljedeća. U svakom skupu ljudi, broj ljudi koji se rukovao s neparnim brojem drugih ljudi je paran broj.

Primjer 6.1.

Odredite broj bridova u potpunom grafu K_n i potpunom bipartitnom grafu $K_{m,n}$.

Uz identifikaciju

$$\text{vrhovi} \leftrightarrow \text{ljudi}, \qquad \text{bridovi} \leftrightarrow \text{rukovanja}$$

slobodna interpretacija Handshaking leme je sljedeća. U svakom skupu ljudi, broj ljudi koji se rukovao s neparnim brojem drugih ljudi je paran broj.

Primjer 6.1.

Odredite broj bridova u potpunom grafu K_n i potpunom bipartitnom grafu $K_{m,n}$.

Rješenje.

Potpuni graf K_n ima n vrhova i svaka dva različita vrha su spojena točno jednim bridom. Stoga je svaki brid određen izborom neka dva vrha pa je $\varepsilon(K_n) = \binom{n}{2}$.

U potpunom bipartitnom grafu $K_{m,n}$ postoji particija skupa vrhova $V = \{X, Y\}$ takva da je $k(X) = m$ i $k(Y) = n$. Nadalje, svaki vrh iz skupa X je incidentan sa svakim vrhom iz skupa Y, a nikoja dva vrha iz istog skupa nisu incidentna. Svaki brid potpuno je određen sa dva vrha. Prvi vrh možemo odabrati na m načina, a drugi na n načina pa prema principu produkta slijedi da je $\varepsilon\big(K_{m,n}\big) = mn$.

Primjer 6.2.

Može li jednostavni graf sa 6 vrhova imati 16 bridova?

Primjer 6.2.

Može li jednostavni graf sa 6 vrhova imati 16 bridova?

Rješenje.

Ako se radi o jednostavnom grafu, tada u njemu nema petlji i svaka dva vrha su spojena najviše jednim bridom. Stoga jednostavni graf sa 6 vrhova može imati najviše $\binom{6}{2} = 15$ bridova i to u slučaju da se radi o potpunom grafu. Iz toga slijedi da jednostavni graf sa 6 vrhova ne može imati 16 bridova.

Primjer 6.3.

Nađite primjer grafa koji nije jednostavan, ima četiri vrha i svi su vrhovi različitog stupnja.

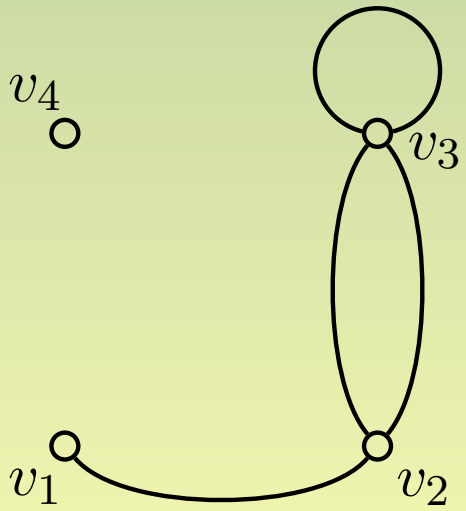
Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Primjer 6.3.

Nađite primjer grafa koji nije jednostavan, ima četiri vrha i svi su vrhovi različitog stupnja.

Rješenje.

$$d(v_1) = 1, \quad d(v_2) = 3, \quad d(v_3) = 4, \quad d(v_4) = 0$$



Graf G je k-**regularan** ako je $d(v) = k$ za svaki $v \in V$.
Regularni graf je onaj graf koji je k-regularan za neki $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definiramo sljedeća dva broja za graf $G = (V, E)$.

$$\delta = \min_{v \in V} d(v), \quad \Delta = \max_{v \in V} d(v)$$

U k-regularnom grafu je $\delta = \Delta = k$.

Primjer 6.4.

Kolika je suma stupnjeva svih vrhova u k-regularnom grafu?

Primjer 6.4.

Kolika je suma stupnjeva svih vrhova u k-regularnom grafu?

Rješenje.

Kako je u k-regularnom grafu stupanj svakog vrha jednak k, slijedi

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V} k = \nu k.$$

Primjer 6.5.

Koliko bridova ima k-regularni graf?

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Primjer 6.5.

Koliko bridova ima k-regularni graf?

Rješenje.

Znamo da je

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon.$$

Kako imamo k-regularan graf, slijedi da je

$$\sum_{v \in V} d(v) = \nu k.$$

Stoga je $2\varepsilon = \nu k$, odnosno $\varepsilon = \frac{\nu k}{2}$.

Odavde zaključujemo da ako je G k-regularan graf s neparnim brojem vrhova, tada k mora biti paran broj.

- Potpuni graf K_n je $(n-1)$-regularan.
- Petersonov graf i kubni graf su 3-regularni grafovi.
- Potpuni bipartitni graf $K_{n,n}$ je n-regularan.
- Trivijalni graf s n petlji je $2n$-regularan.
- Svaki prazan graf je 0-regularan i to su jedini predstavnici 0-regularnih grafova.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Primjer 6.6.

Graf G je 3-regularan i ima 9 bridova. Odredite broj vrhova grafa G.

Primjer 6.6.

Graf G je 3-regularan i ima 9 bridova. Odredite broj vrhova grafa G.

Rješenje.

Znamo da je $\varepsilon = 9$ i $d(v) = 3$ za svaki $v \in V(G)$. Nadalje, iz

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon$$

slijedi da je $3\nu = 2\varepsilon$, otkud dobivamo da je $\nu = 6$ pa promatrani graf ima 6 vrhova.

Primjer 6.7.

Postoji li graf sa 31 bridom, 13 vrhova od kojih su tri vrha stupnja 1 i deset vrhova stupnja 4?

Primjer 6.7.

Postoji li graf sa 31 bridom, 13 vrhova od kojih su tri vrha stupnja 1 i deset vrhova stupnja 4?

Rješenje.

Prema lemi o rukovanju slijedi da u svakom grafu broj vrhova neparnog stupnja mora biti paran broj. Naš graf bi trebao imati 13 vrhova, od kojih je deset vrhova parnog stupnja, a tri neparnog stupnja. No, to je nemoguće pa takav graf ne postoji. Uočite da ovdje uopće broj bridova nije ni bio važan jer je informacija da graf mora imati točno tri vrha neparnog stupnja bila kontradiktorna.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Primjer 6.8.

Dokažite da za svaki graf vrijedi $\delta \leqslant \frac{2\varepsilon}{\nu} \leqslant \Delta$.

Primjer 6.8.

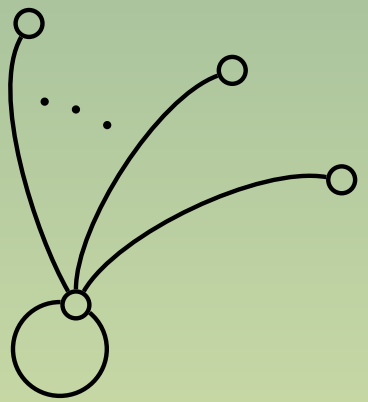
Dokažite da za svaki graf vrijedi $\delta \leqslant \frac{2\varepsilon}{\nu} \leqslant \Delta$.

Rješenje.

Sjetimo se da je

$$\delta = \min_{v \in V} d(v), \quad \Delta = \max_{v \in V} d(v).$$

Svaki vrh u grafu ima barem stupanj δ. Kako imamo ν vrhova, tada imamo barem $\frac{\delta\nu}{2}$ bridova (iz svakog vrha ide barem δ bridova i svaki brid smo brojali dvaput, uključujući i petlje jer petlja povećava stupanj za 2). Stoga je $\frac{\delta\nu}{2} \leqslant \varepsilon$, odnosno $\delta \leqslant \frac{2\varepsilon}{\nu}$.



Analogno, iz svakog vrha izlazi najviše Δ bridova pa imamo ukupno najviše $\frac{\Delta\nu}{2}$ bridova, odnosno $\frac{\Delta\nu}{2} \geqslant \varepsilon$ pa je $\frac{2\varepsilon}{\nu} \leqslant \Delta$. Dakle, sve zajedno dobivamo da u svakom grafu vrijedi

$$\delta \leqslant \frac{2\varepsilon}{\nu} \leqslant \Delta.$$

Primjer 6.9.

Dokažite da u svakom društvu postoji dvoje ljudi s točno istim brojem prijatelja.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Primjer 6.9.

Dokažite da u svakom društvu postoji dvoje ljudi s točno istim brojem prijatelja.

Rješenje.

Uvedemo li identifikaciju

$$\text{vrhovi} \leftrightarrow \text{ljudi}, \qquad \text{bridovi} \leftrightarrow \text{prijateljstvo},$$

tada zapravo treba dokazati da u svakom jednostavnom grafu postoje dva vrha koji imaju isti stupanj. Naime, promatrani graf je jednostavan jer dvoje ljudi ili jesu ili nisu prijatelji, ne treba više puta naglašavati prijateljstvo (dakle, nema višestrukih bridova), a isto tako petlje možemo zanemariti jer ako i uzmemo da je svatko sam sebi prijatelj, onda će svi vrhovi imati petlje, a inače

ne bi imali petlje pa to neće utjecati na konačni rezultat. Dakle, želimo dokazati da u svakom jednostavnom grafu postoje dva vrha koji imaju isti stupanj.

Neka je G jednostavni graf s n vrhova. Kada u njemu ne bi postojala dva vrha istog stupnja, tada bi svaka dva vrha bila različitog stupnja. Kako se radi o jednostavnom grafu s n vrhova, stupnjevi bi bili brojevi

$$0, 1, 2, 3 \ldots, n-1.$$

Dakle, postojao bi vrh stupnja $n-1$ pa bi on morao biti spojen sa svim preostalim vrhovima. U tom slučaju u grafu G ne bi postojao vrh stupnja 0, što je kontradikcija s pretpostavkom. Dakle, u svakom jednostavnom grafu postoje dva vrha istog stupnja.

Komplementarni graf G^c jednostavnog grafa G je jednostavni graf sa istim skupom vrhova V, a dva vrha u G^c su susjedna ako i samo ako nisu susjedni u G.

Primjer 6.10.

Odredite K_n^c *i* $K_{m,n}^c$.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

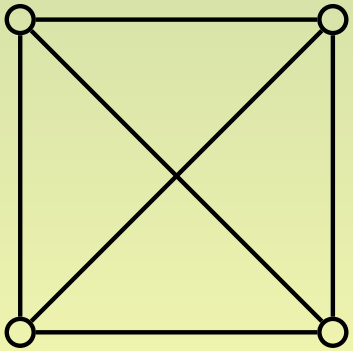
Komplementarni graf G^c jednostavnog grafa G je jednostavni graf sa istim skupom vrhova V, a dva vrha u G^c su susjedna ako i samo ako nisu susjedni u G.

Primjer 6.10.

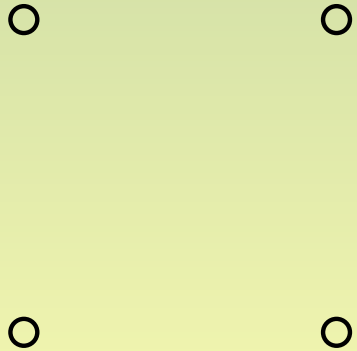
Odredite K_n^c *i* $K_{m,n}^c$.

Rješenje.

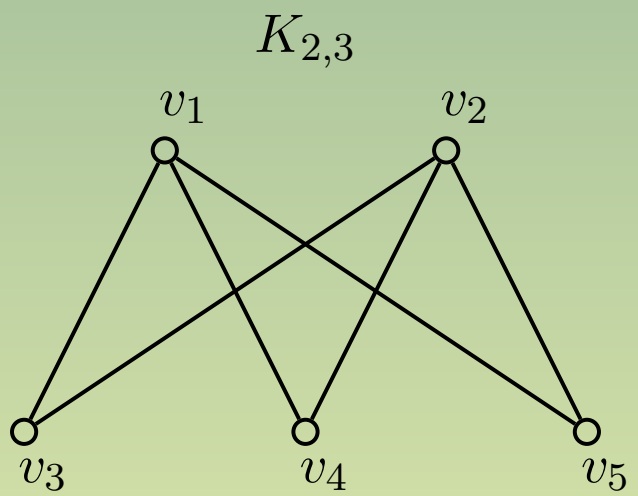
K_4

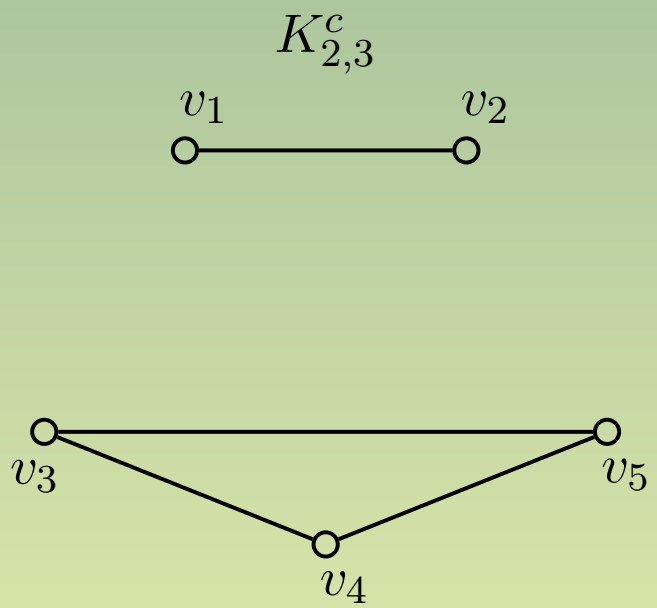


K_4^c



Općenito je K_n^c prazan graf s n vrhova.





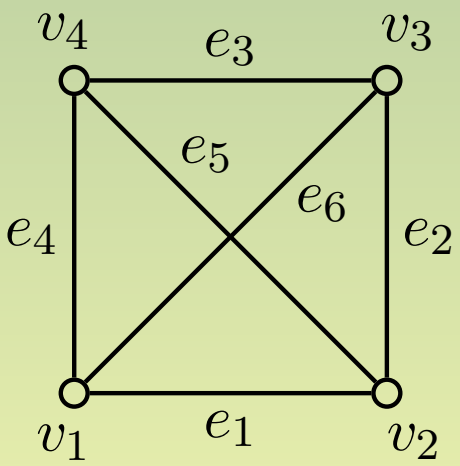
Općenito je $K_{m,n}^c = K_m \cup K_n$.

Unija grafova G_1 i G_2 je graf $G_1 \cup G_2$ za koji je

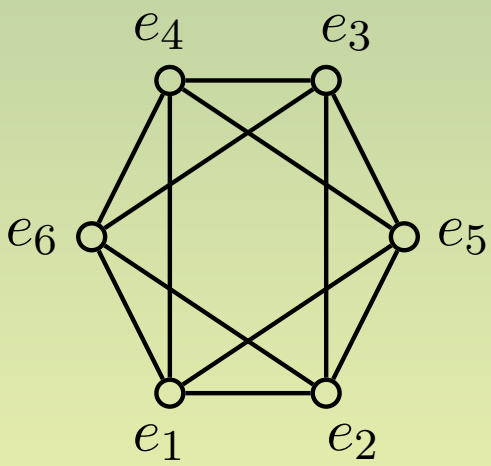
$$V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2), \quad E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$$

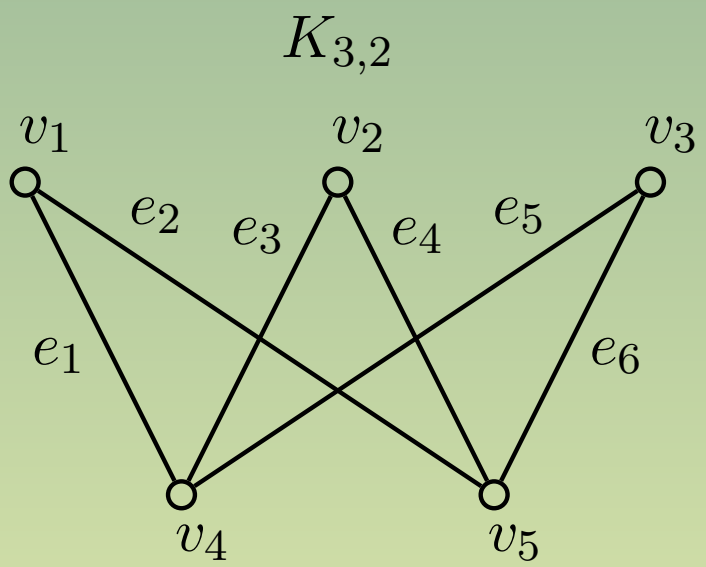
Linijski graf grafa G je graf $L(G)$ sa skupom vrhova $E(G)$ u kojemu su dva vrha susjedna ako i samo ako su susjedni bridovi u G.

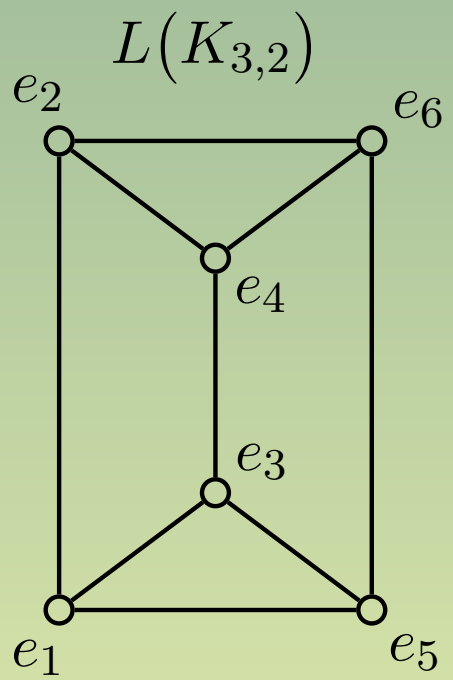
K_4



$L(K_4)$





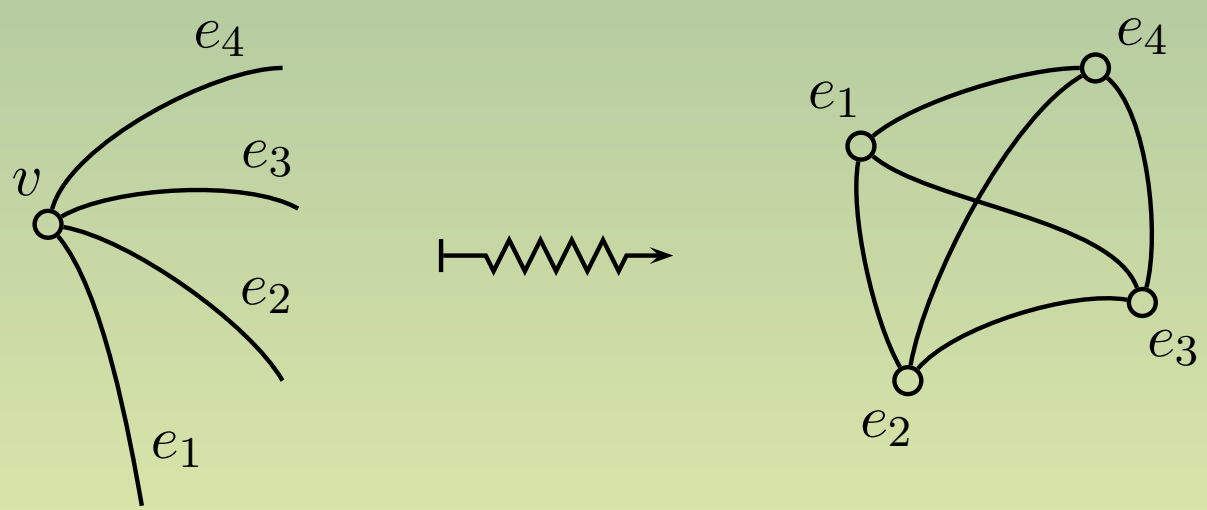


Primjer 6.11.

Neka je G jednostavni graf. Dokažite da tada linijski graf $L(G)$ ima $\varepsilon(G)$ vrhova i $\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2}$ bridova.

Rješenje.

Po definiciji, bridovi grafa G su vrhovi linijskog grafa $L(G)$, pa je $\nu\big(L(G)\big) = \varepsilon(G)$.

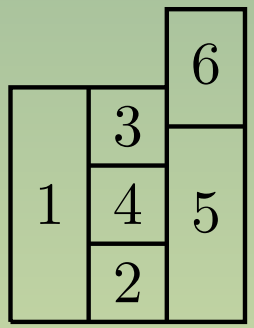


Kako je G jednostavni graf, svaki vrh $v \in V(G)$ inducira $\binom{d_G(v)}{2}$ bridova u $L(G)$ pa je

$$\varepsilon\big(L(G)\big) = \sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2}.$$

Primjer 6.12.

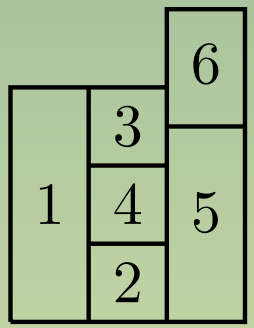
Na slici je tlocrt jednokatnice sa označenim sobama.



Reprezentirajte taj tlocrt grafom tako da susjedne sobe budu spojene bridom.

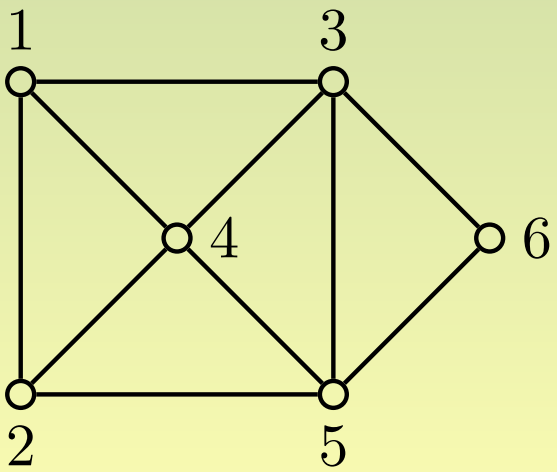
Primjer 6.12.

Na slici je tlocrt jednokatnice sa označenim sobama.



Reprezentirajte taj tlocrt grafom tako da susjedne sobe budu spojene bridom.

Rješenje.



Primjer 6.13.

Dokažite da jednostavni bipartitni graf s n vrhova može imati najviše $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ bridova.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Primjer 6.13.

Dokažite da jednostavni bipartitni graf s n vrhova može imati najviše $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ bridova.

Rješenje.

Neka je x broj vrhova u prvoj particiji bipartitnog grafa. Tada je broj vrhova u drugoj particiji jednak $n - x$. Najveći mogući broj bridova će biti ako je svaki vrh iz prve particije spojen sa svakim vrhom iz druge particije. U tom je slučaju ukupni broj bridova jednak

$$f(x) = x(n - x).$$

Tražimo optimalni x.

Deriviranjem dobivamo

$$f'(x) = n - 2x,$$

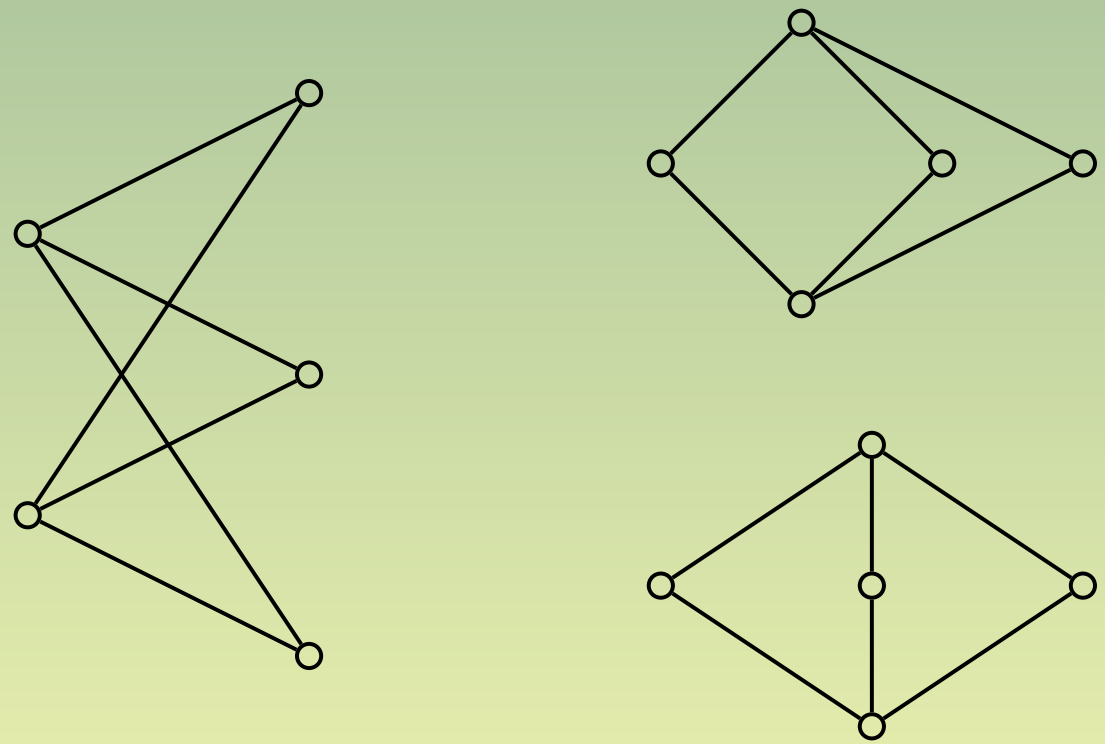
iz čega slijedi da je $x = \frac{n}{2}$ stacionarna točka. U toj točki funkcija f postiže maksimum jer se radi o paraboli okrenutoj prema dolje i taj maksimum je jednak

$$f\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n^2}{4}.$$

Dakle, jednostavni bipartitni graf s n vrhova može imati najviše $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ bridova.

Izomorfizam grafova

Pogledamo li grafove na donjoj slici,



rekli bismo na prvi pogled da su oni međusobno različiti. Međutim, pogledamo li malo bolje, uočit ćemo da se u sva tri slučaja radi o jednom te istom grafu $K_{3,2}$.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Dakle, graf $K_{3,2}$ je na različite načine predočen u ravnini, a te različite načine crtanja istog grafa ne bismo htjeli razlikovati. Općenito, jasno je da svaki graf možemo predočiti u ravnini na beskonačno mnogo načina ovisno o tome kako rasporedimo vrhove i na koji način spajamo te vrhove (da li ih spajamo ravnom crtom ili nekom krivuljom). Kod crtanja grafa nas ne zanima na koji ćemo način rasporediti vrhove, kojim ćemo ih krivuljama spajati i kako ćemo nazvati pojedine vrhove i bridove, već nas samo zanima **unutrašnja struktura grafa**, tj. zanima nas koji su vrhovi, odnosno bridovi susjedni, a koji nisu. Stoga uvodimo pojam **izomorfizma grafova** koji će razlikovati grafove samo po njihovoj unutrašnjoj strukturi, a neće gledati na koji su način ti grafovi predočeni u ravnini.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Neka su $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ dva grafa i $f : V_1 \to V_2$ funkcija za koju vrijedi

- f je bijekcija
- $f(v)$ je susjedan s $f(w)$ u G_2 ako i samo ako je v susjedan s w u G_1

Tada funkciju f zovemo **izomorfizam grafova** G_1 i G_2, a za grafove G_1 i G_2 kažemo da su izomorfni.

Dakle, grafovi G_1 i G_2 su izomorfni ako postoji barem jedna bijekcija između njihovih vrhova koja čuva susjednost vrhova.

Propozicija 6.2.

Izomorfizam grafova je relacija ekvivalencije.

Dokaz.

Moramo pokazati da je izomorfizam grafova refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija. Očito je svaki graf izomorfan sam sa sobom, a traženi izomorfizam je identiteta koja očito čuva i susjednost. Iz toga slijedi da je izomorfizam grafova refleksivna relacija.

Pretpostavimo da je $G_1 = (V_1, E_1)$ izomorfan s $G_2 = (V_2, E_2)$. Tada postoji bijekcija $f : V_1 \to V_2$ koja čuva susjednost. No, tada je $f^{-1} : V_2 \to V_1$ također bijekcija. Dokažimo da f^{-1} isto čuva susjednost.

Treba dokazati

$$v_2 \sim w_2 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(v_2) \sim f^{-1}(w_2), \quad \forall v_2, w_2 \in V_2$$

Neka su $v_2, w_2 \in V_2$ vrhovi u grafu G_2. Kako je f bijekcija, onda je i surjekcija pa postoje $v_1, w_1 \in V_1$ takvi da je

$$f(v_1) = v_2, \quad f(w_1) = w_2. \qquad (*)$$

Kako f čuva susjednost, slijedi

$$v_2 \sim w_2 \;\Leftrightarrow\; f(v_1) \sim f(w_1) \;\Leftrightarrow\; v_1 \sim w_1.$$

Iz $(*)$ slijedi da je $v_1 = f^{-1}(v_2)$ i $w_1 = f^{-1}(w_2)$ pa je

$$v_2 \sim w_2 \;\Leftrightarrow\; f^{-1}(v_2) \sim f^{-1}(w_2)$$

iz čega slijedi da f^{-1} čuva i susjednost pa je izomorfizam grafova simetrična relacija.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Preostaje nam još pokazati tranzitivnost. Neka je $G_1 = (V_1, E_1)$ izomorfan s $G_2 = (V_2, E_2)$ i neka je $G_2 = (V_2, E_2)$ izomorfan s $G_3 = (V_3, E_3)$. Tada postoje bijekcije

$$f : V_1 \to V_2, \quad g : V_2 \to V_3$$

koje čuvaju susjednost. Kako je kompozicija bijekcija ponovno bijekcija, slijedi da je

$$g \circ f : V_1 \to V_3$$

bijekcija. Dokažimo da $g \circ f$ čuva susjednost, tj. da vrijedi

$$v_1 \sim w_1 \quad \Leftrightarrow \quad (g \circ f)(v_1) \sim (g \circ f)(w_1), \quad \forall v_1, w_1 \in V_1.$$

Kako bijekcije f i g čuvaju susjednost, dobivamo

$$\begin{aligned} v_1 \sim w_1 &\Leftrightarrow f(v_1) \sim f(w_1) \\ &\Leftrightarrow g\big(f(v_1)\big) \sim g\big(f(w_1)\big) \\ &\Leftrightarrow (g \circ f)(v_1) \sim (g \circ f)(w_1) \end{aligned}$$

iz čega slijedi da i bijekcija $g \circ f$ čuva susjednost pa je izomorfizam grafova tranzitivna relacija. ♡

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Napomena.

Kako je izomorfizam grafova relacija ekvivalencije, slijedi da na skupu svih grafova postoji particija takva da su u pojedinom skupu te particije samo oni grafovi koji su međusobno izomorfni pa sve takve grafove koji pripadaju istom skupu particije smatramo "jednakima" jer imaju istu unutrašnju strukturu, a razlikuju se eventualno jedino u imenima svojih vrhova i bridova te načinu na koji su grafički predočeni u ravnini.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Propozicija 6.3.

Neka su G_1 i G_2 izomorfni grafovi. Tada G_1 i G_2 imaju jednak broj vrhova, jednak broj bridova i jednake nizove stupnjeva odgovarajućih vrhova.

Dokaz.

Kako su G_1 i G_2 izomorfni grafovi, tada postoji bijekcija sa skupa vrhova grafa G_1 na skup vrhova grafa G_2 iz čega slijedi da grafovi G_1 i G_2 imaju isti broj vrhova. Nadalje, neka je v proizvoljni vrh u grafu G_1 stupnja d i neka su $v_1, \ldots, v_d$ vrhovi susjedni vrhu v (moguće je da su neki od vrhova $v_1, \ldots, v_d$ jednaki vrhu v ako u vrhu v imamo petlje). Kako izomorfizam grafova čuva susjednost, slijedi da je vrh $f(v)$ u grafu G_2 susjedan samo s vrhovima $f(v_1), \ldots, f(v_d)$ iz čega slijedi da je stupanj vrha $f(v)$ također jednak d.

Iz ◂ propozicije 6.1. tada slijedi

$$2\varepsilon(G_2) = \sum_{w \in V(G_2)} d(w) = \sum_{v \in V(G_1)} d\big(f(v)\big) =$$

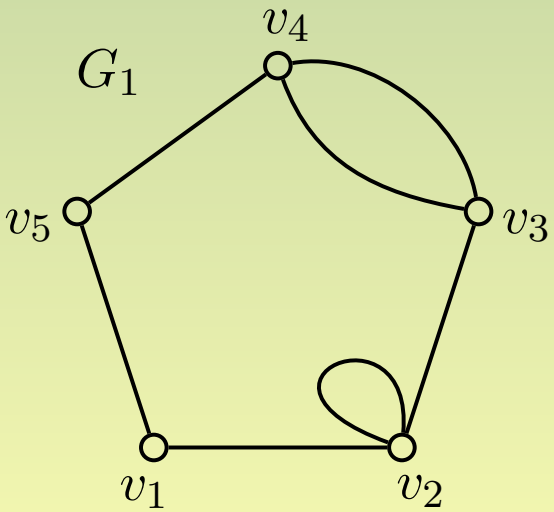
$$= \sum_{v \in V(G_1)} d(v) = 2\varepsilon(G_1)$$

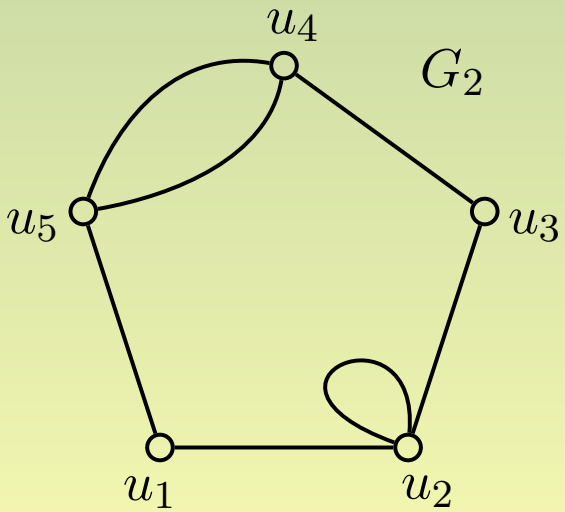
iz čega slijedi da je $\varepsilon(G_1) = \varepsilon(G_2)$, tj. grafovi G_1 i G_2 imaju i jednak broj bridova. ♡

Prethodna propozicija daje samo nužne uvjete da bi dva grafa bila izomorfna, ali ti uvjeti nisu i dovoljni. Naime, dva grafa koji imaju jednak broj vrhova, jednak broj bridova i jednake nizove stupnjeva odgovarajućih vrhova ne moraju biti izomorfni. Pogledajmo to na jednom primjeru.

Primjer 6.14.

Dokažite da grafovi G_1 i G_2 nisu izomorfni.





Rješenje.

Iako nam na prvi pogled grafovi G_1 i G_2 izgledaju "slično", pokažimo da oni ipak nisu izomorfni. Uočimo također da G_1 i G_2 imaju jednak broj bridova, jednak broj vrhova i jednake nizove stupnjeva odgovarajućih vrhova

$$d(v_1) = 2,\ d(v_2) = 4,\ d(v_3) = 3,\ d(v_4) = 3,\ d(v_5) = 2$$

$$d(u_1) = 2,\ d(u_2) = 4,\ d(u_4) = 3,\ d(u_5) = 3,\ d(u_3) = 2$$

Međutim, vidjet ćemo da to ipak nije dovoljno da bi oni bili izomorfni. Pretpostavimo suprotno, tj. da su grafovi G_1 i G_2 izomorfni. Tada postoji bijekcija

$$f : V(G_1) \to V(G_2)$$

koja čuva susjednost.

Kako je v_2 jedini vrh stupnja 4 u grafu G_1, a vrh u_2 jedini vrh stupnja 4 u grafu G_2, tada mora biti $f(v_2) = u_2$. Kako je $v_1 \sim v_2$, a f čuva susjednost, slijedi da mora biti

$$f(v_1) = u_1 \quad \text{ili} \quad f(v_1) = u_3.$$

Ako je $f(v_1) = u_1$, tada opet zbog čuvanja susjednosti mora biti $f(v_3) = u_3$. Međutim, kako je $d(v_3) \neq d(u_3)$, to je nemoguće jer tada f ne bi bio izomorfizam. Stoga mora biti $f(v_1) = u_3$. U tom slučaju opet, zbog čuvanja susjednosti, mora biti $f(v_3) = u_1$. No, kako je $d(v_3) \neq d(u_1)$, to je nemoguće jer f tada ne bi bio izomorfizam. Dakle, naša pretpostavka da postoji izomorfizam f je bila pogrešna pa grafovi G_1 i G_2 zaista nisu izomorfni.

Gledajući grafičke prikaze grafova G_1 i G_2 možemo malo dublje proučiti unutrašnju strukturu tih grafova. Naime, oba grafa imaju točno po jedan vrh koji ima jednu petlju. To su vrhovi v_2 i u_2 i oba su stupnja 4. U ovom trenutku grafovi G_1 i G_2 još uvijek imaju istu unutrašnju strukturu. No, oba vrha v_2 i u_2 imaju po dva susjedna vrha, ali u grafu G_2 su oba susjedna vrha stupnja 2, dok je u grafu G_1 jedan od ta dva susjedna vrha stupnja 2, a drugi je stupnja 3 pa u ovom trenutku grafovi G_1 i G_2 se počinju razlikovati u svojoj unutrašnjoj strukturi pa zbog toga nisu izomorfni.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Primjer 6.15.

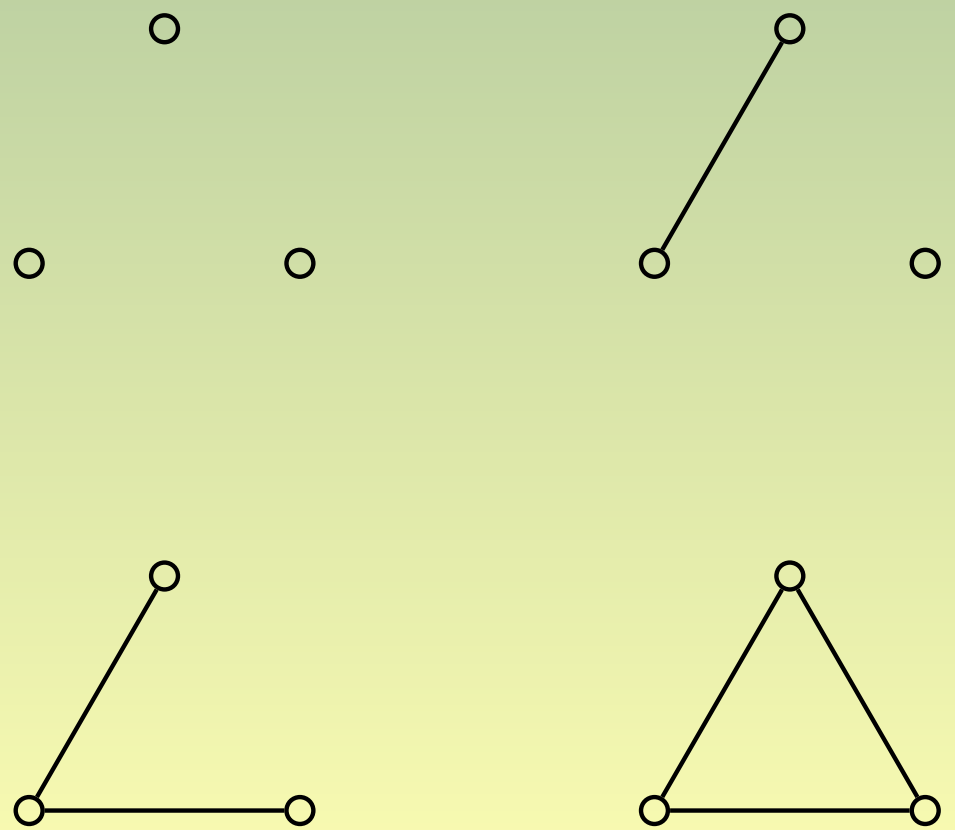
Nacrtajte sve neizomorfne jednostavne grafove s tri vrha.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Primjer 6.15.

Nacrtajte sve neizomorfne jednostavne grafove s tri vrha.

Rješenje.



Podgrafovi

Graf H je **podgraf** grafa G, u oznaci $H \subseteq G$, ako je $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$. Također, često ćemo govoriti za svaki drugi graf koji je izomorfan sa H da je podgraf grafa G. Ako je $H \subseteq G$ i $H \neq G$, tada pišemo $H \subset G$ i kažemo da je H **pravi podgraf** od G.

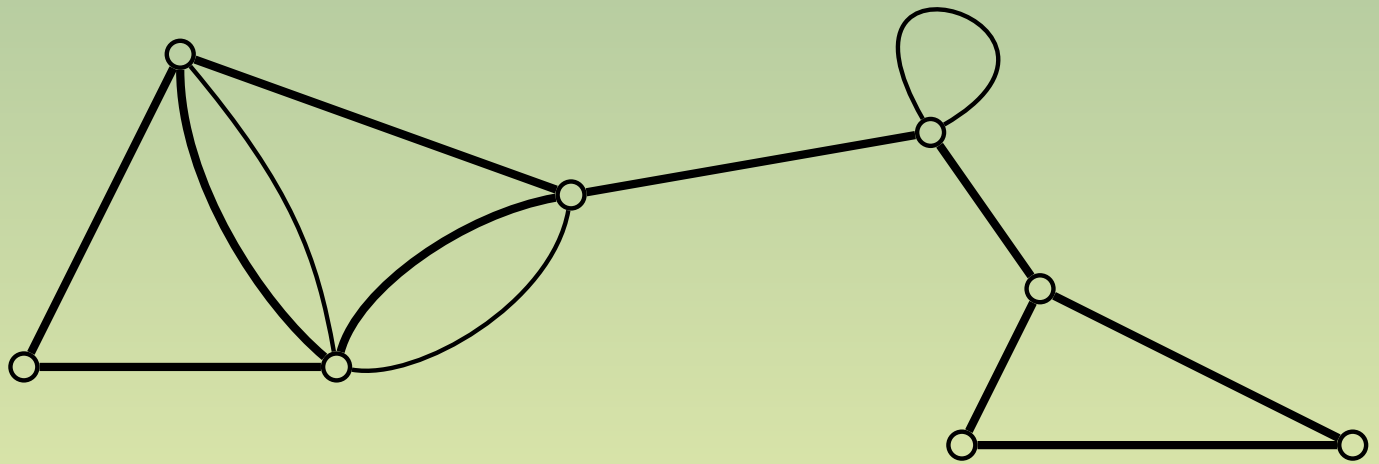
Ako je H podgraf od G, tada je G **nadgraf** od H.

Podgraf H od G za koji je $V(H) = V(G)$ zove se **razapinjući podgraf** od G.

Ako iz G izbacimo sve petlje i za svaki par susjednih vrhova sve osim jednog brida dobivamo **jednostavan razapinjući podgraf** od G.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Na slici je debelim linijama nacrtan jedan jednostavan razapinjući podgraf zadanog grafa.



Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Neka je $G = (V, E)$ zadani graf.

Neka je $\emptyset \neq V' \subseteq V$. Podgraf od G čiji je skup vrhova V', a skup bridova je podskup skupa svih bridova od G čija su oba kraja u V' zove se **podgraf induciran** sa V' i označava se s $G[V']$.

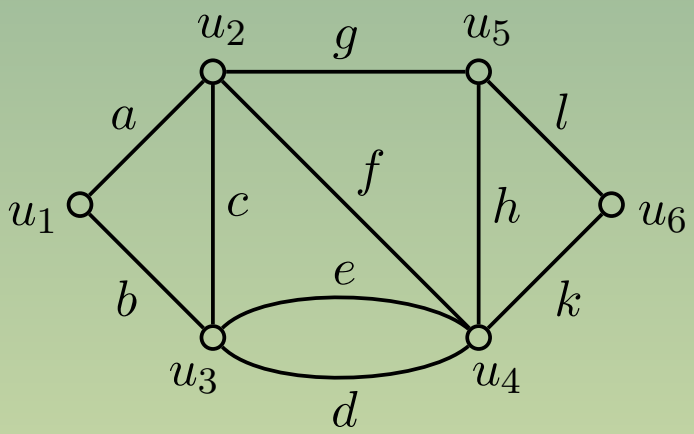
Inducirani podgraf $G[V \setminus V']$ se označava s $G - V'$ (iz G se "iščupa" V', tj. izbace se vrhovi koji pripadaju skupu V' i zajedno s njima se izbace svi bridovi kojima su jedan ili oba kraja u V'). Ako je $V' = \{v\}$, tada pišemo $G - v$ umjesto $G - \{v\}$.

Neka je $G = (V, E)$ zadani graf.

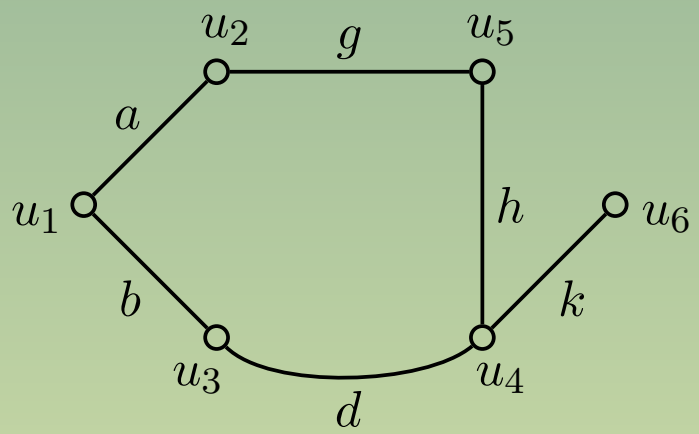
Neka je $\emptyset \neq E' \subseteq E$. Podgraf od G čiji skup vrhova je skup krajeva bridova iz E', a skup bridova je E' zove se **podgraf induciran** sa E' i označava se s $G[E']$ i zovemo ga još **bridovima inducirani podgraf** od G.

Podgraf od G induciran sa skupom bridova $E \setminus E'$ označava se s $G - E'$. On se dobiva iz G tako da se izbace svi bridovi iz E'. Slično, graf dobiven iz G dodavanjem skupa bridova E' zapisuje se kao $G + E'$. Ako je $E' = \{e\}$, tada pišemo $G - e$ i $G + e$ umjesto $G - \{e\}$ i $G + \{e\}$.

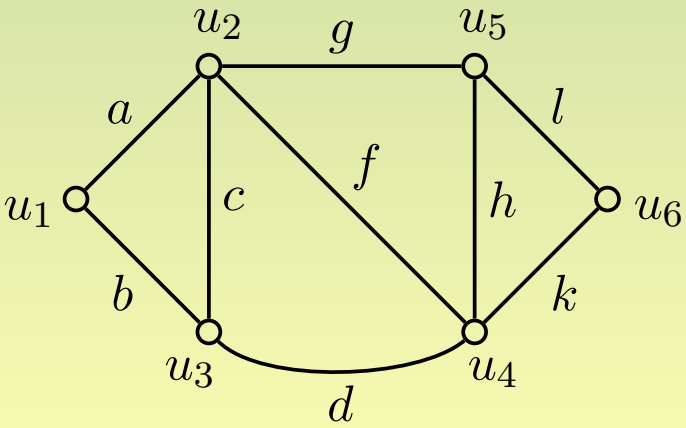
graf G



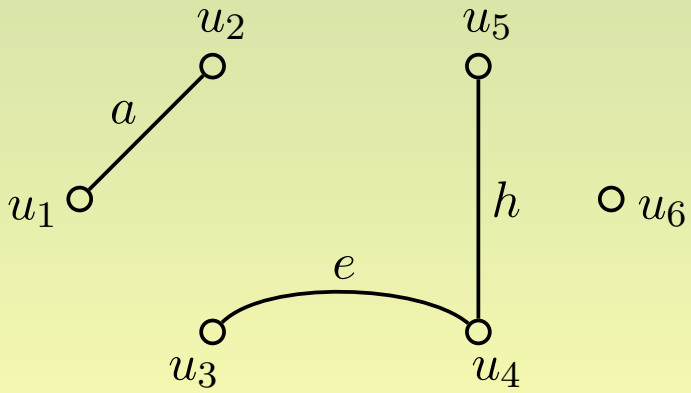
razapinjući podgraf od G



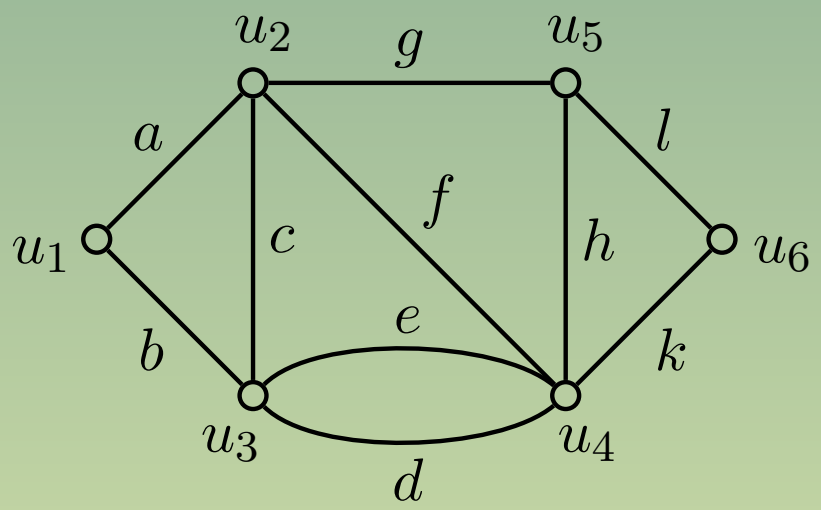
jednostavni razapinjući podgraf od G



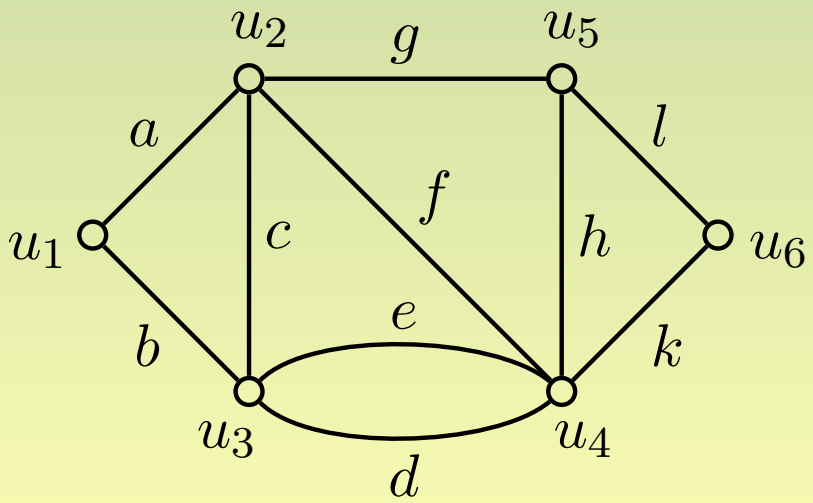
razapinjući podgraf od G



Graf G

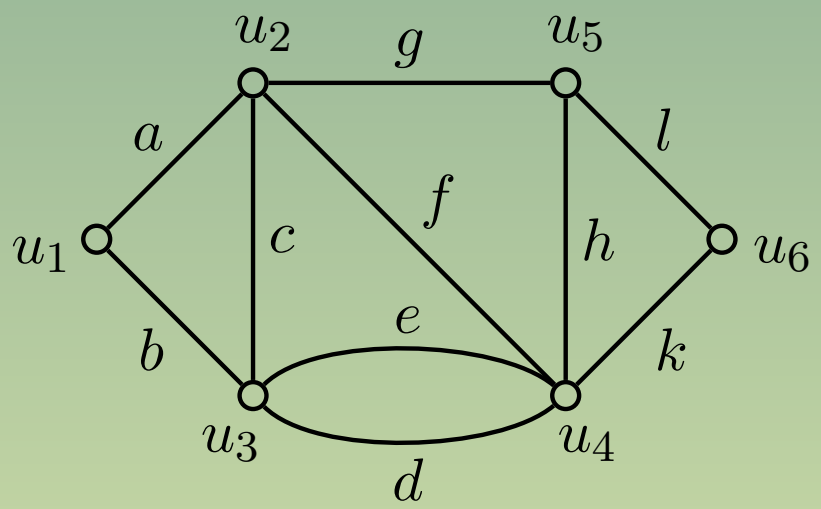


Dobivanje grafa $G - u_2$

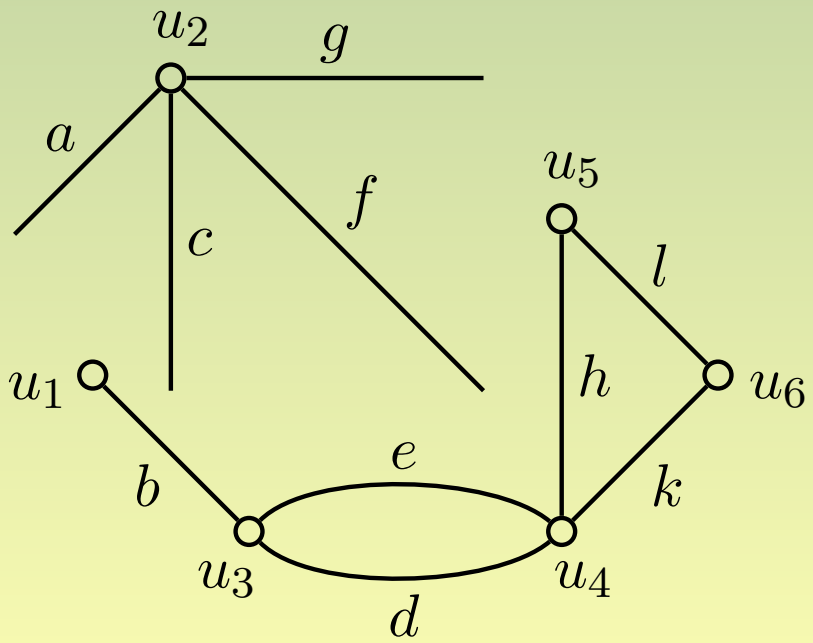


Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Graf G

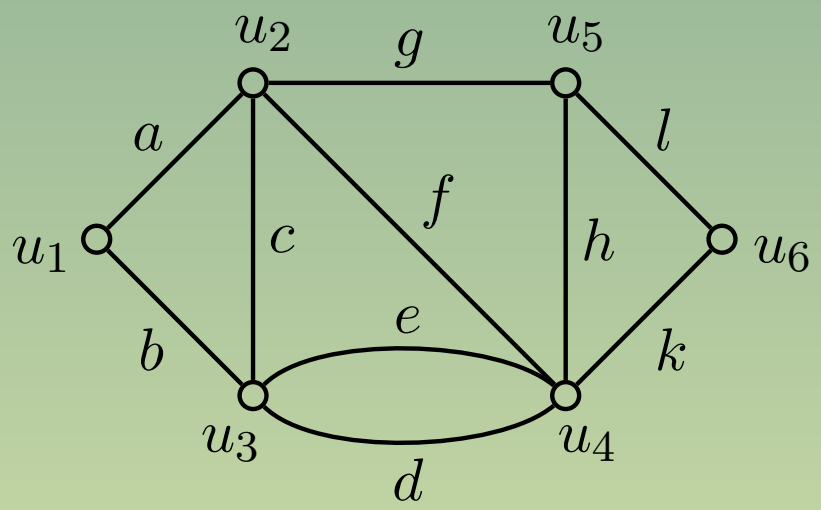


Iščupamo vrh u_2

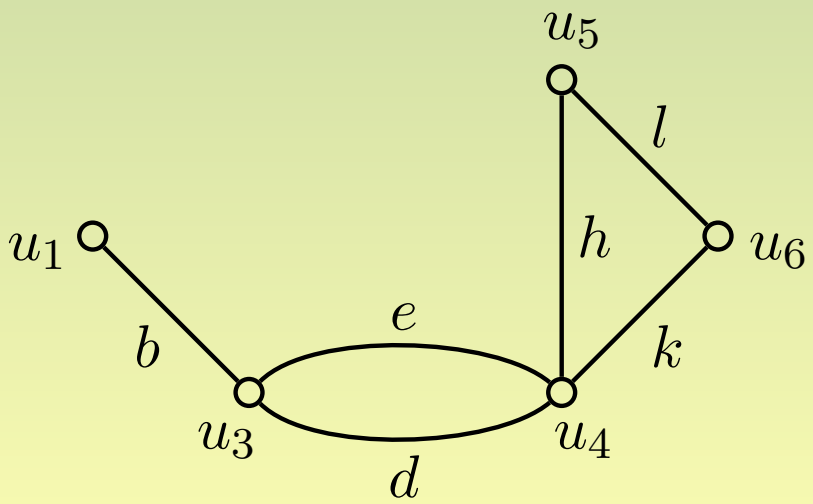


Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Graf G

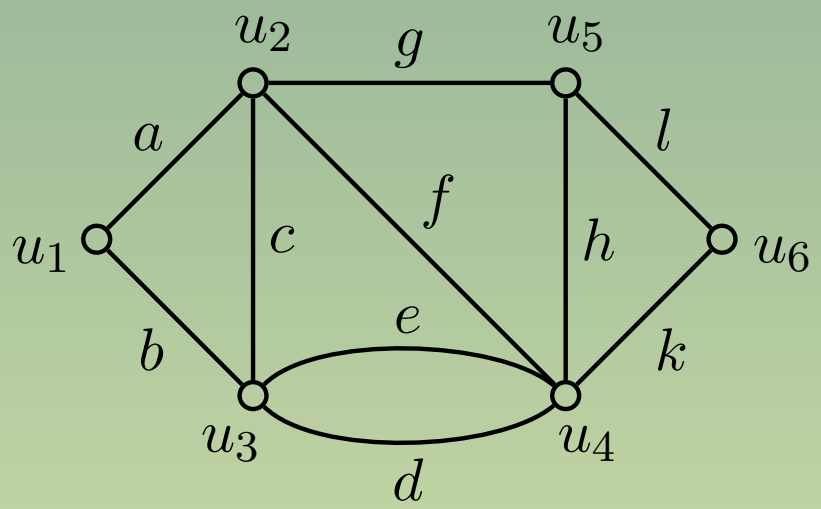


Graf $G - u_2$

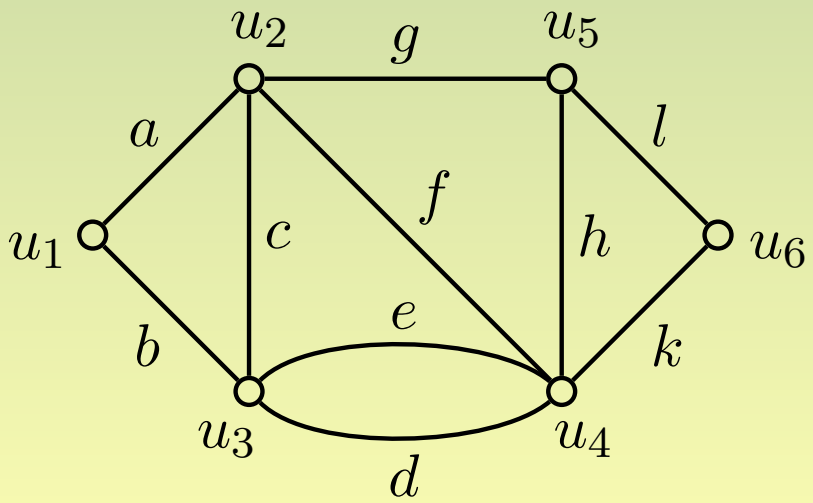


Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

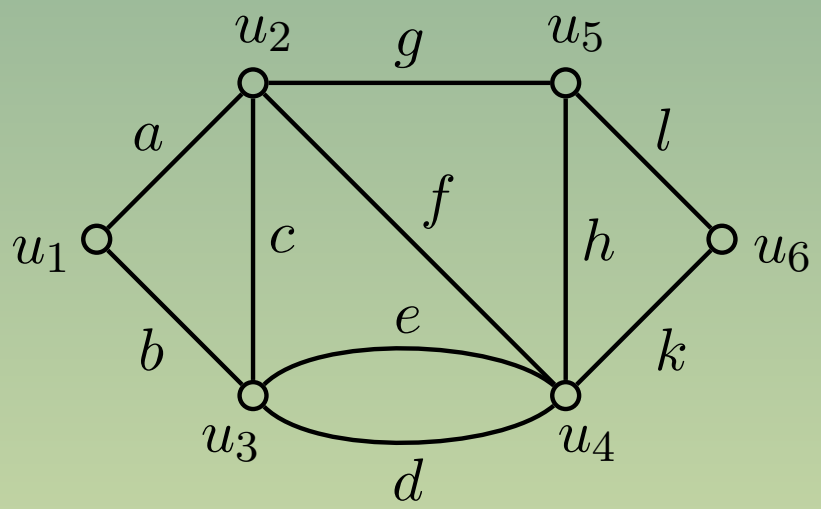
Graf G



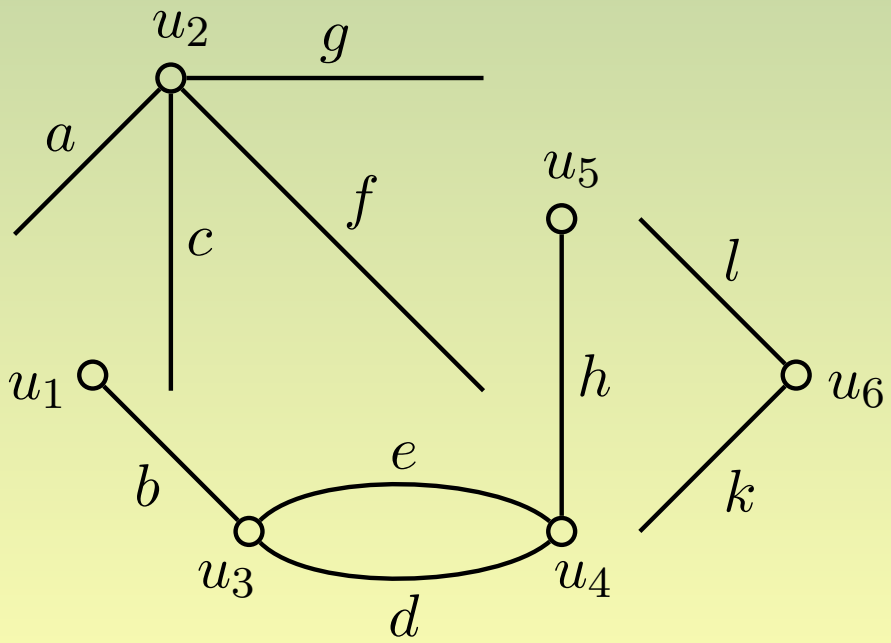
Dobivanje grafa $G - \{u_2, u_6\}$



Graf G

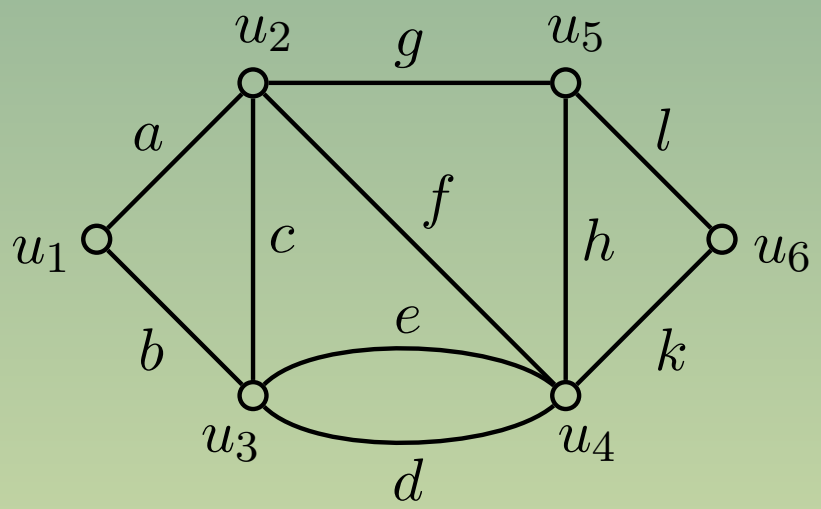


Iščupamo vrhove iz $\{u_2, u_6\}$

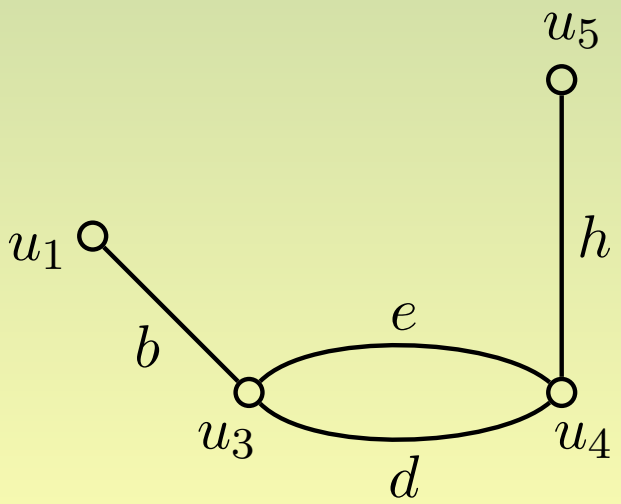


Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

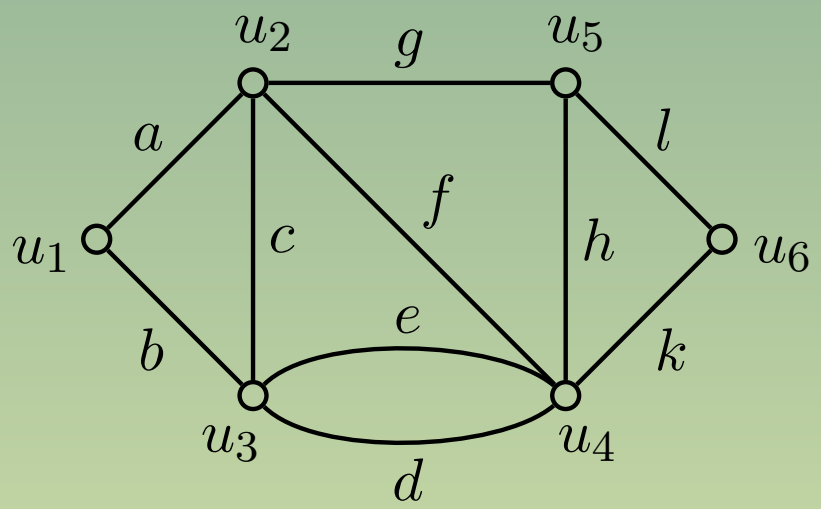
Graf G



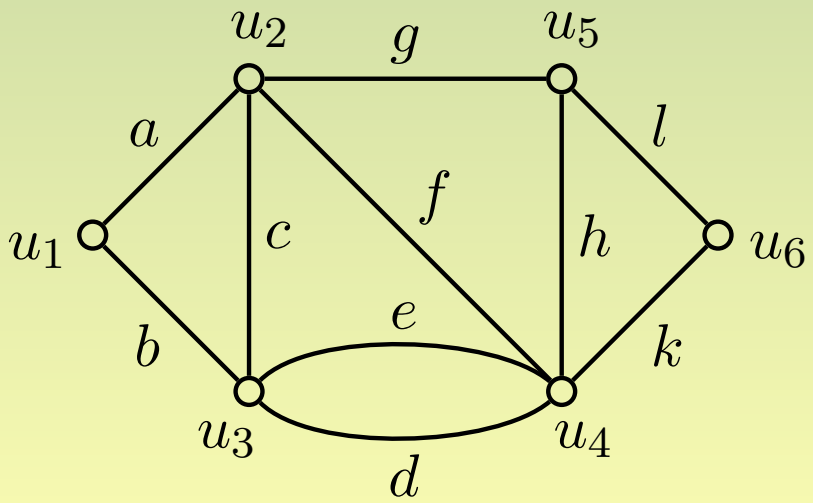
Graf $G - \{u_2, u_6\}$



Graf G

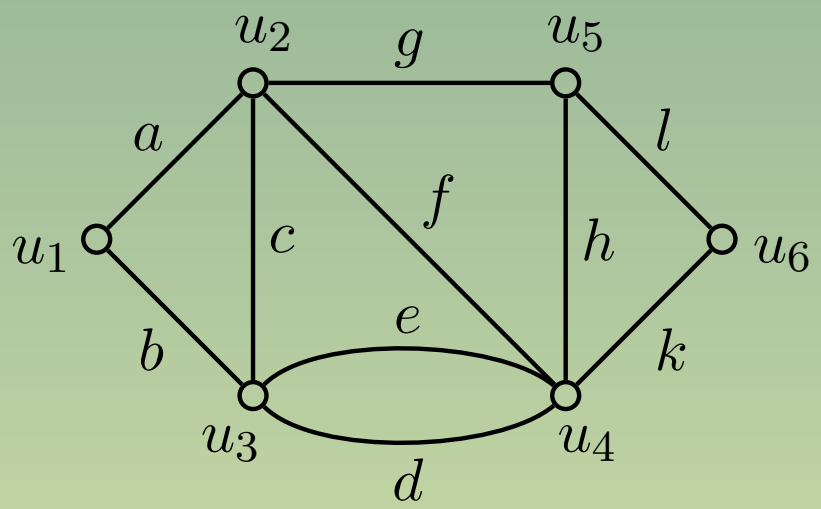


Dobivanje grafa $G - \{b, d, l\}$

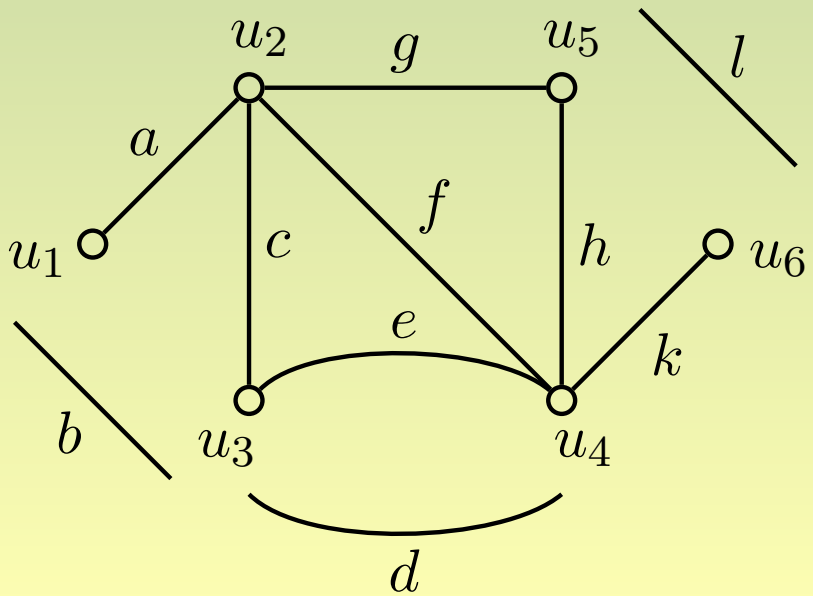


Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Graf G

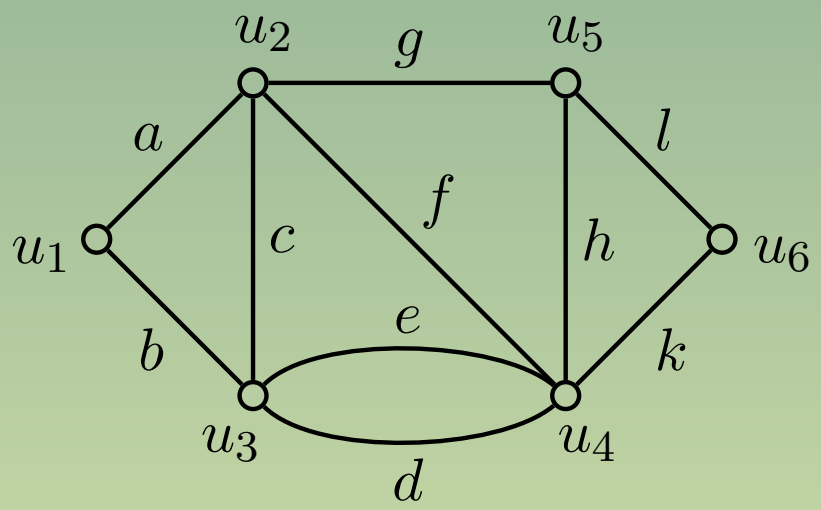


Iščupamo bridove iz $\{b, d, l\}$

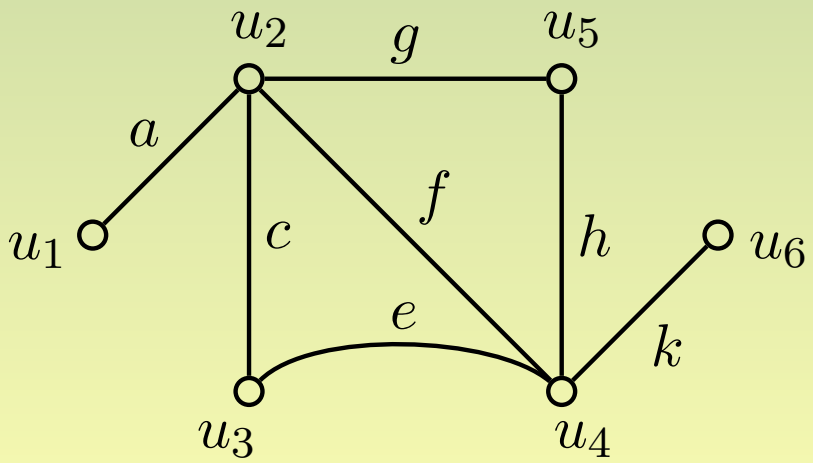


Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

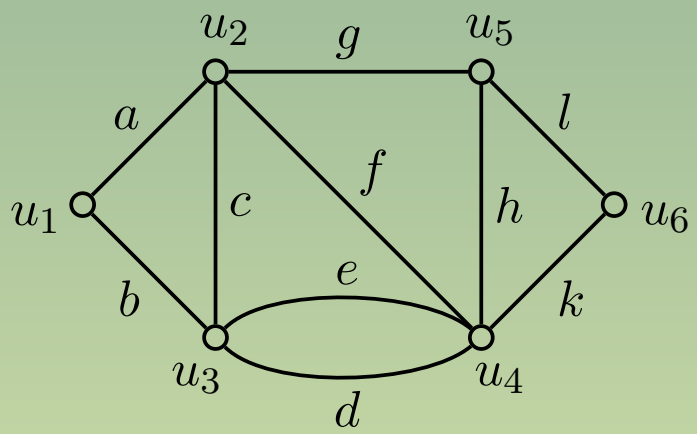
Graf G



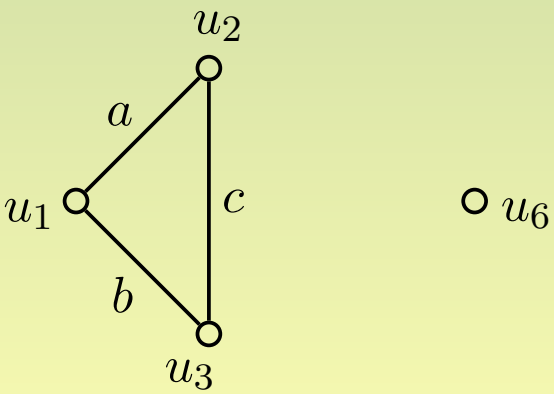
Graf $G - \{b, d, l\}$



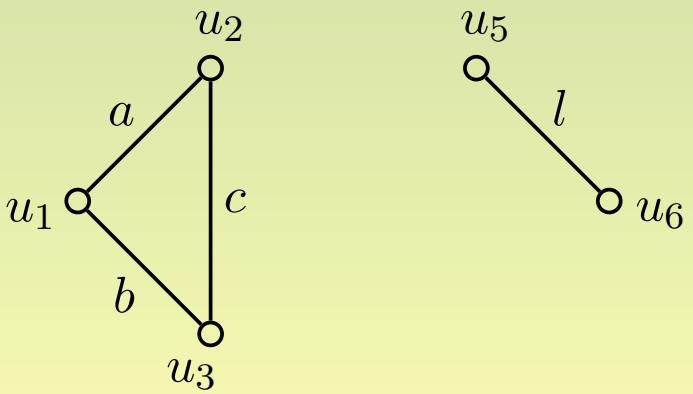
graf G



$G\big[\{u_1, u_2, u_3, u_6\}\big]$



$G\big[\{a, b, c, l\}\big]$



Neka su G_1 i G_2 podgrafovi od G. Kažemo da su G_1 i G_2 **disjunktni** ako nemaju zajedničkog vrha. Kažemo da su G_1 i G_2 **disjunktni po bridovima** ako nemaju zajedničkih bridova.

Unija $G_1 \cup G_2$ je podgraf za koji je

$$V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2), \quad E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2).$$

Presjek $G_1 \cap G_2$ je podgraf za koji je

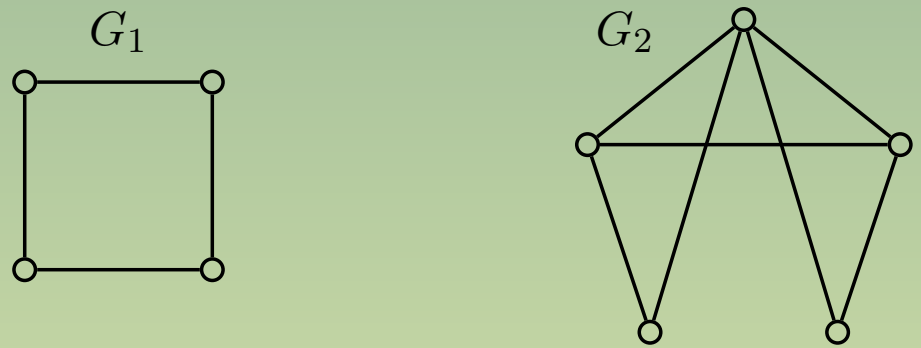
$$V(G_1 \cap G_2) = V(G_1) \cap V(G_2), \quad E(G_1 \cap G_2) = E(G_1) \cap E(G_2).$$

uz pretpostavku da G_1 i G_2 imaju barem jedan zajednički vrh. U protivnom, presjek nije definiran.

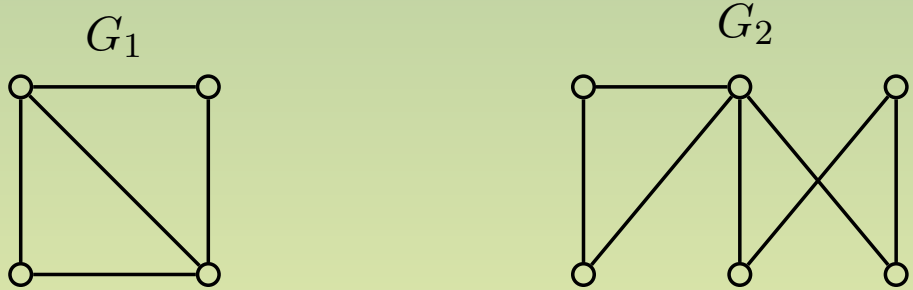
Primjer 6.16.

Objasnite da li je G_1 podgraf od G_2 ako je

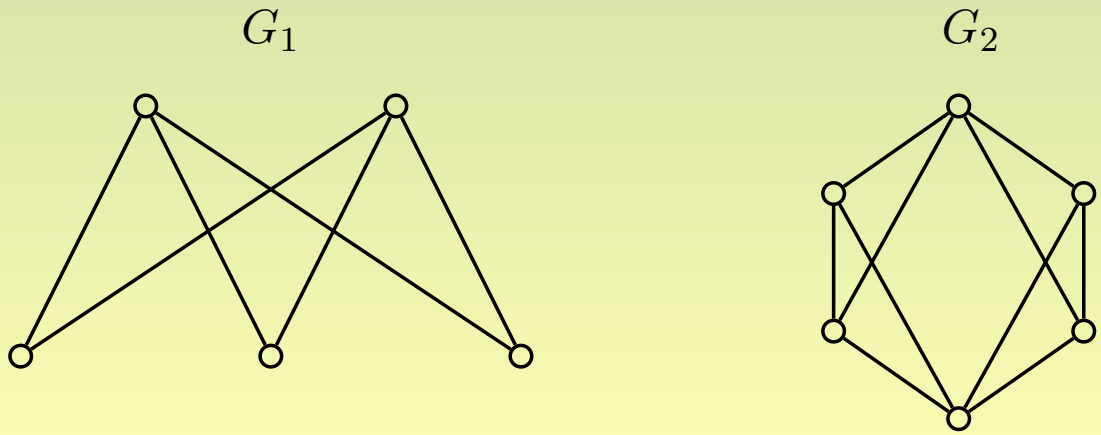
a)



b)

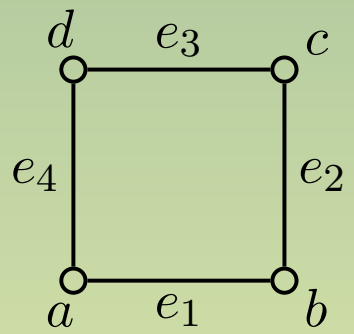


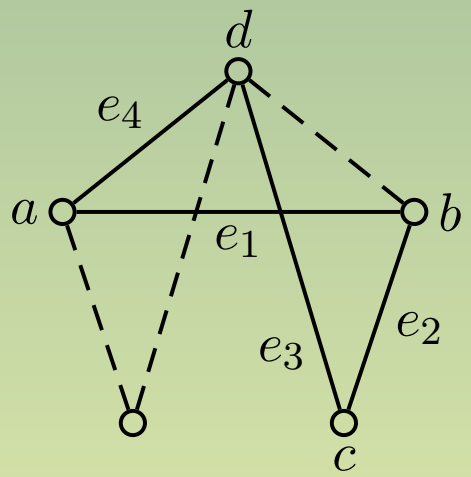
c)



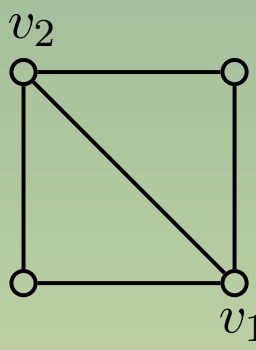
Rješenje.

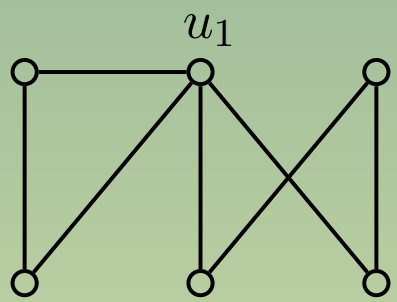
a) Graf G_1 jest podgraf grafa G_2, što se vidi sa slike.



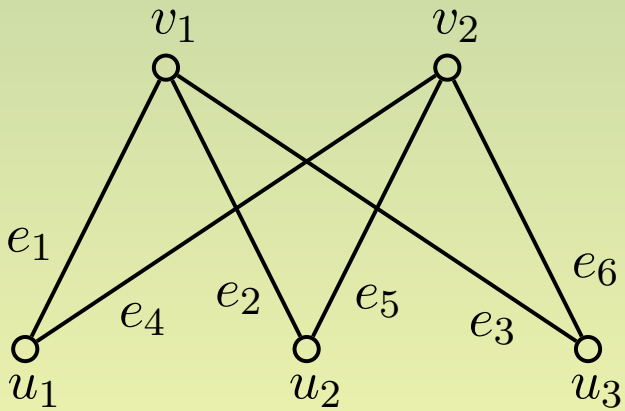


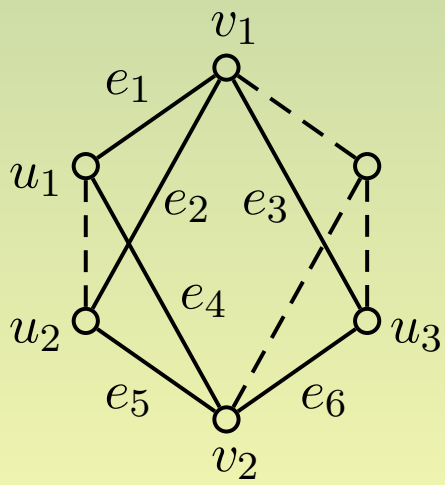
b) U grafu G_1 su vrhovi v_1 i v_2 stupnja 3 pa bi graf G_2 morao sadržavati barem dva vrha stupnja većeg ili jednakog od 3 da bi G_1 bio podgraf od G_2. No, u grafu G_2 je jedino vrh u_1 stupnja 4, a ostali su stupnja manjeg od tri pa G_1 nije podgraf od G_2.





- Graf G_1 jest podgraf grafa G_2, što se vidi sa slike.





Matrica susjedstva i matrica incidencije

Neka je G graf sa skupom vrhova $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Definiramo da je a_{ij} jednak broju bridova koji povezuju vrhove v_i i v_j za $1 \leqslant i, j \leqslant n$. **Matrica susjedstva** grafa G je kvadratna matrica $A = A(G) = \left[a_{ij}\right]$ reda n.

Matrica susjedstva jednostavnog grafa sadrži samo nule i jedinice.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Neka je G graf sa skupom vrhova $\{v_1, \ldots, v_n\}$ i skupom bridova $\{e_1, \ldots, e_m\}$. Definiramo

$$m_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{ako je } e_j \text{ petlja u vrhu } v_i \\ 1, & \text{ako je } e_j \text{ ima točno jedan kraj u } v_i \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

za $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Dakle, m_{ij} broji koliko puta je vrh v_i incidentan s bridom e_j.
Matricu $M = M(G) = \left[m_{ij}\right]$ zovemo **matrica incidencije** grafa G. Matrica incidencije je matrica tipa $n \times m$.

Napomena.

Ako graf ima puno bridova, tada je matrica incidencije znatno veća od matrice susjedstva pa za nju treba u tom slučaju više memorije da bi se ona spremila u računalo. Zbog toga se češće u praksi koristi matrica susjedstva za reprezentaciju grafa na računalu. Računalo ne zna raditi sa slikama, tj. sa grafičkim prikazima grafova kako mi to radimo u većini slučajeva na manjim grafovima, nego računalo s grafom radi preko njegove matrice susjedstva (ili neke druge matrice koja na neki način opisuje strukturu grafa). Stoga svaki algoritam koji ćemo spomenuti ovdje ili neko svojstvo grafa, mi ćemo ga većinom objasniti grafički, tj. pomoću slike koja reprezentira graf. Dobra vježba

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

za vas je da vi uvijek razmislite kako ćete takav algoritam implementirati na računalu ili kako ćete računalo natjerati da umjesto vas provjeri da li neki graf ima neko svojstvo ili nema. Jasno, u tom slučaju treba gledati da je graf zadan svojom matricom susjedstva (a za vježbu je opet dobro pogledati kako bi algoritam funkcionirao da je graf zadan matricom incidencije). Prva jednostavna vježba na tu temu je sljedeći zadatak.

Zadatak 6.1.

Opišite i implementirajte algoritam koji će za zadani graf provjeriti da li je on regularan i u slučaju da jest, odrediti njegov stupanj regularnosti.

Propozicija 6.4.

Neka je G jednostavan graf s n vrhova. Tada vrijedi:

i. $a_{ii} = 0$, *tj. na dijagonali matrice susjedstva se nalaze nule.*
ii. $a_{ij} = a_{ji}$, *tj. matrica susjedstva je simetrična.*
iii. *Broj jedinica u i-tom retku jednak je broju jedinica u i-tom stupcu.*

Dokaz.

i. Kako je G jednostavan graf, tada G ne sadrži petlje pa je $a_{ii} = 0$ za svaki $i = 1, \ldots, n$.

(ii) Ako je $v_i \sim v_j$, tada je i $v_j \sim v_i$ pa je A simetrična matrica. Vrijedi i obrnuto. Simetrične matrice čiji elementi su nule i jedinice, i imaju nule na glavnoj dijagonali mogu se smatrati matricama susjedstva nekog jednostavnog grafa.

(iii) Tvrdnja je posljedica toga što je matrica susjedstva simetrična matrica.



Primjer 6.17.

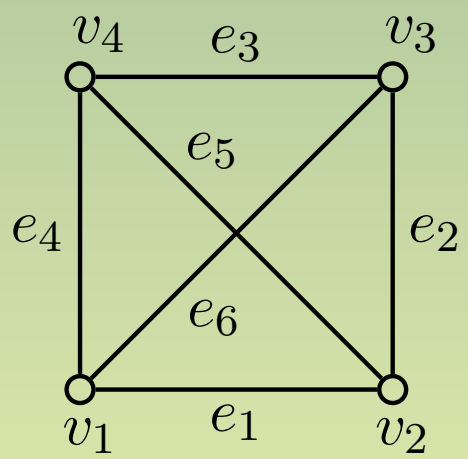
Napišite matricu susjedstva i incidencije grafa K_4.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Primjer 6.17.

Napišite matricu susjedstva i incidencije grafa K_4.

Rješenje.



$$A(K_4) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$M(K_4) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Primjer 6.18.

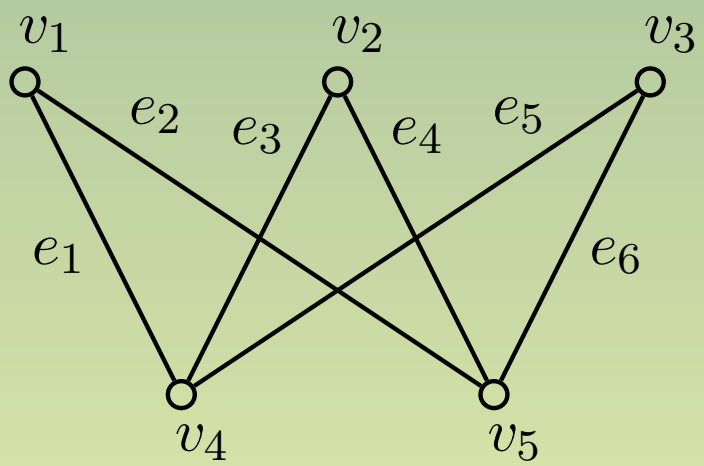
Napišite matricu susjedstva i incidencije grafa $K_{3,2}$.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Primjer 6.18.

Napišite matricu susjedstva i incidencije grafa $K_{3,2}$.

Rješenje.



$$A(K_{3,2}) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$M(K_{3,2}) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Primjer 6.19.

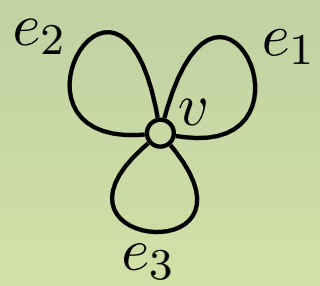
Napišite matricu susjedstva i incidencije trivijalnog grafa sa tri petlje.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Primjer 6.19.

Napišite matricu susjedstva i incidencije trivijalnog grafa sa tri petlje.

Rješenje.



$$A(G) = \begin{matrix} \\ v \end{matrix} \begin{matrix} v \\ \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$M(G) = \begin{matrix} \\ v \end{matrix} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Primjer 6.20.

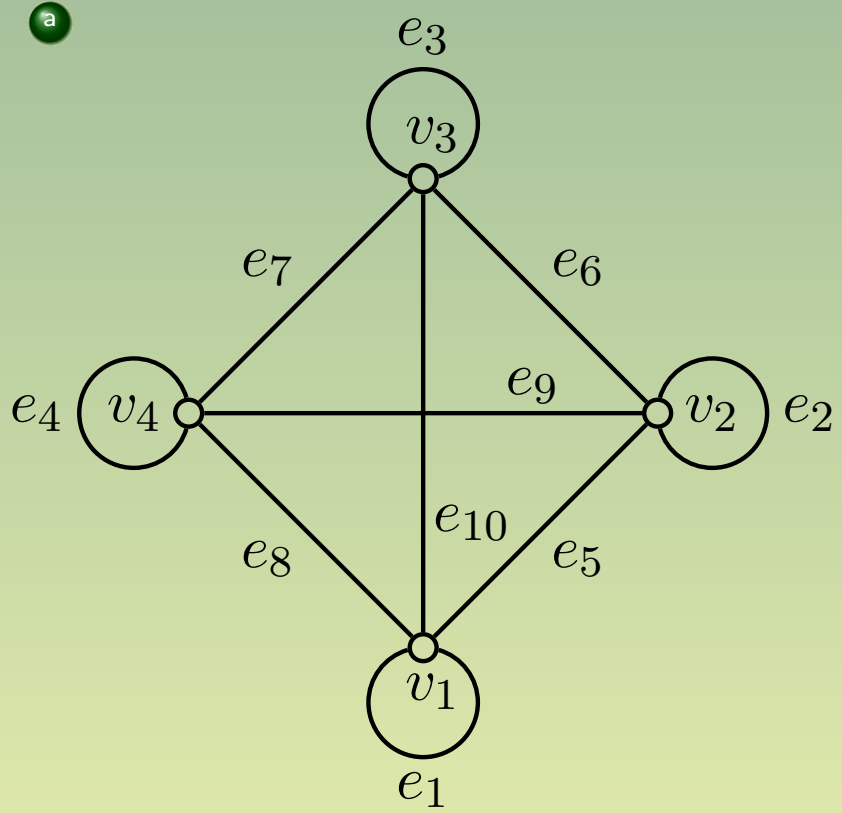
Zadane su matrice susjedstva. Nacrtajte pripadne grafove, odredite stupnjeve vrhova i provjerite da li je pripadni graf jednostavan i regularan. Odredite i matrice incidencije pojedinih grafova.

a) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Rješenje.

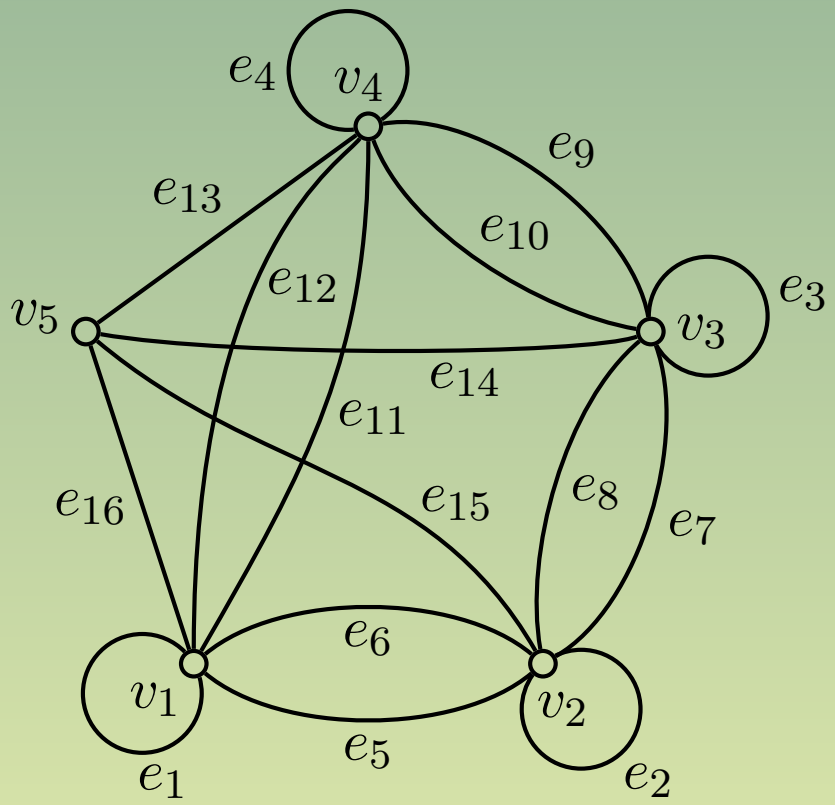
a



- graf je 5-regularan
- graf nije jednostavan jer sadrži petlje

$$M_1 = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

b



- graf nije jednostavan jer sadrži petlje i višestruke bridove
- graf nije regularan jer svi vrhovi su stupnja 7 osim vrha v_5 koji je stupnja 4

$$M_2 = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrice permutacija

Očito je da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 6.1.

Grafovi G_1 i G_2 su izomorfni ako i samo ako se njihovi vrhovi mogu označiti tako da su im matrice susjedstva jednake.

Međutim, isto tako je jasno da istom grafu možemo pridružiti više različitih matrica susjedstva ovisno o tome kako ćemo rasporediti vrhove u matricu. Stoga različite matrice susjedstva mogu predstavljati isti graf, odnosno izomorfne grafove.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Pitamo se ovdje koliko jako smiju biti različite matrice susjedstva dvaju grafova da bi one predstavljale izomorfne grafove. Vidjet ćemo da u biti ne smiju biti jako različite, a da bismo opisali njihovu različitost trebat će nam matrice permutacija.

Sjetimo se da je **permutacija** skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ svaka bijekcija

$$p : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Skup svih permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ označavamo sa S_n. Svaku permutaciju iz S_n možemo reprezentirati pomoću $2 \times n$ matrice na sljedeći način.

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ p(1) & p(2) & p(3) & \cdots & p(n-1) & p(n) \end{pmatrix}$$

U takvom obliku lagano računamo inverz permutacije jer je

$$p^{-1} = \begin{pmatrix} p(1) & p(2) & p(3) & \cdots & p(n-1) & p(n) \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

s time da još sortiramo stupce tako da elementi prvog retka budu poredani u rastućem poretku.

Na primjer, permutaciju $p \in S_5$ za koju je

$$p(1) = 5,\ p(2) = 3,\ p(3) = 1,\ p(4) = 2,\ p(5) = 4$$

možemo matrično zapisati

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Njezin inverz je tada

$$p^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

odnosno nakon sortiranja stupaca

$$p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrica permutacije je matrica kojoj su elementi nule ili jedinice i koja u svakom retku i u svakom stupcu ima točno jednu jedinicu. Iz definicije slijedi da je matrica permutacije kvadratna matrica. Svaka matrica permutacije može se dobiti permutiranjem redaka (ili stupaca) jedinične matrice.

Pogledajmo na koji način možemo svaku permutaciju reprezentirati matricom permutacije. Radi jednostavnosti, pogledajmo to na primjeru permutacije $p \in S_5$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Isti princip vrijedi za bilo koju permutaciju $p \in S_n$.

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. redak jedinične matrice pišemo u 5. redak
2. redak jedinične matrice pišemo u 3. redak
3. redak jedinične matrice pišemo u 1. redak
4. redak jedinične matrice pišemo u 2. redak
5. redak jedinične matrice pišemo u 4. redak

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrica permutacije P reprezentira permutaciju p.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p \leftrightarrow P \qquad p^{-1} \leftrightarrow P^T$$

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Zadatak 6.2.

Dokažite: ako je P matrica permutacije, tada je $P^{-1} = P^T$. Uočite da obrat ne vrijedi. Sjetite se ortogonalnih matrica.

Pogledajmo sada što se događa kada neku kvadratnu matricu pomnožimo s lijeva ili zdesna nekom matricom permutacije. Radi jednostavnosti pogledat ćemo na primjeru kvadratne matrice četvrtog reda. Analogni zaključci vrijede i za kvadratnu matricu bilo kojeg reda.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ x & y & z & w \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$PA = \begin{bmatrix} x & y & z & w \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ p & q & r & s \end{bmatrix}$$

3. redak $\longrightarrow$ 1. redak

1. redak $\longrightarrow$ 2. redak

4. redak $\longrightarrow$ 3. redak

2. redak $\longrightarrow$ 4. redak

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ x & y & z & w \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AP = \begin{bmatrix} b & d & a & c \\ q & s & p & r \\ y & w & x & z \\ \beta & \delta & \alpha & \gamma \end{bmatrix}$$

2. stupac $\longrightarrow$ 1. stupac

4. stupac $\longrightarrow$ 2. stupac

1. stupac $\longrightarrow$ 3. stupac

3. stupac $\longrightarrow$ 4. stupac

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ x & y & z & w \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix} \qquad PAP^T = \begin{bmatrix} z & x & w & y \\ c & a & d & b \\ \gamma & \alpha & \delta & \beta \\ r & p & s & q \end{bmatrix}$$

3. redak $\rightarrow$ 1. redak
1. redak $\rightarrow$ 2. redak
4. redak $\rightarrow$ 3. redak
2. redak $\rightarrow$ 4. redak

3. stupac $\rightarrow$ 1. stupac
1. stupac $\rightarrow$ 2. stupac
4. stupac $\rightarrow$ 3. stupac
2. stupac $\rightarrow$ 4. stupac

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ x & y & z & w \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix} \qquad PAQ = \begin{bmatrix} x & w & y & z \\ a & d & b & c \\ \alpha & \delta & \beta & \gamma \\ p & s & q & r \end{bmatrix}$$

3. redak $\to$ 1. redak
1. redak $\to$ 2. redak
4. redak $\to$ 3. redak
2. redak $\to$ 4. redak

1. stupac $\to$ 1. stupac
4. stupac $\to$ 2. stupac
2. stupac $\to$ 3. stupac
3. stupac $\to$ 4. stupac

Sada možemo izreći sljedeći teorem.

Teorem 6.2.

Dva su grafa s pripadnim matricama susjedstva A i B izomorfna ako i samo ako postoji matrica permutacije P takva da je $B = PAP^T$.

Dakle, dvije matrice susjedstva predstavljaju izomorfne grafove akko se njihovi reci odnosno stupci razlikuju do na poredak pojedinih vrhova. Stvar je u tome da možda nismo u isti redak (odnosno stupac) stavili pridružene vrhove u izomorfizmu pa su zbog toga matrice susjedstva izomorfnih grafova "malo različite", ali se pogodno odabranom matricom permutacije svaka od matrica može svesti na onu drugu matricu.

Napomena.

Prethodni teorem nam daje jedan algoritam za ispitivanje izomorfnosti dva grafa. Naime, trebali bismo u najgorem slučaju proći kroz čitav skup S_n permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ da bismo provjerili da li su dva grafa s n vrhova izomorfni ako su oni zadani svojim matricama susjedstva. U najgorem slučaju bi se petlja ponavljala $n!$ puta, što nije tako efikasno. Međutim, za male n-ove to može proći i može se na brz i jednostavan način provjeriti da li su dva grafa sa desetak vrhova izomorfni ili nisu. Za $n = 10$ bi se petlja u najgorem slučaju ponavljala $3\,628\,800$ pa bismo u nekom razumnom vremenu dobili rezultat, tim više ako u nekom trenutku za neku permutaciju dobijemo da su matrice

susjedstva jednake, možemo prekinuti petlju i zaključiti da su grafovi izomorfni. Najgori slučaj je ako grafovi nisu izomorfni jer tada petlju moramo ponoviti svih $n!$ puta da bismo mogli zaključiti da grafovi stvarno nisu izomorfni.
Ispitivanje izomorfnosti dva grafa nije jednostavan problem ako grafovi imaju veliki broj vrhova i bridova. Stoga je ponekad pametnije prvo ispitati neka druga svojstva grafova, npr. da li imaju isti broj bridova, da li imaju iste stupnjeve vrhova i ostala svojstva grafova koja ostaju sačuvana kod izomorfizma grafova jer u slučaju da neko od tih svojstava nije isto u oba grafa, možemo odmah zaključiti da grafovi nisu izomorfni.

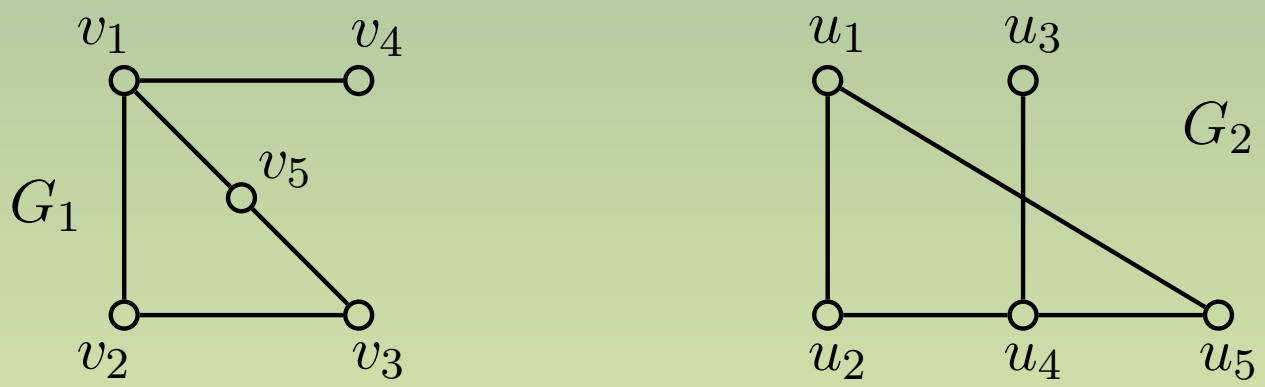
Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Zadatak 6.3.

Napišite algoritam koji će na temelju ◂ teorema 6.2. *provjeriti da li su dva grafa izomorfni ili nisu. Povećavajte postepeno broj vrhova grafova (nemojte pretjerati u tome) i uočite kako vrijeme potrebno da se algoritam izvrši raste, pogotovo ako su zadani grafovi neizomorfni. Također, da algoritam bude efikasniji, u slučaju da ranije možete zaključiti da su grafovi izomorfni neka se petlja prekine.*

Primjer 6.21.

Zadani su grafovi



a. *Pronađite matrice susjedstva A_1 i A_2 zadanih grafova.*

b. *Dokažite da su grafovi G_1 i G_2 izomorfni tako da konstruirate jedan izomorfizam.*

c. *Pronađite matricu permutacije P takvu da je $PA_1P^T = A_2$.*

Rješenje.

a)

$$A_1 = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A_2 = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

b) Tražimo izomorfizam $\varphi : V(G_1) \to V(G_2)$ grafova G_1 i G_2. Kako je $d(v_1) = d(u_4) = 3$ i to su jedini vrhovi stupnja tri u grafovima G_1 i G_2, slijedi da mora biti $\varphi(v_1) = u_4$. Slično, $d(v_4) = d(u_3) = 1$ i to su jedini vrhovi stupnja jedan u grafovima G_1 i G_2 pa mora biti $\varphi(v_4) = u_3$.

Nadalje, kako u grafu G_1 vrijedi

$$v_3 \nsim v_1, \quad v_3 \nsim v_4$$

tada u grafu G_2 zbog čuvanja susjednosti mora vrijediti

$$\varphi(v_3) \nsim \varphi(v_1) = u_4, \quad \varphi(v_3) \nsim \varphi(v_4) = u_3$$

iz čega slijedi da mora biti $\varphi(v_3) = u_1$. Konačno, stavimo još $\varphi(v_2) = u_5$, $\varphi(v_5) = u_2$ (uočite da smo mogli staviti i obrnuto, tj. da je $\varphi(v_2) = u_2$, $\varphi(v_5) = u_5$). Na taj način smo dobili

$$\varphi(v_1) = u_4,\ \varphi(v_2) = u_5,\ \varphi(v_3) = u_1,\ \varphi(v_4) = u_3,\ \varphi(v_5) = u_2$$

bijekciju koja čuva susjednost, tj. φ je izomorfizam grafova G_1 i G_2.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

- Iz konstruiranog izomorfizma φ slijedi

$$\begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ u_4 & u_5 & u_1 & u_3 & u_2 \end{array}$$

iz čega možemo dobiti traženu matricu permutacije P. Naime, gornju shemu interpretiramo u terminu matrica A_1 i A_2 na sljedeći način:

1. redak od $A_1 \to$ 4. redak od A_2
2. redak od $A_1 \to$ 5. redak od A_2
3. redak od $A_1 \to$ 1. redak od A_2
4. redak od $A_1 \to$ 3. redak od A_2
5. redak od $A_1 \to$ 2. redak od A_2

1. stupac $A_1 \to$ 4. stupac od A_2
2. stupac $A_1 \to$ 5. stupac od A_2
3. stupac $A_1 \to$ 1. stupac od A_2
4. stupac $A_1 \to$ 3. stupac od A_2
5. stupac $A_1 \to$ 2. stupac od A_2

Stoga je tražena matrica permutacije P jednaka

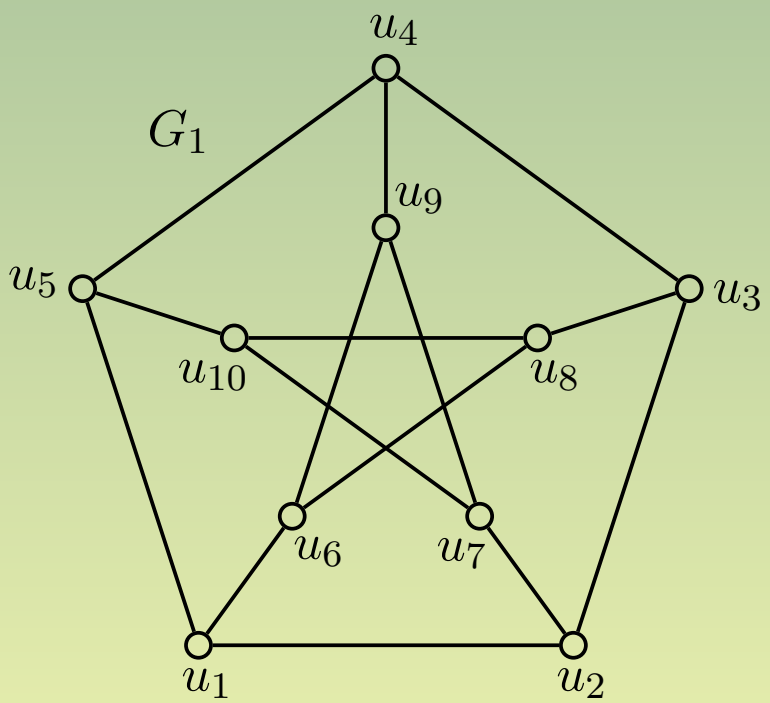
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

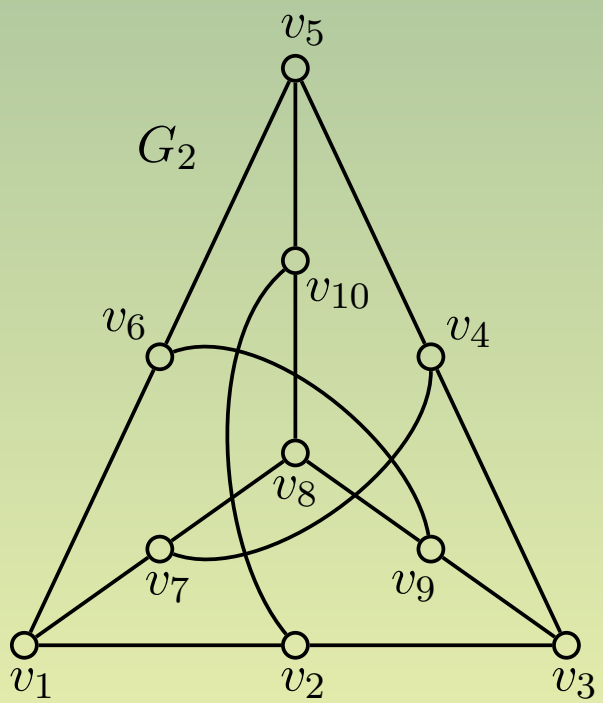
i za nju vrijedi

$$PA_1P^T = A_2.$$

Primjer 6.22.

Dokažite da su grafovi G_1 i G_2 izomorfni tako da konstruirate jedan izomorfizam između njih.





Pronađite i njihove matrice susjedstva A_1 i A_2 takve da i-tom retku u pojedinoj matrici pripada vrh u_i odnosno vrh v_i.
Pronađite matricu permutacije P za koju vrijedi $PA_1P^T = A_2$.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Rješenje.

Kako su oba grafa 3-regularna imamo dosta slobode, barem na početku, u konstrukciji izomorfizma (jasno, ako on postoji). Stoga način na koji ćemo početi konstrukciju izomorfizma nije jedinstven za ovaj slučaj (a i općenito ako su grafovi izomorfni može postojati više različitih izomorfizama između njih) pa vi za vježbu pokušajte konstruirati još neke izomorfizme između zadana dva grafa.

Tražimo dakle bijekciju $\varphi : V(G_1) \to V(G_2)$ koja čuva susjednost. Možemo, npr. početi na ovaj način.

$$\varphi(u_1) = v_1,\ \varphi(u_2) = v_2,\ \varphi(u_3) = v_3,\ \varphi(u_4) = v_4$$

Sa slike je jasno da je do ovog trenutka susjednost očuvana između vrhova s kojima smo počeli konstrukciju izomorfizma φ. Sada dalje nemamo već tako puno slobode za vrh u_5. Naime, u grafu G_1 je

$$u_5 \sim u_1, \quad u_5 \sim u_4$$

pa stoga u grafu G_2 mora biti

$$\varphi(u_5) \sim \varphi(u_1) = v_1, \quad \varphi(u_5) \sim \varphi(u_4) = v_4,$$

a to će biti jedino ako je $\varphi(u_5) = v_7$. Nadalje, kako je $u_6 \sim u_1$, tada mora biti $\varphi(u_6) \sim \varphi(u_1) = v_1$. Kako je v_6 još jedini vrh u G_2 koji je susjedan s v_1 i kojeg nismo iskoristili u konstrukciji izomorfizma φ, slijedi da mora biti $\varphi(u_6) = v_6$.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Analogno, $u_7 \sim u_2$ pa mora biti $\varphi(u_7) \sim \varphi(u_2) = v_2$, a jedini vrh u G_2 kojeg još nismo iskoristili i koji je susjedan s vrhom v_2 je vrh v_{10}. Stoga mora biti $\varphi(u_7) = v_{10}$. Nadalje, kako je $u_8 \sim u_3$, slijedi da mora biti $\varphi(u_8) \sim \varphi(u_3) = v_3$. Kako je vrh v_9 jedini neiskorišteni vrh susjedan s vrhom v_3, mora biti $\varphi(u_8) = v_9$. Isto tako,

$$u_9 \sim u_4, u_6, u_7 \;\Rightarrow\; \varphi(u_9) \sim v_4, v_6, v_{10}$$

pa mora biti $\varphi(u_9) = v_5$. Konačno,

$$u_{10} \sim u_5, u_8, u_7 \;\Rightarrow\; \varphi(u_{10}) \sim v_7, v_9, v_{10}$$

pa je $\varphi(u_{10}) = v_8$. Dakle, dobili smo bijekciju sa skupa vrhova G_1 na skup vrhova grafa G_2, a cijelo vrijeme smo pazili da se

čuva susjednost pa je konstruirana bijekcija φ izomorfizam grafova G_1 i G_2.

$$\begin{array}{cccccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_7 & v_6 & v_{10} & v_9 & v_5 & v_8 \end{array}$$

Napišimo sada matrice susjedstva grafova G_1 i G_2.

$$A_1 = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_2 = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matricu permutacije P za koju je $PA_1P^T = A_2$ dobivamo iz konstruiranog izomorfizma

$$\begin{array}{cccccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_7 & v_6 & v_{10} & v_9 & v_5 & v_8 \end{array}$$

na sljedeći način:

1. redak od $A_1 \to$ 1. redak od A_2
2. redak od $A_1 \to$ 2. redak od A_2
3. redak od $A_1 \to$ 3. redak od A_2
4. redak od $A_1 \to$ 4. redak od A_2
5. redak od $A_1 \to$ 7. redak od A_2
6. redak od $A_1 \to$ 6. redak od A_2
7. redak od $A_1 \to$ 10. redak od A_2
8. redak od $A_1 \to$ 9. redak od A_2
9. redak od $A_1 \to$ 5. redak od A_2
10. redak od $A_1 \to$ 8. redak od A_2

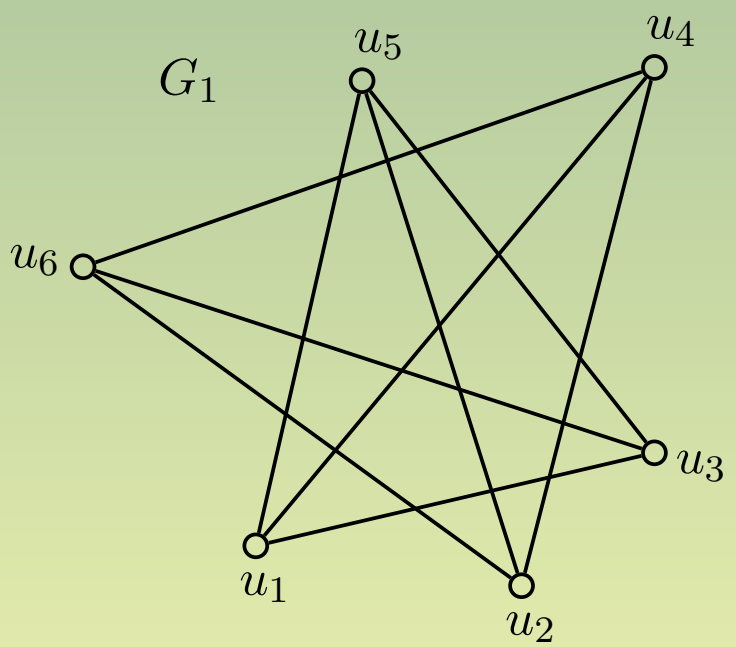
1. stupac $A_1 \to$ 1. stupac od A_2
2. stupac $A_1 \to$ 2. stupac od A_2
3. stupac $A_1 \to$ 3. stupac od A_2
4. stupac $A_1 \to$ 4. stupac od A_2
5. stupac $A_1 \to$ 7. stupac od A_2
6. stupac $A_1 \to$ 6. stupac od A_2
7. stupac $A_1 \to$ 10. stupac od A_2
8. stupac $A_1 \to$ 9. stupac od A_2
9. stupac $A_1 \to$ 5. stupac od A_2
10. stupac $A_1 \to$ 8. stupac od A_2

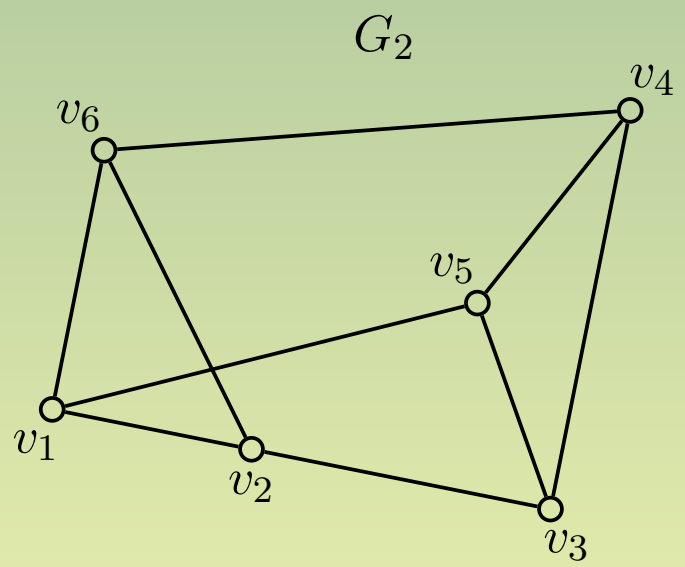
Stoga je tražena matrica permutacije P za koju je $PA_1P^T = A_2$ jednaka

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Primjer 6.23.

Dokažite da su grafovi G_1 i G_2 izomorfni tako da konstruirate jedan izomorfizam između njih.





Pronađite i njihove matrice susjedstva A_1 i A_2 takve da i-tom retku u pojedinoj matrici pripada vrh u_i odnosno vrh v_i.
Pronađite matricu permutacije P za koju vrijedi $PA_1P^T = A_2$.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Rješenje.

Napominjemo opet da izomorfizam kojeg ćemo konstruirati nije ni u ovom slučaju jedinstven pa vi za vježbu opet pokušajte konstruirati još neke izomorfizme između zadana dva grafa.

Tražimo bijekciju $\varphi : V(G_1) \to V(G_2)$ koja čuva susjednost. Možemo, npr. staviti da je $\varphi(u_1) = v_1$. Kako su vrhovi u_3, u_4, u_5 susjedni vrhu u_1, a vrhovi v_2, v_5, v_6 susjedni vrhu v_1, tada zbog čuvanja susjednosti vrhovi u_3, u_4, u_5 se moraju preslikati u vrhove v_2, v_5, v_6. U ovom trenutku imamo slobodu da odaberemo na koji ćemo način te vrhove pridružiti jedne drugima, pa stavimo da je

$$\varphi(u_3) = v_2,\ \varphi(u_4) = v_5,\ \varphi(u_5) = v_6.$$

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Nadalje, iz

$$u_2 \sim u_5 \;\Rightarrow\; \varphi(u_2) \sim \varphi(u_5) = v_6$$

iz čega slijedi da mora biti $\varphi(u_2) = v_4$ jer je v_4 još jedini nepotrošeni vrh koji je susjedan s vrhom v_6. Preostaje još jedino da stavimo $\varphi(u_6) = v_3$ i lagano se provjeri da i nakon toga susjednost ostaje sačuvana. Dakle, jedan mogući izomorfizam između grafova G_1 i G_2 je

$$\begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ v_1 & v_4 & v_2 & v_5 & v_6 & v_3 \end{array}$$

Matrice susjedstva grafova G_1 i G_2 su

$$A_1 = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad A_2 = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matricu permutacije P za koju je $PA_1P^T = A_2$ dobit ćemo pomoću izomorfizma kojeg smo prije konstruirali.

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

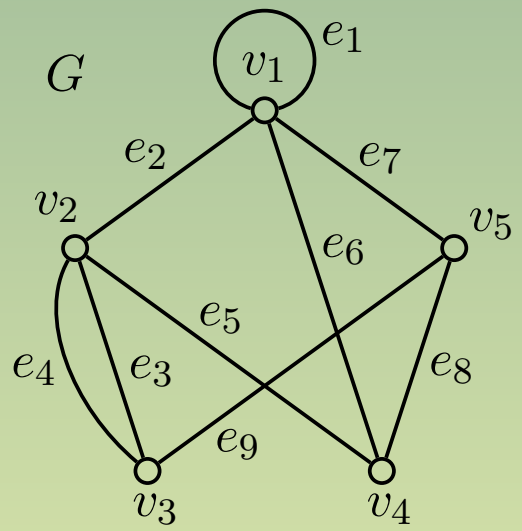
$$\begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ v_1 & v_4 & v_2 & v_5 & v_6 & v_3 \end{array}$$

1. redak od $A_1 \to$ 1. redak od A_2
2. redak od $A_1 \to$ 4. redak od A_2
3. redak od $A_1 \to$ 2. redak od A_2
4. redak od $A_1 \to$ 5. redak od A_2
5. redak od $A_1 \to$ 6. redak od A_2
6. redak od $A_1 \to$ 3. redak od A_2

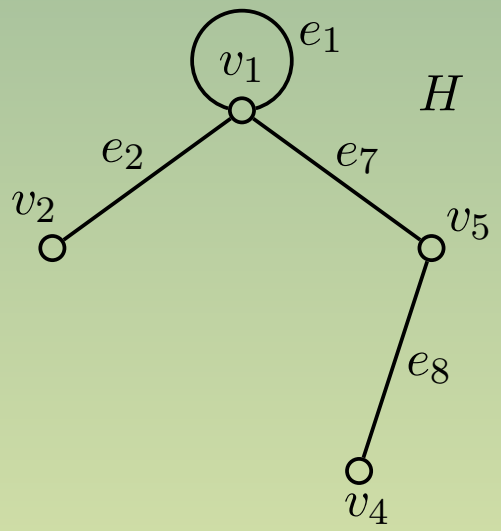
1. stupac $A_1 \to$ 1. stupac od A_2
2. stupac $A_1 \to$ 4. stupac od A_2
3. stupac $A_1 \to$ 2. stupac od A_2
4. stupac $A_1 \to$ 5. stupac od A_2
5. stupac $A_1 \to$ 6. stupac od A_2
6. stupac $A_1 \to$ 3. stupac od A_2

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice susjedstva i incidencije grafa i podgrafa



$H \subseteq G$

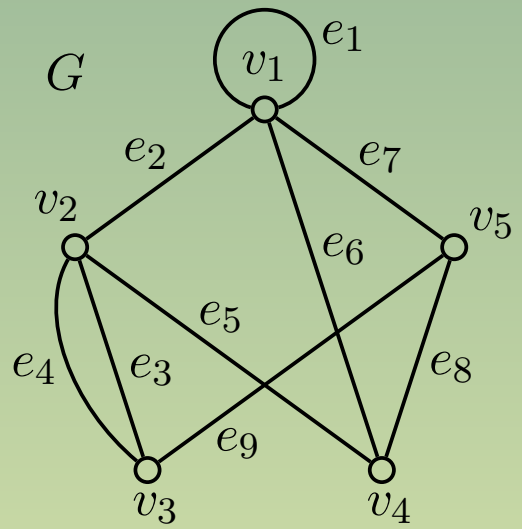


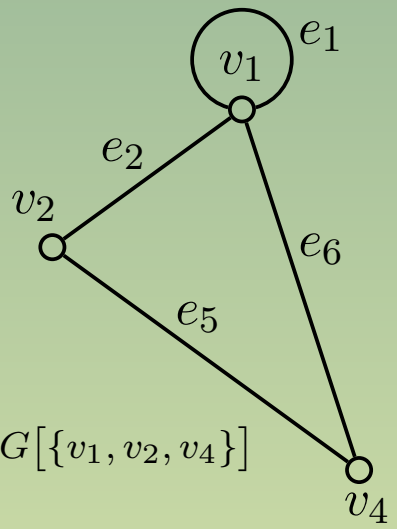
$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A(H) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$M(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$M(H) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$





$H = G[\{v_1, v_2, v_4\}]$

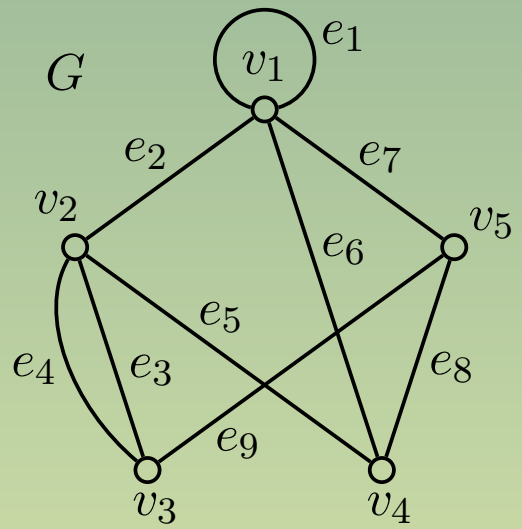
$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A(H) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

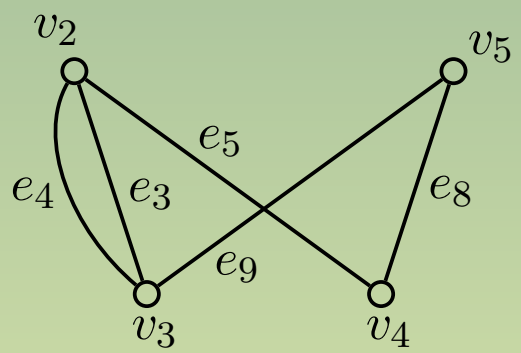
$$M(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$M(H) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi



$H = G - v_1$

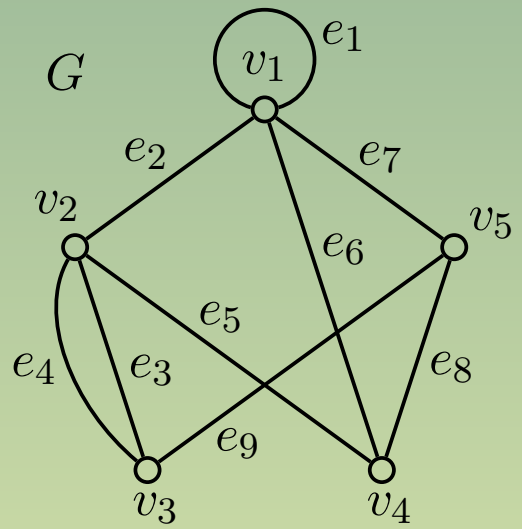


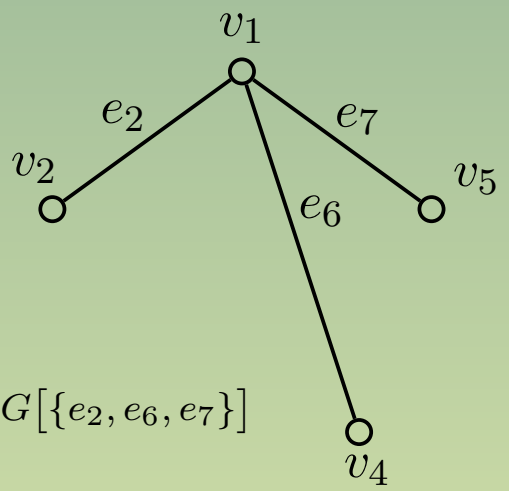
$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A(H) = \begin{array}{c} \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$M(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$M(H) = \begin{array}{c} \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_3 & e_4 & e_5 & e_8 & e_9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$





$H = G[\{e_2, e_6, e_7\}]$

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A(H) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$M(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$M(H) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_2 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Zadatak 6.4.

Gledajući prethodne primjere, smislite neki algoritam koji će za zadana dva grafa odrediti da li je neki od njih podgraf onog drugog. Probajte gledati i neke specijalne slučajeve, npr. da se radi o jednostavnim grafovima ili pak da ispitujete da li je neki graf inducirani podgraf nekog drugog grafa i slično. Pritom pripazite, ne moraju "odgovarajući" vrhovi i bridovi dvaju grafova biti u istim recima odnosno stupcima matrica susjedstva odnosno matrica incidencije kako su oni bili poredani u prethodnim primjerima. Da li je lakše kod toga raditi sa matricama susjedstva ili sa matricama incidencije ako ne marimo za uštedu memorije? Razmislite koliko je vaš algoritam efikasan. Da li je problem ispitivanja podgrafa jednako težak kao i problem ispitivanja izomorfnosti dva grafa?

Napomena.

Grafovi koji imaju jako puno vrhova, a malo bridova, njihove matrice susjedstva su velikih dimenzija, ali imaju jako puno nula. Takve matrice je nezgodno spremati u memoriju računala tako da spremamo svaki element jer time trošimo puno memorije, a možda je matrica tako velikih dimenzija da niti ne stane u memoriju računala. Jedan zgodan način spremanja takvih matrica je pomoću rječnika. Za ključeve (engl. keys) uzmemo adrese elemenata različitih od nule u matrici, a za vrijednosti pojedinih ključeva (engl. values) uzmemo elemente koji se nalaze na zadanim adresama.

Na primjer, u programskom jeziku `Python` bismo matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

spremili pomoću rječnika na sljedeći način (u `Pythonu` indeksi redaka i stupaca počinju od nule, dakle prvi redak i stupac imaju indeks 0, drugi redak i stupac indeks 1,...):

```
a={(0,0):1,(0,1):1,(0,4):1,(1,0):1,(1,2):2,
(1,3):1,(2,1):2,(3,0):1,(3,1):1,(4,3):1}
```

Osnovni pojmovi iz teorije grafova
Osnovne definicije
Riješeni primjeri
Komplementarni graf
Linijski graf
Izomorfizam grafova
Podgrafovi
Matrice i grafovi
Matrica permutacije
Matrice i podgrafovi

Napišemo li `a[0,4]`, `Python` će vratiti vrijednost 1, tj. element na adresi $(0, 4)$, kako je i spremljeno u rječnik `a`. Napišemo li `a[0,2]`, `Python` će javiti grešku jer u rječniku `a` nema nikog spremljenog pod ključem `(0,2)`. Međutim, nama to ne odgovara jer mi znamo da je na toj poziciji element 0 kojeg nismo radi uštede memorije spremali. Srećom, `Python` sadrži metodu `get` koja rješava taj problem. Na primjer, `a.get((0,3),0)` vraća vrijednost 1 jer je pod ključem `(0,3)` spremljena vrijednost 1 u rječniku `a`, dok `a.get((0,2),0)` vraća vrijednost 0 jer pod ključem `(0,2)` nitko nije spremljen u rječniku `a`, pa metoda `get` vraća svoj drugi parametar.

Dio VII

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Sadržaj

- Šetnje u grafu. Težinski grafovi
  - Šetnje u grafu
  - Teorem o šetnjama
  - Povezanost grafa
  - Riješeni primjeri
  - Karakterizacija bipartitnih grafova
  - Eulerovi grafovi
  - Hamiltonovi grafovi
  - Težinski grafovi
  - Dijkstrin algoritam
  - Složenost Dijkstrinog algoritma
  - Poboljšani Dijkstrin algoritam
  - Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
  - Floyd-Warshallov algoritam
  - Problem kineskog poštara

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Šetnje u grafu

Šetnja u grafu G je netrivijalni konačni niz

$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_k v_k$$

čiji su članovi naizmjence vrhovi v_i i bridovi e_i, tako da su krajevi od e_i vrhovi v_{i-1} i v_i za svaki $1 \leqslant i \leqslant k$. Kažemo još da je W šetnja od v_0 do v_k ili (v_0, v_k)-šetnja. Vrhovi v_0 i v_k zovu se redom **početak** i **kraj šetnje**, a $v_1, \ldots, v_{k-1}$ **unutarnji vrhovi** od W. Broj k se zove **duljina šetnje** W, a on je jednak ukupnom broju bridova (ne nužno različitih) u W.

Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Neka su

$$W = v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k \quad \text{i} \quad W' = v_ke_{k+1}v_{k+1}\cdots e_lv_l$$

šetnje u grafu G. Šetnja

$$W^{-1} = v_ke_kv_{k-1}\cdots e_1v_0$$

zove se **inverzna šetnja** od W, a šetnja

$$v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_ke_{k+1}v_{k+1}\cdots e_lv_l$$

dobivena nadovezivanjem šetnji W i W' kod vrha v_k se označava s WW'. **Dio šetnje** $W = v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$ je podniz $v_ie_{i+1}v_{i+1}\cdots e_jv_j$ susjednih članova od W. To se zove još i (v_i, v_j)-dio od W.

Zatvorena šetnja je šetnja $W = v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$ kod koje je $v_0 = v_k$.

Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Napomena.

U jednostavnom grafu šetnja $v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$ je potpuno određena nizom vrhova $v_0, v_1, \ldots, v_k$ zbog toga jer je u jednostavnom grafu svaki brid jednoznačno određen sa svojim krajevima.

Ako su bridovi $e_1, e_2, \ldots, e_k$ u šetnji

$$W = v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$$

međusobno različiti, onda se W zove **staza**. Ako su u stazi W i vrhovi međusobno različiti, onda se W zove **put**.

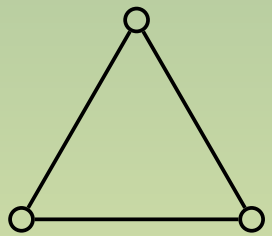
Ciklus je zatvorena šetnja kod koje su početak i unutrašnji vrhovi različiti. Ciklus C_k duljine k zove se k-**ciklus**. k-ciklus je paran ako je k paran, a neparan ako je k neparan. 3-ciklus se zove još i trokut. Kratko, ciklus je zatvoreni put.



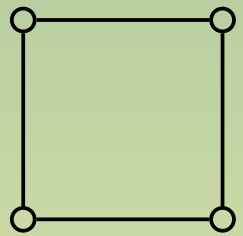
C_1



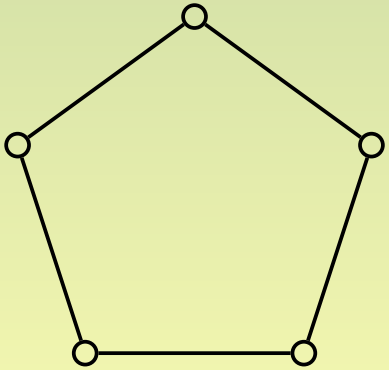
C_2



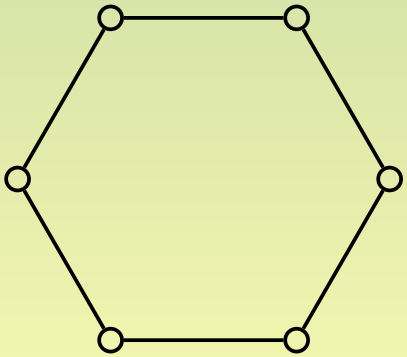
C_3



C_4

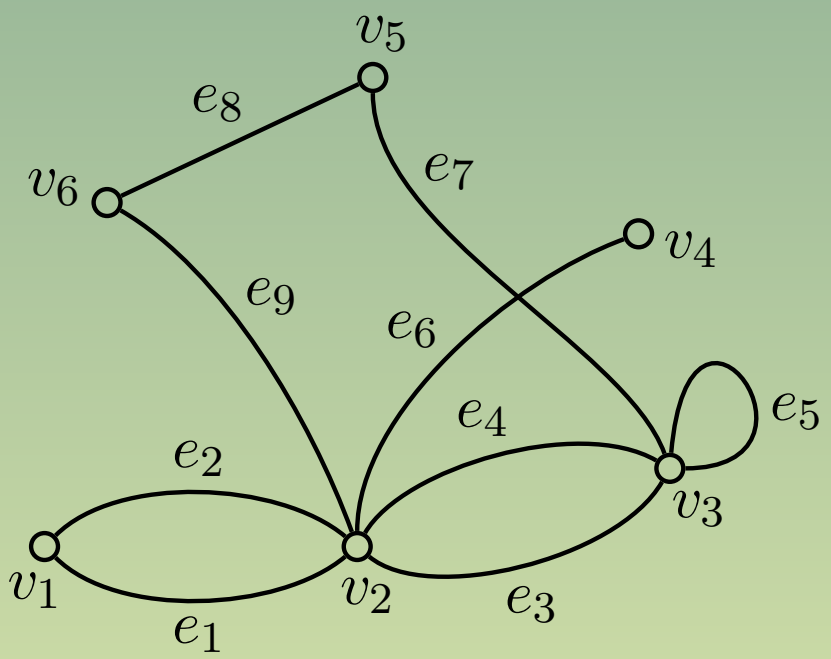


C_5



C_6

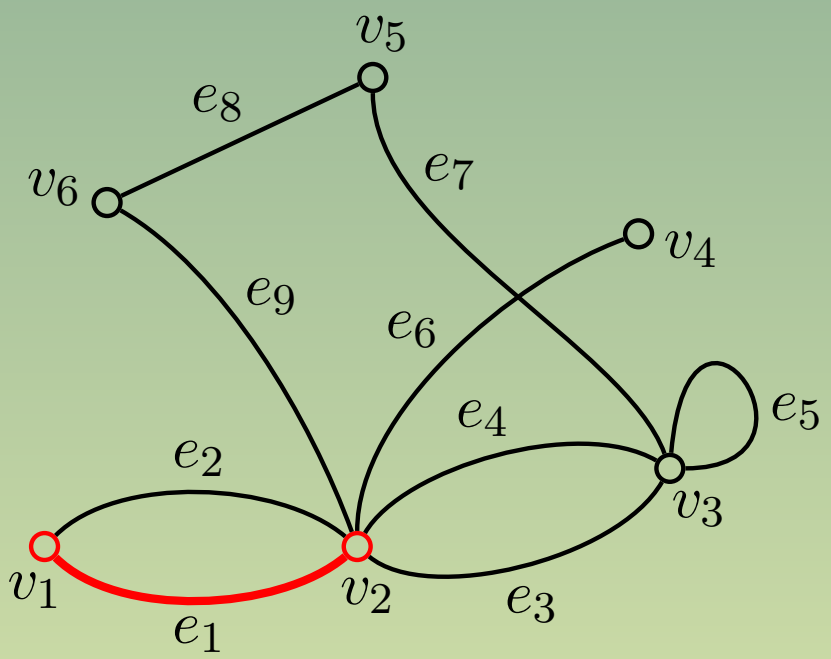
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



šetnja:

staza put

Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

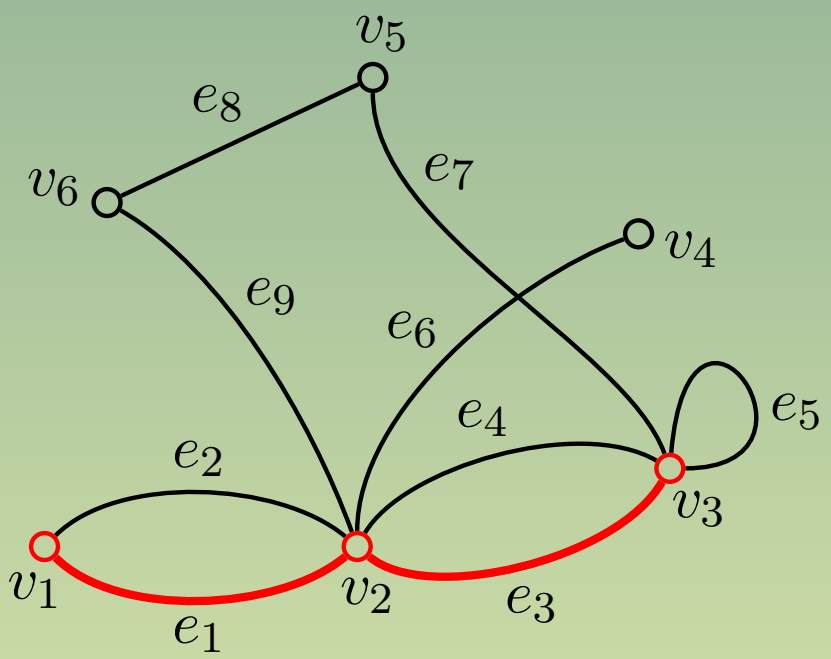


šetnja: $v_1 e_1 v_2$

staza put

(v_1, v_2)-šetnja duljine 1

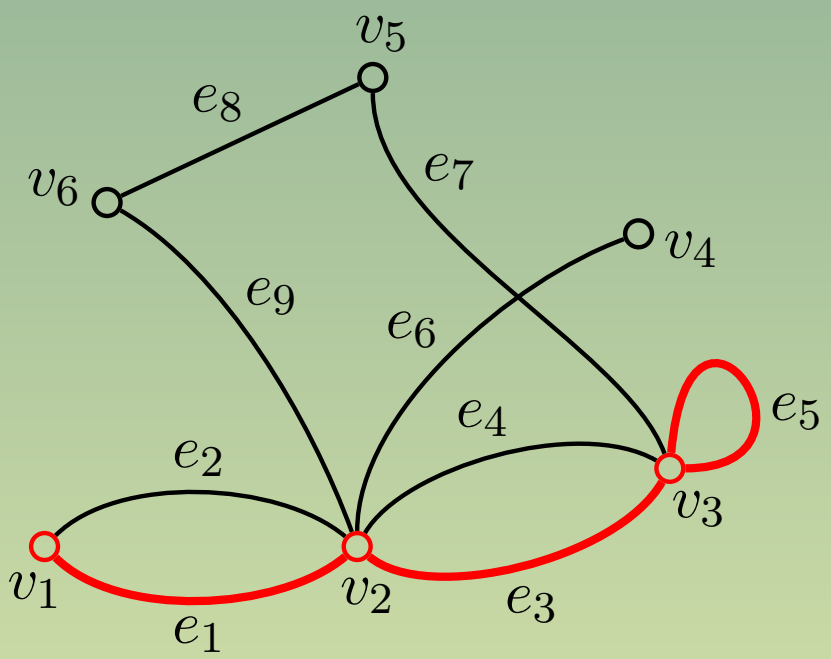
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



šetnja: $v_1 e_1 v_2 e_3 v_3$

staza put

(v_1, v_3)-šetnja duljine 2

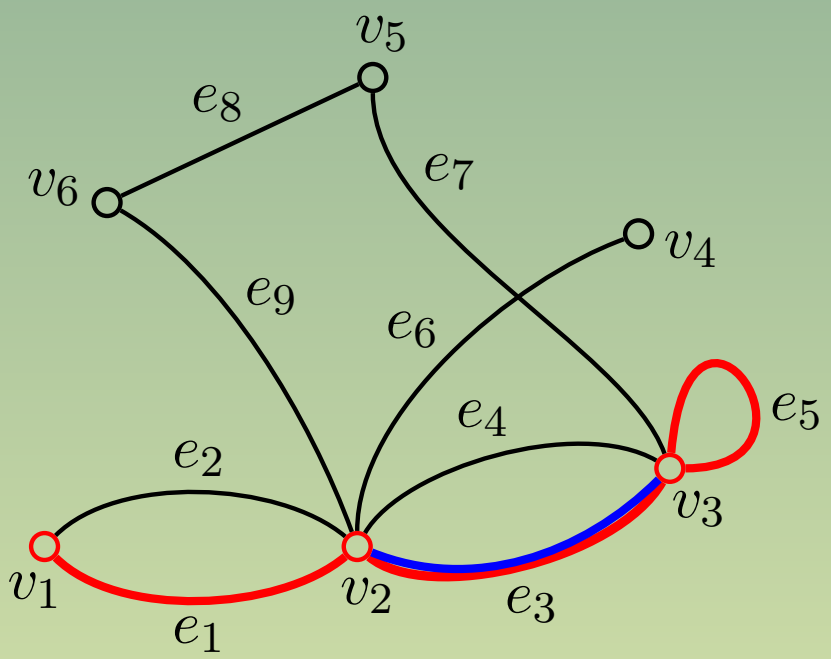


šetnja: $v_1 e_1 v_2 e_3 v_3 e_5 v_3$

staza put

(v_1, v_3)-šetnja duljine 3

Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

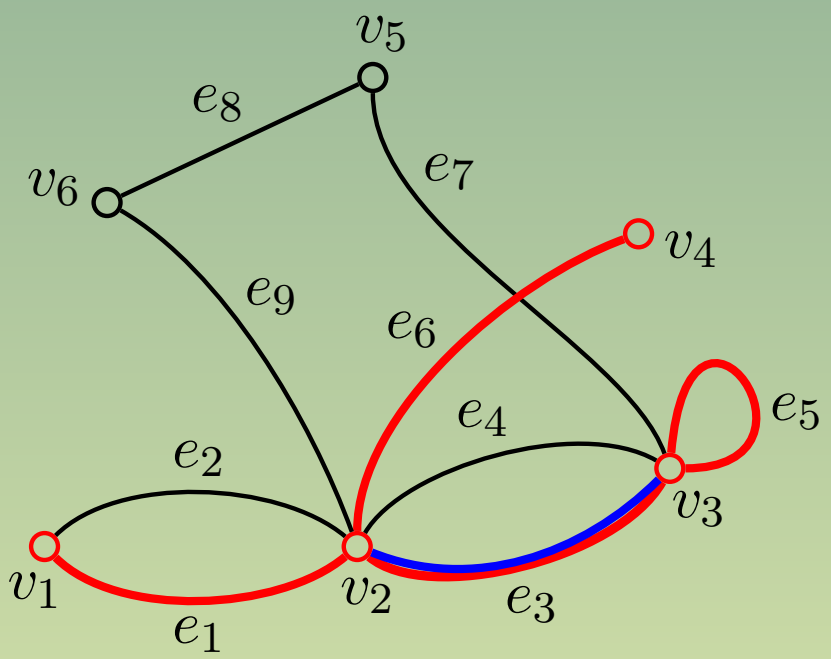


šetnja: $v_1 e_1 v_2 e_3 v_3 e_5 v_3 e_3 v_2$

staza put

(v_1, v_2)-šetnja duljine 4

Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



šetnja: $v_1 e_1 v_2 e_3 v_3 e_5 v_3 e_3 v_2 e_6 v_4$

staza put

(v_1, v_4)-šetnja duljine 5

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

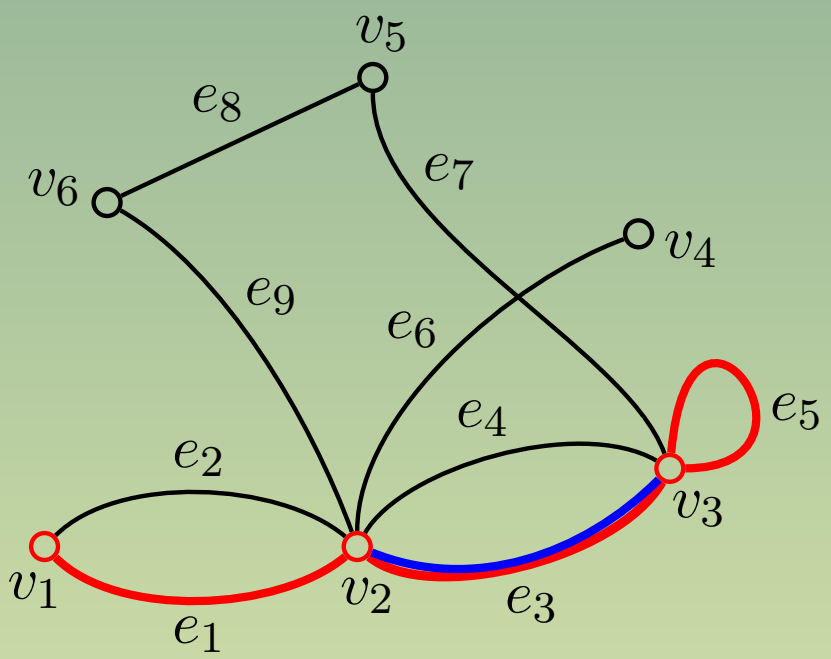
Složenost Dijkstrinog algoritma

Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

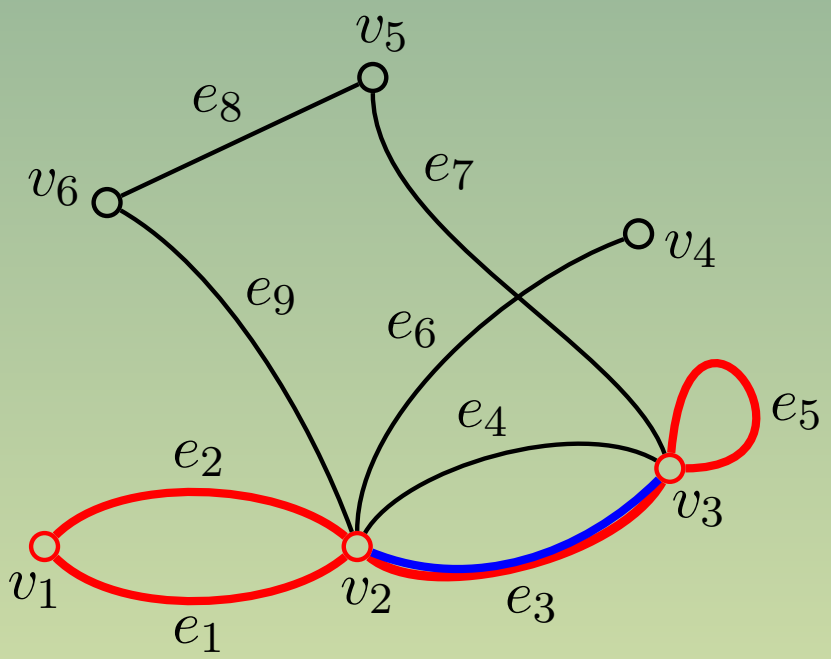


šetnja: $v_1 e_1 v_2 e_3 v_3 e_5 v_3 e_3 v_2$

staza put

(v_1, v_2)-šetnja duljine 4

Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

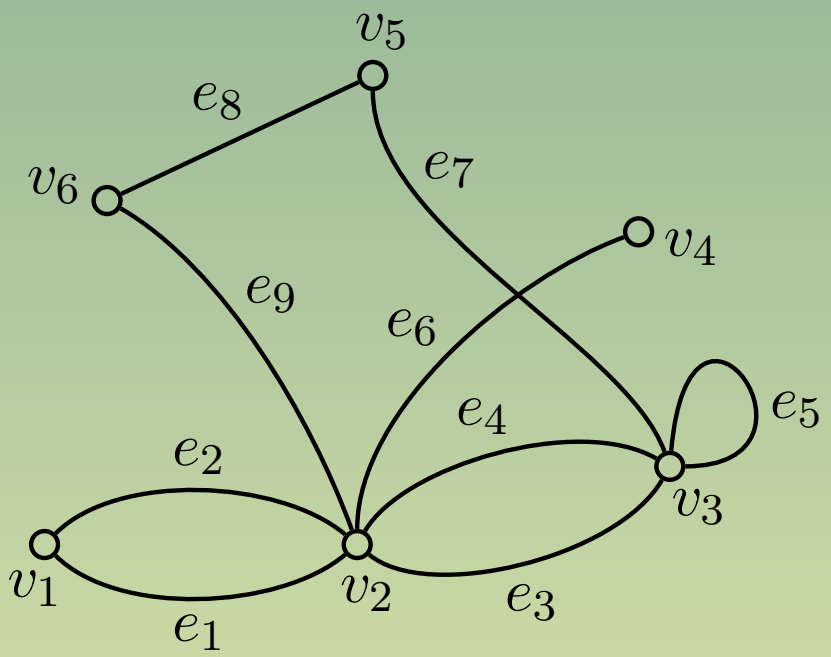


šetnja: $v_1e_1v_2e_3v_3e_5v_3e_3v_2e_2v_1$

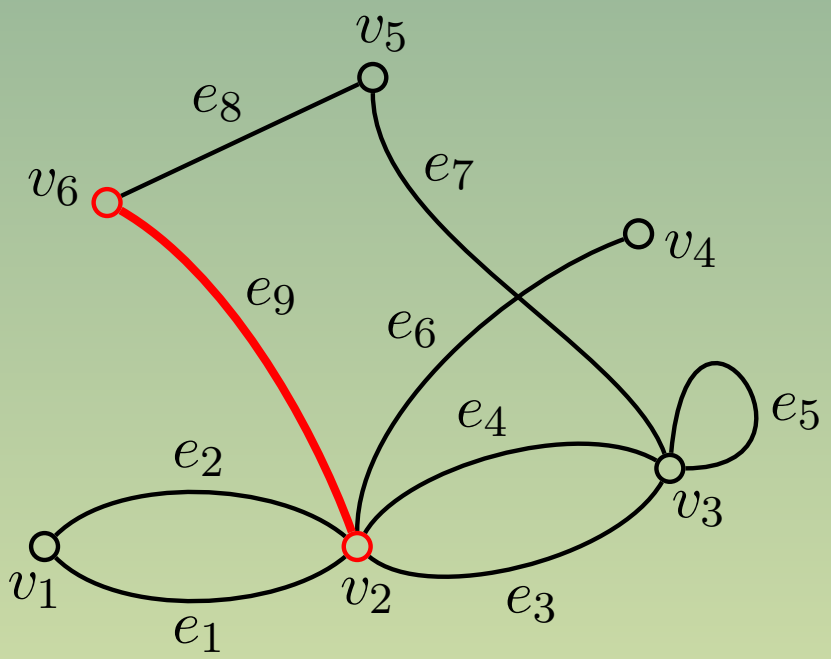
staza put

(v_1, v_1)-šetnja duljine 5 $\leftarrow$ zatvorena šetnja

Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

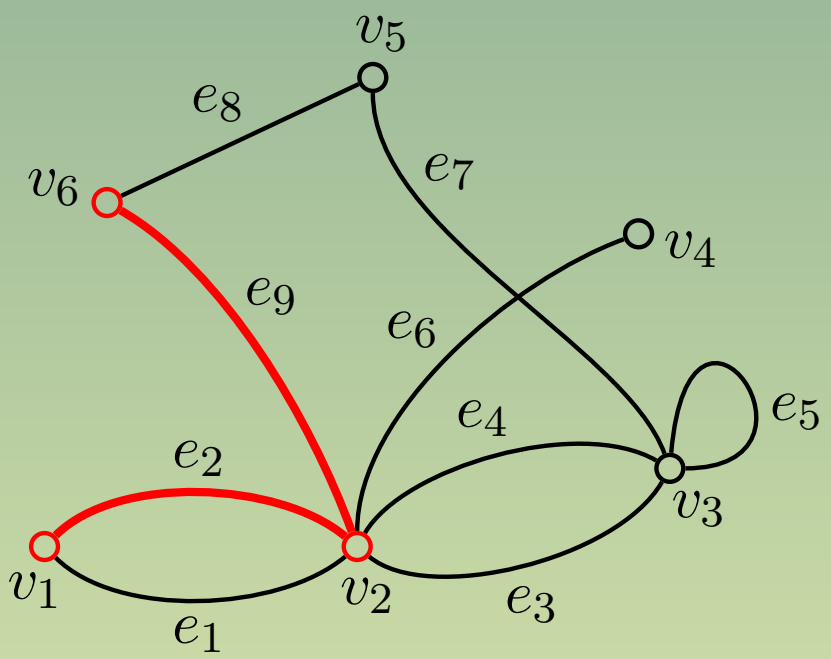


staza:



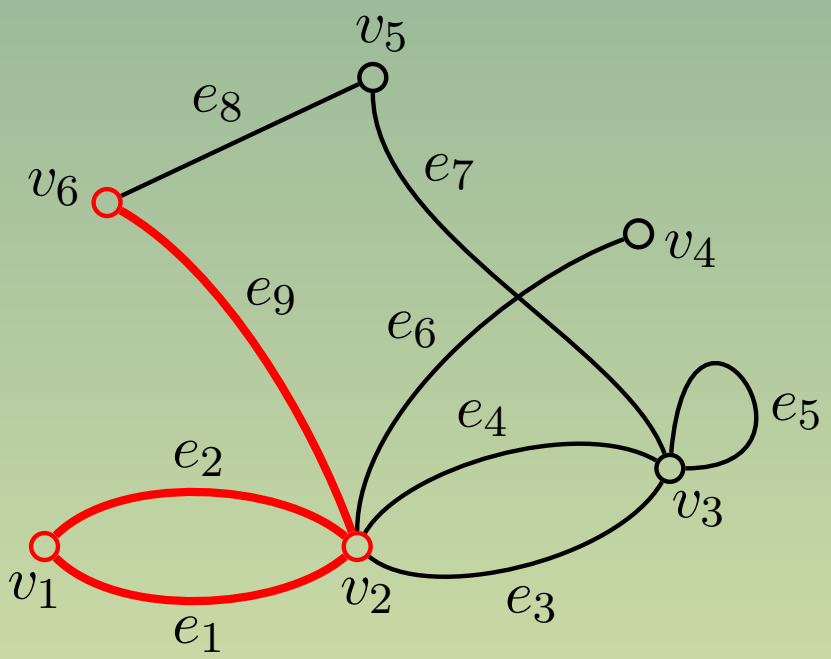
staza: $v_6 e_9 v_2$

(v_6, v_2)-staza duljine 1



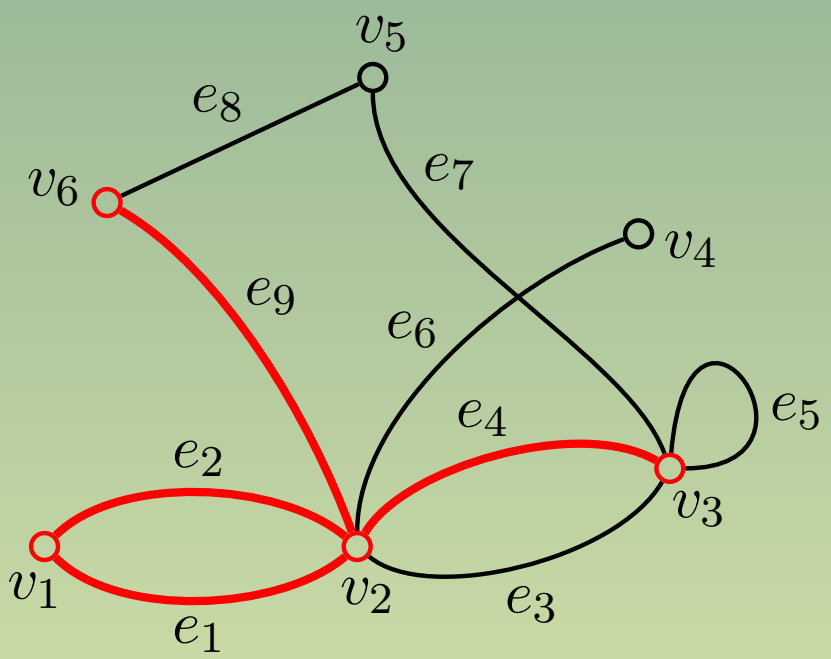
staza: $v_6 e_9 v_2 e_2 v_1$

(v_6, v_1)-staza duljine 2



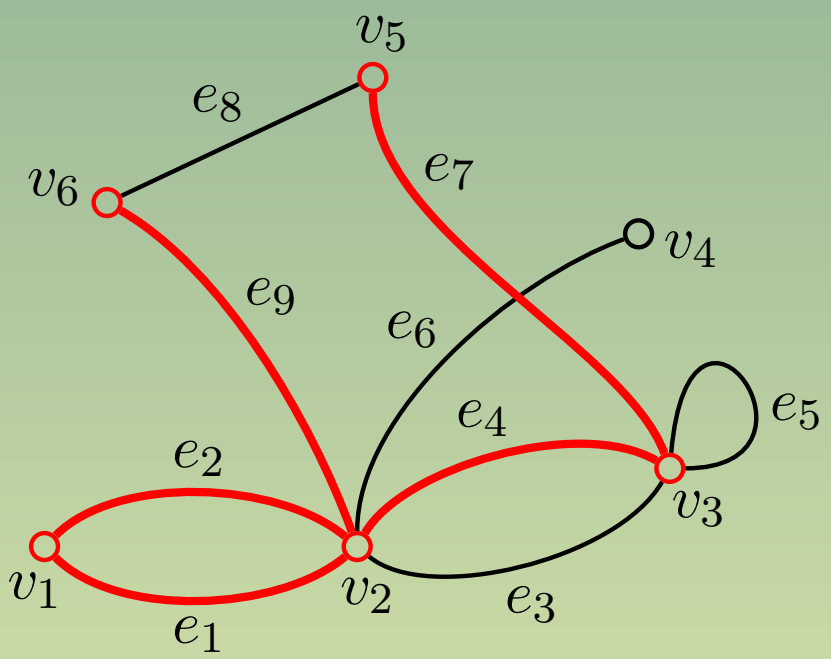
staza: $v_6 e_9 v_2 e_2 v_1 e_1 v_2$

(v_6, v_2)-staza duljine 3



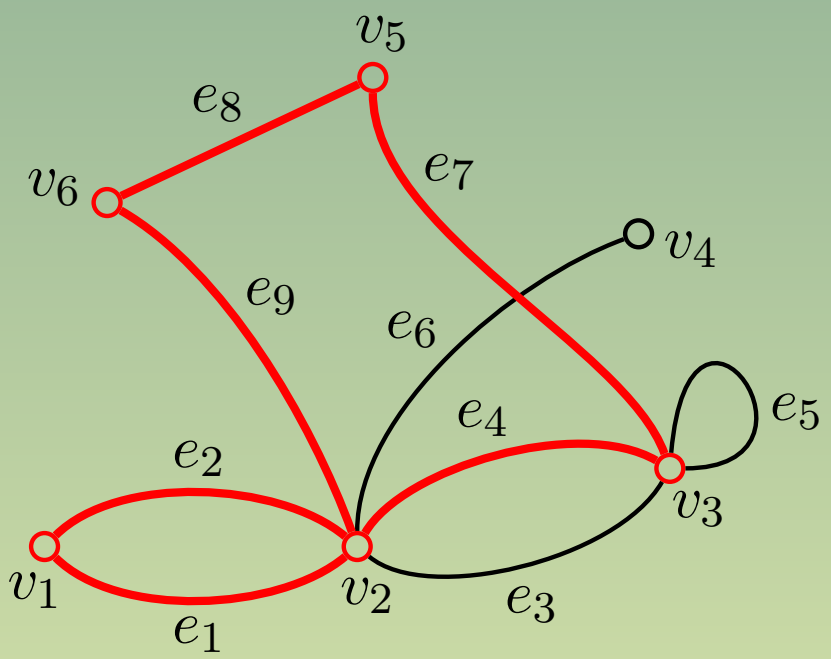
staza: $v_6 e_9 v_2 e_2 v_1 e_1 v_2 e_4 v_3$

(v_6, v_3)-staza duljine 4



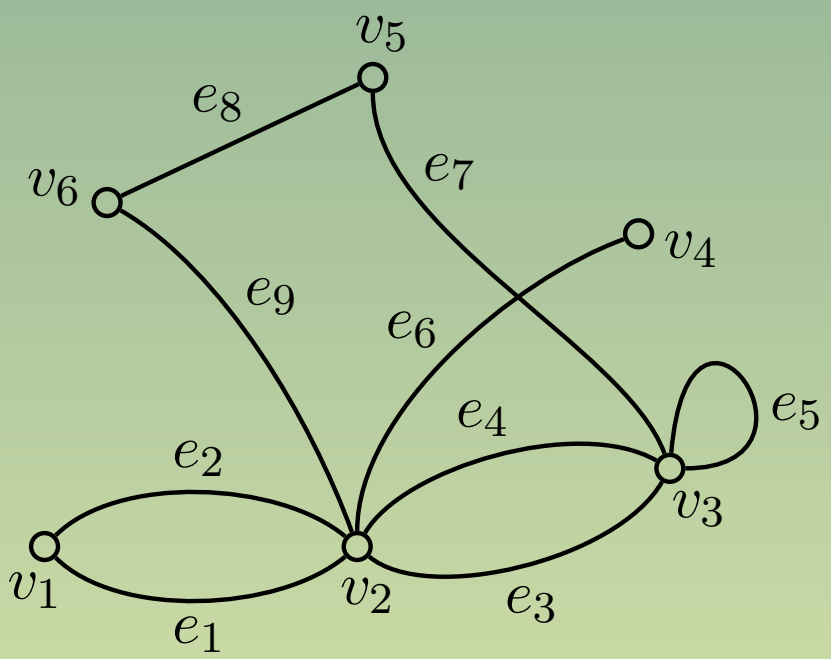
staza: $v_6 e_9 v_2 e_2 v_1 e_1 v_2 e_4 v_3 e_7 v_5$

(v_6, v_5)-staza duljine 5



staza: $v_6 e_9 v_2 e_2 v_1 e_1 v_2 e_4 v_3 e_7 v_5 e_8 v_6$

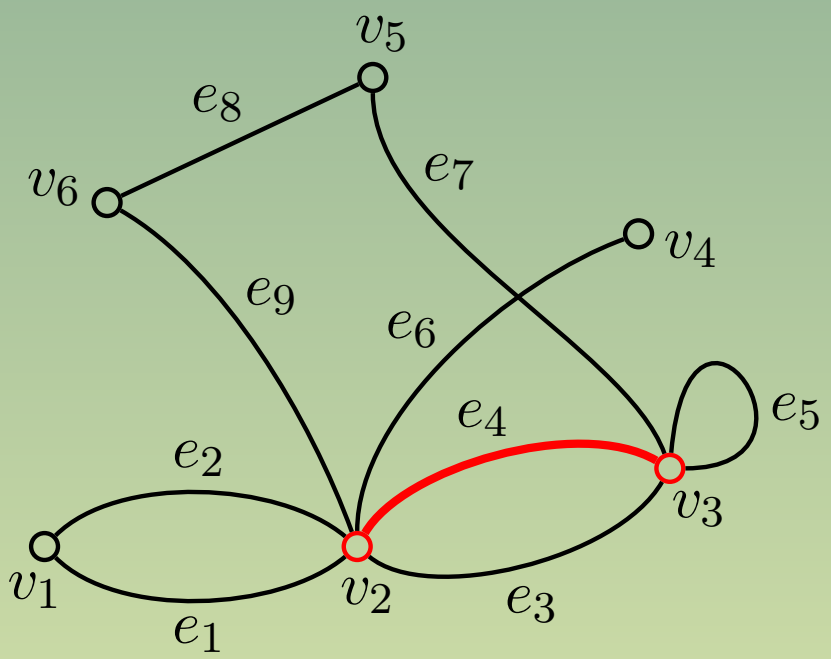
(v_6, v_6)-staza duljine 6 $\leftarrow$ zatvorena staza



put:

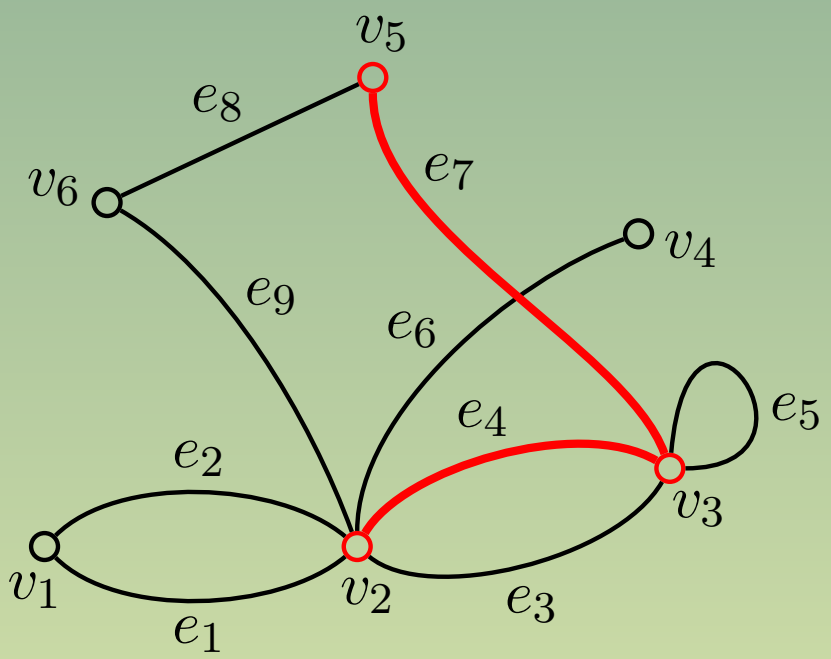
◂ šetnja ◂ staza

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



put: $v_2 e_4 v_3$

(v_2, v_3)-put duljine 1

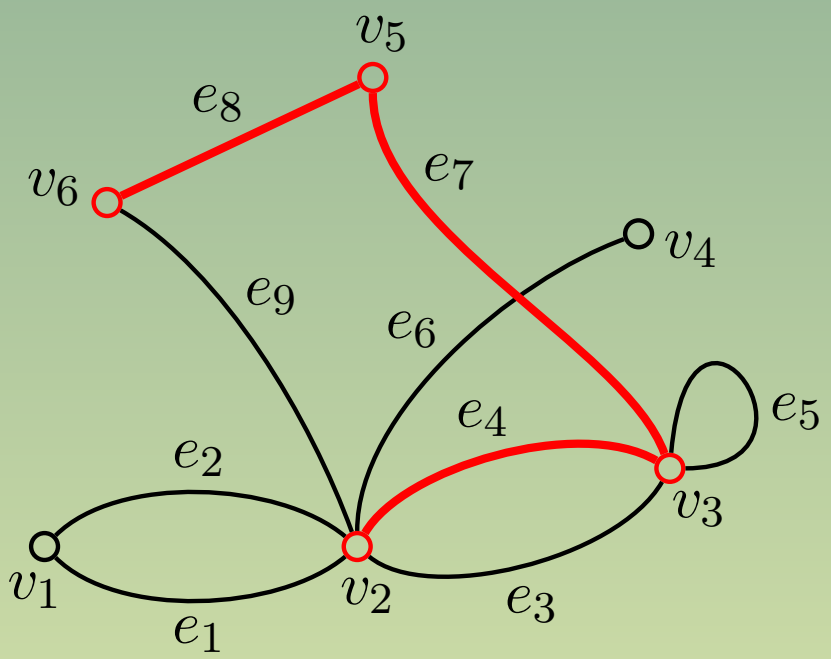


put: $v_2 e_4 v_3 e_7 v_5$

(v_2, v_5)-put duljine 2

◂ šetnja ◂ staza

Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

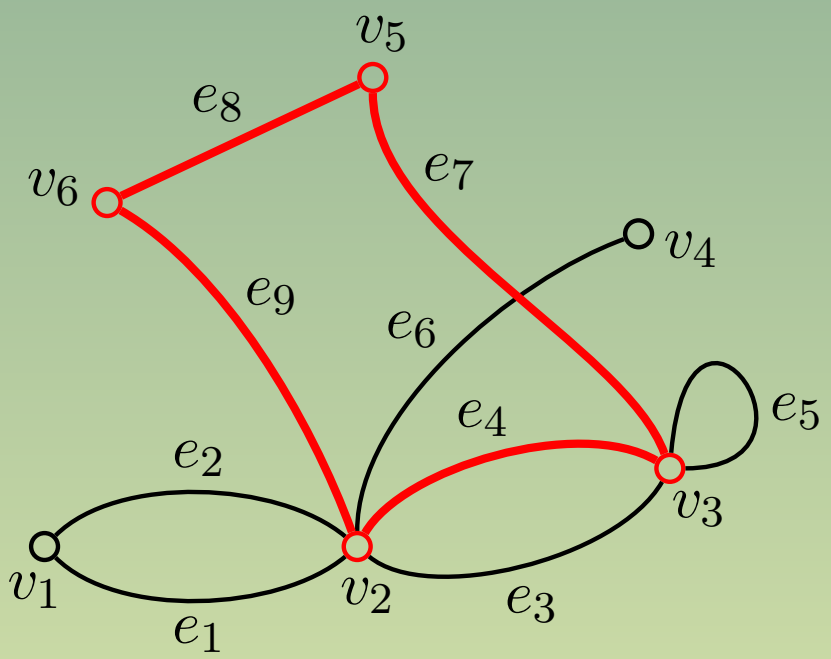


put: $v_2 e_4 v_3 e_7 v_5 e_8 v_6$

(v_2, v_6)-put duljine 3

◂ šetnja ◂ staza

Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



put: $v_2e_4v_3e_7v_5e_8v_6e_9v_2$

(v_2, v_2)-put duljine 4 $\leftarrow$ 4-ciklus

Primjer 7.1.

U Petersenovom grafu pronađite

a. *stazu duljine 5*
b. *put duljine 9*
c. *cikluse duljina 5,6,7 i 9.*

Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

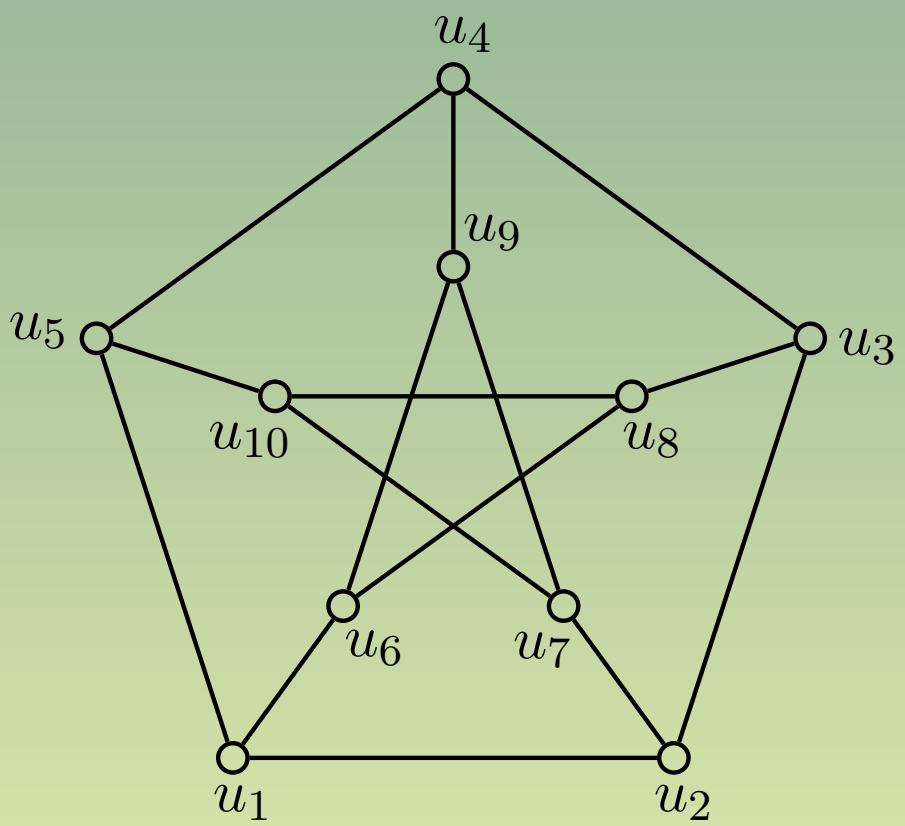
Primjer 7.1.

U Petersenovom grafu pronađite

a. *stazu duljine 5*
b. *put duljine 9*
c. *cikluse duljina 5,6,7 i 9.*

Rješenje.

Petersenov graf je jednostavan graf pa je svaka šetnja jednoznačno određena nizom vrhova. Stoga bridove nećemo eksplicitno navoditi jer će biti iz niza vrhova jasno koji su bridovi uključeni u pojedinu šetnju.

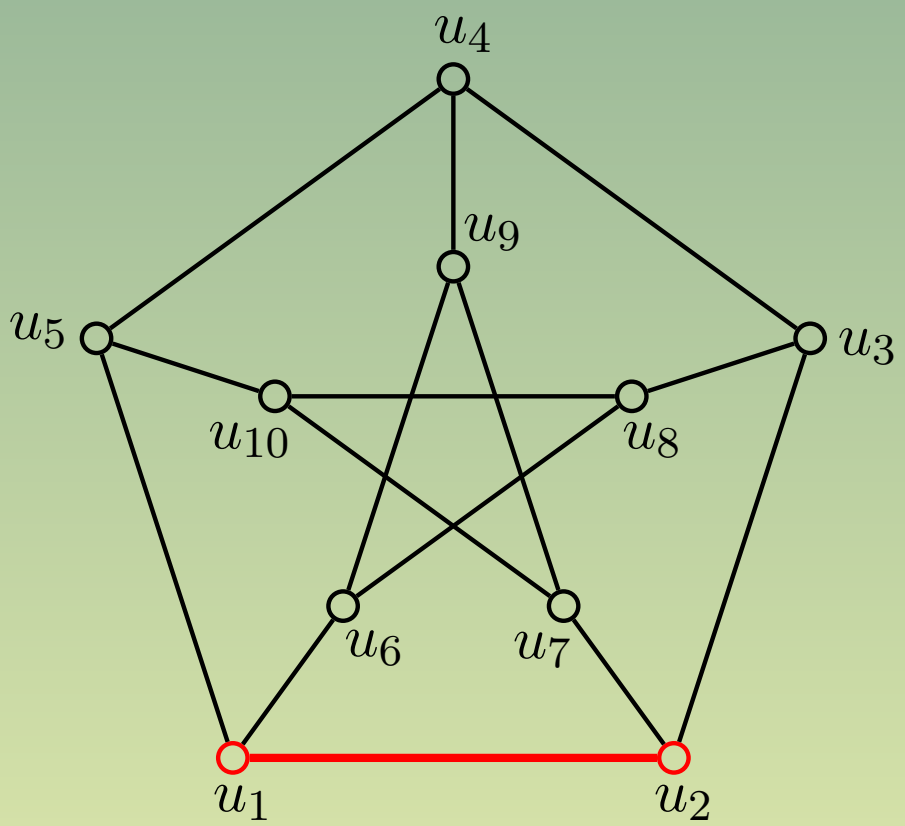


a. Primjer staze duljine 5

▶ b ▶ c ▶ kraj

staza:

Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

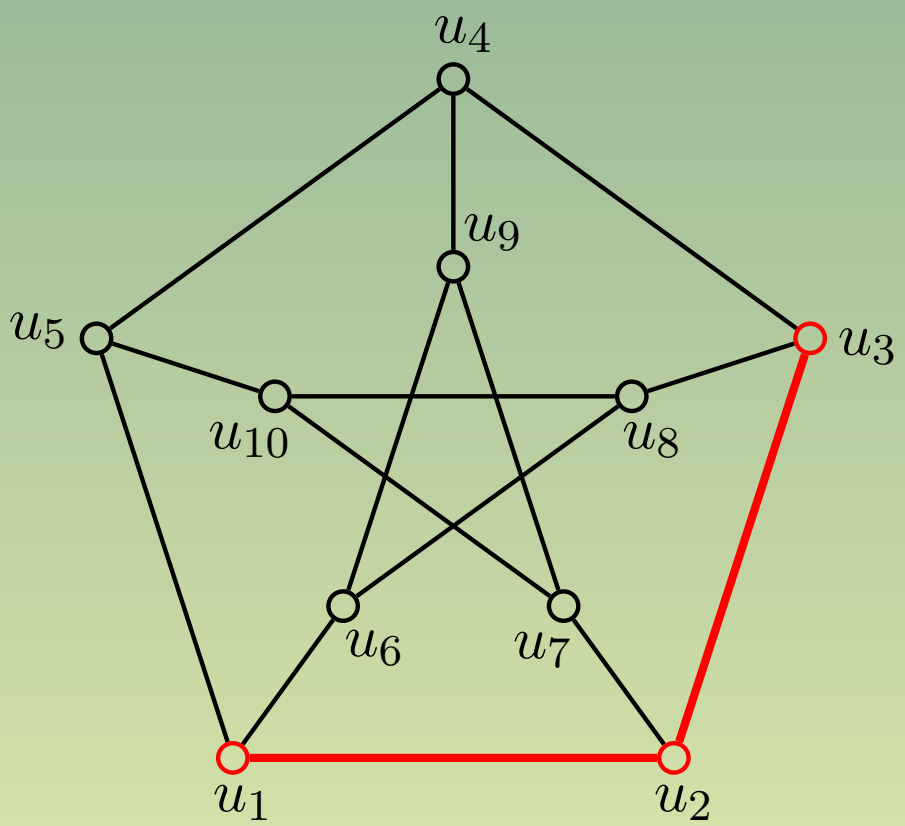


- Staza duljine 1

staza: $u_1 u_2$

▶ b ▶ c ▶ kraj

Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

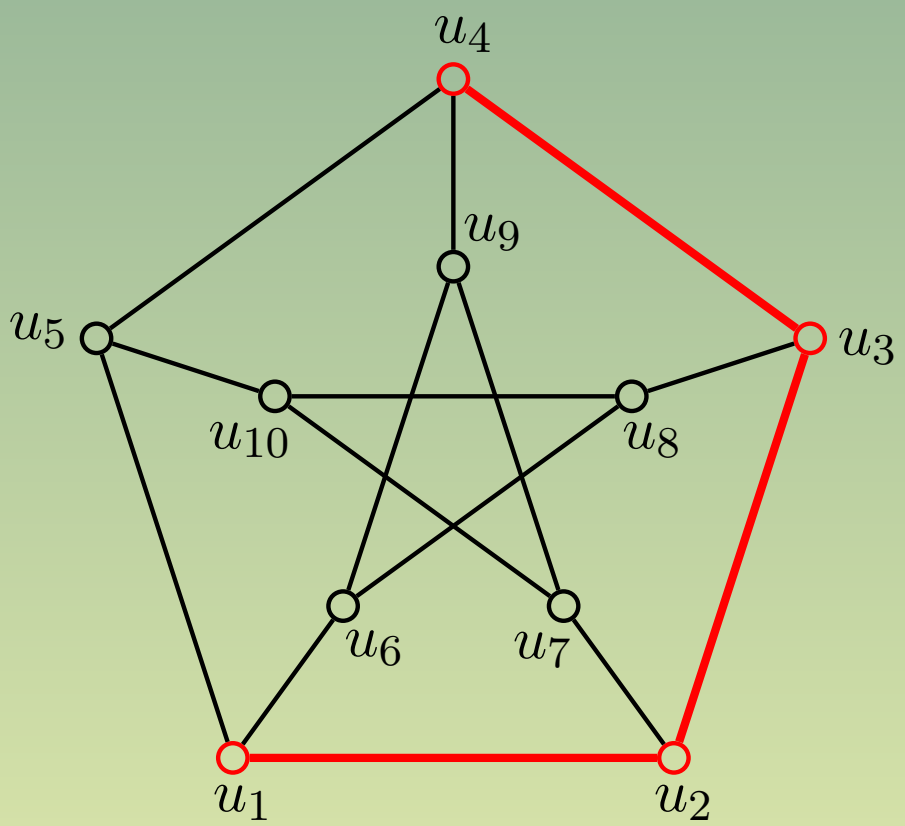


- Staza duljine 2

staza: $u_1u_2u_3$

▶ b ▶ c ▶ kraj

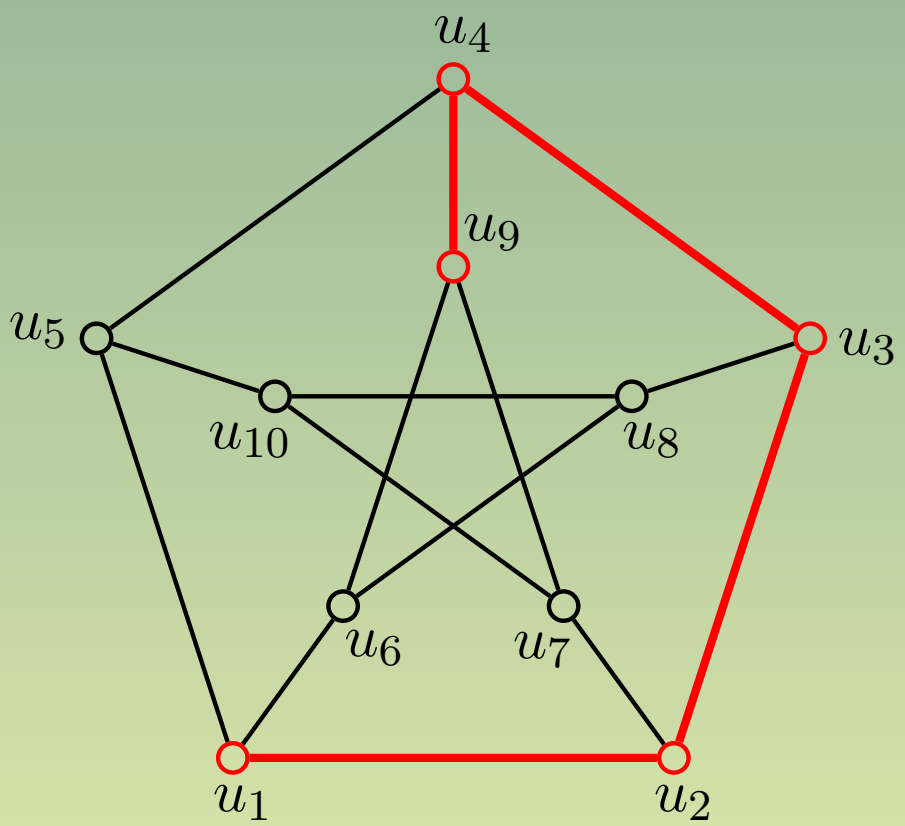
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



a. Staza duljine 3

staza: $u_1u_2u_3u_4$

▶ b ▶ c ▶ kraj

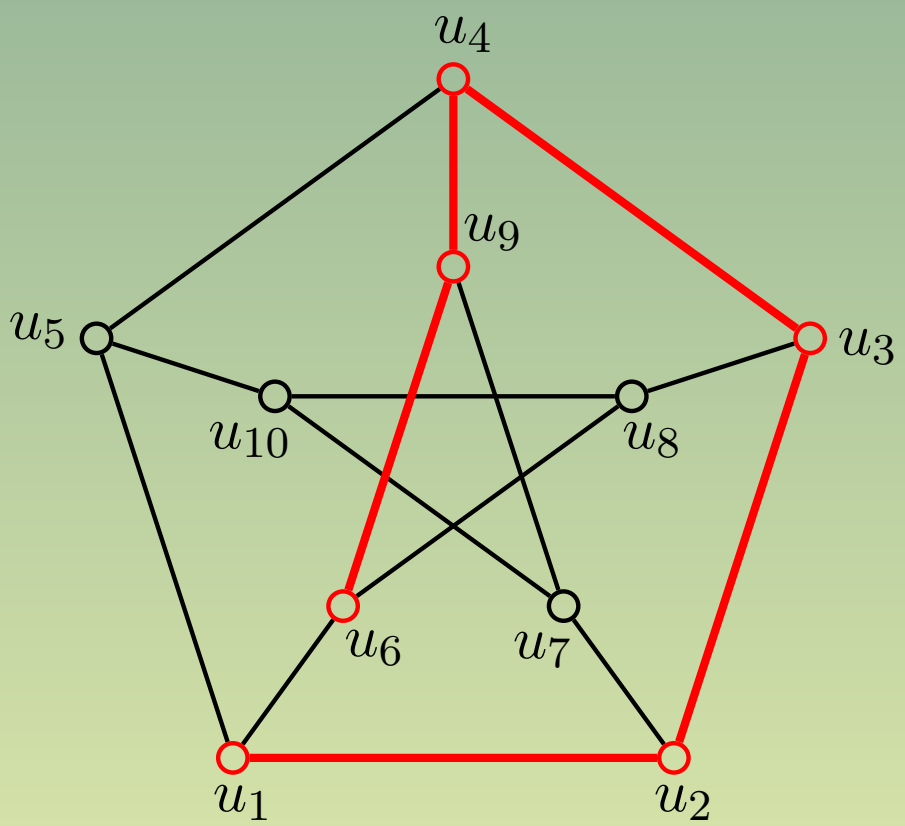


a. Staza duljine 4

staza: $u_1u_2u_3u_4u_9$

▶ b ▶ c ▶ kraj

Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



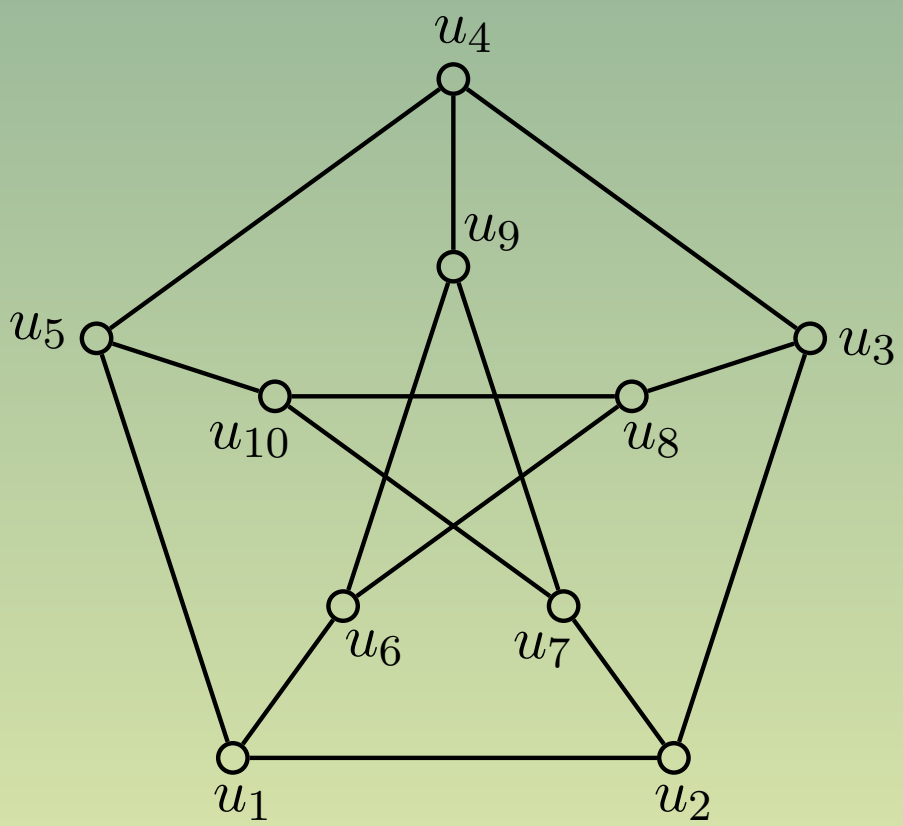
a) Staza (također i put) duljine 5

▶ b ▶ c ▶ kraj

staza: $u_1u_2u_3u_4u_9u_6$

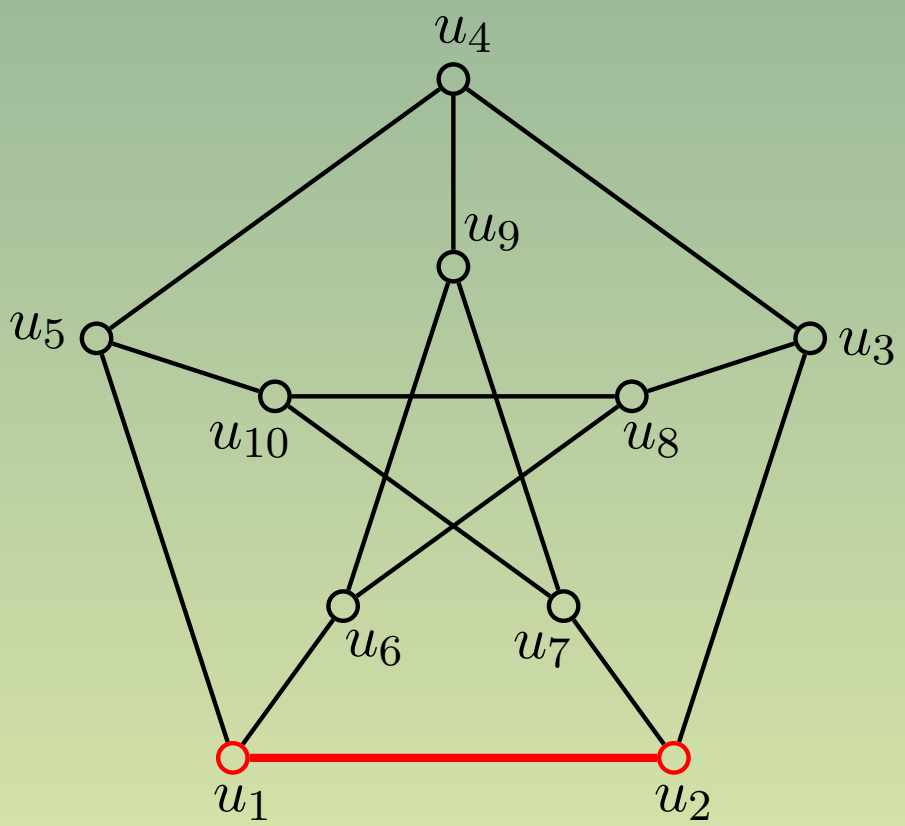
Pronađite još neke staze duljine 5 u Petersenovom grafu.

Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



b. Primjer puta duljine 9

put:



b. Put duljine 1

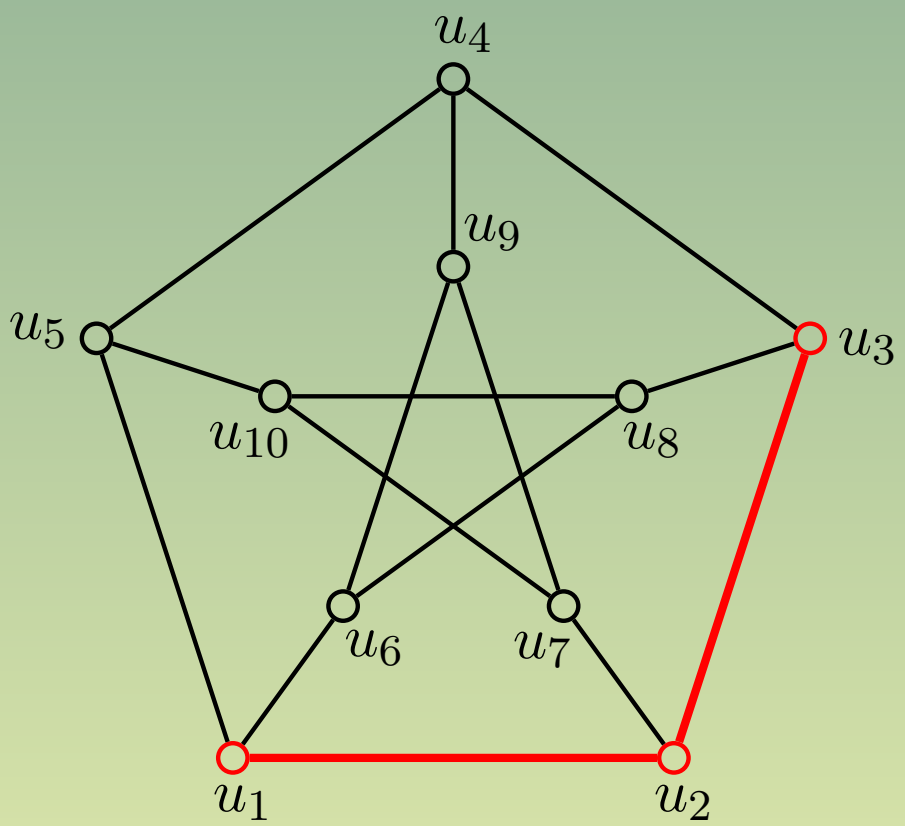
put: $u_1 u_2$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

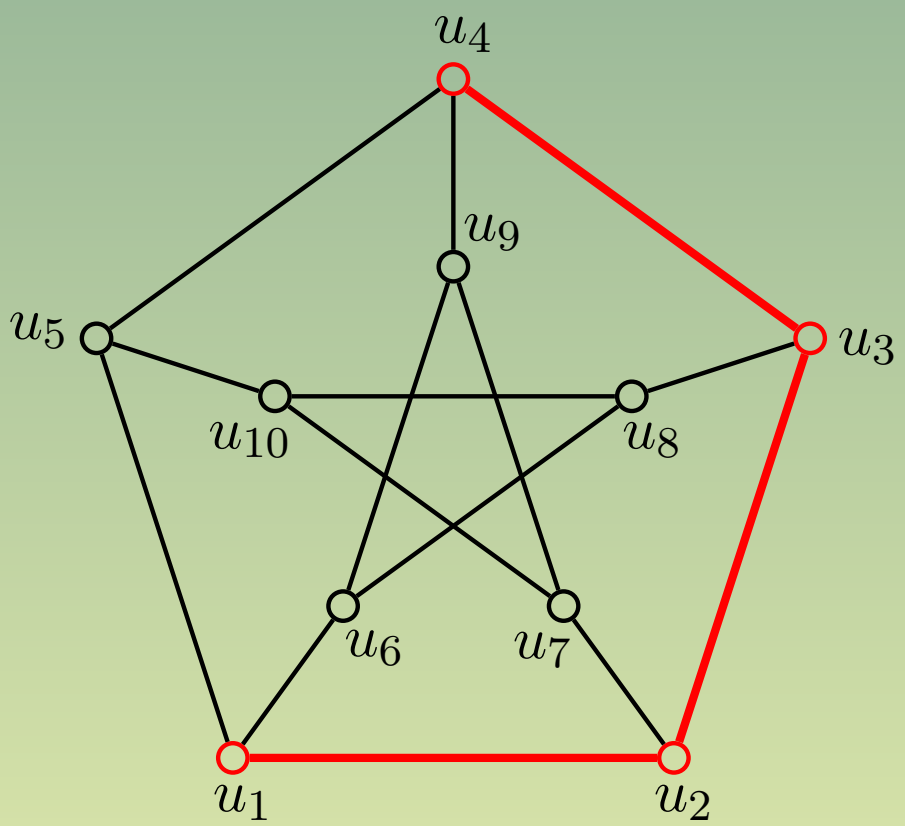
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



b. Put duljine 2

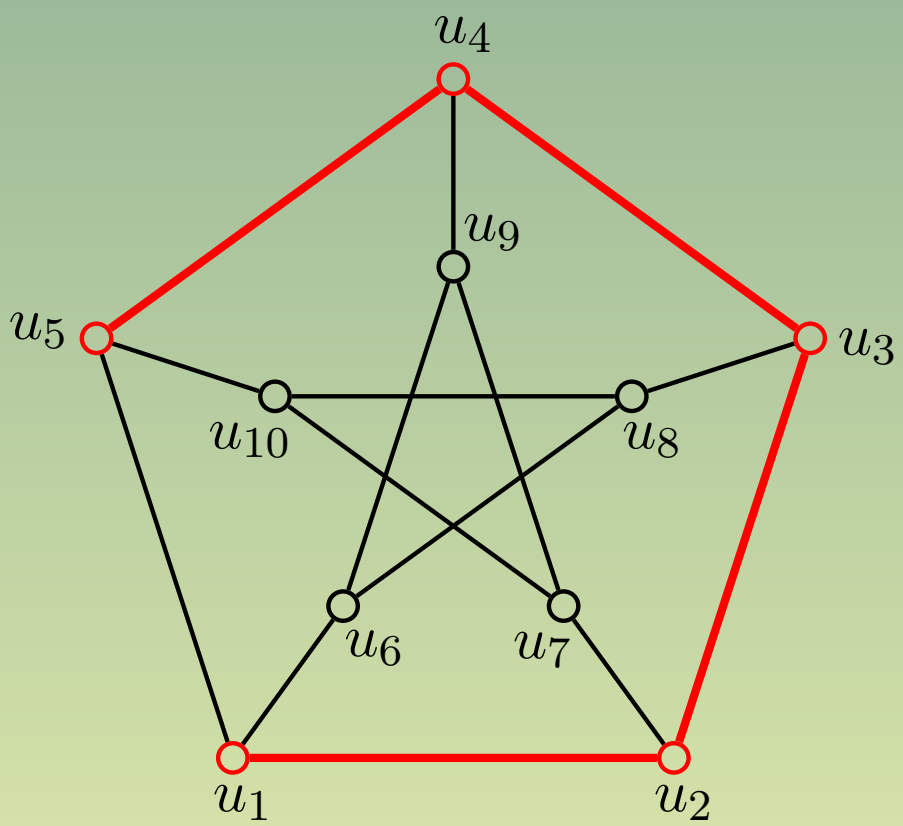
put: $u_1u_2u_3$

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



b. Put duljine 3

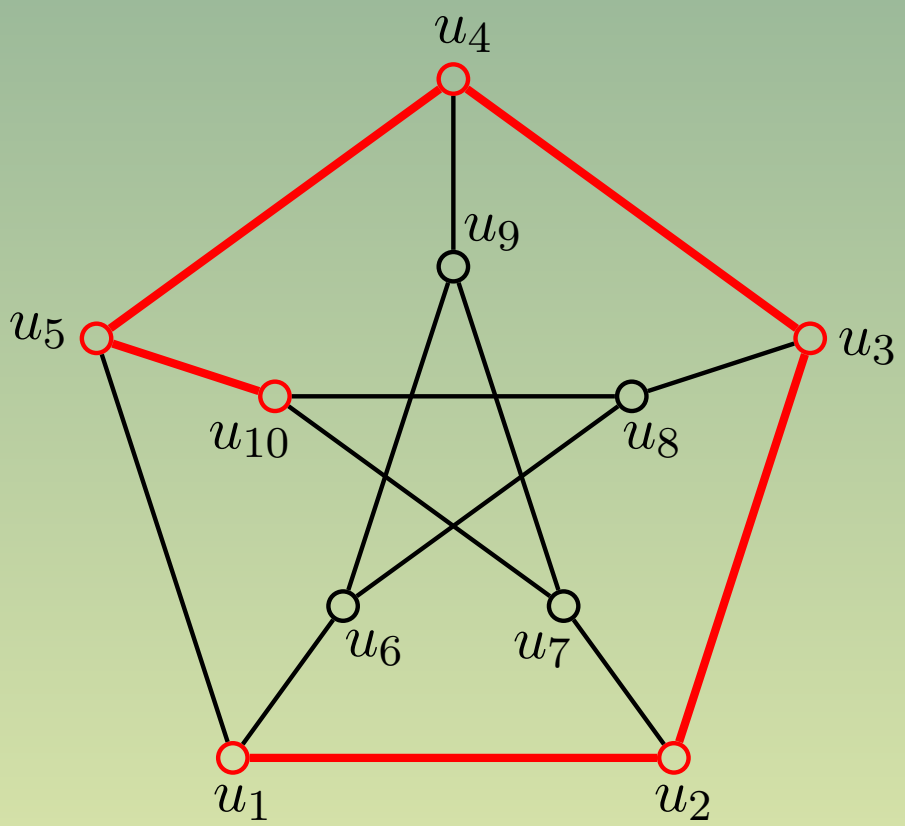
put: $u_1u_2u_3u_4$



b. Put duljine 4

put: $u_1u_2u_3u_4u_5$

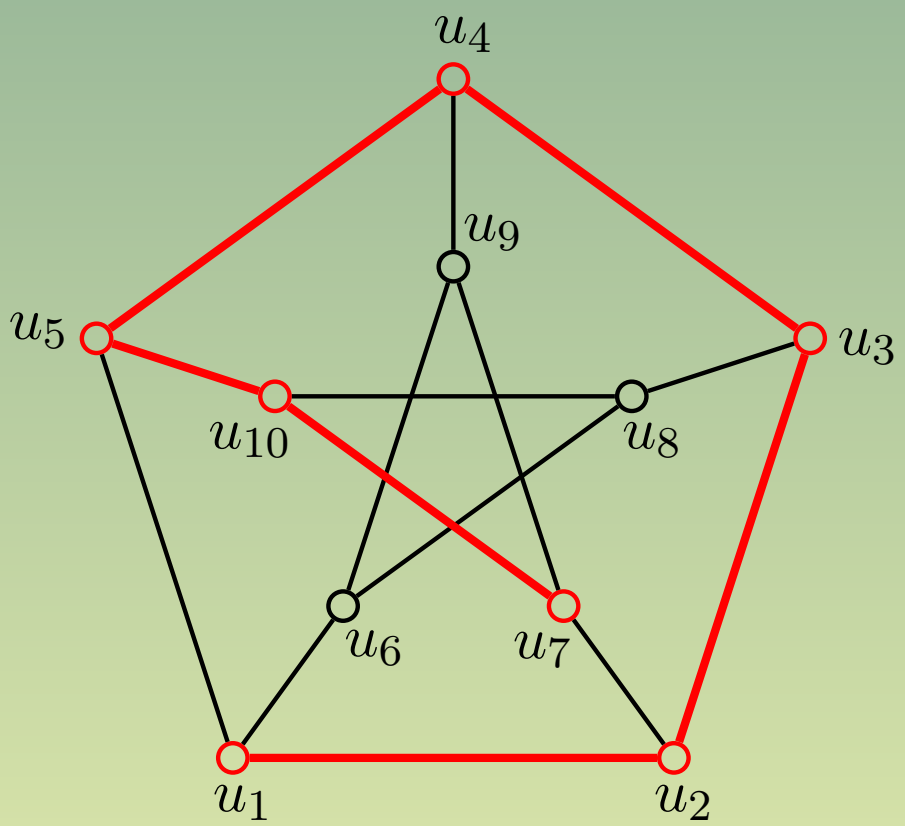
Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



b. Put duljine 5

put: $u_1u_2u_3u_4u_5u_{10}$

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



b. Put duljine 6

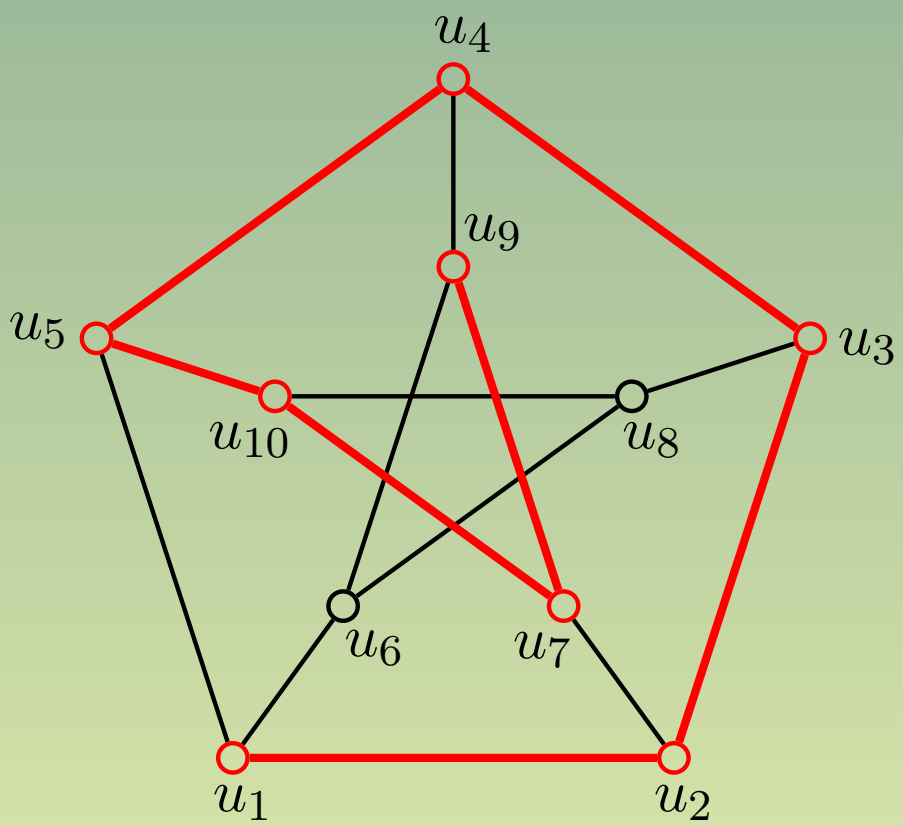
put: $u_1u_2u_3u_4u_5u_{10}u_7$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

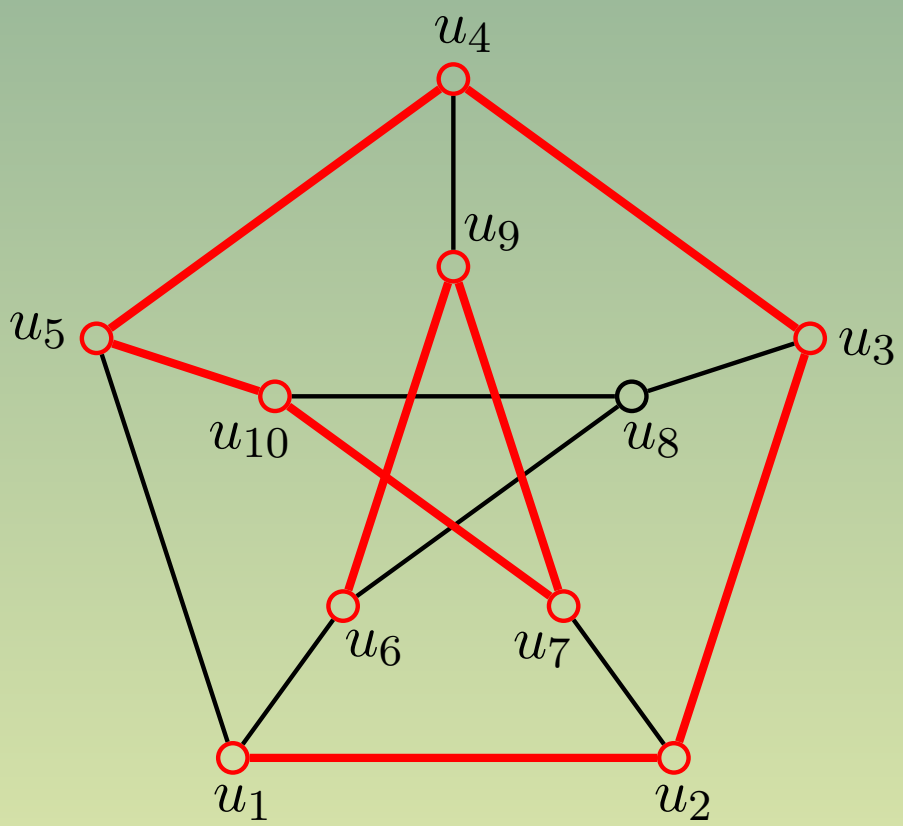
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



b. Put duljine 7

put: $u_1u_2u_3u_4u_5u_{10}u_7u_9$

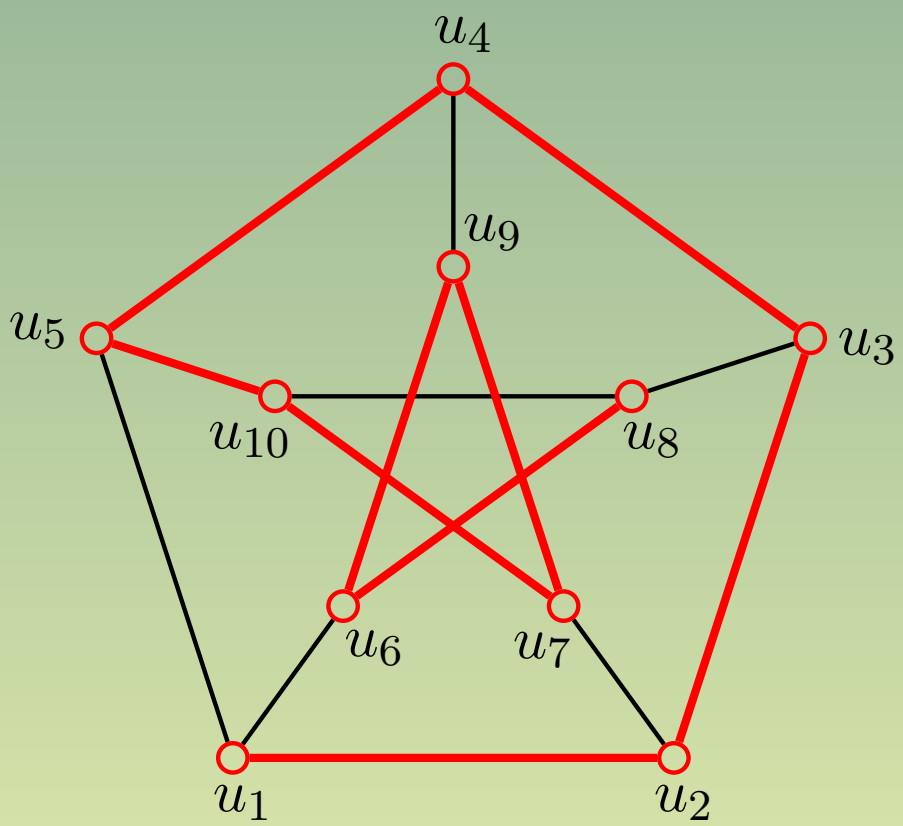
Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



b. Put duljine 8

put: $u_1u_2u_3u_4u_5u_{10}u_7u_9u_6$

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



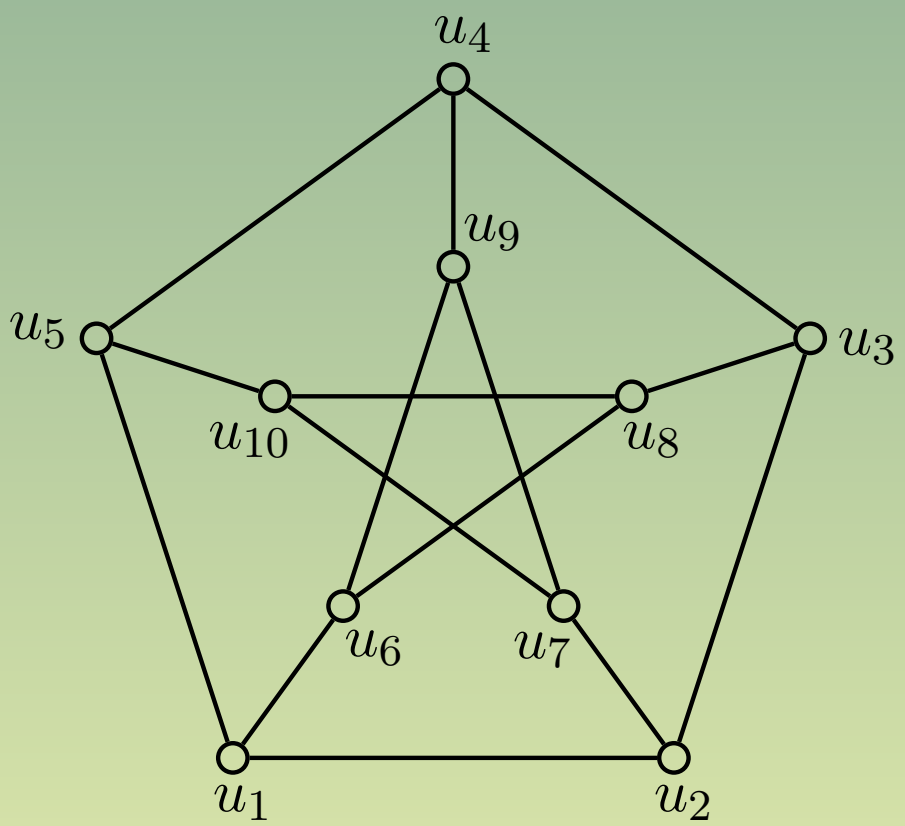
b Put duljine 9

◀ a ▶ c ▶ kraj

put: $u_1u_2u_3u_4u_5u_{10}u_7u_9u_6u_8$

Pronađite još neke putove duljine 9 u Petersenovom grafu.

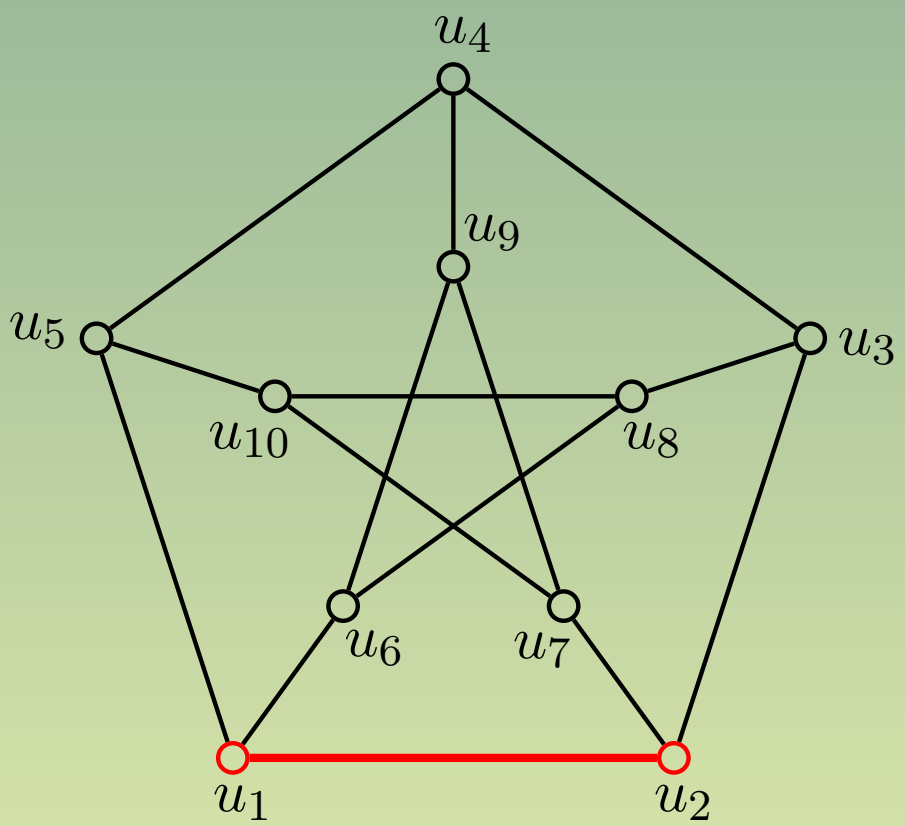
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



- Primjer 5-ciklusa

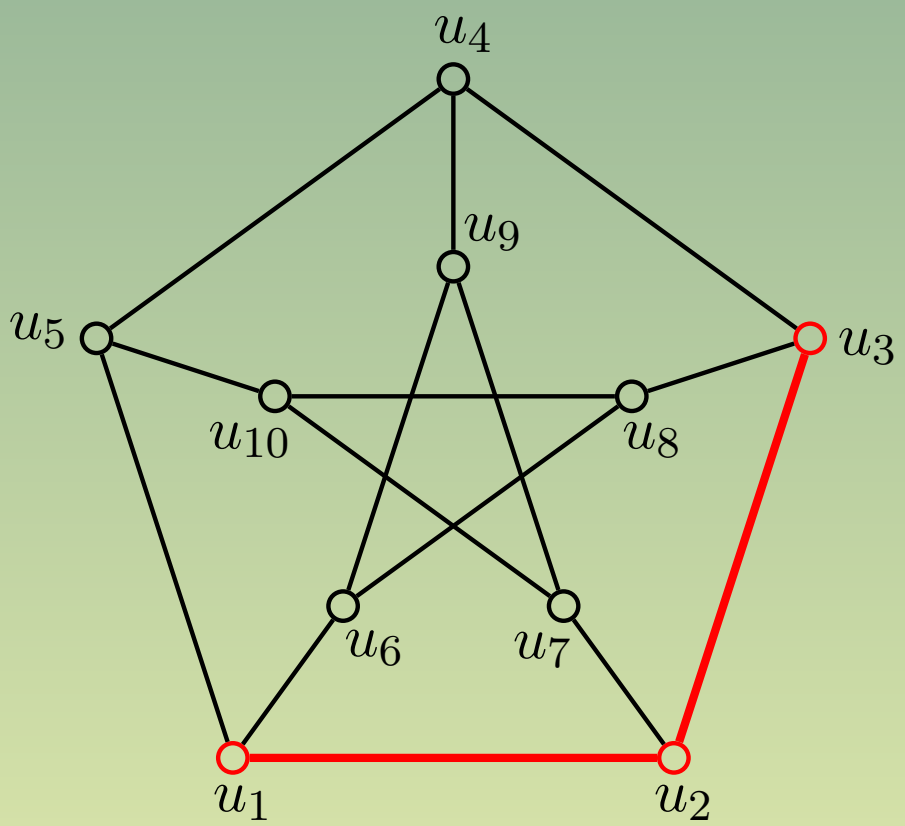
◂ a ◂ b ▸ kraj

Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



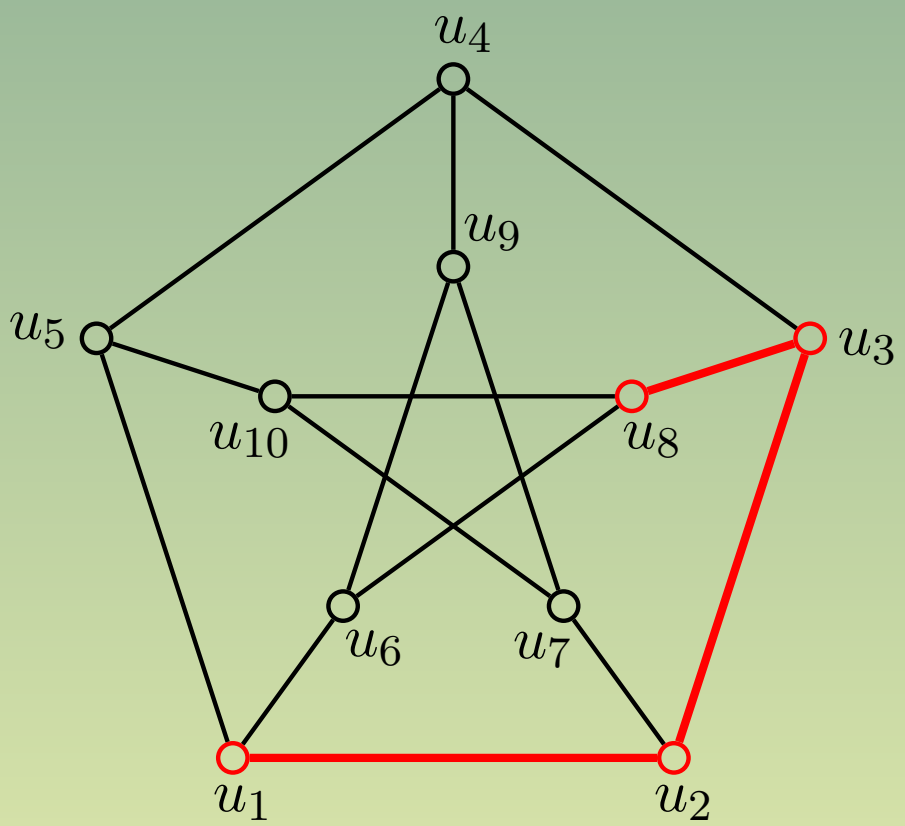
- Put duljine 1

$u_1 u_2$



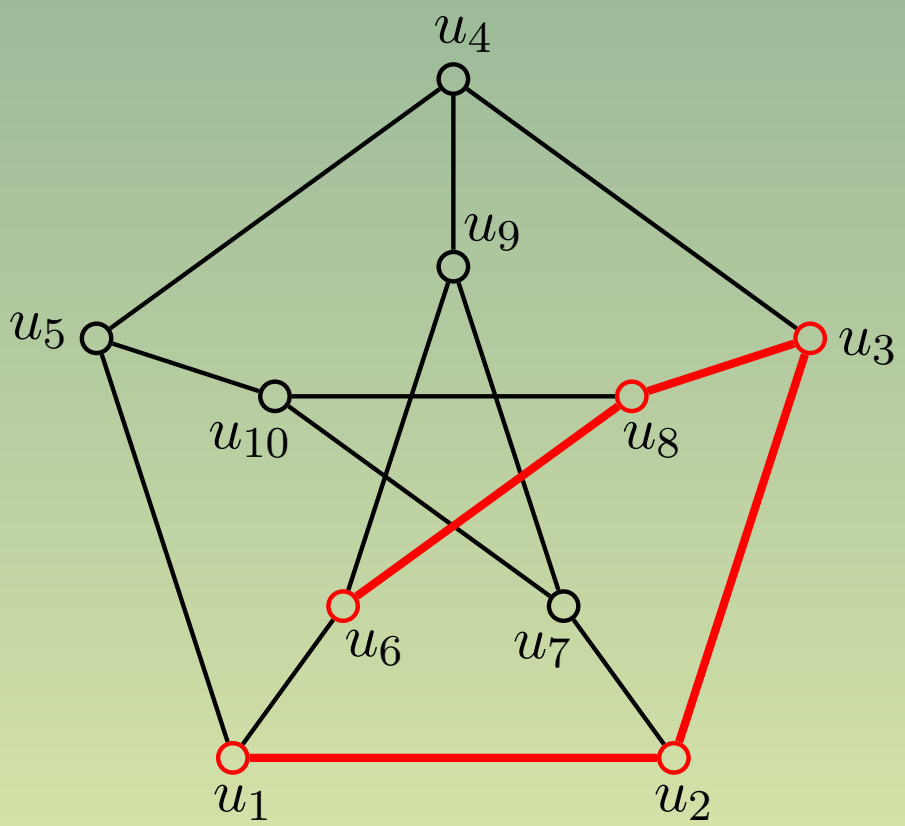
- Put duljine 2

$u_1u_2u_3$



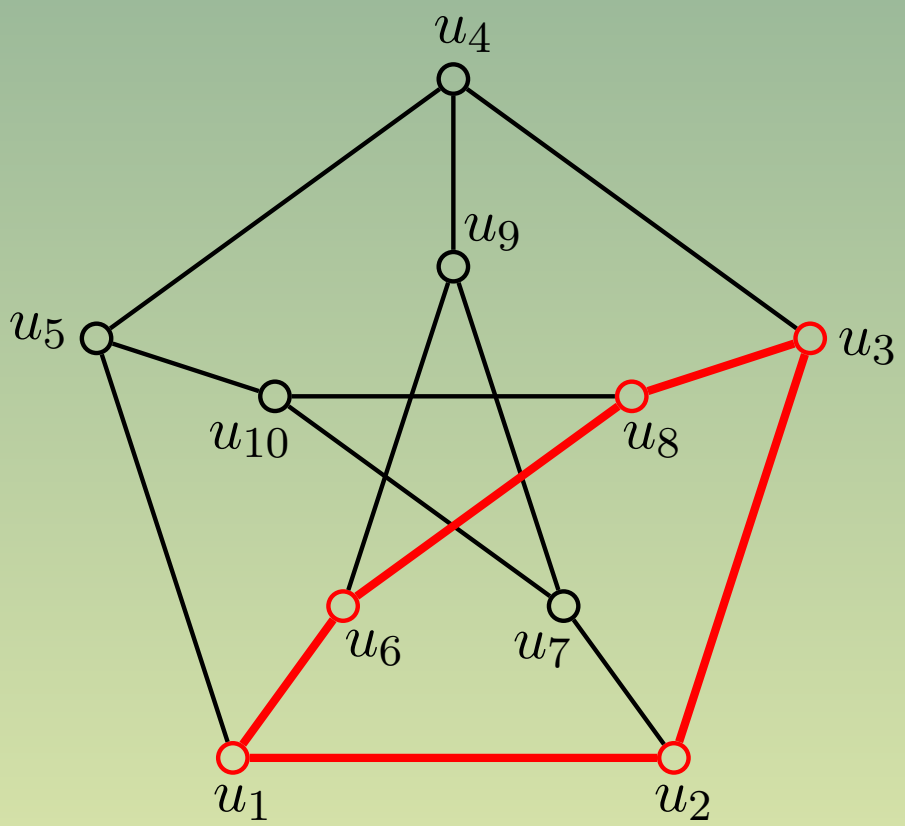
- Put duljine 3

$u_1u_2u_3u_8$



- Put duljine 4

$u_1u_2u_3u_8u_6$



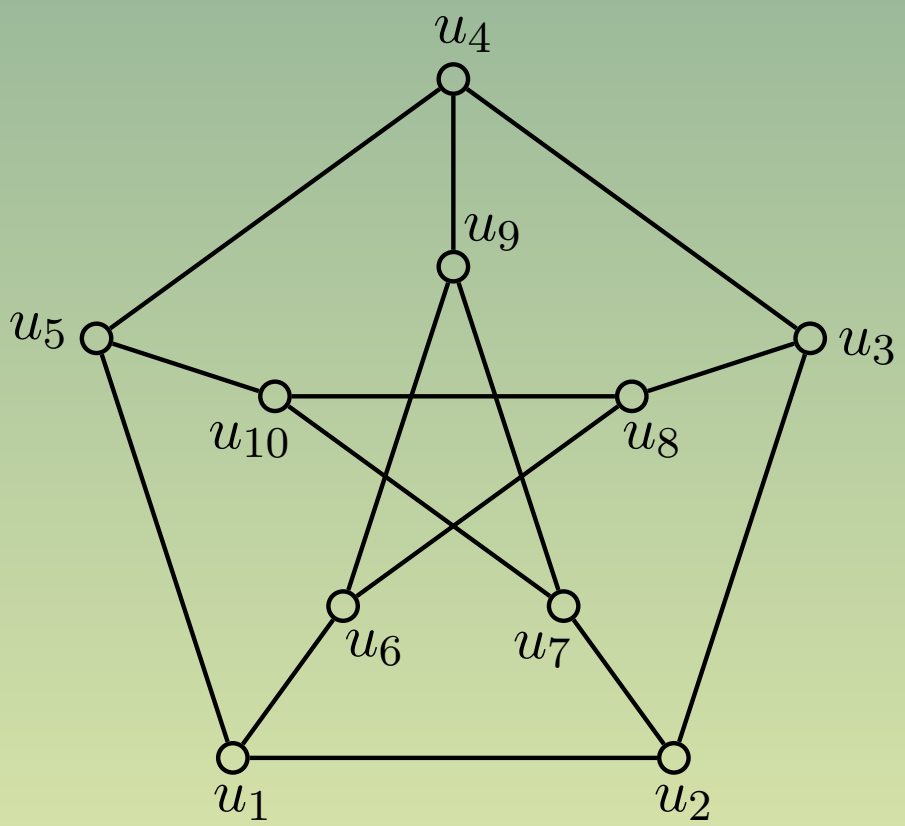
Ciklus duljine 5

◂ a ◂ b ▸ kraj

$u_1u_2u_3u_8u_6u_1$

Pronađite još neke 5-cikluse u Petersenovom grafu.

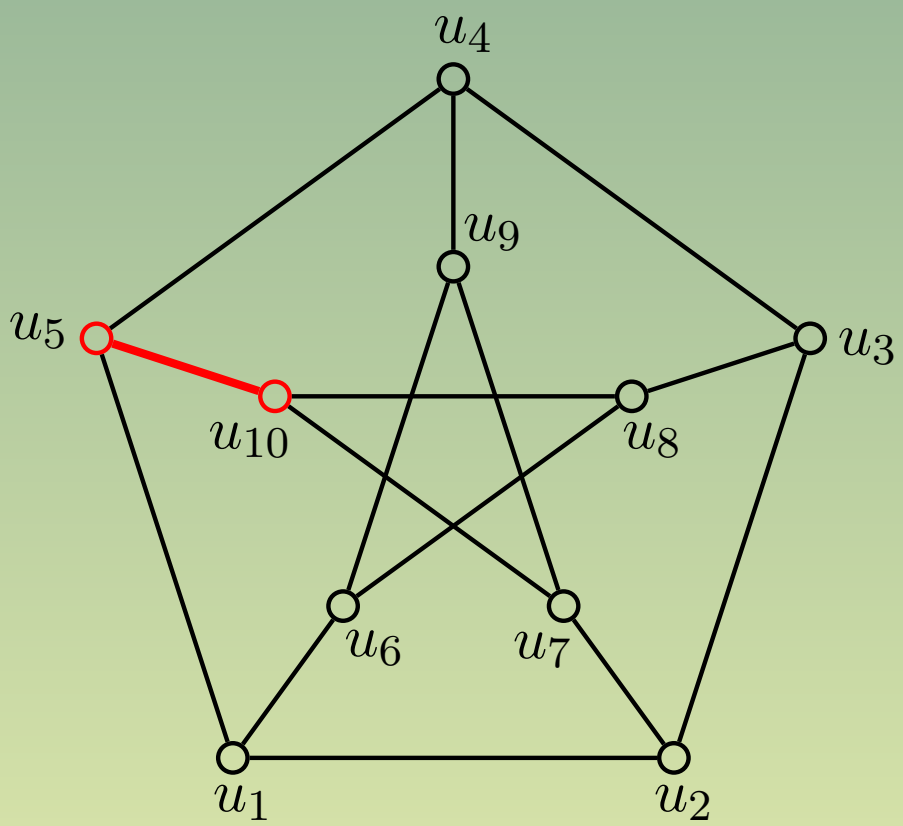
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



- Primjer 6-ciklusa

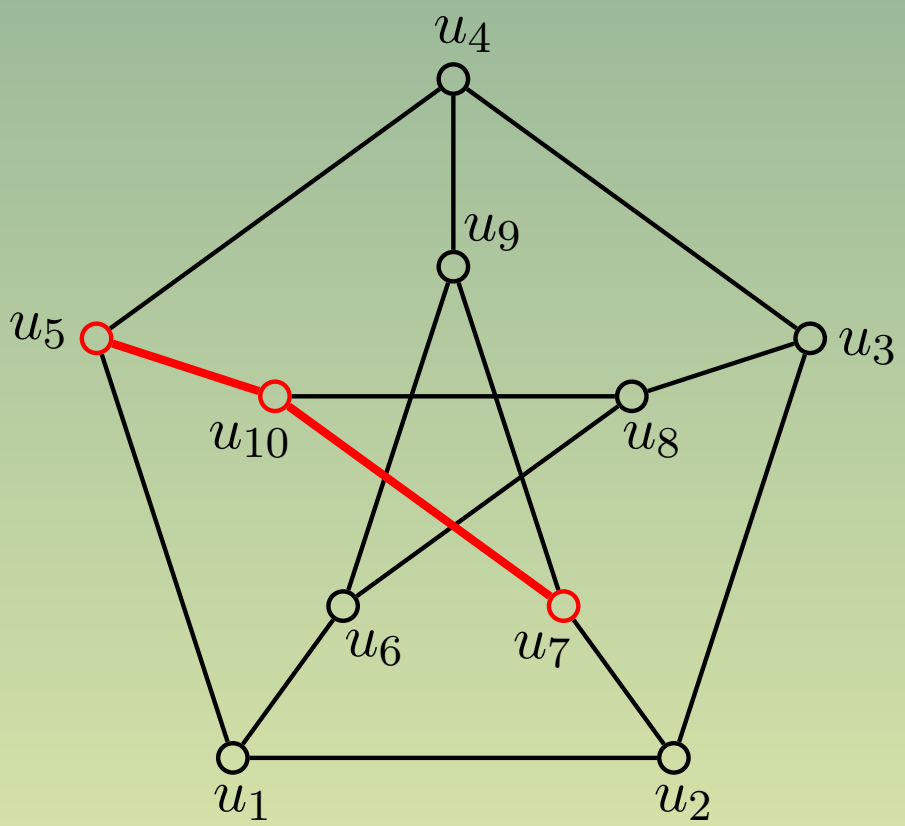
◂ a ◂ b ▸ kraj

Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



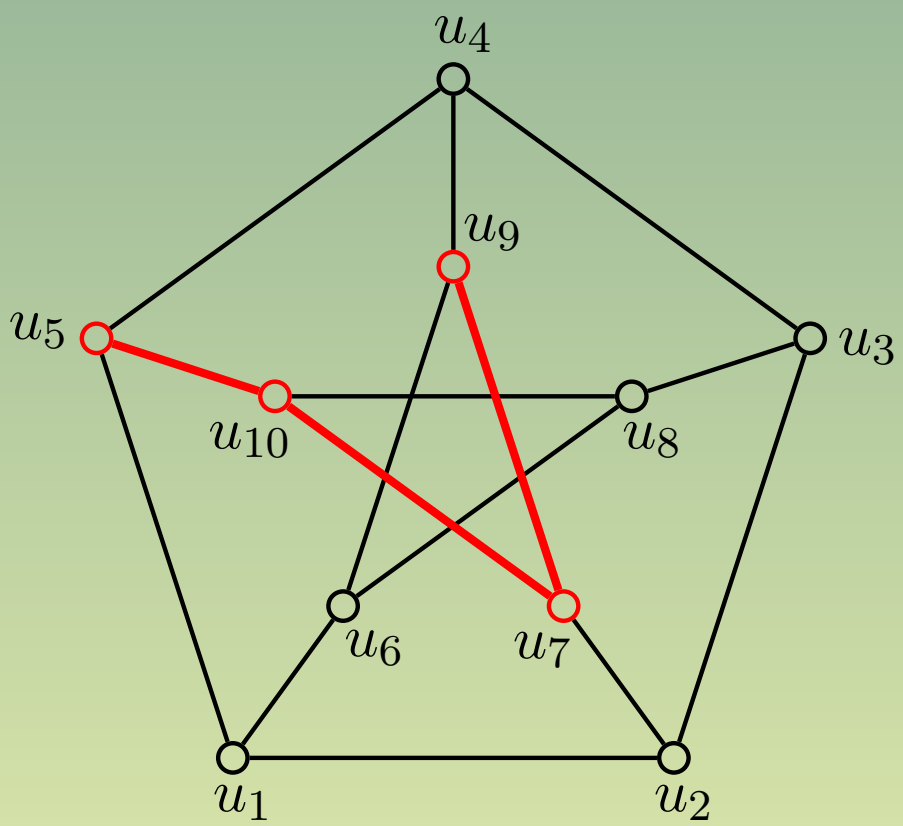
- Put duljine 1

u_5u_{10}



- Put duljine 2

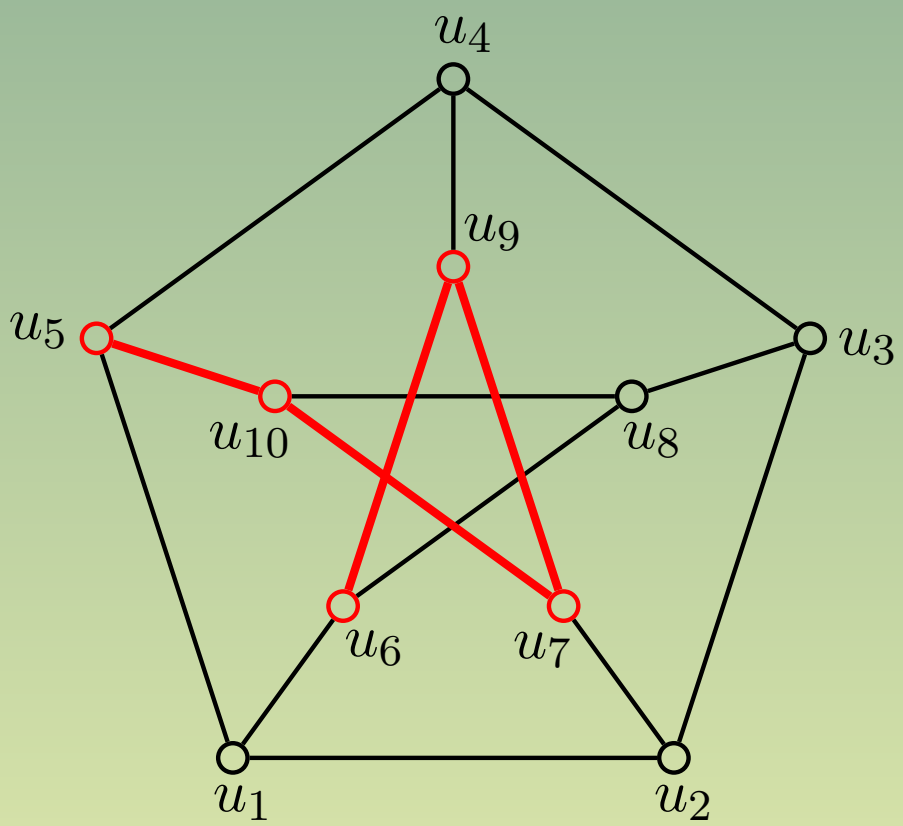
$u_5u_{10}u_7$



- Put duljine 3

$u_5u_{10}u_7u_9$

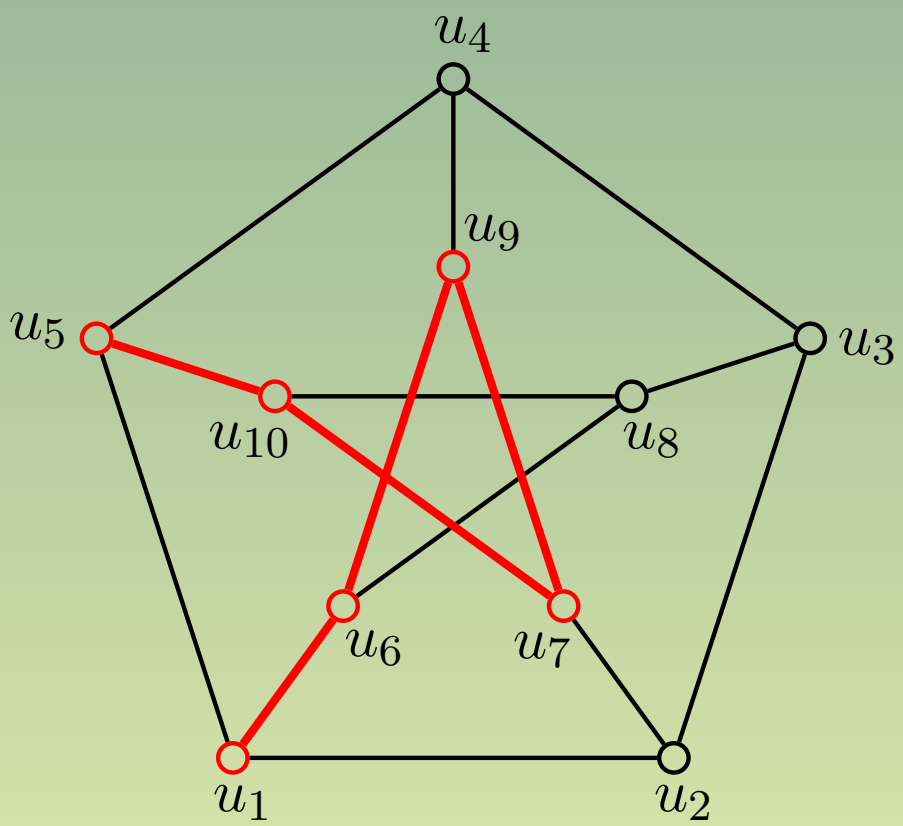
Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



- Put duljine 4

$u_5u_{10}u_7u_9u_6$

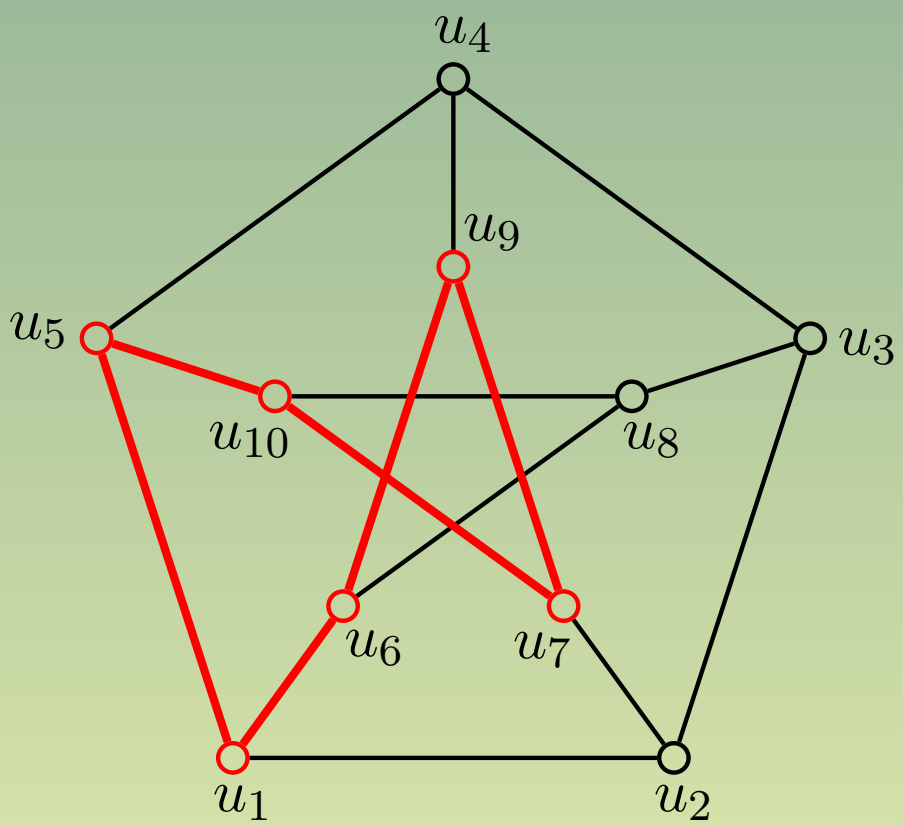
Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



- Put duljine 5

$u_5u_{10}u_7u_9u_6u_1$

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



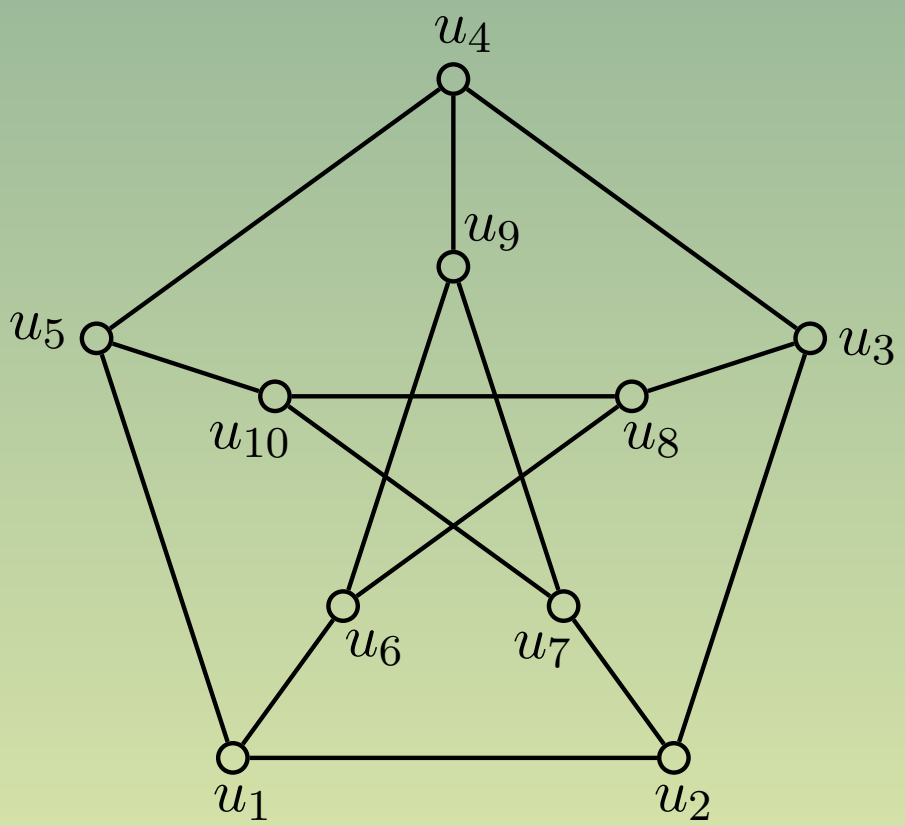
Ciklus duljine 6

◂ a ◂ b ▸ kraj

$u_5u_{10}u_7u_9u_6u_1u_5$

Pronađite još neke 6-cikluse u Petersenovom grafu.

Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

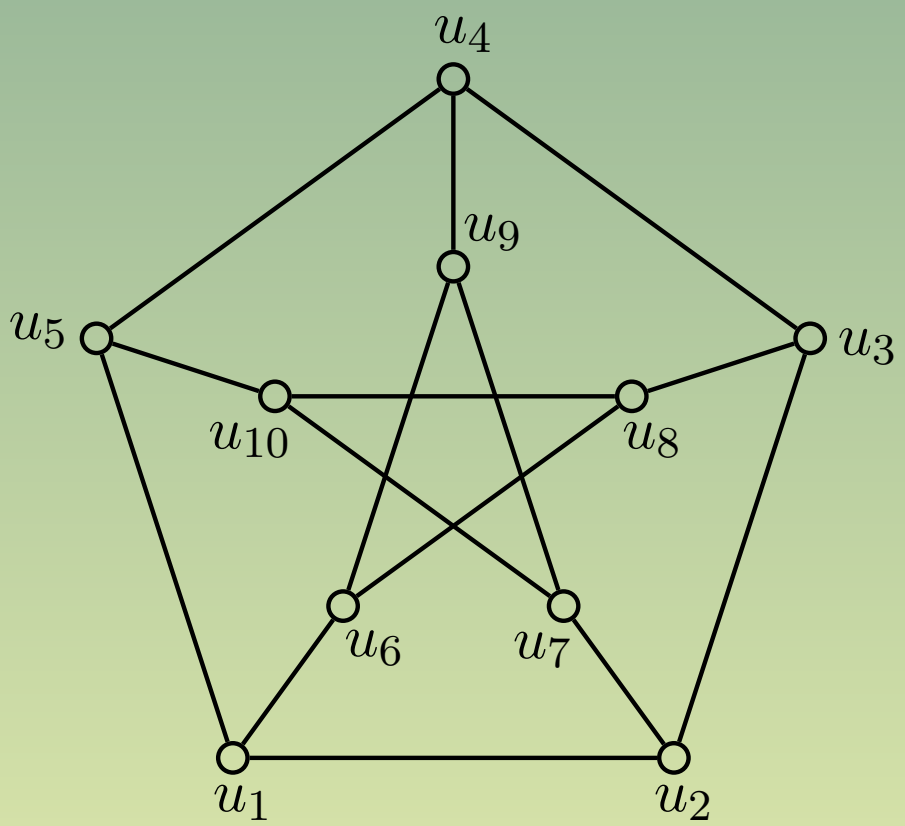


- Ciklus duljine 7

◂ a ◂ b ▸ kraj

Uvjerite se sami i dokažite da u Petersenovom grafu nema ciklusa duljine 7.

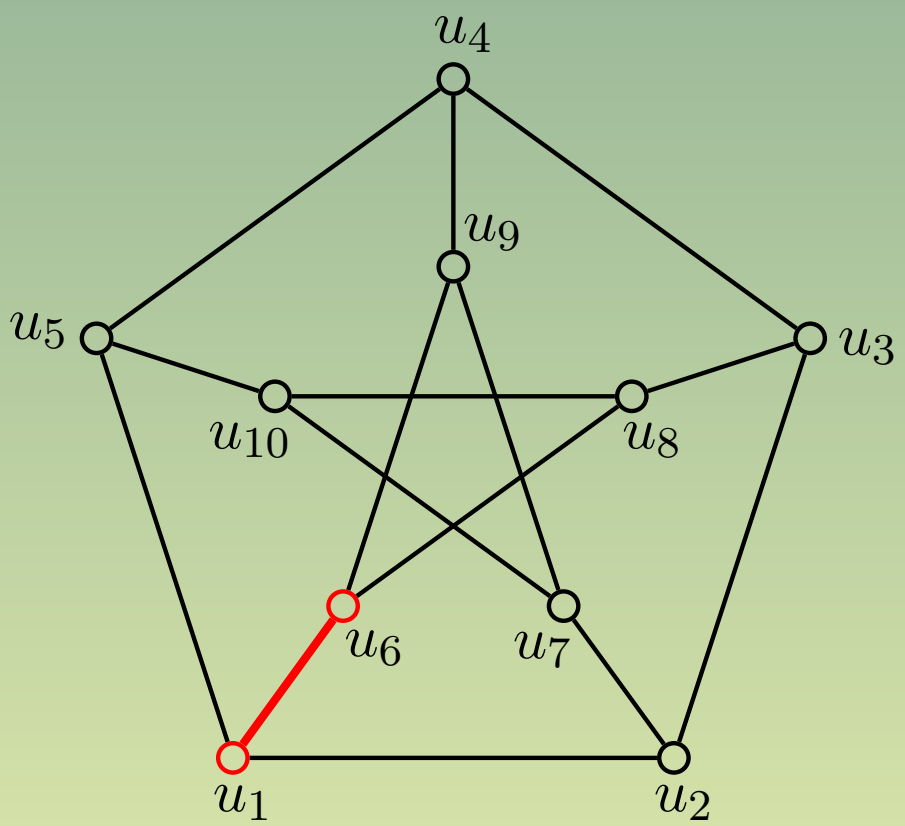
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



- Primjer 9-ciklusa

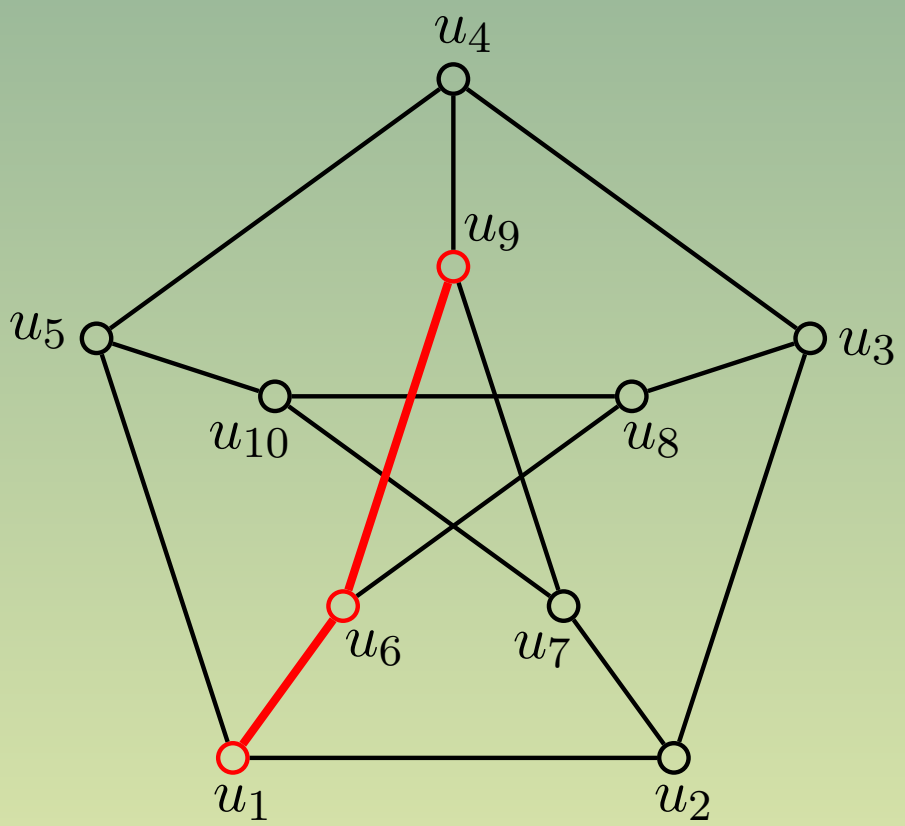
◂ a ◂ b ▸ kraj

Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



- Put duljine 1

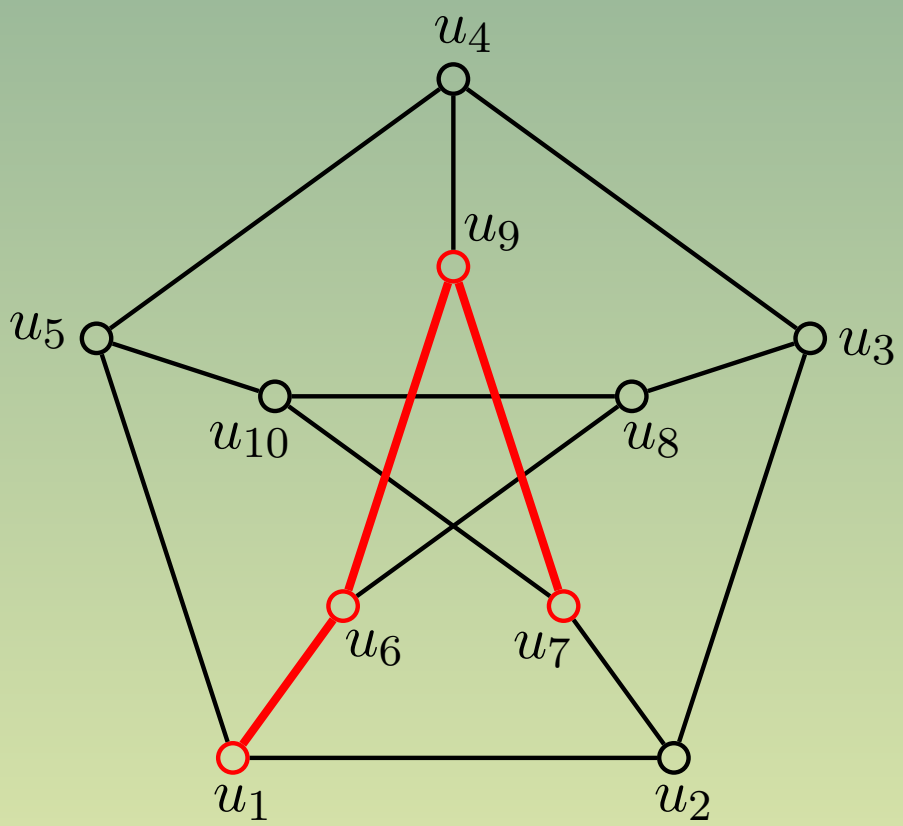
$u_1 u_6$



- Put duljine 2

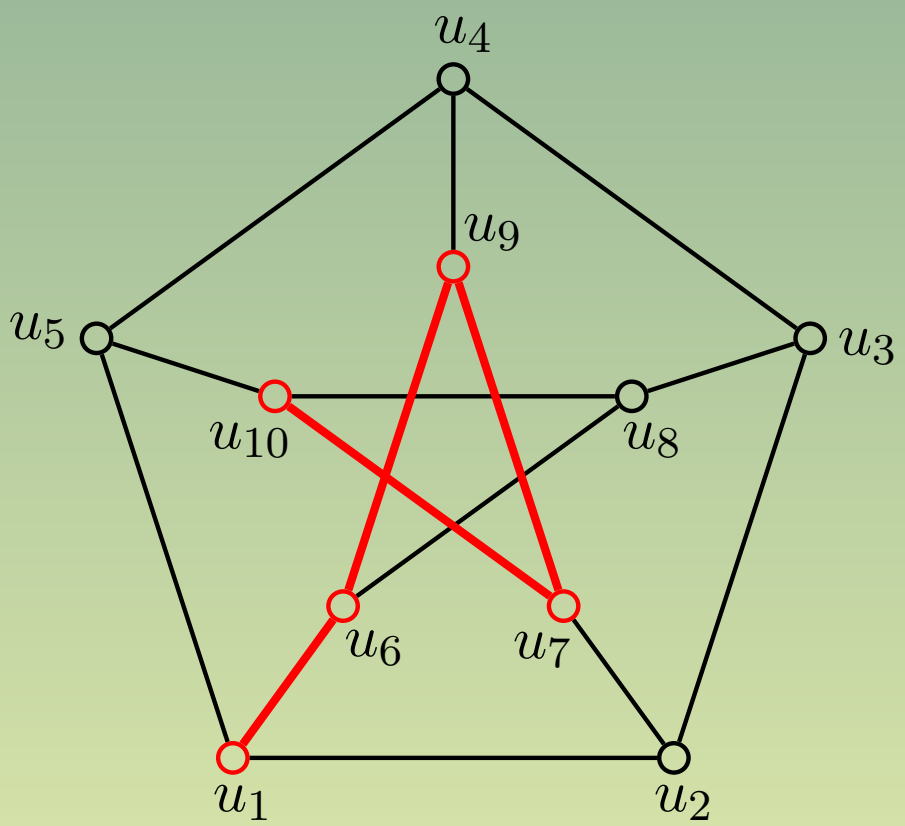
$u_1 u_6 u_9$

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



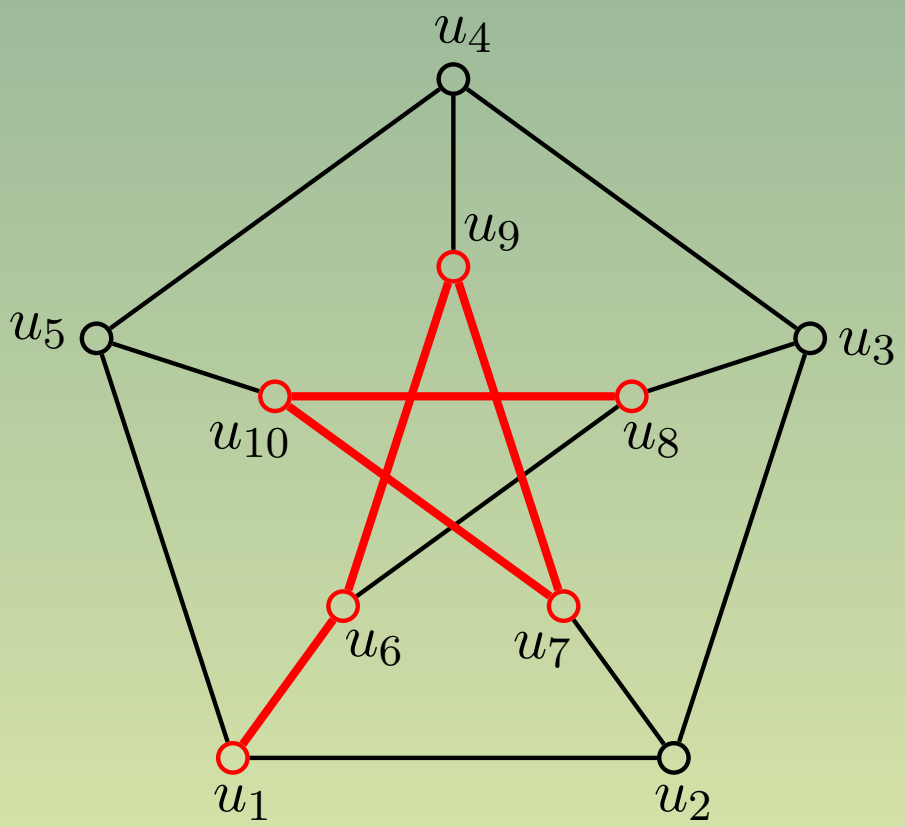
- Put duljine 3

$u_1 u_6 u_9 u_7$



- Put duljine 4

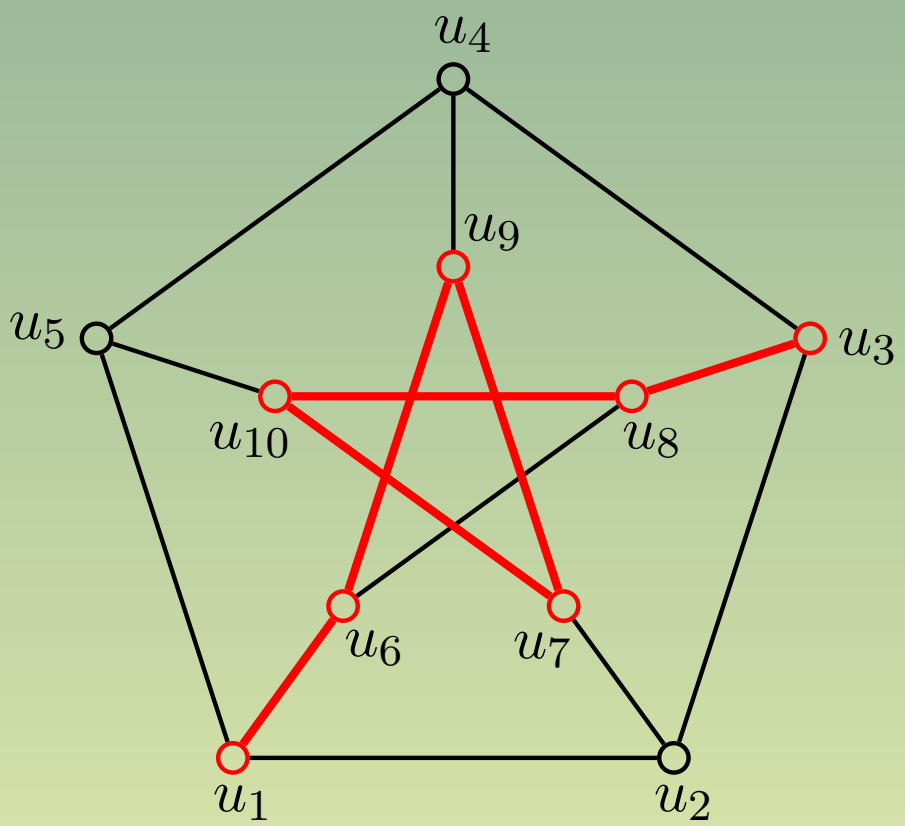
$u_1 u_6 u_9 u_7 u_{10}$



- Put duljine 5

$u_1 u_6 u_9 u_7 u_{10} u_8$

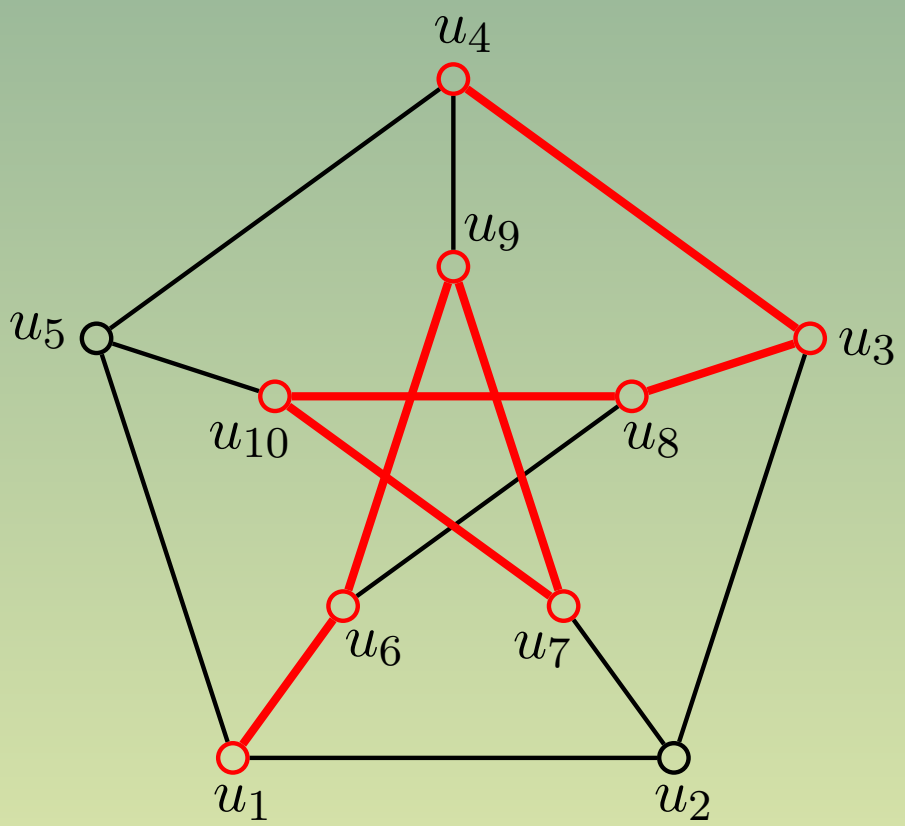
Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



- Put duljine 6

$u_1 u_6 u_9 u_7 u_{10} u_8 u_3$

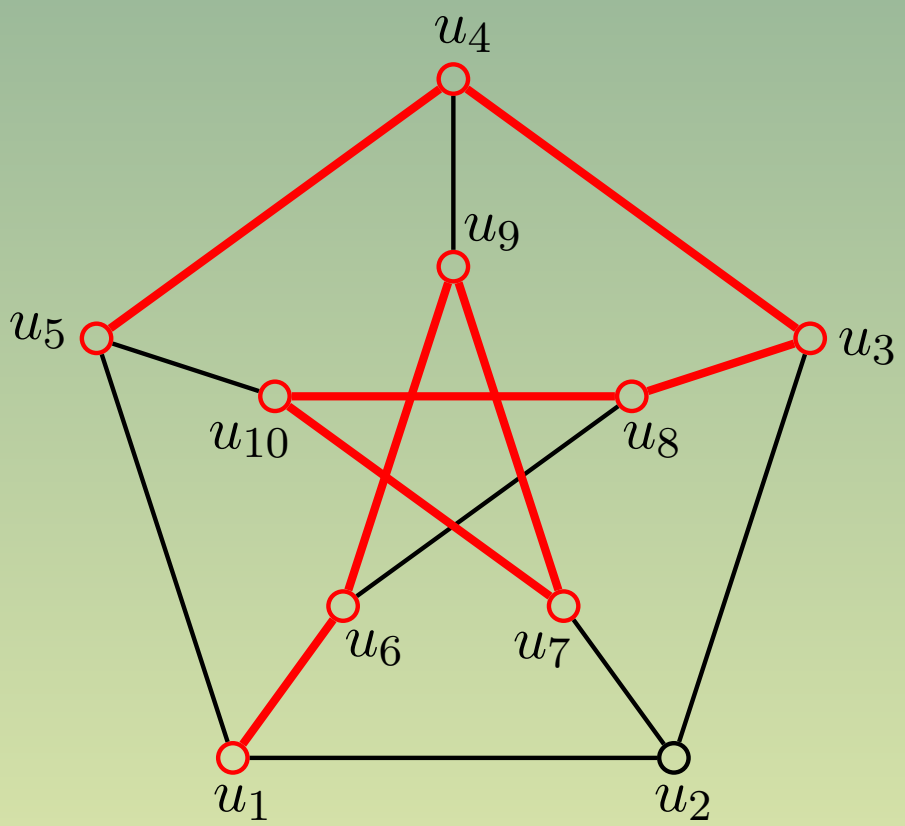
Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



- Put duljine 7

$u_1 u_6 u_9 u_7 u_{10} u_8 u_3 u_4$

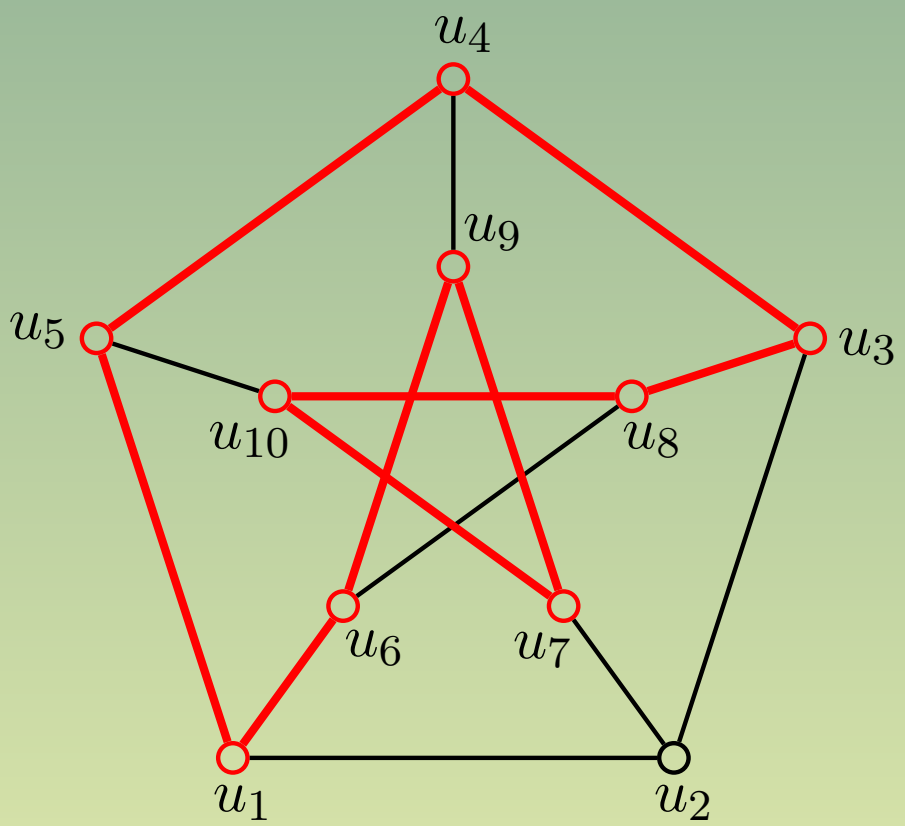
Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



- Put duljine 8

$u_1u_6u_9u_7u_{10}u_8u_3u_4u_5$

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



Ciklus duljine 9

a b c

$u_1u_6u_9u_7u_{10}u_8u_3u_4u_5u_1$

Pronađite još neke 9-cikluse u Petersenovom grafu.

Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Propozicija 7.1.

Neka je $A = A(G) = [a_{ij}]$ matrica susjedstva grafa G. Tada je (i,j)-ti član l-te potencije A^l jednak broju (v_i, v_j)-šetnji u G duljine l. Stoga je broj svih šetnji u G duljine l jednak sumi svih članova od A^l.

Dokaz.

Dokaz provodimo indukcijom po l. Za $l = 1$ je jasno da je a_{ij} broj (v_i, v_j)-šetnji duljine 1 jer je po definiciji matrice susjedstva element a_{ij} jednak broju bridova koji spajaju v_i i v_j, a to su baš šetnje duljine 1.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $l - 1$ i dokažimo da tada vrijedi za l.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Neka je $a_{ij}^{(l)}$ (i,j)-ti element matrice A^l. Kako je $A^l = A^{l-1} \cdot A$, iz definicije množenja matrica slijedi

$$a_{ij}^{(l)} = \sum_{k=1}^{\nu} a_{ik}^{(l-1)} a_{kj}.$$

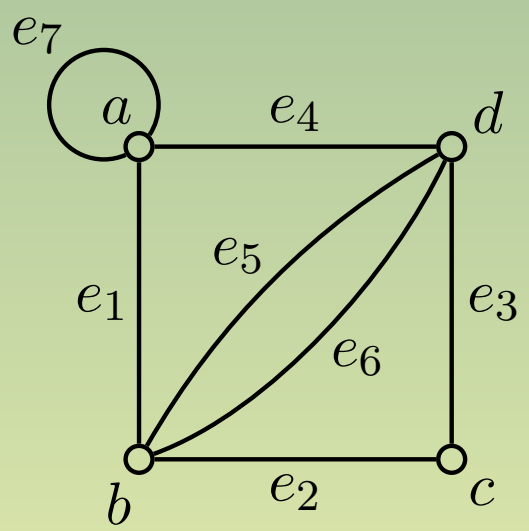
Nadalje, skup svih (v_i, v_j)-šetnji duljine l možemo particionirati u najviše ν klasa. U k-tu klasu stavimo one šetnje čiji je predzadnji vrh v_k. Prema principu produkta, broj šetnji u klasi k je broj (v_i, v_k)-šetnji duljine $l-1$ puta broj (v_k, v_j)-šetnji duljine 1. Prema pretpostavci indukcije taj je broj jednak $a_{ik}^{(l-1)} a_{kj}$. Prema principu sume je tada broj svih (v_i, v_j)-šetnji duljine l jednak

$$\sum_{k=1}^{\nu} a_{ik}^{(l-1)} a_{kj} = a_{ij}^{(l)}$$



Primjer 7.2.

U zadanom grafu pronađite

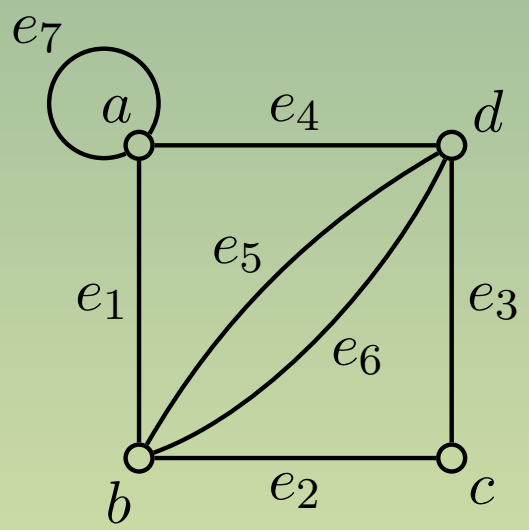


a. *šetnju duljine 7 između vrhova b i d,*

b. *put maksimalne duljine,*

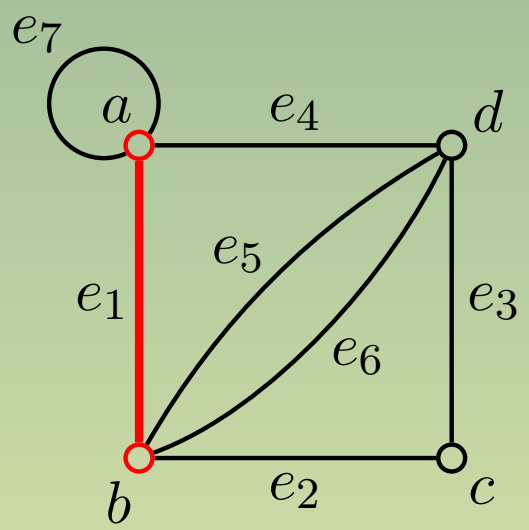
c. *broj šetnji duljine 3 između vrhova b i c,*

d. *ukupni broj svih šetnji duljine 3.*



- Primjer šetnje duljine 7

šetnja:



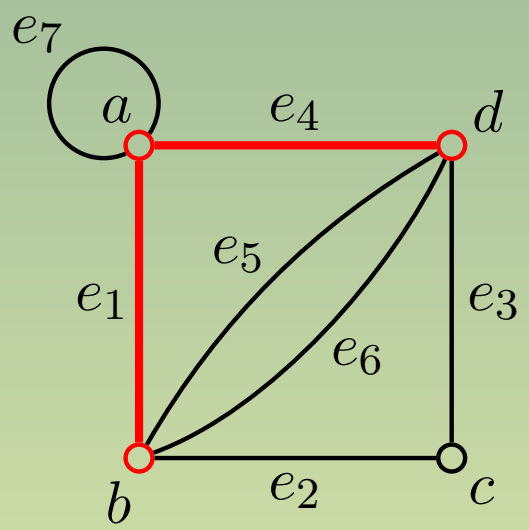
- Šetnja duljine 1

  šetnja: be_1a

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



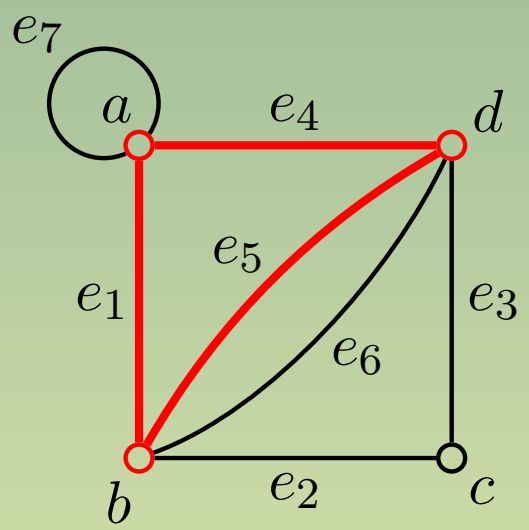
- Šetnja duljine 2

  šetnja: be_1ae_4d

Diskretne strukture s teorijom grafova

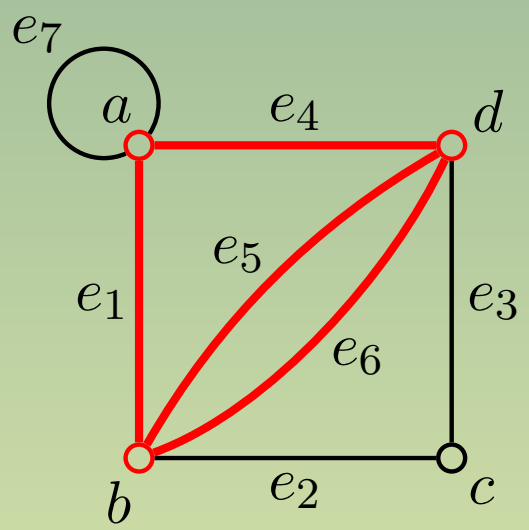
prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



- Šetnja duljine 3

  šetnja: $be_1ae_4de_5b$



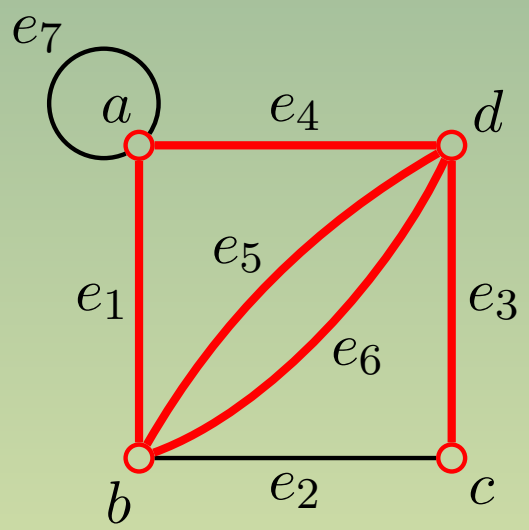
- Šetnja duljine 4

  šetnja: $be_1ae_4de_5be_6d$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

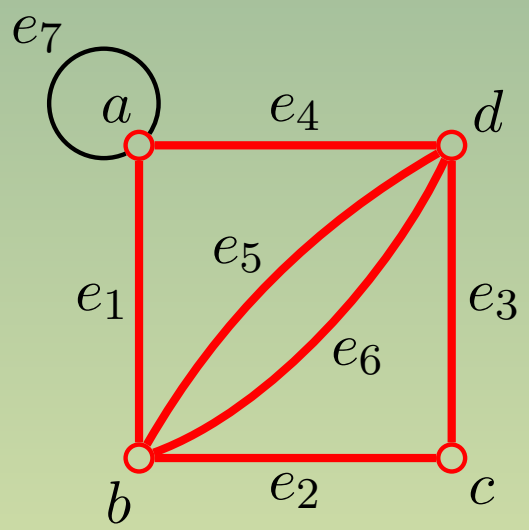
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



- Šetnja duljine 5

  šetnja: $be_1ae_4de_5be_6de_3c$

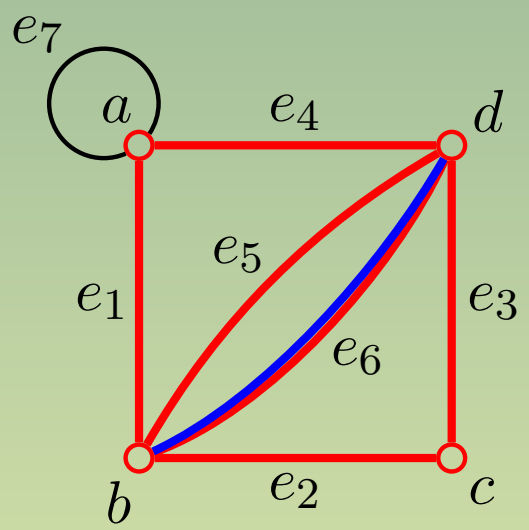
Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



- Šetnja duljine 6

šetnja: $be_1ae_4de_5be_6de_3ce_2b$

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



a (b, d)-šetnja duljine 7

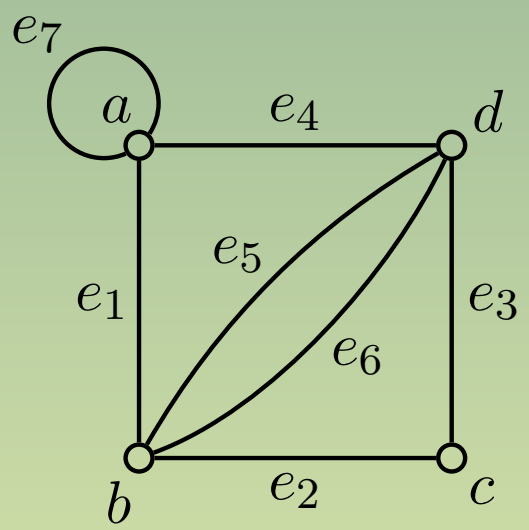
šetnja: $be_1ae_4de_5be_6de_3ce_2be_6d$

Pronađite još neke (b, d)-šetnje duljine 7.

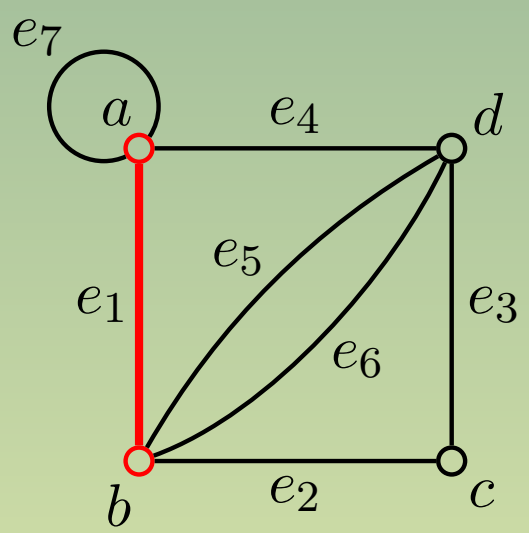
početak

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



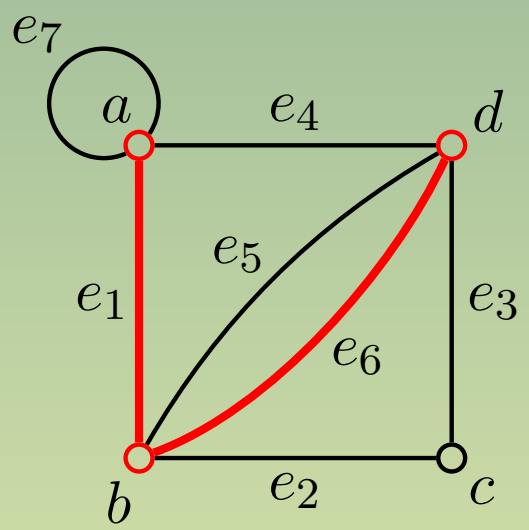
- Kako graf ima četiri vrha, maksimalni put ima duljinu 3. Evo jednog primjera maksimalnog puta.



- Put duljine 1

  put: ae_1b

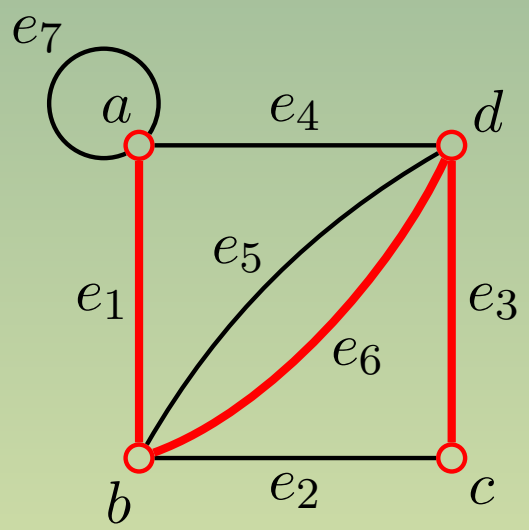
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



- Put duljine 2

  put: ae_1be_6d

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



- Put maksimalne duljine

put: $ae_1be_6de_3c$

Pronađite još neke putove maksimalne duljine.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

- Da bismo odredili broj svih šetnji duljine 3 između vrhova b i c, naći ćemo najprije matricu susjedstva grafa G, a zatim iskoristiti ◂ propoziciju 7.1..

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Tada je

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 6 & 11 \\ 11 & 9 & \boxed{8} & 17 \\ 6 & 8 & 4 & 8 \\ 11 & 17 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Iz matrice A^3 dobivamo da imamo ukupno 8 različitih šetnji duljine 3 između vrhova b i c.

- Iz ◂ propozicije 7.1. slijedi da je ukupni broj svih šetnji duljine 3 u zadanom grafu jednak sumi svih elemenata u matrici A^3, tj.

  $$9 + 2 \cdot 11 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 11 + 9 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 17 + 4 + 2 \cdot 8 + 9 = 153$$

  pa imamo ukupno 153 različite šetnje duljine 3 u zadanom grafu.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.3.

Zadana je matrica susjedstva

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

grafa čiji su vrhovi redom v_1, v_2, v_3, v_4.

a. *Ima li petlji u grafu? Da li je graf jednostavan?*
b. *Ima li izoliranih vrhova u grafu?*
c. *Izračunajte stupnjeve svih vrhova.*
d. *Nacrtajte graf.*
e. *Odredite broj šetnji duljine 2 i duljine 3 između vrhova* v_1 *i* v_2, *te vrhova* v_1 *i* v_4.

Rješenje.

a. Kako je $a_{11} = 1$, u vrhu v_1 imamo jednu petlju pa graf nije jednostavan.

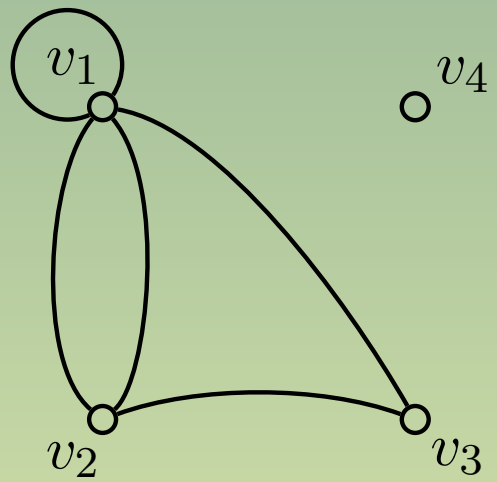
b. Vrh v_4 je izolirani vrh jer se u četvrtom retku i stupcu matrice A nalaze samo nule, tj. vrh v_4 nije s nikim susjedan.

c. Stupnjeve vrhova izračunamo tako zbrojimo elemente u pojedinom retku (ili stupcu) s time da elemente na glavnoj dijagonali pomnožimo s 2 (jer svaka petlja povećava stupanj vrha za dva).

$$d(v_1) = 2 \cdot 1 + 2 + 1 = 5$$
$$d(v_2) = 2 + 1 = 3$$
$$d(v_3) = 1 + 1 = 2$$
$$d(v_4) = 0$$

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

d)



e) Izračunamo li A^2 i A^3, dobivamo

$$A^2 = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & v_2 & & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^3 = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & v_2 & & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 15 & 15 & 9 & 0 \\ 15 & 8 & 8 & 0 \\ 9 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Koristeći ◂ propoziciju 7.1. dobivamo

broj (v_1, v_2)-šetnji duljine 2 jednak je 3

broj (v_1, v_4)-šetnji duljine 2 jednak je 0

broj (v_1, v_2)-šetnji duljine 3 jednak je 15

broj (v_1, v_4)-šetnji duljine 3 jednak je 0

Primjer 7.4.

Dokažite ili opovrgnite: svaka zatvorena šetnja u grafu sadrži ciklus.

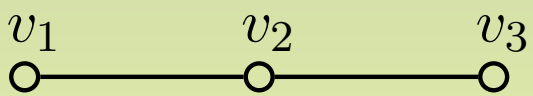
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.4.

Dokažite ili opovrgnite: svaka zatvorena šetnja u grafu sadrži ciklus.

Rješenje.

Tvrdnja ne vrijedi jer u grafu



zatvorena šetnja $v_1v_2v_3v_2v_1$ ne sadrži ciklus.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.5.

Ako je G jednostavan graf i $\delta(G) \geqslant k$, dokažite da tada u grafu G postoji put duljine k.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.5.

Ako je G jednostavan graf i $\delta(G) \geqslant k$, dokažite da tada u grafu G postoji put duljine k.

Rješenje.

Kako je G jednostavan graf i $\delta(G) \geqslant k$, slijedi da je svaki vrh u grafu G susjedan s barem k vrhova iz čega slijedi da graf G ima barem $k+1$ vrhova. Neka je $v_0 \in V(G)$ proizvoljni vrh. Krenimo iz vrha v_0 prema nekom vrhu v_1. Kako je $d(v_1) \geqslant k$ i izbacimo li brid koji spaja vrhove v_0 i v_1, preostane nam još barem $k-1$ bridova iz vrha v_1 prema ostalim vrhovima iz $V(G) \setminus \{v_0, v_1\}$. Stoga možemo krenuti dalje iz vrha v_1 prema nekom vrhu $v_2 \in V(G) \setminus \{v_0, v_1\}$.

Kako je $d(v_2) \geqslant k$, nakon izbacivanja bridova koji spajaju vrh v_2 s vrhovima v_0 i v_1, preostane nam još barem $k-2$ bridova iz vrha v_2 prema vrhovima iz $V(G) \setminus \{v_0, v_1, v_2\}$ pa možemo dalje iz vrha v_2 krenuti prema nekom vrhu $v_3 \in V(G) \setminus \{v_0, v_1, v_2\}$. Indukcijom dolazimo do puta $v_0v_1v_2 \cdots v_{k-1}$ koji je duljine $k-1$. Nadalje, kako je $d(v_{k-1}) \geqslant k$, nakon izbacivanja bridova koji spajaju vrh v_{k-1} s vrhovima $v_0, v_1, \ldots, v_{k-2}$ preostane nam barem još jedan brid iz vrha v_{k-1} prema nekom od vrhova iz $V(G) \setminus \{v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}\}$. Neka je v_k vrh susjedan s vrhom v_{k-1}. Tada je $v_0v_1v_2 \cdots v_{k-1}v_k$ put duljine k u grafu G.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Dva vrha $u, v \in V(G)$ u grafu G su **povezana** ako postoji (u, v)-put u G.

Udaljenost $d_G(u, v)$ dvaju vrhova $u, v \in V(G)$ je duljina najkraćeg (u, v)-puta u G. Ako ne postoji put u G između vrhova u i v, stavljamo da je $d_G(u, v) = \infty$. Po definiciji je $d_G(u, u) = 0$.

Dijametar grafa G je najveća od svih duljina najkraćih putova u grafu G, tj. preciznije

Dijametar grafa G

$$\operatorname{diam} G = \max \{d_G(u, v) : u, v \in V(G)\}$$

Pazite, dijametar grafa se ne mora podudarati s duljinom najduljeg puta u grafu. Navedite neke primjere.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Neka je $G = (V, E)$ graf. Na skupu V definiramo relaciju $\approx$ sa

$$v_1 \approx v_2 \overset{\text{def}}{\iff} v_1 \text{ i } v_2 \text{ su povezani u } G.$$

Dokažimo da je $\approx$ relacija ekvivalencije na skupu vrhova grafa G. Treba provjeriti da je ta relacija refleksivna, simetrična i tranzitivna. Zaista, kako je po definiciji $d_G(u, u) = 0$, slijedi da je svaki vrh povezan sam sa sobom putom duljine 0 pa je stoga $u \approx u$.

Pretpostavimo da je $u \approx v$. Tada u grafu G postoji put P koji povezuje vrh u s vrhom v. Međutim, tada put P^{-1} (inverzni put) povezuje vrh v s vrhom u pa je $v \approx u$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Konačno, pretpostavimo da je $u \approx v$ i $v \approx w$. Tada u grafu G postoji put P_1 koji povezuje vrh u s vrhom v i postoji put P_2 koji povezuje vrh v s vrhom w. No, tada šetnja P_1P_2, koja nastaje nadovezivanjem putova P_1 i P_2 kod vrha v, spaja vrh u sa vrhom w u grafu G. Jasno je, ako postoji šetnja između dva vrha, tada postoji i put između tih vrhova (uklone se nepotrebni bridovi i vrhovi iz šetnje) pa je $u \approx w$.



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Kako je $\approx$ relacija ekvivalencije na skupu vrhova $V(G)$ grafa G, onda ona daje jednu particiju skupa $V(G)$

$$V(G) = V_1 \uplus V_2 \uplus \cdots \uplus V_k.$$

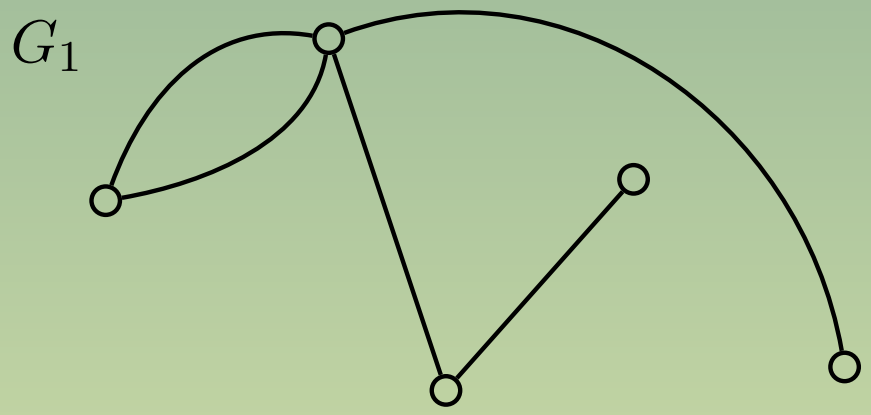
Inducirane podgrafove

$$G[V_1], G[V_2], \ldots, G[V_k]$$

zovemo **komponentama povezanosti** grafa G. Graf G je **povezan graf** ako ima točno jednu komponentu povezanosti, u protivnom je **nepovezan**.

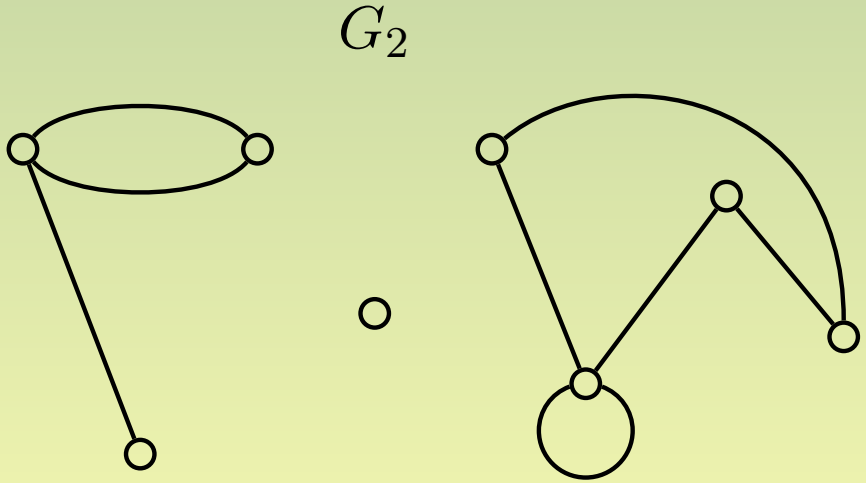
Broj komponenata povezanosti grafa G označavat ćemo s $\omega(G)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



G_1 je povezani graf

$\omega(G_1) = 1$



G_2 je nepovezani graf

$\omega(G_2) = 3$

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Povezani graf

Graf G je povezan ako postoji barem jedan put između svaka dva njegova vrha, tj. $\omega(G) = 1$.

Propozicija 7.2.

Ako su G_1 i G_2 izomorfni grafovi, tada oni imaju isti broj komponenata povezanosti, tj. $\omega(G_1) = \omega(G_2)$.

Dokaz.

Pretpostavimo suprotno, tj. da su grafovi G_1 i G_2 izomorfni, ali da je $\omega(G_1) \neq \omega(G_2)$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\omega(G_1) > \omega(G_2)$. Kako je $\omega(G_2) \geqslant 1$, tada je zbog navedene pretpostavke $\omega(G_1) \geqslant 2$, tj. G_1 ima barem dvije komponente povezanosti.

Neka su $v_1, v_2, \ldots, v_{\omega(G_1)}$ vrhovi iz pojedinih komponenata povezanosti grafa G_1. Tada između svaka dva od tih vrhova ne postoji put u grafu G_1. Međutim, kako su G_1 i G_2 izomorfni grafovi, tada se preko izomorfizma φ ti vrhovi preslikavaju u vrhove $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \ldots, \varphi(v_{\omega(G_1)})$ u grafu G_2 i između svaka dva od njih ne postoji put u grafu G_2. No, to bi onda značilo da graf G_2 ima barem toliko komponenata povezanosti koliko ih ima i graf G_1, tj. vrijedilo bi da je $\omega(G_2) \geqslant \omega(G_1)$, što je kontradikcija s pretpostavkom da graf G_1 ima više komponenata povezanosti od grafa G_2. ♡

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Napomena.

Obrat prethodne propozicije ne vrijedi, tj. ako grafovi imaju jednaki broj komponenata povezanosti, oni ne moraju biti izomorfni. U to smo se već uvjerili na mnogim primjerima od prije kada smo dokazivali da dva grafa nisu izomorfna, a oba su bila povezana.

Interesantnija je kontrapozicija prethodne propozicije. Nju često koristimo u zadacima kada želimo dokazati da dva grafa nisu izomorfna, a kontrapozicija glasi:

Ako dva grafa imaju različiti broj komponenata povezanosti, tada oni nisu izomorfni.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.6.

Ako grafovi G i H imaju isti broj vrhova, isti broj bridova i ako je stupanj svakog vrha u G i H jednak dva, da li su grafovi G i H izomorfni? Objasnite!

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.6.

Ako grafovi G i H imaju isti broj vrhova, isti broj bridova i ako je stupanj svakog vrha u G i H jednak dva, da li su grafovi G i H izomorfni? Objasnite!

Rješenje.



Grafovi G i H na gornjoj slici imaju isti broj vrhova i bridova, te je stupanj svakog vrha u G i H jednak dva, ali ti grafovi nisu izomorfni jer nemaju isti broj komponenata povezanosti. Naime, G je povezani graf, dok H nije povezan jer je $\omega(H) = 2$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Primjer 7.7.

Ako su grafovi G i H povezani te imaju isti broj vrhova, isti broj bridova i ako je stupanj svakog vrha u G i H jednak dva, da li su grafovi G i H izomorfni? Objasnite!

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.7.

Ako su grafovi G i H povezani te imaju isti broj vrhova, isti broj bridova i ako je stupanj svakog vrha u G i H jednak dva, da li su grafovi G i H izomorfni? Objasnite!

Rješenje.

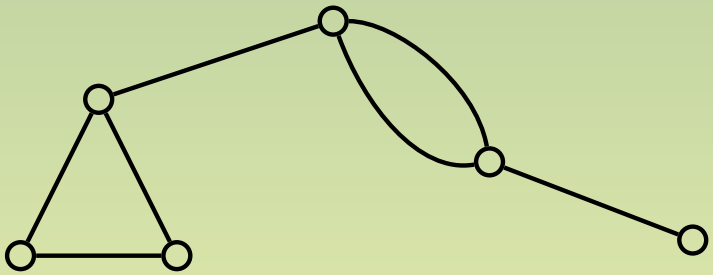
Da, grafovi G i H su u tom slučaju izomorfni jer su oba zapravo ciklusi istih duljina.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rezni brid ili most

Rezni brid grafa G je takav brid $e \in E(G)$ za koji je $\omega(G - e) > \omega(G)$, tj. čijim brisanjem dobivamo graf s više komponenata povezanosti od grafa G.

G

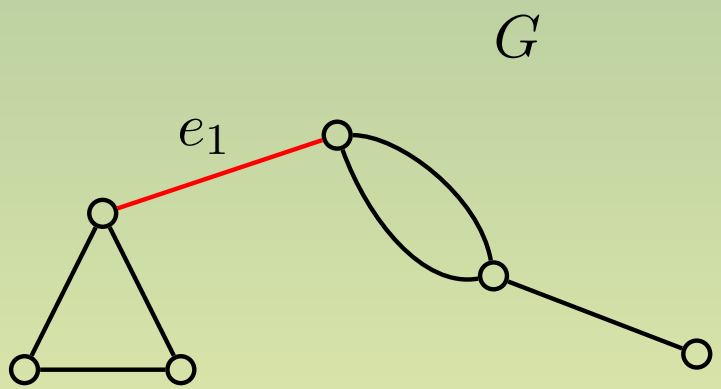


preskoči objašnjavanje

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rezni brid ili most

Rezni brid grafa G je takav brid $e \in E(G)$ za koji je $\omega(G - e) > \omega(G)$, tj. čijim brisanjem dobivamo graf s više komponenata povezanosti od grafa G.



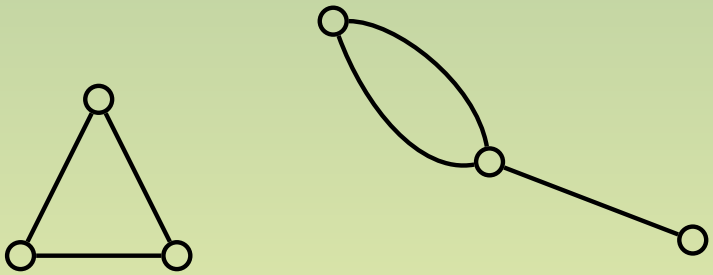
Brid e_1 je rezni brid grafa G jer je

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rezni brid ili most

Rezni brid grafa G je takav brid $e \in E(G)$ za koji je $\omega(G - e) > \omega(G)$, tj. čijim brisanjem dobivamo graf s više komponenata povezanosti od grafa G.

$G - e_1$



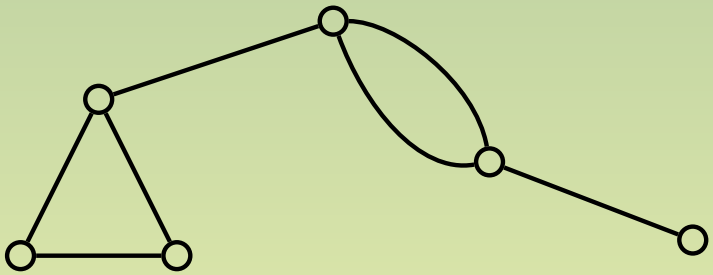
Brid e_1 je rezni brid grafa G jer je $\omega(G - e_1) > \omega(G)$

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rezni brid ili most

Rezni brid grafa G je takav brid $e \in E(G)$ za koji je $\omega(G - e) > \omega(G)$, tj. čijim brisanjem dobivamo graf s više komponenata povezanosti od grafa G.

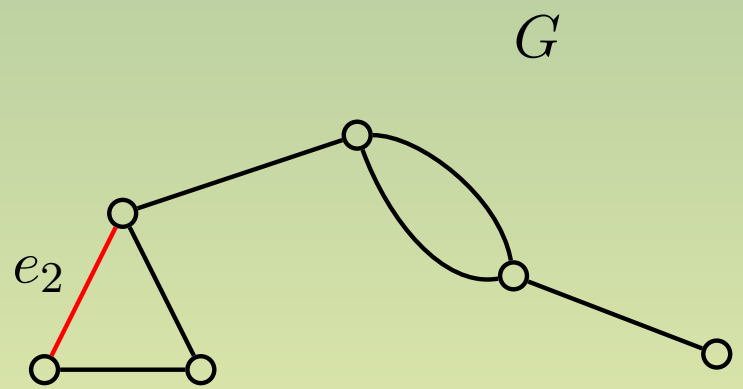
G



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rezni brid ili most

Rezni brid grafa G je takav brid $e \in E(G)$ za koji je $\omega(G - e) > \omega(G)$, tj. čijim brisanjem dobivamo graf s više komponenata povezanosti od grafa G.



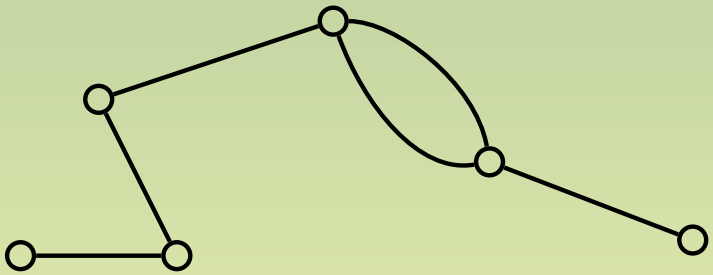
Brid e_2 nije rezni brid grafa G jer je

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rezni brid ili most

Rezni brid grafa G je takav brid $e \in E(G)$ za koji je $\omega(G - e) > \omega(G)$, tj. čijim brisanjem dobivamo graf s više komponenata povezanosti od grafa G.

$G - e_2$



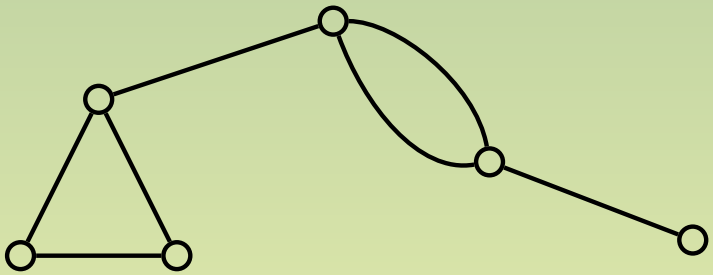
Brid e_2 nije rezni brid grafa G jer je $\omega(G - e_2) = \omega(G)$

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rezni brid ili most

Rezni brid grafa G je takav brid $e \in E(G)$ za koji je $\omega(G - e) > \omega(G)$, tj. čijim brisanjem dobivamo graf s više komponenata povezanosti od grafa G.

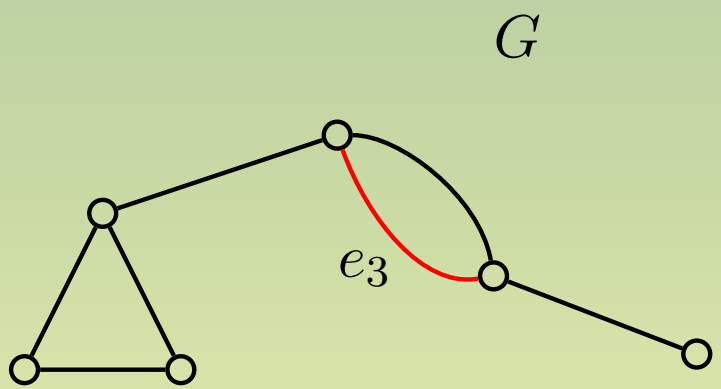
G



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rezni brid ili most

Rezni brid grafa G je takav brid $e \in E(G)$ za koji je $\omega(G - e) > \omega(G)$, tj. čijim brisanjem dobivamo graf s više komponenata povezanosti od grafa G.



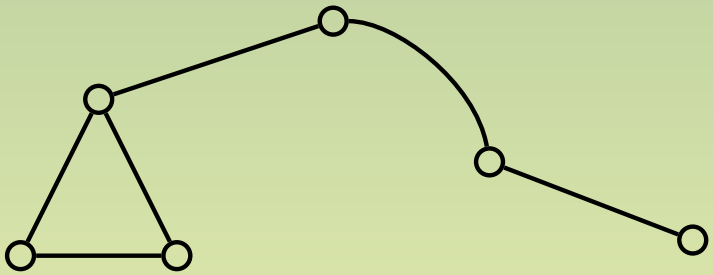
Brid e_3 nije rezni brid grafa G jer je

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rezni brid ili most

Rezni brid grafa G je takav brid $e \in E(G)$ za koji je $\omega(G - e) > \omega(G)$, tj. čijim brisanjem dobivamo graf s više komponenata povezanosti od grafa G.

$G - e_3$



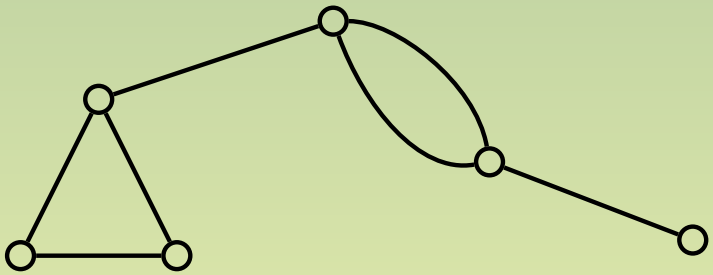
Brid e_3 nije rezni brid grafa G jer je $\omega(G - e_3) = \omega(G)$

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rezni brid ili most

Rezni brid grafa G je takav brid $e \in E(G)$ za koji je $\omega(G - e) > \omega(G)$, tj. čijim brisanjem dobivamo graf s više komponenata povezanosti od grafa G.

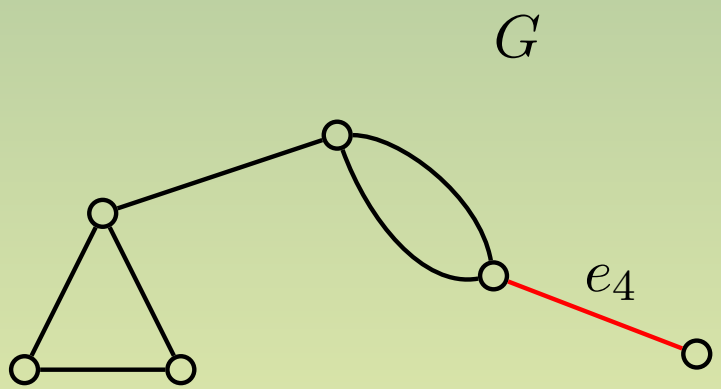
G



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rezni brid ili most

Rezni brid grafa G je takav brid $e \in E(G)$ za koji je $\omega(G - e) > \omega(G)$, tj. čijim brisanjem dobivamo graf s više komponenata povezanosti od grafa G.



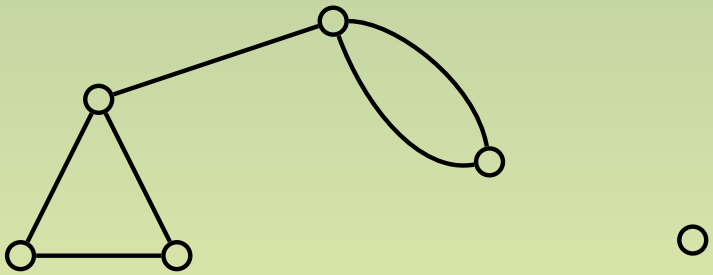
Brid e_4 je rezni brid grafa G jer je

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rezni brid ili most

Rezni brid grafa G je takav brid $e \in E(G)$ za koji je $\omega(G - e) > \omega(G)$, tj. čijim brisanjem dobivamo graf s više komponenata povezanosti od grafa G.

$G - e_4$



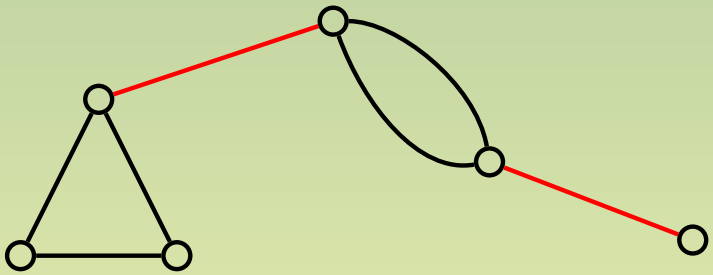
Brid e_4 je rezni brid grafa G jer je $\omega(G - e_4) > \omega(G)$

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rezni brid ili most

Rezni brid grafa G je takav brid $e \in E(G)$ za koji je $\omega(G - e) > \omega(G)$, tj. čijim brisanjem dobivamo graf s više komponenata povezanosti od grafa G.

G



Crveni bridovi su jedini rezni bridovi u grafu G.

objašnjenje

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Propozicija 7.3.

U svakom grafu G vrijedi

$$\omega(G) + \varepsilon(G) \geqslant \nu(G).$$

Dokaz.

Dokaz provodimo indukcijom po $\varepsilon(G)$. Ako je $\varepsilon(G) = 0$, tada je graf G prazan graf pa je $\omega(G) = \nu(G)$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve grafove s $\varepsilon(G) = n$ bridova. Neka je G graf s $n+1$ bridova, tj. $\varepsilon(G) = n+1$. Neka je $e \in E(G)$ proizvoljni brid. Tada vrijedi

$$\omega(G) \geqslant \omega(G-e) - 1 \qquad (*)$$

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

jer brid e ili nije rezni brid grafa G pa je $\omega(G) = \omega(G - e)$, ili pak jest rezni brid grafa G pa je $\omega(G) = \omega(G - e) - 1$. Kako graf $G - e$ ima n bridova, na njega možemo primijeniti pretpostavku indukcije pa dobivamo

$$\omega(G - e) + \varepsilon(G - e) \geqslant \nu(G - e). \qquad (**)$$

Kako je $\nu(G - e) = \nu(G)$ i $\varepsilon(G - e) = \varepsilon(G) - 1$, iz $(*)$ i $(**)$ slijedi

$$\omega(G) + \varepsilon(G) \geqslant \Big[\omega(G - e) - 1\Big] + \Big[\varepsilon(G - e) + 1\Big] =$$

$$= \omega(G - e) + \varepsilon(G - e) \geqslant \nu(G)$$



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.8.

Neka je G povezan graf s n vrhova. Dokažite da G ima barem $n-1$ bridova.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.8.

Neka je G povezan graf s n vrhova. Dokažite da G ima barem $n-1$ bridova.

Rješenje.

Prema ◂ propoziciji 7.3. znamo da vrijedi

$$\omega(G) + \varepsilon(G) \geqslant \nu(G).$$

Kako je $\nu(G) = n$, a zbog povezanosti grafa je $\omega(G) = 1$, dobivamo da je

$$\varepsilon(G) \geqslant \nu(G) - \omega(G) = n - 1$$

iz čega slijedi da graf G ima barem $n-1$ bridova.

Primjer 7.9.

a. *Ako je G jednostavni graf i $\varepsilon > \binom{\nu-1}{2}$, tada je G povezan graf. Dokažite!*

b. *Za $\nu > 1$ pronađite nepovezani jednostavni graf sa $\varepsilon = \binom{\nu-1}{2}$ bridova.*

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.9.

a. *Ako je G jednostavni graf i $\varepsilon > \binom{\nu-1}{2}$, tada je G povezan graf. Dokažite!*

b. *Za $\nu > 1$ pronađite nepovezani jednostavni graf sa $\varepsilon = \binom{\nu-1}{2}$ bridova.*

Rješenje.

a. Jednostavni graf s ν vrhova ima najviše $\binom{\nu}{2}$ bridova. U slučaju da ima točno $\binom{\nu}{2}$ bridova, tada se radi o potpunom grafu K_ν koji je očito povezan jer su svaka dva vrha susjedna. Trebamo dokazati zapravo da nakon izbacivanja bilo kojih $\nu - 2$ bridova iz potpunog grafa K_ν preostali graf ostaje i dalje povezan, a da izbacivanje $\nu - 1$ bridova može narušiti povezanost.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Naime, u tom slučaju dobiveni jednostavni graf ima ukupno

$$\binom{\nu}{2} - (\nu - 2)$$

bridova i vrijedi

$$\binom{\nu}{2} - (\nu - 2) = \binom{\nu - 1}{2} + 1 > \binom{\nu - 1}{2},$$

tj. broj bridova je upravo za jedan veći od broja $\binom{\nu-1}{2}$. Kako je K_ν $(\nu - 1)$-regularan graf, izbacivanjem $\nu - 1$ bridova koji su svi incidentni s istim vrhom, dobit ćemo nepovezani graf koji će imati dvije komponente povezanosti, jedna komponenta je $K_{\nu-1}$, a druga je prazan graf s jednim vrhom. Dakle, izbacivanjem $\nu - 1$

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

bridova iz potpunog grafa K_ν možemo narušiti povezanost grafa. Pretpostavimo da smo izbacivanjem $\nu - 2$ brida iz potpunog grafa dobili nepovezani graf. Neka je u prvoj komponenti p vrhova, a u drugoj je tada $\nu - p$ vrhova. U prvoj komponenti je tada najviše $\binom{p}{2}$ bridova, a u drugoj je najviše $\binom{\nu-p}{2}$ bridova. Sve zajedno bismo imali najviše $\binom{p}{2} + \binom{\nu-p}{2}$ bridova. Definiramo funkciju

$$f(p) = \binom{p}{2} + \binom{\nu - p}{2} = p^2 - \nu p + \frac{\nu^2}{2} - \frac{\nu}{2}.$$

Deriviranjem se lagano vidi da ta funkcija postiže minimum za $p = \frac{\nu}{2}$. Nas zanima maksimum te funkcije na prirodnim brojevima unutar intervala $\langle 0, \nu \rangle$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

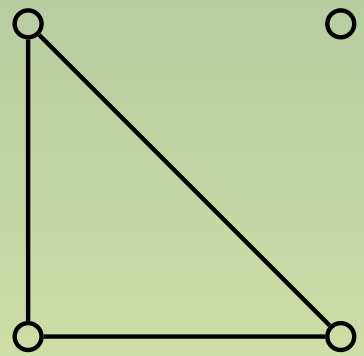
Kako se radi o paraboli, maksimum se postiže za $p = 1$ i $p = \nu - 1$, tj. maksimalni broj bridova dobivamo kada jedna komponenta povezanosti ima samo jedan vrh, a druga ima $\nu - 1$ vrhova. Dobiva se da je $f(1) = \frac{\nu^2}{2} - \frac{3}{2}\nu + 1$. Dakle, ako pretpostavimo da nakon izbacivanja $\nu - 2$ bridova iz K_ν dobivamo nepovezani graf, tada taj graf ima najviše $\frac{\nu^2}{2} - \frac{3}{2}\nu + 1$ bridova. Međutim, ako smo iz potpunog grafa K_ν izbacili $\nu - 2$ brida, u dobivenom grafu ćemo imati ukupno

$$\binom{\nu}{2} - (\nu - 2) = \frac{\nu^2}{2} - \frac{3}{2}\nu + 2$$

bridova. Dakle, dobili smo kontradikciju pa slijedi da izbacivanjem bilo koja $\nu - 2$ brida iz K_ν dobiveni graf i dalje ostaje povezan. Dakle, ako u jednostavnom grafu vrijedi $\varepsilon > \binom{\nu-1}{2}$, tada je taj graf povezan.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

- Na primjer,



$$\nu = 4$$

$$\varepsilon = \binom{\nu-1}{2} = \binom{3}{2} = 3$$

Zadatak 7.1.

Navedite nekoliko primjera jednostavnih grafova koji nemaju reznih bridova.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.10.

Dokažite da svaka dva najdulja puta u povezanom grafu imaju zajednički vrh.

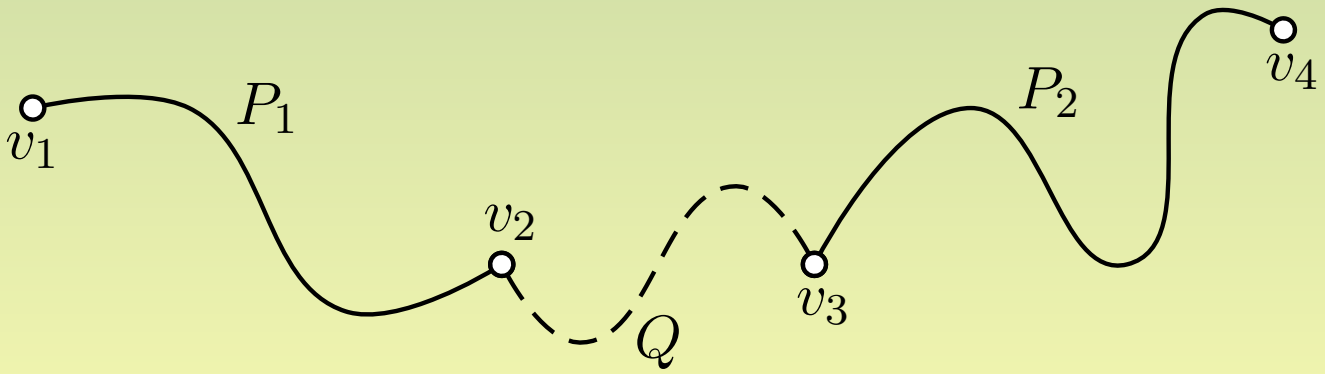
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.10.

Dokažite da svaka dva najdulja puta u povezanom grafu imaju zajednički vrh.

Rješenje.

Neka su P_1 i P_2 dva najdulja puta u grafu G i pretpostavimo da oni nemaju zajedničkih vrhova. Neka P_1 počinje u vrhu v_1 i završava u vrhu v_2, a P_2 neka počinje u vrhu v_3 i završava u vrhu v_4.



Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

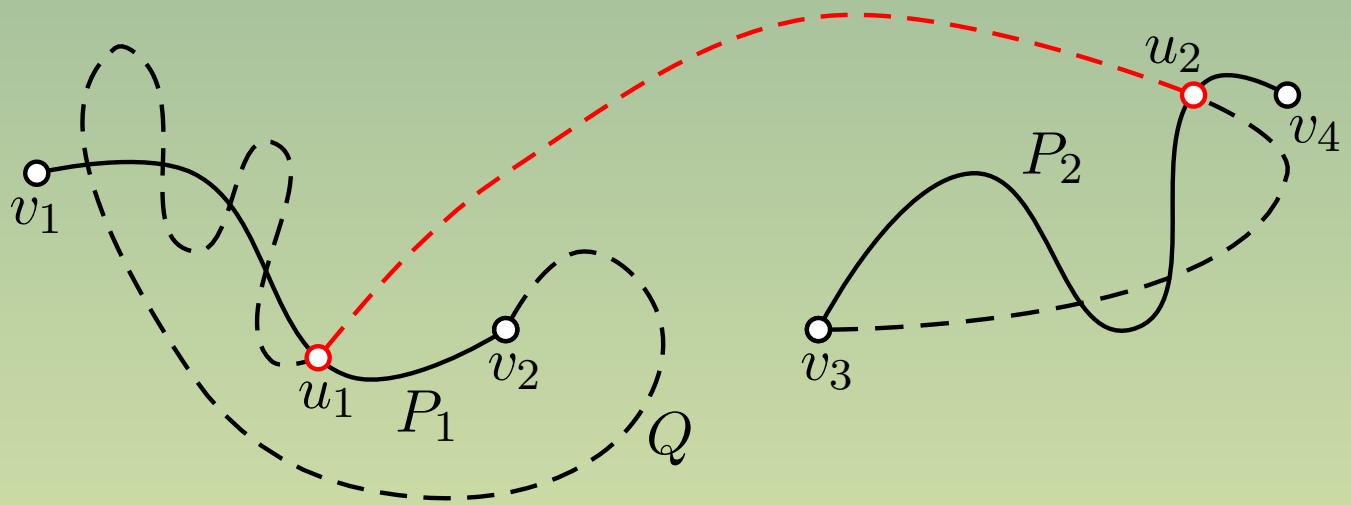
Problem kineskog poštara

Kako je G povezani graf, tada u G postoji put Q koji počinje u vrhu v_2 i završava u vrhu v_3. Razlikujemo sljedeća dva moguća slučaja.

1. slučaj. Put Q, osim vrhova v_2 i v_3, ne sadrži niti jedan drugi vrh koji se nalaze na putovima P_1 i P_2 kako je prikazano na prethodnoj slici. U tom slučaju je P_1QP_2 put između vrhova v_1 i v_4 koji je dulji od oba puta P_1 i P_2, što je nemoguće jer su P_1 i P_2 najdulji putovi po pretpostavci.

2. slučaj. Put Q, osim vrhova v_2 i v_3, sadrži još neke vrhove koji se nalaze na putovima P_1 i P_2.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



Neka je u_1 posljednji zajednički vrh putova P_1 i Q, a vrh u_2 prvi zajednički vrh putova P_2 i Q nakon vrha u_1 kako je prikazano na gornjoj slici. Neka je Q' dio puta Q između vrhova u_1 i u_2 (crveni iscrtkani dio na slici). Tada put Q' nema, osim krajnjih vrhova u_1 i u_2, drugih zajedničkih vrhova s putovima P_1 i P_2.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Vrh u_1 dijeli put P_1 na dva dijela i neka je P_1' dulji od ta dva dijela. Analogno, vrh u_2 dijeli put P_2 na dva dijela i neka je P_2' dulji od ta dva dijela. Kako su P_1 i P_2 putovi iste duljine (jer su oni po pretpostavci najdulji putovi), tada je put $P_1'Q'P_2'$ dulji od putova P_1 i P_2, što je kontradikcija s pretpostavkom da su P_1 i P_2 najdulji putovi. Dakle, u oba slučaja smo dobili kontradikciju iz čega slijedi da svaka dva najdulja puta u povezanom grafu imaju barem jedan zajednički vrh.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.11.

Neka je G jednostavni graf u kojemu je $\operatorname{diam} G = 2$ i $\Delta(G) = \nu(G) - 2$. Tada je $\varepsilon(G) \geqslant 2\nu(G) - 4$. Dokažite!

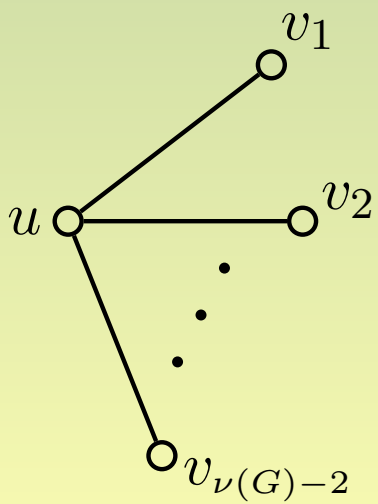
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.11.

Neka je G jednostavni graf u kojemu je $\operatorname{diam} G = 2$ i $\Delta(G) = \nu(G) - 2$. Tada je $\varepsilon(G) \geqslant 2\nu(G) - 4$. Dokažite!

Rješenje.

Sjetimo se da je $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V(G)} d_G(v)$. Stoga u grafu G postoji vrh $u \in V(G)$ takav da je $d_G(u) = \nu(G) - 2$. Neka su $v_1, v_2, \ldots, v_{\nu(G)-2}$ susjedni vrhovi vrha u.



Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

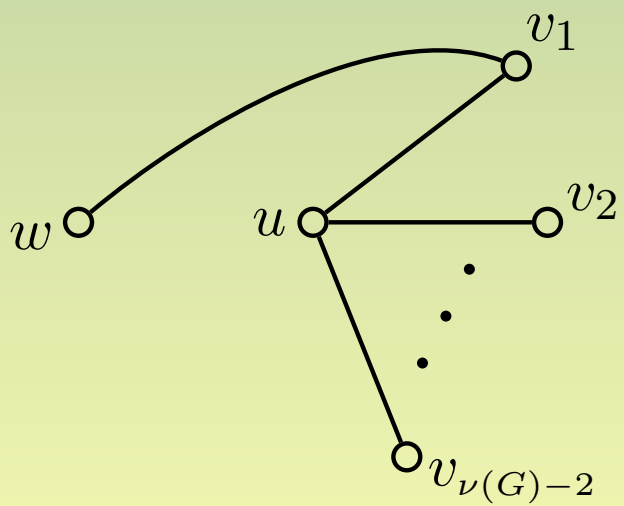
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Kako je po pretpostavci $\nu(G) = \Delta(G) + 2 = d_G(u) + 2$, slijedi da u grafu G, osim vrhova $u, v_1, v_2, \ldots, v_{\nu(G)-2}$, postoji još točno jedan vrh w. Taj vrh ne smije biti spojen s vrhom u jer bi tada bilo $d_G(u) > \Delta(G)$, što nije moguće. Međutim, kako je $\operatorname{diam} G = 2$, vrh w mora biti spojen s nekim od vrhova $v_1, v_2, \ldots, v_{\nu(G)-2}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je vrh w susjedan s vrhom v_1.



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Nadalje, kako je $d_G(w, v_2) \leqslant 2$ (zbog $\operatorname{diam} G = 2$), slijedi da mora biti $v_1 \sim v_2$ ili $w \sim v_2$. Općenito, zbog $\operatorname{diam} G = 2$, mora biti

$$v_1 \sim v_i \quad \text{ili} \quad w \sim v_i, \quad i = 2, 3, \ldots, \nu(G) - 2$$

Dakle, u svakom slučaju dobivamo još barem $\nu(G) - 2$ novih bridova, a od prije imamo $\nu(G) - 2$ stara brida pa je

$$\varepsilon(G) \geqslant \big(\nu(G) - 2\big) + \big(\nu(G) - 2\big)$$

odnosno

$$\varepsilon(G) \geqslant 2\nu(G) - 4.$$

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.12.

Neka je G jednostavni graf u kojemu vrijedi

$$d(u) + d(v) \geqslant \nu - 1, \quad \forall u, v \in V(G).$$

Dokažite da je $\operatorname{diam} G = 2$. *Specijalno, G je povezan graf.*

Primjer 7.12.

Neka je G jednostavni graf u kojemu vrijedi

$$d(u) + d(v) \geqslant \nu - 1, \quad \forall u, v \in V(G).$$

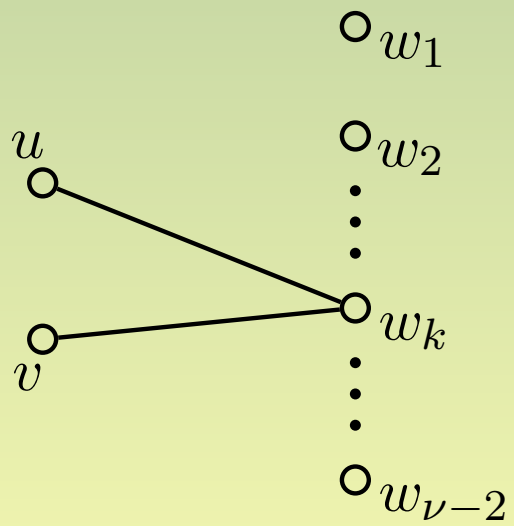
Dokažite da je $\operatorname{diam} G = 2$. *Specijalno, G je povezan graf.*

Rješenje.

Neka su $u, v \in V(G)$ proizvoljni. Trebamo dokazati da između njih postoji put duljine najviše 2. Ako je $u \sim v$, onda je gotovo jer tada između njih postoji put duljine 1. Pretpostavimo da vrhovi u i v nisu susjedni. Svaki od vrhova u i v je barem stupnja 1 jer u protivnom bismo zbog $d(u) + d(v) \geqslant \nu - 1$ imali višestruke bridove, što nije moguće jer je G jednostavan graf.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Neka su $w_1, w_2, \ldots, w_{\nu-2}$ još preostali vrhovi u grafu G. Kako vrhovi u i v nisu susjedni i kako je $d(u) + d(v) \geqslant \nu - 1$, slijedi da iz vrhova u i v imamo ukupno barem $\nu - 1$ bridova prema vrhovima $w_1, w_2, \ldots, w_{\nu-2}$ kojih ima samo $\nu - 2$. Stoga postoji vrh w_k koji je susjedan s oba vrha u i v iz čega slijedi da je uw_kv put duljine 2 između vrhova u i v. Kako su u i v bili proizvoljni vrhovi, slijedi da je $\operatorname{diam} G = 2$.



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.13.

Neka je A matrica susjedstva grafa G koji ima barem dva vrha. Dokažite da je G povezani graf akko matrica $B = A + A^2 + \cdots + A^n$ ima sve elemente različite od nule za neki $n \in \mathbb{N}$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.13.

Neka je A matrica susjedstva grafa G koji ima barem dva vrha. Dokažite da je G povezani graf akko matrica $B = A + A^2 + \cdots + A^n$ ima sve elemente različite od nule za neki $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje.

Neka je $A^k = \left[a_{ij}^{(k)}\right]$. Znamo od prije da je $a_{ij}^{(k)}$ jednak ukupnom broju svih šetnji duljine k između vrhova v_i i v_j. Isto tako je jasno da ako između dva vrha postoji šetnja, tada između njih postoji i put (uvjerite se u to).

$\boxed{\Rightarrow}$

Neka je G povezan graf. Tada između svaka dva vrha postoji put. Neka je n duljina najduljeg puta u grafu između dva vrha,

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

u smislu da nema kraćeg puta između njih. Tada između svaka dva vrha u grafu G postoji put duljine $\leqslant n$ pa matrica $B = A + A^2 + \cdots + A^n$ ima sve elemente različite od nule.

$\boxed{\Leftarrow}$

Pretpostavimo da za neko $n \in \mathbb{N}$ matrica $B = A + A^2 + \cdots + A^n$ ima sve elemente različite od nule. To zapravo znači da između svaka dva vrha postoji šetnja duljine $\leqslant n$ pa tada postoji i put između svaka dva vrha. Stoga je G povezani graf.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.14.

Dokažite da izomorfni grafovi moraju sadržavati isti broj k-ciklusa.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.14.

Dokažite da izomorfni grafovi moraju sadržavati isti broj k-ciklusa.

Rješenje.

Neka su G_1 i G_2 izomorfni grafovi.

$$V(G_1) = \{v_1, \ldots, v_n\}, \quad V(G_2) = \{w_1, \ldots, w_n\}$$

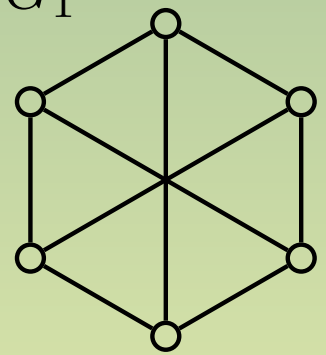
Neka je $\varphi : V(G_1) \to V(G_2)$ izomorfizam tih grafova. Ako su $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ vrhovi k-ciklusa u G_1, tada zbog čuvanja susjednosti $\varphi(v_{i_1}), \ldots, \varphi(v_{i_k})$ moraju biti vrhovi k-ciklusa u G_2 s odgovarajućim bridovima. Isto tako, ako su $w_{j_1}, \ldots, w_{j_k}$ vrhovi k-ciklusa u grafu G_2, tada opet zbog čuvanja susjednosti $\varphi^{-1}(w_{j_1}), \ldots, \varphi^{-1}(w_{j_k})$ moraju biti vrhovi k-ciklusa u G_1. Jasno je pri tome da se različiti k-ciklusi preko tog izomorfizma preslikavaju u različite k-cikluse. Dakle, G_1 i G_2 imaju isti broj k-ciklusa.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

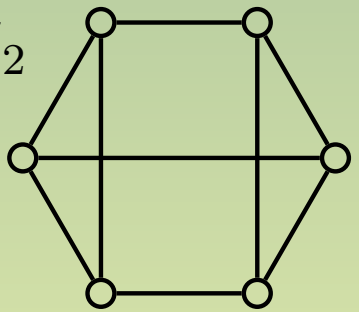
Primjer 7.15.

Da li su grafovi G_1 i G_2 izomorfni?

G_1



G_2

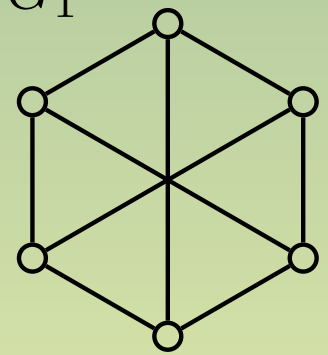


Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

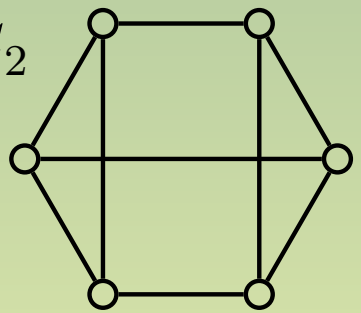
Primjer 7.15.

Da li su grafovi G_1 i G_2 izomorfni?

G_1



G_2



Rješenje.

Graf G_2 sadrži 3-cikluse, a graf G_1 nema niti jednog 3-ciklusa pa stoga grafovi G_1 i G_2 nisu izomorfni.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Teorem 7.1 (Karakterizacija bipartitnih grafova).

Graf G je bipartitan akko ne sadrži neparne cikluse.

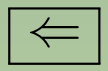
Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Neka je G bipartitan graf i neka je $\{X, Y\}$ njegova biparticija vrhova. Neka je $C = v_0 v_1 \cdots v_k v_0$ ciklus u G. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $v_0 \in X$. Kako su vrhovi v_0 i v_1 susjedni, mora biti $v_1 \in Y$ jer je G bipartitan graf. Analogno, kako su v_1 i v_2 susjedni, mora biti $v_2 \in X$. Općenito je $v_{2i} \in X$ i $v_{2i+1} \in Y$. Kako je $v_0 \in X$, slijedi da je $v_k \in Y$. Stoga postoji $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takav da je $k = 2i + 1$ pa je C parni ciklus. Dakle, svaki ciklus u G je parne duljine, tj. G ne sadrži neparne cikluse.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



Tvrdnju je dovoljno dokazati za povezani graf. Neka je G povezani graf koji ne sadrži neparne cikluse. Neka je $u \in V(G)$ proizvoljni vrh. Definiramo skupove

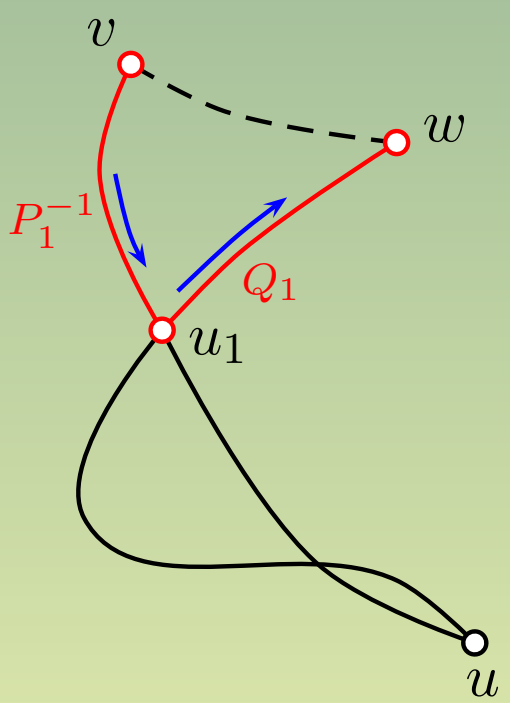
$$X = \{x \in V(G) : d(u,x) \text{ je paran}\},$$

$$Y = \{y \in V(G) : d(u,y) \text{ je neparan}\}.$$

Tvrdimo da je (X, Y) biparticija grafa G. Neka su $v, w \in X$ proizvoljni. Želimo dokazati da v i w nisu susjedni vrhovi. Neka je P najkraći (u, v)-put, a Q najkraći (u, w)-put. Neka je u_1 posljednji zajednički vrh putova P i Q. Kako su P i Q najkraći

putovi, onda su i (u, u_1)-dijelovi od P i Q najkraći (u, u_1)-putovi, pa imaju istu duljinu. Kako su putovi P i Q parne duljine (jer su $v, w \in X$), duljine od $P_1 = (u_1, v)$-dio od P i $Q_1 = (u_1, w)$-dio od Q imaju istu parnost. Stoga (v, w)-put $P_1^{-1}Q_1$ ima parnu duljinu. Kad bi v i w bili susjedni vrhovi, onda bi $P_1^{-1}Q_1wv$ bio neparni ciklus u G, što je kontradikcija s pretpostavkom da G ne sadrži neparne cikluse. Dakle, nikoja dva vrha u X nisu susjedna. Analogno se dokaže da nikoja dva vrha u Y nisu susjedna pa je G zaista bipartitni graf.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



$P_1^{-1}Q_1$ je (v, w)-put parne duljine pa kad bi vrhovi v i w bili susjedni imali bismo u grafu neparni ciklus, suprotno pretpostavci. ♡

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.16.

Neka je A matrica susjedstva bipartitnog grafa. Dokažite da su svi elementi na glavnoj dijagonali matrice A^{35} jednaki nula.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.16.

Neka je A matrica susjedstva bipartitnog grafa. Dokažite da su svi elementi na glavnoj dijagonali matrice A^{35} jednaki nula.

Rješenje.

Bipartitni graf ne sadrži cikluse neparne duljine, pa ne sadrži niti zatvorene šetnje neparne duljine. Neka je $A = \left[a_{ij}^{(35)}\right]$. Element $a_{ii}^{(35)}$ jednak je broju svih šetnji duljine 35 koje počinju i završavaju u vrhu v_i. Stoga taj broj mora biti jednak nula jer bipartitni graf ne sadrži zatvorene šetnje neparnih duljina.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.17.

Neka je G graf za koji vrijedi $\varepsilon(G) \geqslant \nu(G)$. Dokažite da graf G sadrži ciklus.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.17.

Neka je G graf za koji vrijedi $\varepsilon(G) \geqslant \nu(G)$. Dokažite da graf G sadrži ciklus.

Rješenje.

Ako graf nije jednostavan, tada sadrži petlje (1-cikluse) ili višestruke bridove (pa ima 2-cikluse). Pretpostavimo stoga da je G jednostavan graf. Pretpostavimo još da je G povezan. Krenimo od nekog vrha v_1. Kako je graf G povezan, mora postojati neki vrh v_2 koji je susjedan s vrhom v_1. Dalje, kako je graf G povezan, mora postojati vrh v_3 koji je susjedan s nekim od vrhova v_1 i v_2. Ako je susjedan s oba vrha, onda je gotovo jer je tada $v_1v_2v_3$ ciklus u grafu G. Pretpostavimo da je v_3 susjedan

samo s jednim od vrhova v_1 i v_2. Ponovo, zbog pretpostavke da je G povezan, mora postojati vrh v_4 koji je susjedan s nekim od vrhova v_1, v_2 i v_3. Kada bi vrh v_4 bio susjedan s barem dva od tih vrhova, tada bismo opet u grafu G imali ciklus. Naime, pretpostavimo da je vrh v_4 susjedan s v_i i v_j, gdje je $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$. Kako je po konstrukciji inducirani podgraf $G\big[\{v_1, v_2, v_3\}\big]$ povezan, tada postoji (v_i, v_j)-put P unutar tog podgrafa pa bi tada $v_4 v_i P v_j v_4$ bio ciklus u grafu G. Pretpostavimo stoga da je v_4 susjedan samo s jednim od vrhova v_1, v_2 i v_3. Ako nakon što smo prošli kroz vrhove $v_1, v_2, \ldots, v_i$ na opisani način, i dalje nemamo u induciranom podgrafu $G\big[\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}\big]$ ciklusa, to znači da je svaki od vrhova

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

iz skupa $\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$, susjedan s točno jednim od svojih prethodnih vrhova (osim vrha v_1 koji nema prethodnika). Dakle, u podgrafu $G\big[\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}\big]$ imamo točno $i-1$ bridova. Kako je G povezan graf, mora postojati vrh v_{i+1} koji je susjedan s nekim od vrhova $v_1, v_2, \ldots, v_i$. Ako je v_{i+1} susjedan s barem dva od tih vrhova, recimo v_k i v_l, gdje su $k, l \in \{1, 2, \ldots, i\}$, $k \neq l$, tada u G postoji ciklus. Naime, kako je po konstrukciji $G\big[\{v1, v2, \ldots, v_i\}\big]$ povezan, tada u njemu postoji (v_k, v_l)-put P. No, tada je $v_{i+1}v_kPv_lv_{i+1}$ ciklus u G. Pretpostavimo da je ipak i dalje v_{i+1} susjedan samo s jednim od vrhova $v_1, v_2, \ldots, v_i$. Nastavljajući tako dalje, u najgorem slučaju možemo doći do situacije da nakon što obiđemo $\nu - 1$ vrhova $v_1, v_2, \ldots, v_{\nu-1}$ na

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

opisani način, u induciranom podgrafu $G\big[\{v_1, v_2, \ldots, v_{\nu-1}\}\big]$ nemamo ciklusa i u tom podgrafu imamo točno $\nu - 2$ brida. Kako je G povezan, posljednji vrh v_ν mora biti susjedan s nekim od vrhova $v_1, v_2, \ldots, v_{\nu-1}$. Dakle, tada bismo u grafu G imali $\nu - 1$ bridova. Međutim, kako po pretpostavci graf G ima barem ν bridova, slijedi da vrh v_ν mora biti susjedan s barem dva vrha iz skupa $\{v_1, v_2, \ldots, v_{\nu-1}\}$. Neka su to vrhovi v_k i v_l. Kako je po konstrukciji inducirani podgraf $G\big[\{v_1, v_2, \ldots, v_{\nu-1}\}\big]$ povezan, postoji unutar njega put P od vrha v_k do vrha v_l. Tada je $v_\nu v_k P v_l v_\nu$ ciklus u grafu G pa graf G zaista sadrži ciklus.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Dakle, dokazali smo da povezani graf koji ima barem onoliko bridova koliko ima i vrhova mora sadržavati ciklus. Što ako je G nepovezani graf u kojemu je $\varepsilon \geqslant \nu$? Tada mora postojati barem jedna komponenta povezanosti u kojoj ima barem onoliko bridova koliko ima i vrhova u toj komponenti. Naime, kad bi u svakoj komponenti bilo manje bridova nego što ima vrhova u toj komponenti, prebrojavanjem svih vrhova i bridova dobili bismo da je $\varepsilon < \nu$, što je kontradikcija. Dakle, mora postojati komponenta povezanosti takvog grafa koja ima barem onoliko bridova koliko je i vrhova u toj komponenti. No, ta komponenta je povezan graf, pa prema gore dokazanom, ona mora sadržavati ciklus. Stoga i čitav graf G sadrži ciklus.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Struk grafa G je duljina najkraćeg ciklusa u grafu G. Ako G nema ciklusa, stavljamo da je struk od G beskonačan.

Primjer 7.18.

Dokažite: k-regularan graf G struka 4 ima barem $2k$ vrhova i do na izomorfizam postoji točno jedan takav graf sa $2k$ vrhova.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Struk grafa G je duljina najkraćeg ciklusa u grafu G. Ako G nema ciklusa, stavljamo da je struk od G beskonačan.

Primjer 7.18.

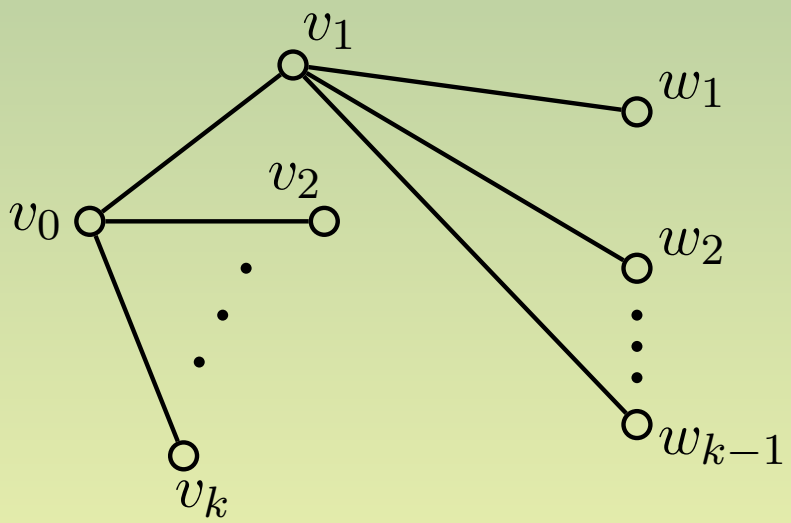
Dokažite: k-regularan graf G struka 4 ima barem $2k$ vrhova i do na izomorfizam postoji točno jedan takav graf sa $2k$ vrhova.

Rješenje.

Uočimo jedan vrh v_0. Kako je graf G k-regularan i jednostavan (kad ne bi bio jednostavan, tada bi mu struk bio $\leqslant 2$), slijedi da u grafu G mora biti još barem k vrhova $v_1, \ldots, v_k$. Kako je struk od G jednak 4, nikoja dva vrha iz skupa $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ne smiju biti susjedni jer bi u protivnom u grafu G postojao 3-ciklus.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Graf G je k-regularan pa svaki vrh mora imati stupanj k. Specijalno, vrh v_1 mora biti stupnja k, a to znači da u grafu G moramo imati još $k-1$ novih vrhova $w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}$ s kojima je vrh v_1 susjedan.



Stoga je $\nu(G) \geqslant 1 + k + (k-1) = 2k$ pa graf G ima barem $2k$ vrhova.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

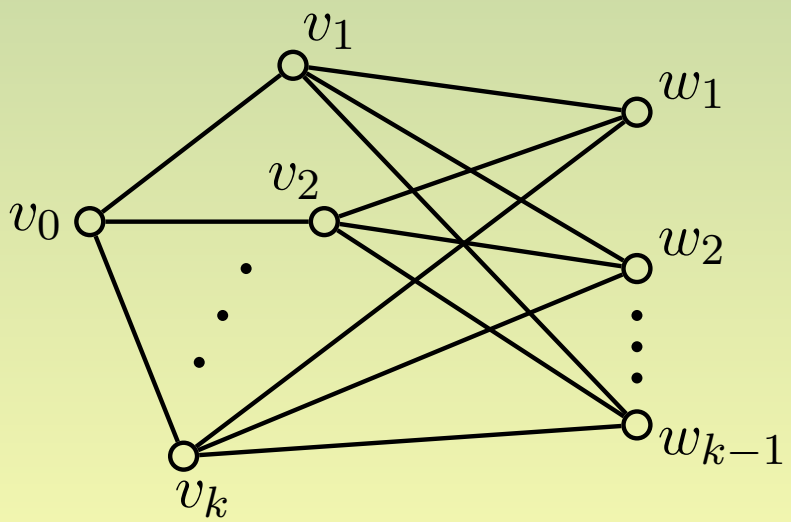
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Pokažimo da u slučaju da je $\nu(G) = 2k$ je takav graf jedinstven do na izomorfizam. Nikoji od vrhova w_i isto ne smiju biti međusobno susjedni jer bismo u protivnom u grafu G imali 3-ciklus preko vrha v_1. No, kako je graf G k-regularan, svi vrhovi moraju biti stupnja k, pa nam preostaje jedino da svaki vrh v_i spojimo sa svakim vrhom w_j i drugih mogućnosti nemamo. Stoga vidimo da je k-regularan graf struka 4 s $2k$ vrhova do na izomorfizam jedinstven.



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Eulerovi grafovi

Eulerova staza u grafu G je staza koja prolazi svakim bridom od G, tj. sadrži svaki brid točno jednom.

Tura na G je zatvorena šetnja koja sadrži svaki brid od G barem jednom.

Eulerova tura na G je tura koja prolazi svakim bridom točno jednom, tj. to je zatvorena Eulerova staza na G.

Graf G je **Eulerov graf** ako dopušta Eulerovu turu.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Teorem 7.2 (Eulerov teorem).

Neprazni povezani graf G je Eulerov graf akko su mu svi vrhovi parnog stupnja.

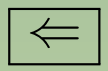
Dokaz.

$\Rightarrow$

Neka je G Eulerov graf i neka je C Eulerova tura na G s početkom i krajem u vrhu u. Svaki put kada se unutarnji vrh v od C pojavi u toj turi, dva brida koja su mu susjedna se uračunavaju (jedan kojim ulazimo u taj vrh v i drugi kojim izlazimo iz tog vrha). Kako Eulerova tura sadrži svaki brid od G točno jednom, slijedi da je $d(v)$ paran broj za svaki $v \in V(G) \setminus \{u\}$. No, kako C počinje i završava u vrhu u, slijedi da je i $d(u)$ paran broj pa su svi vrhovi u grafu G parnog stupnja.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



Pretpostavimo da je G povezani graf i da su mu svi vrhovi parnog stupnja. Tvrdimo da je tada G Eulerov graf. Neka je $v \in V(G)$ proizvoljni vrh. Ako v ima petlji, prvo svaku petlju obiđemo točno jedanput. Ako je broj vrhova veći od jedan, tada postoji barem još jedan vrh v_1 susjedan sa v jer je G povezan graf pa krenemo iz vrha v prema vrhu v_1. U vrhu v_1 prvo obiđemo sve petlje, a onda izađemo iz tog vrha. Uvijek je moguće izaći iz vrha u koji smo ušli jer su svi vrhovi parnog stupnja. Još jedino moramo pokazati da se možemo natrag vratiti u vrh v iz kojeg smo krenuli i da smo obišli svaki brid točno jednom.

Pretpostavimo da smo se prvi puta vratili u vrh v. Neka je C_1 zatvorena staza koju smo pri tome prešli na grafu G. Ako smo pri tome obišli sve bridove grafa G, tada je C_1 Eulerova tura i dokaz je gotov. Ako to nije slučaj, tada C_1 nije Eulerova tura. U tom slučaju izbacimo iz grafa G sve bridove iz C_1 i sve vrhove iz C_1 koji su izbacivanjem bridova ostali izolirani. Označimo preostali dio grafa s G_1 i ponovimo gore opisani postupak na grafu G_1. Kako je G povezani graf, tada G_1 i C_1 moraju imati zajednički vrh u (zbog povezanosti grafa G, nakon izbacivanja svih bridova iz C_1 neće svi vrhovi iz C_1 ostati izolirani). Krenemo li iz vrha u pronalazimo novu zatvorenu stazu C u grafu G_1 i kombiniramo je s prethodnom zatvorenom stazom C_1 tako da

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

krenemo iz vrha v, a kada dođemo do vrha u, nastavljamo dalje stazom C dok se ne vratimo natrag u vrh u, a zatim iz vrha u krenemo još preostalim dijelom staze C_1 natrag do vrha v. Na taj smo način dobili novu zatvorenu stazu C_2 u G koja ima više uključenih bridova od staze C_1. Ako C_2 sadrži sve bridove grafa G, tada je C_2 Eulerova tura. Ako C_2 ne sadrži sve bridove grafa G, tada iz grafa G_1 izbacimo sve bridove koji pripadaju zatvorenoj stazi C i sve vrhove iz C koji pri tome ostanu izolirani. Preostali dio grafa označimo s G_2 i nastavimo dalje na njemu gornji postupak. Taj postupak ponavljamo sve dok ne iscrpimo sve bridove i vrhove grafa G pa ćemo nakon konačno mnogo koraka dobiti Eulerovu turu na G. ♡

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Korolar 7.1.

Povezani graf G ima Eulerovu stazu akko G ima najviše dva vrha neparnog stupnja.

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Ako G ima Eulerovu stazu, onda svaki vrh koji nije početak niti kraj staze mora imati parni stupanj (jer moramo moći ući i izaći iz njega). Stoga graf G ima najviše dva vrha neparnog stupnja.

$\boxed{\Leftarrow}$

Neka je G povezani graf s najviše dva vrha neparnog stupnja. Ako G uopće nema takvih vrhova, tada prema prethodnom teoremu G ima zatvorenu Eulerovu stazu.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Ako graf G ima vrhova neparnog stupnja, onda takvih vrhova mora biti točno dva jer je broj vrhova neparnog stupnja u svakom grafu paran broj (Handshaking lema). Neka su u i v vrhovi neparnog stupnja. Dodamo li grafu G još jedan brid kojemu su krajevi vrhovi u i v, tada su u grafu $G + e$ svi vrhovi parnog stupnja. Prema prethodnom teoremu graf $G + e$ ima Eulerovu turu

$$C = uevе_1v_1 \cdots e_\varepsilon u$$

koja krene iz vrha u preko dodanog brida e prema vrhu v i zatim obiđe bridove grafa G dok se ne vrati u vrh u. No, tada je $ve_1v_1 \cdots e_\varepsilon u$ Eulerova staza u G koja počinje u vrhu v, a završava u vrhu u. ♡

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Fleuryjev algoritam

ULAZ: Povezani graf $G = (V, E)$ čiji su svi vrhovi parnog stupnja
IZLAZ: Eulerova tura na G

1: Izaberi bilo koji vrh $v_0 \in V$. Stavi $T_0 = v_0$ i $G_0 = G = (V, E)$.
2: $k := 0$
3: Neka je $T_k = v_0 e_1 v_1 \cdots e_k v_k$. Iz G_k treba izabrati brid e_{k+1} koji je incidentan s v_k i to tako da biramo most jedino ako nemamo drugog izbora. Označimo drugi kraj izabranog brida s v_{k+1}.
4: Graf G_{k+1} se dobiva iz grafa G_k brisanjem brida e_{k+1}, tj. $G_{k+1} = (V, E_{k+1})$, gdje je $E_{k+1} = E_k \setminus \{e_{k+1}\}$.
5: Ako G_{k+1} nije prazan graf, stavi $k := k + 1$ i idi na korak 3. Ako je G_{k+1} prazan graf, tada je $T_{k+1} = v_0 e_1 v_1 \cdots e_k v_k e_{k+1} v_{k+1}$ Eulerova tura u grafu G.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

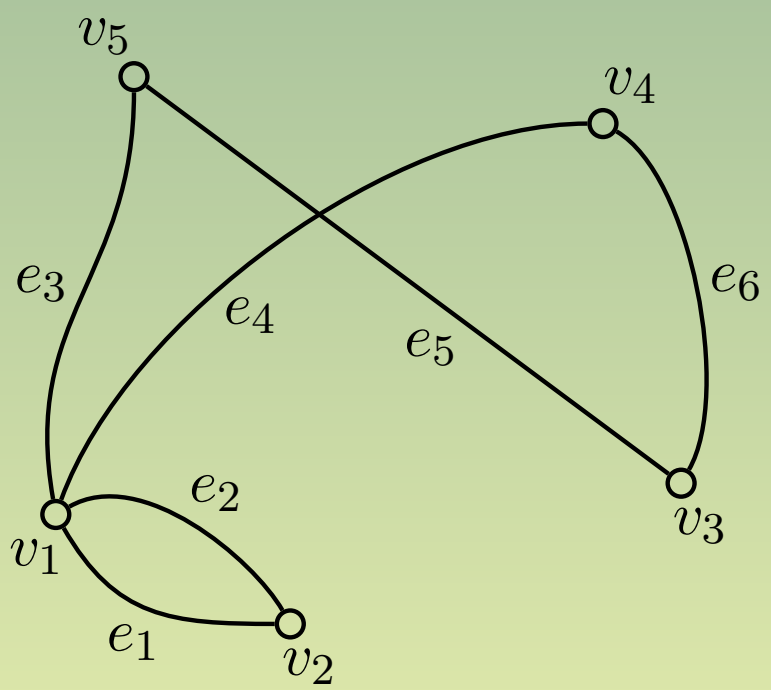
Napomena.

Ako povezani graf G ima točno dva vrha neparnog stupnja, tada pomoću Fleuryjevog algoritma možemo pronaći Eulerovu stazu u grafu G s time da algoritam moramo početi s vrhom v_0 koji je neparnog stupnja i na kraju će algoritam završiti u drugom vrhu neparnog stupnja. Uvjerite se da je to zaista tako.

Nadalje, kako Eulerova tura u Eulerovom grafu može početi u bilo kojem vrhu, mi ćemo uvijek u zadacima odabrati po volji neki vrh u kojem ćemo početi Eulerovu turu. Isto tako, moguće je da se iz nekog vrha može na više načina krenuti prema nekim drugim vrhovima (to je slučaj kada u tom vrhu imamo više bridova koji nisu rezni u danom trenutku), opet ćemo u takvim situacijama odabrati jednu od mogućnosti po volji, a za vježbu je uvijek dobro isprobati i druge mogućnosti.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.19 (Traženje Eulerove ture).



$T_0 =$

preskoči objašnjavanje

U grafu su svi vrhovi parnog stupnja pa je graf Eulerov. Pronađimo Eulerovu turu u tom grafu.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

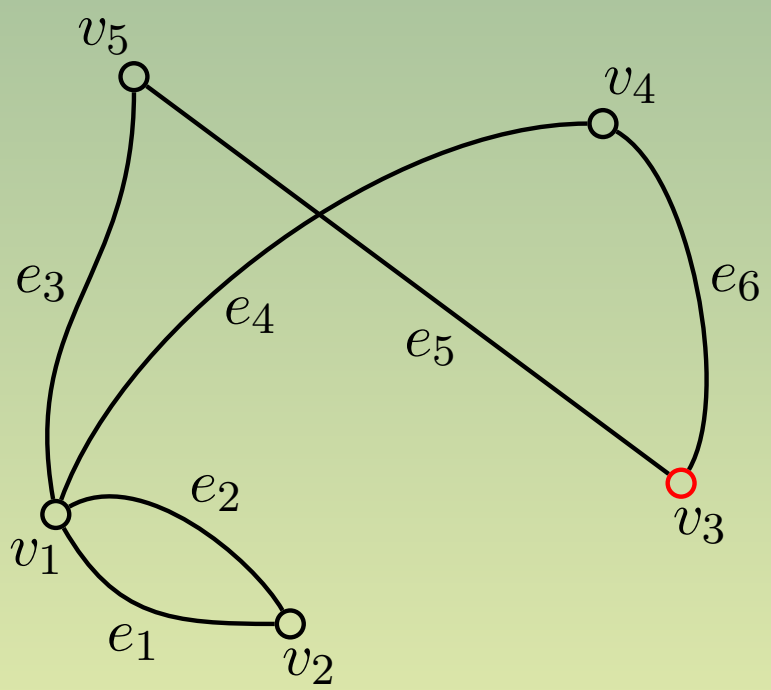
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

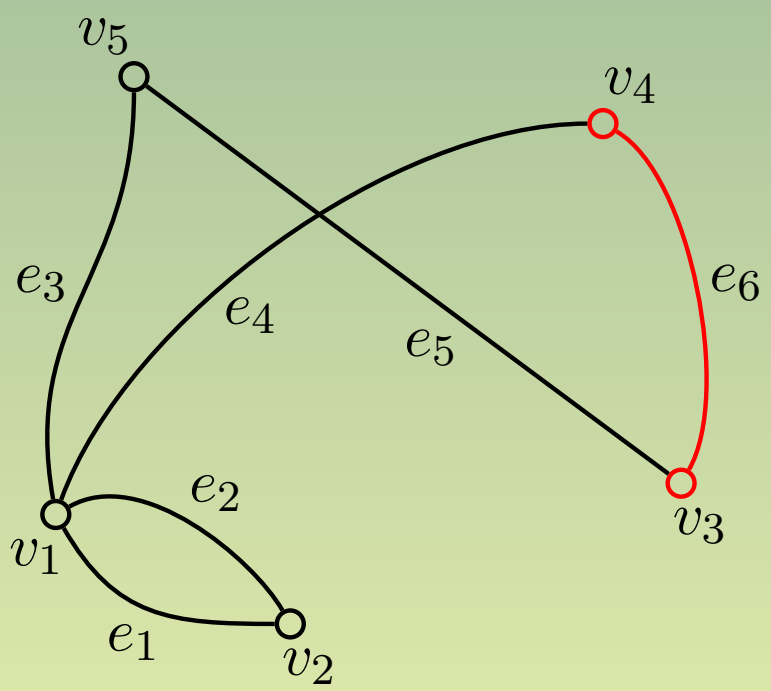
Primjer 7.19 (Traženje Eulerove ture).



$T_0 = v_3$

Odaberimo, na primjer vrh v_3. Kako oba brida e_5 i e_6 nisu rezni, možemo odabrati bilo koji od ta dva brida.

Primjer 7.19 (Traženje Eulerove ture).

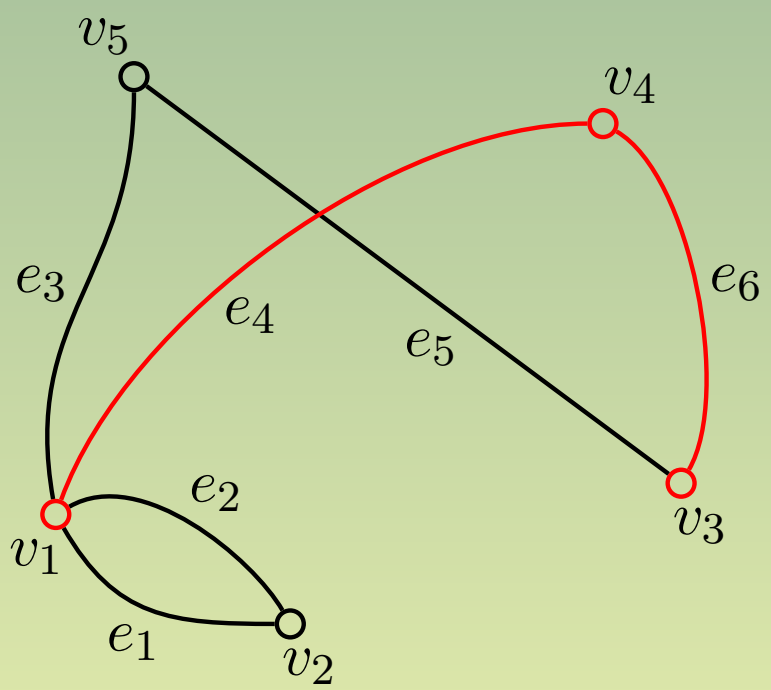


$T_1 = v_3 e_6 v_4$

Odaberimo brid e_6. Dolazimo u vrh v_4 u kojemu je brid e_4 rezni brid za graf $G_1 = G - e_6$. Kako nemamo drugog izbora, moramo odabrati brid e_4.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.19 (Traženje Eulerove ture).

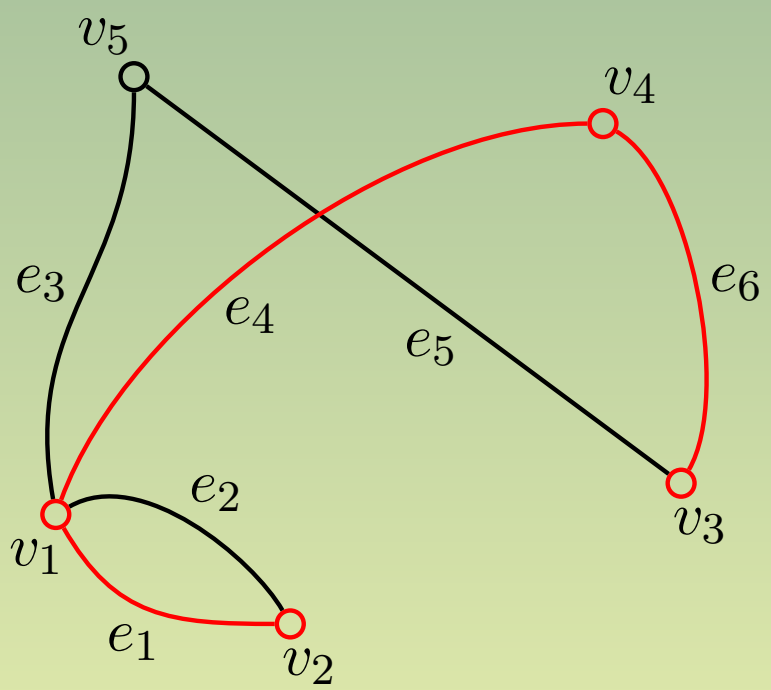


$T_2 = v_3 e_6 v_4 e_4 v_1$

Dolazimo u vrh v_1. U vrhu v_1 imamo još tri slobodna brida e_1, e_2 i e_3. Kako je brid e_3 rezni brid za graf $G_2 = G - \{e_6, e_4\}$, njega ne smijemo odabrati jer se više iz vrhova v_5 i v_3 ne bismo mogli vratiti u vrhove v_1 i v_2 da obiđemo bridove e_1 i e_2. Kako oba brida e_1 i e_2 nisu rezni bridovi za graf G_2, možemo odabrati bilo kojeg od njih dva.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.19 (Traženje Eulerove ture).



$T_3 = v_3 e_6 v_4 e_4 v_1 e_1 v_2$

Odaberimo brid e_1. Dolazimo u vrh v_2 koji ima još samo jedan slobodni brid e_2 koji jest rezni brid za graf $G_3 = G - \{e_6, e_4, e_1\}$, ali kako nemamo drugog izbora moramo odabrati taj brid.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

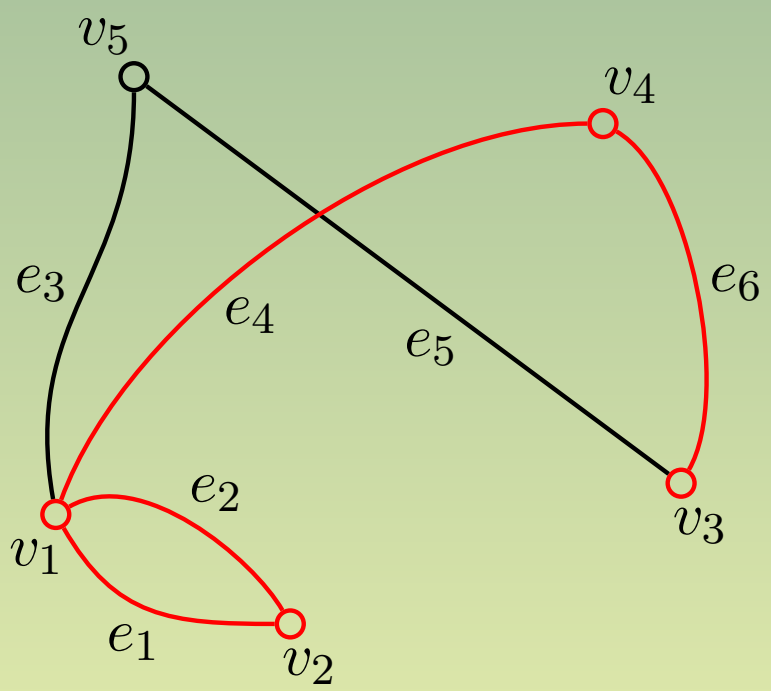
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Primjer 7.19 (Traženje Eulerove ture).



$$T_4 = v_3 e_6 v_4 e_4 v_1 e_1 v_2 e_2 v_1$$

Dolazimo ponovo u vrh v_1 koji ima još samo jedan slobodni brid e_3. Taj brid je rezni brid za graf $G_4 = G - \{e_6, e_4, e_1, e_2\}$, ali kako nemamo drugog izbora uzimamo taj brid.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

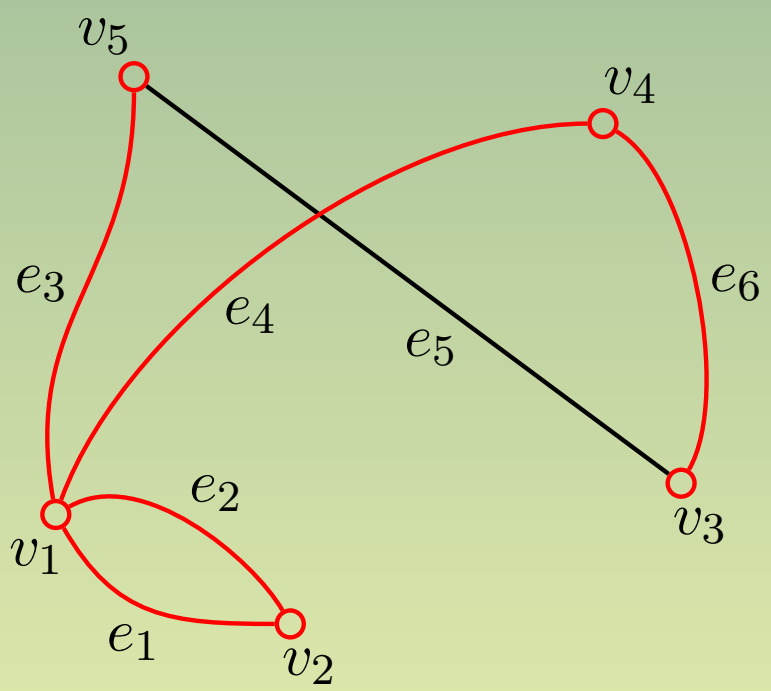
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Primjer 7.19 (Traženje Eulerove ture).



$$T_5 = v_3 e_6 v_4 e_4 v_1 e_1 v_2 e_2 v_1 e_3 v_5$$

Dolazimo u vrh v_5 koji ima samo jedan slobodni brid e_5. Taj brid je rezni brid grafa $G_5 = G - \{e_6, e_4, e_1, e_2, e_3\}$, ali kako nemamo drugih mogućnosti uzimamo taj brid.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

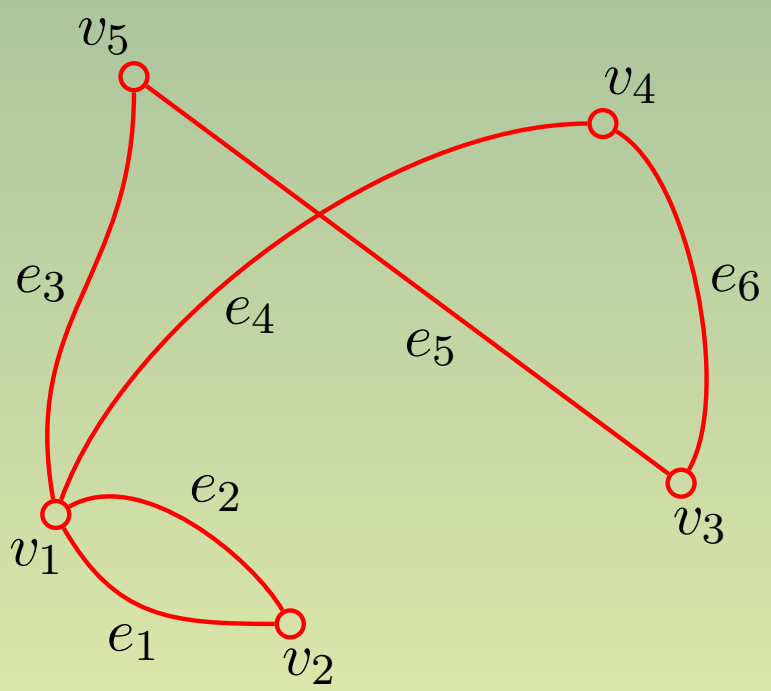
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Primjer 7.19 (Traženje Eulerove ture).



$T_6 = v_3 e_6 v_4 e_4 v_1 e_1 v_2 e_2 v_1 e_3 v_5 e_5 v_3$

Dolazimo početni vrh v_3. Kako je $G_6 = G - \{e_6, e_4, e_1, e_2, e_3, e_5\}$ prazan graf, T_6 je Eulerova tura na G.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

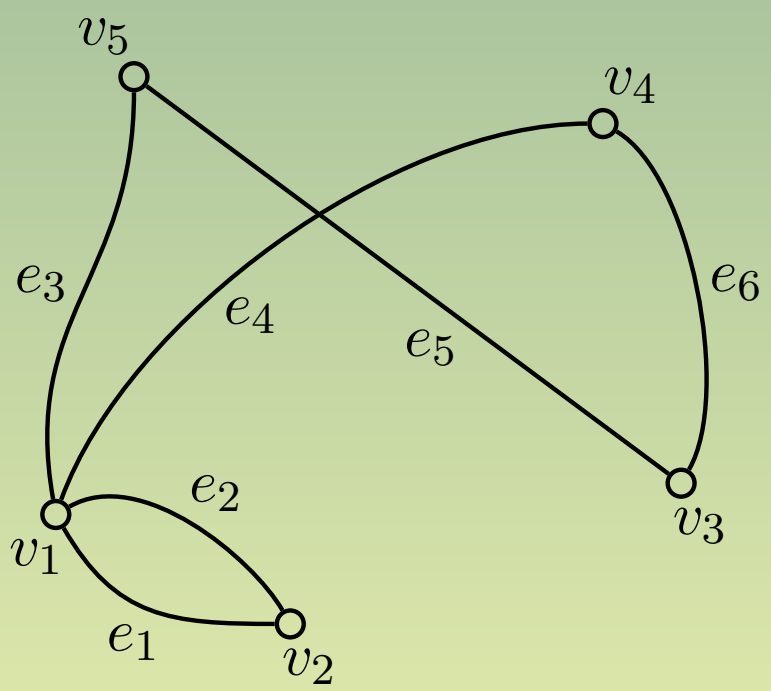
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Primjer 7.19 (Traženje Eulerove ture).



$T_6 = v_3e_6v_4e_4v_1e_1v_2e_2v_1e_3v_5e_5v_3$

objašnjenje

T_6 je jedan primjer Eulerove ture u grafu G. Pronađite još neke primjere Eulerovih turi u grafu G.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Primjer 7.20.

Nađite uvjete pod kojima je potpuni graf K_n Eulerov? Kada K_n ima Eulerovu stazu, a nema Eulerovu turu?

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.20.

Nađite uvjete pod kojima je potpuni graf K_n Eulerov? Kada K_n ima Eulerovu stazu, a nema Eulerovu turu?

Rješenje.

Prema ◂ Eulerovom teoremu graf je Eulerov akko su mu svi vrhovi parnog stupnja. Graf K_n je $(n-1)$-regularan pa su mu svi vrhovi stupnja $n-1$. Dakle, K_n je Eulerov akko je $n-1$ paran broj, odnosno ako je n neparan broj. Možemo uzeti po definiciji da je K_1, tj. prazan graf s jednim vrhom, Eulerov. To je stvar dogovora.

Nadalje, graf ima Eulerovu stazu, a nema Eulerovu turu akko ima točno dva vrha neparnog stupnja. Stoga, K_n ima Eulerovu stazu, a nema Eulerovu turu jedino za $n = 2$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.21.

Nađite uvjete pod kojima je potpuni bipartitni graf $K_{m,n}$ Eulerov. Kada $K_{m,n}$ ima Eulerovu stazu, a nema Eulerovu turu?

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.21.

Nađite uvjete pod kojima je potpuni bipartitni graf $K_{m,n}$ Eulerov. Kada $K_{m,n}$ ima Eulerovu stazu, a nema Eulerovu turu?

Rješenje.

Graf je Eulerov akko su mu svi vrhovi parnog stupnja.

$$V(K_{m,n}) = X \uplus Y$$
$$k(X) = m, \quad k(Y) = n$$
$$v \in X \;\Rightarrow\; d(v) = n$$
$$v \in Y \;\Rightarrow\; d(v) = m$$

Stoga je $K_{m,n}$ Eulerov akko su m i n parni brojevi.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

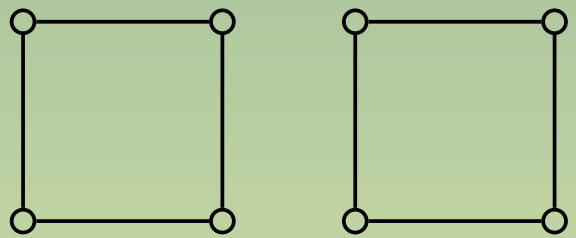
Graf ima Eulerovu stazu, a nema Eulerovu turu akko ima točno dva vrha neparnog stupnja. Stoga, $K_{m,n}$ ima Eulerovu stazu, a nema Eulerovu turu akko je jedan od brojeva m i n neparan, a drugi jednak 2, ili pak ako je $m = n = 1$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

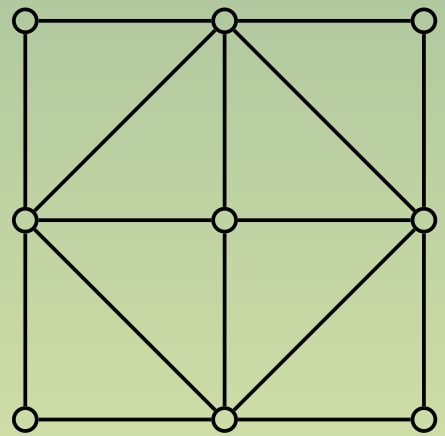
Primjer 7.22.

Koji su od sljedećih grafova Eulerovi? Oni koji jesu, pronađite u njima Eulerovu turu.

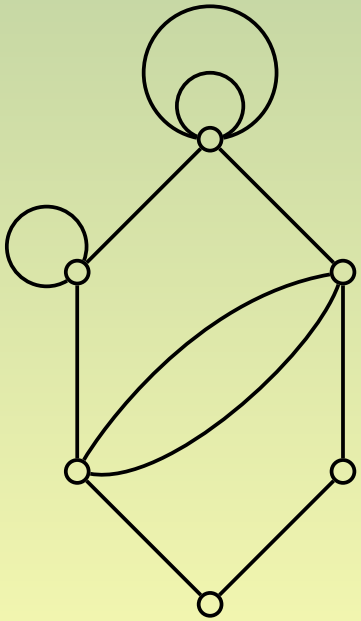
a)



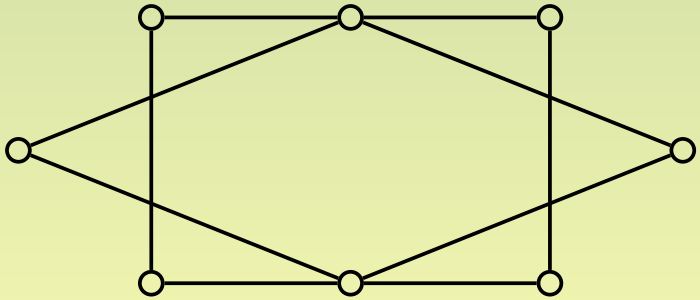
b)



c)



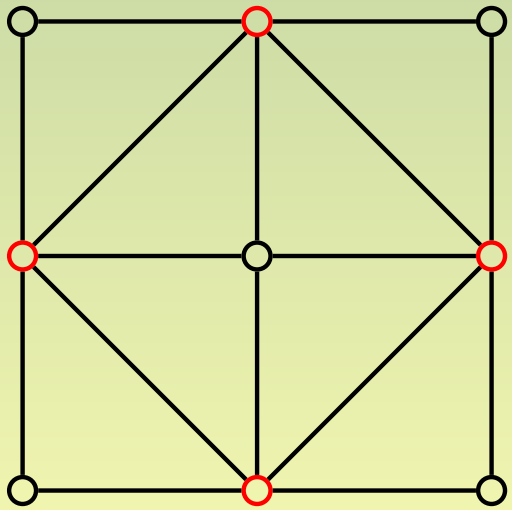
d)



Rješenje.

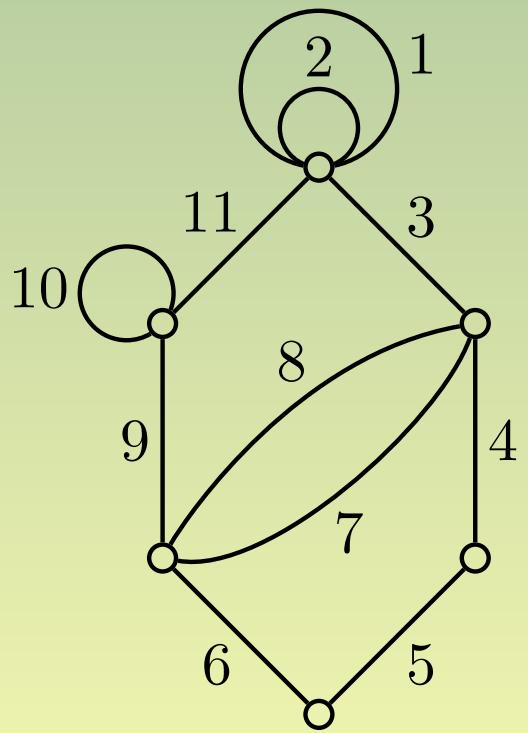
a. Graf nije Eulerov jer nije povezan, iako su mu svi vrhovi parnog stupnja.

b. Graf nije Eulerov jer ima četiri vrha neparnog stupnja (crveni vrhovi na donjoj slici).



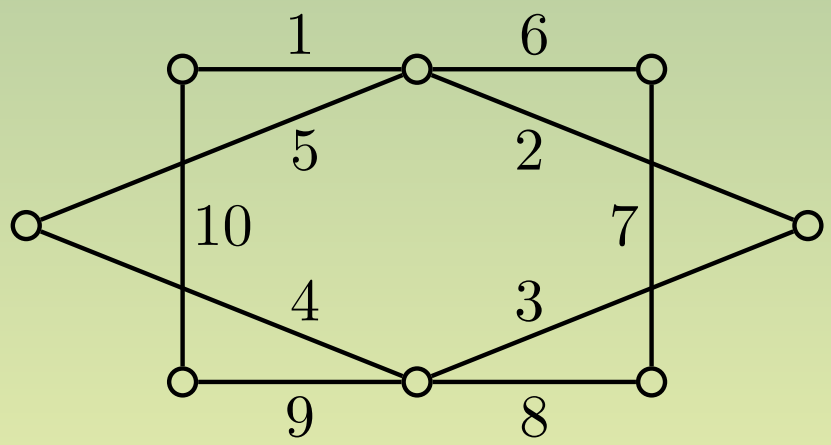
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

- Graf je Eulerov i na donjoj slici je prikazan jedan primjer Eulerove ture (uz bridove stoje oznake kojim ih redoslijedom treba obilaziti).



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

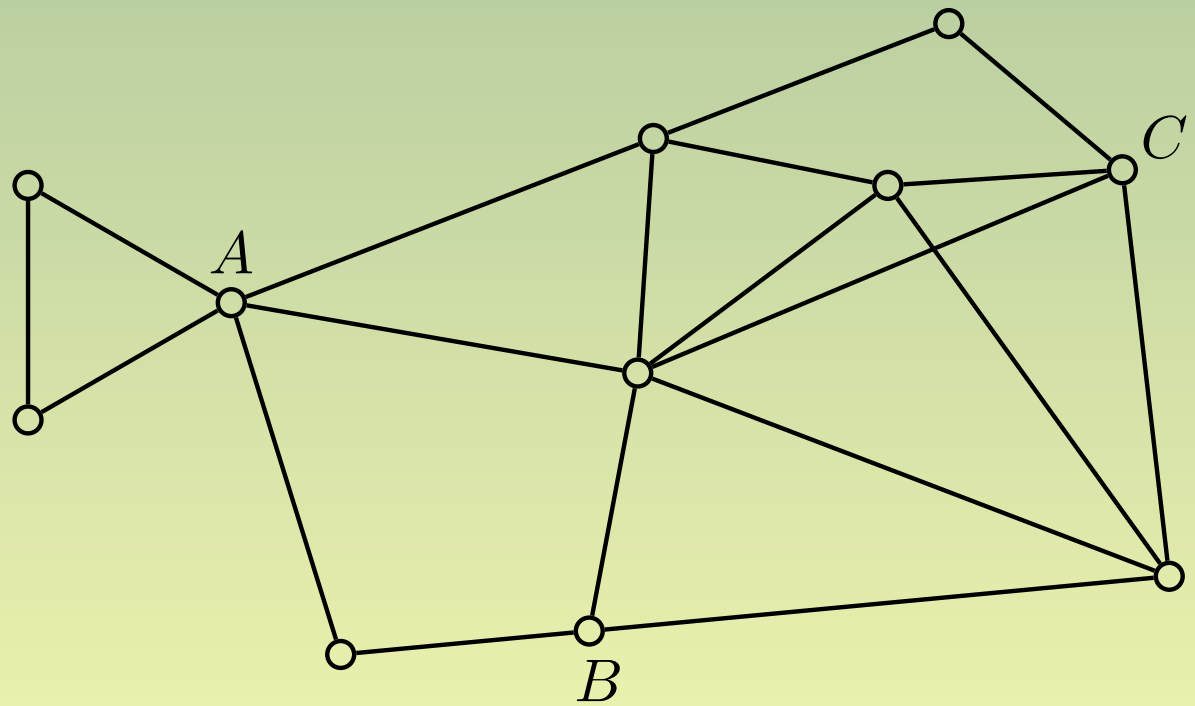
- Graf je Eulerov i na donjoj slici je prikazan jedan primjer Eulerove ture (uz bridove stoje oznake kojim ih redoslijedom treba obilaziti).



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.23.

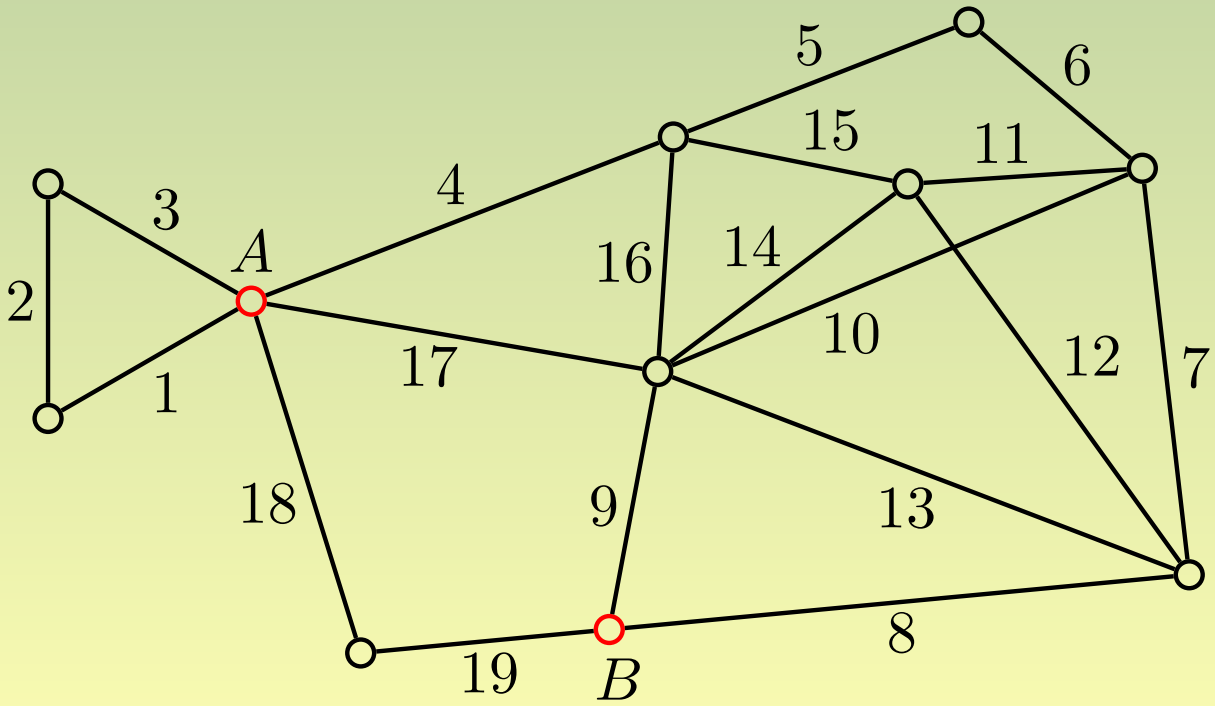
Postoji li Eulerova staza od A do B? Postoji li Eulerova staza od A do C?



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rješenje.

Kako su A i B jedini vrhovi neparnog stupnja u zadanom grafu, postoji Eulerova staza od A do B. Kako je vrh C parnog stupnja, ne postoji Eulerova staza od A do C. Na slici je dana jedna moguća Eulerova staza od A do B (uz bridove stoje oznake kojim ih redoslijedom treba obilaziti).



Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

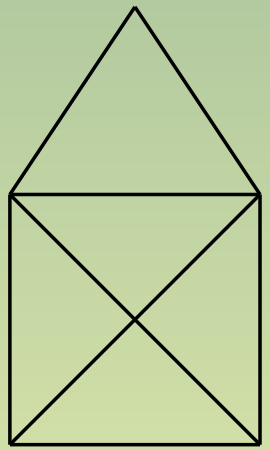
Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

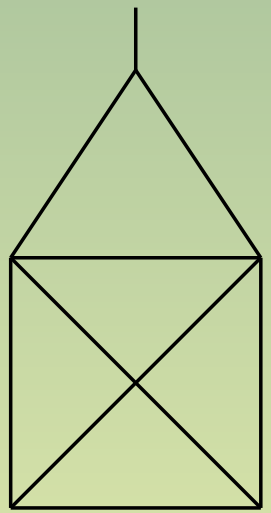
Primjer 7.24.

Mogu li se donje figure nacrtati bez podizanja olovke s papira tako da se svaka linija prijeđe samo jedanput?

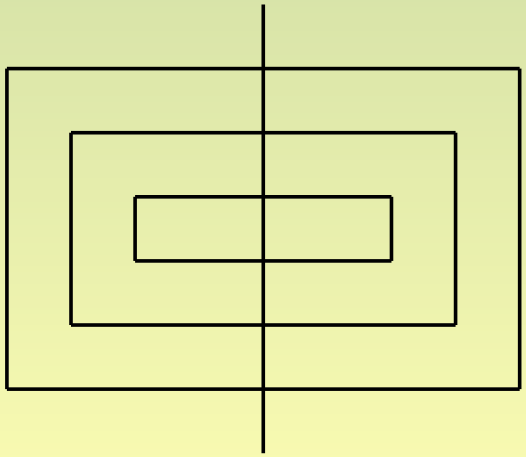
a



b



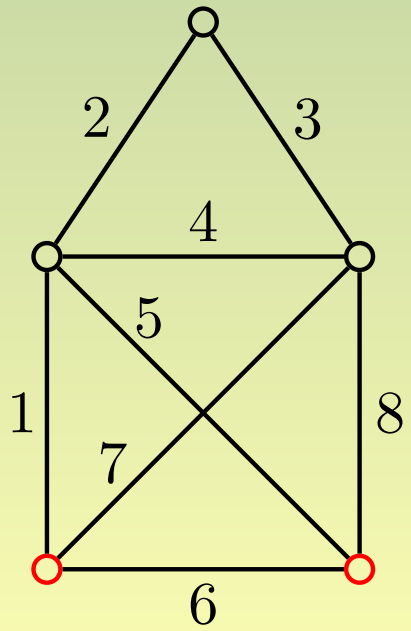
c



Rješenje.

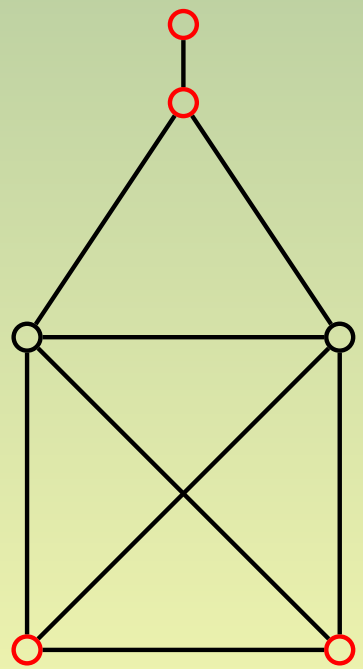
Dane figure će se moći nacrtati bez podizanja olovke sa papira akko pripadani grafovi imaju Eulerove staze.

a. Pripadni graf ima dva vrha neparnog stupnja (crveni vrhovi na slici) pa ima Eulerovu stazu. Stoga se dana figura može nacrtati bez podizanja olovke s papira. Na slici je prikazan jedan mogući način crtanja.



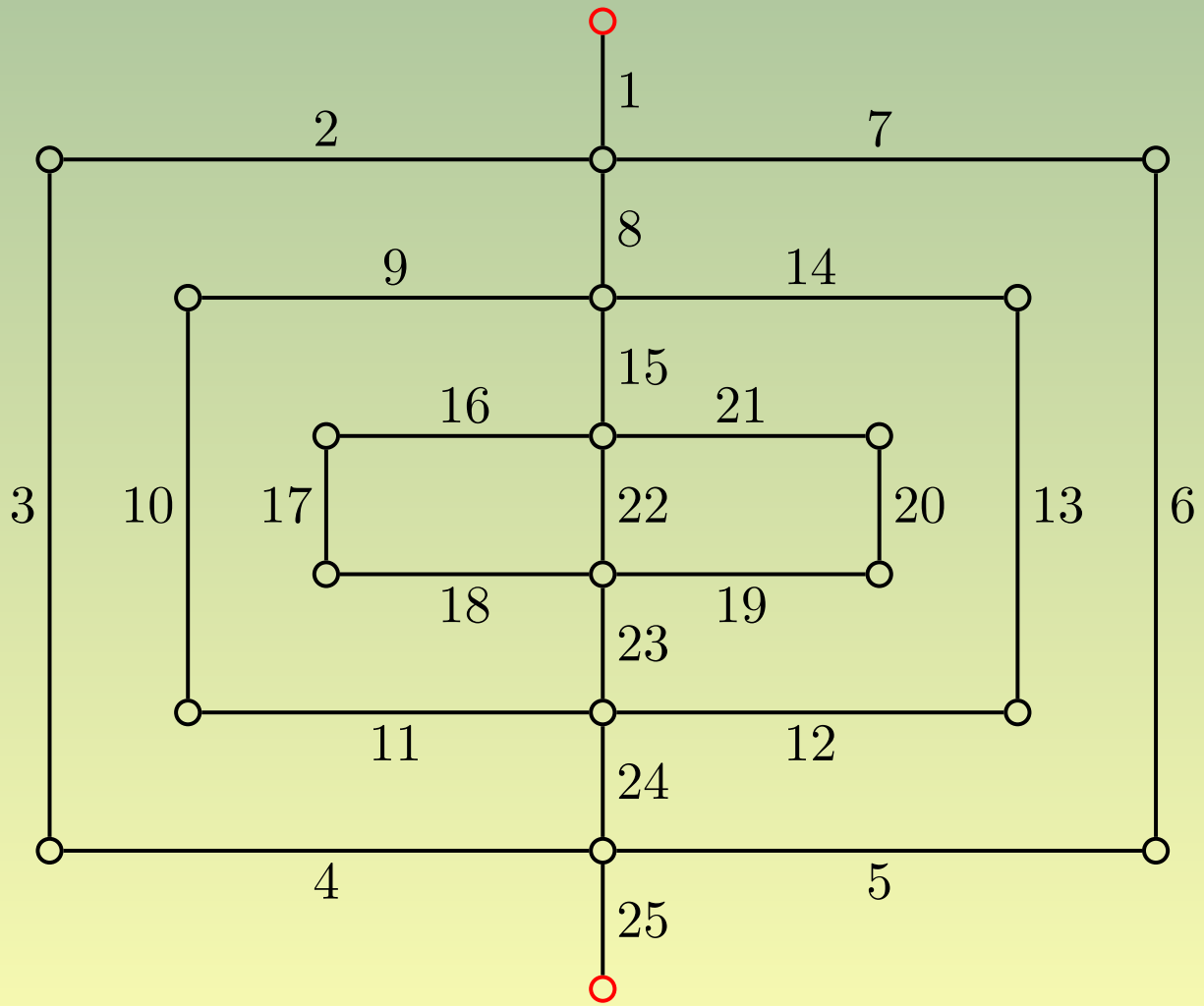
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

- Pripadni graf ima četiri vrha neparnog stupnja (crveni vrhovi na slici) pa nema Eulerovu stazu. Stoga se dana figura ne može nacrtati bez podizanja olovke s papira tako da se svaka linija prijeđe točno jednom.



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

- Pripadni graf ima dva vrha neparnog stupnja (crveni vrhovi na slici) pa ima Eulerovu stazu. Stoga se dana figura može nacrtati bez podizanja olovke s papira.



Primjer 7.25.

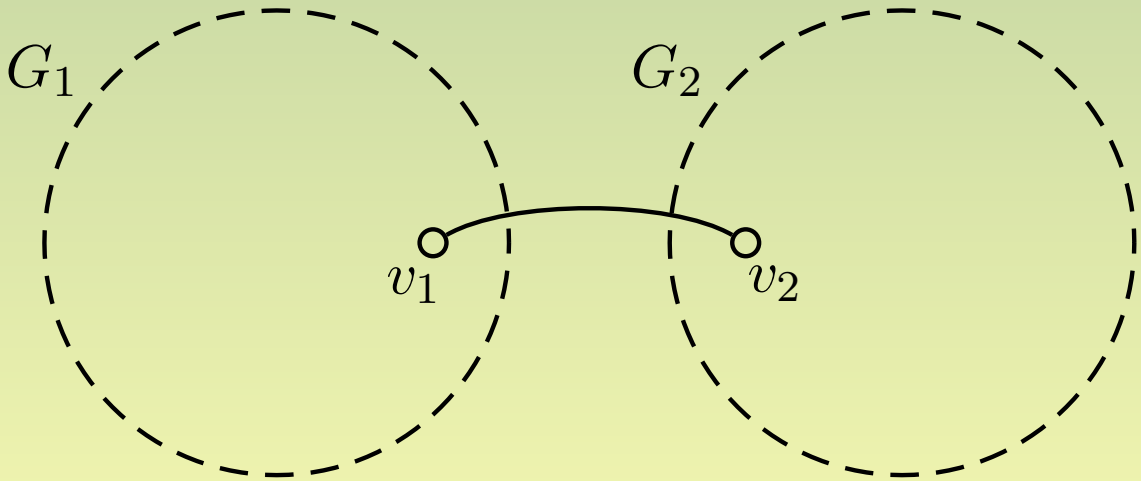
Neka su G_1 i G_2 Eulerovi grafovi bez zajedničkih vrhova. Neka su $v_1 \in V(G_1)$ i $v_2 \in V(G_2)$. Spojimo vrhove v_1 i v_2 jednim bridom. Što možete reći o dobivenom grafu?

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.25.

Neka su G_1 i G_2 Eulerovi grafovi bez zajedničkih vrhova. Neka su $v_1 \in V(G_1)$ i $v_2 \in V(G_2)$. Spojimo vrhove v_1 i v_2 jednim bridom. Što možete reći o dobivenom grafu?

Rješenje.



Kako su G_1 i G_2 Eulerovi grafovi, svaki vrh u G_1 i svaki vrh u G_2 je parnog stupnja. Nakon što spojimo vrhove v_1 i v_2 bridom, ti vrhovi postanu neparnog stupnja u novonastalom grafu, a svi ostali vrhovi su parnog stupnja. Dakle, dobiveni graf nije Eulerov, ali ima Eulerovu stazu čiji krajevi su u vrhovima v_1 i v_2.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Hamiltonov put u grafu G je put koji sadrži sve vrhove od G.

Hamiltonov ciklus u grafu G je ciklus koji sadrži sve vrhove od G.

Graf G je **Hamiltonov graf** ako sadrži Hamiltonov ciklus.

Napomena.

Iz definicije je jasno da je graf Hamiltonov ako i samo ako je pripadni jednostavni graf Hamiltonov tako da se u proučavanju Hamiltonovih grafova možemo ograničiti samo na jednostavne grafove.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.26.

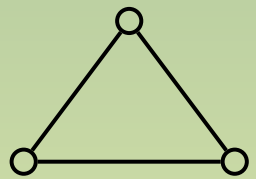
Pokažite da su pojmovi Eulerov graf i Hamiltonov graf nezavisni, tj. da Eulerov graf može i ne mora biti Hamiltonov i obrnuto.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

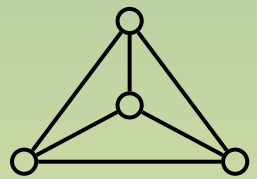
Primjer 7.26.

Pokažite da su pojmovi Eulerov graf i Hamiltonov graf nezavisni, tj. da Eulerov graf može i ne mora biti Hamiltonov i obrnuto.

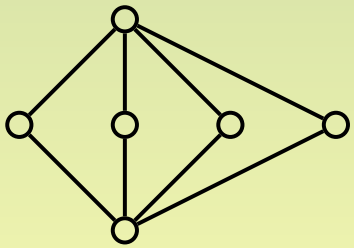
Rješenje.



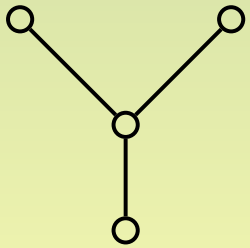
jest Eulerov
jest Hamiltonov



nije Eulerov
jest Hamiltonov



jest Eulerov
nije Hamiltonov



nije Eulerov
nije Hamiltonov

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Za razliku od Eulerovog grafa, još je uvijek otvoreni problem karakterizacije Hamiltonovog grafa. Postoji dosta poznatih uvjeta kada je graf Hamiltonov, ali svi ti uvjeti su ili nužni ili dovoljni, ali nisu nužni i dovoljni. Navest ćemo ovdje neke od tih uvjeta. Jedan od nužnih uvjeta je povezanost grafa da bi graf bio Hamiltonov, ali to očito nije dovoljan uvjet. Još jedan nužni uvjet da bi graf bio Hamiltonov dan je sljedećim teoremom.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Teorem 7.3.

Ako je G Hamiltonov graf, tada za svaki $\emptyset \neq S \subset V(G)$ vrijedi $\omega(G - S) \leqslant k(S)$.

Dokaz.

Neka je C Hamiltonov ciklus u G (takav ciklus postoji jer je po pretpostavci G Hamiltonov). Jasno je da je tada $\omega(C - S) \leqslant k(S)$. Naime, ta činjenica vrijedi za bilo koji ciklus jer kada iz ciklusa iščupamo n vrhova preostali graf može imati najviše n komponenata povezanosti. No, kako je C Hamiltonov ciklus, on sadrži sve vrhove grafa G, tj. C je razapinjući podgraf od G pa je onda $\omega(G-S) \leqslant \omega(C-S)$ iz čega slijedi tvrdnja. ♡

Jedan dovoljni, ali ne i nužni, uvjet da bi graf bio Hamiltonov je dan sljedećim teoremom.

Teorem 7.4 (Dirac, 1952).

Neka je G jednostavni graf u kojemu je broj vrhova $\nu(G) \geqslant 3$ i $\delta(G) \geqslant \frac{\nu}{2}$. Tada je G Hamiltonov graf.

Dokaz.

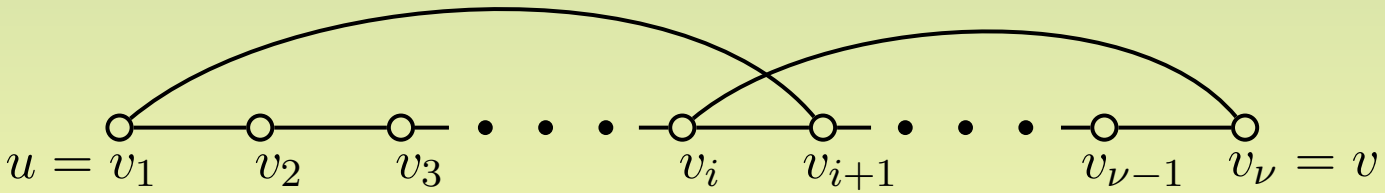
Pretpostavimo suprotno, tj. da G nije Hamiltonov graf. Neka je G maksimalni jednostavni ne-Hamiltonov graf sa $\nu \geqslant 3$ i $\delta \geqslant \frac{\nu}{2}$. Zbog $\nu \geqslant 3$, graf G ne može biti potpun jer je očito potpuni graf s barem tri vrha Hamiltonov. Stoga postoje dva nesusjedna vrha u i v. Kako je G maksimalni ne-Hamiltonov graf, tada je $G + uv$ Hamiltonov graf. Kako G nije Hamiltonov graf, svaki

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Hamiltonov ciklus od $G + uv$ mora sadržavati brid uv. Stoga postoji Hamiltonov put $v_1 v_2 \cdots v_\nu$ u grafu G s početkom $v_1 = u$ i krajem $v_\nu = v$. Neka su

$$S = \{v_i : uv_{i+1} \in E(G)\}, \quad T = \{v_i : v_i v \in E(G)\}$$

Kako $v = v_\nu \notin S \cup T$ slijedi da je $k(S \cup T) < \nu$. Nadalje, važno je uočiti da je $S \cap T = \emptyset$. Kada to ne bi bilo tako, tada bi postojao $v_i \in S \cap T$ pa bi onda graf G imao Hamiltonov ciklus $v_1 v_2 \cdots v_i v_\nu v_{\nu-1} \cdots v_{i+1} v_1$ kako je prikazano na donjoj slici, ali to je nemoguće jer po pretpostavci G nije Hamiltonov graf.



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Sada zbog $k(S \cup T) < \nu$ i $S \cap T = \emptyset$ dobivamo

$$2\delta \leqslant d(u) + d(v) = k(S) + k(T) = k(S \cup T) + k(S \cap T) < \nu$$

iz čega dobivamo da je $\delta < \frac{\nu}{2}$, a to je kontradikcija s pretpostavkom u teoremu. Ova kontradikcija je posljedica početne pretpostavke da graf G nije Hamiltonov iz čega slijedi da je onda G zaista Hamiltonov graf. ♡

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.27.

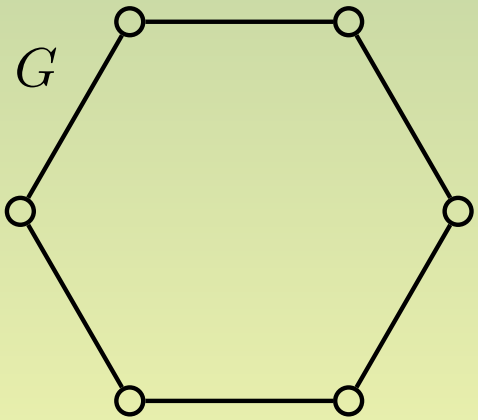
Pokažite da ne vrijedi obrat Diracovog teorema, tj. ako je G Hamiltonov graf s barem tri vrha, tada ne mora biti $\delta \geqslant \frac{\nu}{2}$, tj. taj uvjet nije nužan da bi graf bio Hamiltonov. Drugim riječima, postoje Hamiltonovi grafovi kod kojih je $\delta < \frac{\nu}{2}$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.27.

Pokažite da ne vrijedi obrat Diracovog teorema, tj. ako je G Hamiltonov graf s barem tri vrha, tada ne mora biti $\delta \geqslant \frac{\nu}{2}$, tj. taj uvjet nije nužan da bi graf bio Hamiltonov. Drugim riječima, postoje Hamiltonovi grafovi kod kojih je $\delta < \frac{\nu}{2}$.

Rješenje.



Graf G je Hamiltonov i vrijedi $\nu = 6$ i $\delta = 2$, ali ne vrijedi da je $\delta \geqslant \frac{\nu}{2}$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.28.

Nađite primjer jednostavnog povezanog grafa za koji je $\delta \geqslant \frac{\nu-1}{2}$, *a da nije Hamiltonov. Dakle, uvjet* $\delta \geqslant \frac{\nu}{2}$ *u Diracovom teoremu je optimalan, tj. ne može se oslabiti.*

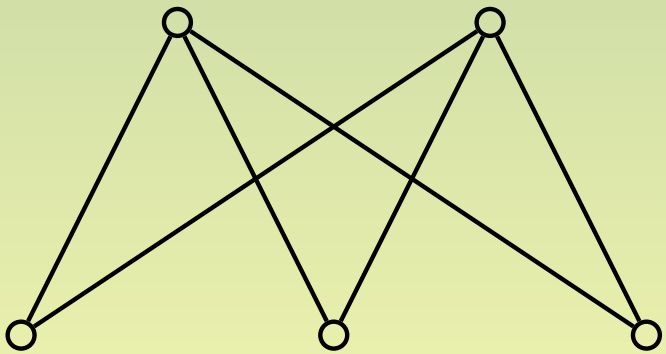
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.28.

Nađite primjer jednostavnog povezanog grafa za koji je $\delta \geqslant \frac{\nu-1}{2}$, a da nije Hamiltonov. Dakle, uvjet $\delta \geqslant \frac{\nu}{2}$ u Diracovom teoremu je optimalan, tj. ne može se oslabiti.

Rješenje.

$K_{2,3}$



U $K_{2,3}$ je $\nu = 5$, $\delta = 2$ i vrijedi $\delta \geqslant \frac{\nu-1}{2}$, ali $K_{2,3}$ nije Hamiltonov graf jer bi Hamiltonov ciklus od $K_{2,3}$ morao biti duljine 5, a bipartitni grafovi ne sadrže neparne cikluse.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Napomena.

Ako je C ciklus u grafu G, tada svaki vrh $v \in V(G)$ koji pripada ciklusu C ima točno dva brida koji su mu susjedni i pripadaju ciklusu C. Ako je C Hamiltonov ciklus u G, tada on sadrži sve vrhove od G, a svaki vrh $v \in V(G)$ koji je stupnja 2, oba njegova susjedna brida moraju pripadati Hamiltonovom ciklusu C. Nadalje, svaki ciklus ne sadrži nikakve podcikluse, tj. cikluse manje duljine. Ove činjenice ćemo često koristiti u zadacima.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

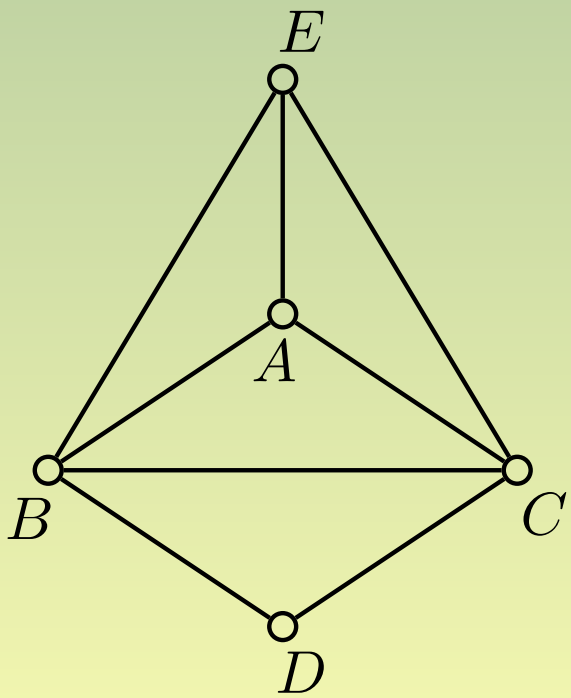
Primjer 7.29.

a. *Da li je graf Hamiltonov?*

b. *Postoji li Hamiltonov put u grafu?*

c. *Da li je graf Eulerov?*

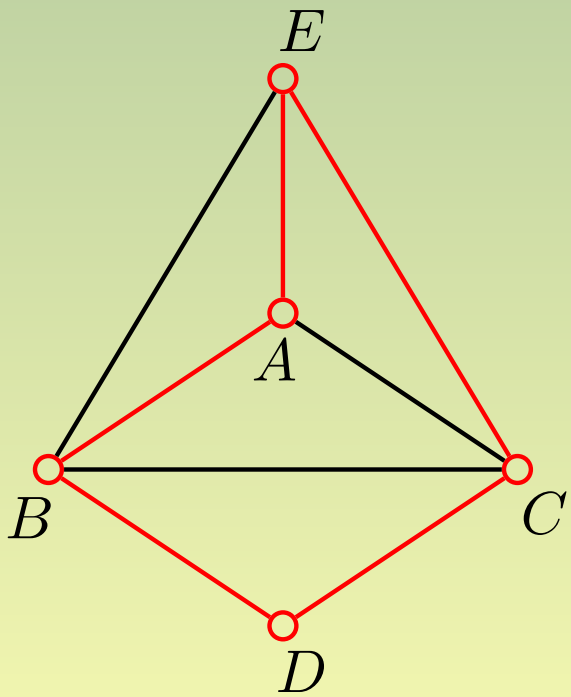
d. *Postoji li Eulerova staza u grafu?*



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rješenje.

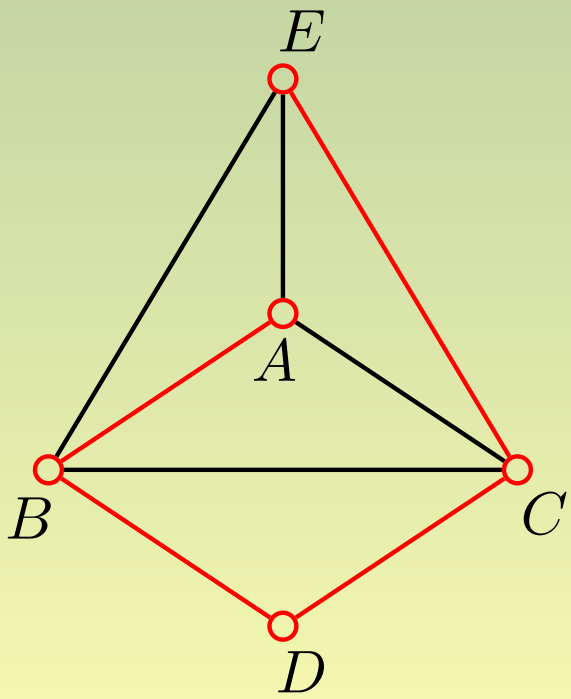
a) Graf G je Hamiltonov graf. Na slici je prikazan Hamiltonov ciklus $ABDCEA$. Pronađite još neke Hamiltonove cikluse u danom grafu.



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

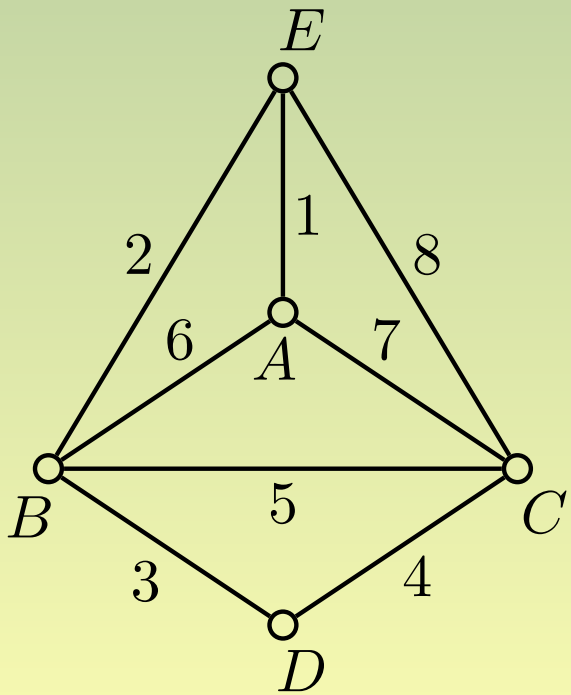
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

b. Kako je graf G Hamiltonov graf, tada u njemu postoji Hamiltonov put. Jednostavno iz bilo kojeg Hamiltonovog ciklusa izbacimo jedan brid i na taj način dobijemo Hamiltonov put. Na slici je prikazan Hamiltonov put $ABDCE$. Pronađite još neke Hamiltonove putove u danom grafu.



c. Graf nije Eulerov jer su vrhovi A i E neparnog stupnja.

d. Graf ima Eulerovu stazu jer ima točno dva vrha A i E neparnog stupnja. Ta staza mora početi i završiti u tim vrhovima. Na slici je prikazana jedna moguća Eulerova staza. Uz bridove stoje oznake kojim redoslijedom ih treba obilaziti.



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.30.

Da li je kubni graf Hamiltonov graf?

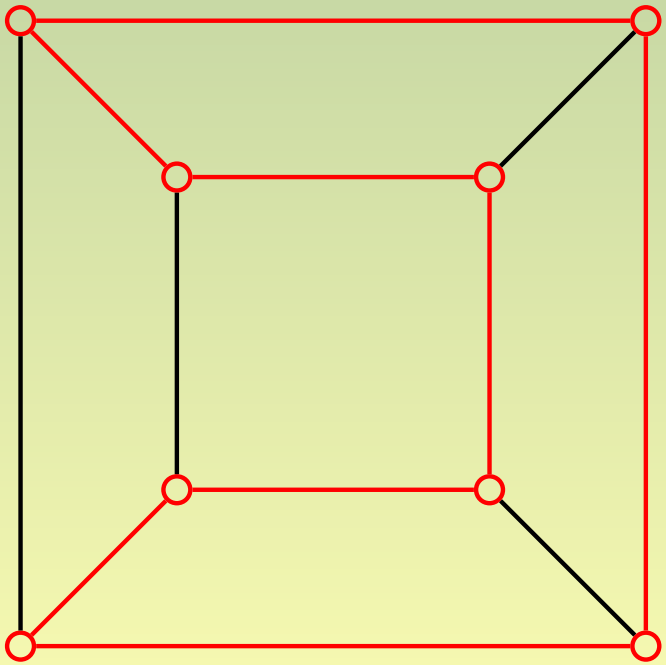
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.30.

Da li je kubni graf Hamiltonov graf?

Rješenje.

Kubni graf je Hamiltonov graf. Na slici je prikazan jedan Hamiltonov ciklus u kubnom grafu. Pronađite još neke Hamiltonove cikluse u tom grafu.



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.31.

Dokažite da Petersenov graf nije Eulerov niti Hamiltonov.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

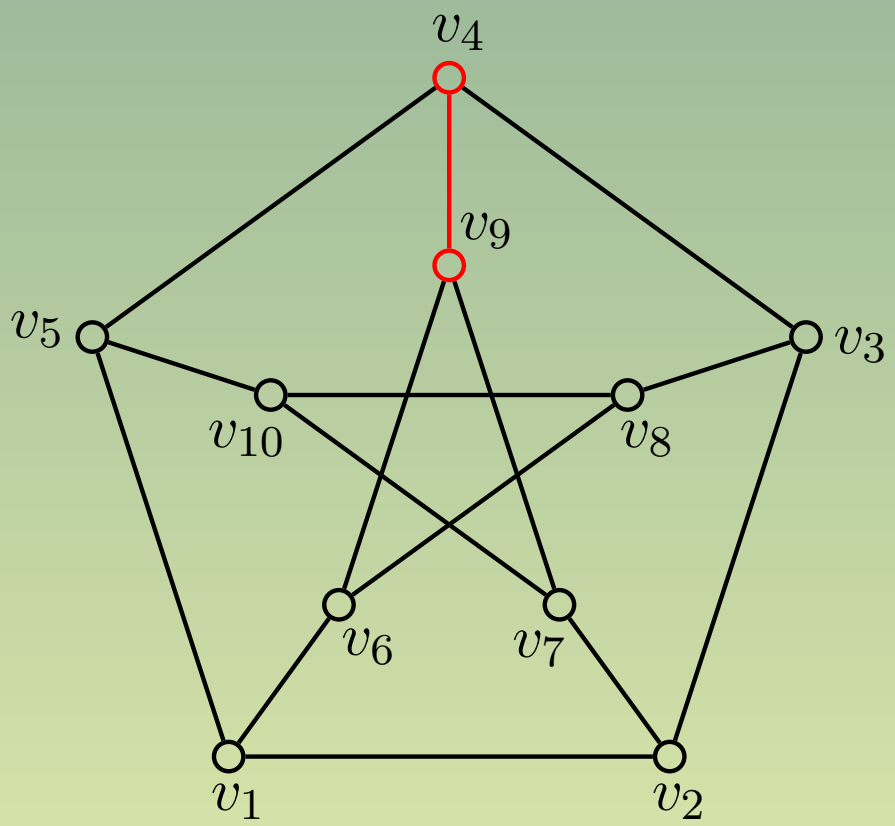
Primjer 7.31.

Dokažite da Petersenov graf nije Eulerov niti Hamiltonov.

Rješenje.

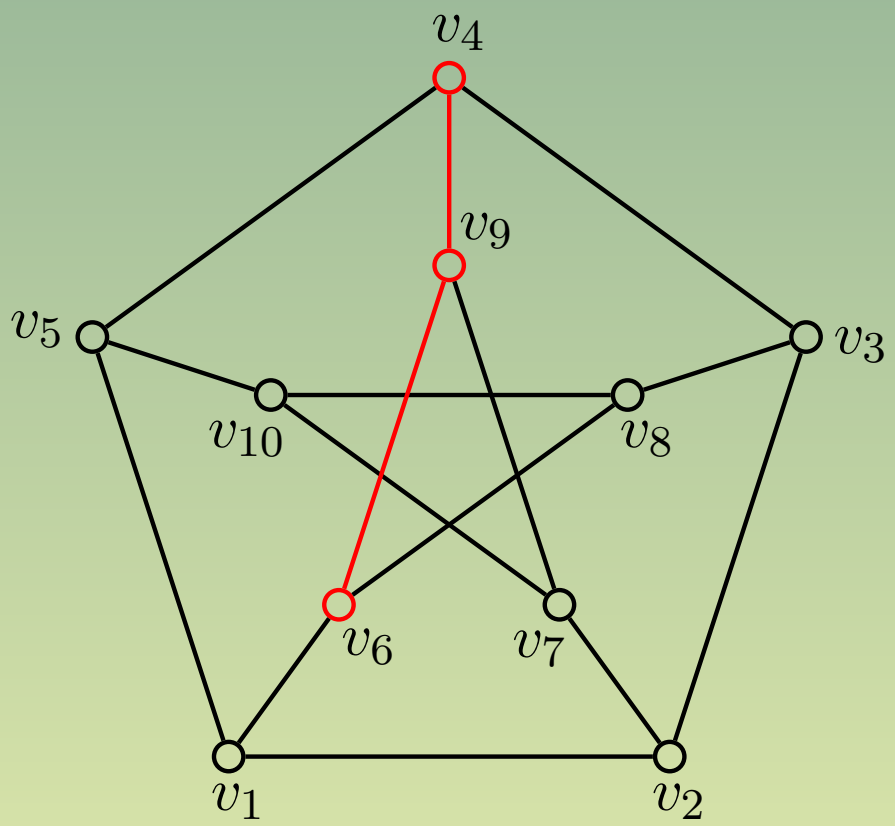
Petersenov graf je 3-regularan, tj. svi vrhovi su mu stupnja 3 (neparnog stupnja), pa nije Eulerov.

Pretpostavimo da je Petersenov graf Hamiltonov. Neka je $\mathcal{H}$ Hamiltonov ciklus u Petersenovom grafu. Kako $\mathcal{H}$ sadrži sve vrhove, tada $\mathcal{H}$ mora sadržavati barem jedan od pet bridova koji povezuju vanjske vrhove s unutarnjima.



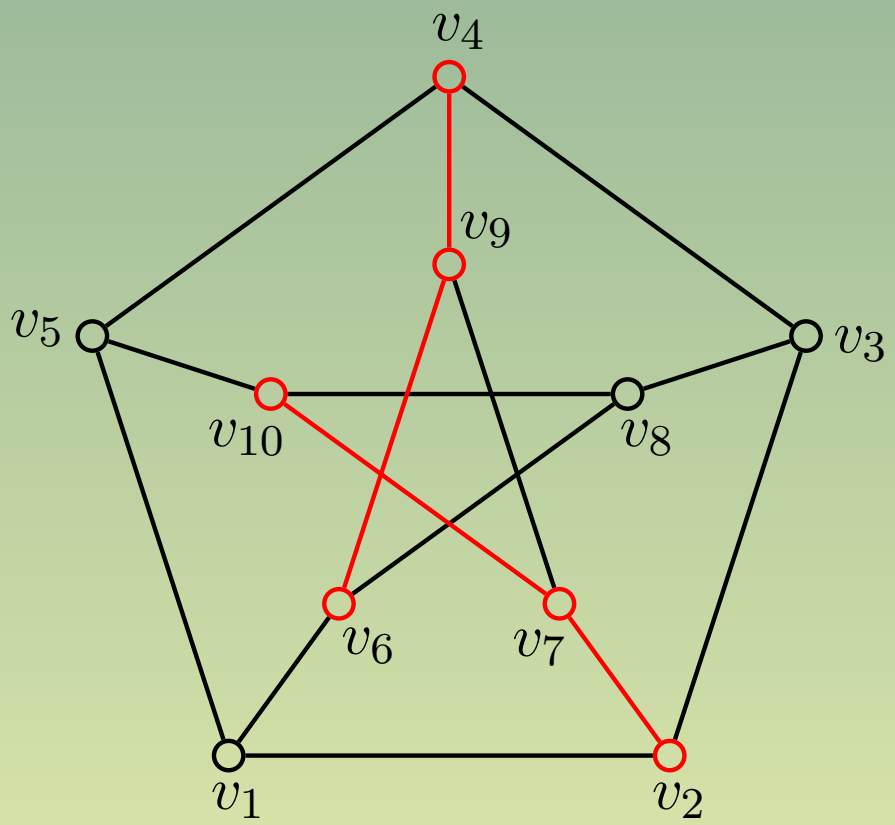
Zbog simetrije, možemo pretpostaviti da je to brid v_4v_9. Kako je $v_9 \in \mathcal{H}$, tada je još jedan od bridova v_9v_6 ili v_9v_7 iz $\mathcal{H}$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



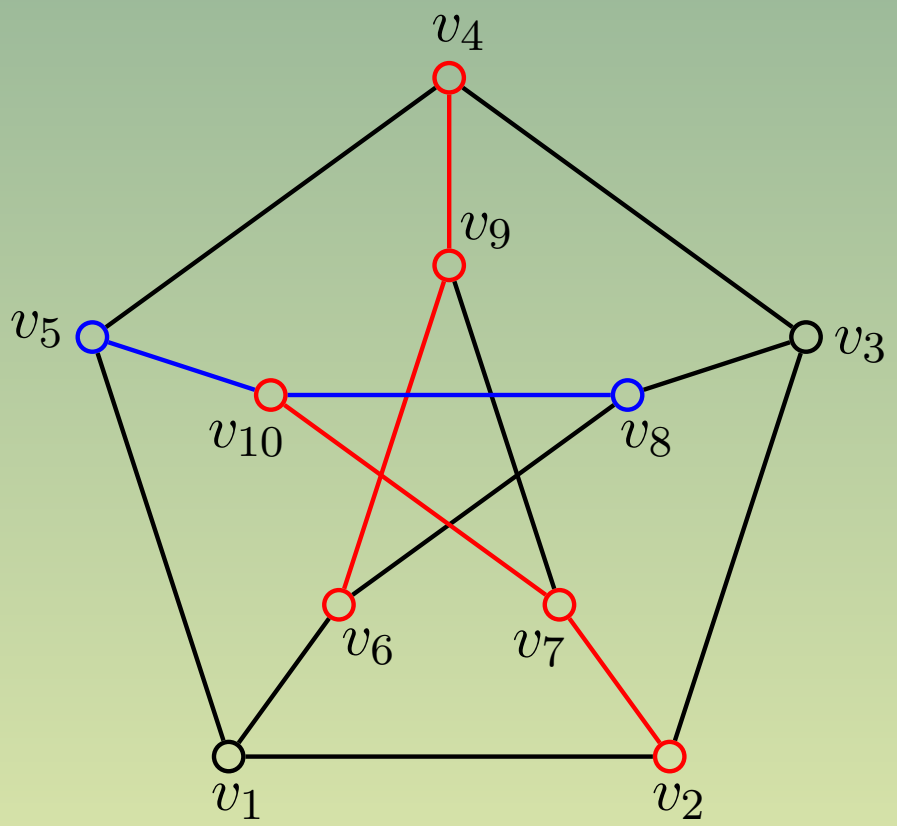
Opet zbog simetrije možemo uzeti da je $v_9v_6 \in \mathcal{H}$, a $v_9v_7 \notin \mathcal{H}$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



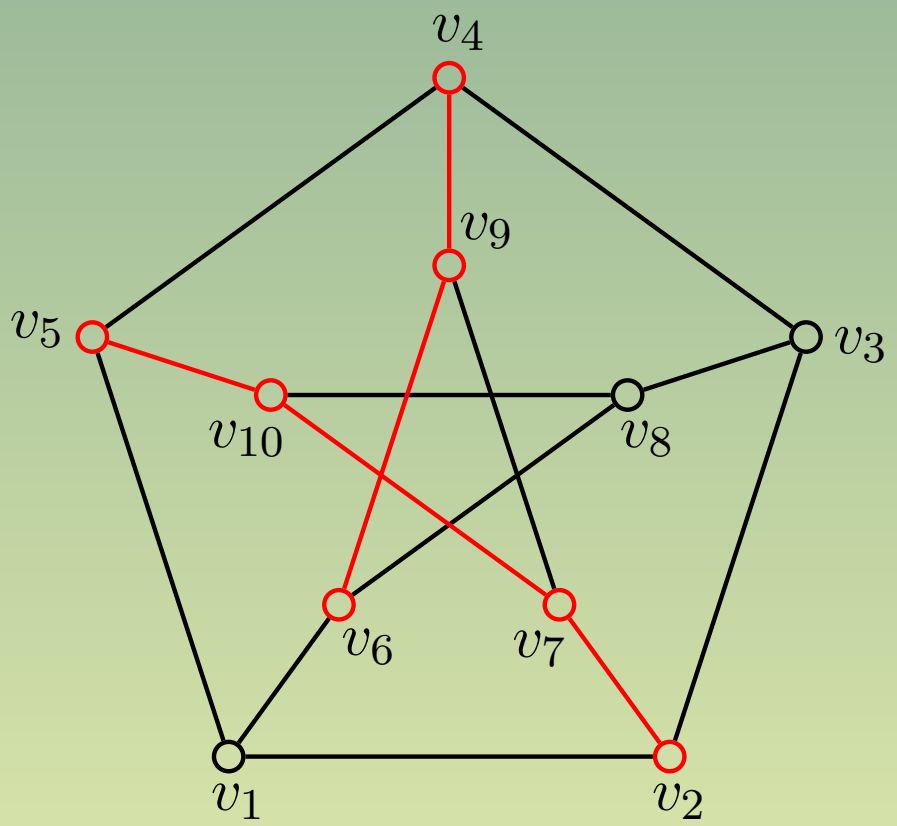
Kako $v_9v_7 \notin \mathcal{H}$, a $\mathcal{H}$ sadrži vrh v_7, tada moraju biti $v_7v_{10} \in \mathcal{H}$ i $v_7v_2 \in \mathcal{H}$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



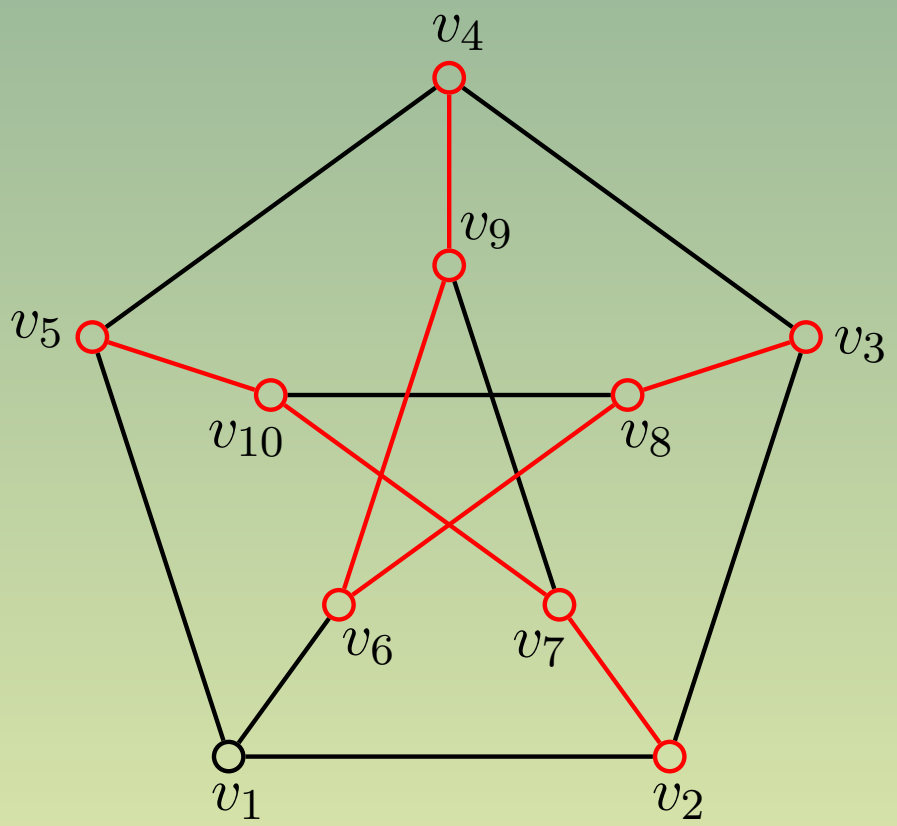
Sada je dalje točno jedan od bridova $v_{10}v_5$ i $v_{10}v_8$ u ciklusu $\mathcal{H}$ pa ćemo u ovom trenutku razlikovati dva slučaja (kako sada više nemamo simetrije).

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



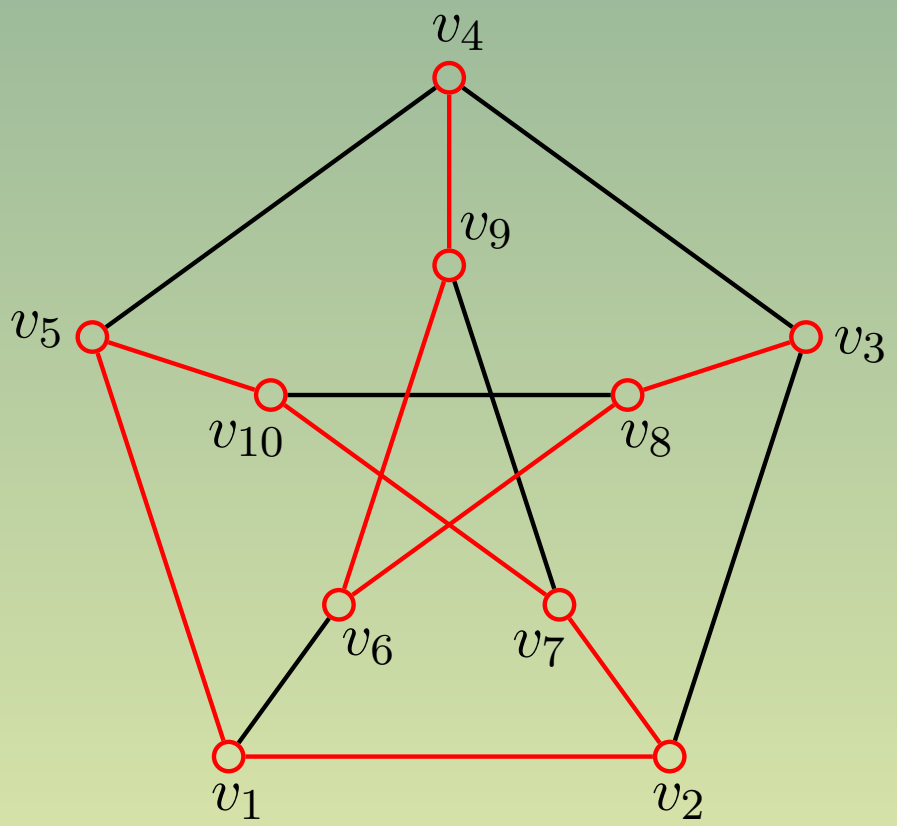
Pretpostavimo da je $v_{10}v_5 \in \mathcal{H}$, a da $v_{10}v_8 \notin \mathcal{H}$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



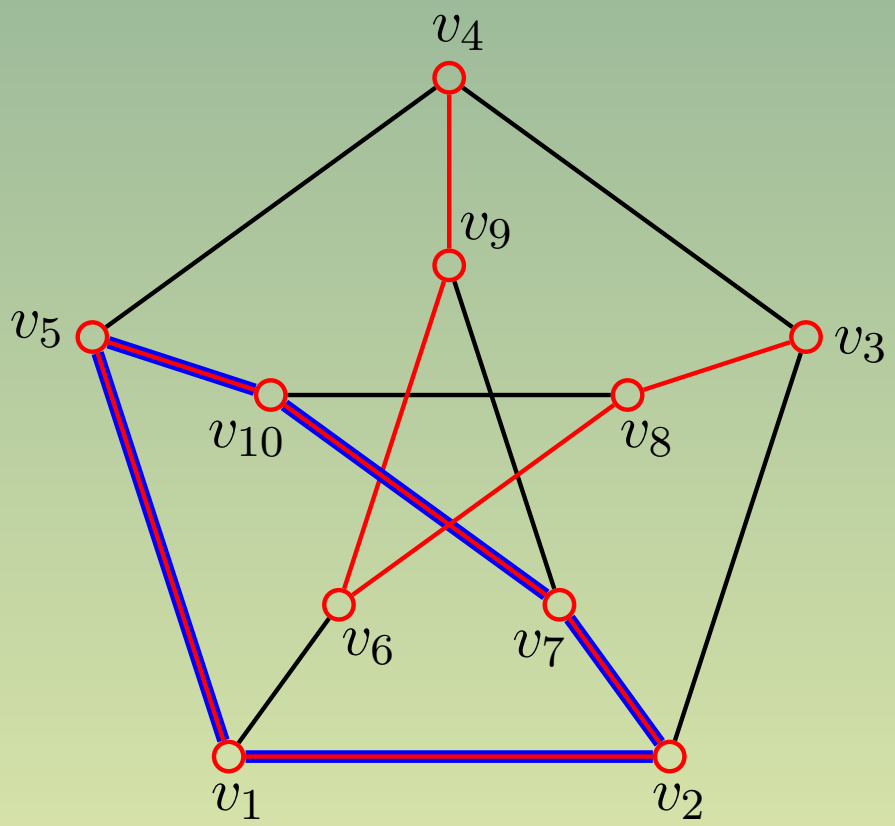
Kako točno dva brida incidentnih s v_8 moraju pripadati ciklusu $\mathcal{H}$, slijedi da je $v_8v_6 \in \mathcal{H}$ i $v_8v_3 \in \mathcal{H}$. Zaključujemo da $v_1v_6 \notin \mathcal{H}$ jer već dva brida incidentna s v_6 pripadaju ciklusu $\mathcal{H}$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



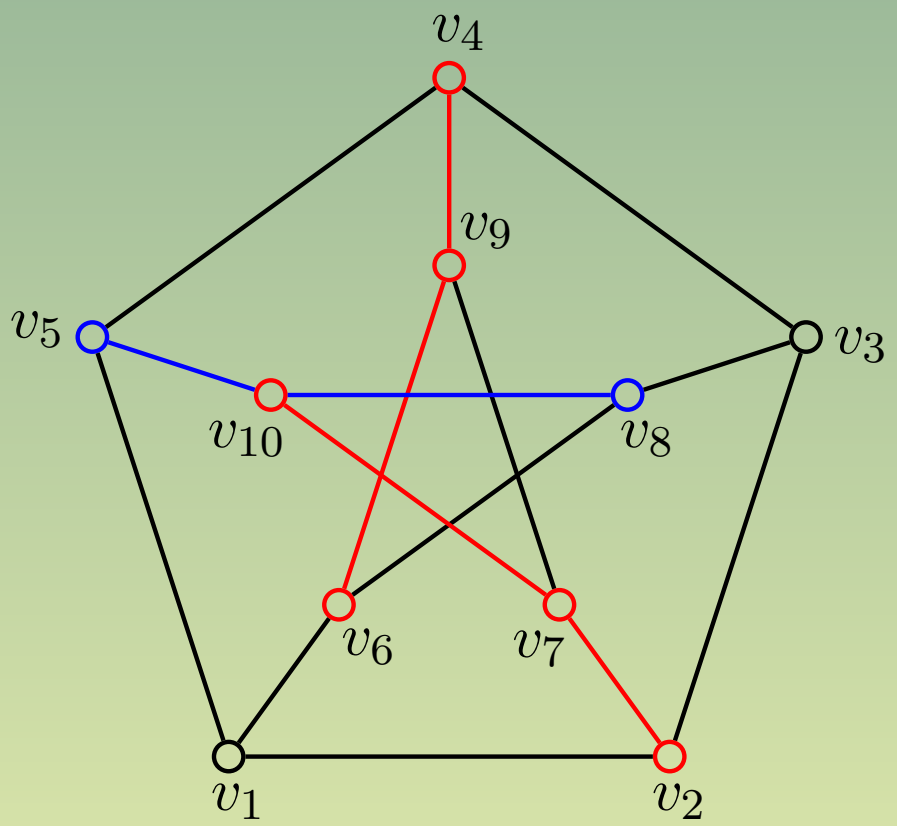
Kako $v_1v_6 \notin \mathcal{H}$, mora biti $v_1v_5 \in \mathcal{H}$ i $v_1v_2 \in \mathcal{H}$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



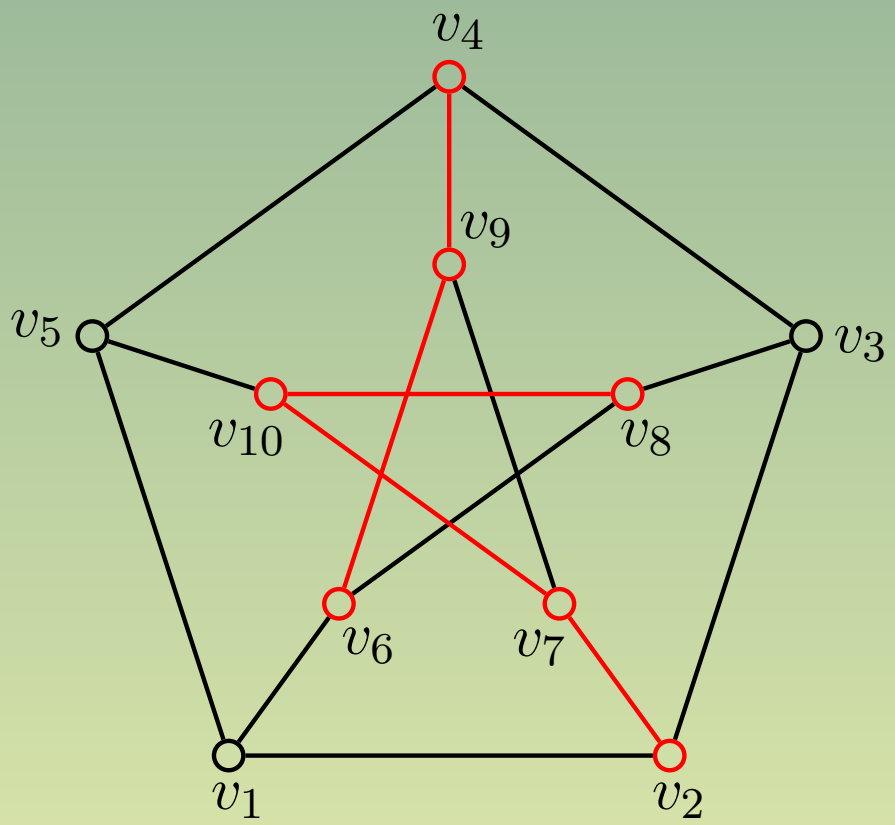
Međutim, tada dobivamo da Hamiltonov ciklus $\mathcal{H}$ sadrži podciklus $v_1v_2v_7v_{10}v_5v_1$, što je nemoguće.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



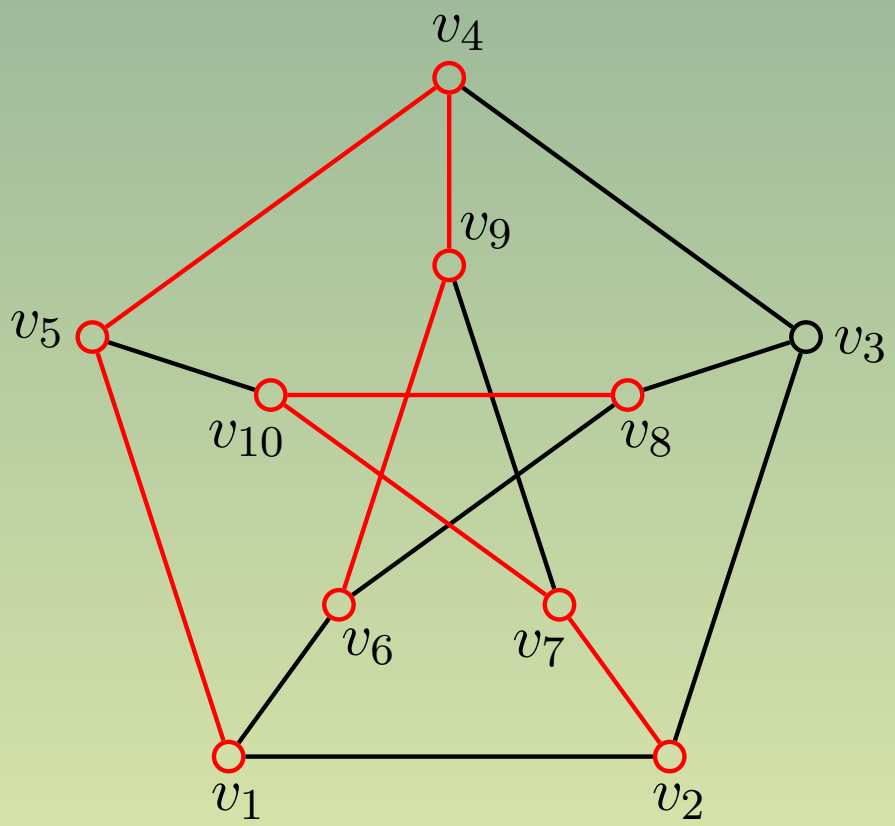
Dakle, brid $v_{10}v_5$ ne pripada ciklusu $\mathcal{H}$ pa preostaje još jedino drugi slučaj da brid $v_{10}v_8$ pripada ciklusu $\mathcal{H}$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



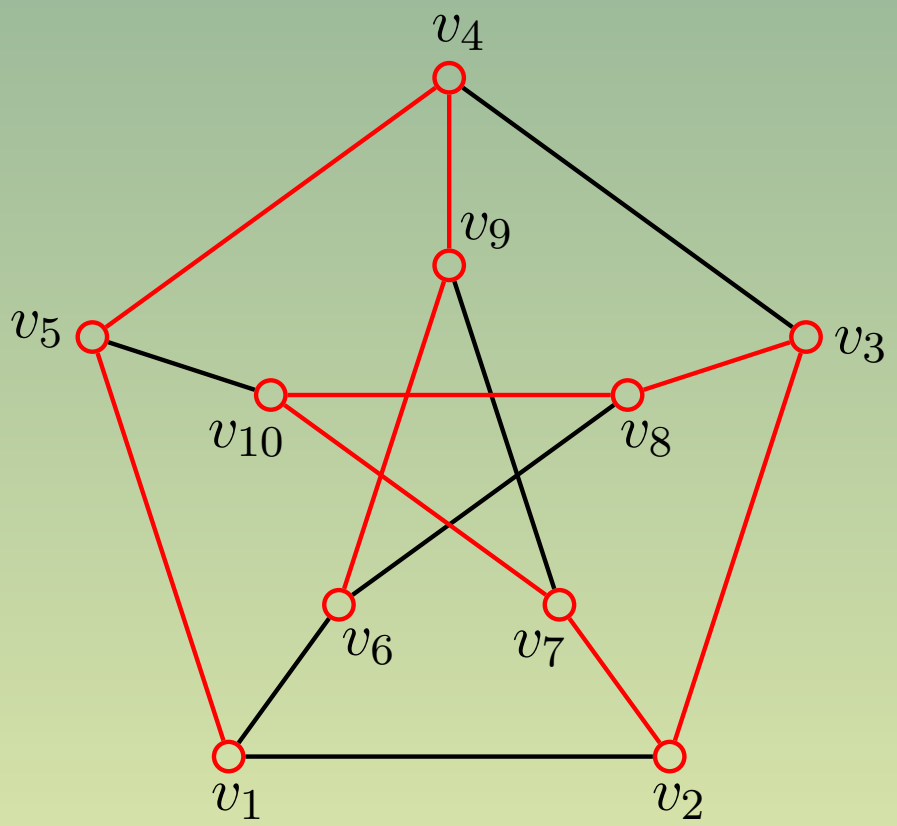
Dakle, preostaje jedino da je $v_{10}v_8 \in \mathcal{H}$ i $v_{10}v_5 \notin \mathcal{H}$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



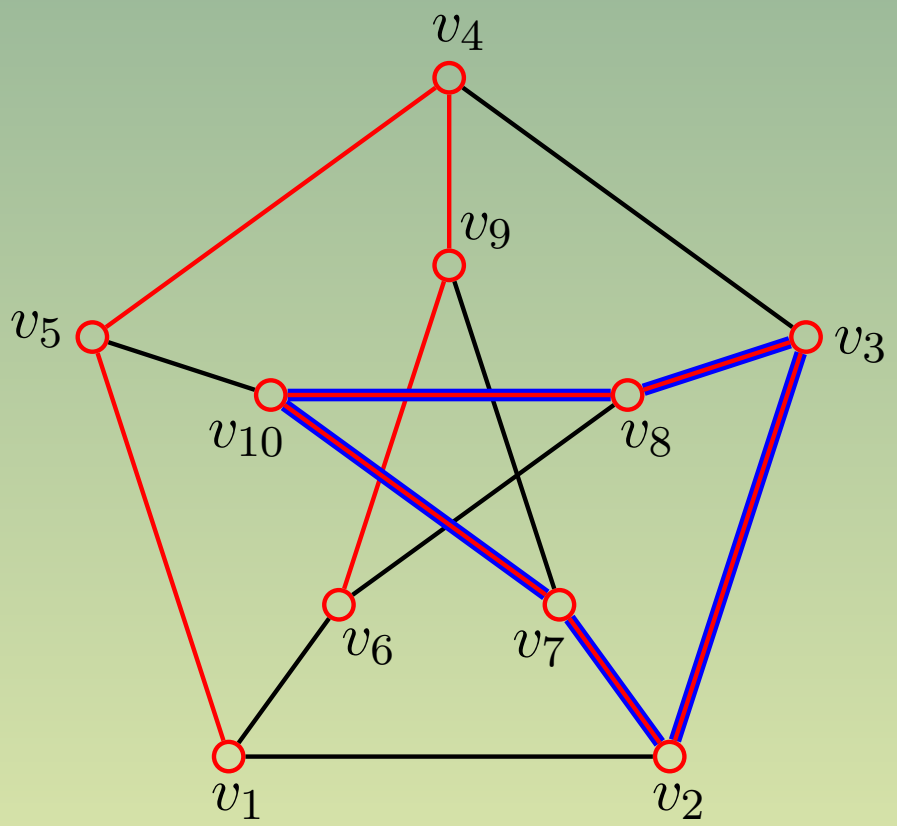
Kako $v_5v_{10} \notin \mathcal{H}$, tada mora biti $v_5v_4 \in \mathcal{H}$ i $v_5v_1 \in \mathcal{H}$. Tada $v_4v_3 \notin \mathcal{H}$ jer već dva brida incidentna s v_4 pripadaju ciklusu $\mathcal{H}$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



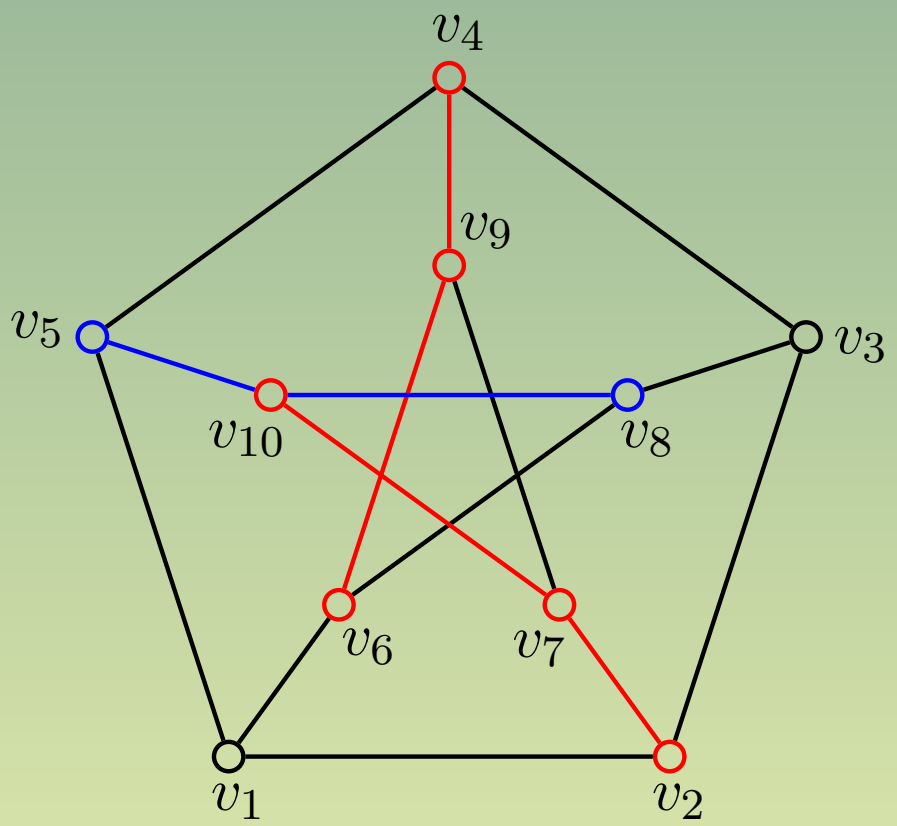
Kako $v_3v_4 \notin \mathcal{H}$, onda moraju biti $v_3v_8 \in \mathcal{H}$ i $v_3v_2 \in \mathcal{H}$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



No, tada dobivamo da Hamiltonov ciklus $\mathcal{H}$ sadrži podciklus $v_2v_3v_8v_{10}v_7v_2$, što je nemoguće.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



Dakle, uz dosadašnja razmatranja uz brid $v_{10}v_7$ pri vrhu v_{10} još bi točno jedan od dva plava brida morao pripadati ciklusu $\mathcal{H}$. Međutim, vidjeli smo da niti jedan od njih ne može pripadati ciklusu $\mathcal{H}$ iz čega slijedi da Petersenov graf nema Hamiltonovih ciklusa pa onda nije Hamiltonov graf.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.32.

Neka je P Petersenov graf i neka je $v \in V(P)$ proizvoljni vrh. Dokažite da je tada $P - v$ Hamiltonov graf.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

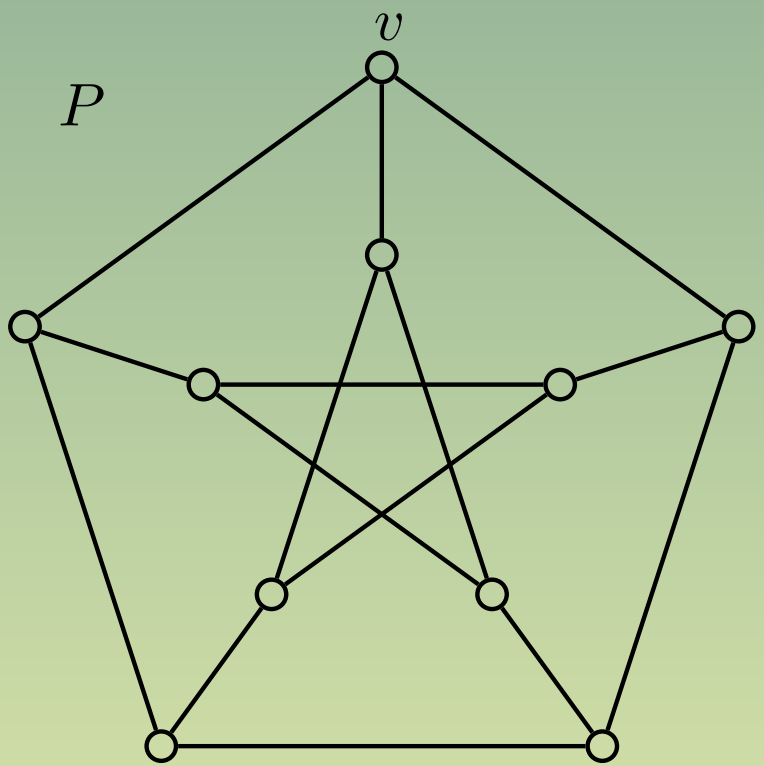
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.32.

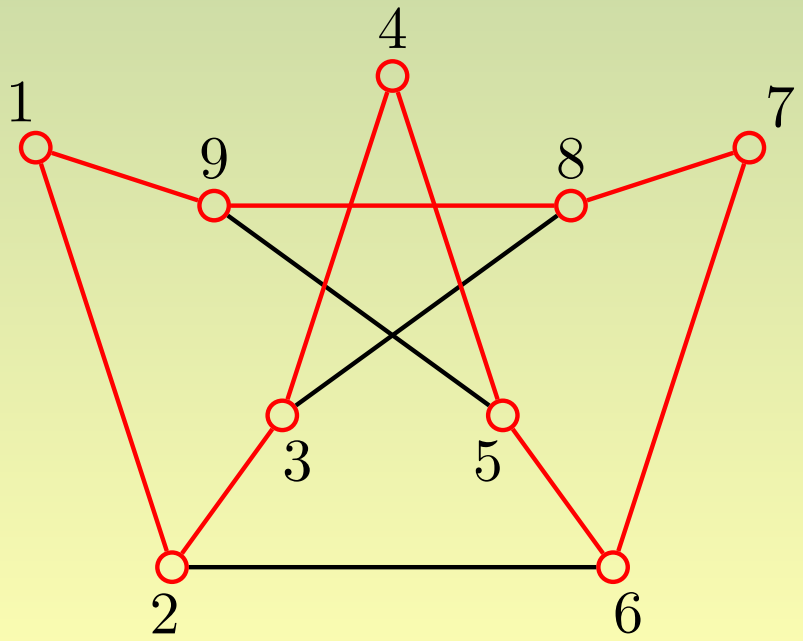
Neka je P Petersenov graf i neka je $v \in V(P)$ proizvoljni vrh. Dokažite da je tada $P - v$ Hamiltonov graf.

Rješenje.

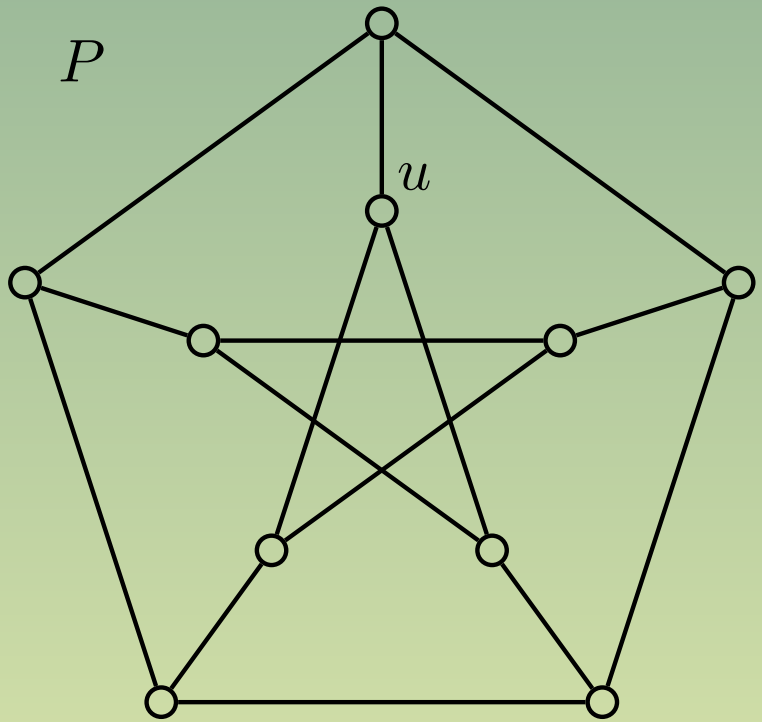
Zbog simetrije u Petersenovom grafu, dovoljno je tvrdnju provjeriti u dva slučaja. Prvi slučaj je kada je v neki vanjski vrh, a drugi kada je v neki unutarnji vrh. Da bismo dokazali da je $P - v$ Hamiltonov graf, treba u njemu pronaći bar jedan Hamiltonov ciklus. Na sljedećim slikama su prikazani Hamiltonovi ciklusi u $P - v$ za navedena dva slučaja. Uz vrhove stoje oznake koje označavaju jedan mogući obilazak vrhova.



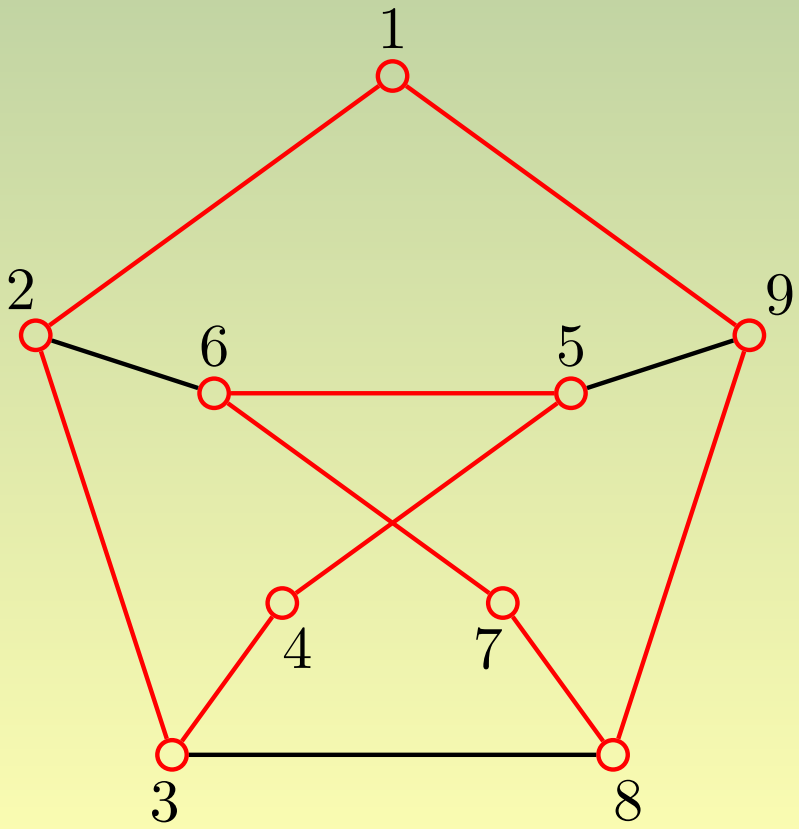
$P - v$



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



$P - u$



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.33.

U grupi od $2n$ ljudi, svaka osoba ima barem n prijatelja. Dokažite da se ta grupa može smjestiti za okrugli stol tako da svaka osoba sjedi između neka svoja dva prijatelja.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.33.

U grupi od $2n$ ljudi, svaka osoba ima barem n prijatelja. Dokažite da se ta grupa može smjestiti za okrugli stol tako da svaka osoba sjedi između neka svoja dva prijatelja.

Rješenje.

Za $n = 1$ tvrdnja je očito istinita jer imamo dvije osobe koje su prijatelji. Pretpostavimo da je $n > 1$. Promatrajmo jednostavni graf G kojemu su vrhovi ljudi, a bridovi označavaju prijateljstvo između dvije osobe. Takav graf ima $2n$ vrhova i $\delta(G) \geqslant n$. Pitanje je zapravo ima li taj graf Hamiltonov ciklus.

Ako taj graf ima Hamiltonov ciklus, to će onda značiti da tih $2n$ ljudi možemo smjestiti oko okruglog stola tako da svaka osoba sjedi između neka svoja dva prijatelja.
Kako je $n > 1$, slijedi da je $2n \geqslant 3$ pa zadani graf ima više od tri vrha. S druge strane, kako je $\delta(G) \geqslant n$ i $\frac{\nu(G)}{2} = n$, prema

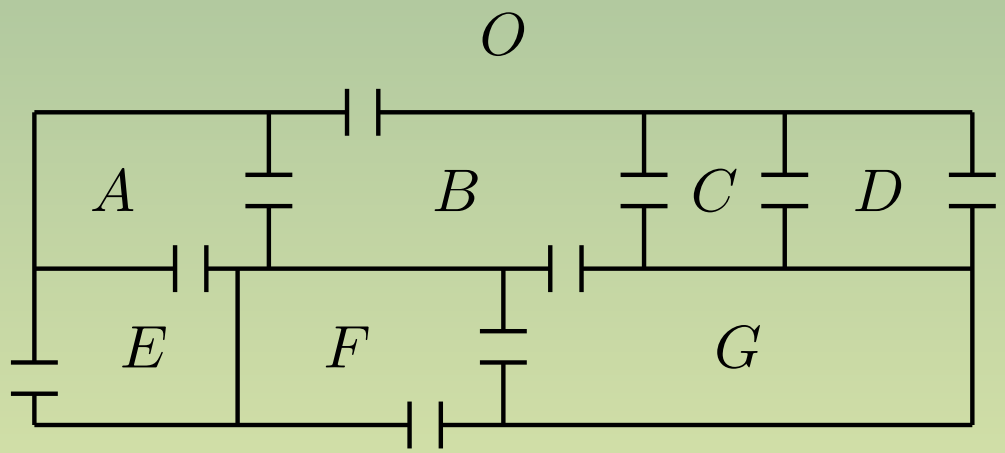
◂ Diracovom teoremu

graf G ima Hamiltonov ciklus iz čega onda slijedi tvrdnja zadatka.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.34.

Na slici je dan tlocrt jednokatnice sa sobama i vratima između pojedinih soba i vratima iz kojih se može izaći van iz kuće.



a. *Da li je moguće izvana ući u kuću i proći svaku prostoriju točno jednom bez da izlazimo izvan kuće i na kraju se vratimo natrag van?*

b. *Da li je moguće krenuti izvana i proći kroz svaka vrata u kući točno jednom i vratiti se natrag van (dozvoljeno je vraćati se izvan kuće ili proći kroz neku sobu više puta)?*

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

Poboljšani Dijkstrin algoritam

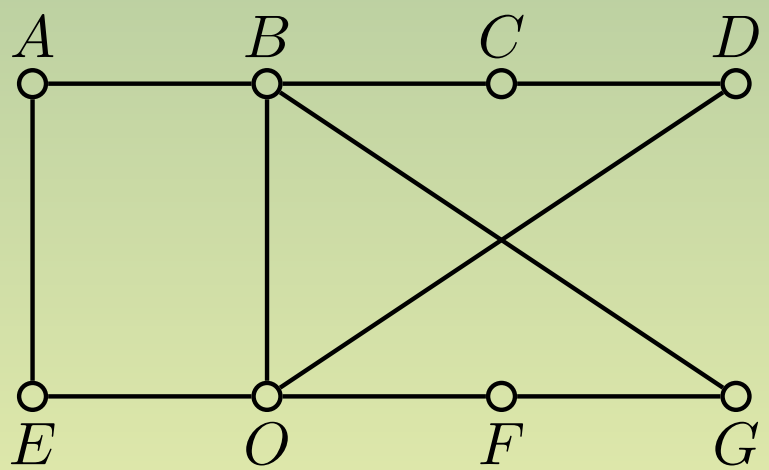
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.

Tlocrt jednokatnice možemo predstaviti sljedećim grafom, gdje vrhovi predstavljaju sobe, a dvije sobe su spojene bridom ako između njih postoje vrata.

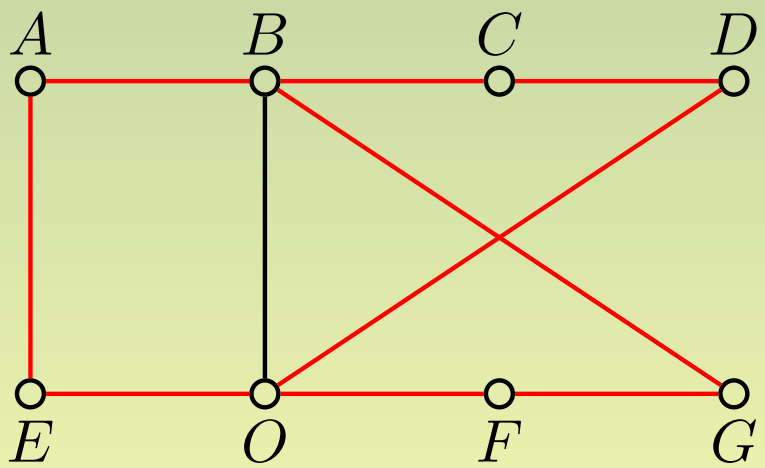


Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

- Pitanje je zapravo da li je pripadni graf Hamiltonov. Dokažimo da taj graf nije Hamiltonov. Naime, kako je

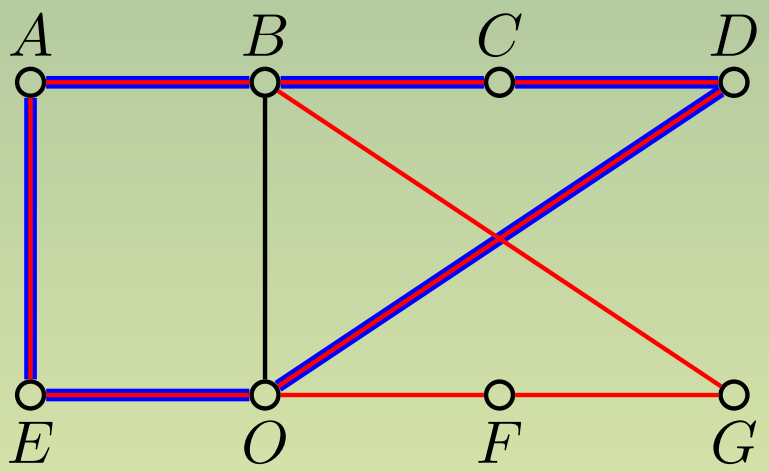
$$d(A) = d(E) = d(D) = d(G) = d(C) = d(F) = 2$$

tada bi svaki brid koji je susjedan s nekim od tih vrhova (crveni bridovi) morao pripadati Hamiltonovom ciklusu u tom grafu (ako bi on postojao).



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

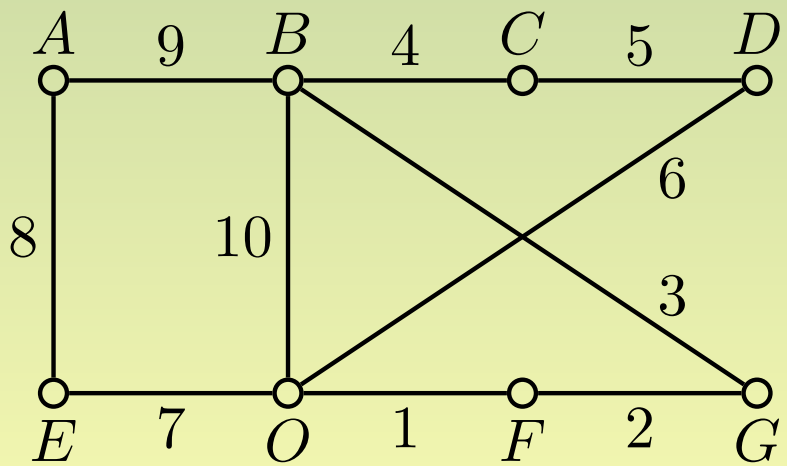
Međutim, tada bi Hamiltonov ciklus sadržavao podciklus $ABCDOEA$, što je nemoguće.



Dakle, graf nije Hamiltonov pa stoga nije moguće krenuti izvana u kuću i proći svaku prostoriju točno jednom bez izlaženja izvan kuće i vratiti se natrag van iz kuće.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

- Pitanje je zapravo da li je pripadni graf Eulerov. Kako su svi vrhovi u grafu parnog stupnja, graf je Eulerov. Dakle, moguće je krenuti izvana i proći kroz svaka vrata u kući točno jednom i vratiti se natrag van (ako je dozvoljeno vraćanje izvan kuće i prolaženje kroz neke sobe više puta). Na slici je prikazan jedan mogući način. Da li postoji još koji? Pazite, morate početi i završiti u vrhu O jer se tako u zadatku traži.



Primjer 7.35.

Neka je G jednostavan graf s 11 vrhova i 53 brida. Dokažite da je G Hamiltonov graf, ali nije Eulerov graf.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.35.

Neka je G jednostavan graf s 11 vrhova i 53 brida. Dokažite da je G Hamiltonov graf, ali nije Eulerov graf.

Rješenje.

Potpuni graf K_{11} ima ukupno $\binom{11}{2} = 55$ bridova. Stoga je graf G dobiven iz grafa K_{11} uklanjanjem neka njegova dva brida pa je graf G sigurno povezan (naime, iz K_{11} bi trebalo izbaciti barem 10 bridova da bi preostali graf ostao nepovezan). Nakon uklanjanja jednog brida dobivamo dva vrha neparnog stupnja, a nakon uklanjanja još jednog brida imamo ili dva ili četiri vrha neparnog stupnja (ovisno o tome da li smo uklonili susjedne ili nesusjedne bridove). Stoga graf G nije Eulerov.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Pomoću Diracovog teorema ćemo pokazati da je graf G Hamiltonov. Provjerimo da graf G zadovoljava uvjete iz Diracovog teorema. Graf G je povezan i ima $\nu = 11$ vrhova. Dakle, $\nu \geqslant 3$. Po pretpostavci je G jednostavan graf. Treba još vidjeti da je $\delta(G) \geqslant \frac{\nu}{2} = \frac{11}{2}$. Pretpostavimo da postoji vrh $w \in V(G)$ koji je stupnja $\leqslant 5$. Kako je graf G jednostavan, preostalih 10 vrhova može biti najviše stupnja 10 pa je

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) \leqslant 10 \cdot 10 + 5 = 105.$$

Međutim, znamo da je

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2\varepsilon = 2 \cdot 53 = 106$$

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

pa smo dobili kontradikciju. Stoga je sigurno $\delta(G) \geqslant 6$. Vrijedi i više (iako nam to u ovom trenutku nije važno, ali da ipak vidimo različite načine razmišljanja). Naime, kao što smo vidjeli, graf G je dobiven izbacivanjem dva brida iz grafa K_{11}. Kako je graf K_{11} 10-regularan, u najgorem slučaju bismo izbacivanjem dva susjedna brida dobili vrh stupnja 8 pa je sigurno i $\delta(G) \geqslant 8$. Dakle, u svakom slučaju je $\delta(G) \geqslant \frac{\nu}{2}$. Stoga je prema Diracovom teoremu graf G Hamiltonov.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.36.

Neka je G graf s barem tri vrha. Ako u grafu G između svaka dva vrha postoji Hamiltonov put, dokažite da je tada G Hamiltonov graf.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

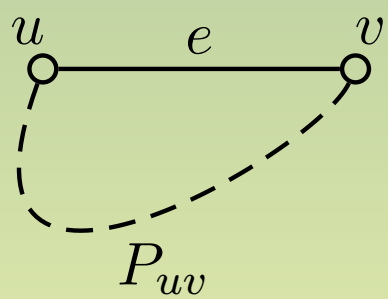
Primjer 7.36.

Neka je G graf s barem tri vrha. Ako u grafu G između svaka dva vrha postoji Hamiltonov put, dokažite da je tada G Hamiltonov graf.

Rješenje.

Kako između svaka dva vrha postoji Hamiltonov put, specijalno postoji i put, pa je graf G povezan. Neka su $u, v \in V(G)$ susjedni vrhovi (takvi postoje jer je graf G povezan i ima više od jednog vrha). Kako po pretpostavci između svaka dva vrha postoji Hamiltonov put, tada i između vrhova u i v postoji Hamiltonov put P_{uv}.

Kako G ima barem tri vrha, sigurno je $P_{uv} \neq uv$, tj. P_{uv} nije jednak bridu $e = uv$ (pa onda niti ne sadrži brid e, niti bilo koji drugi brid između vrhova u i v).



Tada je $uP_{uv}veu$ Hamiltonov ciklus pa je G Hamiltonov graf.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.37.

Dokažite da K_n *ima* $\frac{(n-1)!}{2}$ *Hamiltonovih ciklusa,* $n \geqslant 3$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.37.

Dokažite da K_n ima $\frac{(n-1)!}{2}$ Hamiltonovih ciklusa, $n \geqslant 3$.

Rješenje.

Graf K_n ima n vrhova. Krenimo iz nekog vrha v_1 prema nekom vrhu v_2. To možemo napraviti na $n-1$ načina jer je stupanj svakog vrha jednak $n-1$. Sada iz vrha v_2 prema nekom vrhu v_3 možemo krenuti na $n-2$ načina (ne smijemo se vraćati natrag u vrh v_1). Iz vrha v_3 prema nekom vrhu v_4 možemo ići na $n-3$ načina (ne smijemo se vraćati u vrhove v_1 i v_2). Postupak tako nastavimo dalje. Na kraju, iz vrha v_{n-1} možemo samo na jedan način otići u jedini preostali vrh v_n, a iz vrha v_n se moramo

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

natrag vratiti u vrh v_1. Prema principu produkta, ukupni broj Hamiltonovih ciklusa u K_n bio bi jednak

$$(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot 1 = (n-1)!.$$

Međutim, u takvom načinu prebrojavanja svaki smo Hamiltonov ciklus brojali dvaput. Naime, jedanput

$$v_1v_2v_3\cdots v_{n-2}v_{n-1}v_nv_1,$$

a drugi puta u obrnutom redoslijedu

$$v_1v_nv_{n-1}v_{n-2}\cdots v_3v_2v_1.$$

Stoga je za $n \geqslant 3$ ukupni broj Hamiltonovih ciklusa u K_n jednak $\frac{(n-1)!}{2}$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.38.

Dokažite da u K_n ima najviše $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ bridovima disjunktnih Hamiltonovih ciklusa.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.38.

Dokažite da u K_n ima najviše $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ bridovima disjunktnih Hamiltonovih ciklusa.

Rješenje.

Graf K_n ima n vrhova. Svaki Hamiltonov ciklus u K_n ima n bridova. Kako K_n ima ukupno $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ bridova, slijedi da u K_n ima najviše $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ bridovima disjunktnih Hamiltonovih ciklusa.

Primjer 7.39.

Može li skakač na šahovskoj ploči $n \times n$, $n \geqslant 3$, krenuti iz nekog mjesta i posjetiti svako polje točno jednom i vratiti se natrag na mjesto otkud je počeo? Skakač se kreće u obliku slova L, *tj.*  .

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

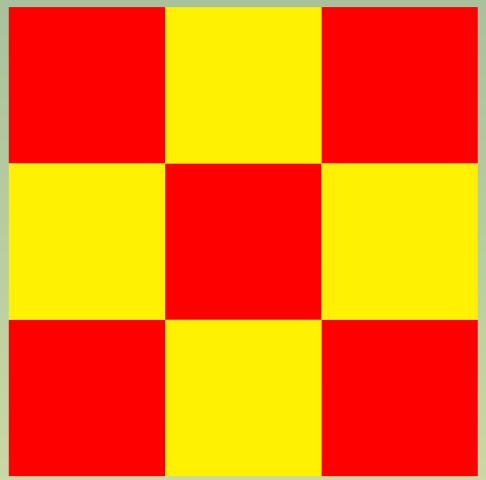
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

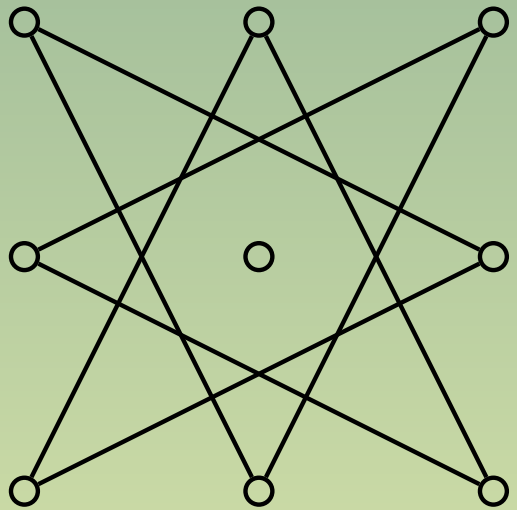
Primjer 7.39.

Može li skakač na šahovskoj ploči $n \times n$, $n \geqslant 3$, krenuti iz nekog mjesta i posjetiti svako polje točno jednom i vratiti se natrag na mjesto otkud je počeo? Skakač se kreće u obliku slova L, *tj.*  .

Rješenje.

Pridružimo ovom problemu model grafa. Vrhovi grafa neka budu polja šahovske ploče (ukupno će biti n^2 vrhova), a dva vrha su susjedna ako i samo ako se na šahovskoj ploči sa odgovarajućeg polja može konjem skočiti na ono drugo polje. Tada se opisani problem svodi na pitanje da li je dobiveni graf Hamiltonov graf. Pogledajmo slučaj $n = 3$.





Dobiveni graf nije povezan pa onda nije niti Hamiltonov. Dakle, na 3×3 ploči nema načina da skakač krene s jednog polja i da obiđe sva polja i vrati se natrag na početak. Pogledajte da i za 4×4, 5×5 i 7×7 ploču to nije moguće. Za 8×8 ploču je moguće. Pronađite u tom slučaju jedan Hamiltonov ciklus. Napišite na računalu program koji će napraviti simulaciju takvog kretanja skakača po 8×8 ploči.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Težinski grafovi

Težinski graf je graf G čijem je svakom bridu e pridružen nenegativni broj $w(e)$ kojeg zovemo težina brida e.

Ako je $H \subseteq G$, tada je težina podgrafa H definirana s

$$w(H) = \sum_{e \in E(H)} w(e).$$

Specijalno, težina puta P u grafu G je

$$w(P) = \sum_{e \in E(P)} w(e).$$

Udaljenost vrhova u i v u težinskom grafu je najmanja težina (u, v)-puta. Taj put zovemo **najkraćim putem** između vrhova u i v.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Napomena.

Najkraći put između dva vrha u težinskom grafu ne mora biti put koji sadrži najmanje bridova.
Na "obični" graf možemo gledati kao na težinski graf u kojemu je svakom bridu pridružena težina 1. Tada je u takvom grafu najkraći put između dva vrha onaj put koji sadrži najmanje bridova, a duljina tog puta je jednaka broju bridova koje taj put sadrži. Na taj način je duljina puta i udaljenost vrhova u težinskom grafu poopćenje duljine puta i udaljenosti vrhova u "običnom" grafu.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Problem trgovačkog putnika. *Trgovački putnik treba obići gradove i vratiti se na polazište. Ako je dano vrijeme putovanja između gradova, kako treba putovati tako da se svaki grad obiđe samo jedanput i da se na putu provede što manje vremena?*

Ovom problemu na prirodni način možemo pridružiti potpuni težinski graf. Vrhovi tog grafa označavaju gradove, a bridovima pridružimo težine koje ovdje označavaju vrijeme putovanja između pojedina dva grada. Zadatak je tada pronaći u potpunom težinskom grafu Hamiltonov ciklus najmanje težine, tzv. **optimalni ciklus**. Nije poznat efikasni algoritam za rješenje tog problema koji se izvršava u polinomijalnom vremenu.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Prva naivna ideja bi bila da pogledamo sve moguće Hamiltonove cikluse u potpunom grafu K_n i uzmemo onog koji ima najmanju težinu. No, problem je što takvih ciklusa ima jako puno, naime ima ih $\frac{(n-1)!}{2}$, što već za male n-ove neće biti efikasan algoritam.

Mnogi drugi problemi, slični problemu trgovačkog putnika, ipak se mogu riješiti u polinomijalnom vremenu. Jedan od takvih problema je problem najkraćeg puta u željezničkoj (ili nekoj drugoj) mreži kojom su povezani neki gradovi, gdje treba pronaći najkraći put (put najmanje težine) između dva zadana grada iz te mreže. Postoji dosta algoritama koji rješavaju problem najkraćeg puta u težinskom grafu. Mi ćemo ovdje spomenuti dva takva algoritma.

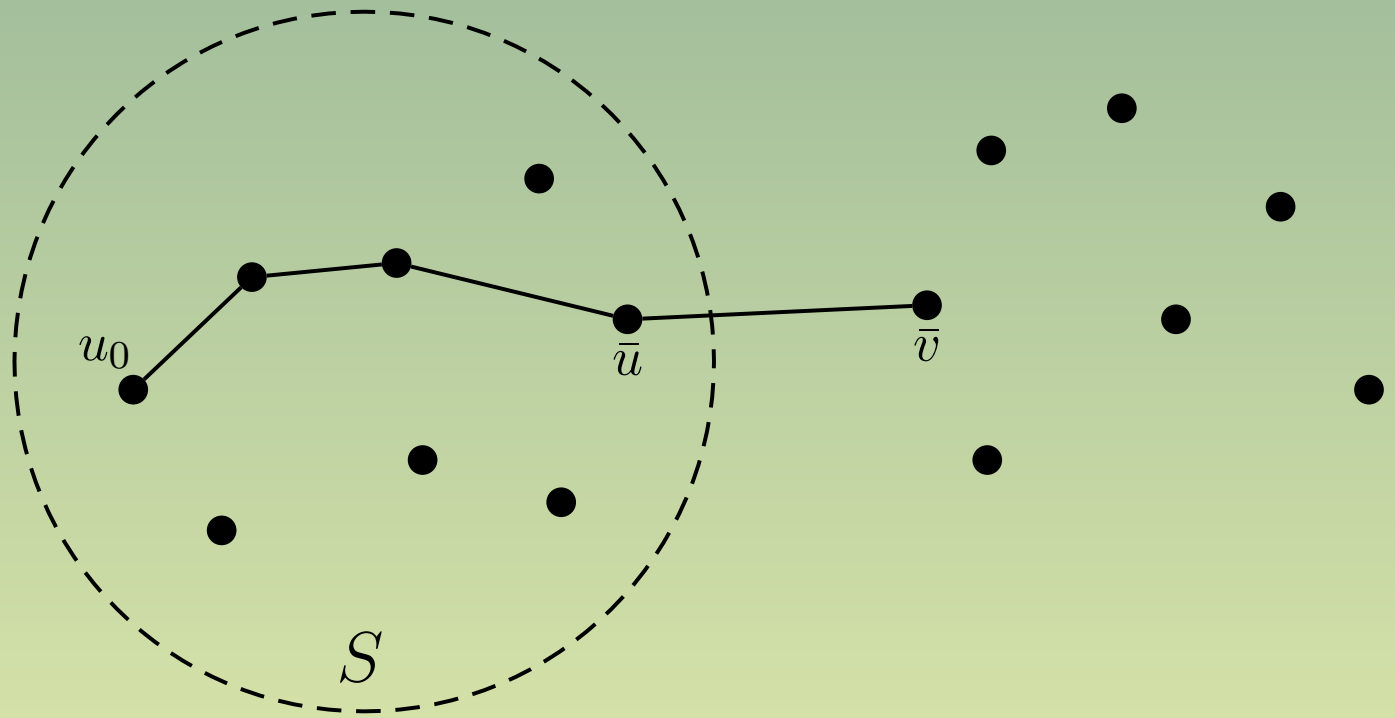
Dijkstrin algoritam

Dijkstrin algoritam pronalazi najkraći put u težinskom grafu između dva vrha. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da imamo jednostavni graf jer u protivnom, ako bismo između dva vrha imali više bridova, tada bismo uzeli onog koji ima najmanju težinu, a ostale bismo mogli zanemariti.

Osnovna ideja Dijkstrinog algoritma je sljedeća. Neka je $G = (V, E)$ težinski graf, $S \subseteq V$, $u_0 \in S$ i $\overline{S} = V \setminus S$. Ako je $P = u_0 \cdots \bar{u}\bar{v}$ najkraći put od u_0 do $\overline{S}$, tada je $\bar{u} \in S$ i $\big(u_0, \bar{u}\big)$-dio od P mora biti najkraći $\big(u_0, \bar{u}\big)$-put.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



$$d(u_0, \bar{v}) = d(u_0, \bar{u}) + w(\bar{u}\bar{v})$$

$$d(u_0, \overline{S}) = \min_{u \in S,\, v \in \overline{S}} \{d(u_0, u) + w(uv)\} \qquad (*)$$

$(*)$ je osnovna formula Dijkstrinog algoritma.

Počinje se sa skupom $S_0 = \{u_0\}$, gdje je u_0 početni odabrani vrh. Zatim se konstruira rastući niz $S_0, S_1, \ldots, S_{\nu-1}$ podskupova od V tako da su na kraju i-tog koraka poznati najkraći putovi od u_0 do svih vrhova iz S_i. U toku algoritma svakom se vrhu v u grafu pridružuje uređeni par (x, d), gdje je d najkraća udaljenost od vrha u_0 do vrha v, a xv je posljednji brid na tom najkraćem putu. Na taj je način pomoću prve koordinate vraćanjem unazad moguće rekonstruirati čitavi najkraći put od u_0 do v. Ako vrh v nikada nije označen, znači da ne postoji put od u_0 do v, što znači da graf nije povezan.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Dijkstrin algoritam

ULAZ: Težinski graf $G = (V, E)$ i dva vrha u_0, v_0
IZLAZ: Najkraći put od u_0 do v_0

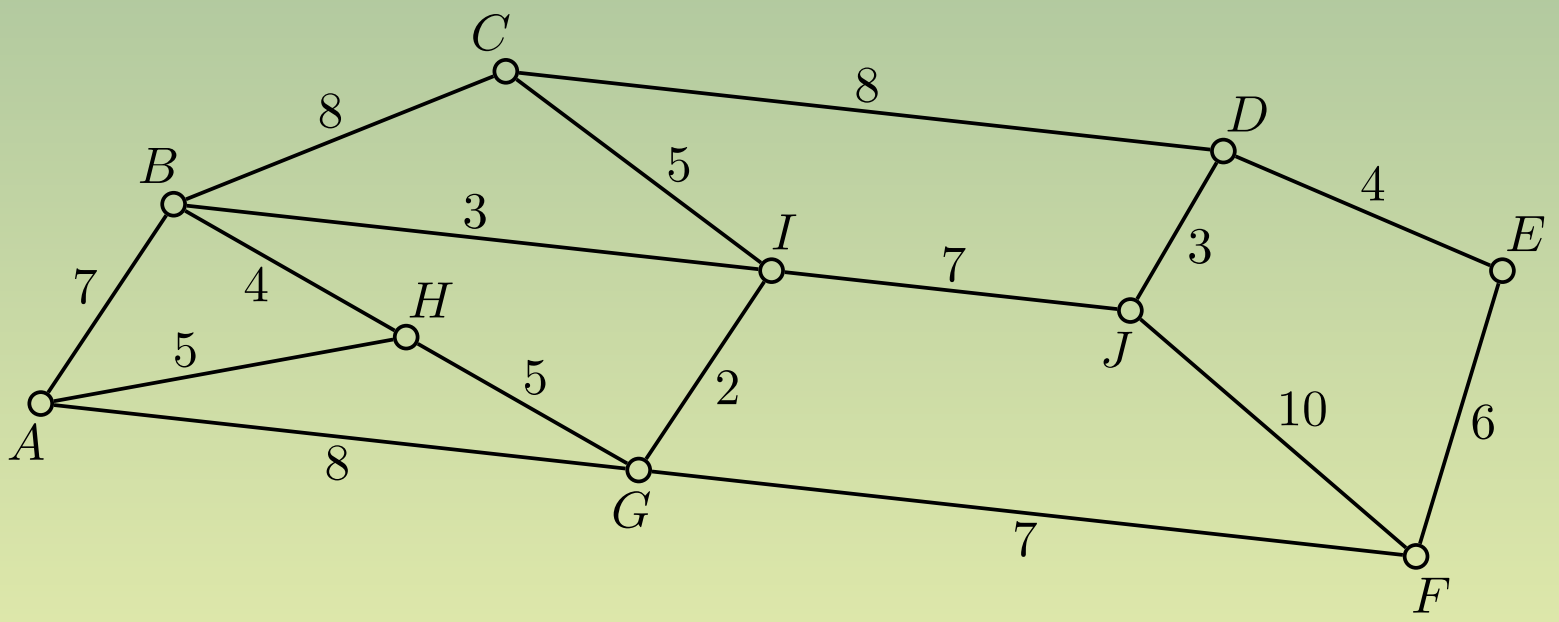
1: Pridruži vrhu u_0 oznaku $(-, 0)$
2: Sve dok je vrh v_0 neoznačen ili nije moguće pridruživati daljnje oznake, radi sljedeće:
   a) Za svaki označeni vrh $u(x, d)$ i za svaki neoznačeni vrh v susjedan s vrhom u, izračunaj $d + w(uv)$.
   b) Pronađi $d' = \min\{d + w(uv)\}$ i pridruži vrhu v oznaku (u, d'). Ako se vrh može označiti sa (x, d') za više različitih vrhova x, odaberi bilo koji od tih vrhova x.

Ako algoritam pustimo da radi tako dugo dok ne označi sve vrhove u grafu, dobit ćemo najkraće putove od vrha u_0 do svih vrhova u grafu G. Ako su neki vrhovi i nakon toga ostali neoznačeni, znači da u grafu G od vrha u_0 do svakog od njih ne postoji put u G pa je graf nepovezan.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.40.

Pomoću Dijkstrinog algoritma odredite najkraće putove od vrha A prema ostalim vrhovima u težinskom grafu



Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

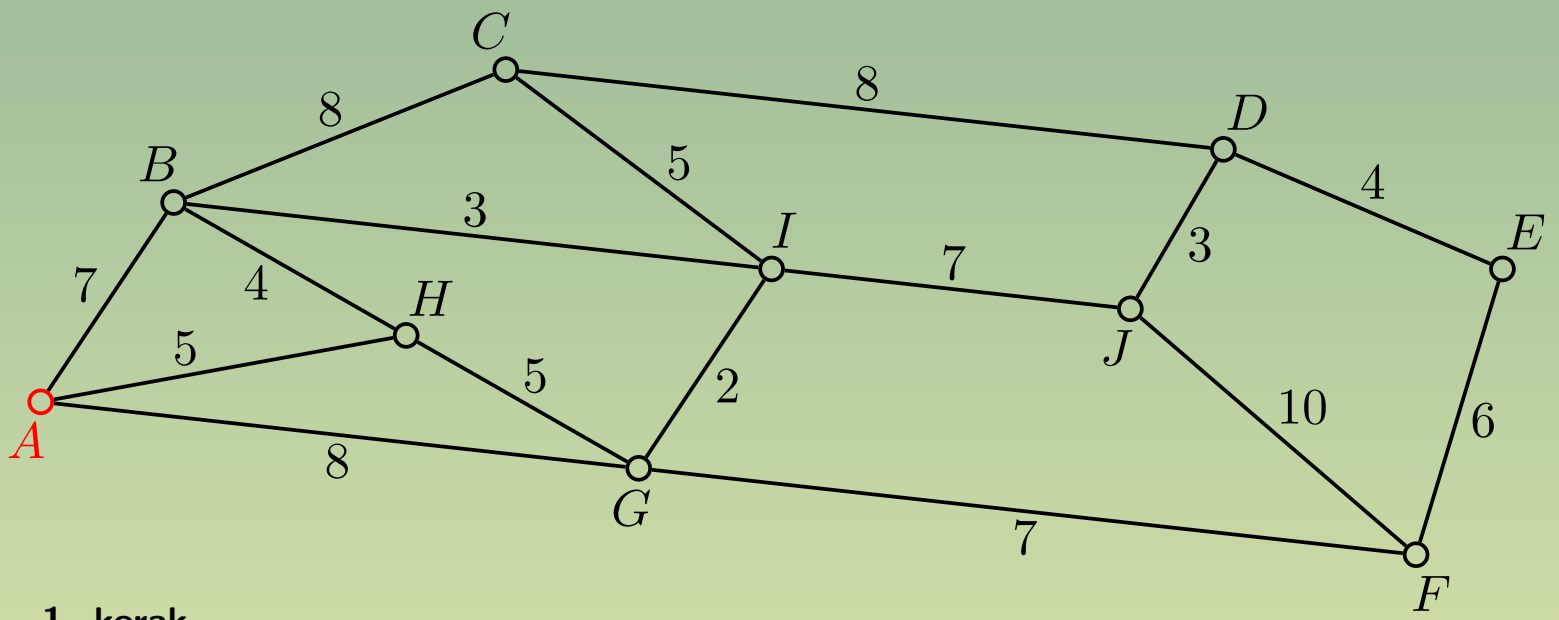
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



1. korak

označeni vrhovi: $A(-,0)$

Na početku početnom izabranom vrhu, a to je ovdje vrh A, pridružimo oznaku $(-,0)$.

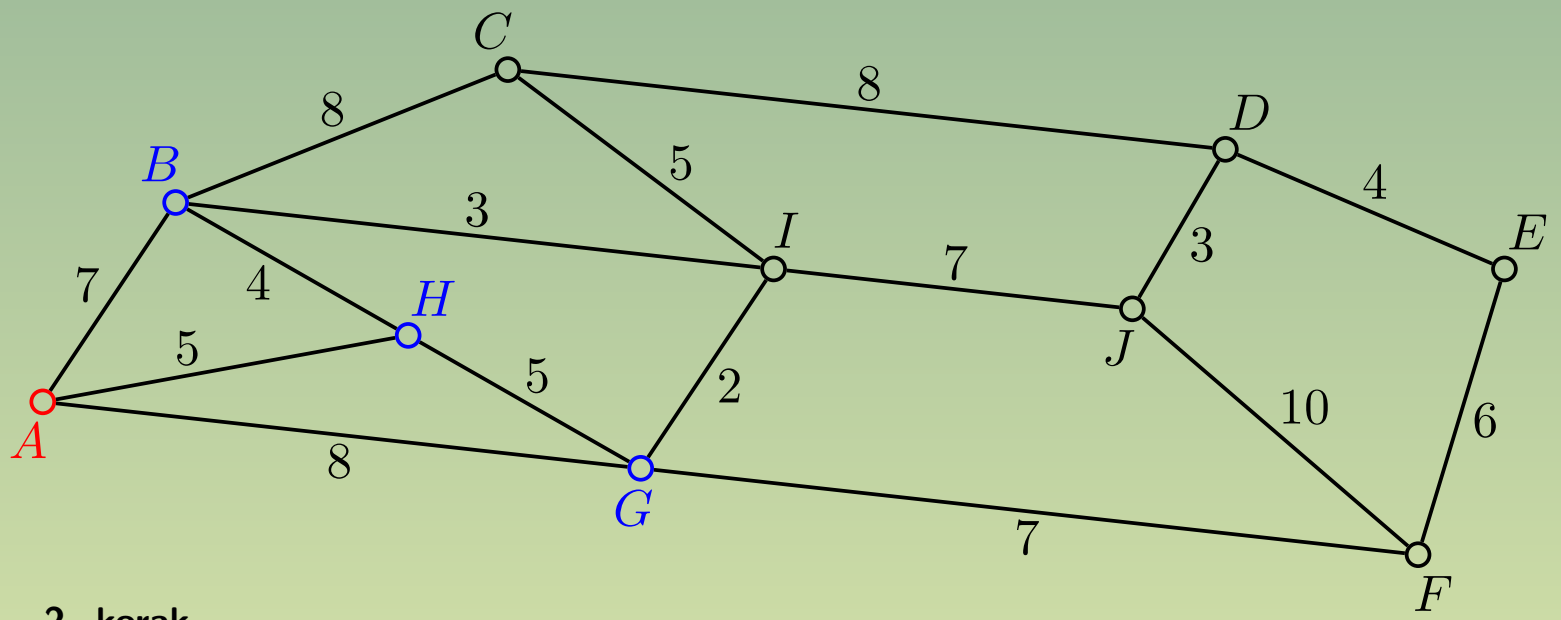
⏩ Konačno rješenje

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rješenje.



2. korak

označeni vrhovi: $A(-, 0)$

Jedini označeni vrh je A. Pogledamo njegove susjedne neoznačene vrhove B, H i G. Svaki od tih vrhova dolazi iz vrha A pa bi svi oni imali prvu koordinatu u svojim oznakama jednaku A, a drugu koordinatu svakog od tih vrhova dobijemo tako da zbrojimo drugu koordinatu vrha A (koja je jednaka 0) s težinom brida preko kojeg je pojedini vrh spojen s vrhom A. Stoga dobivamo $B(A, 7)$, $H(A, 5)$ i $G(A, 8)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

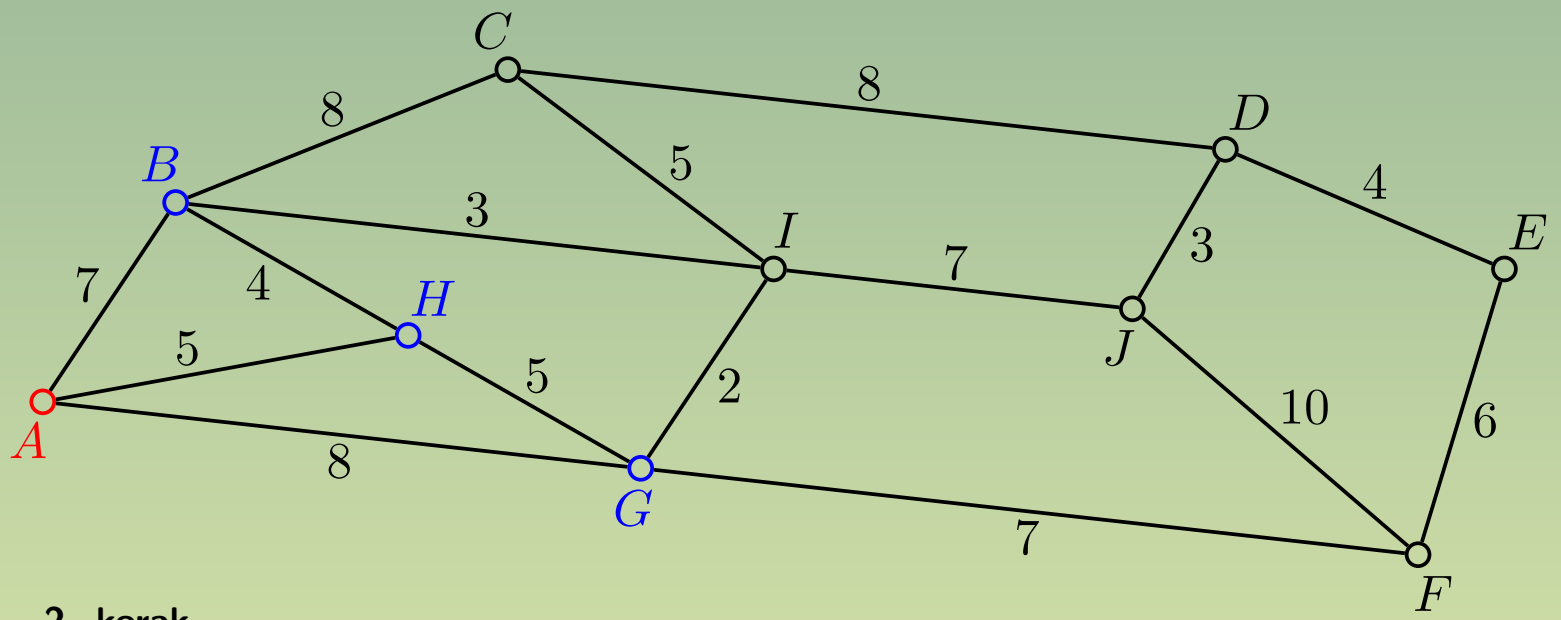
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



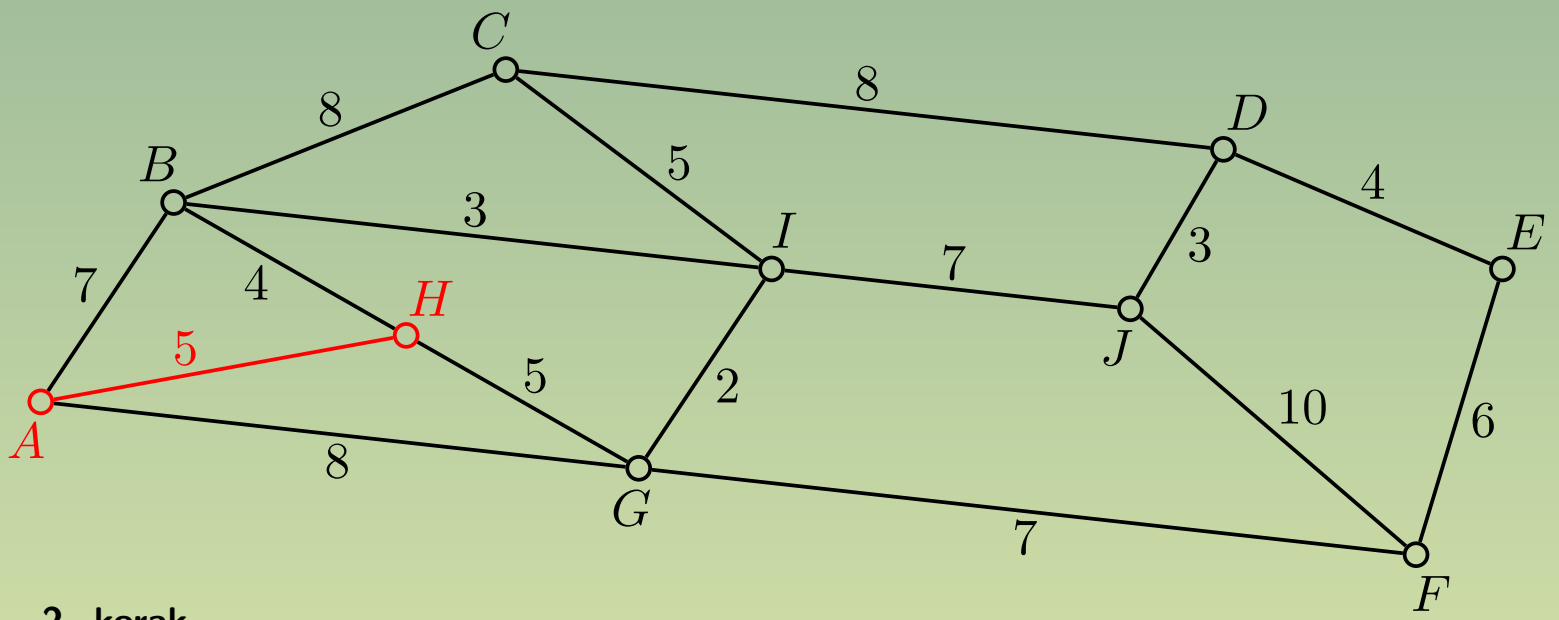
2. korak

označeni vrhovi: $A(-, 0)$

Sada između $B(A, 7)$, $H(A, 5)$ i $G(A, 8)$ odaberemo vrh koji ima najmanju drugu koordinatu. To je u ovom slučaju vrh H i on zapravo postaje označeni vrh s oznakom $(A, 5)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rješenje.



2. korak

označeni vrhovi: $A(-, 0)$, $H(A, 5)$

Pri tome nam prva koordinata vrha H omogućuje rekonstrukciju najkraćeg puta od vrha A do vrha H. To je ovdje put HA, odnosno čitano u obrnutom redoslijedu AH, a druga koordinata nam daje duljinu tog najkraćeg puta. Dakle, najkraći put od vrha A do vrha H je put AH i on je duljine 5.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

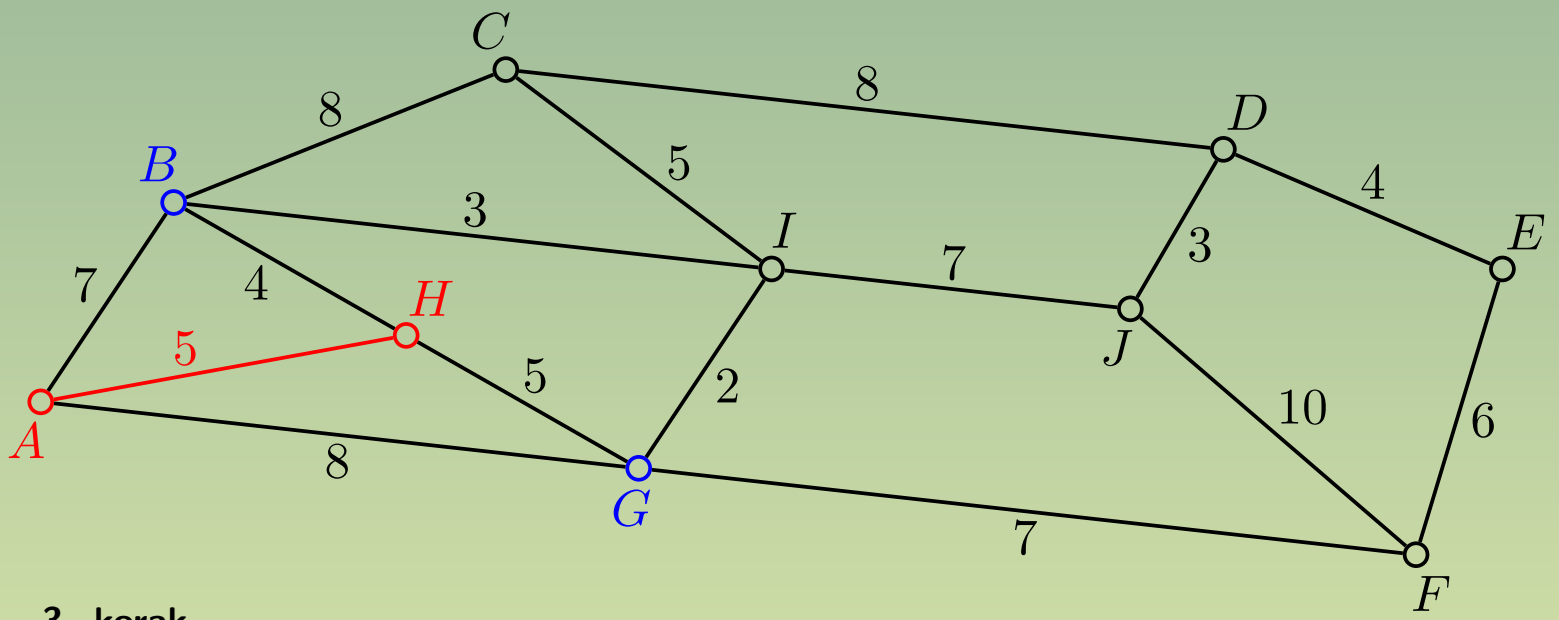
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.

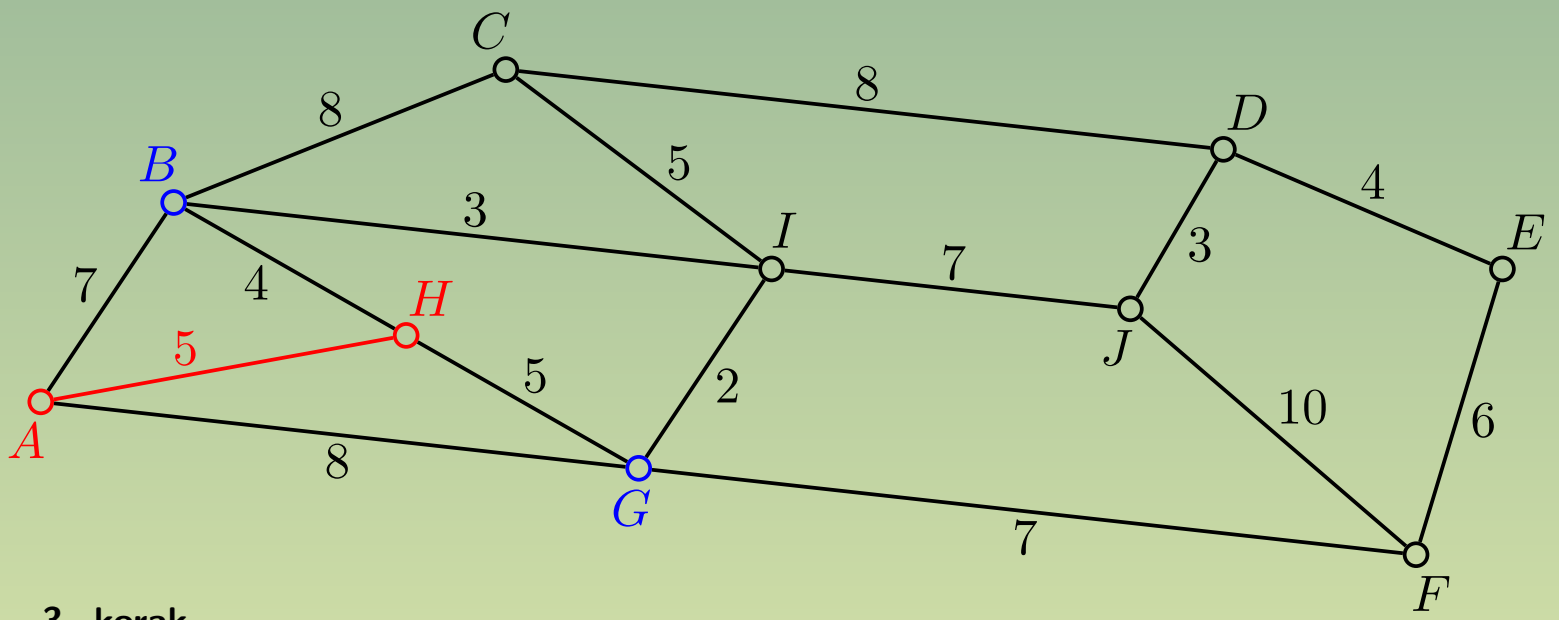


3. korak

označeni vrhovi: $A(-, 0)$, $H(A, 5)$

Označeni vrhovi su A i H. Pogledamo susjedne neoznačene vrhove vrhova A i H. Susjedni neoznačeni vrhovi vrha A su vrhovi B i G. Susjedni neoznačeni vrhovi vrha H su također vrhovi B i G. Gledano iz vrha A, vrhovima B i G će prve koordinate u njihovim oznakama biti jednake A, a druge koordinate dobijemo tako da drugu koordinatu vrha A (koja je jednaka 0) zbrojimo s težinama pripadnih bridova koji spajaju pojedine vrhove B i G s vrhom A. Stoga dobivamo $B(A, 7)$, $G(A, 8)$.

Rješenje.



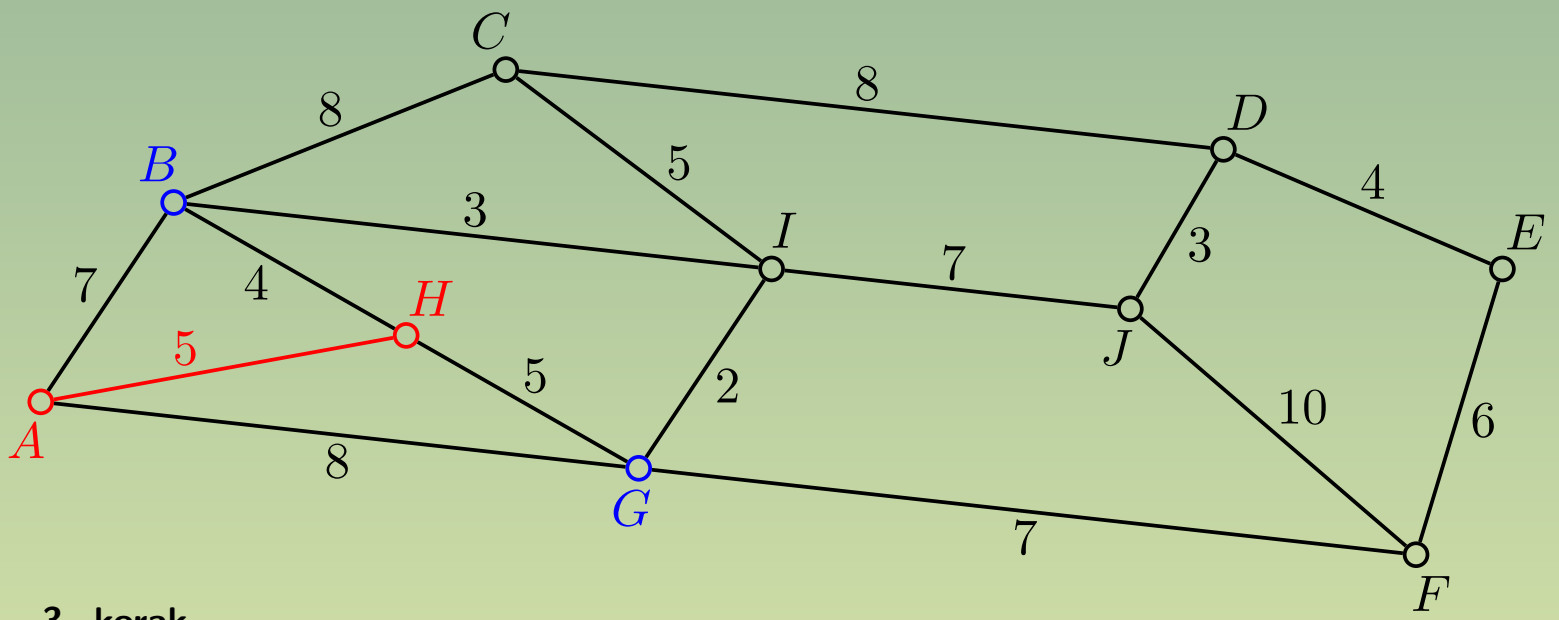
3. korak

označeni vrhovi: $A(-, 0)$, $H(A, 5)$

Gledano iz vrha H, vrhovima B i G će prve koordinate u njihovim oznakama biti jednake H, a druge koordinate dobijemo tako da drugu koordinatu vrha H (koja je jednaka 5) zbrojimo s težinama pripadnih bridova koji spajaju pojedine vrhove B i G s vrhom H. Stoga dobivamo $B(H, 9)$, $G(H, 10)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rješenje.



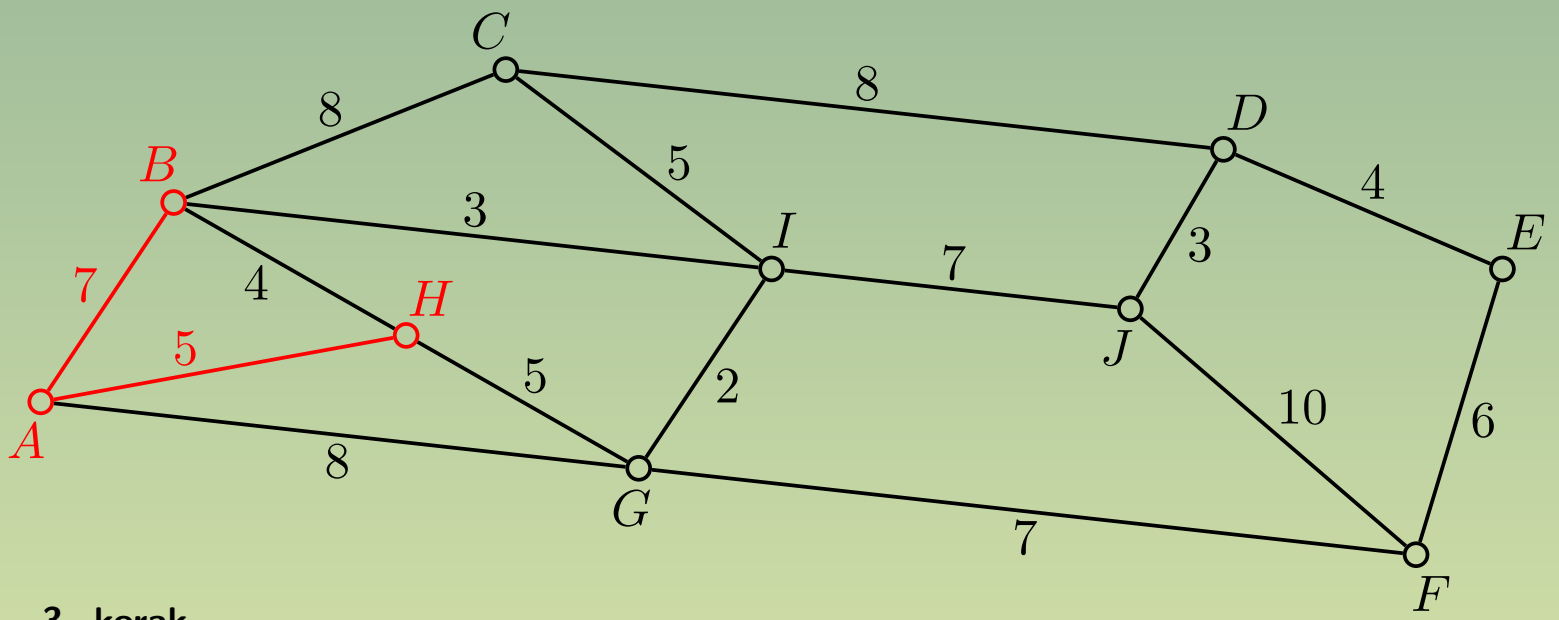
3. korak

označeni vrhovi: $A(-, 0)$, $H(A, 5)$

Sve skupa imamo $B(A, 7)$, $G(A, 8)$, $B(H, 9)$, $G(H, 10)$ pa opet uzmemo vrh s onom oznakom koja ima najmanju drugu koordinatu. U ovom slučaju je to $B(A, 7)$. Stoga u ovom koraku vrh B postaje označeni vrh s oznakom $(A, 7)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rješenje.



3. korak

označeni vrhovi: $A(-,0)$, $H(A,5)$, $B(A,7)$

Pri tome nam prva koordinata vrha B omogućuje rekonstrukciju najkraćeg puta od vrha A do vrha B. To je ovdje put BA, odnosno čitano u obrnutom redoslijedu AB, a druga koordinata nam daje duljinu tog najkraćeg puta. Dakle, najkraći put od vrha A do vrha B je put AB i on je duljine 7.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

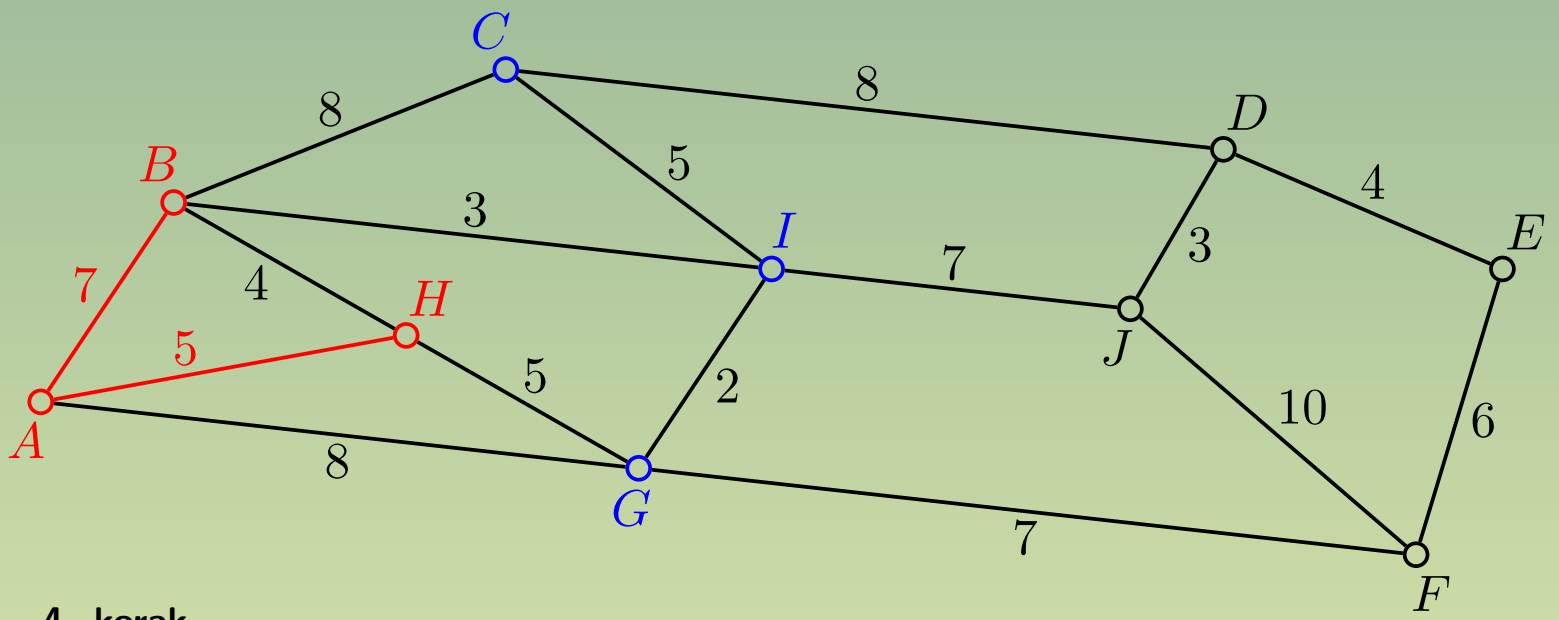
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



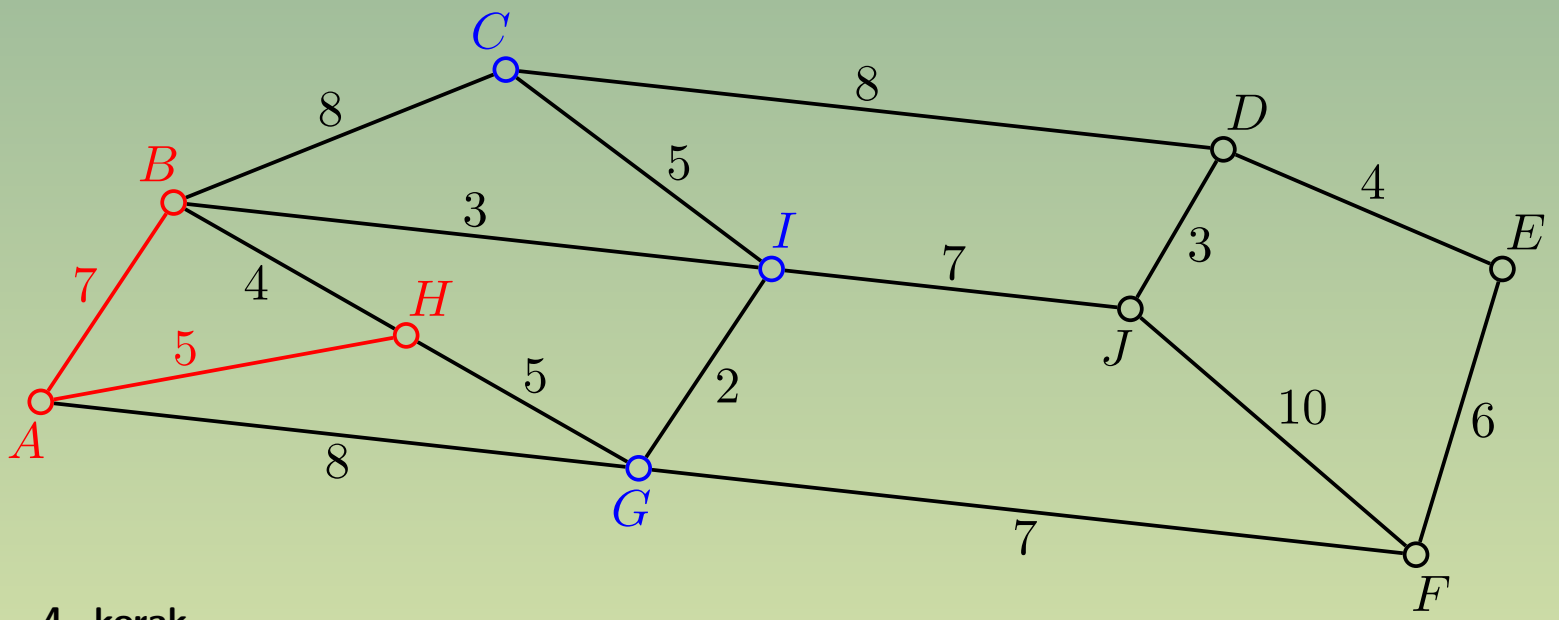
4. korak

označeni vrhovi: $A(-,0)$, $H(A,5)$, $B(A,7)$

Označeni vrhovi su A, H i B. Pogledamo susjedne neoznačene vrhove vrhova A, H i B. Jedini susjedni neoznačeni vrh vrha A je vrh G i na već prije opisani način dobivamo $G(A,8)$. Isto tako, jedini susjedni neoznačeni vrh vrha H je isto vrh G pa imamo $G(H,10)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rješenje.



4. korak

označeni vrhovi: $A(-,0)$, $H(A,5)$, $B(A,7)$

Susjedni neoznačeni vrhovi vrha B su vrhovi C i I. Stoga će prve koordinate njihovih oznaka biti jednake B, a druge koordinate ćemo dobiti tako da drugu koordinatu od B (koja je jednaka 7) zbrojimo s težinama pripadnih bridova koji spajaju vrhove C i I s vrhom B. Stoga dobivamo $C(B,15)$, $I(B,10)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

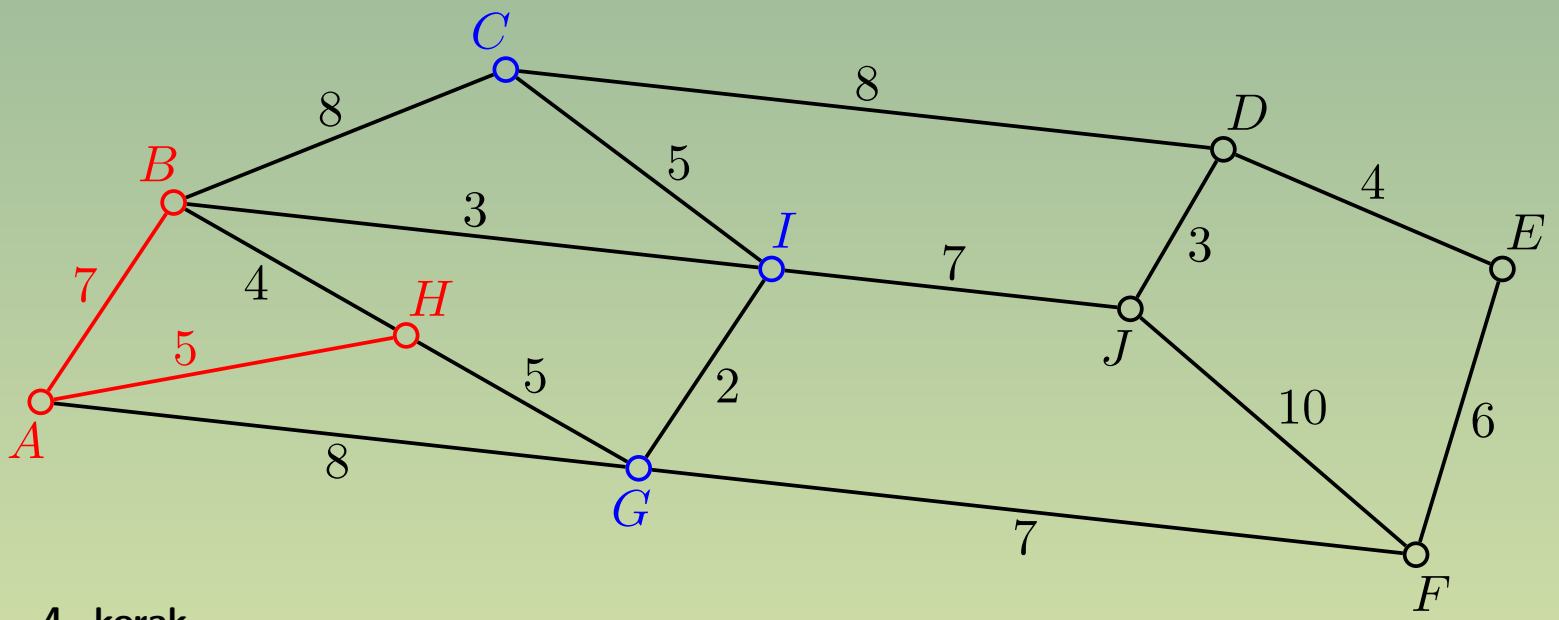
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



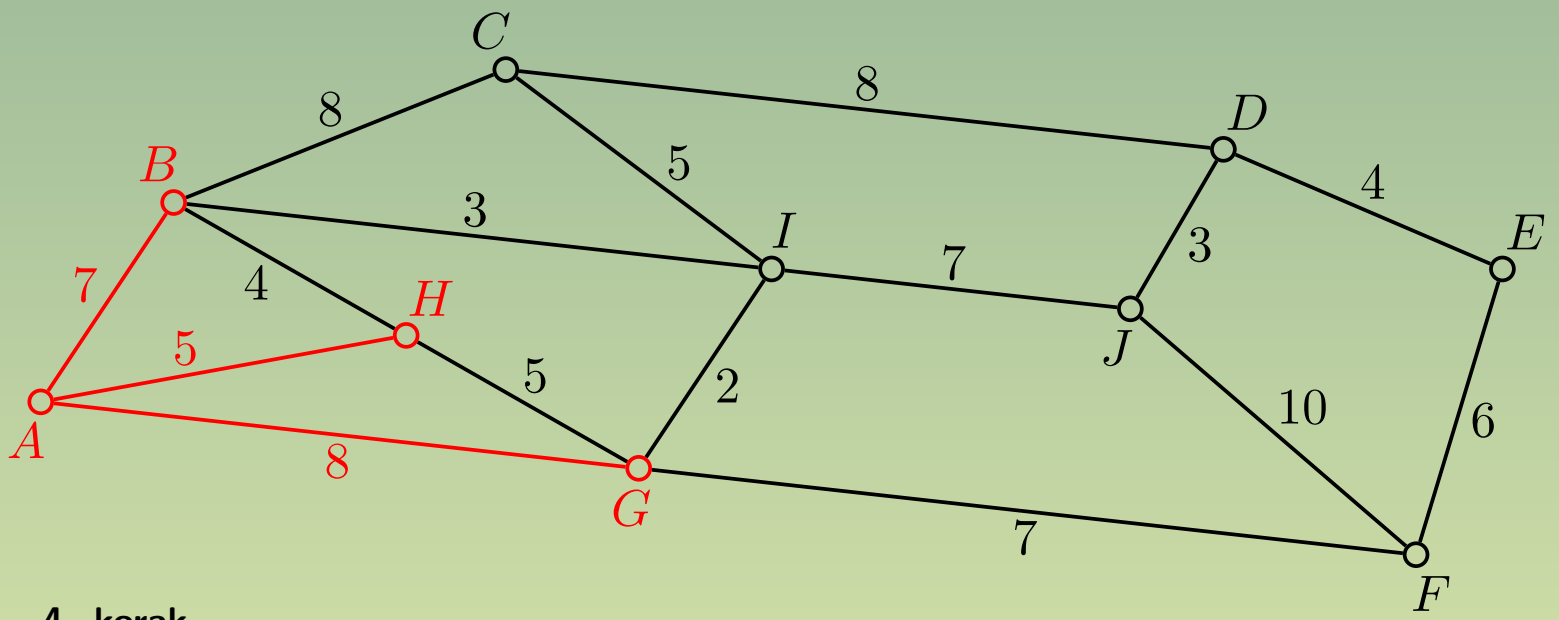
4. korak

označeni vrhovi: $A(-,0)$, $H(A,5)$, $B(A,7)$

Dakle, u ovom koraku imamo $G(A,8)$, $G(H,10)$, $C(B,15)$, $I(B,10)$. Uzimamo vrh s onom oznakom koja ima najmanju drugu koordinatu, a to je u ovom slučaju $G(A,8)$. Stoga u ovom koraku vrh G postaje označeni vrh s oznakom $(A,8)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rješenje.



4. korak

označeni vrhovi: $A(-,0)$, $H(A,5)$, $B(A,7)$, $G(A,8)$

Pri tome nam prva koordinata vrha G omogućuje rekonstrukciju najkraćeg puta od vrha A do vrha G. To je ovdje put GA, odnosno čitano u obrnutom redoslijedu AG, a druga koordinata nam daje duljinu tog najkraćeg puta. Dakle, najkraći put od vrha A do vrha G je put AG i on je duljine 8.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

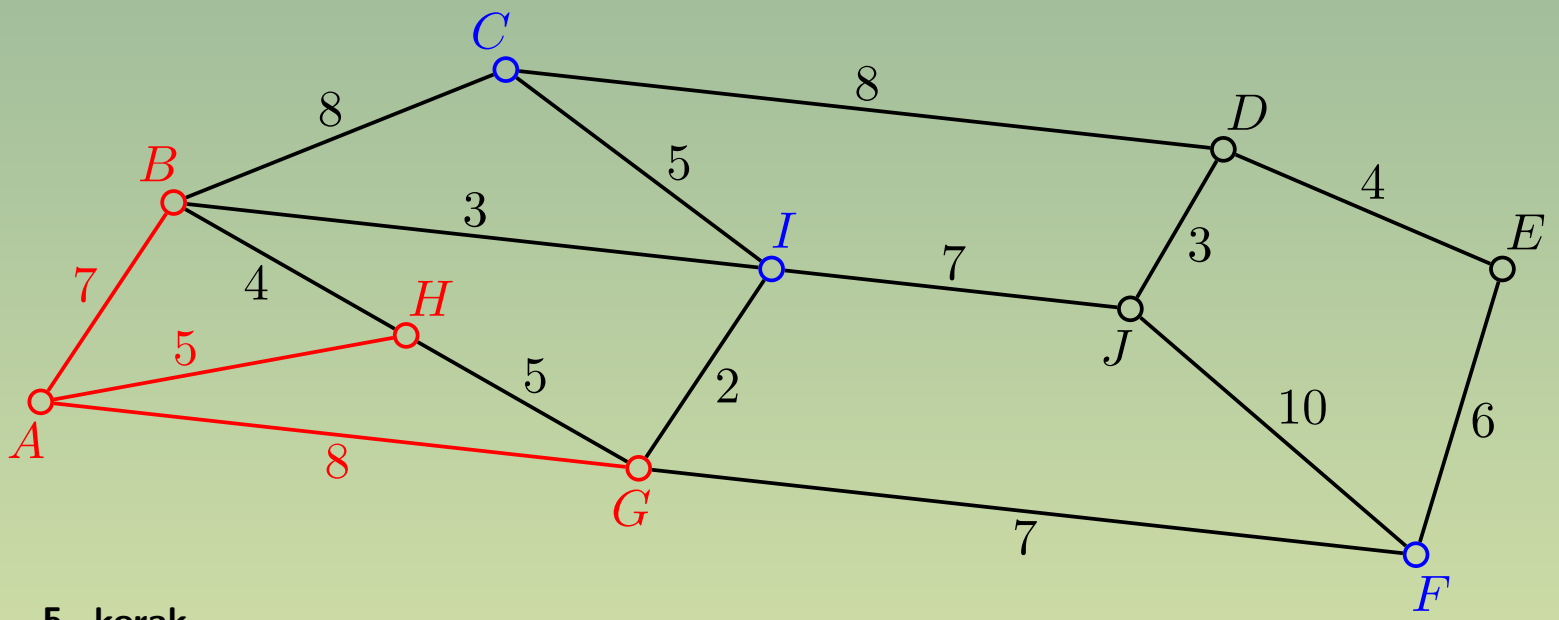
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.

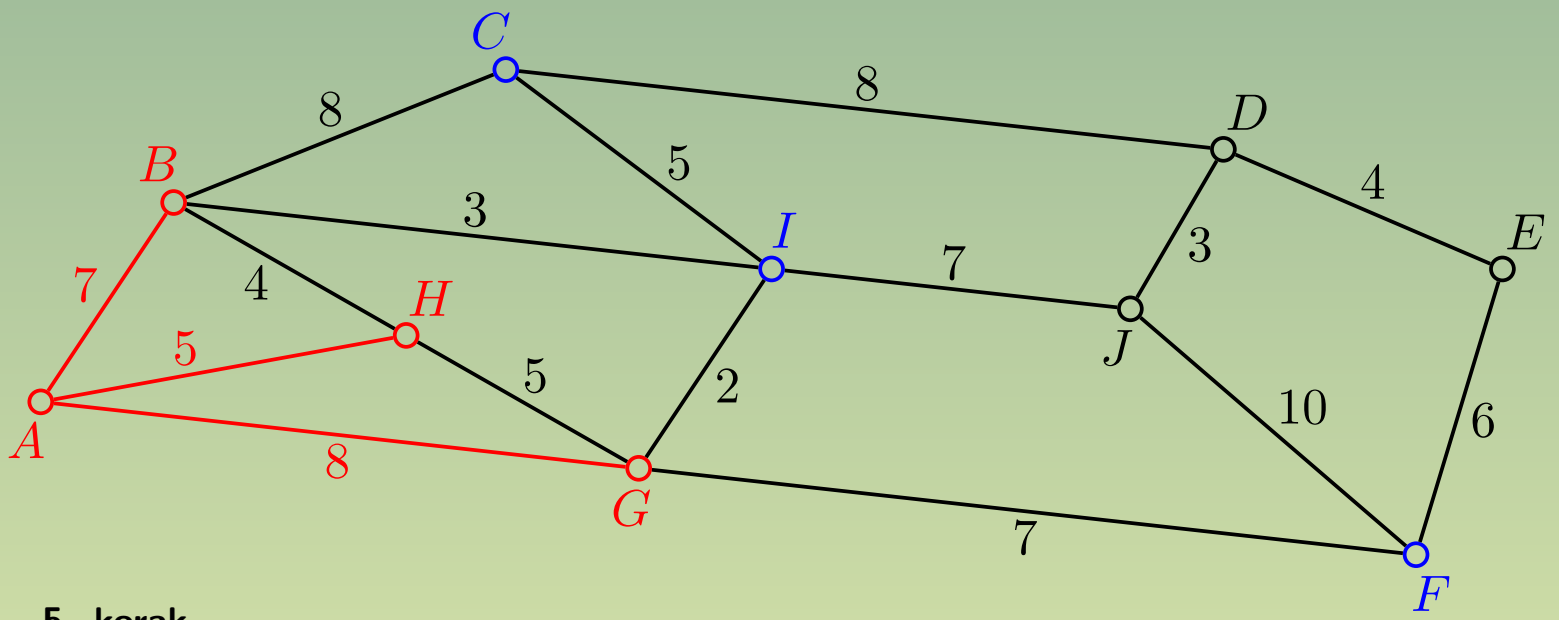


5. korak

označeni vrhovi: $A(-,0)$, $H(A,5)$, $B(A,7)$, $G(A,8)$

Označeni vrhovi su A, H, B i G. Svi susjedni vrhovi vrhova A i H su do sada već označeni pa vrhove A i H više ne treba promatrati. Pogledamo susjedne neoznačene vrhove vrhova B i G. Susjedni neoznačeni vrhovi vrha B su vrhovi C i I. Stoga će prve koordinate njihovih oznaka biti jednake B, a druge koordinate ćemo dobiti tako da drugu koordinatu od B (koja je jednaka 7) zbrojimo s težinama pripadnih bridova koji spajaju vrhove C i I s vrhom B. Stoga dobivamo $C(B,15)$, $I(B,10)$.

Rješenje.



5. korak

označeni vrhovi: $A(-,0)$, $H(A,5)$, $B(A,7)$, $G(A,8)$

Susjedni neoznačeni vrhovi vrha G su vrhovi I i F. Stoga će prve koordinate njihovih oznaka biti jednake G, a druge koordinate ćemo dobiti tako da drugu koordinatu od G (koja je jednaka 8) zbrojimo s težinama pripadnih bridova koji spajaju vrhove I i F s vrhom G. Stoga dobivamo $I(G,10)$, $F(G,15)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

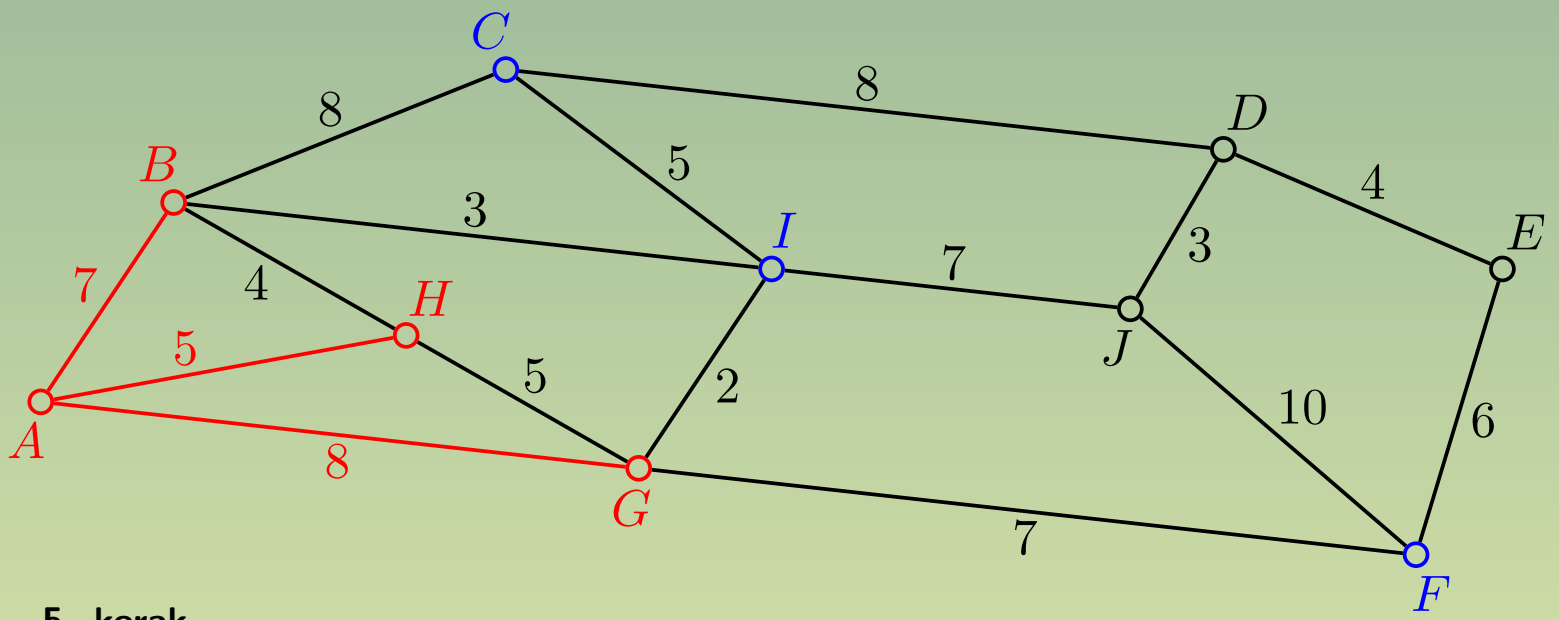
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



5. korak

označeni vrhovi: $A(-,0)$, $H(A,5)$, $B(A,7)$, $G(A,8)$

Dakle, u ovom koraku imamo $C(B,15)$, $I(B,10)$, $I(G,10)$, $F(G,15)$. Uzimamo vrh s onom oznakom koja ima najmanju drugu koordinatu. Međutim, ovdje imamo sada dvije mogućnosti $I(B,10)$ i $I(G,10)$, tj. za vrh I imamo dvije različite oznake s istom drugom minimalnom koordinatom. Odlučimo se za jednu od njih, bilo koju. Uzmimo $I(B,10)$. Dakle, u ovom koraku vrh I postaje označeni vrh s oznakom $(B,10)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

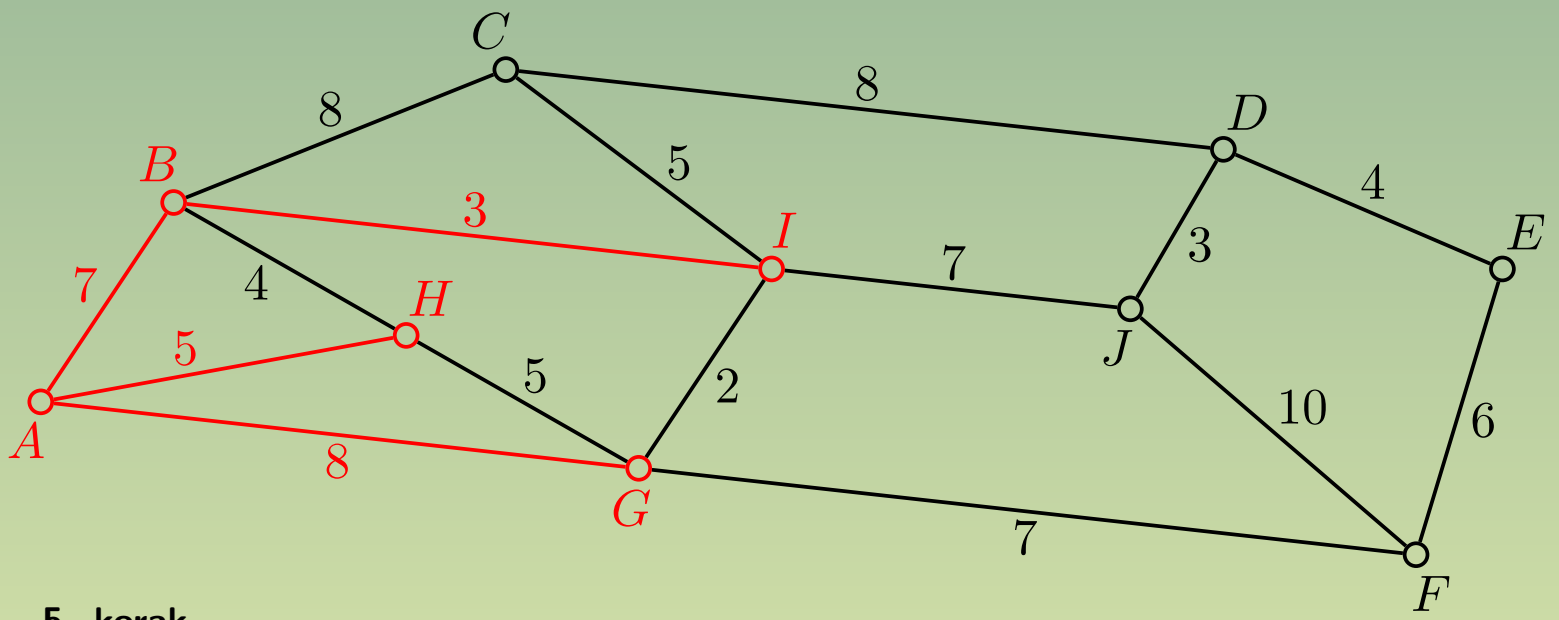
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



5. korak

označeni vrhovi: $A(-,0)$, $H(A,5)$, $B(A,7)$, $G(A,8)$, $I(B,10)$

Pri tome nam prva koordinata vrha I omogućuje rekonstrukciju najkraćeg puta od vrha A do vrha I. Naime, kako je prva koordinata vrha I jednaka B, to znači da je IB dio najkraćeg puta od vrha A do vrha I. Sada pogledamo prvu koordinatu u oznaci vrha B, a ta koordinata je jednaka A. Dakle, IBA odnosno ABI je najkraći put od vrha A do vrha I. Druga koordinata vrha I nam daje duljinu tog najkraćeg puta. Dakle, najkraći put od vrha A do vrha I je put ABI i on je duljine 10.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

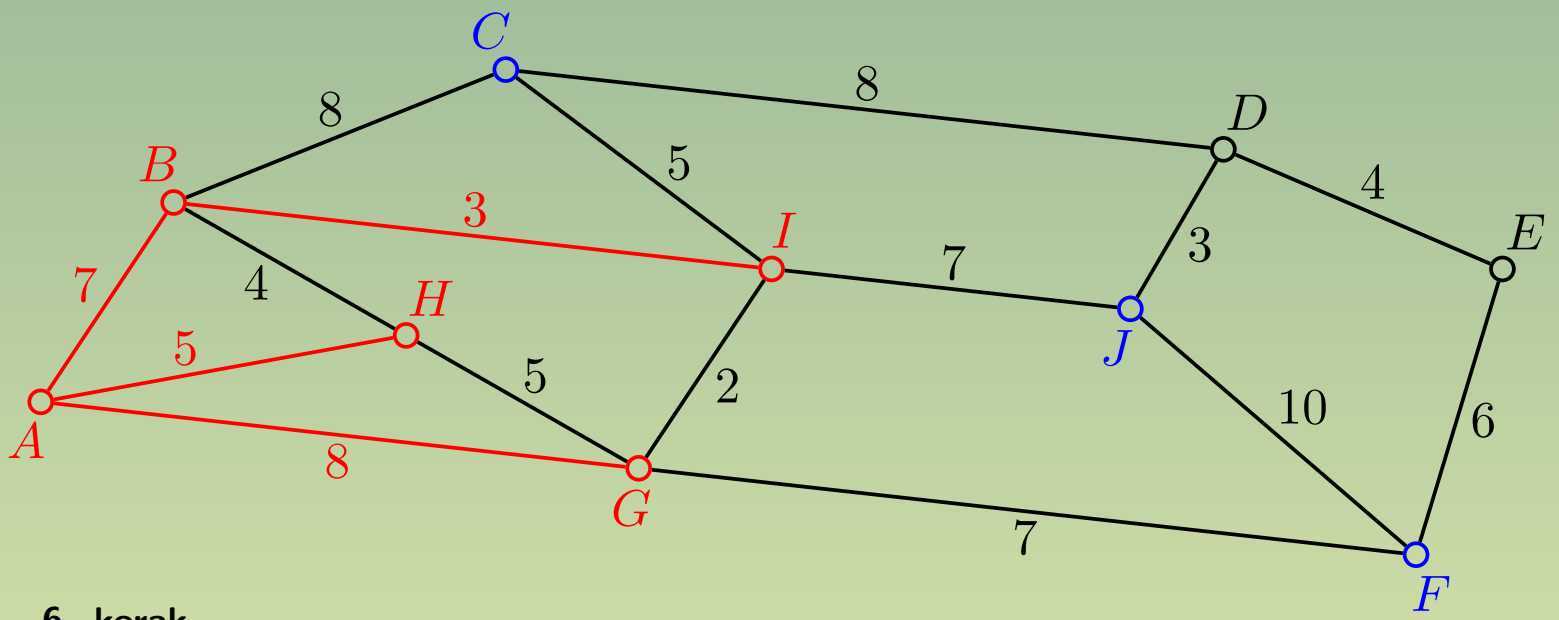
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



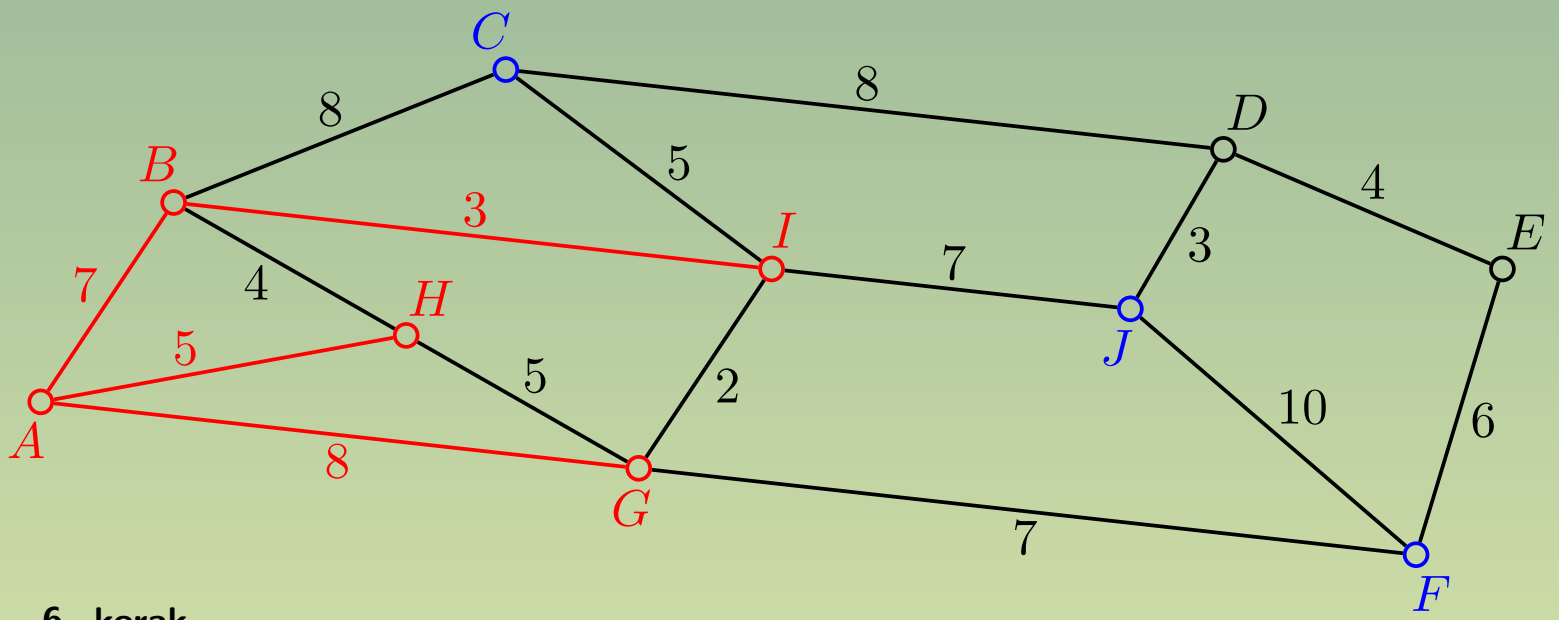
6. korak

označeni vrhovi: $A(-,0)$, $H(A,5)$, $B(A,7)$, $G(A,8)$, $I(B,10)$

Pogledamo označene vrhove B, G i I koji još uvijek imaju susjednih neoznačenih vrhova. Jedini susjedni neoznačeni vrh vrha B je vrh C. Stoga na već opisani način dobivamo $C(B,15)$. Isto tako, jedini neoznačeni susjedni vrh vrha G je vrh F. Stoga je prva koordinata u oznaci od vrha F jednaka G, a drugu koordinatu dobijemo tako da zbrojimo drugu koordinatu vrha G (koja je jednaka 8) s težinom brida koji spaja vrh F s vrhom G. Dobivamo $F(G,15)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rješenje.



6. korak

označeni vrhovi: $A(-,0)$, $H(A,5)$, $B(A,7)$, $G(A,8)$, $I(B,10)$

Susjedni neoznačeni vrhovi vrha I su vrhovi C i J. Stoga će prve koordinate u oznakama tih vrhova biti jednake I, a druge koordinate ćemo dobiti tako da zbrojimo drugu koordinatu vrha I (koja je jednaka 10) s težinama bridova koji spajaju vrhove C i J s vrhom I. Dobivamo $C(I,15)$, $J(I,17)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

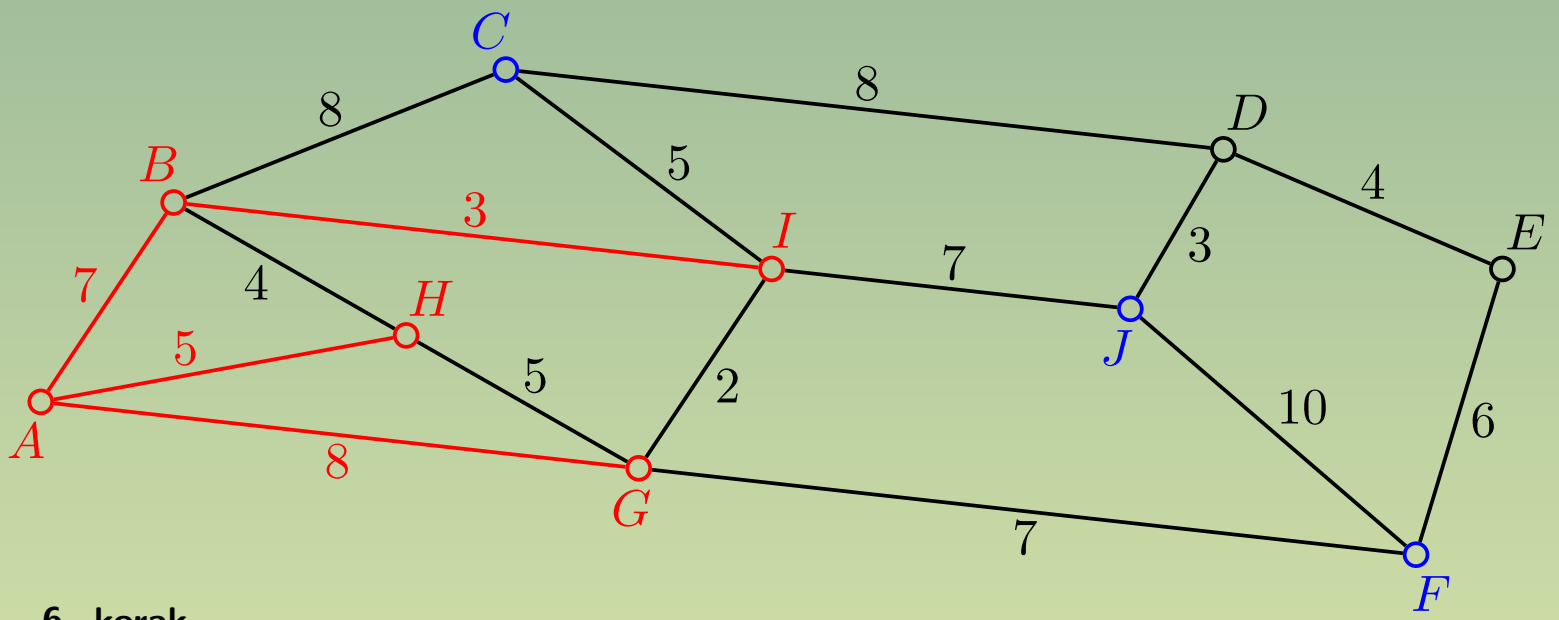
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



6. korak

označeni vrhovi: $A(-,0)$, $H(A,5)$, $B(A,7)$, $G(A,8)$, $I(B,10)$

Dakle, u ovom koraku imamo $C(B,15)$, $F(G,15)$, $C(I,15)$, $J(I,17)$. Uzimamo vrh s onom oznakom koja ima najmanju drugu koordinatu. No, u ovom slučaju imamo dva različita vrha C i F s minimalnom drugom koordinatom pa će oba ova vrha biti označena u ovom koraku. Za vrh C još k tome imamo i dvije moguće oznake $C(B,15)$ i $C(I,15)$. Odlučimo se za $C(B,15)$. Dakle, dobivamo dva nova označena vrha $C(B,15)$ i $F(G,15)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

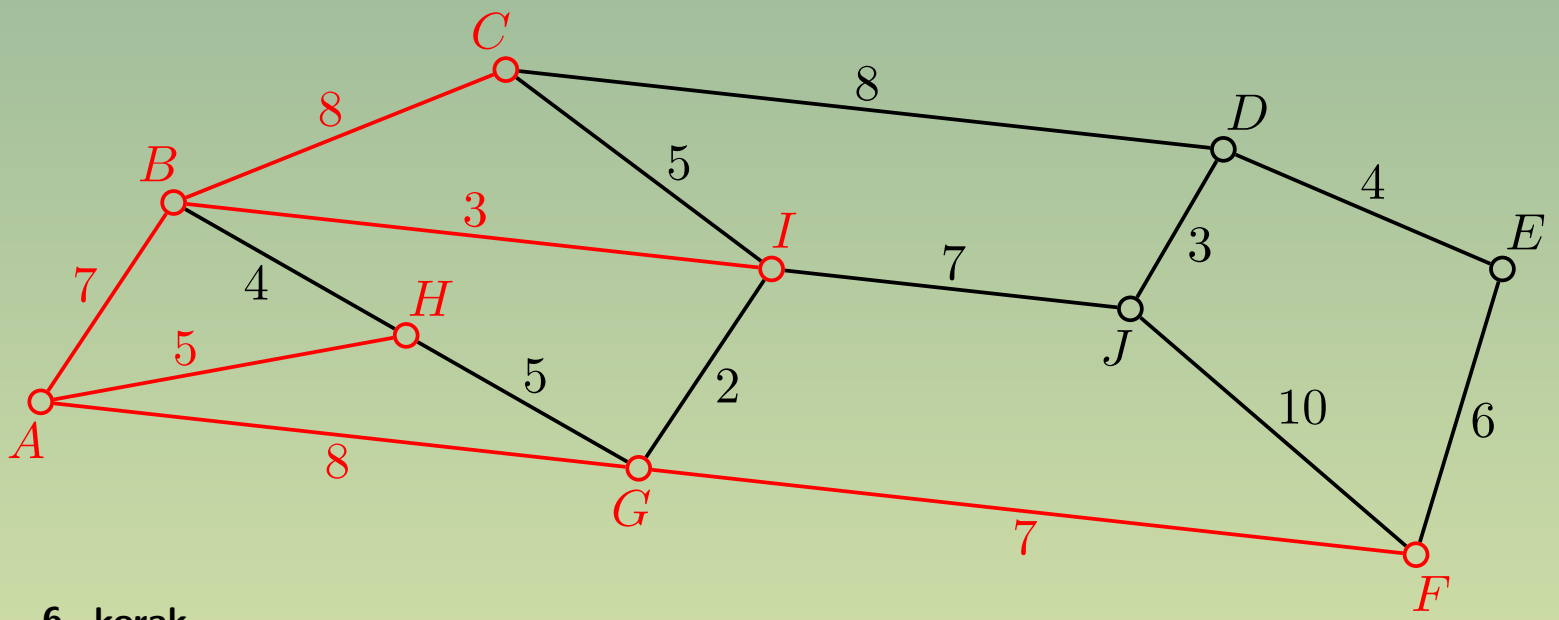
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



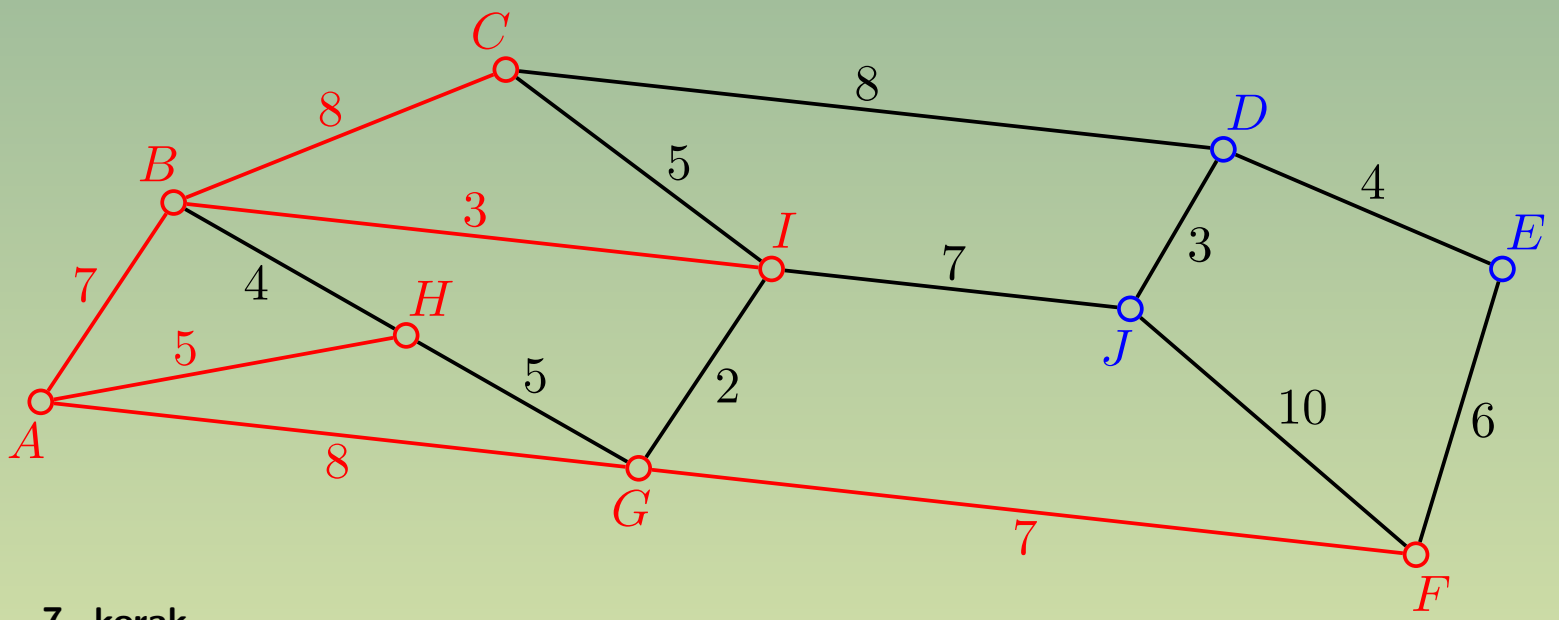
6. korak

označeni vrhovi: $A(-,0)$, $H(A,5)$, $B(A,7)$, $G(A,8)$, $I(B,10)$, $C(B,15)$, $F(G,15)$

Na već prije opisani način zaključujemo da je ABC najkraći put od vrha A do vrha C i duljine je 15. Isto tako, najkraći put od vrha A do vrha F je put AGF koji je isto duljine 15.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rješenje.



7. korak

označeni vrhovi: $A(-,0)$, $H(A,5)$, $B(A,7)$, $G(A,8)$, $I(B,10)$, $C(B,15)$, $F(G,15)$

Pogledamo susjedne neoznačene vrhove označenih vrhova I, C i F. Jedini susjedni neoznačeni vrh vrha I je vrh J. Na već prije opisani način dobivamo $J(I,17)$. Jedini susjedni neoznačeni vrh vrha C je vrh D, pa gledano iz vrha C, prva koordinata oznake vrha D je jednaka C, a druga koordinata jednaka je sumi druge koordinate vrha C (koja je jednaka 15) i težine brida koji spaja vrhove D i C. Dobivamo $D(C,23)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

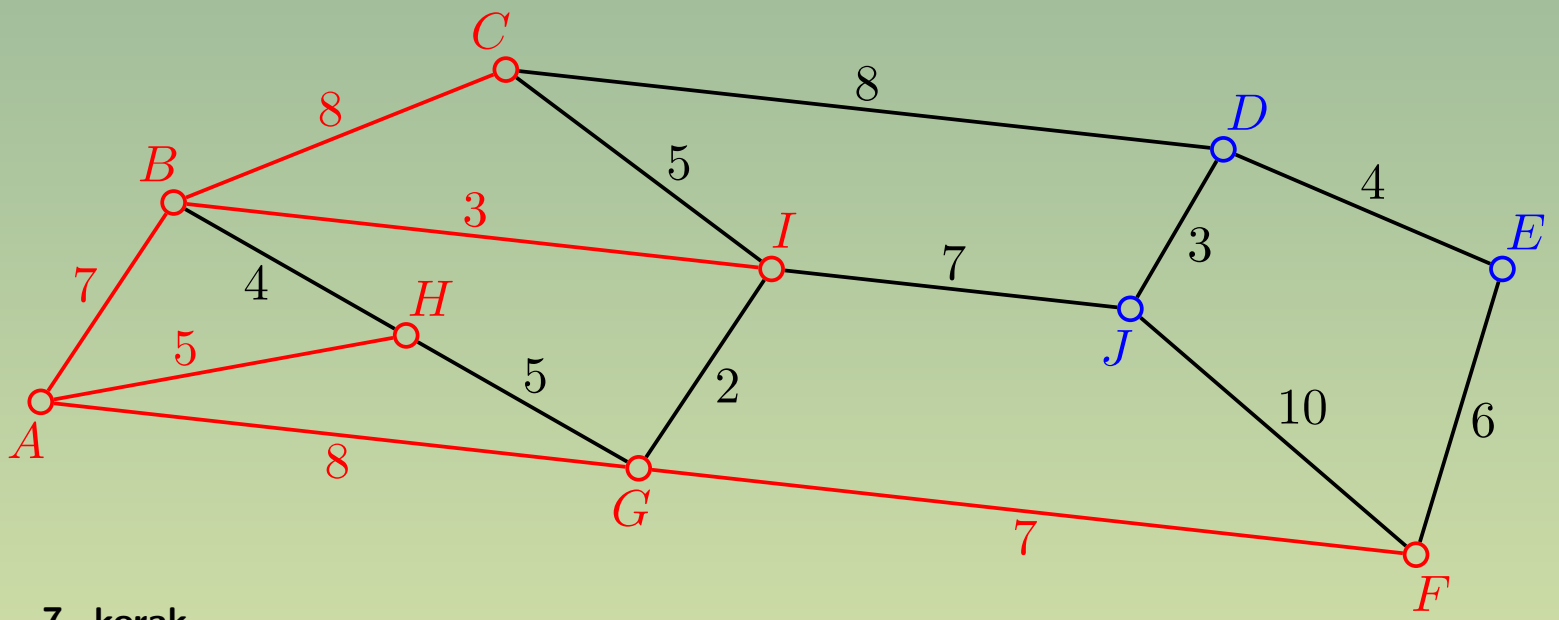
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



7. korak

označeni vrhovi: $A(-,0)$, $H(A,5)$, $B(A,7)$, $G(A,8)$, $I(B,10)$, $C(B,15)$, $F(G,15)$

Susjedni neoznačeni vrhovi vrha F su vrhovi J i E. Kako je druga koordinata kod oznake vrha F jednaka 15, dobivamo $J(F,25)$, $E(F,21)$. Sada među $J(I,17)$, $D(C,23)$, $J(F,25)$, $E(F,21)$ vidimo da $J(I,17)$ je vrh s minimalnom drugom koordinatom 17.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

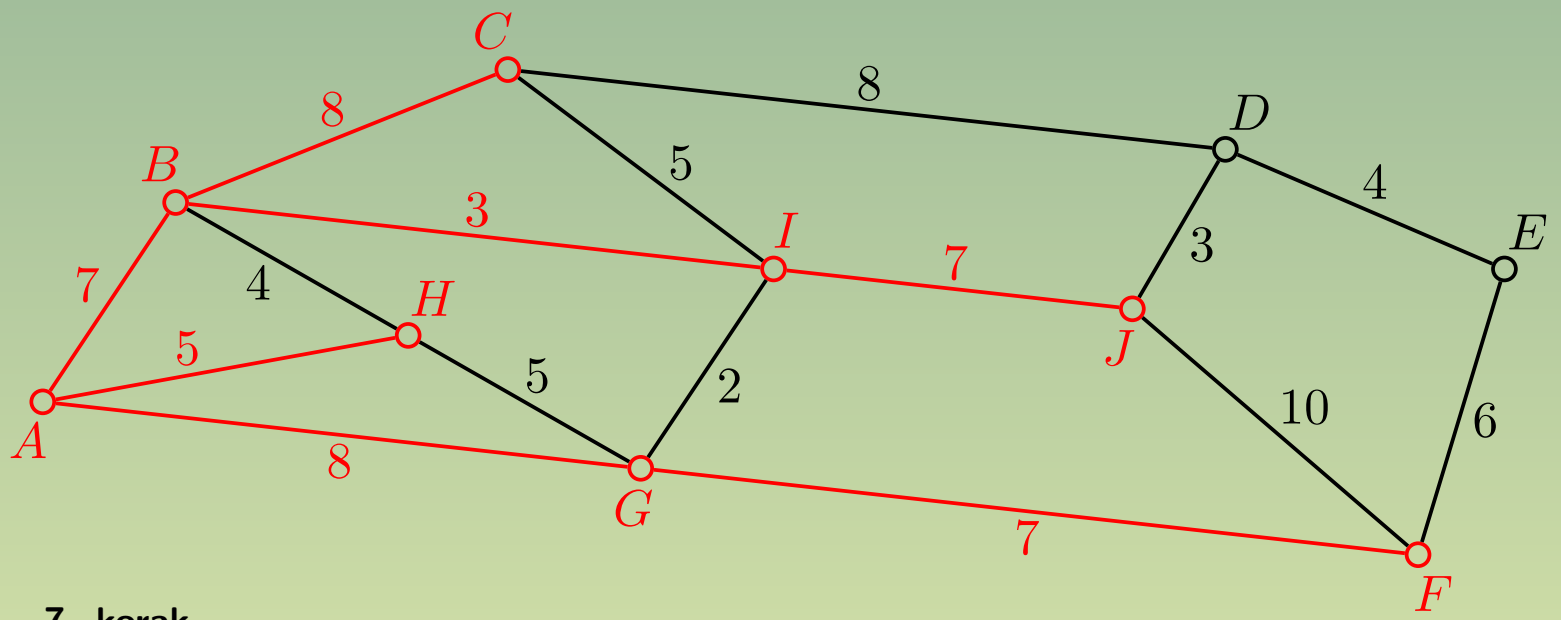
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



7. korak

označeni vrhovi: $A(-,0)$, $H(A,5)$, $B(A,7)$, $G(A,8)$, $I(B,10)$, $C(B,15)$, $F(G,15)$, $J(I,17)$

Stoga u ovom koraku vrh J postaje označeni vrh s oznakom $(I,17)$. Otuda dobivamo da je $ABIJ$ najkraći put od vrha A do vrha J i duljine je 17.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

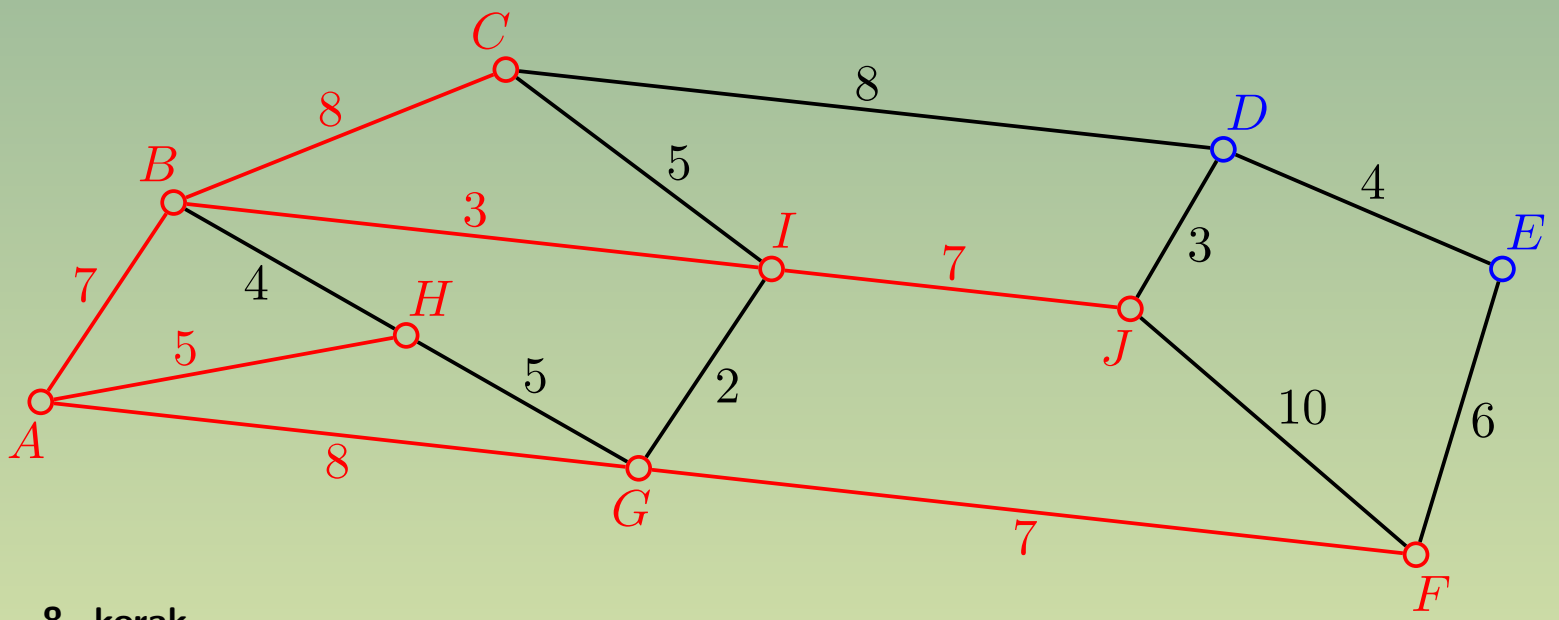
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



8. korak

označeni vrhovi: $A(-,0)$, $H(A,5)$, $B(A,7)$, $G(A,8)$, $I(B,10)$, $C(B,15)$, $F(G,15)$, $J(I,17)$

Vrhovi D i E su jedini neoznačeni vrhovi susjedni nekim od označenih vrhova C, J i F. Na već puno puta opisani način dobivamo $D(C,23)$, $D(J,20)$ i $E(F,21)$. Među tim oznakama tražimo onu s najmanjom drugom koordinatom, a to je $D(J,20)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

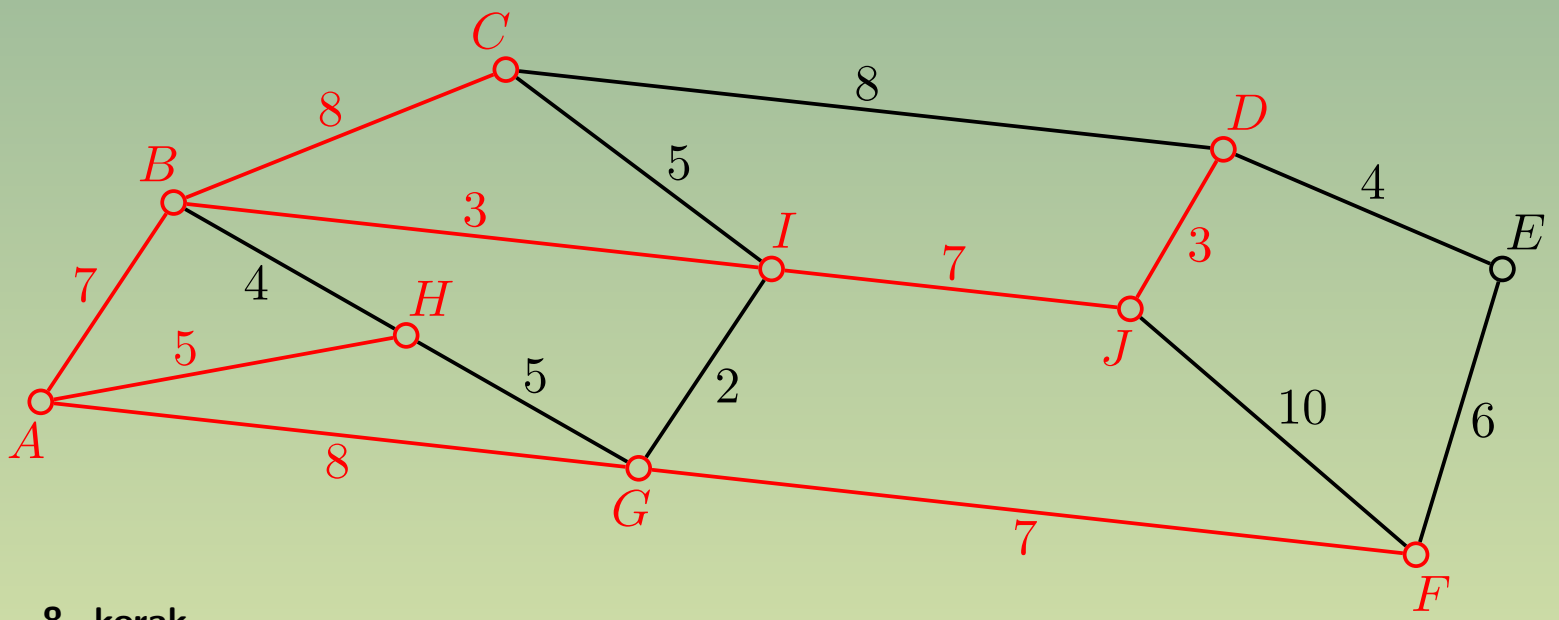
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



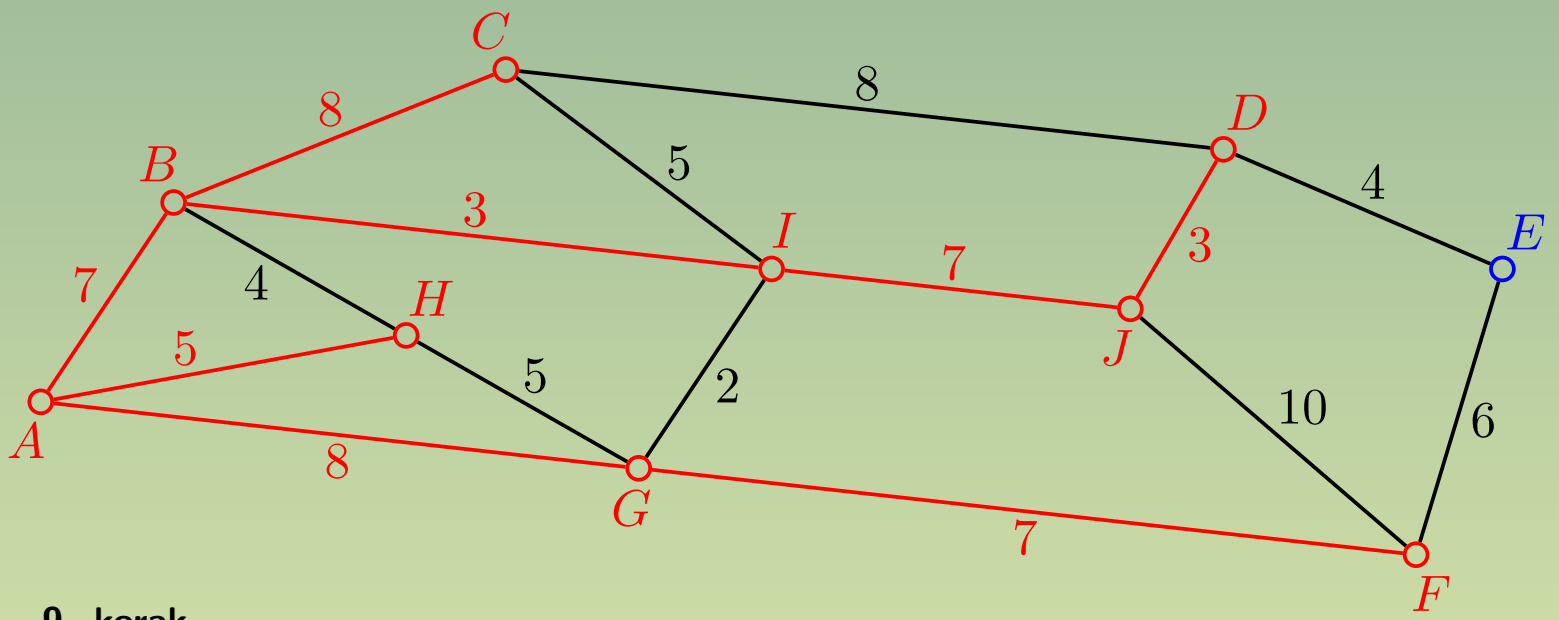
8. korak

označeni vrhovi: $A(-,0)$, $H(A,5)$, $B(A,7)$, $G(A,8)$, $I(B,10)$, $C(B,15)$, $F(G,15)$, $J(I,17)$, $D(J,20)$

Stoga u ovom koraku vrh D postaje označeni vrh s oznakom $(J,20)$. Otuda dobivamo da je $ABIJD$ najkraći put od vrha A do vrha D i duljine je 20.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rješenje.



9. korak

označeni vrhovi: $A(-,0)$, $H(A,5)$, $B(A,7)$, $G(A,8)$, $I(B,10)$, $C(B,15)$, $F(G,15)$, $J(I,17)$, $D(J,20)$

Vrh E je još jedini neoznačeni vrh susjedan označenim vrhovima F i D. Opisanim postupkom dobivamo $E(D,24)$, $E(F,21)$. Oznaka s najmanjom drugom koordinatom je $E(F,21)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

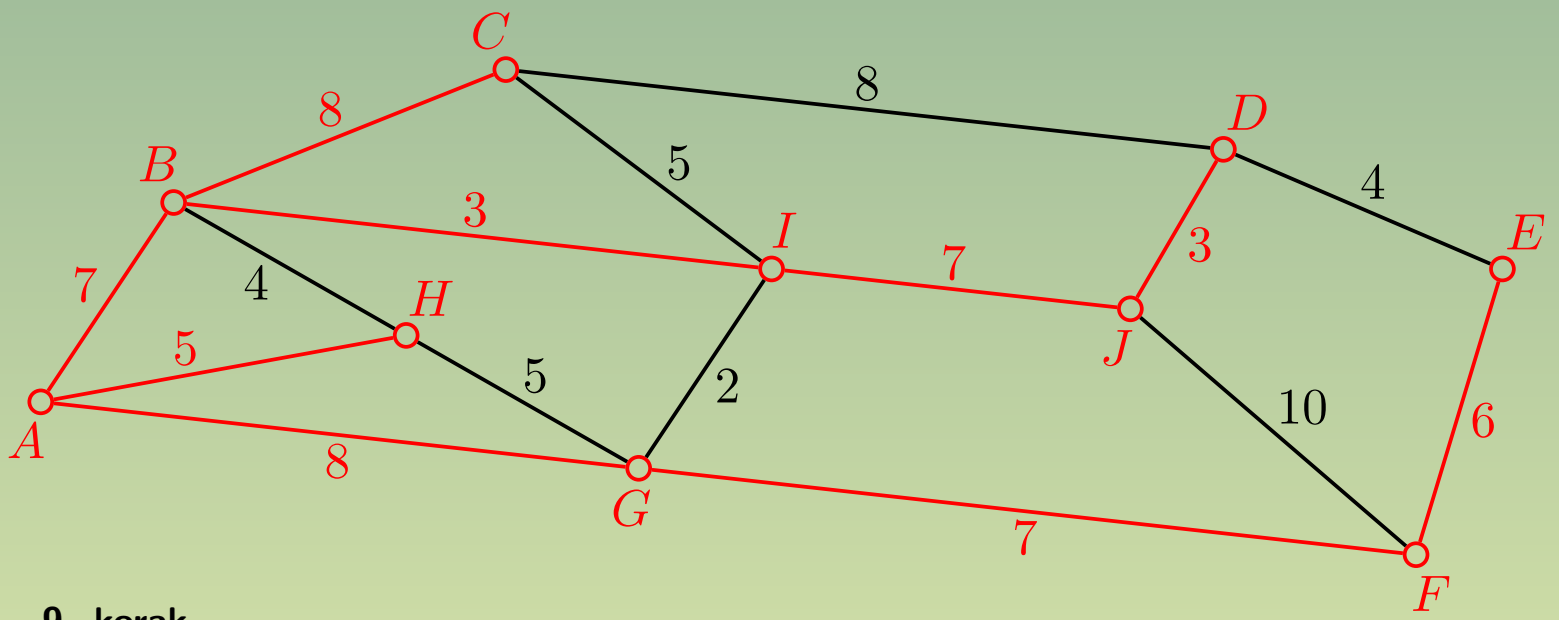
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



9. korak

označeni vrhovi: $A(-,0)$, $H(A,5)$, $B(A,7)$, $G(A,8)$, $I(B,10)$, $C(B,15)$, $F(G,15)$, $J(I,17)$, $D(J,20)$, $E(F,21)$

Stoga u ovom koraku vrh E postaje označeni vrh s oznakom $(F,21)$. Otuda dobivamo da je $AGFE$ najkraći put od vrha A do vrha E i duljine je 21.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

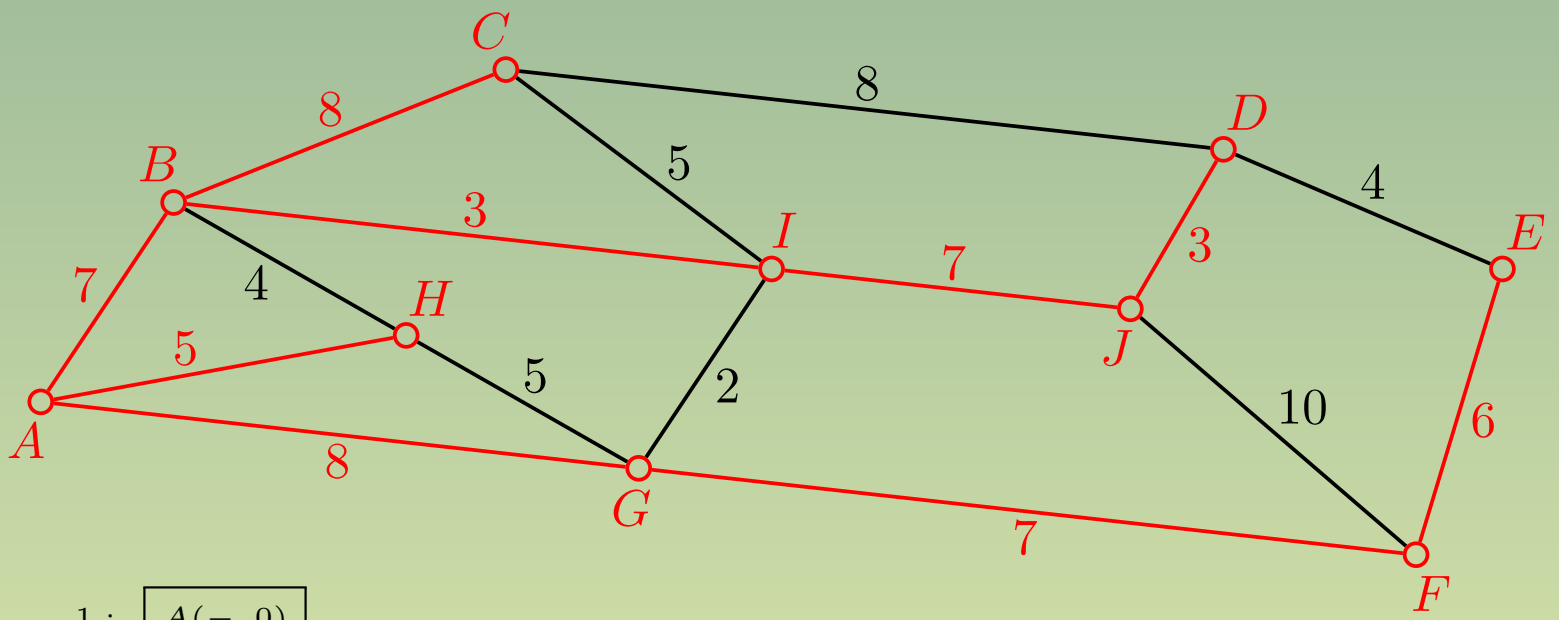
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



1 : $\boxed{A(-,0)}$

2 : $B(A,7)$, $\boxed{H(A,5)}$, $G(A,8)$

3 : $\boxed{B(A,7)}$, $G(A,8)$, $B(H,9)$, $G(H,10)$

4 : $\boxed{G(A,8)}$, $G(H,10)$, $C(B,15)$, $I(B,10)$

5 : $C(B,15)$, $\boxed{I(B,10)}$, $I(G,10)$, $F(G,15)$

6 : $\boxed{C(B,15)}$, $\boxed{F(G,15)}$, $C(I,15)$, $J(I,17)$

7 : $D(C,23)$, $\boxed{J(I,17)}$, $J(F,25)$, $E(F,21)$

8 : $D(C,23)$, $\boxed{D(J,20)}$, $E(F,21)$

9 : $E(D,24)$, $\boxed{E(F,21)}$

◂ objasni postupak

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Složenost Dijkstrinog algoritma

Osnovne operacije koje ćemo prebrojavati su zbrajanje i uspoređivanje. Svaki puta kada ponavljamo 2. korak u algoritmu, jedan ili više novih vrhova dobivaju oznake. Najgori slučaj je ako svaki puta samo jedan vrh dobije oznaku. Pretpostavimo da je u k iteracija k vrhova dobilo oznake. Svaki od tih vrhova je u najgorem slučaju susjedan s $\nu - k$ neoznačenih vrhova. Za svaki takav vrh trebamo jedno zbrajanje, dakle sveukupno $k(\nu - k)$ zbrajanja. Nakon toga treba pronaći najmanji broj u skupu od $k(\nu - k)$ brojeva, a za to nam treba $k(\nu - k) - 1$ uspoređivanja.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Stoga imamo ukupno

$$\sum_{k=1}^{\nu-1} \big(2k(\nu-k)-1\big)$$

operacija, odnosno

$$\sum_{k=1}^{\nu-1} \big(2k(\nu-k)-1\big) = 2\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} k - 2\sum_{k=1}^{\nu-1} k^2 - (\nu-1) =$$

$$= 2\nu \frac{(\nu-1)\nu}{2} - 2\cdot\frac{1}{6}(\nu-1)\nu(2\nu-1) - \nu + 1 =$$

$$= \frac{1}{3}\nu^3 - \frac{4}{3}\nu + 1 = O\big(\nu^3\big)$$

Dakle, složenost Dijkstrinog algoritma je $O\big(\nu^3\big)$, gdje je ν broj vrhova grafa.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Poboljšani Dijkstrin algoritam

Da bi se prilikom računanja minimuma u svakom koraku izbjegla nepotrebna ponavljanja mnogih usporedbi, uvodi se sljedeći proces označavanja. Na početku se vrhu u_0 daje trajna oznaka 0, a svim ostalim vrhovima privremena oznaka ∞. U svakom se koraku privremene oznake smanjuju ili ostaju nepromijenjene, a jednom vrhu v se pridruži trajna oznaka, i to najkraća udaljenost od vrha u_0 do vrha v. To se ponavlja sve dok se ne dođe do željenog vrha v_0 ili pak dok se ne označe trajno svi vrhovi ili nisu moguće daljnje oznake (jer graf možda nije povezan).

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Poboljšani Dijkstrin algoritam

ULAZ: Težinski graf $G = (V, E)$ i dva vrha u_0, v_0
IZLAZ: Duljina najkraćeg puta od u_0 do v_0

1: Stavi $v_1 = u_0$ i pridruži tom vrhu trajnu oznaku 0. Svakom drugom vrhu pridruži privremenu oznaku ∞.

2: Sve dok vrh v_0 nema trajnu oznaku ili nisu moguće daljnje promjene privremenih oznaka, radi sljedeće:

   a) Uzmi vrh v_i koji je posljednji dobio trajnu oznaku, npr. d. Za svaki vrh v s privremenom oznakom t koji je susjedan s vrhom v_i, ako je $d + w(v_i v) < t$, zamijeni oznaku vrha v sa $d + w(v_i v)$.

   b) Uzmi vrh v koji ima najmanju privremenu oznaku između svih privremenih oznaka vrhova u grafu. Stavi $v_{i+1} = v$ i stavi da je njegova oznaka trajna. Ako ima više vrhova v s istom najmanjom privremenom oznakom, odaberi po volji jednog od njih.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

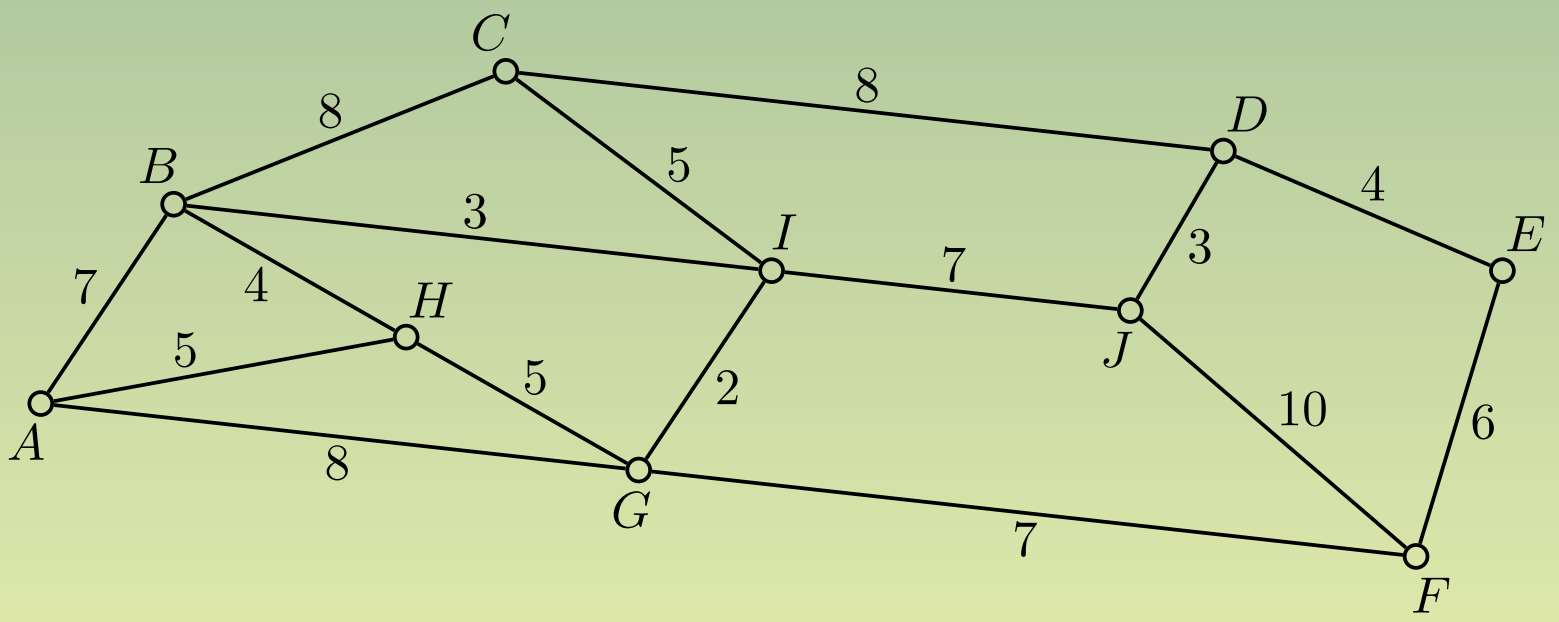
Napomena.

Ako i poboljšani Dijkstrin algoritam pustimo da radi tako dugo dok svi vrhovi u grafu ne dobiju trajne oznake, dobit ćemo duljine najkraćih putova od vrha u_0 do svih drugih vrhova u težinskom grafu. Uočimo da poboljšani Dijkstrin algoritam daje samo duljinu najkraćeg puta između dva vrha. Želimo li rekonstruirati i najkraći put, moramo još svakom vrhu osim trajne oznake pridružiti i vrh v_l preko kojeg je dobio trajnu oznaku.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.41.

Pomoću poboljšanog Dijkstrinog algoritma odredite najkraće putove od vrha A prema ostalim vrhovima u težinskom grafu



Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

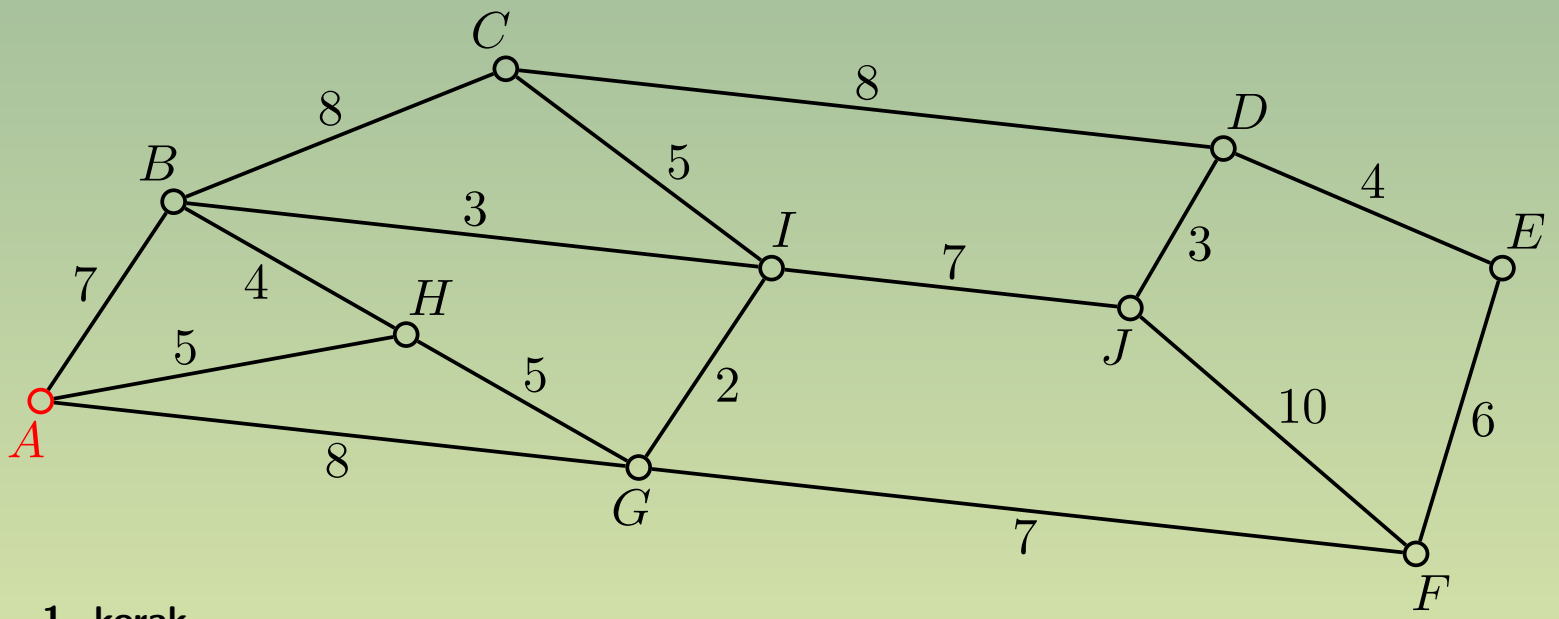
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



1. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $B(\infty)$, $C(\infty)$, $D(\infty)$, $E(\infty)$,

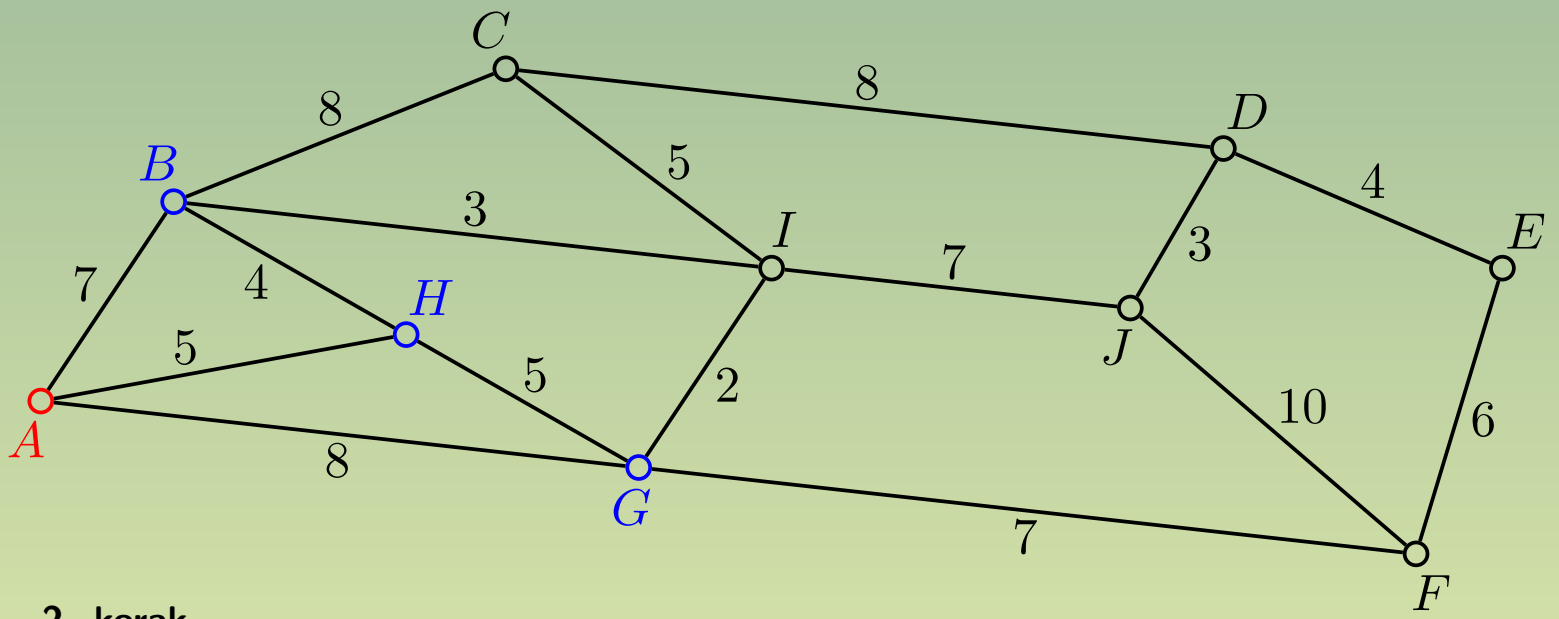
$F(\infty)$, $G(\infty)$, $H(\infty)$, $I(\infty)$, $J(\infty)$

Početnom vrhu A pridružimo trajnu oznaku 0 i stavimo $v_1 = A$. Ostalim vrhovima pridružimo privremenu oznaku ∞.

Konačno rješenje

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rješenje.



2. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $B(\infty)$, $C(\infty)$, $D(\infty)$, $E(\infty)$,

$F(\infty)$, $G(\infty)$, $H(\infty)$, $I(\infty)$, $J(\infty)$

Pogledamo susjedne vrhove vrha v_1 koji još uvijek imaju privremene oznake. To su vrhovi B, H i G. Kako je privremena oznaka vrha B veća od sume oznake vrha v_1 i težine brida koji spaja vrh B s vrhom v_1, mijenjamo privremenu oznaku vrha B s tom sumom. Stoga dobivamo $B(v_1, 7)$. Slično dobivamo i $H(v_1, 5)$, $G(v_1, 8)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

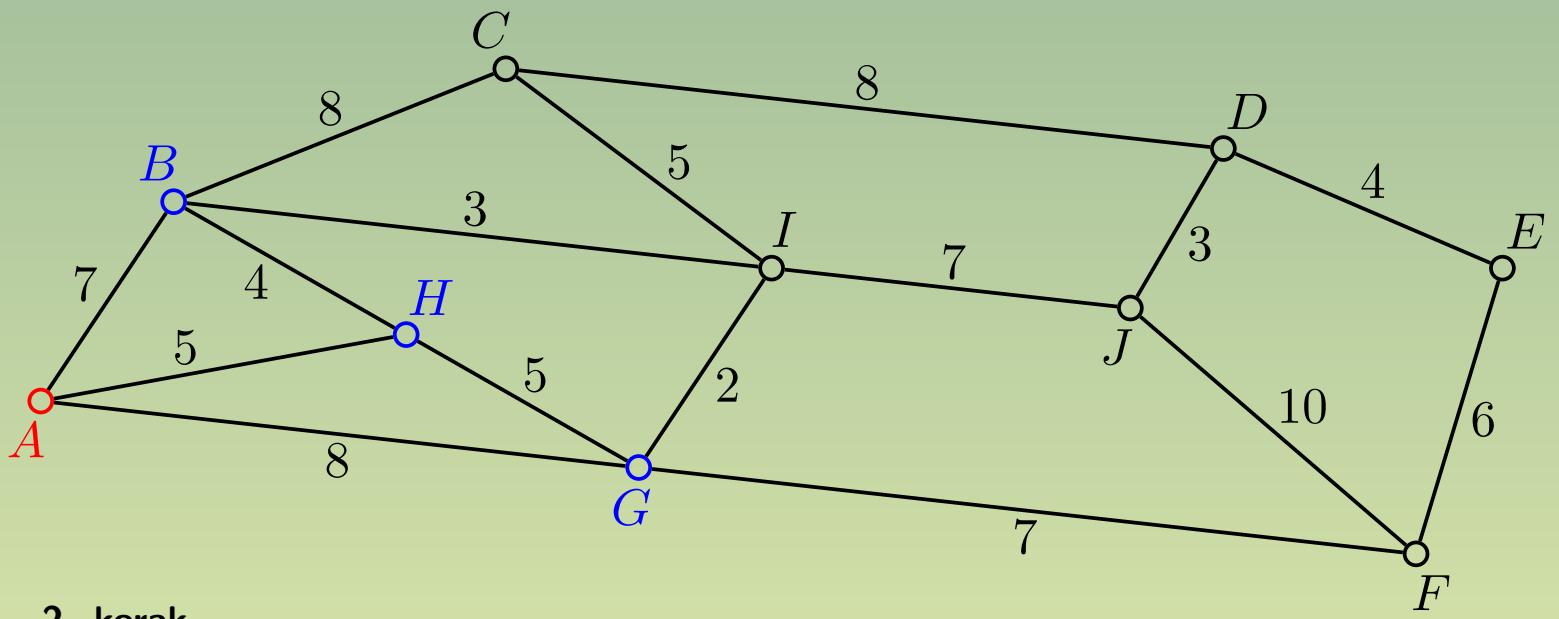
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



2. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $B(v_1, 7)$, $C(\infty)$, $D(\infty)$, $E(\infty)$,

$F(\infty)$, $G(v_1, 8)$, $H(v_1, 5)$, $I(\infty)$, $J(\infty)$

Usput kod oznake pojedinog vrha spremamo i vrh preko kojeg je promatrani vrh dobio privremenu oznaku da bismo mogli rekonstruirati i najkraći put. Ako nam je samo bitna duljina najkraćeg puta, onda taj vrh ne treba spremati. Sada u grafu odaberemo vrh s najmanjom privremenom oznakom. To je ovdje vrh $H(v_1, 5)$. Stavimo da je $v_2 = H(v_1, 5)$ i stavimo da je oznaka vrha $v_2 = H$ trajna.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

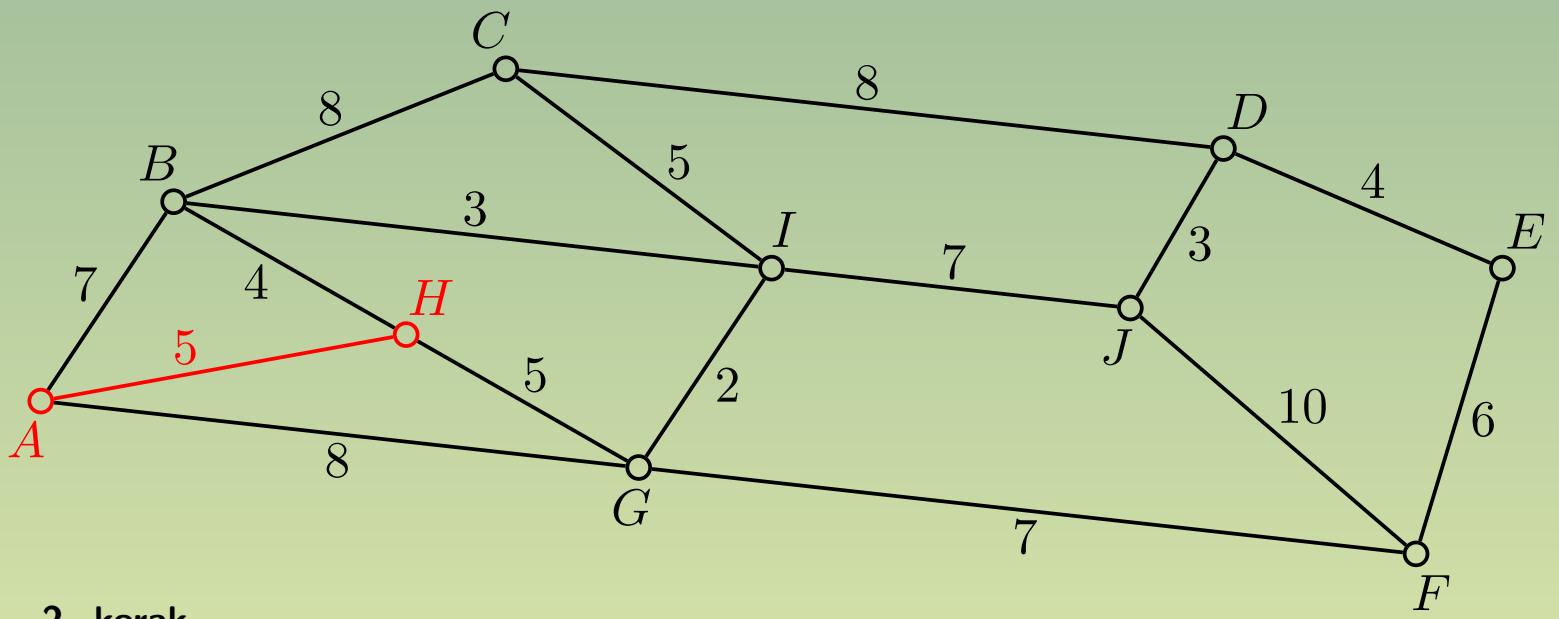
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



2. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $B(v_1, 7)$, $C(\infty)$, $D(\infty)$, $E(\infty)$,

$F(\infty)$, $G(v_1, 8)$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $I(\infty)$, $J(\infty)$

Dakle, najkraći put od vrha A do vrha H je put AH i on je duljine 5.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

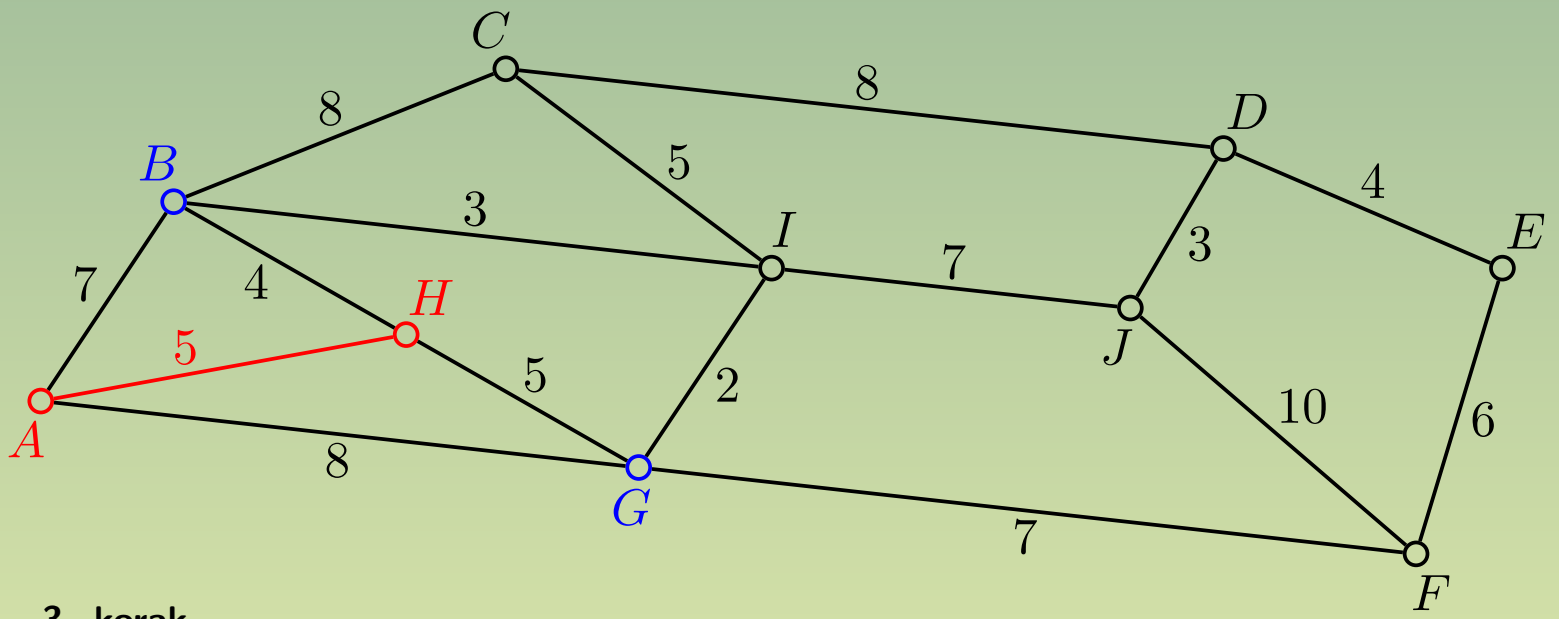
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



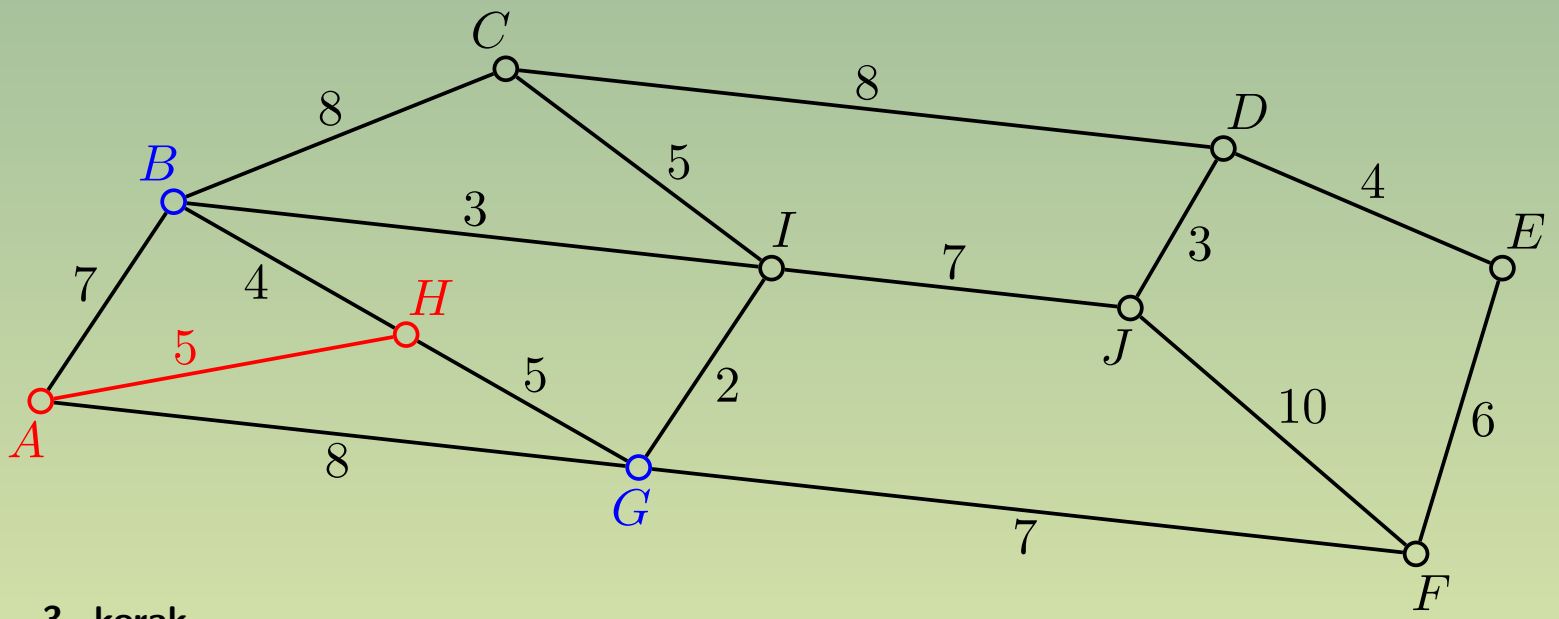
3. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $B(v_1, 7)$, $C(\infty)$, $D(\infty)$, $E(\infty)$,

$F(\infty)$, $G(v_1, 8)$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $I(\infty)$, $J(\infty)$

Pogledamo susjedne vrhove vrha v_2 koji još uvijek imaju privremene oznake. To su vrhovi B i G. Usporedimo li privremenu oznaku vrha B sa sumom oznake vrha v_2 (koja je jednaka 5) i težine brida koji spaja vrh B s v_2 dobivamo $7 < 5 + 4$, tj. privremena oznaka vrha B je manja od te sume pa vrh B i dalje ima tu istu privremenu oznaku $B(v_1, 7)$. Analogno, za vrh G imamo $8 < 5 + 5$ pa je i dalje $G(v_1, 8)$.

Rješenje.



3. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $B(v_1, 7)$, $C(\infty)$, $D(\infty)$, $E(\infty)$,

$F(\infty)$, $G(v_1, 8)$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $I(\infty)$, $J(\infty)$

Sada u grafu odaberemo vrh s najmanjom privremenom oznakom. To je ovdje vrh $B(v_1, 7)$. Stavimo da je $v_3 = B(v_1, 7)$ i stavimo da je oznaka vrha v_3 trajna.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

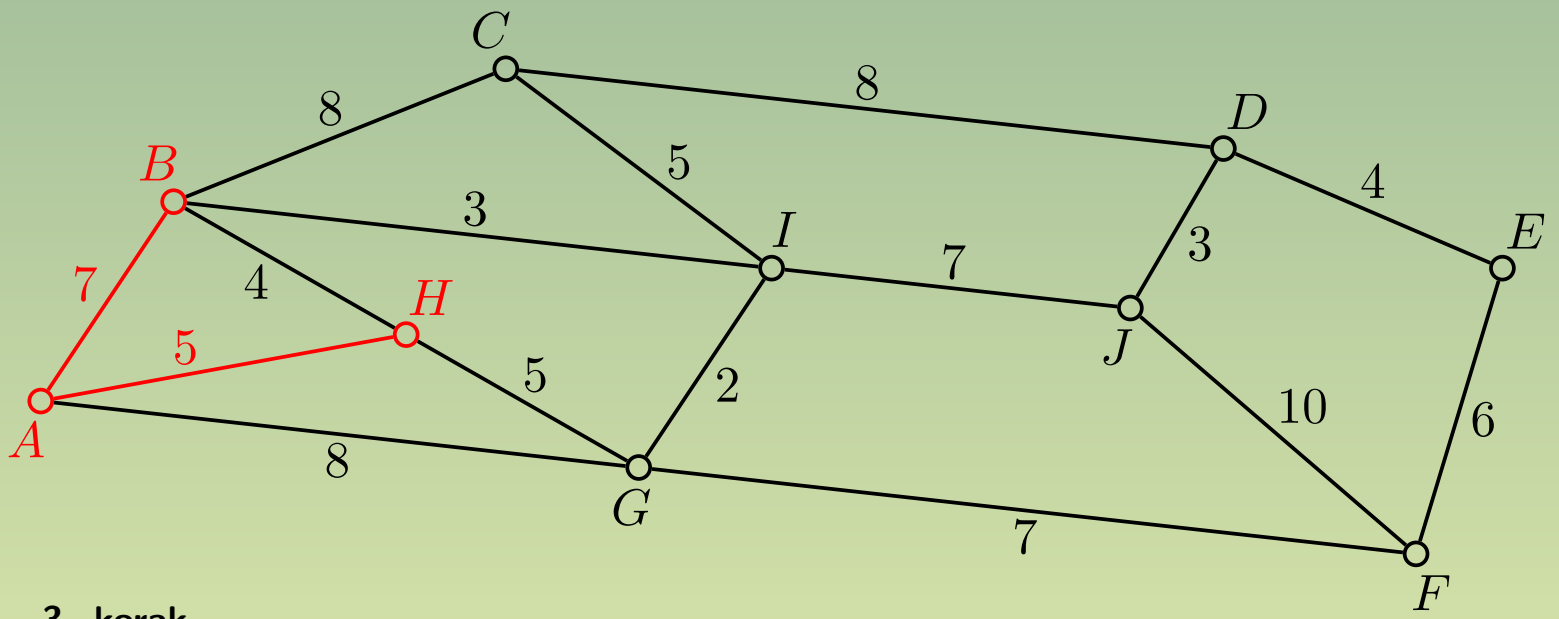
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



3. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $\boxed{v_3 = B(v_1, 7)}$, $C(\infty)$, $D(\infty)$, $E(\infty)$,

$F(\infty)$, $G(v_1, 8)$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $I(\infty)$, $J(\infty)$

Dakle, najkraći put od vrha A do vrha B je put AB i on je duljine 7.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

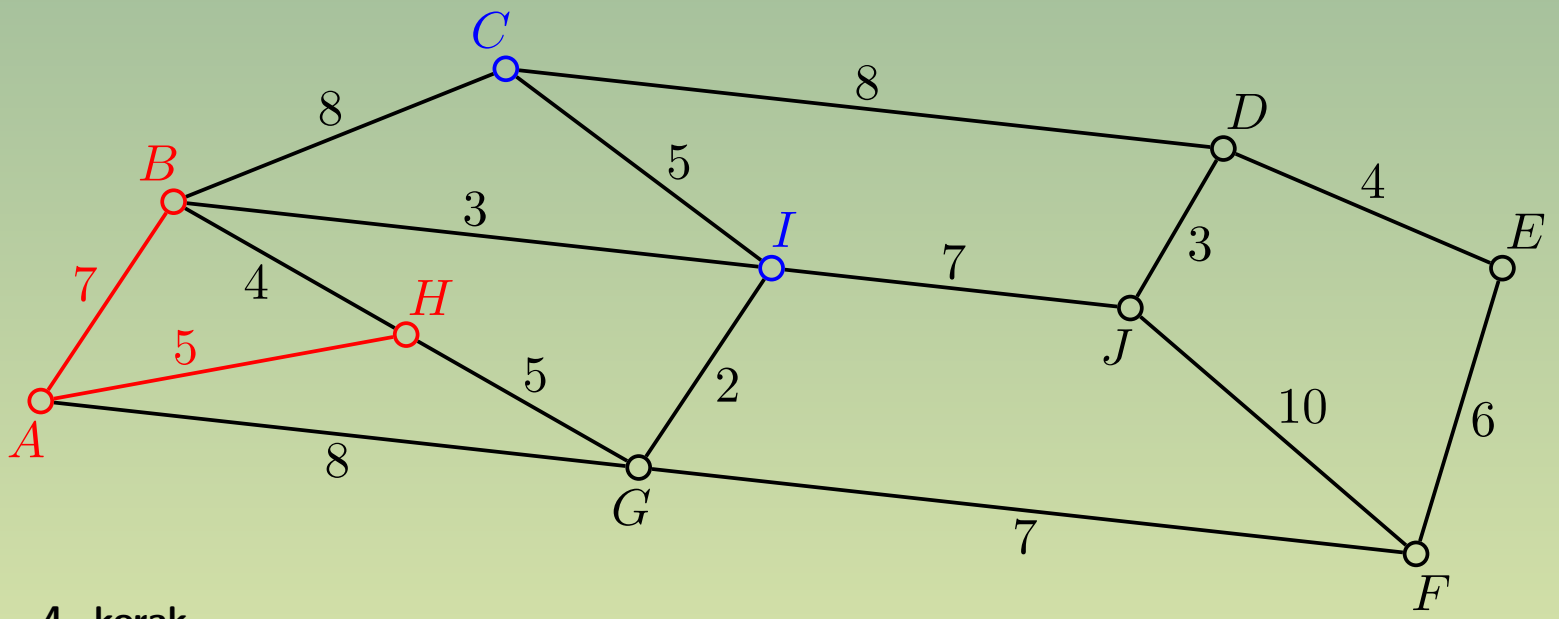
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



4. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $\boxed{v_3 = B(v_1, 7)}$, $C(\infty)$, $D(\infty)$, $E(\infty)$,

$F(\infty)$, $G(v_1, 8)$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $I(\infty)$, $J(\infty)$

Pogledamo susjedne vrhove vrha v_3 koji još uvijek imaju privremene oznake. To su vrhovi C i I. Usporedimo li privremenu oznaku vrha C sa sumom oznake vrha v_3 (koja je jednaka 7) i težine brida koji spaja vrh C sa v_3 dobivamo $8 + 7 < \infty$, pa vrh C dobiva novu privremenu oznaku $C(v_3, 15)$. Analogno, zbog $7 + 3 < \infty$, vrh I dobiva novu privremenu oznaku $I(v_3, 10)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

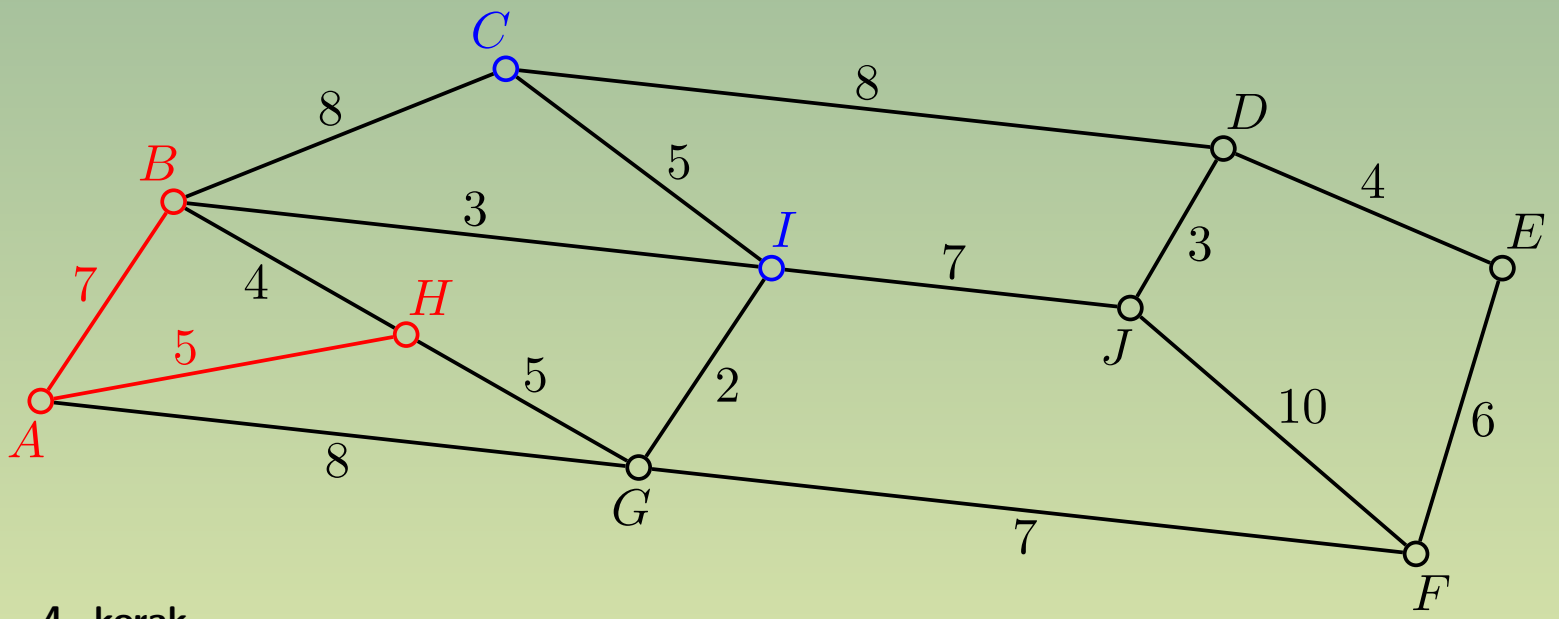
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



4. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $\boxed{v_3 = B(v_1, 7)}$, $C(v_3, 15)$, $D(\infty)$, $E(\infty)$,

$F(\infty)$, $G(v_1, 8)$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $I(v_3, 10)$, $J(\infty)$

Sada u grafu odaberemo vrh s najmanjom privremenom oznakom. To je ovdje vrh $G(v_1, 8)$. Stavimo da je $v_4 = G(v_1, 8)$ i stavimo da je oznaka vrha v_4 trajna.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

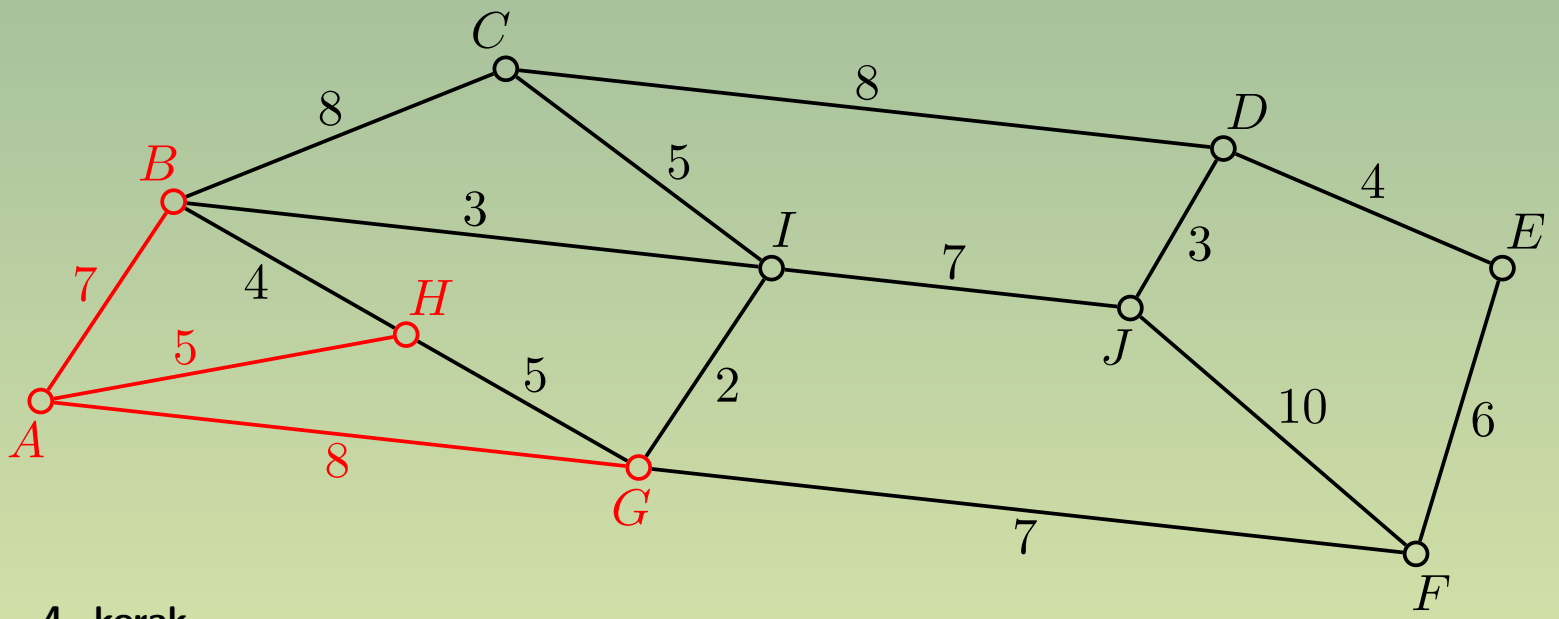
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



4. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $\boxed{v_3 = B(v_1, 7)}$, $C(v_3, 15)$, $D(\infty)$, $E(\infty)$,

$F(\infty)$, $\boxed{v_4 = G(v_1, 8)}$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $I(v_3, 10)$, $J(\infty)$

Dakle, najkraći put od vrha A do vrha G je put AG i on je duljine 8.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

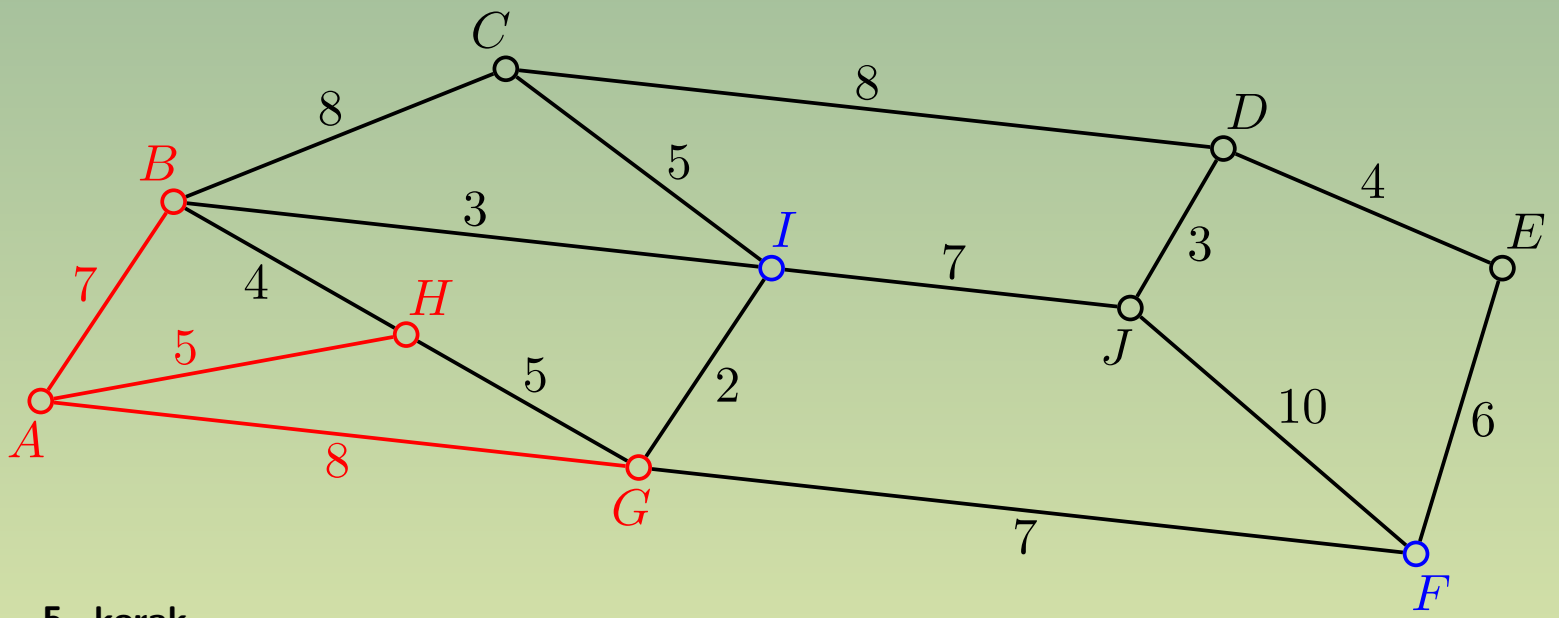
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



5. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $\boxed{v_3 = B(v_1, 7)}$, $C(v_3, 15)$, $D(\infty)$, $E(\infty)$,

$F(\infty)$, $\boxed{v_4 = G(v_1, 8)}$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $I(v_3, 10)$, $J(\infty)$

Pogledamo susjedne vrhove vrha v_4 koji još uvijek imaju privremene oznake. To su vrhovi F i I. Usporedimo li privremenu oznaku vrha I sa sumom oznake vrha v_4 (koja je jednaka 8) i težine brida koji spaja vrh I sa v_4 dobivamo $8 + 2 = 10$, pa vrh I i dalje ima privremenu oznaku $I(v_3, 10)$. Analogno, za vrh F zbog $8 + 7 < \infty$, vrh F dobiva novu privremenu oznaku $F(v_4, 15)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

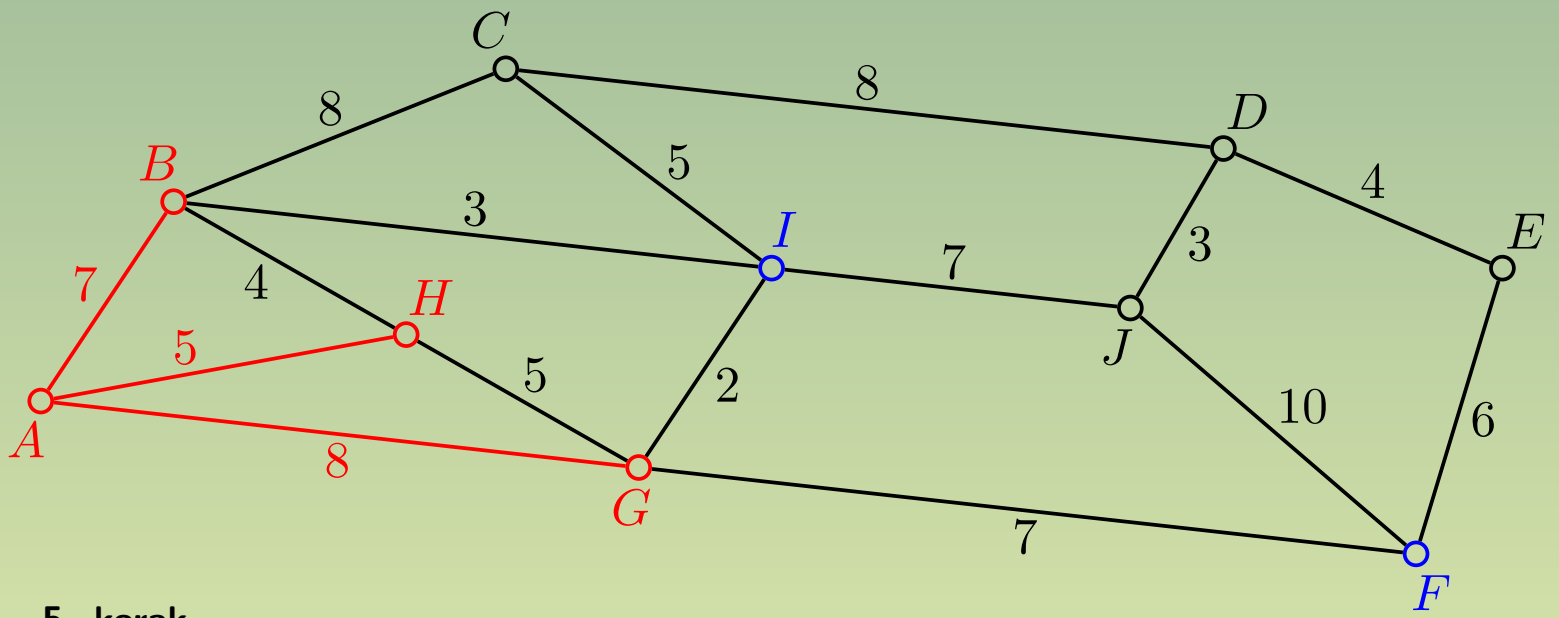
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



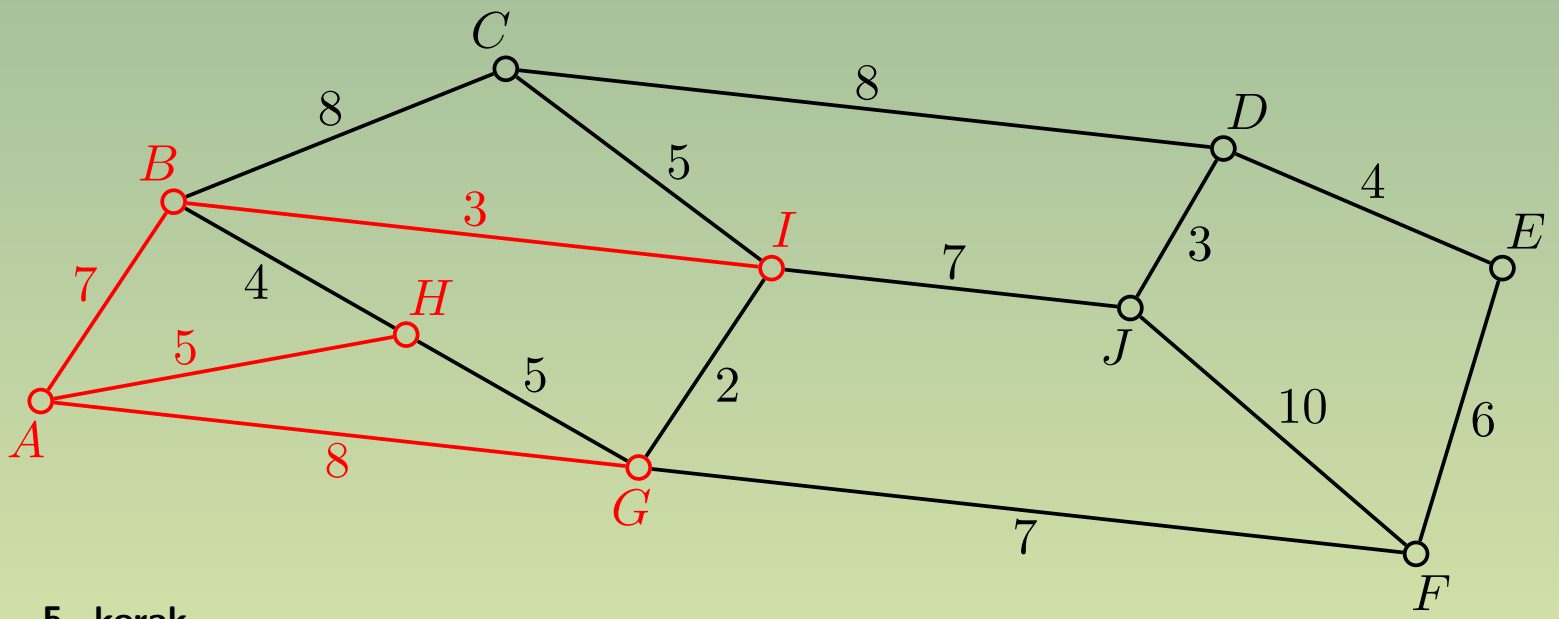
5. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $\boxed{v_3 = B(v_1, 7)}$, $C(v_3, 15)$, $D(\infty)$, $E(\infty)$,

$F(v_4, 15)$, $\boxed{v_4 = G(v_1, 8)}$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $I(v_3, 10)$, $J(\infty)$

Sada u grafu odaberemo vrh s najmanjom privremenom oznakom. To je ovdje vrh $I(v_3, 10)$. Stavimo da je $v_5 = I(v_3, 10)$ i stavimo da je oznaka vrha v_5 trajna.

Rješenje.



5. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $\boxed{v_3 = B(v_1, 7)}$, $C(v_3, 15)$, $D(\infty)$, $E(\infty)$,

$F(v_4, 15)$, $\boxed{v_4 = G(v_1, 8)}$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $\boxed{v_5 = I(v_3, 10)}$, $J(\infty)$

Dakle, najkraći put od vrha A do vrha I je put ABI i on je duljine 10.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

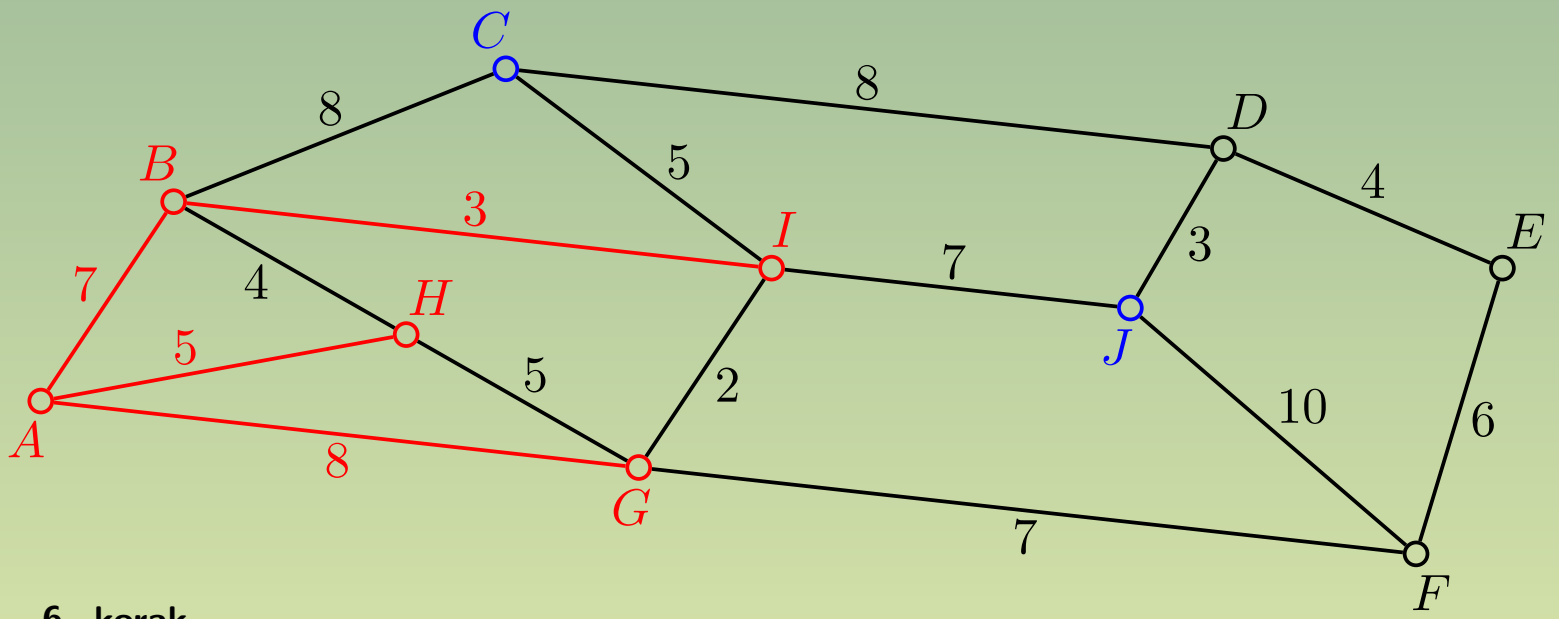
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



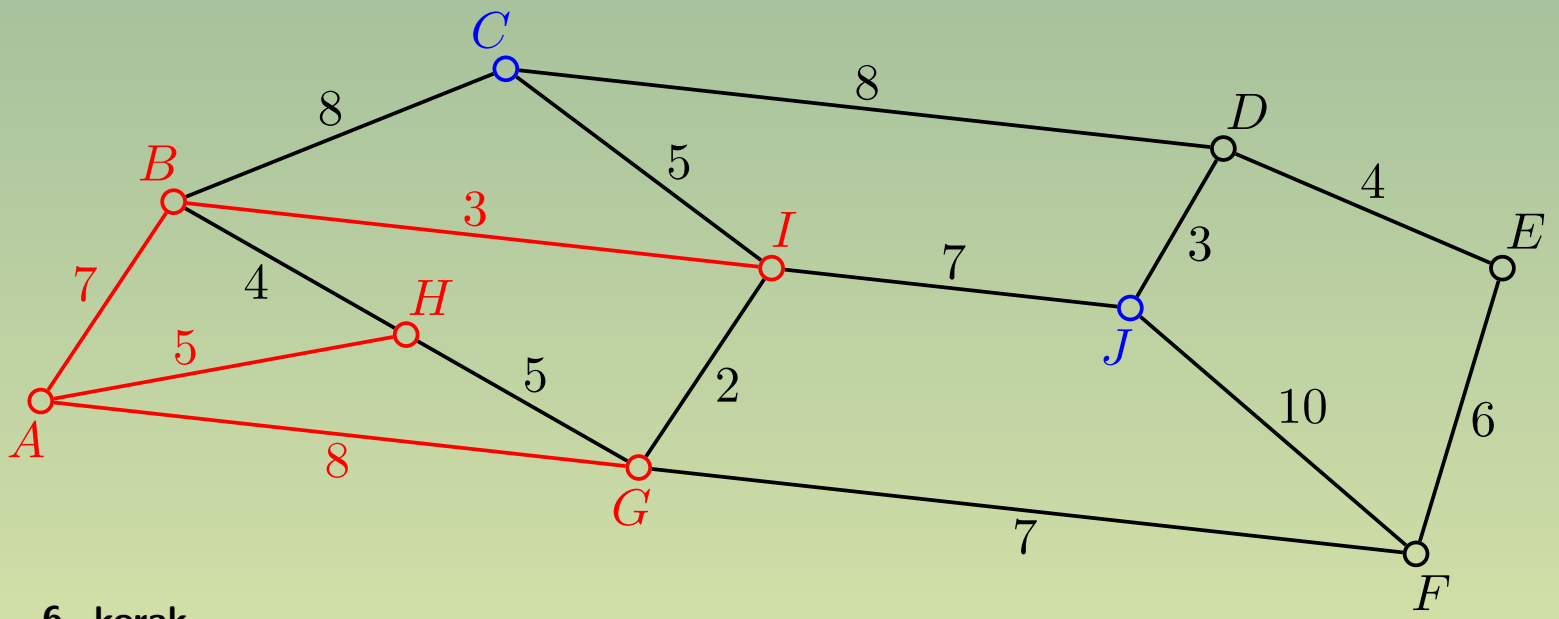
6. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $\boxed{v_3 = B(v_1, 7)}$, $C(v_3, 15)$, $D(\infty)$, $E(\infty)$,

$F(v_4, 15)$, $\boxed{v_4 = G(v_1, 8)}$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $\boxed{v_5 = I(v_3, 10)}$, $J(\infty)$

Pogledamo susjedne vrhove vrha v_5 koji još uvijek imaju privremene oznake. To su vrhovi C i J. Usporedimo li privremenu oznaku vrha C sa sumom oznake vrha v_5 (koja je jednaka 10) i težine brida koji spaja vrh C sa v_5 dobivamo $10 + 5 = 15$, pa vrh C i dalje ima privremenu oznaku $C(v_3, 15)$. Analogno, za vrh J zbog $10 + 7 < \infty$, vrh J dobiva novu privremenu oznaku $J(v_5, 17)$.

Rješenje.



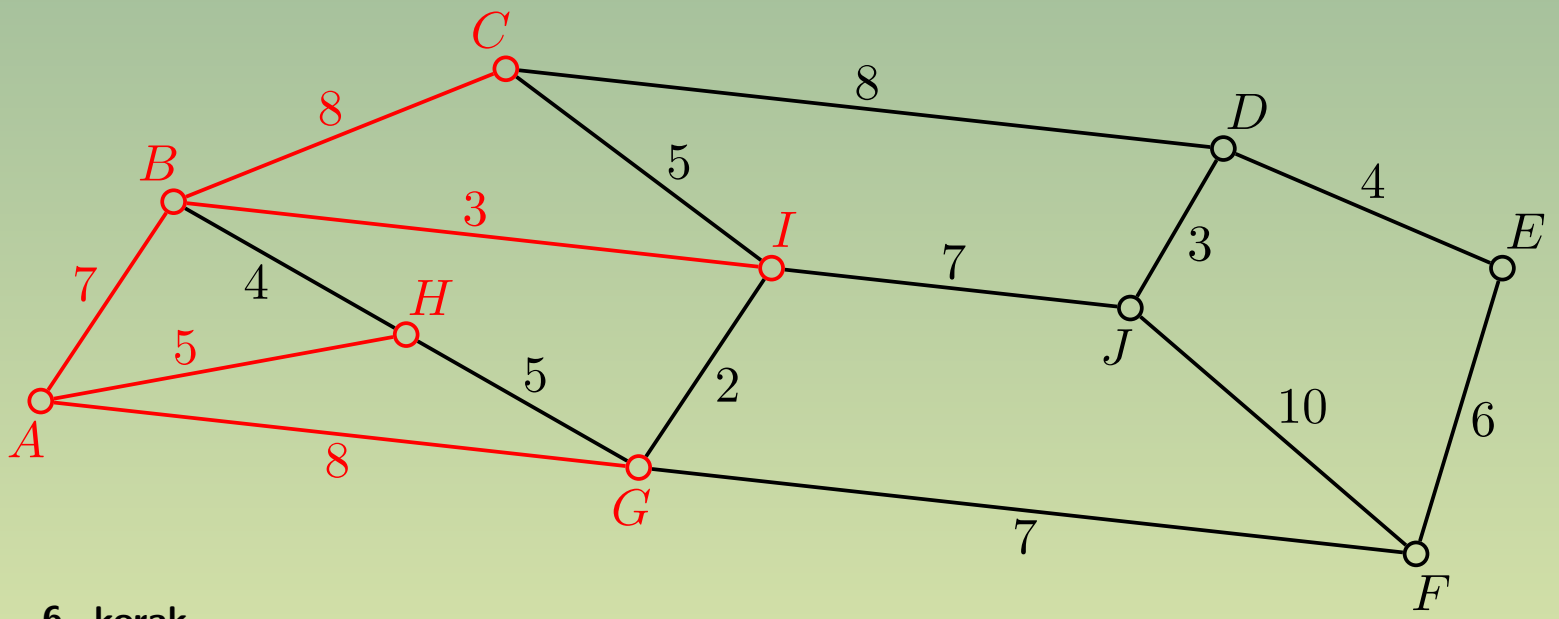
6. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $\boxed{v_3 = B(v_1, 7)}$, $C(v_3, 15)$, $D(\infty)$, $E(\infty)$,

$F(v_4, 15)$, $\boxed{v_4 = G(v_1, 8)}$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $\boxed{v_5 = I(v_3, 10)}$, $J(v_5, 17)$

Sada u grafu odaberemo vrh s najmanjom privremenom oznakom. Ovdje imamo sada dva takva vrha, $C(v_3, 15)$ i $F(v_4, 15)$. Odlučimo se za bilo kojeg od njih. Stavimo da je $v_6 = C(v_3, 15)$ i stavimo da je oznaka vrha v_6 trajna.

Rješenje.



6. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $\boxed{v_3 = B(v_1, 7)}$, $\boxed{v_6 = C(v_3, 15)}$, $D(\infty)$, $E(\infty)$,

$F(v_4, 15)$, $\boxed{v_4 = G(v_1, 8)}$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $\boxed{v_5 = I(v_3, 10)}$, $J(v_5, 17)$

Dakle, najkraći put od vrha A do vrha C je put ABC i on je duljine 15.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

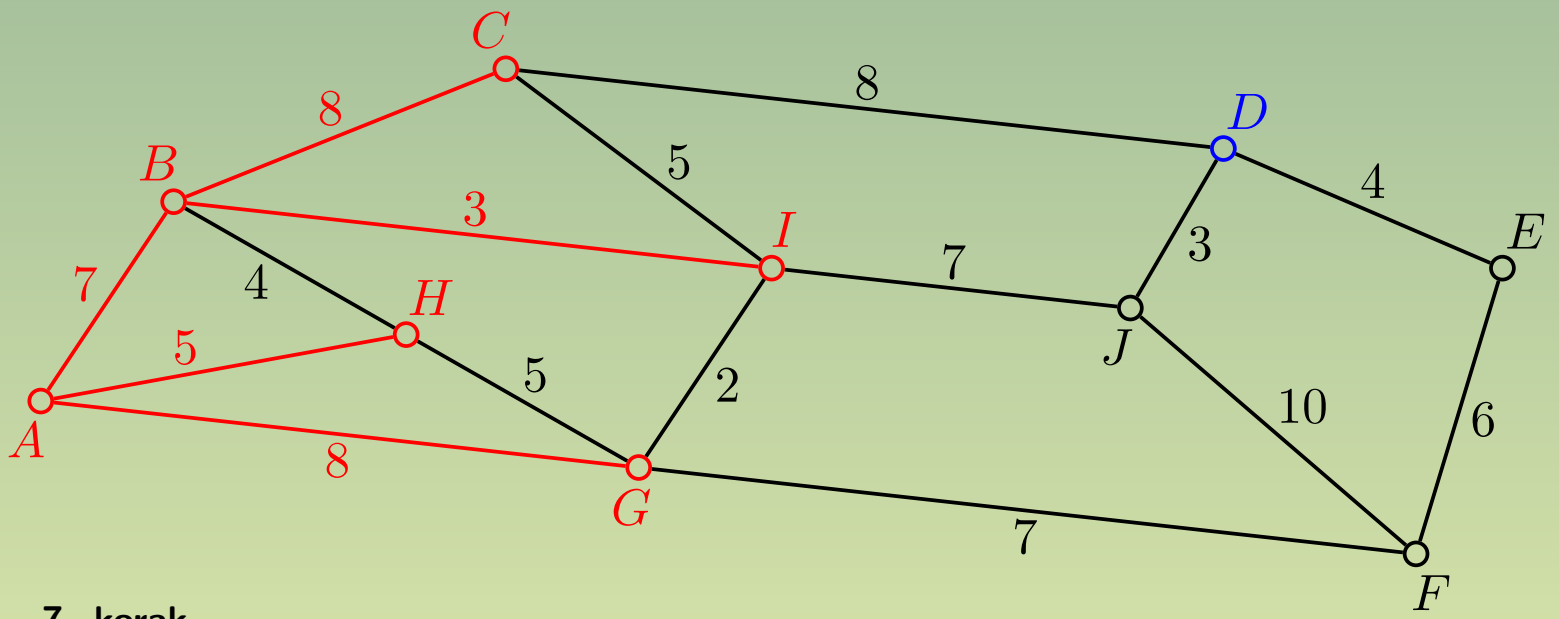
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



7. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $\boxed{v_3 = B(v_1, 7)}$, $\boxed{v_6 = C(v_3, 15)}$, $D(\infty)$, $E(\infty)$,

$F(v_4, 15)$, $\boxed{v_4 = G(v_1, 8)}$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $\boxed{v_5 = I(v_3, 10)}$, $J(v_5, 17)$

Pogledamo susjedne vrhove vrha v_6 koji još uvijek imaju privremene oznake. To je jedino vrh D. Usporedimo li privremenu oznaku vrha D sa sumom oznake vrha v_6 (koja je jednaka 15) i težine brida koji spaja vrh D sa v_6 dobivamo $15 + 8 < \infty$, pa vrh D dobiva novu privremenu oznaku $D(v_6, 23)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

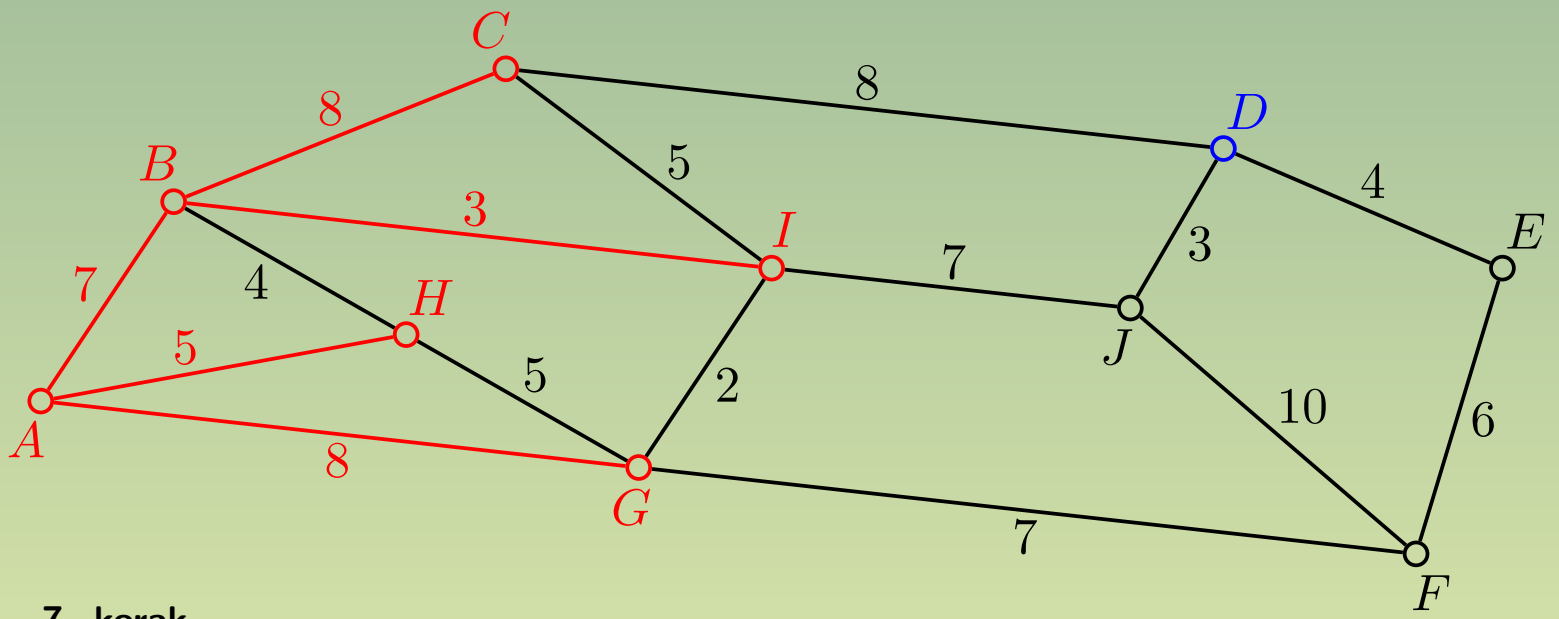
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



7. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $\boxed{v_3 = B(v_1, 7)}$, $\boxed{v_6 = C(v_3, 15)}$, $D(v_6, 23)$, $E(\infty)$,

$F(v_4, 15)$, $\boxed{v_4 = G(v_1, 8)}$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $\boxed{v_5 = I(v_3, 10)}$, $J(v_5, 17)$

Sada u grafu odaberemo vrh s najmanjom privremenom oznakom. U ovom trenutku je to vrh $F(v_4, 15)$. Stavimo da je $v_7 = F(v_4, 15)$ i stavimo da je oznaka vrha v_7 trajna.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

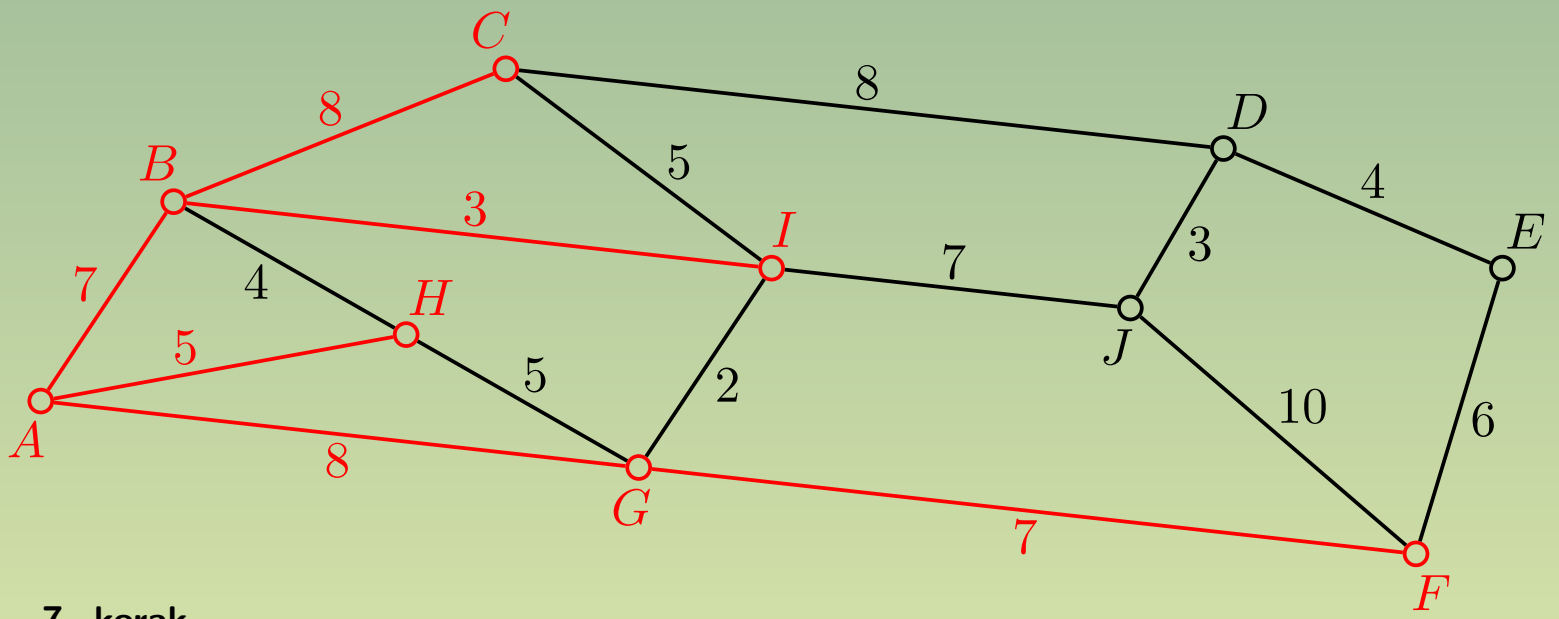
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



7. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $\boxed{v_3 = B(v_1, 7)}$, $\boxed{v_6 = C(v_3, 15)}$, $D(v_6, 23)$, $E(\infty)$,

$\boxed{v_7 = F(v_4, 15)}$, $\boxed{v_4 = G(v_1, 8)}$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $\boxed{v_5 = I(v_3, 10)}$, $J(v_5, 17)$

Dakle, najkraći put od vrha A do vrha F je put AGF i on je duljine 15.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

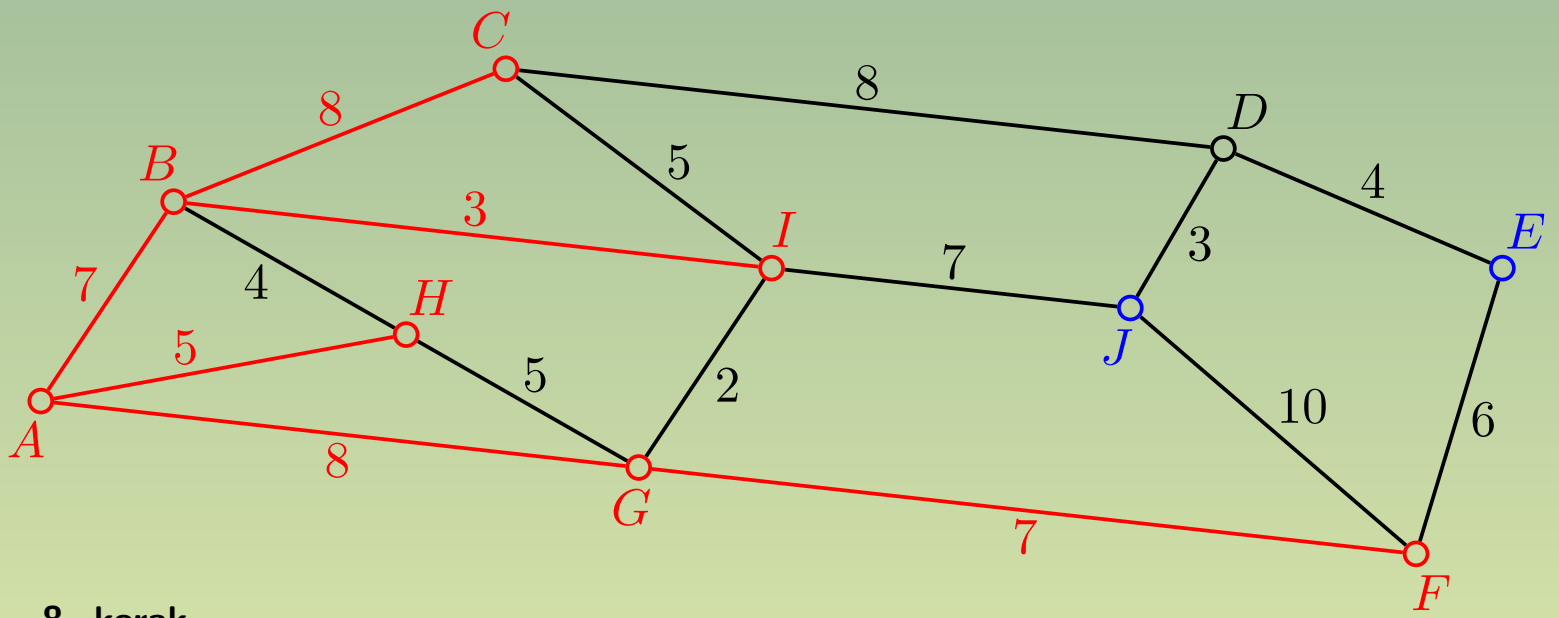
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



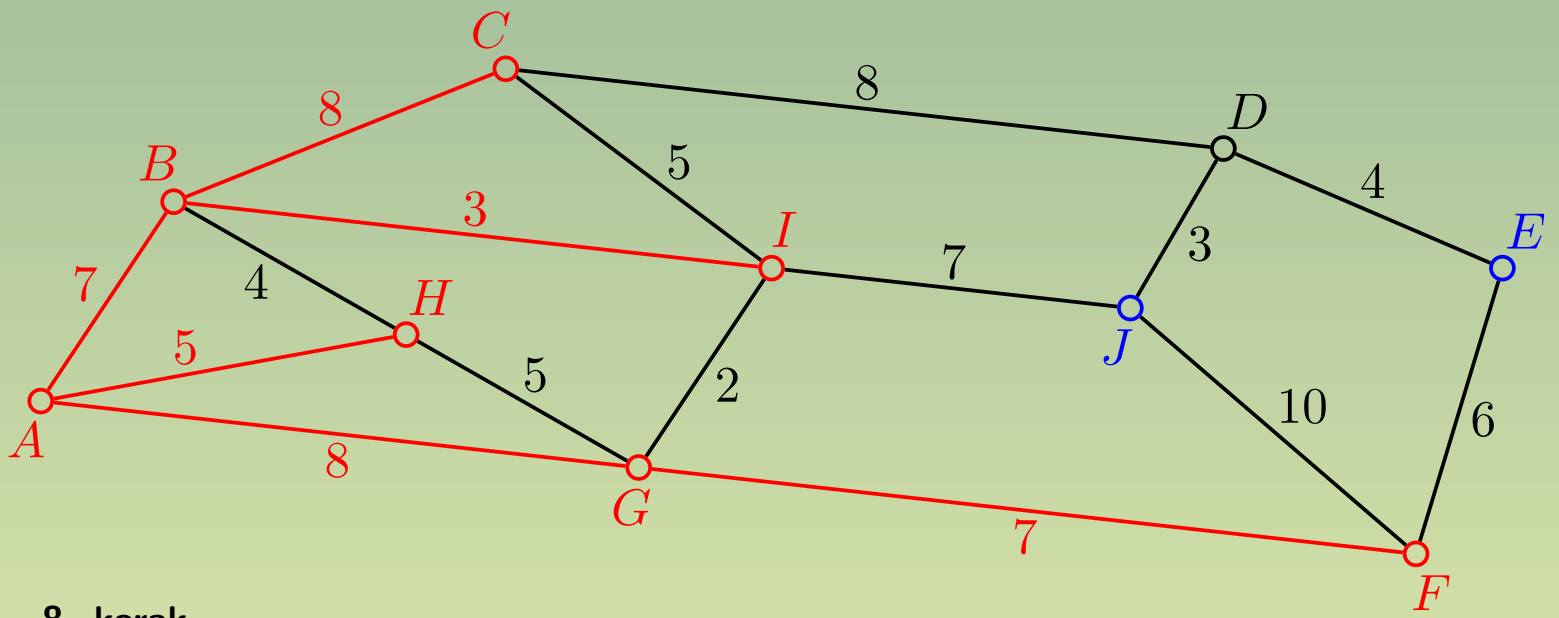
8. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $\boxed{v_3 = B(v_1, 7)}$, $\boxed{v_6 = C(v_3, 15)}$, $D(v_6, 23)$, $E(\infty)$,

$\boxed{v_7 = F(v_4, 15)}$, $\boxed{v_4 = G(v_1, 8)}$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $\boxed{v_5 = I(v_3, 10)}$, $J(v_5, 17)$

Pogledamo susjedne vrhove vrha v_7 koji još uvijek imaju privremene oznake. To su vrhovi J i E. Usporedimo li privremenu oznaku vrha J sa sumom oznake vrha v_7 (koja je jednaka 15) i težine brida koji spaja vrh J sa v_7 dobivamo $15 + 10 > 17$, pa vrh J ima i dalje privremenu oznaku $J(v_5, 17)$. Analogno, za vrh E imamo $15 + 6 < \infty$ pa vrh E dobiva novu privremenu oznaku $E(v_7, 21)$.

Rješenje.



8. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $\boxed{v_3 = B(v_1, 7)}$, $\boxed{v_6 = C(v_3, 15)}$, $D(v_6, 23)$, $E(v_7, 21)$,

$\boxed{v_7 = F(v_4, 15)}$, $\boxed{v_4 = G(v_1, 8)}$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $\boxed{v_5 = I(v_3, 10)}$, $J(v_5, 17)$

Sada u grafu odaberemo vrh s najmanjom privremenom oznakom. U ovom trenutku je to vrh $J(v_5, 17)$. Stavimo da je $v_8 = J(v_5, 17)$ i stavimo da je oznaka vrha v_8 trajna.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

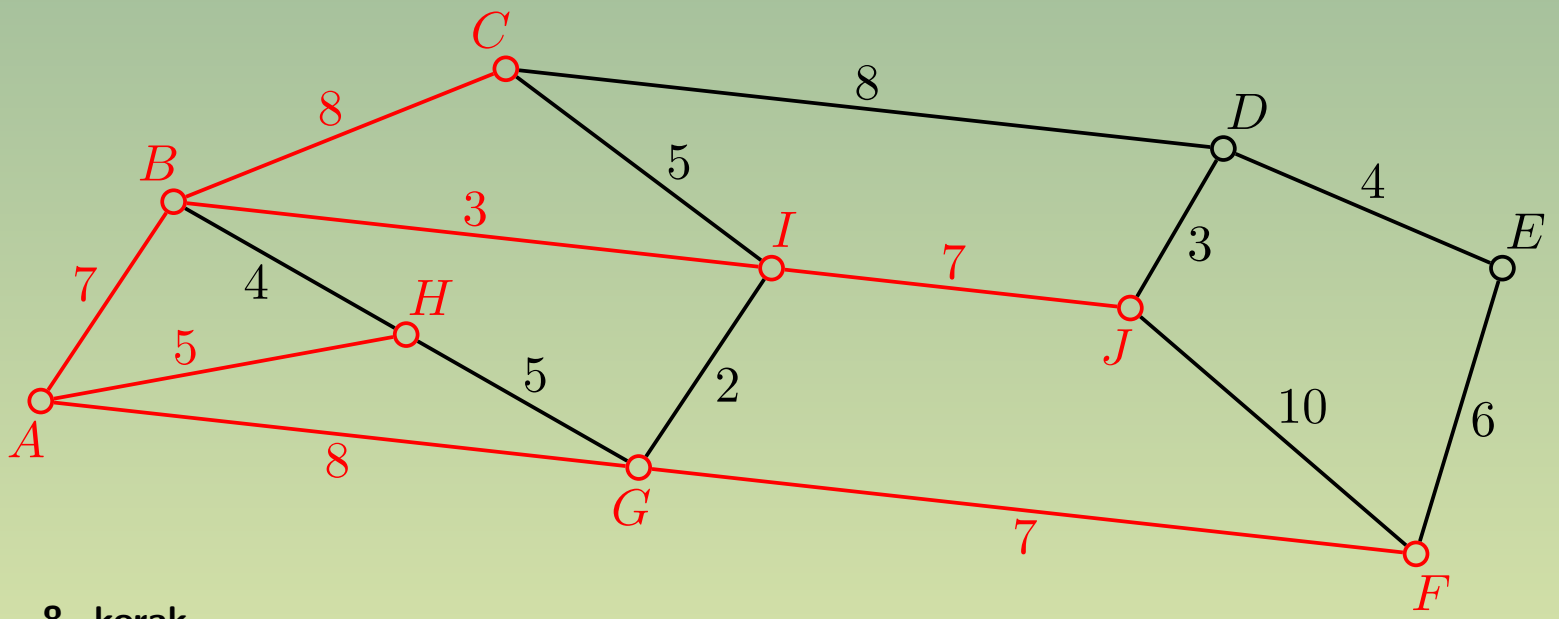
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



8. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $\boxed{v_3 = B(v_1, 7)}$, $\boxed{v_6 = C(v_3, 15)}$, $D(v_6, 23)$, $E(v_7, 21)$,

$\boxed{v_7 = F(v_4, 15)}$, $\boxed{v_4 = G(v_1, 8)}$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $\boxed{v_5 = I(v_3, 10)}$, $\boxed{v_8 = J(v_5, 17)}$

Dakle, najkraći put od vrha A do vrha J je put $ABIJ$ i on je duljine 17.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

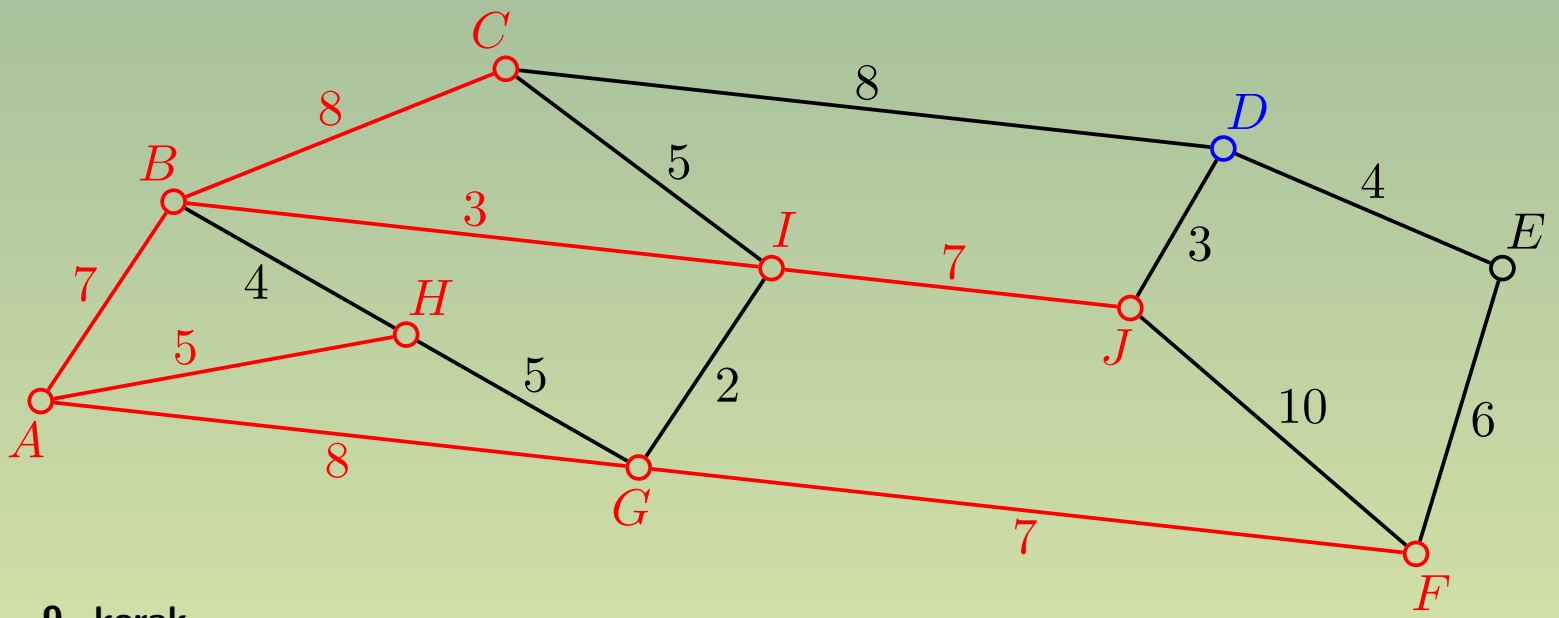
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



9. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $\boxed{v_3 = B(v_1, 7)}$, $\boxed{v_6 = C(v_3, 15)}$, $D(v_6, 23)$, $E(v_7, 21)$,

$\boxed{v_7 = F(v_4, 15)}$, $\boxed{v_4 = G(v_1, 8)}$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $\boxed{v_5 = I(v_3, 10)}$, $\boxed{v_8 = J(v_5, 17)}$

Pogledamo susjedne vrhove vrha v_8 koji još uvijek imaju privremene oznake. To je jedino vrh D. Usporedimo li privremenu oznaku vrha D sa sumom oznake vrha v_8 (koja je jednaka 17) i težine brida koji spaja vrh D sa v_8 dobivamo $17 + 3 < 23$, pa vrh D dobiva novu privremenu oznaku $D(v_8, 20)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

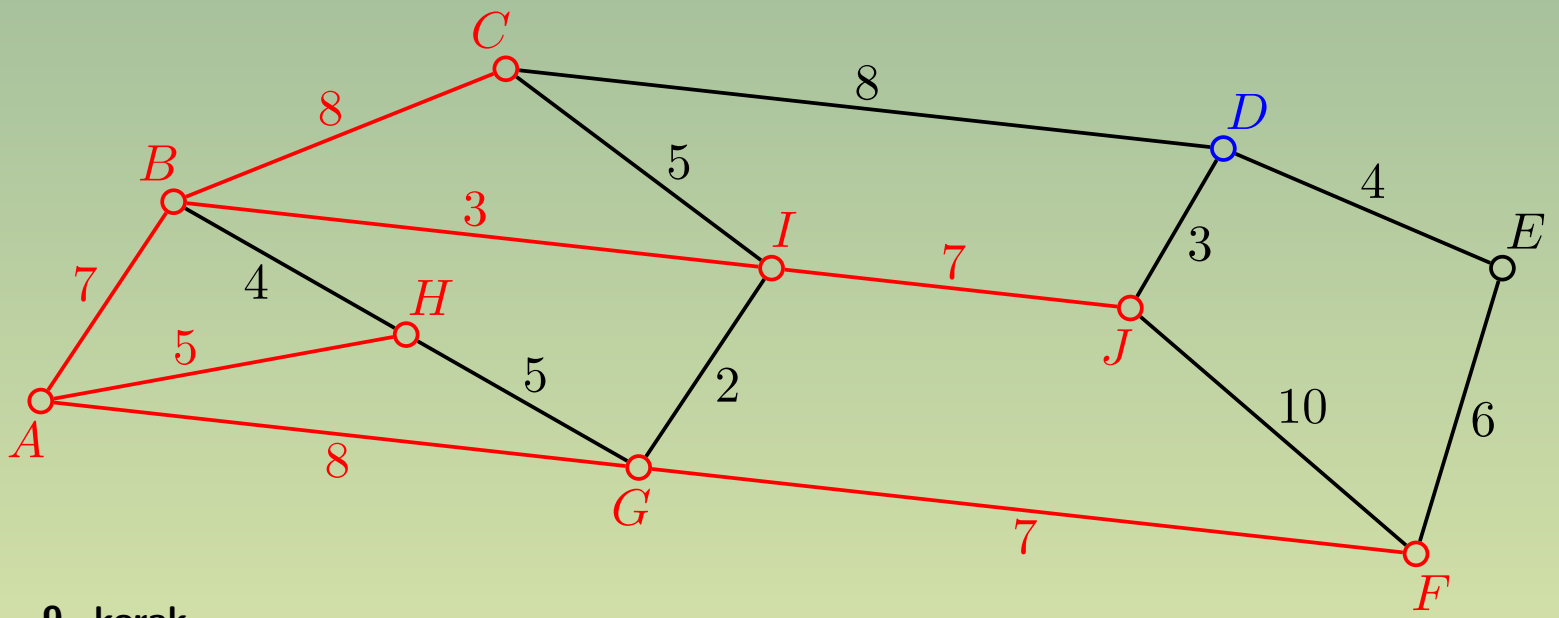
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



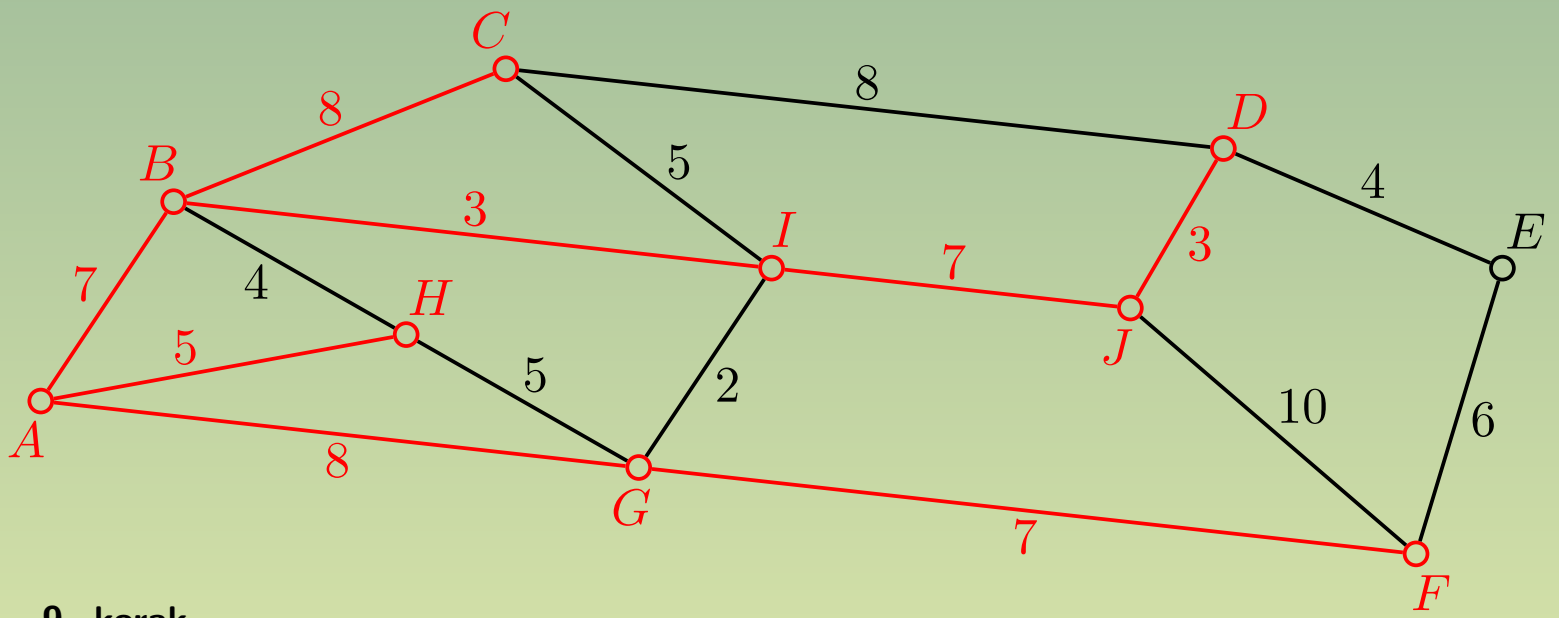
9. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $\boxed{v_3 = B(v_1, 7)}$, $\boxed{v_6 = C(v_3, 15)}$, $D(v_8, 20)$, $E(v_7, 21)$,

$\boxed{v_7 = F(v_4, 15)}$, $\boxed{v_4 = G(v_1, 8)}$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $\boxed{v_5 = I(v_3, 10)}$, $\boxed{v_8 = J(v_5, 17)}$

Sada u grafu odaberemo vrh s najmanjom privremenom oznakom. U ovom trenutku je to vrh $D(v_8, 20)$. Stavimo da je $v_9 = D(v_8, 20)$ i stavimo da je oznaka vrha v_9 trajna.

Rješenje.



9. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $\boxed{v_3 = B(v_1, 7)}$, $\boxed{v_6 = C(v_3, 15)}$, $\boxed{v_9 = D(v_8, 20)}$, $E(v_7, 21)$,

$\boxed{v_7 = F(v_4, 15)}$, $\boxed{v_4 = G(v_1, 8)}$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $\boxed{v_5 = I(v_3, 10)}$, $\boxed{v_8 = J(v_5, 17)}$

Dakle, najkraći put od vrha A do vrha D je put $ABIJD$ i on je duljine 20.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

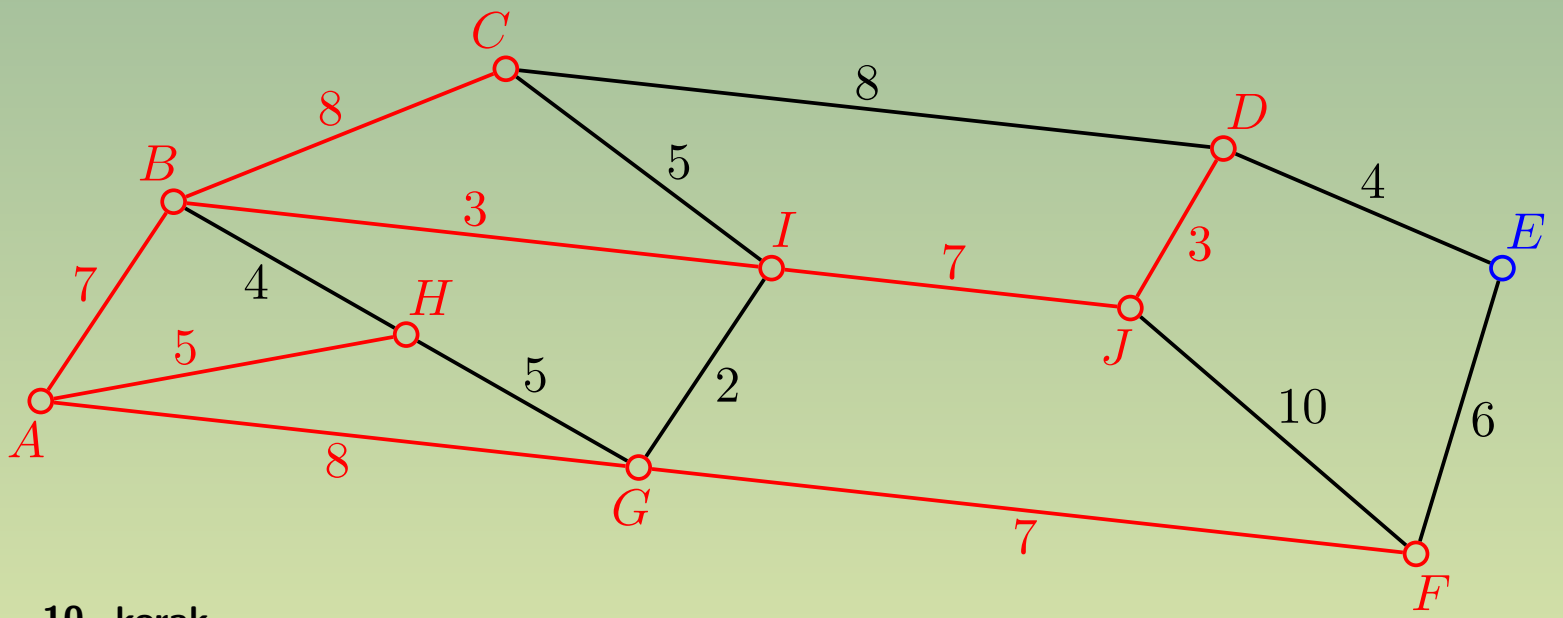
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



10. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $\boxed{v_3 = B(v_1, 7)}$, $\boxed{v_6 = C(v_3, 15)}$, $\boxed{v_9 = D(v_8, 20)}$, $E(v_7, 21)$,

$\boxed{v_7 = F(v_4, 15)}$, $\boxed{v_4 = G(v_1, 8)}$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $\boxed{v_5 = I(v_3, 10)}$, $\boxed{v_8 = J(v_5, 17)}$

Pogledamo susjedne vrhove vrha v_9 koji još uvijek imaju privremene oznake. To je jedino vrh E. Usporedimo li privremenu oznaku vrha E sa sumom oznake vrha v_9 (koja je jednaka 20) i težine brida koji spaja vrh E sa v_9 dobivamo $20 + 4 > 21$, pa vrh E ima i dalje privremenu oznaku $E(v_7, 21)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

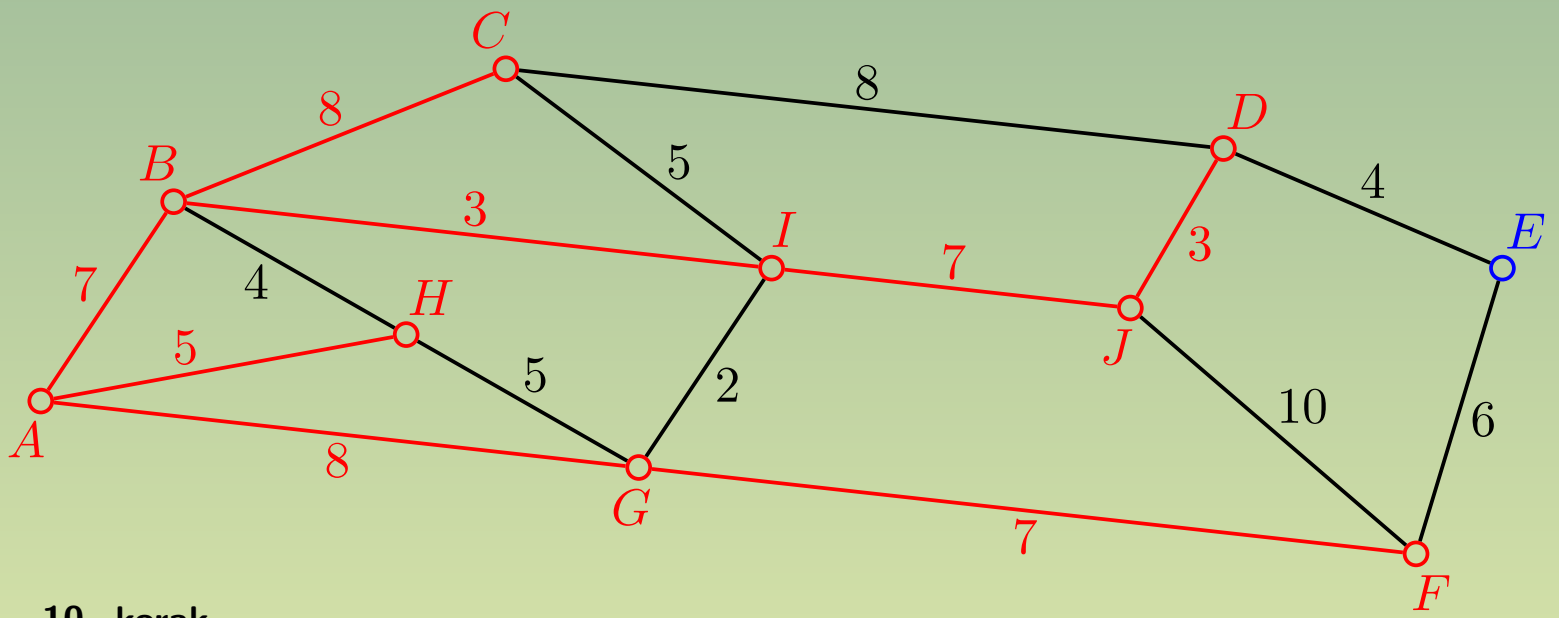
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.



10. korak

$\boxed{v_1 = A(-, 0)}$, $\boxed{v_3 = B(v_1, 7)}$, $\boxed{v_6 = C(v_3, 15)}$, $\boxed{v_9 = D(v_8, 20)}$, $E(v_7, 21)$,

$\boxed{v_7 = F(v_4, 15)}$, $\boxed{v_4 = G(v_1, 8)}$, $\boxed{v_2 = H(v_1, 5)}$, $\boxed{v_5 = I(v_3, 10)}$, $\boxed{v_8 = J(v_5, 17)}$

Sada u grafu odaberemo vrh s najmanjom privremenom oznakom. To je još jedino vrh $E(v_7, 21)$. Stavimo da je $v_{10} = E(v_7, 21)$ i stavimo da je oznaka vrha v_{10} trajna.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

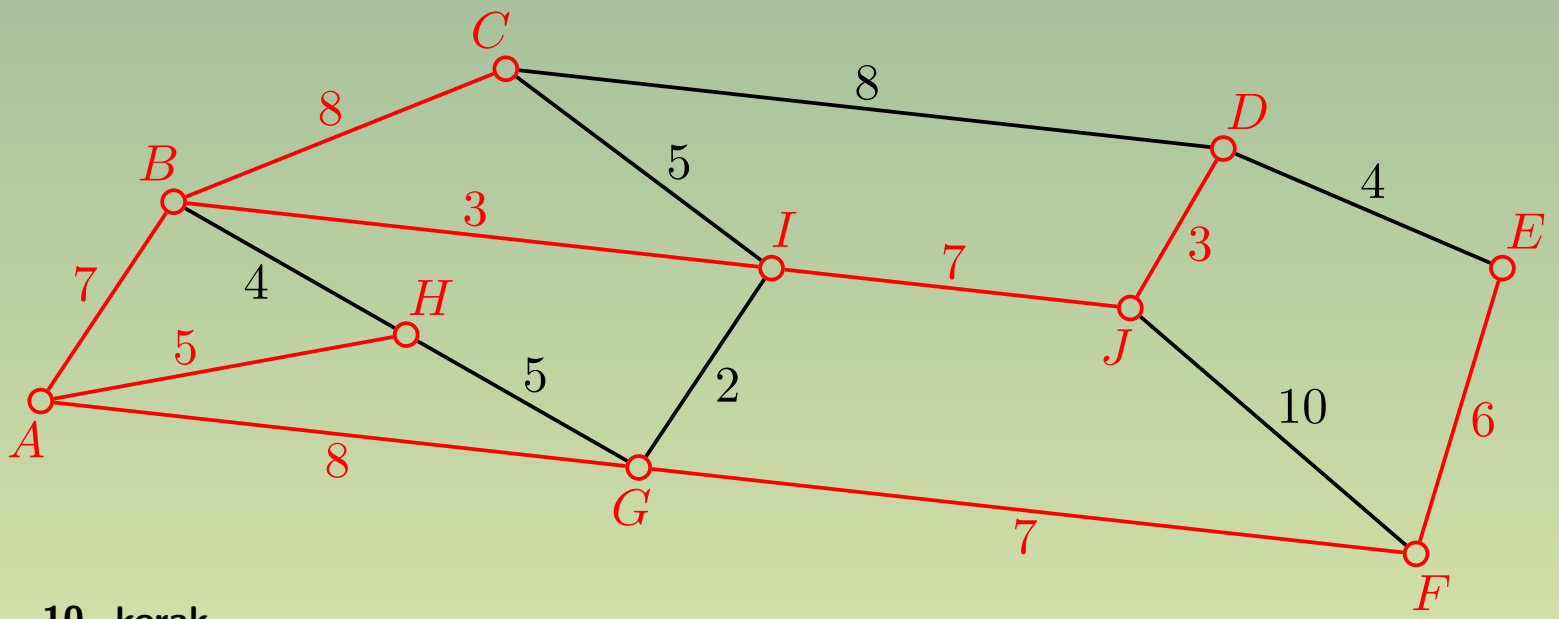
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.

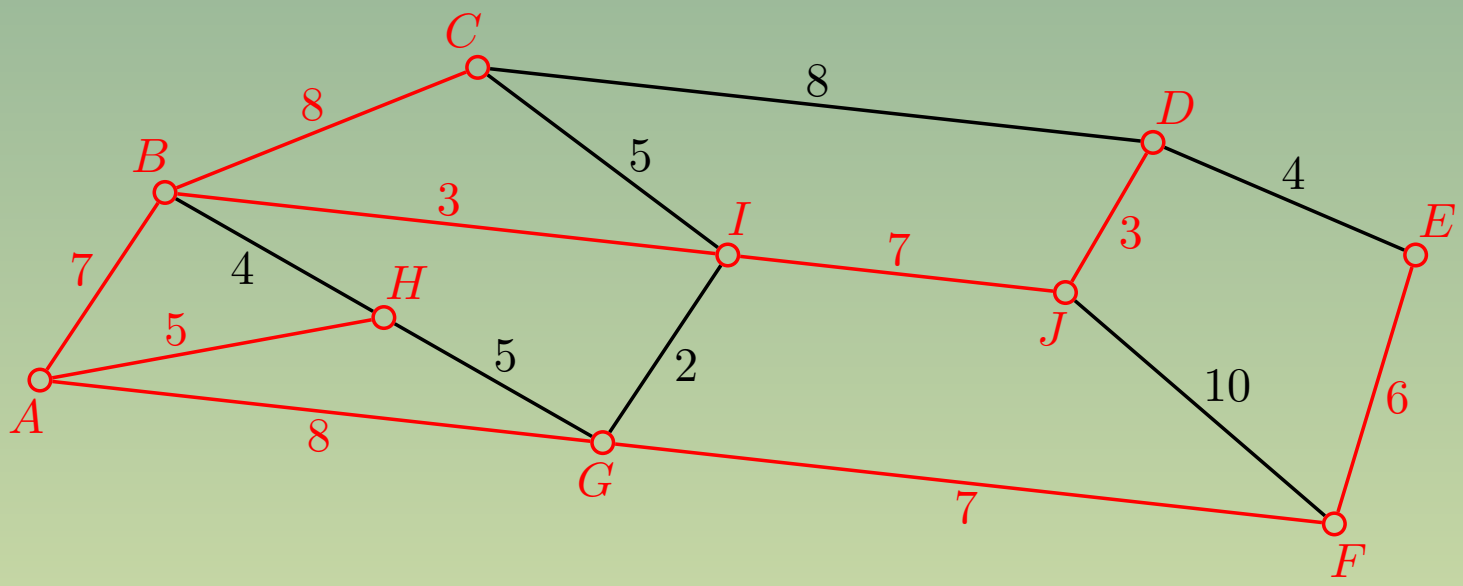


10. korak

$v_1 = A(-, 0)$, $v_3 = B(v_1, 7)$, $v_6 = C(v_3, 15)$, $v_9 = D(v_8, 20)$, $v_{10} = E(v_7, 21)$,

$v_7 = F(v_4, 15)$, $v_4 = G(v_1, 8)$, $v_2 = H(v_1, 5)$, $v_5 = I(v_3, 10)$, $v_8 = J(v_5, 17)$

Dakle, najkraći put od vrha A do vrha E je put $AGFE$ i on je duljine 21. Ovo je ujedno i kraj algoritma jer su pronađeni svi najkraći putovi od vrha A do svih ostalih vrhova u zadanom težinskom grafu.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A, v_1	$-, 0$	■	■	■	■	■	■	■	■	■
B, v_3	∞	$v_1, 7$	$v_1, 7$	■	■	■	■	■	■	■
C, v_6	∞	∞	∞	$v_3, 15$	$v_3, 15$	$v_3, 15$	■	■	■	■
D, v_9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$v_6, 23$	$v_6, 23$	$v_8, 20$	■
E, v_{10}	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$v_7, 21$	$v_7, 21$	$v_7, 21$
F, v_7	∞	∞	∞	∞	$v_4, 15$	$v_4, 15$	$v_4, 15$	■	■	■
G, v_4	∞	$v_1, 8$	$v_1, 8$	$v_1, 8$	■	■	■	■	■	■
H, v_2	∞	$v_1, 5$	■	■	■	■	■	■	■	■
I, v_5	∞	∞	∞	$v_3, 10$	$v_3, 10$	■	■	■	■	■
J, v_8	∞	∞	∞	∞	∞	$v_5, 17$	$v_5, 17$	$v_5, 17$	■	■

◂ Objasni postupak

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

U svakoj iteraciji točno jedan vrh dobiva trajnu oznaku u 2. koraku algoritma. Pretpostavimo da je vrh v_k dobio trajnu oznaku. U najgorem slučaju taj je vrh susjedan sa $\nu - k$ vrhova koji nemaju trajne oznake. Za svaki takav vrh potrebno je jedno zbrajanje i jedno uspoređivanje kojim utvrđujemo da li je potrebno promijeniti privremenu oznaku. Sve skupa nam za taj postupak treba $2(\nu - k)$ operacija. Na kraju treba između tih $\nu - k$ privremenih oznaka izabrati onu najmanju, a za to nam treba još $\nu - k - 1$ uspoređivanja.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Ukupno nam je potrebno

$$\sum_{k=1} \nu - 1\big(2(\nu-k)+(\nu-k-1)\big)$$

operacija, odnosno

$$\sum_{k=1}^{\nu-1}\big(2(\nu-k)+(\nu-k-1)\big)=\sum_{k=1}^{\nu-1}\big(3\nu-3k-1\big)=$$

$$=3\sum_{k=1}^{\nu-1}(\nu-k)-\sum_{k=1}^{\nu-1}1=3\sum_{k=1}^{\nu-1}k-(\nu-1)=$$

$$=3\cdot\frac{(\nu-1)\nu}{2}-\nu+1=\frac{3}{2}\nu^2-\frac{5}{2}\nu+1=O\big(\nu^2\big)$$

Dakle, složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma je $O\big(\nu^2\big)$, gdje je ν broj vrhova grafa.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Napomena.

Želimo li dobiti u težinskom grafu najkraći put između svaka dva vrha može se Dijkstrin algoritam primjenjivati na svaki vrh posebno. U tom slučaju je složenost takvog algoritma jednaka $O(\nu^4)$ ako primijenjujemo prvu verziju Dijkstrinog algoritma, a $O(\nu^3)$ ako primijenjujemo poboljšanu verziju Dijkstrinog algoritma.

Zadatak 7.2.

Implementirajte Dijkstrin algoritam (poboljšanu verziju) na računalu.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.42.

Može li Dijkstrin algoritam primijenjen na traženje najkraćeg puta od vrha A do vrha E završiti prije nego vrh E postane označen? Može li poboljšani Dijkstrin algoritam završiti prije nego vrh E dobije trajnu oznaku?

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.42.

Može li Dijkstrin algoritam primijenjen na traženje najkraćeg puta od vrha A do vrha E završiti prije nego vrh E postane označen? Može li poboljšani Dijkstrin algoritam završiti prije nego vrh E dobije trajnu oznaku?

Rješenje.

Odgovor je potvrdan u oba slučaja. Naime, to se može dogoditi ako je graf nepovezan, a vrhovi A i E se nalaze u različitim komponentama povezanosti.

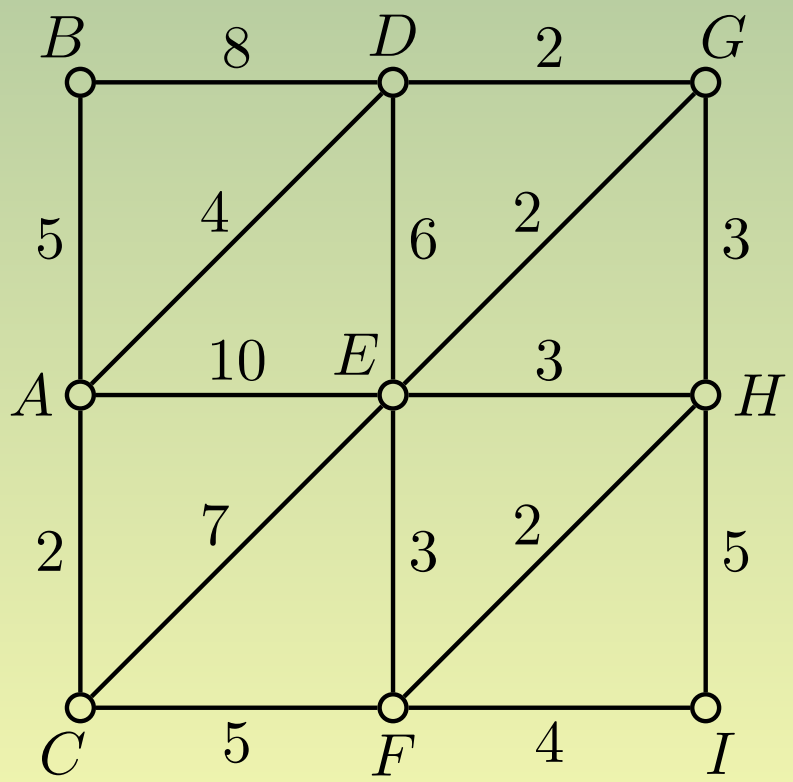
Zadatak 7.3.

Smislite algoritam koji će za zadani graf G odrediti komponente povezanosti grafa G. Implementirajte svoj algoritam na računalu i odredite mu složenost.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.43.

Pomoću Dijkstrinog algoritma pronađite najkraće putove i udaljenosti od vrha A do svih vrhova u grafu



Rješenje.

1: $\boxed{A(-,0)}$

2: $B(A,5),\ \boxed{C(A,2)},\ D(A,4),\ E(A,10)$

3: $B(A,5),\boxed{D(A,4)},\ E(A,10),\ F(C,7),\ E(C,9)$

4: $\boxed{B(A,5)},\ E(A,10),\ F(C,7),\ E(C,9),\ B(D,12),$
$E(D,10),\ G(D,6)$

5: $E(A,10),\ F(C,7),\ E(C,9),\ E(D,10),\ \boxed{G(D,6)}$

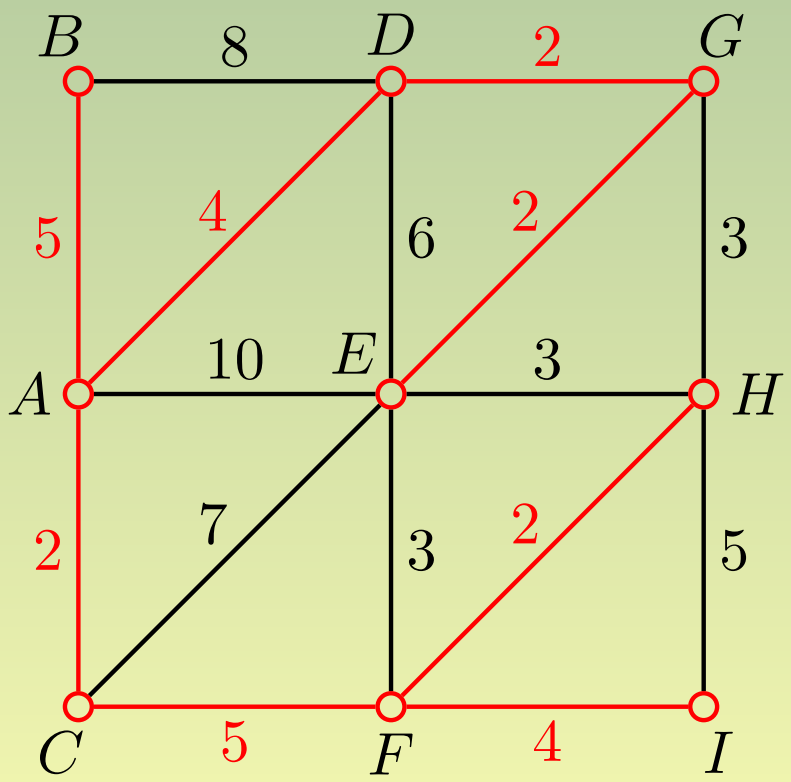
6: $E(A,10),\boxed{F(C,7)},\ E(C,9),\ E(D,10),\ E(G,8),\ H(G,9)$

7: $E(A,10),\ E(C,9),\ E(D,10),\ \boxed{E(G,8)},\ H(G,9),$
$E(F,10),\ H(F,9),\ I(F,11)$

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

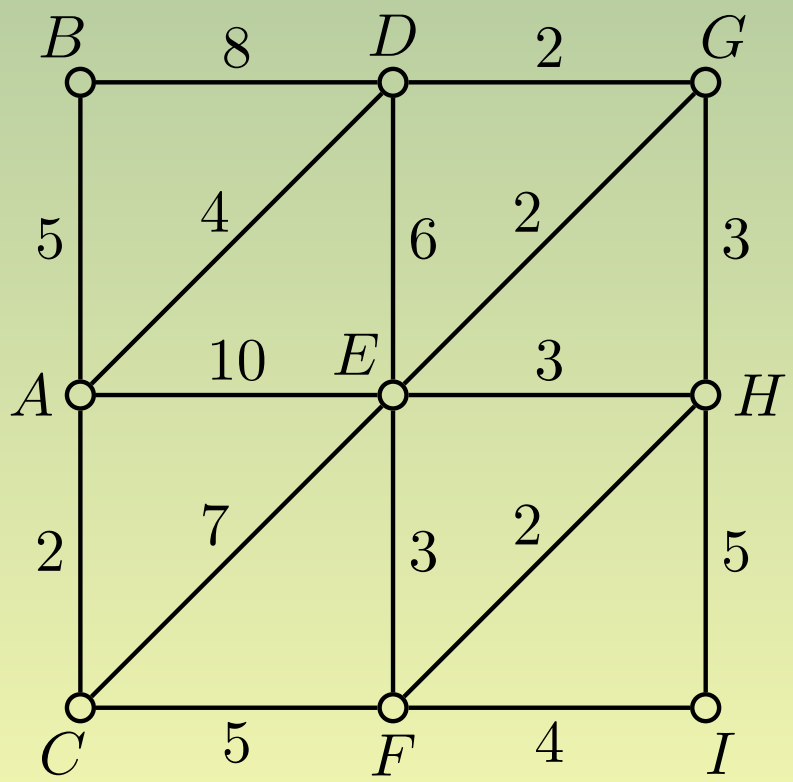
8: $H(E,11)$, $\boxed{H(F,9)}$, $I(F,11)$, $H(G,9)$

9: $\boxed{I(F,11)}$, $I(H,14)$



Primjer 7.44.

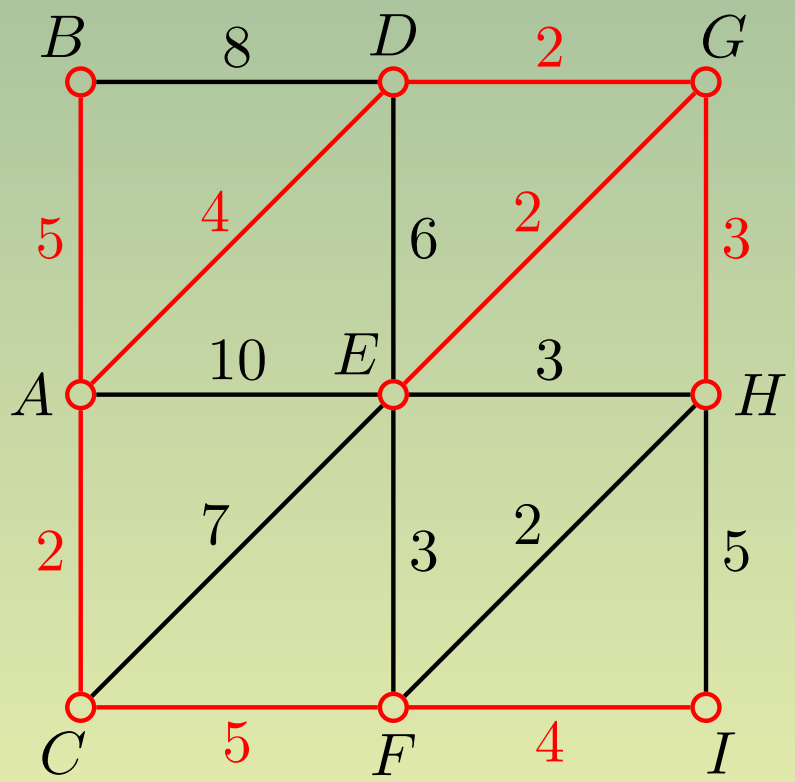
Pomoću poboljšane verzije Dijkstrinog algoritma pronađite najkraće putove i udaljenosti od vrha A do svih vrhova u grafu



Rješenje.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A, v_1	$-, 0$	■	■	■	■	■	■	■	■
B, v_4	∞	$v_1, 5$	$v_1, 5$	$v_1, 5$	■	■	■	■	■
C, v_2	∞	$v_1, 2$	■	■	■	■	■	■	■
D, v_3	∞	$v_1, 4$	$v_1, 4$	■	■	■	■	■	■
E, v_7	∞	$v_1, 10$	$v_2, 9$	$v_2, 9$	$v_2, 9$	$v_5, 8$	$v_5, 8$	■	■
F, v_6	∞	∞	$v_2, 7$	$v_2, 7$	$v_2, 7$	$v_2, 7$	■	■	■
G, v_5	∞	∞	∞	$v_3, 6$	$v_3, 6$	■	■	■	■
H, v_8	∞	∞	∞	∞	∞	$v_5, 9$	$v_5, 9$	$v_5, 9$	■
I, v_9	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$v_6, 11$	$v_6, 11$	$v_6, 11$

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Floyd-Warshallov algoritam

Floyd-Warshallov algoritam određuje najkraće udaljenosti između svaka dva vrha u težinskom grafu. Algoritam je veoma efikasan što se tiče memorijskih resursa jer je dovoljno sve raditi unutar jedne matrice, nema potrebe za trošenjem memorije na dodatne matrice. U nekim primjenama je brži od obje verzije Dijkstrinog algoritma, iako mu je složenost $O(\nu^3)$ kao i od poboljšane verzije Dijkstrinog algoritma. Napomenimo samo još da ovaj algoritam određuje najkraće udaljenosti između svaka dva vrha, ali ne i najkraći put između njih.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Floyd-Warshallov algoritam

ULAZ: Težinski graf $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

IZLAZ: Najkraće udaljenosti između svaka dva vrha u grafu G

1: Za $i = 1, \ldots, n$ stavi $d(i, i) = 0$. Za $i \neq j$, ako je $v_i v_j$ brid, stavi $d(i, j) = w(v_i v_j)$, inače stavi $d(i, j) = \infty$.

2: Za $k = 1, \ldots, n$

  Za $i, j = 1, \ldots, n$

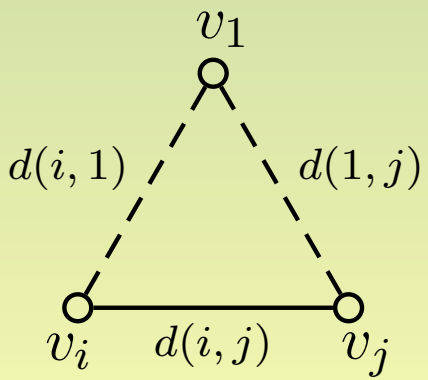
$$d(i, j) := \min \{d(i, j),\ d(i, k) + d(k, j)\}$$

Konačna vrijednost od $d(i, j)$ je najkraća udaljenost između vrhova v_i i v_j.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

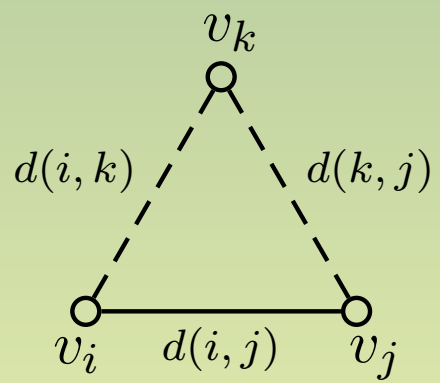
U nultom koraku $(k = 0)$ postavi se prvo da je udaljenost vrha od samog sebe jednaka nula, a udaljenost dva vrha v_i i v_j jednaka je težini brida koji ih spaja. Ako vrhovi nisu susjedni, njihova se udaljenost postavlja na ∞.

U prvom koraku $(k = 1)$ uzima se vrh v_1 i gledaju se udaljenosti pojedinih vrhova v_i i v_j preko vrha v_1, tj. uspoređuju se brojevi $d(i, j)$ i $d(i, 1) + d(1, j)$. Manji od ta dva broja se uzima za novu vrijednost za udaljenost između vrhova v_i i v_j.



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Općenito, u k-tom koraku uzima se vrh v_k i gledaju se udaljenosti pojedinih vrhova v_i i v_j preko vrha v_k, tj. uspoređuju se brojevi $d(i,j)$ i $d(i,k)+d(k,j)$. Manji od ta dva broja se uzima za novu vrijednost za udaljenost između vrhova v_i i v_j.



Dakle, nakon k koraka $d(i,j)$ je najkraća udaljenost između vrhova v_i i v_j preko vrhova $v_1, v_2, \ldots, v_k$, ali to ne mora još uvijek biti i najkraća udaljenost između vrhova v_i i v_j.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

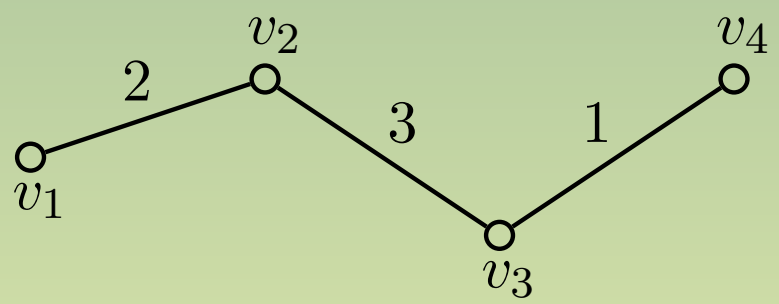
Problem kineskog poštara

Nakon $k = n$ koraka (gdje je n broj vrhova u grafu), $d(i, j)$ predstavlja najkraću udaljenost između vrhova v_i i v_j. Naravno, u ovom trenutku možda baš previše ne vjerujemo u to. Naime, ako najkraći put između vrhova v_i i v_j sadrži više od dva brida, pitamo se kako ćemo na ovaj način, da u svakom koraku provjeravamo samo udaljenost između vrhova v_i i v_j preko jednog vrha v_k, zaista dobiti najkraću udaljenost između vrhova v_i i v_j. Uvjerimo se prvo na dva jednostavnija primjera da je algoritam zaista ispravan, a onda ćemo dokazati njegovu ispravnost u općenitom slučaju.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.45.

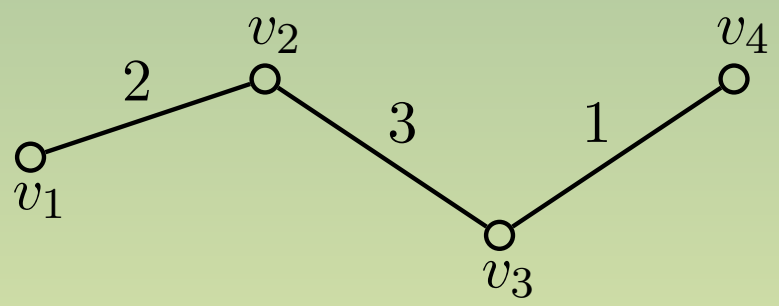
Pomoću Floyd-Warshallovog algoritma odredite najkraće udaljenosti između svaka dva vrha u težinskom grafu



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.45.

Pomoću Floyd-Warshallovog algoritma odredite najkraće udaljenosti između svaka dva vrha u težinskom grafu



Rješenje.

$k=0$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	2	∞	∞
v_2	2	0	3	∞
v_3	∞	3	0	1
v_4	∞	∞	1	0

$k=1$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	2	∞	∞
v_2	2	0	3	∞
v_3	∞	3	0	1
v_4	∞	∞	1	0

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

$k=2$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	2	5	∞
v_2	2	0	3	∞
v_3	5	3	0	1
v_4	∞	∞	1	0

$k=3$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	2	5	6
v_2	2	0	3	4
v_3	5	3	0	1
v_4	6	4	1	0

$k=4$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	2	5	6
v_2	2	0	3	4
v_3	5	3	0	1
v_4	6	4	1	0

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Pogledamo li vrhove v_1 i v_4, vidimo da je najkraći put između njih put $v_1v_2v_3v_4$ i on je duljine 6 te se sastoji od tri brida. Neka je $d^{(k)}(i,j)$ vrijednost od $d(i,j)$ nakon k koraka. U nultom koraku je $d^{(0)}(1,4) = \infty$ jer vrhovi v_1 i v_4 nisu spojeni bridom. Nakon prvog koraka je i dalje $d^{(1)}(1,4) = \infty$ jer je $d^{(0)}(1,1) + d^{(0)}(1,4) = \infty$.

Nakon drugog koraka je opet $d^{(2)}(1,4) = \infty$ jer je $d^{(1)}(1,2) + d^{(1)}(2,4) = \infty$. Naime, najkraći put između vrhova v_2 i v_4 je put $v_2v_3v_4$, a kako još uvijek nakon prvog koraka nismo primijenili algoritam preko vrha v_3, a vrhovi v_2 i v_4 nisu susjedni, tada je $d^{(1)}(2,4) = \infty$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Nakon trećeg koraka je $d^{(3)}(1,4) = 6$ jer je

$$d^{(2)}(1,3) + d^{(2)}(3,4) = 6 < \infty = d^{(2)}(1,4).$$

Naime, u drugom koraku smo algoritam primijenili na vrh v_2 pa smo na taj način dobili najkraću udaljenost između vrhova v_1 i v_3 koja je jednaka 5, jer je najkraći put između vrhova v_1 i v_3 put $v_1v_2v_3$. Stoga je $d^{(2)}(1,3) = 5$ i ta se vrijednost više neće mijenjati do kraja algoritma pa je $d(1,3) = d^{(2)}(1,3) = 5$. Zbog toga, kada u trećem koraku uspoređujemo trenutnu udaljenost između vrhova v_1 i v_4 preko vrha v_3, tada iako vrhovi v_1 i v_3 nisu susjedni, nije više njihova udaljenost jednaka ∞ jer smo u

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

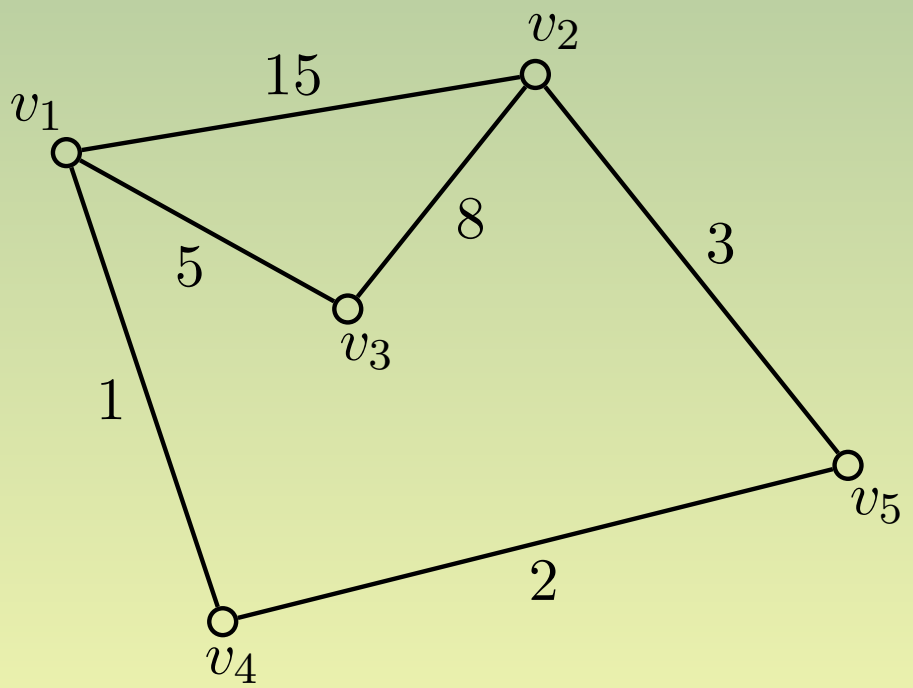
drugom koraku pronašli njihovu najkraću udaljenost preko vrha v_2. Zbog toga i dobivamo nakon trećeg koraka najkraću udaljenost između vrhova v_1 i v_4 zato jer je algoritam nakon tri koraka bio primijenjen na sve unutrašnje vrhove koji se nalaze na najkraćem putu između vrhova v_1 i v_4.

Primijenite Floyd-Warshallov algoritam u nekom drugom poretku na vrhove v_1, v_2, v_3, v_4 i uvjerite se da ćete opet dobiti na kraju isto. Pazite, međukoraci ne moraju biti isti, ali konačni efekt je isti. Dakle, nije važno kojim redom primijenjujemo algoritam na vrhove grafa, bitno je samo da ga primijenimo na svaki vrh jer tek tada možemo biti sigurni da je konačna vrijednost od $d(i, j)$ najkraća udaljenost između vrhova v_i i v_j, $\forall i, j$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.46.

Pomoću Floyd-Warshallovog algoritma odredite najkraće udaljenosti između svaka dva vrha u težinskom grafu



Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Rješenje.

$k=0$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	15	5	1	∞
v_2	15	0	8	∞	3
v_3	5	8	0	∞	∞
v_4	1	∞	∞	0	2
v_5	∞	3	∞	2	0

$k=1$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	15	5	1	∞
v_2	15	0	8	16	3
v_3	5	8	0	6	∞
v_4	1	16	6	0	2
v_5	∞	3	∞	2	0

$k=2$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	15	5	1	18
v_2	15	0	8	16	3
v_3	5	8	0	6	11
v_4	1	16	6	0	2
v_5	18	3	11	2	0

$k=3$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	13	5	1	16
v_2	13	0	8	14	3
v_3	5	8	0	6	11
v_4	1	14	6	0	2
v_5	16	3	11	2	0

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

$k=4$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	13	5	1	3
v_2	13	0	8	14	3
v_3	5	8	0	6	8
v_4	1	14	6	0	2
v_5	3	3	8	2	0

$k=5$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	6	5	1	3
v_2	6	0	8	5	3
v_3	5	8	0	6	8
v_4	1	5	6	0	2
v_5	3	3	8	2	0

$$d(v_1,v_2)=6,\ d(v_1,v_3)=5,\ d(v_1,v_4)=1,\ d(v_1,v_5)=3,\ d(v_2,v_3)=8,$$

$$d(v_2,v_4)=5,\ d(v_2,v_5)=3,\ d(v_3,v_4)=6,\ d(v_3,v_5)=8,\ d(v_4,v_5)=2$$

Na primjer, sa slike vidimo da je najkraći put između vrhova v_1 i v_2 put $v_1v_4v_5v_2$ koji je duljine 6, a tu udaljenost smo dobili Floyd-Warshallovim algoritmom. Uvjerite se da su i za ostale parove vrhova zaista dobivene njihove najkraće udaljenosti.

Proučite što se događa u svakom koraku algoritma.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.47.

Dokažite da je Floyd-Warshallow algoritam ispravan.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

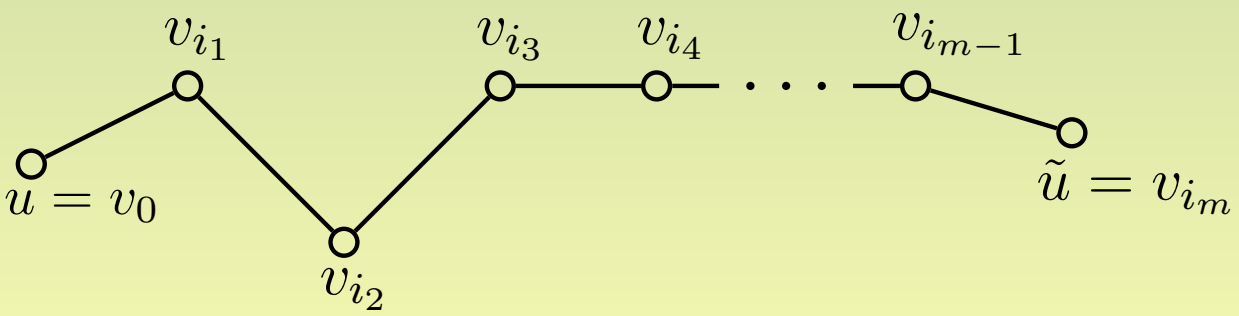
Primjer 7.47.

Dokažite da je Floyd-Warshallow algoritam ispravan.

Rješenje.

Neka su $u, \tilde{u} \in V(G)$ dva proizvoljna vrha u težinskom grafu G i pretpostavimo da postoji put između njih (u protivnom je gotovo jer je njihova najkraća udaljenost tada jednaka ∞, a očito je da ćemo to dobiti i Floyd-Warshallovim algoritmom).

Neka je $P = uv_{i_1}v_{i_2}v_{i_3}\cdots v_{i_{m-1}}\tilde{u}$ najkraći put između vrhova u i $\tilde{u}$ u težinskom grafu G.



Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

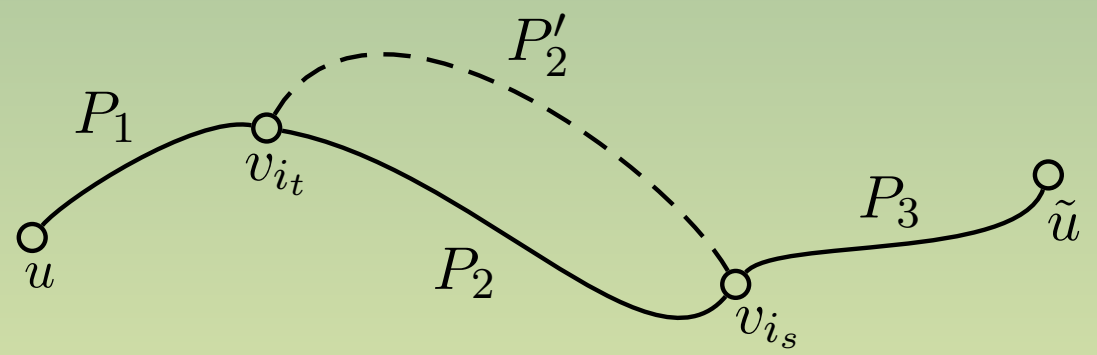
Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Važno je uočiti da je najkraći put između bilo koja dva vrha na putu P, dio puta P između ta dva vrha.



Uz oznake sa slike, kada P_2 ne bi bio najkraći put od vrha v_{i_t} do vrha v_{i_s}, tada bi postojao kraći put P_2' između ta dva vrha (možemo pretpostaviti da taj put P_2', osim krajnjih vrhova, nema ništa zajedničko sa P_1 i P_3; ako bi i imao, konačni zaključak bi bio isti samo bi slika drukčije izgledala).

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

Poboljšani Dijkstrin algoritam

Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

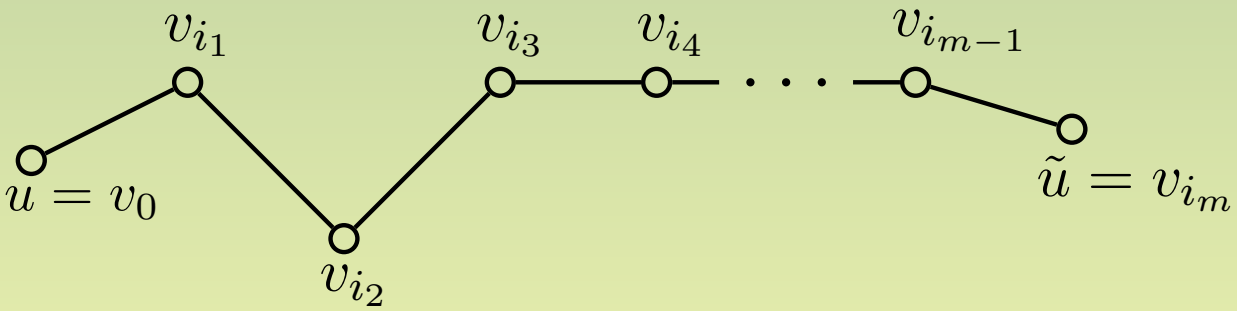
Problem kineskog poštara

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

No, tada bi $P_1P_2'P_3$ bio kraći put od puta P između vrhova u i $\tilde{u}$, što je kontradikcija s minimalnošću puta P. Isto tako, ako bi put P_2' imao zajedničkih vrhova s putovima P_1 i P_3, tada ako s $\tilde{v}_1$ označimo posljednji zajednički vrh puta P_2' s putom P_1, a s $\tilde{v}_3$ označimo prvi zajednički vrh puta P_2' s putom P_3, tada je opet $\tilde{P}_1\tilde{P}_2'\tilde{P}_3$ $(u, \tilde{u})$-put koji je kraći od puta P, gdje je $\tilde{P}_1$ $(u, \tilde{v}_1)$-dio puta P_1, $\tilde{P}_2'$ je $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_3)$-dio puta P_2', a $\tilde{P}_3$ je $(\tilde{v}_3, \tilde{u})$-dio puta P_3. Dakle, opet smo dobili kontradikciju s minimalnošću puta P.

Dakle, u prvom koraku Floyd-Warshallovog algoritma odmah dobivamo duljine najkraćih putova između susjednih vrhova na putu P.

Tvrdimo da nakon što se algoritam izvrši za sve vrhove $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_{m-1}}$, dobit ćemo na odgovarajućem mjestu u matrici najkraću udaljenost između vrhova u i $\tilde{u}$ koja se više neće mijenjati u eventualnoj daljnjoj iteraciji algoritma jer u protivnom P ne bi bio najkraći put između vrhova u i $\tilde{u}$. Također, dobit ćemo i najkraće udaljenosti između svaka dva vrha koji se nalaze na putu P.



Naime, već na početku imamo najkraću udaljenost između vrhova u i v_{i_1}. Za vrijeme izvršavanja algoritma za vrh v_{i_1} dobivamo iz računanja

$$\min\left\{d(i_0, i_2), d(i_0, i_1) + d(i_1, i_2)\right\}$$

najkraću udaljenost između vrhova v_{i_0} i v_{i_2}. Pretpostavimo da nakon izvršenja algoritma za vrhove $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_{t-1}}$ dobivamo najkraće udaljenosti između svaka dva od vrhova $v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_t}$. Kada se algoritam krene izvršavati za vrh v_{i_t}, računa se između ostalog i

$$\min\left\{d(i_{t+1}, i_0), d(i_{t+1}, i_t) + d(i_t, i_0)\right\},$$

a kako su $d(i_{t+1}, i_t)$ i $d(i_t, i_0)$ već najkraće udaljenosti između vrhova v_{i_t} i $v_{i_{t+1}}$ te vrhova v_{i_t} i u, dobivamo najkraću udaljenost između vrhova u i $v_{i_{t+1}}$, a također i najkraće udaljenosti između

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

svaka dva od vrhova $u, v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_t}, v_{i_{t+1}}$. Dakle, nakon što se algoritam izvrši za sve vrhove $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_{m-1}}$, dobit ćemo zaista najkraću udaljenost između vrhova u i $\tilde{u}$. Također, uočite da nije bitno kojim se redoslijedom algoritam primijenjuje na pojedine vrhove, međukoraci se zbog tog redoslijeda mogu razlikovati, ali konačni efekt je isti.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.48.

Dokažite da je složenost Floyd-Warshallovog algoritma jednaka $O(\nu^3)$.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.48.

Dokažite da je složenost Floyd-Warshallovog algoritma jednaka $O(\nu^3)$.

Rješenje.

Za svaki vrh v_k trebamo ν^2 zbrajanja i ν^2 uspoređivanja, dakle sveukupno $2\nu^2$ operacija. Kako imamo ukupno ν vrhova, ukupni broj operacija je jednak $\nu \cdot 2\nu^2 = 2\nu^3$. Dakle, složenost Floyd-Warshallovog algoritma je $O(\nu^3)$.

Broj operacija možemo smanjiti jer zbog simetrije je dovoljno računati samo "trokut" iznad glavne dijagonale. U tom slučaju drugi korak algoritma modificiramo s

za $k = 1, \ldots, n$
  za $i = 1, \ldots, n$
    za $j = i + 1, \ldots, n$
      $d(i,j) := \min\{d(i,j),\, d(i,k) + d(k,j)\}$

Tada za svaki vrh v_k tada imamo

$$(\nu - 1) + (\nu - 2) + \cdots + 1 = \frac{(\nu-1)\nu}{2} \text{ zbrajanja}$$

$$(\nu - 1) + (\nu - 2) + \cdots + 1 = \frac{(\nu-1)\nu}{2} \text{ uspoređivanja}$$

Sve zajedno imamo $\nu(\nu-1)\nu = \nu^3 - \nu^2$ operacija. Složenost je i dalje $O(\nu^3)$, ali imamo ipak znatno manje operacija, što i nije tako zanemarivo.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.49.

Neka kompanija ima avionske veze između 6 gradova $G_1, \ldots, G_6$. *Cijena avionske karte između gradova* G_i *i* G_j *je dana s* (i, j)*-tim elementom matrice*

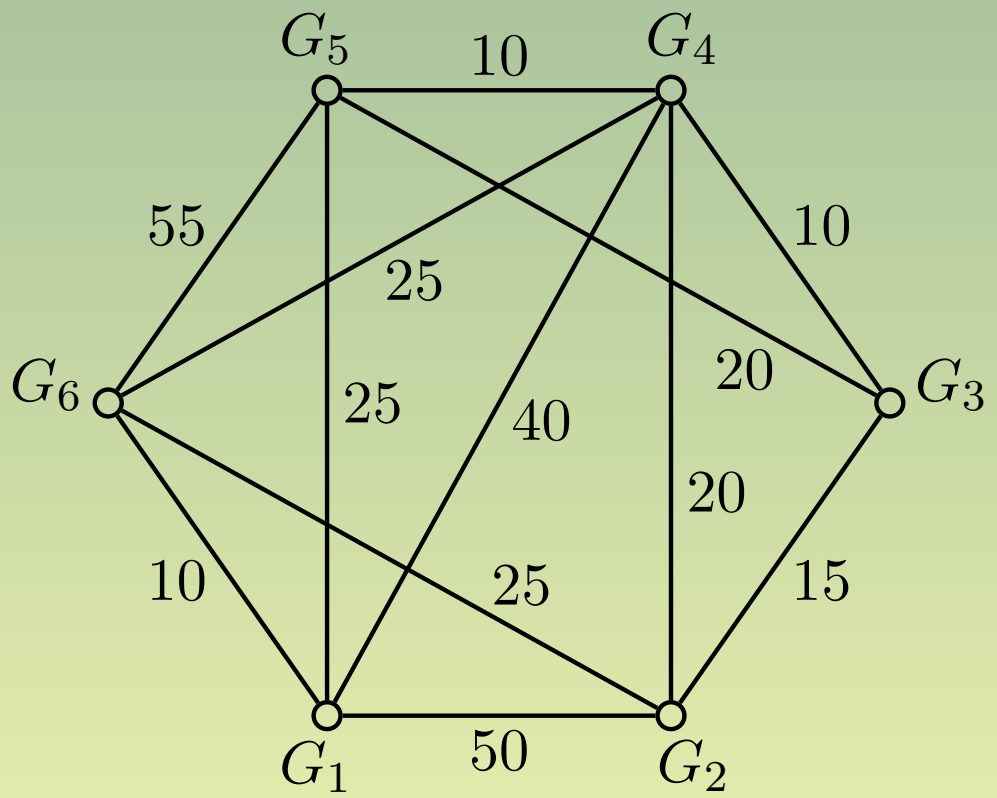
$$\begin{bmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{bmatrix}$$

gdje ∞ *znači da ne postoji izravni let između odgovarajućih gradova. Kompanija želi napraviti tablicu najjeftinijih letova između gradova. Napravite tu tablicu.*

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Rješenje.



Trebaju nam zapravo najkraće udaljenosti između svaka dva vrha u zadanom težinskom grafu. Stoga nam je zgodno upotrijebiti Floyd-Warshallov algoritam.

$k=0$	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
G_1	0	50	∞	40	25	10
G_2	50	0	15	20	∞	25
G_3	∞	15	0	10	20	∞
G_4	40	20	10	0	10	25
G_5	25	∞	20	10	0	55
G_6	10	25	∞	25	55	0

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

$k=1$	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
G_1	0	50	∞	40	25	10
G_2	50	0	15	20	75	25
G_3	∞	15	0	10	20	∞
G_4	40	20	10	0	10	25
G_5	25	75	20	10	0	35
G_6	10	25	∞	25	35	0

$k=2$	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
G_1	0	50	65	40	25	10
G_2	50	0	15	20	75	25
G_3	65	15	0	10	20	40
G_4	40	20	10	0	10	25
G_5	25	75	20	10	0	35
G_6	10	25	40	25	35	0

$k=3$	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
G_1	0	50	65	40	25	10
G_2	50	0	15	20	35	25
G_3	65	15	0	10	20	40
G_4	40	20	10	0	10	25
G_5	25	35	20	10	0	35
G_6	10	25	40	25	35	0

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

$k=4$	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
G_1	0	50	50	40	25	10
G_2	50	0	15	20	30	25
G_3	50	15	0	10	20	35
G_4	40	20	10	0	10	25
G_5	25	30	20	10	0	35
G_6	10	25	35	25	35	0

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

$k=5$	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
G_1	0	50	45	35	25	10
G_2	50	0	15	20	30	25
G_3	45	15	0	10	20	35
G_4	35	20	10	0	10	25
G_5	25	30	20	10	0	35
G_6	10	25	35	25	35	0

$k=6$	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
G_1	0	35	45	35	25	10
G_2	35	0	15	20	30	25
G_3	45	15	0	10	20	35
G_4	35	20	10	0	10	25
G_5	25	30	20	10	0	35
G_6	10	25	35	25	35	0

Dakle, najkraće udaljenosti između pojedinih gradova su

$$
\begin{aligned}
&d(G_1, G_2) = 35, \quad d(G_1, G_3) = 45, \quad d(G_1, G_4) = 35,\\
&d(G_1, G_5) = 25, \quad d(G_1, G_6) = 10, \quad d(G_2, G_3) = 15,\\
&d(G_2, G_4) = 20, \quad d(G_2, G_5) = 30, \quad d(G_2, G_6) = 25,\\
&d(G_3, G_4) = 10, \quad d(G_3, G_5) = 20, \quad d(G_3, G_6) = 35,\\
&d(G_4, G_5) = 10, \quad d(G_4, G_6) = 25, \quad d(G_5, G_6) = 35
\end{aligned}
$$

Želimo li odrediti i najkraće putove između svaka dva grada, moramo uzastopno primjenjivati Dijkstrin algoritam. Napravite to za vježbu.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Problem kineskog poštara

Poštar uzima poštu u poštanskom uredu, dijeli je i vraća se u ured. Kod dijeljenja pošte svakom ulicom treba proći barem jednom, a pri tome želi prijeći što manju udaljenost.
U ovom problemu ulice predstavljaju bridove, a raskršća vrhove grafa. Dakle, zadan je težinski povezani graf i traži se najkraća zatvorena šetnja koja pokriva sve bridove barem jednom (optimalna šetnja).
Problem kineskog poštara sastoji se u pronalaženju ture najmanje težine, tzv. optimalne ture. Ako je graf Eulerov, tada je svaka Eulerova tura na G optimalna i Fleuryjev algoritam rješava problem kineskog poštara.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Ako graf nije Eulerov, tada je taj problem teži. Kwan je predložio da se rješenje dobije tako da se od originalnog grafa prijeđe na pseudograf u kojemu je Eulerova tura moguća tako da se udvostruče određeni bridovi (**eulerizacija grafa**). Cilj je pronaći bridove koje treba udvostručiti tako da se dobije optimalna tura. Udvostručeni bridovi se zapravo prelaze dvaput u originalnom grafu.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Kwanov algoritam

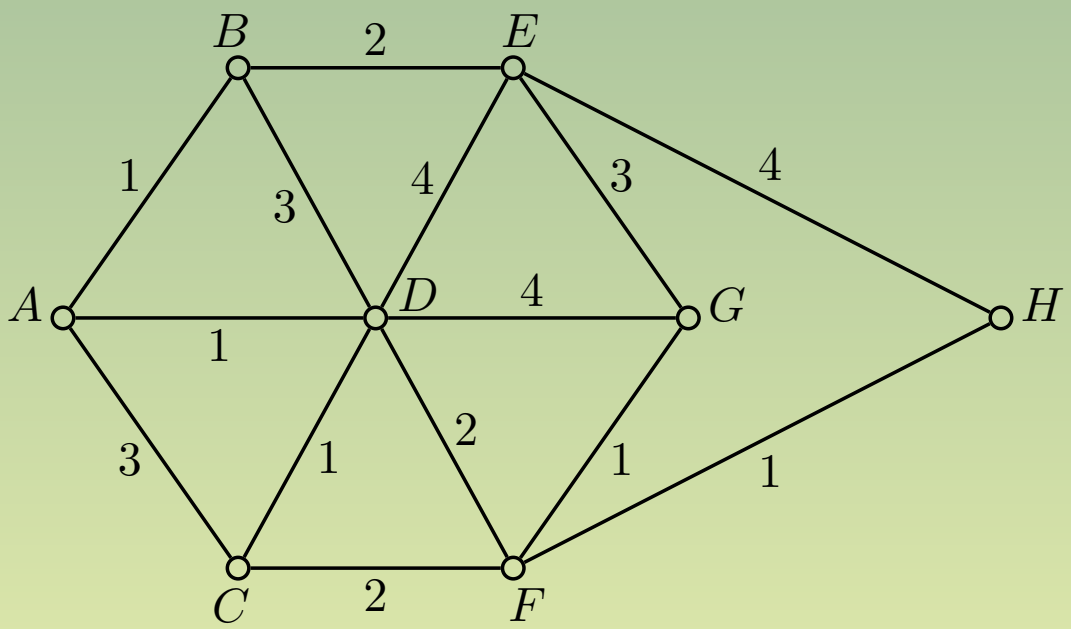
ULAZ: Težinski graf $G = (V, E)$
IZLAZ: Pseudograf $G' = (V, E')$ i Eulerova tura u G'

1: Nađi sve vrhove neparnog stupnja u grafu G.
2: Za svaki par vrhova neparnog stupnja nađi put minimalne težine koji ih povezuje.
3: Upari sve takve parove na način da suma težina putova iz koraka (2) bude minimalna.
4: U grafu G udvostruči putove minimalne težine nađene u koraku (3), tako da dobiveni graf G' nema vrhova neparnog stupnja.
5: Nađi u pseudografu G' Eulerovu turu.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.50.

Riješite problem kineskog poštara za graf



Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

Poboljšani Dijkstrin algoritam

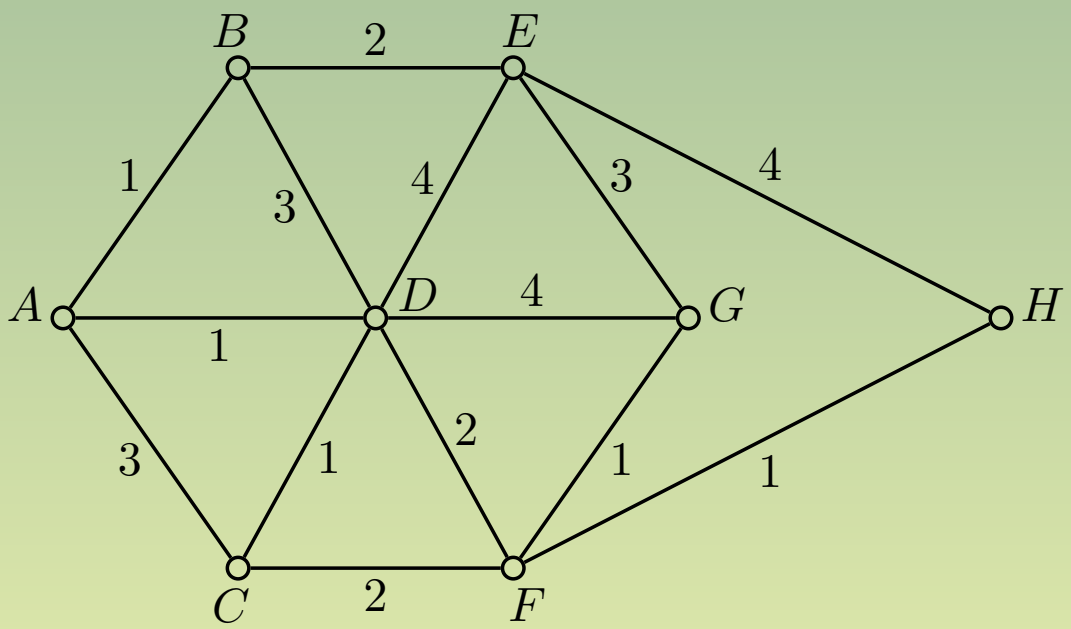
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Primjer 7.50.

Riješite problem kineskog poštara za graf



Rješenje.

1: Vrhovi neparnog stupnja: A, B, C, G.

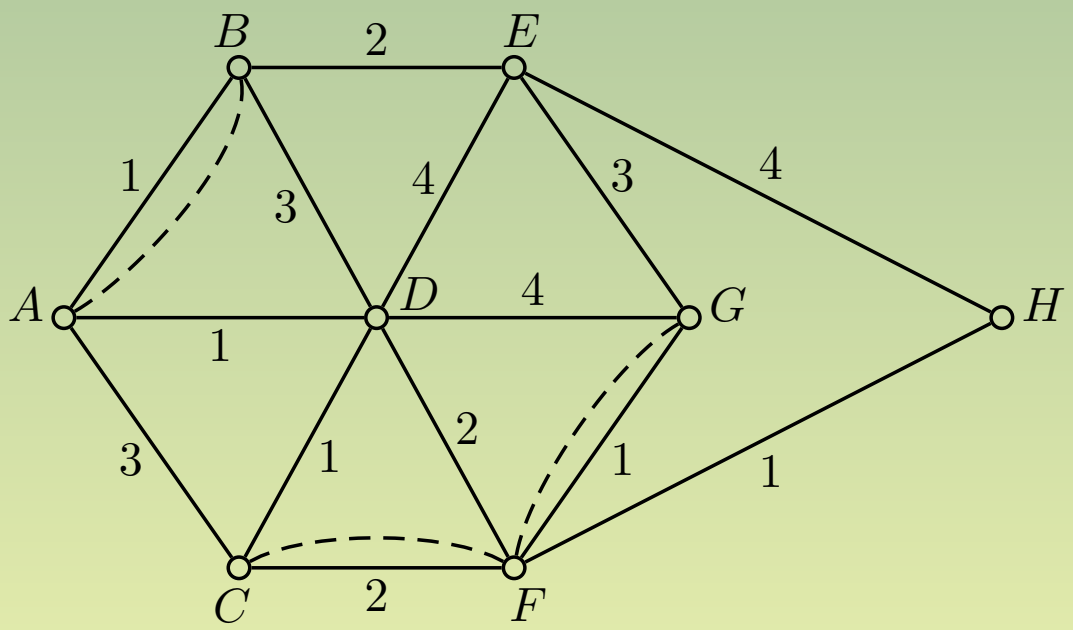
2: Duljine najkraćih putova između vrhova neparnog stupnja

$AB \leftarrow 1, \quad AC \leftarrow 2, \quad AG \leftarrow 4$

$BC \leftarrow 3, \quad BG \leftarrow 5, \quad CG \leftarrow 3$

3: $\boxed{AB + CG \leftarrow 4}$, $AC + BG \leftarrow 7$, $AG + BC \leftarrow 7$

4: Udvostručimo najkraći (A, B)-put i najkraći (C, G)-put pa dobivamo pseudograf G'.



5: Pomoću Fleuryjevog algoritma pronađemo Eulerovu turu u G'. Jedan primjer Eulerove ture u G' je

$$ABACFCDBEDGEHFGFDA$$

i njezina težina je 36. To je optimalna tura u grafu G.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi

Šetnje u grafu

Teorem o šetnjama

Povezanost grafa

Riješeni primjeri

Karakterizacija bipartitnih grafova

Eulerovi grafovi

Hamiltonovi grafovi

Težinski grafovi

Dijkstrin algoritam

Složenost Dijkstrinog algoritma

Poboljšani Dijkstrin algoritam

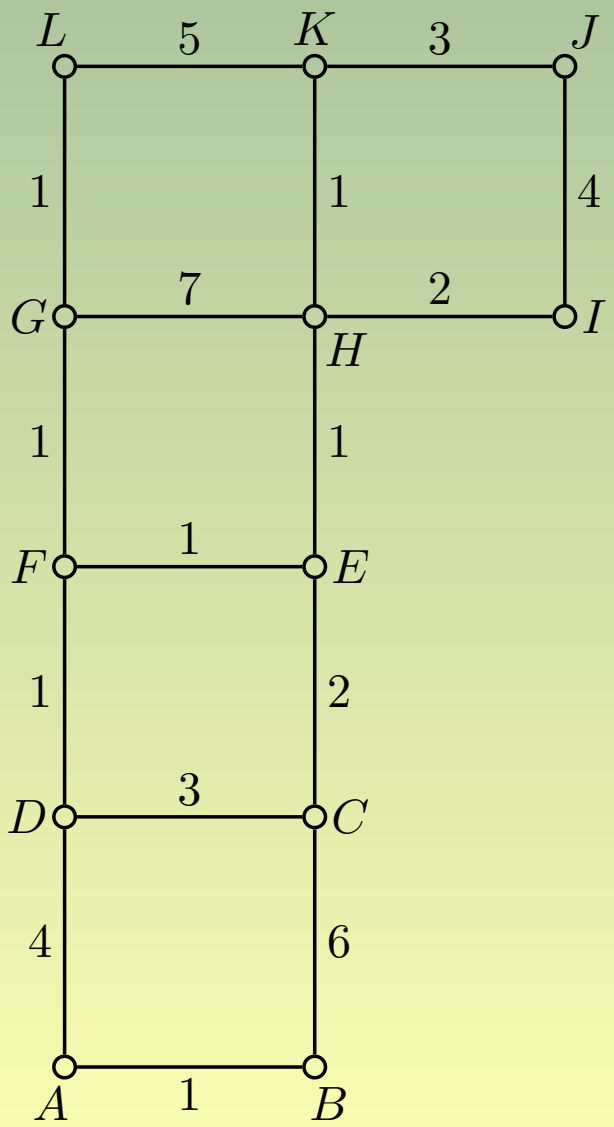
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma

Floyd-Warshallov algoritam

Problem kineskog poštara

Primjer 7.51.

Riješite problem kineskog poštara za graf



Rješenje.

1: Vrhovi neparnog stupnja: C, D, E, F, G, K.

2: Duljine najkraćih putova između vrhova neparnog stupnja

$$CD \leftarrow 3, \quad CE \leftarrow 2, \quad CF \leftarrow 3, \quad CG \leftarrow 4, \quad CK \leftarrow 4$$
$$DE \leftarrow 2, \quad DF \leftarrow 1, \quad DG \leftarrow 2, \quad DK \leftarrow 4, \quad EF \leftarrow 1$$
$$EG \leftarrow 2, \quad EK \leftarrow 2, \quad FG \leftarrow 1, \quad FK \leftarrow 3, \quad GK \leftarrow 4$$

3: $CD + EF + GK \leftarrow 8, \quad CD + EG + FK \leftarrow 8,$

$\boxed{CD + EK + GF \leftarrow 6}, \quad CE + DF + GK \leftarrow 7,$

$CE + DK + GF \leftarrow 7, \quad CE + DG + FK \leftarrow 7,$

$CF + DE + GK \leftarrow 9, \quad CF + DG + KE \leftarrow 7,$

$CF + DK + GE \leftarrow 9, \quad CG + DE + FK \leftarrow 9,$

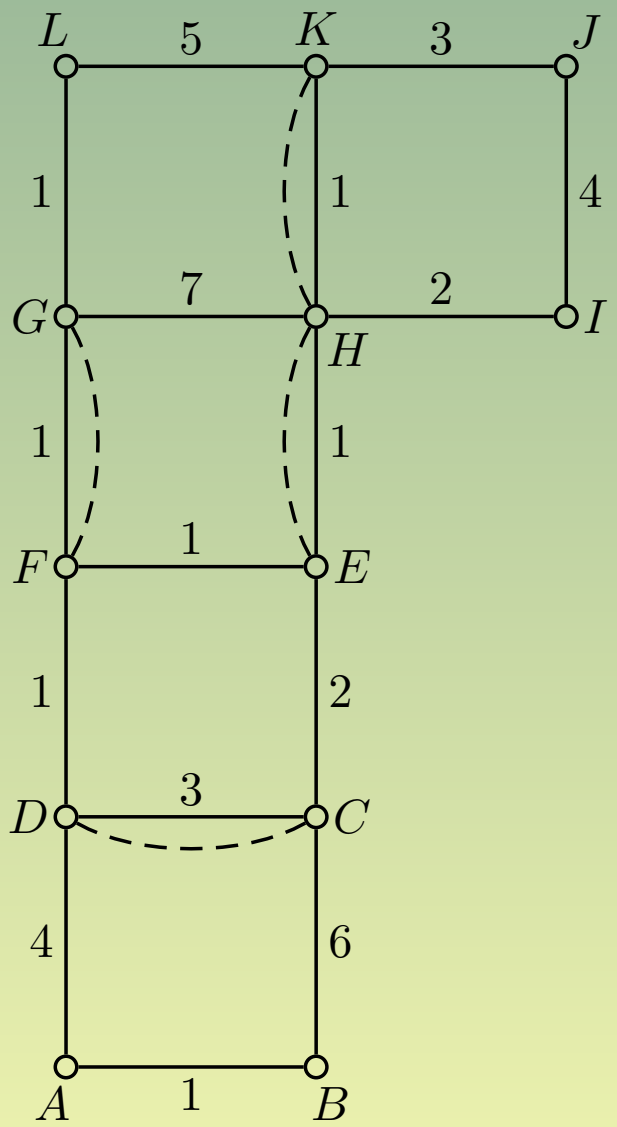
$CG + DF + EK \leftarrow 7, \quad CG + DK + EF \leftarrow 9,$

$CK + DE + FG \leftarrow 7, \quad CK + DF + EG \leftarrow 7,$

$CK + DG + EF \leftarrow 7$

4: Udvostručimo najkraće putove između vrhova C i D, E i K, G i F.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



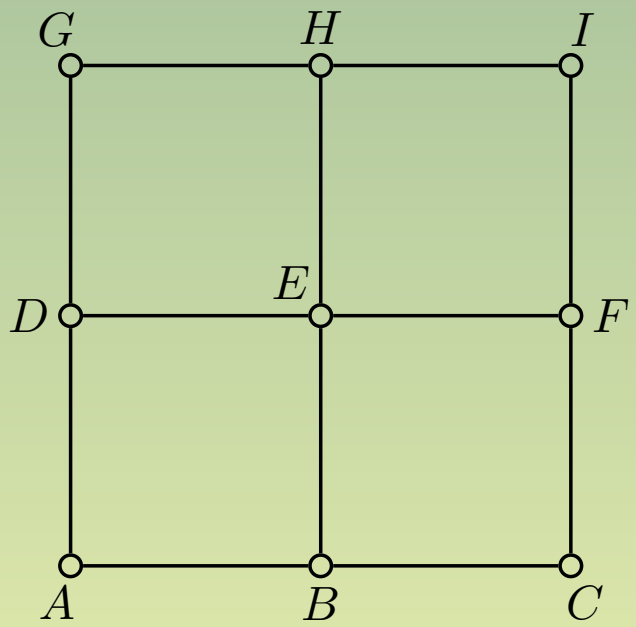
5: Eulerova tura: $ABCDCEHIJKLGHKHEFGFDA$

Težina te ture je 49 i to je optimalna tura.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.52.

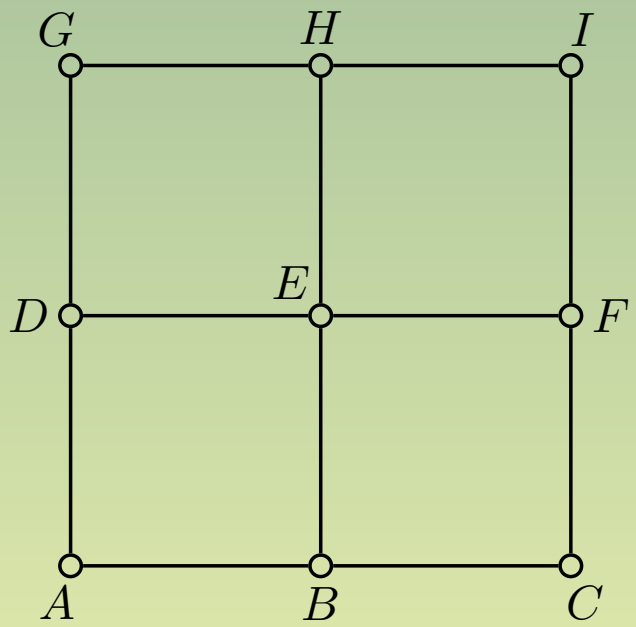
Riješite problem kineskog poštara za graf



Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.52.

Riješite problem kineskog poštara za graf



Rješenje.

Kako težine bridova nisu navedene, radi se o "običnom" grafu, odnosno radi se o težinskom grafu čije su težine svih bridova jednake 1.

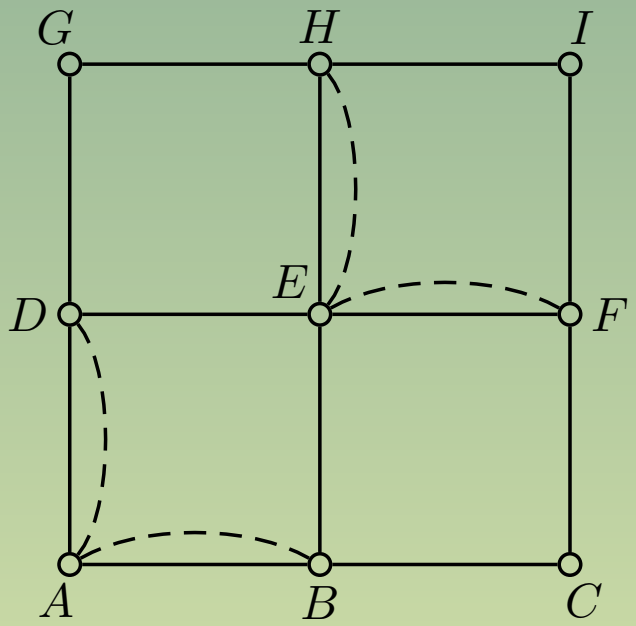
1: Vrhovi neparnog stupnja: B, D, F, H

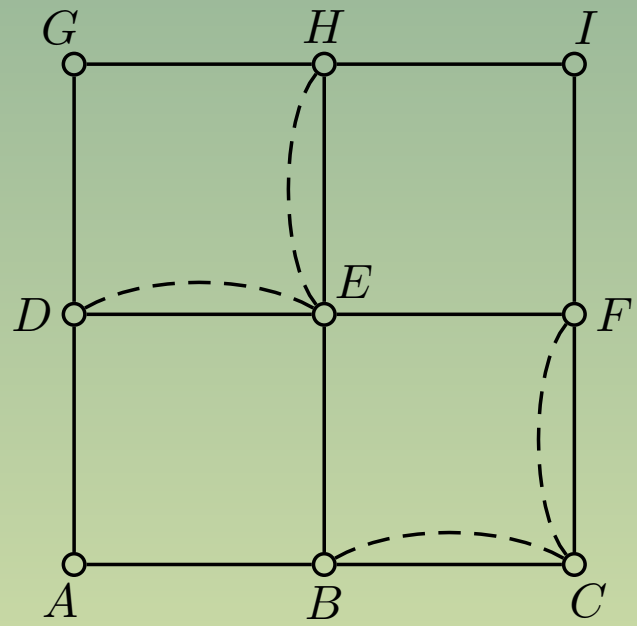
2: Duljine najkraćih putova između vrhova neparnog stupnja
$BD \leftarrow 2, \quad BF \leftarrow 2, \quad BH \leftarrow 2$
$DF \leftarrow 2, \quad DH \leftarrow 2, \quad FH \leftarrow 2$

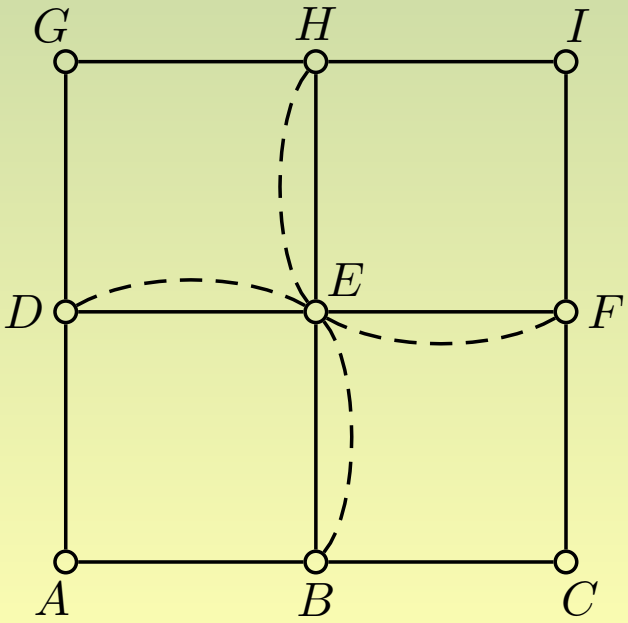
3: $BD + FH \leftarrow 4, \quad BF + DH \leftarrow 4, \quad BH + DF \leftarrow 4$

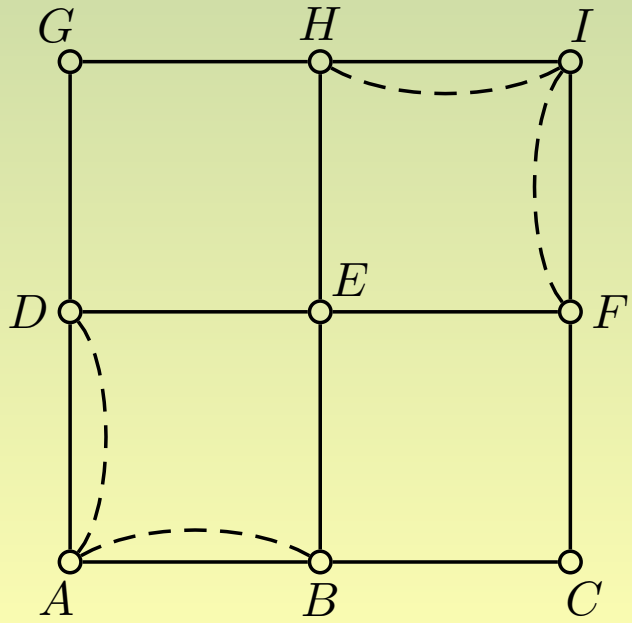
4: Postoji 7 različitih rješenja koja su prikazana na sljedećim slikama. Za svaki od tih slučaja pronađite Eulerove ture. Svaka od tih tura je optimalna i težine je 16.

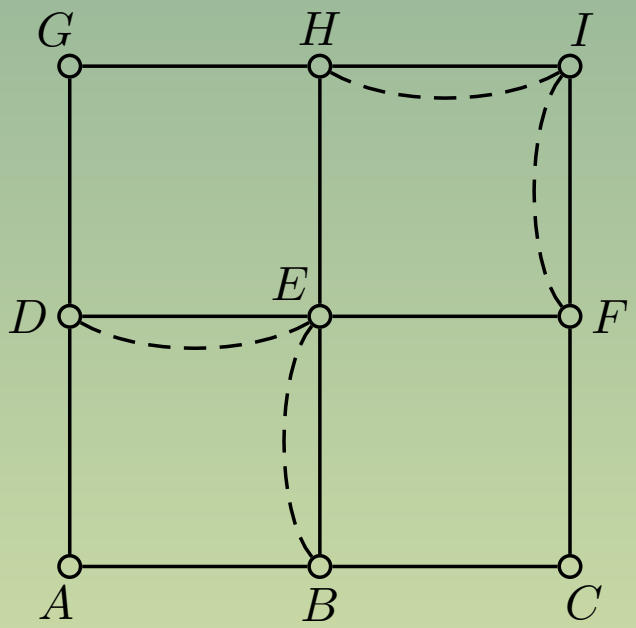
Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

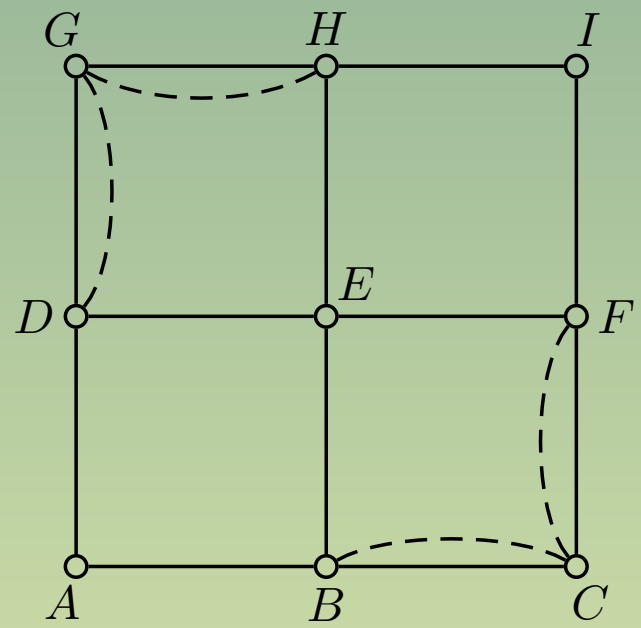

G
H
I
D
E
F
A
B
C

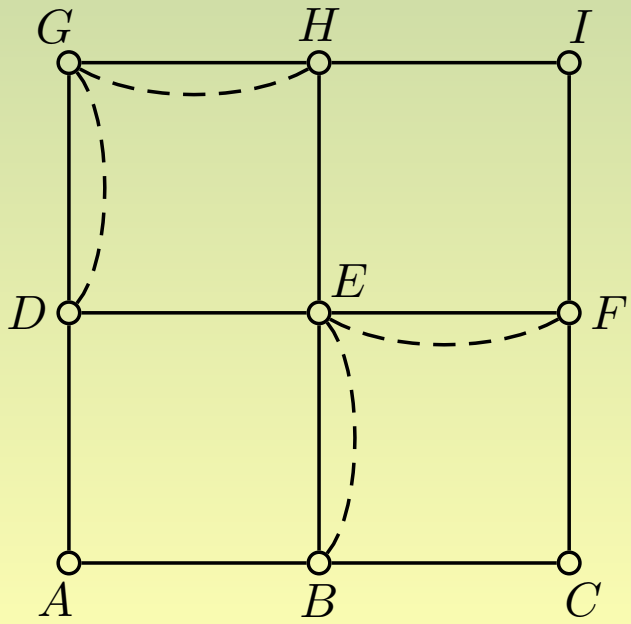

G
H
I
D
E
F
A
B
C


G
H
I
D
E
F
A
B
C


G
H
I
D
E
F
A
B
C


G
H
I
D
E
F
A
B
C


G
H
I
D
E
F
A
B
C


G
H
I
D
E
F
A
B
C

Primjer 7.53.

Riješite problem kineskog poštara za graf K_5.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.53.

Riješite problem kineskog poštara za graf K_5.

Rješenje.

Graf K_5 je Eulerov pa ne treba duplicirati bridove u njemu. Stoga je svaka Eulerova tura u K_5 optimalna (bez obzira da li su svi bridovi iste težine ili nisu). Dovoljno je primijeniti Fleuryjev algoritam i pronaći jednu Eulerovu turu u K_5.

Primjer 7.54.

Dokažite da Kwanov algoritam svaki brid duplicira najviše jedanput.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

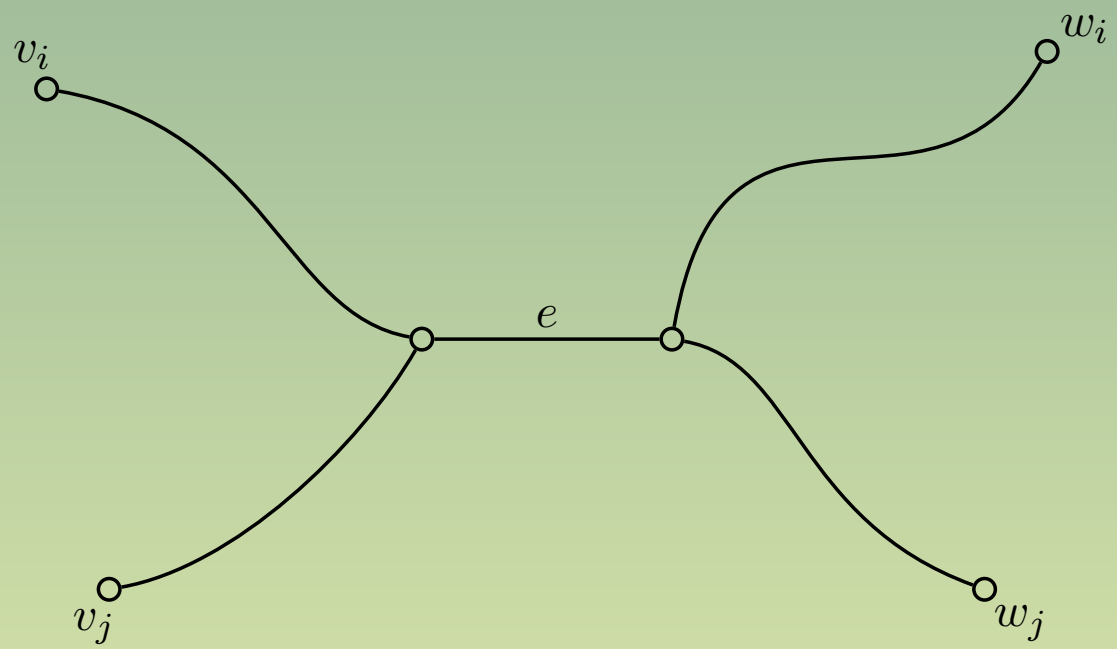
Primjer 7.54.

Dokažite da Kwanov algoritam svaki brid duplicira najviše jedanput.

Rješenje.

Neka je $\mathcal{P} = \{\{v_1, w_1\}, \{v_2, w_2\}, \ldots, \{v_m, w_m\}\}$ optimalna particija vrhova neparnog stupnja u parove koja je pronađena u trećem koraku algoritma. Neka je $l_i = d(v_i, w_i)$ i $L = \sum_{i=1}^{m} l_i$. Po pretpostavci je L najmanja od svih takvih suma po svim mogućim particijama vrhova neparnog stupnja u parove. Ako bi neki brid e bio dupliciran zbog toga jer je na najkraćem putu od v_i do w_i, a kasnije još jednom jer je na najkraćem putu od v_j do w_j, tada za particiju $\mathcal{P}'$ dobivenu iz particije $\mathcal{P}$ zamjenom

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara



parova $\{v_i, w_i\}$ i $\{v_j, w_j\}$ sa parovima $\{v_i, v_j\}$ i $\{w_i, w_j\}$ vrijedi

$$L' = L - 2w(e) < L,$$

što je kontradikcija s minimalnošću od L. Dakle, Kwanov algoritam duplicira svaki brid najviše jedanput.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.55.

Dokažite da je pseudograf G', konstruiran iz grafa G Kwanovim algoritmom, Eulerov.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Primjer 7.55.

Dokažite da je pseudograf G', konstruiran iz grafa G Kwanovim algoritmom, Eulerov.

Rješenje.

Svaki vrh neparnog stupnja je početak ili kraj točno jednog dupliciranog puta u algoritmu, iz čega slijedi da svi vrhovi neparnog stupnja u G postaju vrhovi parnog stupnja u G'. Svaki vrh parnog stupnja u G, ili ne mijenja stupanj u G' (pa je i dalje parnog stupnja), ili se nalazi u unutrašnjosti nekog dupliciranog puta između vrhova neparnog stupnja pa se njegov stupanj povećava za višekratnik broja 2 pa opet on i dalje ostaje vrh parnog stupnja u G'. U svakom slučaju, svi vrhovi u G' su parnog stupnja pa je G' Eulerov graf.

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Šetnje u grafu. Težinski grafovi
Šetnje u grafu
Teorem o šetnjama
Povezanost grafa
Riješeni primjeri
Karakterizacija bipartitnih grafova
Eulerovi grafovi
Hamiltonovi grafovi
Težinski grafovi
Dijkstrin algoritam
Složenost Dijkstrinog algoritma
Poboljšani Dijkstrin algoritam
Složenost poboljšanog Dijkstrinog algoritma
Floyd-Warshallov algoritam
Problem kineskog poštara

Napomena.

Ako graf ima veliki broj vrhova neparnog stupnja, tada Kwanov algoritam zahtijeva mnogo vremena da se izvrši. Naime, ključni je treći korak algoritma kada vrhove neparnog stupnja particioniramo u parove i tražimo među svim tim participima onu najoptimalniju. Dakle, zapravo moramo proći kroz sve takve moguće particije i tada odabrati onu najmanje težine. No, broj tih particija jednak je $\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$ (pogledajte primjer s tenisačicama), gdje je $2n$ broj vrhova neparnog stupnja. Broj $\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$ brzo raste kako se n povećava pa zbog toga Kwanov algoritam već za manje n-ove zahtijeva puno vremena.

Dio VIII

Stabla

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Sadržaj

- Stabla
  - Definicija i karakterizacije stabla
  - Riješeni primjeri
  - Korijenska stabla
  - Binarna stabla i algebarski izrazi
  - Stablo sortiranja
  - Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
  - Hrpa
  - Razapinjuća stabla
  - Rekurzija za razapinjuća stabla
  - Riješeni primjeri
  - Matrični teorem o stablima
  - Teoretski primjeri
  - DFS i BFS algoritam
  - DFS algoritam
  - BFS algoritam
  - Povezanost grafa
  - Kruskal i Prim
  - Kruskalov algoritam
  - Implementacija Kruskalovog algoritma
  - Primov algoritam
  - Implementacija Primovog algoritma
  - Još o Hamiltonovom ciklusu

Stabla

Def. i karakterizacije

Riješeni primjeri

Korijenska stabla

Bin. stabla i alg. izrazi

Stablo sortiranja

Sortiranje u parcijalno uređenom skupu

Hrpa

Razapinjuća stabla

Rekurzija za raz. stabla

Riješeni primjeri

Matrični teorem o stablima

Teoretski primjeri

DFS i BFS algoritam

DFS algoritam

BFS algoritam

Povezanost grafa

Kruskal i Prim

Kruskalov algoritam

Implementacija Kruskala

Primov algoritam

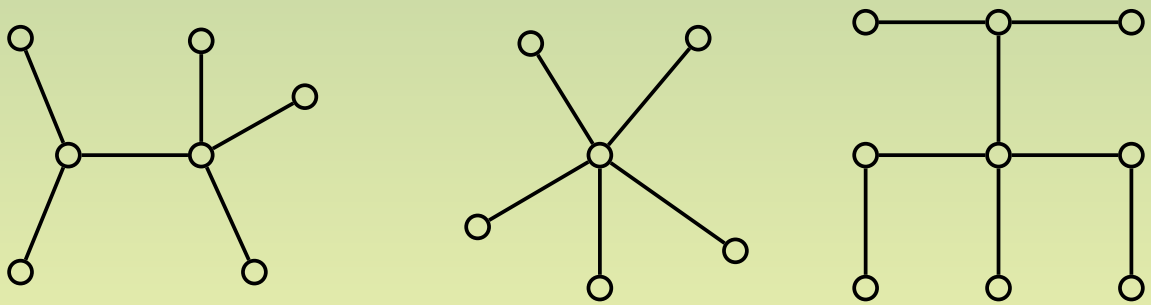
Implementacija Prima

Još o Ham. ciklusu

Definicija i karakterizacije stabla

Stablo je povezani graf koji ne sadrži cikluse.

Šuma je graf bez ciklusa, a komponente povezanosti šume su stabla.



šuma s tri stabla

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Vama za vježbu ostavljamo da dokažete jednu očiglednu činjenicu.

Zadatak 8.1.

Dokažite da svaka zatvorena staza sadrži ciklus. Pokažite kontraprimjerom da ne mora općenito svaka zatvorena šetnja sadržavati ciklus. Objasnite zbog čega kod zatvorene šetnje tvrdnja ne mora uvijek vrijediti! U kojem slučaju će tvrdnja vrijediti kod zatvorene šetnje?

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Propozicija 8.1.

Graf G bez petlji je stablo akko između svaka dva različita vrha u G postoji jedinstveni put.

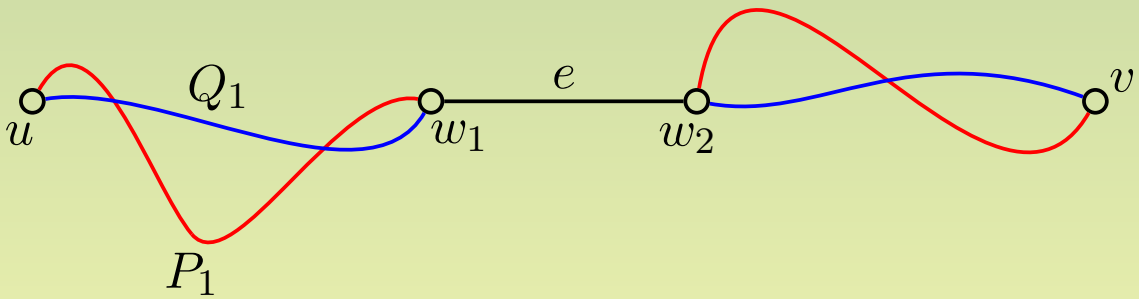
Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Neka je G stablo. Tada je G povezani graf i ne sadrži cikluse. Neka su u i v dva različita vrha u G. Kako je G povezan, postoji put P između ta dva vrha. Tvrdimo da osim puta P nema drugih putova u grafu G između vrhova u i v. Pretpostavimo da je Q još jedan (u, v)-put u G različit od puta P. Ako P i Q nemaju zajedničkih bridova, tada je PQ^{-1} zatvorena staza u G pa onda sadrži ciklus. Ukoliko P i Q imaju zajedničkih bridova, neka je $e = w_1w_2$ prvi njihov zajednički brid.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Neka je P_1 (u, w_1)-dio puta P, a Q_1 (u, w_1)-dio puta Q. Tada je $P_1 Q_1^{-1}$ zatvorena staza u G pa ona opet sadrži ciklus. Dakle, u svakom slučaju, ako bi između vrhova u i v postojala dva različita puta u G, tada bi G sadržavao ciklus, a kako je G stablo, to je nemoguće. Stoga u svakom stablu između svaka dva različita vrha postoji jedinstveni put.



Stabla

Def. i karakterizacije

Riješeni primjeri

Korijenska stabla

Bin. stabla i alg. izrazi

Stablo sortiranja

Sortiranje u parcijalno uređenom skupu

Hrpa

Razapinjuća stabla

Rekurzija za raz. stabla

Riješeni primjeri

Matrični teorem o stablima

Teoretski primjeri

DFS i BFS algoritam

DFS algoritam

BFS algoritam

Povezanost grafa

Kruskal i Prim

Kruskalov algoritam

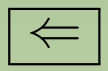
Implementacija Kruskala

Primov algoritam

Implementacija Prima

Još o Ham. ciklusu

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Neka je G graf bez petlji u kojemu između svaka dva različita vrha postoji jedinstveni put. Tada je G povezani graf. Tvrdimo još da G nema ciklusa. Kada bi G sadržavao ciklus, tada bi između svaka dva vrha u tom ciklusu postojala barem dva različita puta između njih, što je kontradikcija s pretpostavkom. Stoga G ne sadrži cikluse. Kako je G povezan i ne sadrži cikluse, slijedi da je G stablo. ♡

Propozicija 8.2.

Neka je G graf i $\delta(G) \geqslant 2$. Tada G sadrži ciklus.

Dokaz.

Neka je $v_1 \in V(G)$ proizvoljni vrh. Kako je $d(v_1) > 0$, možemo krenuti prema nekom susjednom vrhu v_2. Kako je $d(v_2) \geqslant 2$, možemo krenuti prema nekom novom susjednom vrhu v_3 duž novog brida. Tada je $v_1v_2v_3$ put. Općenito, ako je $k \geqslant 2$ i ako smo pronašli put kroz vrhove $v_1, \ldots, v_k$, tada zbog $d(v_k) \geqslant 2$, v_k je susjedan nekom vrhu v_{k+1} koji je različit od v_{k-1}. Ako je $v_{k+1} \in \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, tada G sadrži ciklus, a u protivnom je $v_1v_2 \cdots v_kv_{k+1}$ put u G. Kako imamo samo konačno mnogo vrhova, u najgorem slučaju, kod zadnjeg vrha ćemo se morati vratiti na neki prethodno posjećeni vrh (jer je $\delta(G) \geqslant 2$) pa ćemo dobiti ciklus u grafu G. ♡

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Korolar 8.1.

Svako stablo koje ima više od jednog vrha mora imati barem jedan vrh stupnja 1.

Dokaz.

Kada stablo G ne bi imalo vrh stupnja 1, tada bi bilo $\delta(G) \geqslant 2$. Prema prethodnoj propoziciji bi stablo G sadržavalo ciklus, što je nemoguće. ♡

List u stablu je vrh stupnja 1.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Teorem 8.1.

Povezani graf G je stablo akko vrijedi $\varepsilon = \nu - 1$.

Dokaz.

$\Rightarrow$

Neka je G stablo. Tvrdimo da je tada $\varepsilon = \nu - 1$. Dokaz provodimo indukcijom po ν. Za $\nu = 1$ tvrdnja je očita jer se tu radi o praznom stablu, tj. o stablu koje ima jedan vrh i nula bridova. Pretpostavimo da svako stablo sa ν vrhova ima $\nu - 1$ bridova. Neka je T stablo sa $\nu + 1$ vrhova. Tvrdimo da tada T ima ν bridova. Prema prethodnom korolaru T ima vrh v stupnja 1. Izbacimo iz stabla T vrh v i brid koji je s njim incidentan. Tvrdimo da je $T_0 = T - v$ opet stablo. Naime, T_0 nema ciklusa jer T nema ciklusa. Treba još pokazati da je T_0 povezan graf.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Neka su u i w dva vrha u T_0. Ta dva vrha su prema propoziciji 8.1. spojena jedinstvenim putom $\mathcal{P}$ u T. Svaki unutarnji vrh na putu $\mathcal{P}$ je barem stupnja 2 pa je stoga $\mathcal{P}$ također i put u T_0 između vrhova u i w iz čega slijedi da je T_0 povezani graf. Kako je T_0 povezan i ne sadrži cikluse, slijedi da je T_0 zaista stablo. No, stablo T_0 ima ν vrhova pa onda prema pretpostavci indukcije ima $\nu - 1$ bridova. Iz toga slijedi da stablo T ima ν bridova kako smo i tvrdili.

$\Leftarrow$

Neka je G povezani graf u kojemu vrijedi $\varepsilon = \nu - 1$. Tvrdimo da je tada G stablo. Trebamo zapravo još samo pokazati da G ne sadrži cikluse. Pretpostavimo suprotno, tj. da G ipak sadrži ciklus $v_1 v_2 \cdots v_k v_1$. Uočimo da je G jednostavan graf jer inače ne bi bio povezan, pa je $k \geqslant 3$. Izbacimo iz grafa G brid $e = v_1 v_2$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Preostali graf $G - e$ ima ν vrhova i $\nu - 2$ brida. Nadalje, $G - e$ je povezan jer bilo koja dva vrha $u, v \in V(G)$ koja su bila povezana putem koji je sadržavao brid e, i dalje su povezani u $G - e$ tako da brid e zamijenimo putem $v_1 v_k v_{k-1} \cdots v_3 v_2$. Postupak nastavljamo dalje. Ako $G - e$ sadrži ciklus, uklonimo jedan brid iz tog ciklusa i opet dobivamo povezani graf koji još uvijek ima ν vrhova, ali samo $\nu - 3$ brida. Kako je G konačan graf, doći ćemo u situaciju da ćemo opisanim postupkom ukloniti sve cikluse i na taj način dobiti stablo. Ako će se to dogoditi u k-tom koraku, dobiveni graf će imati ν vrhova i $\nu - 1 - k$ bridova i bit će stablo. Prema prethodno dokazanom smjeru, u stablu vrijedi da je $\varepsilon = \nu - 1$, pa za dobiveno stablo vrijedi da je $\nu - k - 1 = \nu - 1$ odakle slijedi da je $k = 0$, tj. već u nultom koraku smo imali stablo, odnosno graf G na početku je bio već stablo. ♡

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Korolar 8.2.

Svako stablo koje ima više od jednog vrha mora imati barem dva lista.

Dokaz.

Prema ◂ korolaru 8.1. svako stablo T s više od jednog vrha ima barem jedan list. Pretpostavimo da su svi ostali vrhovi u stablu T barem stupnja 2. Tada iz relacije

$$\sum_{v \in V(T)} d(v) = 2\varepsilon$$

slijedi da je $1 + (\nu - 1) \cdot 2 \leqslant 2\varepsilon$, tj.

$$2\nu - 1 \leqslant 2\varepsilon. \qquad (*)$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

No, prema prethodnom teoremu ◂ teorem 8.1. za stablo vrijedi da je $\varepsilon = \nu - 1$. Uvrstimo li to u $(*)$, dobivamo

$$2\nu - 1 \leqslant 2\varepsilon$$
$$2\nu - 1 \leqslant 2(\nu - 1)$$
$$2\nu - 1 \leqslant 2\nu - 2$$

što je kontradikcija. Dakle, svako stablo s više od jednog vrha mora imati barem dva lista. ♡

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Korolar 8.3.

Ako stablu dodamo jedan brid, dobit ćemo graf koji sadrži ciklus.

Dokaz.

Dodavanjem brida stablu dobivamo graf u kojemu je broj bridova jednak broju vrhova, tj. $\nu = \varepsilon$. Prema ◂ teoremu 8.1., dobiveni graf nije stablo. Kako dodavanjem brida ne možemo pokvariti povezanost, jedino što sprečava dobiveni graf da bude stablo jest to da sadrži ciklus. ♡

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Teorem 8.2.

Aciklički graf (graf bez ciklusa) G je stablo akko $\varepsilon = \nu - 1$.

Dokaz.

$\Rightarrow$

Ako je G stablo, tada je $\varepsilon = \nu - 1$. Taj smjer smo već pokazali u dokazu ◂ teorema 8.1..

$\Leftarrow$

Pretpostavimo da je G aciklički graf za koji vrijedi da je $\varepsilon = \nu - 1$. Tvrdimo da je tada G stablo. Da bismo to pokazali, treba samo još provjeriti da je G povezani graf. Neka su $G_1, G_2, \ldots, G_k$ komponente povezanosti grafa G. Neka je $\nu_i = \nu(G_i)$, $\varepsilon_i = \varepsilon(G_i)$ za $i = 1, 2, \ldots, k$. Tada je

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k = \nu, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_k = \varepsilon.$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Svaka komponenta povezanosti G_i je povezan graf i nema ciklusa jer ih nema niti graf G. Stoga je svaka komponenta povezanosti G_i stablo. Zbog toga za svaki $i = 1, 2, \ldots, k$ vrijedi $\varepsilon_i = \nu_i - 1$. Iz toga dobivamo

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_k \\
\varepsilon &= (\nu_1 - 1) + (\nu_2 - 1) + \cdots + (\nu_k - 1) \\
\varepsilon &= (\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k) - k \\
\varepsilon &= \nu - k
\end{aligned}$$

Kako je po pretpostavci $\varepsilon = \nu - 1$, slijedi da je $\nu - k = \nu - 1$, tj. $k = 1$. Drugim riječima, graf G ima samo jednu komponentu povezanosti pa je zaista povezan. ♡

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Teorem 8.3.

Povezani graf G bez petlji je stablo akko svaki brid u G je rezni brid.

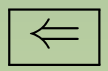
Dokaz.

$\Rightarrow$

Neka je G stablo. Tada G nema ciklusa. Neka je $e = v_1v_2$ proizvoljni brid u grafu G. Tada taj brid ne pripada niti jednom ciklusu u G (jer G nema uopće ciklusa). Vrhovi v_1 i v_2 su povezani bridom e u grafu G. Kada bi vrhovi v_1 i v_2 bili povezani u grafu $G - e$, tada bi postojao put u $G - e$ između vrhova v_1 i v_2. Međutim, tada bismo dodavanjem brida e tom putu dobili ciklus u G, što je nemoguće. Dakle, graf $G - e$ je nepovezan, tj. e je rezni brid grafa G. Kako je e bio proizvoljni brid u grafu G, slijedi da je svaki brid u stablu rezni brid.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Pretpostavimo da je G povezani graf bez petlji u kojemu je svaki brid rezni, ali da nije stablo. Tada G sadrži barem jedan ciklus $\mathcal{C}$. Neka je $e = v_1v_2$ bilo koji brid iz tog ciklusa. Tada su vrhovi v_1 i v_2 povezani putem $\mathcal{C} - e$ u grafu $G - e$. No, tada brid e nije rezni brid u grafu G, što je kontradikcija s pretpostavkom. Stoga je G zaista stablo. $\heartsuit$.

Do sada smo pokazali nekoliko različitih karakterizacija stabla. Skupimo ih sve u jedan teorem.

Teorem 8.4 (Karakterizacije stabla).

Neka je G graf bez petlji. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne.

i. *G je stablo.*
ii. *Između svaka dva vrha u G postoji jedinstveni put.*
iii. *G je povezani graf i vrijedi $\varepsilon = \nu - 1$.*
iv. *G je aciklički graf i vrijedi $\varepsilon = \nu - 1$.*
v. *G je povezani graf i svaki brid u G je rezni brid.*

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.1.

Nacrtajte sva neizomorfna stabla s pet vrhova.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

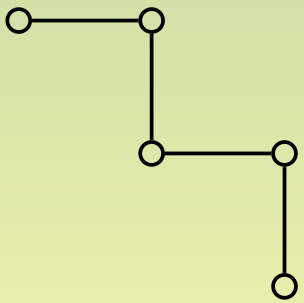
Primjer 8.1.

Nacrtajte sva neizomorfna stabla s pet vrhova.

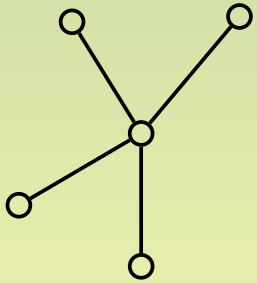
Rješenje.

Ukupno postoje tri takva međusobno neizomorfna stabla.

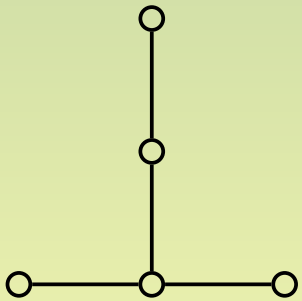
Nacrtajte na svoj vlastiti način neka stabla s pet vrhova i za svako od njih odredite kojoj od dolje navedenih klasa pripadaju.



T_1



T_2



T_3

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.2.

Neka je G jednostavni graf u kojemu su vrhovi glavni europski gradovi. Brid između dva vrha označava da postoji direktni let između odgovarajućih gradova. Što bi značilo kada bi bilo $\frac{\varepsilon}{\nu} < 1$?

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.2.

Neka je G jednostavni graf u kojemu su vrhovi glavni europski gradovi. Brid između dva vrha označava da postoji direktni let između odgovarajućih gradova. Što bi značilo kada bi bilo $\frac{\varepsilon}{\nu} < 1$?

Rješenje.

Ako je $\frac{\varepsilon}{\nu} < 1$, tada je u grafu G broj bridova manji od broja vrhova. Jedna mogućnost je da je tada graf G nepovezan, a to bi značilo da postoje barem dva glavna europska grada za koje je nemoguće niti na koji način doći avionom iz jednog u drugi. Ako pak je graf G ipak povezan, tada G mora biti stablo $(\varepsilon = \nu - 1)$, a to znači da postoji jedinstveni način putovanja avionom između svaka dva pojedina grada (jer u stablu između svaka dva različita vrha postoji jedinstveni put).

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.3.

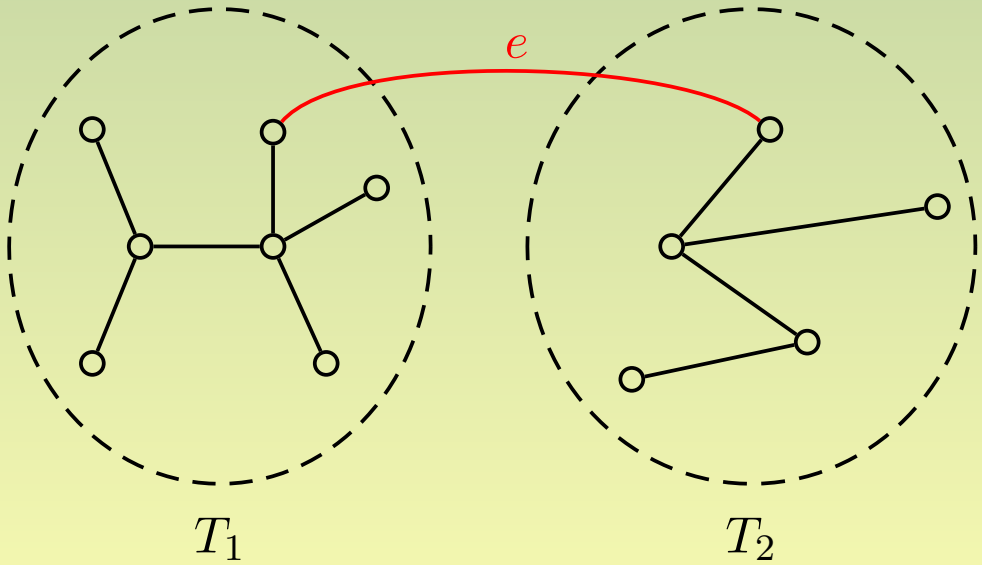
Neka je G graf koji ima dvije komponente povezanosti T_1 i T_2 koje su stabla. Neka je H graf dobiven iz grafa G dodavanjem jednog brida koji ima jedan kraj u T_1, a drugi u T_2. Dokažite da je H stablo.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.3.

Neka je G graf koji ima dvije komponente povezanosti T_1 i T_2 koje su stabla. Neka je H graf dobiven iz grafa G dodavanjem jednog brida koji ima jedan kraj u T_1, a drugi u T_2. Dokažite da je H stablo.

Rješenje.



Neka je e dodani brid koji ima jedan kraj u T_1, a drugi u T_2. Brid e zapravo povezuje komponente povezanosti T_1 i T_2 grafa G pa je stoga H povezani graf. Treba još vidjeti da H nema ciklusa. Pretpostavimo da H sadrži ciklus. Taj ciklus ne može biti sadržan u T_1, niti u T_2 jer su T_1 i T_2 po pretpostavci stabla. Stoga taj ciklus mora sadržavati brid e. Međutim, tada bi osim brida e morao postojati još jedan brid kojemu je jedan kraj u T_1, a drugi u T_2. No, iz konstrukcije grafa H slijedi da takav brid u H ne postoji. Stoga graf H ne sadrži cikluse. Dakle, H je povezan i ne sadrži cikluse pa je onda stablo.

Drugi način je da umjesto da promatramo da li ima ciklusa, prebrojimo sve vrhove i bridove u grafu H. Naime, kako su T_1 i T_2 stabla, vrijedi

$$\varepsilon(T_1) = \nu(T_1) - 1, \quad \varepsilon(T_2) = \nu(T_2) - 1.$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Iz konstrukcije grafa H slijedi da je

$$\begin{aligned}\varepsilon(H) &= \varepsilon(G) + 1 = \varepsilon(T_1) + \varepsilon(T_2) + 1 = \\ &= \big(\nu(T_1) - 1\big) + \big(\nu(T_2) - 1\big) + 1 = \\ &= \nu(T_1) + \nu(T_2) - 1\end{aligned}$$

Nadalje, po konstrukciji je $\nu(H) = \nu(G) = \nu(T_1) + \nu(T_2)$ iz čega slijedi da je $\varepsilon(H) = \nu(H) - 1$. Kako je H povezan graf, prema ◂ teoremu 8.1. H je stablo.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.4.

Neka je T stablo s n vrhova $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Dokažite da je broj listova u stablu T jednak

$$2 + \sum_{d(v_i) \geqslant 3} \big(d(v_i) - 2\big).$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.4.

Neka je T stablo s n vrhova $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Dokažite da je broj listova u stablu T jednak

$$2 + \sum_{d(v_i) \geqslant 3} \big(d(v_i) - 2\big).$$

Rješenje.

Koristit ćemo poznatu činjenicu koja vrijedi u svakom grafu

$$\sum_{v \in V(T)} d(v) = 2\varepsilon,$$

te relaciju $\varepsilon = \nu - 1$ koja vrijedi za stabla. Listovi u stablu su zapravo vrhovi stupnja 1. Neka je l broj vrhova stupnja 1 u stablu T (što je zapravo broj listova). Neka je k broj preostalih vrhova u T. Tada je $l + k = n$. Sada imamo

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

$$\sum_{v_i} d(v_i) = 2\varepsilon$$

$$l + \sum_{d(v_i)\geqslant 2} d(v_i) = 2n - 2$$

$$l + \sum_{d(v_i)\geqslant 2} d(v_i) = 2(l + k) - 2$$

$$l = \sum_{d(v_i)\geqslant 2} d(v_i) - 2k + 2$$

U sumi $\sum_{d(v_i)\geqslant 2} d(v_i)$ ima točno k sumanada jer je k broj vrhova stupnja barem 2. Stoga dalje dobivamo

$$l = \sum_{d(v_i)\geqslant 2} \big(d(v_i) - 2\big) + 2.$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Za svaki vrh v_i za koji je $d(v_i) = 2$ dobivamo da je $d(v_i) - 2 = 0$ pa možemo promatranu sumu uzimati samo po vrhovima stupnja barem 3, tj. zaista vrijedi da je

$$l = \sum_{d(v_i) \geqslant 3} \big(d(v_i) - 2\big) + 2.$$

Primjer 8.5.

Ako za stablo T vrijedi da je $\Delta(T) \geqslant k$, tada T ima barem k vrhova stupnja 1. Dokažite!

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Za svaki vrh v_i za koji je $d(v_i) = 2$ dobivamo da je $d(v_i) - 2 = 0$ pa možemo promatranu sumu uzimati samo po vrhovima stupnja barem 3, tj. zaista vrijedi da je

$$l = \sum_{d(v_i) \geqslant 3} \big(d(v_i) - 2\big) + 2.$$

Primjer 8.5.

Ako za stablo T vrijedi da je $\Delta(T) \geqslant k$, tada T ima barem k vrhova stupnja 1. Dokažite!

Rješenje.

Kako svako stablo koje ima više od jednog vrha ima barem dva lista ◂ korolar 8.2., za $k = 1$ i $k = 2$ tvrdnja vrijedi.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Pretpostavimo da je $k \geqslant 3$. Sjetimo se formule za broj listova u stablu koju smo izveli u prethodnom zadatku. Naime, broj listova l u stablu jednak je

$$l = \sum_{d(v_i) \geqslant 3} \big(d(v_i) - 2\big) + 2.$$

Kako u stablu T postoji vrh stupnja barem k, tada uzmemo li sumu samo po tom jednom vrhu, dobivamo da je

$$l \geqslant (k-2) + 2 = k$$

jer je $d(v_i) - 2 > 0$ za svaki vrh v_i barem stupnja 3. Dakle, $l \geqslant k$ pa stablo T zaista ima barem k vrhova stupnja 1.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.6.

Dokažite da je svako stablo s više od jednog vrha bipartitni graf.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.6.

Dokažite da je svako stablo s više od jednog vrha bipartitni graf.

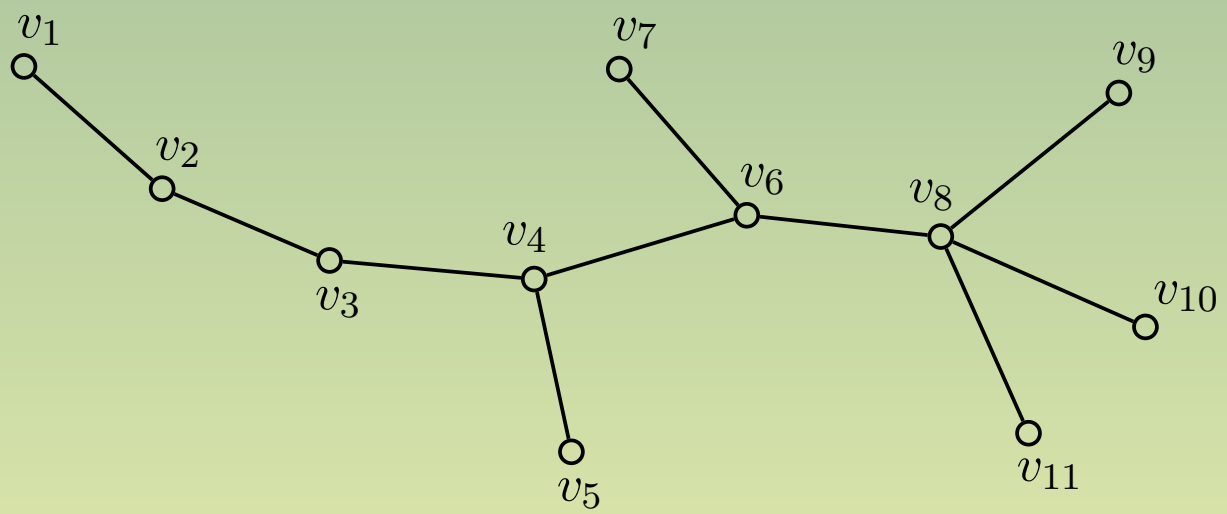
Rješenje.

Sjetimo se, graf je bipartitni ako i samo ako nema ciklusa neparnih duljina. ◂ teorem 7.1. Kako stablo nema ciklusa, tada specijalno nema niti ciklusa neparnih duljina pa je prema tome stablo bipartitni graf ukoliko ima barem dva vrha.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.7.

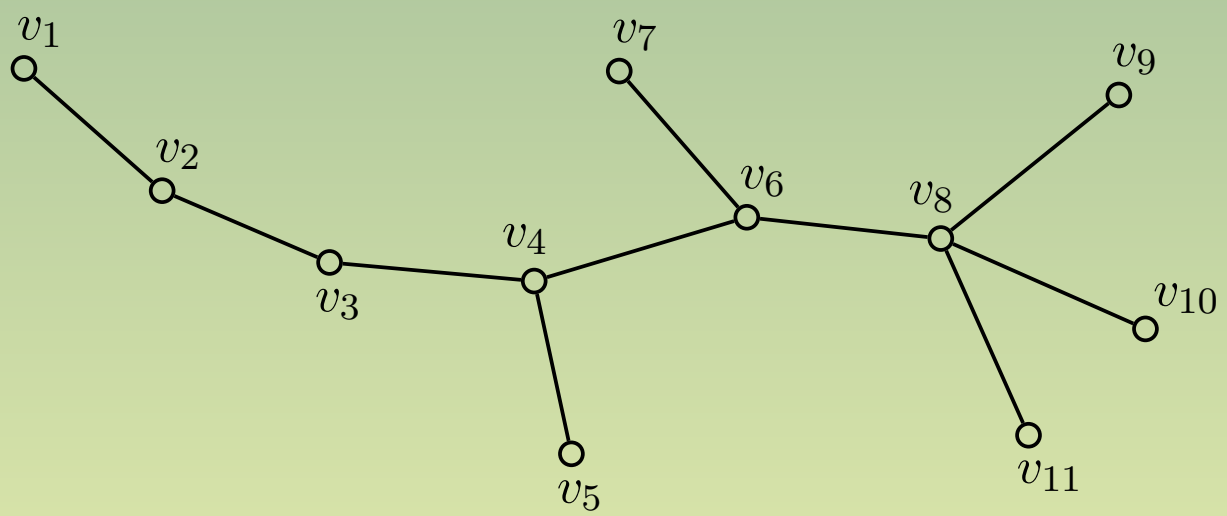
Odredite biparticiju stabla



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.7.

Odredite biparticiju stabla

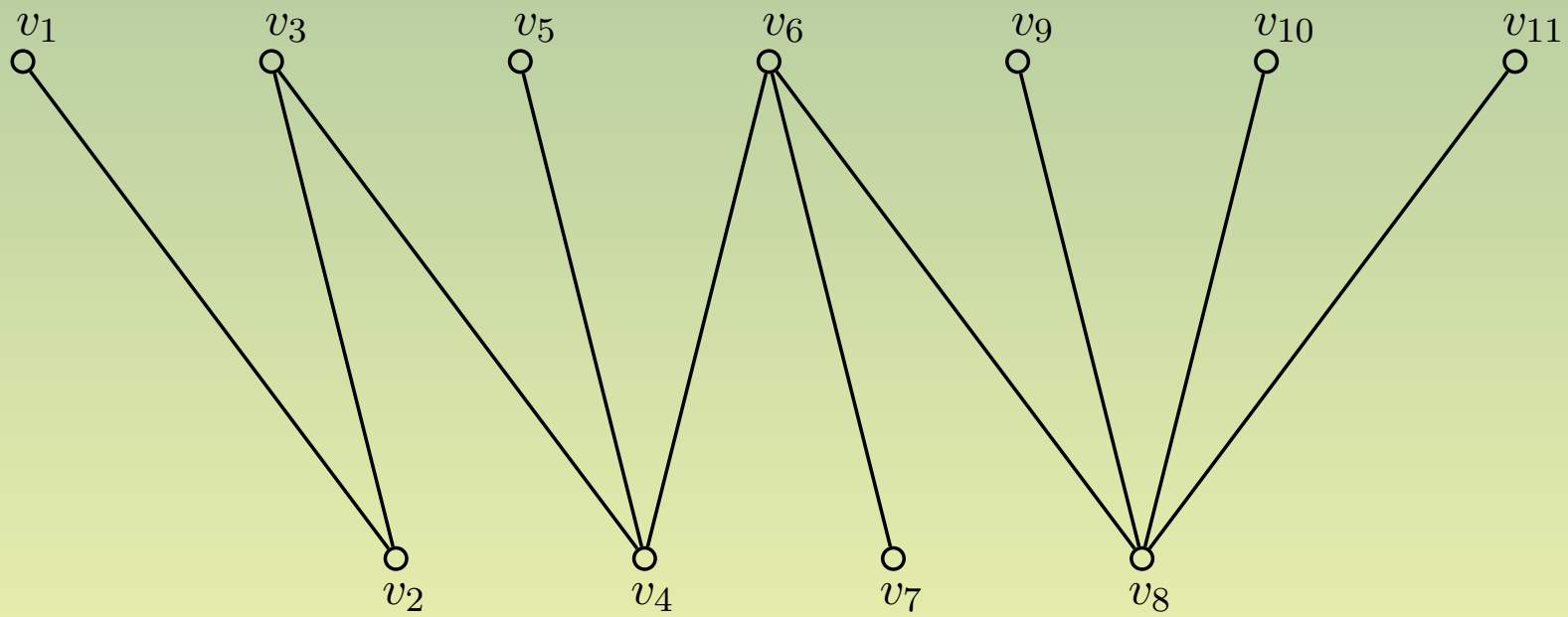


Rješenje.

Sjetimo se dokaza karakterizacije bipartitnih grafova, tj. smjera ako graf nema neparnih ciklusa, tada je bipartitan.

Uzmemo jedan vrh i stavimo ga u skup X. Tada svi vrhovi koji

od tog vrha imaju parnu udaljenost pripadaju skupu X, a svi vrhovi koji od odabranog vrha imaju neparnu udaljenost pripadaju skupu Y. Uzmimo vrh v_1 kao početni vrh. Tada dobivamo



$$X = \{v_1, v_3, v_5, v_6, v_9, v_{10}, v_{11}\}, \quad Y = \{v_2, v_4, v_7, v_8\}$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.8.

Nađite nužne i dovoljne uvjete da bi stablo T bilo potpuni bipartitni graf.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.8.

Nađite nužne i dovoljne uvjete da bi stablo T bilo potpuni bipartitni graf.

Rješenje.

Naime, pitamo se kada će $K_{m,n}$ biti stablo. Tvrdimo sljedeće:

$$K_{m,n} \text{ je stablo } \Leftrightarrow \ m = 1 \text{ ili } n = 1.$$

Zaista, jasno je da su $K_{1,1}$, $K_{m,1}$ i $K_{1,n}$ stabla. Obrnuto, ako je $K_{m,n}$ stablo, tada mora imati vrh stupnja 1. Iz toga slijedi da mora biti $m = 1$ ili $n = 1$.

Primjer 8.9.

Neka je G šuma sa ν vrhova i c komponenata povezanosti. Pronađite formulu za broj bridova šume G u ovisnosti o broju vrhova i broju komponenata povezanosti.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.9.

Neka je G šuma sa ν vrhova i c komponenata povezanosti. Pronađite formulu za broj bridova šume G u ovisnosti o broju vrhova i broju komponenata povezanosti.

Rješenje.

Neka je ν_i broj vrhova u i-toj komponenti povezanosti. Tada je

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_c = \nu.$$

Kako je svaka komponenta povezanosti stablo, slijedi da je

$$\varepsilon_i = \nu_i - 1, \quad i = 1, 2, \ldots, c$$

odnosno

$$\nu_i = \varepsilon_i + 1, \quad i = 1, 2, \ldots, c.$$

Konačno dobivamo

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_c = \nu$$

$$(\varepsilon_1 + 1) + (\varepsilon_2 + 1) + \cdots + (\varepsilon_c + 1) = \nu$$

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_c) + c = \nu$$

$$\varepsilon + c = \nu$$

pa je konačno

$$\varepsilon = \nu - c.$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.10.

Dokažite da svako stablo sa dva vrha stupnja 3 ima barem četiri vrha stupnja 1.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.10.

Dokažite da svako stablo sa dva vrha stupnja 3 ima barem četiri vrha stupnja 1.

Rješenje.

Svako stablo koje ima više od jednog vrha mora imati barem dva vrha stupnja 1. Promatrano stablo T ima dva vrha stupnja 3 i mora imati barem dva vrha stupnja 1. Iz toga slijedi da je

$$\sum_{v \in V(T)} d(v) \geqslant 8.$$

Kako je $\sum_{v \in V(T)} d(v) = 2\varepsilon$ i $\varepsilon = \nu - 1$, slijedi

$$2(\nu - 1) \geqslant 8,$$

odnosno $\nu \geqslant 5$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

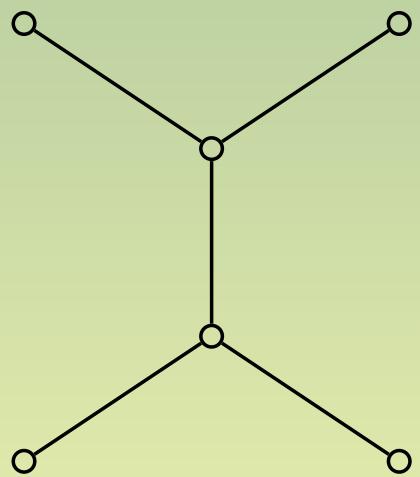
Stoga stablo T ima barem pet vrhova. Pretpostavimo da stablo T ipak ima najviše tri vrha stupnja 1. Kako po pretpostavci u stablu T postoje dva vrha stupnja 3, preostalih $\nu - 5$ vrhova je tada barem stupnja 2 pa imamo

$$\sum_{v \in V(T)} d(v) \geqslant 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (\nu - 5) \cdot 2 = 2\nu - 1.$$

Međutim, to je nemoguće jer je $\sum_{v \in V(T)} d(v) = 2(\nu - 1)$. Dakle, stablo T mora imati barem četiri vrha stupnja 1. Nadalje, uočimo da je i rezultat najbolji mogući, tj. stablo s dva vrha stupnja 3 ne mora imati pet vrhova stupnja 1, ali sigurno mora imati barem 4 vrha stupnja 1.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Na donjoj slici je primjer stabla koje ima dva vrha stupnja tri, nema pet vrhova stupnja 1, ali ima četiri vrha stupnja 1.



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.11.

U stablu T je $\Delta(T) = 5$. Pritom, stablo T ima četiri vrha stupnja 2, jedan vrh stupnja 3, dva vrha stupnja 4 i jedan vrh stupnja 5. Koliko ima listova u stablu i koliki je ukupni broj vrhova i bridova u promatranom stablu?

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.11.

U stablu T je $\Delta(T) = 5$. Pritom, stablo T ima četiri vrha stupnja 2, jedan vrh stupnja 3, dva vrha stupnja 4 i jedan vrh stupnja 5. Koliko ima listova u stablu i koliki je ukupni broj vrhova i bridova u promatranom stablu?

Rješenje.

Neka je l broj listova (vrhova stupnja 1) u stablu T, a k broj svih preostalih vrhova. Tada je $\nu = l + k$ i $k = 8$. Nadalje, kako je T stablo, vrijedi $\varepsilon = \nu - 1$. Uz zadane podatke dobivamo

$$\sum_{v \in V(T)} d(v) = 2\varepsilon$$

$$l \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 2(\nu - 1)$$

$$l + 24 = 2(l + k - 1)$$

$$l + 24 = 2(l + 7)$$

Dobivamo da je $l = 10$ pa stablo T ima deset vrhova stupnja 1. Nadalje,

$$\nu = l + k$$
$$\nu = 10 + 8$$
$$\nu = 18$$

pa stablo T ima ukupno 18 vrhova. Što se tiče bridova, imamo

$$\varepsilon = \nu - 1$$
$$\varepsilon = 18 - 1$$
$$\varepsilon = 17$$

pa stablo T ima 17 bridova.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

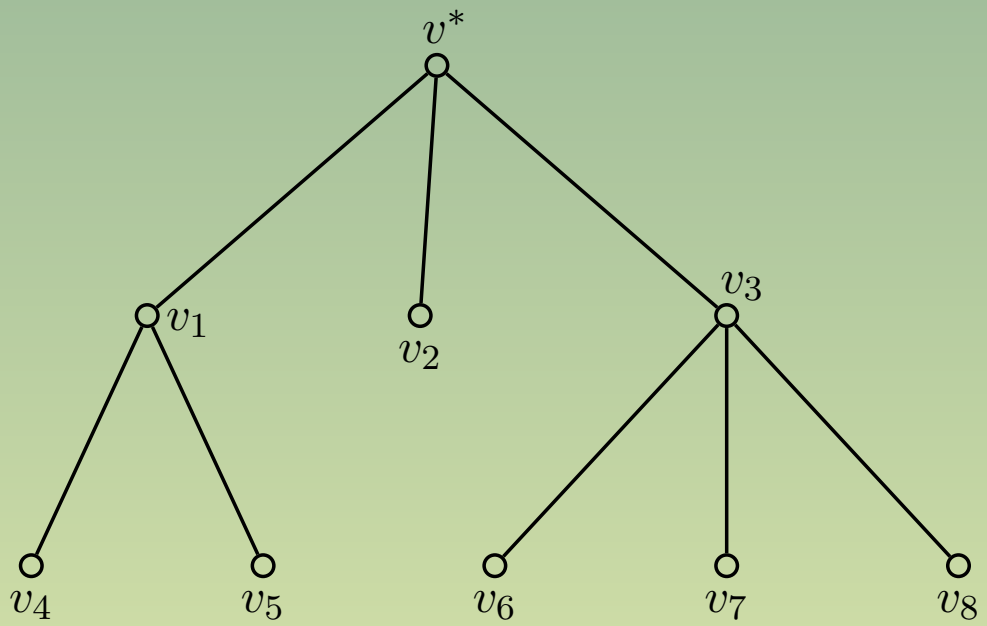
Korijenska stabla

Uređeni par (T, v^*) koji se sastoji od stabla T i jednog njegovog istaknutog vrha v^* zove se **korijensko stablo** ili **stablo s korijenom**. Vrh v^* zovemo **korijen**.

Nivo nekog vrha u korijenskom stablu je duljina (jedinstvenog) puta od korijena do promatranog vrha. Korijen se nalazi na nivou 0, a njegovi susjedi na nivou 1. Za $k \geqslant 2$, nivo k sadrži sve vrhove koji su susjedni vrhovima na nivou $k-1$. List na nivou k nema susjeda na nivou $k+1$. **Visina korijenskog stabla** jednaka je maksimalnom nivou uzetom po svim vrhovima.

Za jedinstveni vrh v na nivou $k-1$ koji je susjedan vrhu u na nivou k kažemo da je njegov **roditelj** ili **prethodnik**, a za vrh u kažemo da je **dijete** ili **sljedbenik** vrha v.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



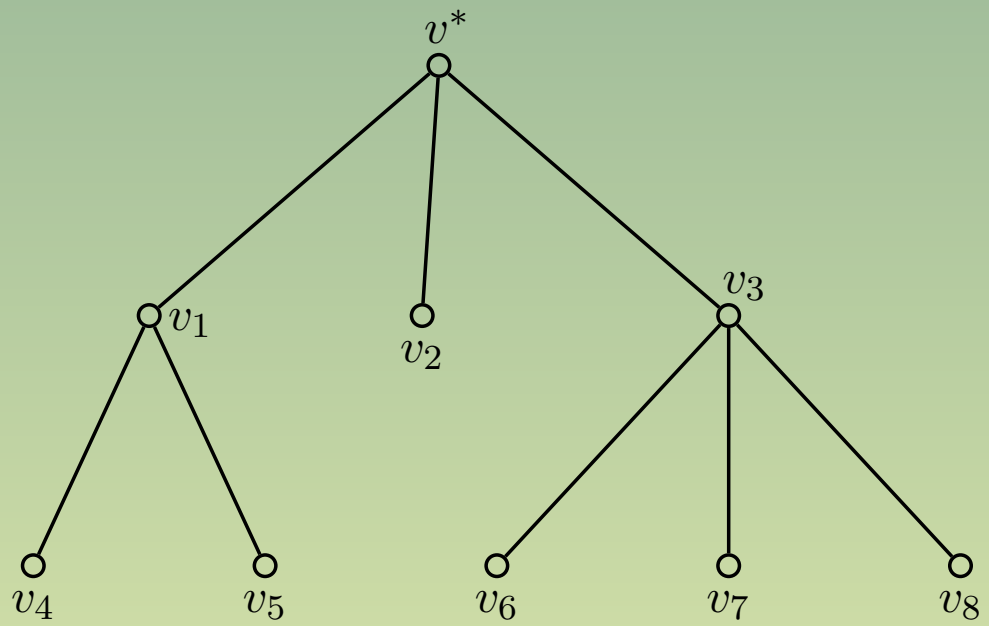
nivo 0: v^* (korijen)

nivo 1: v_1, v_2, v_3

nivo 2: v_4, v_5, v_6, v_7, v_8

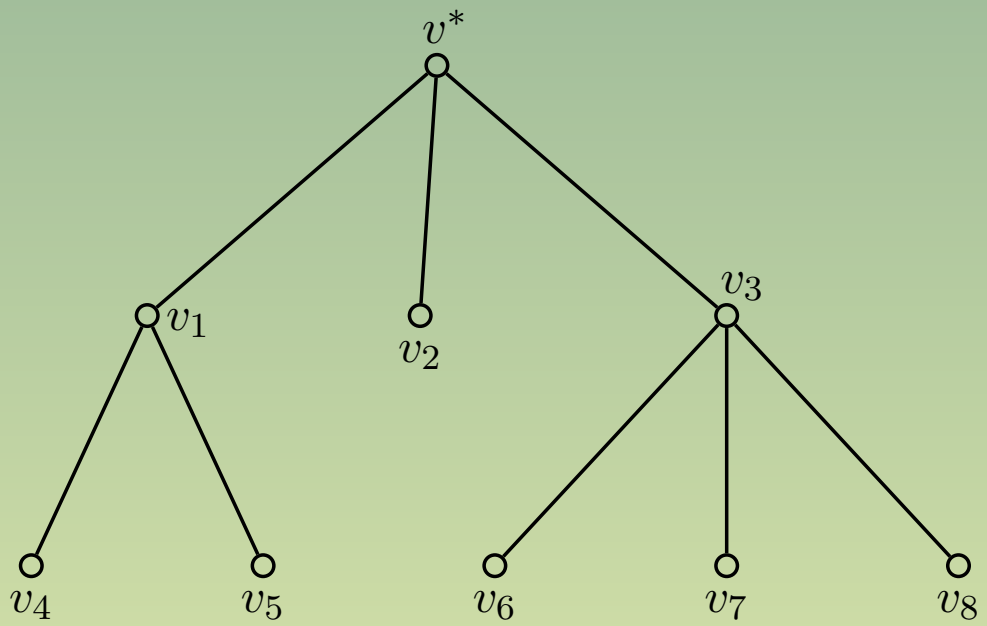
visina korijenskog stabla (T, v^*) jednaka je 2

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



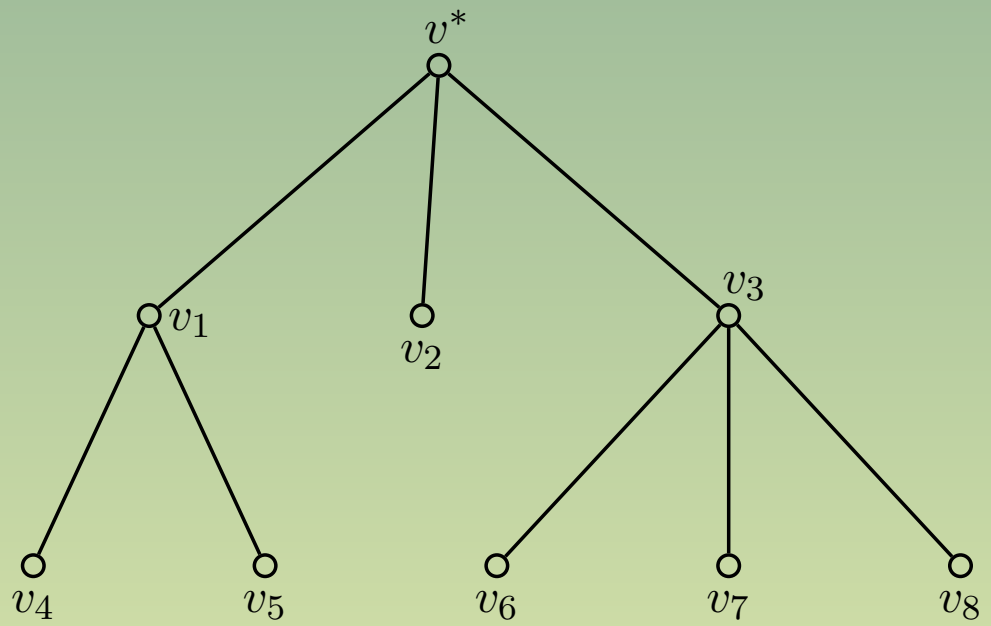
Vrh v_1 je roditelj vrhovima v_4 i v_5, odnosno vrhovi v_4 i v_5 su djeca vrha v_1. Vrh v_3 je roditelj vrhovima v_6, v_7 i v_8, odnosno vrhovi v_6, v_7 i v_8 su djeca vrha v_3. Korijen v^* je roditelj vrhovima v_1, v_2 i v_3, odnosno vrhovi v_1, v_2 i v_3 su djeca korijena v^*.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Vrhovi v_2, v_4, v_5, v_6, v_7 i v_8 su listovi i oni nemaju djece, tj. nisu roditelji. Vrh v_2 je list na nivou 1, a vrhovi v_4, v_5, v_6, v_7 i v_8 su listovi na nivou 2 (u ovom slučaju na zadnjem nivou). Općenito, svi vrhovi na zadnjem nivou su uvijek listovi, a moguće je da postoje listovi i na nekim drugim nivoima kao što je ovdje vrh v_2 koji je list, ali se ne nalazi na zadnjem nivou.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Unutarnji vrh u korijenskom stablu (T, v^*) je svaki vrh različit od korijena koji ima barem jedno dijete. Drugim riječima, to je svaki vrh različit od korijena koji je roditelj. U ovom slučaju jedini unutarnji vrhovi su v_1 i v_3.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Napomena.

Korijenska stabla možemo crtati na više različitih načina. Kao što ste mogli uočiti, prethodno korijensko stablo smo nacrtali tako da je to stablo raslo od korijena prema dolje (korijen je bio na vrhu). Tako ćemo i dalje raditi. Isto tako, korijensko stablo možemo crtati tako da ono raste, od korijena prema gore (korijen se nalazi na dnu), ili od korijena na desnu stranu (korijen se nalazi s lijeve strane), ili pak od korijena na lijevu stranu (korijen se nalazi s desne strane). Svaki od tih načina je jednako dobar, a koji od tih načina ćete odabrati je više stvar vašeg ukusa i samog problema kojeg rješavate. Mi ćemo ovdje uvijek crtati korijensko stablo s korijenom na vrhu bez obzira na prirodu problema kojeg ćemo rješavati (iako će vam se možda u pojedinim situacijama činiti da je prirodnije da ga crtamo na neki od ostala tri spomenuta načina).

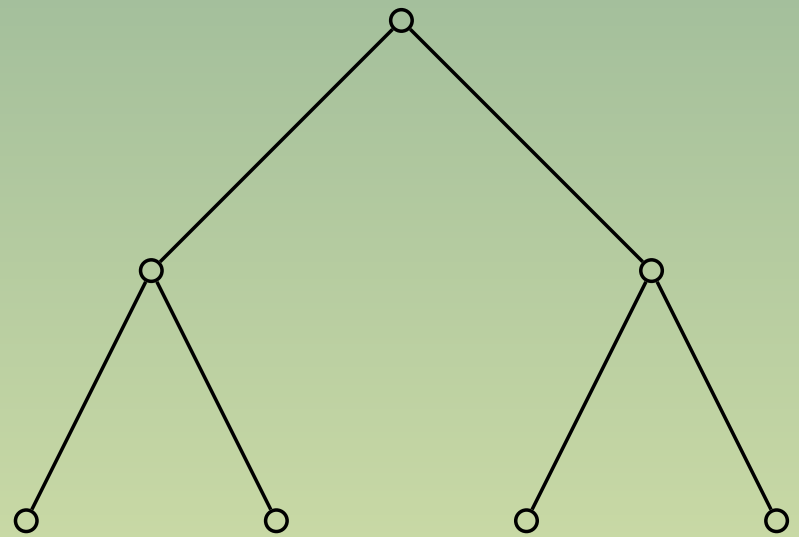
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Za korijensko stablo (T, v^*) kažemo da je **m-arno stablo** ukoliko u njemu postoji roditelj koji ima m djece, a svi ostali vrhovi roditelji imaju najviše m djece. Ako je $m = 2$, govorimo o **binarnom stablu**. Ako je $m = 3$, govorimo o **ternarnom stablu**.

Ako svaki roditelj ima točno m djece, tada kažemo da je m-arno stablo **puno**.

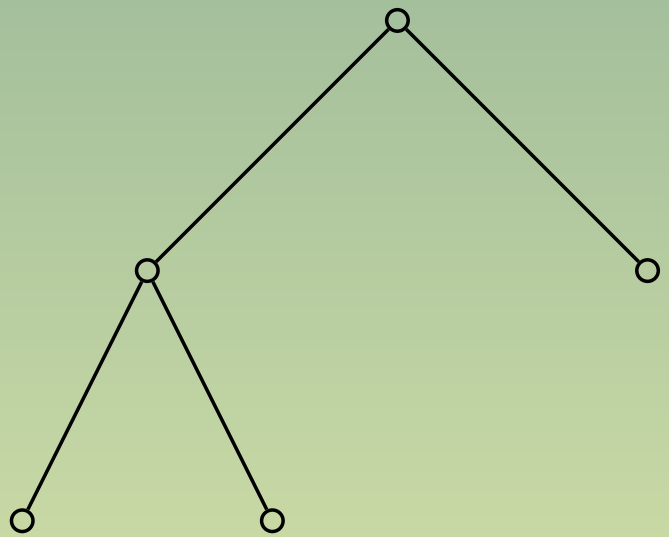
Za m-arno stablo kažemo da je **potpuno** ako je puno i svi listovi se nalaze na istom nivou. U nekim literaturama se ne zahtijeva da potpuno stablo mora biti i puno, ali sve je to stvar dogovora pa stoga uvijek obratite pažnju po kojoj definiciji radi literatura koju koristite da ne dođe do zabune (jer te definicije nisu ekvivalentne). Mi ćemo ovdje zahtijevati da potpuno stablo mora biti i puno.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



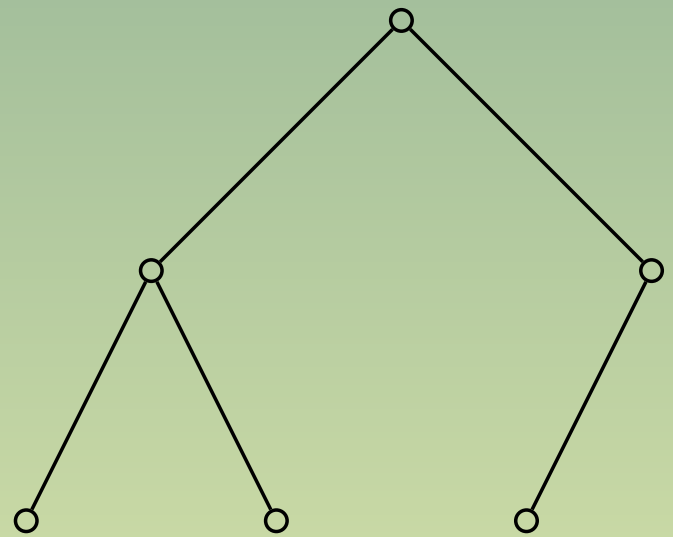
Ovo je potpuno binarno stablo jer svaki vrh roditelj ima dvoje djece i svi listovi se nalaze na istom nivou.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



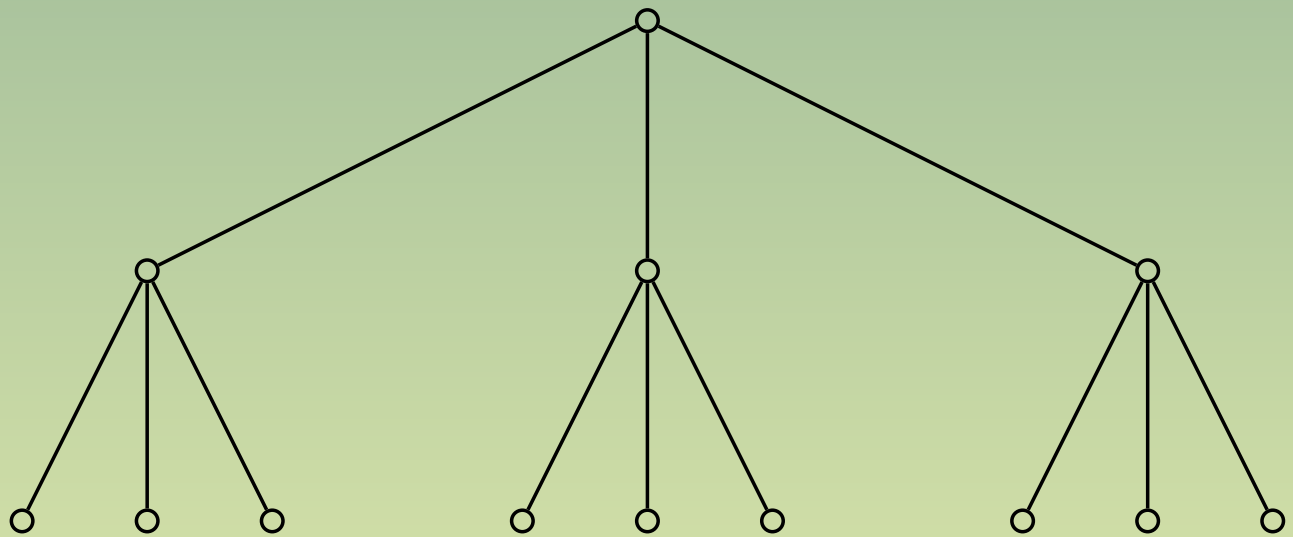
Ovo je puno binarno stablo jer svaki vrh roditelj ima dvoje djece, ali nije potpuno jer nisu svi listovi na istom nivou.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



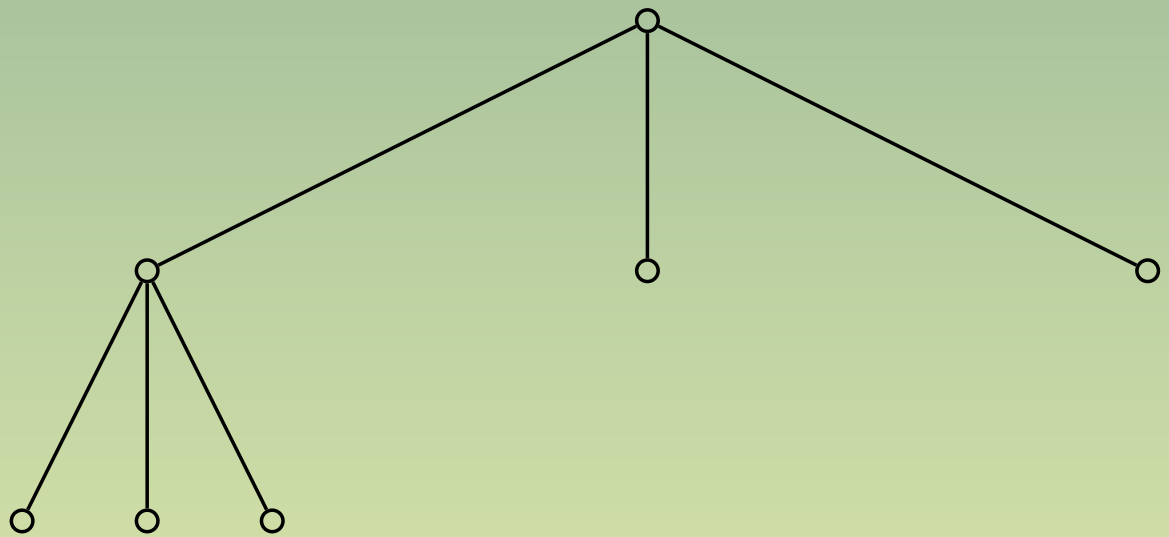
Ovo binarno stablo nije puno jer nema svaki vrh roditelj dvoje djece (jedan vrh roditelj ima samo jedno dijete). Isto tako, ovo binarno stablo nije potpuno jer nije puno (iako su svi listovi na istom nivou). Da nismo tražili da potpuno stablo mora biti puno, tada bi ovo binarno stablo bilo potpuno (kako i jest u nekim literaturama).

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



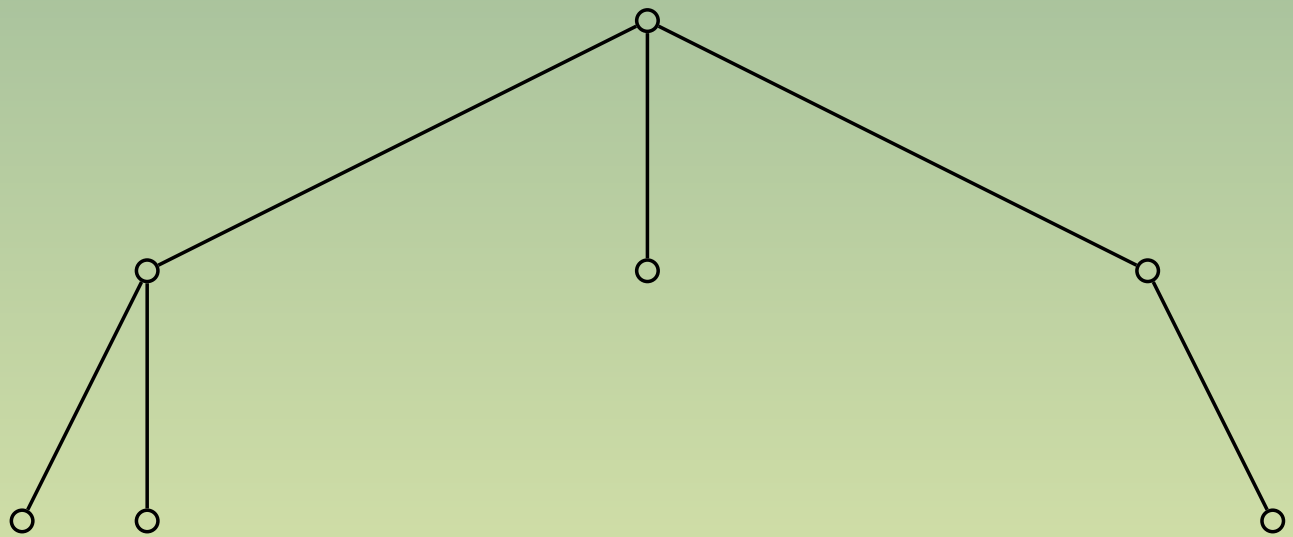
Ovo je potpuno ternarno stablo jer svaki vrh roditelj ima troje djece i svi listovi se nalaze na istom nivou.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Ovo je puno ternarno stablo jer svaki vrh roditelj ima troje djece, ali nije potpuno jer nisu svi listovi na istom nivou.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Ovo ternarno stablo nije puno jer nema svaki vrh roditelj troje djece. Isto tako, ovo ternarno stablo nije niti potpuno.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.12.

Sonja ima nekoliko opcija kako može provesti petak i subotu navečer. Ona može učiti, čitati, gledati televiziju ili izaći van s dečkima. Prikažite pomoću stabla sve moguće načine na koje Sonja može provesti vikend. Koliko ima takvih načina?

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

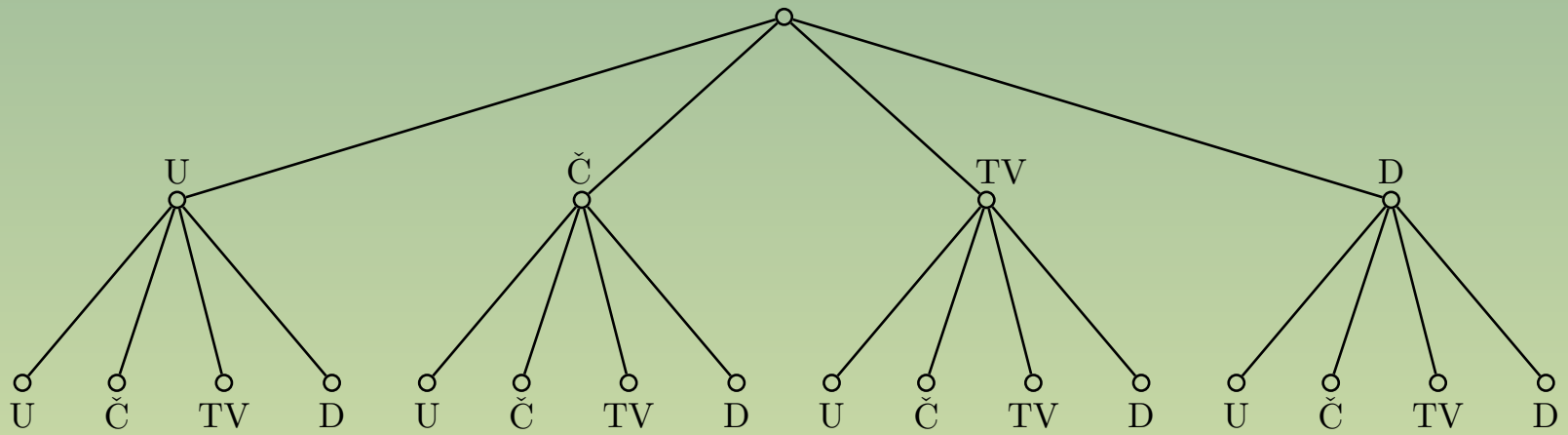
Primjer 8.12.

Sonja ima nekoliko opcija kako može provesti petak i subotu navečer. Ona može učiti, čitati, gledati televiziju ili izaći van s dečkima. Prikažite pomoću stabla sve moguće načine na koje Sonja može provesti vikend. Koliko ima takvih načina?

Rješenje.

Prirodno je pomoću korijenskog stabla prikazati sve moguće načine na koje Sonja može provesti petak i subotu navečer. Korijen neće imati nikakvu oznaku, vrhovi na prvom nivou će označavati mogućnosti izbora za petak, a vrhovi na drugom nivou mogućnosti izbora za subotu (jasno u ovisnosti prethodnog izbora za petak). Tada su svi mogući načini jednaki svim putovima od korijena do svakog pojedinog lista.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



U $\rightarrow$ učenje, Č $\rightarrow$ čitanje,

TV $\rightarrow$ gledanje televizije, D $\rightarrow$ izlazak s dečkima

Ukupno ima $4^2 = 16$ načina na koje Sonja može provesti petak i subotu navečer.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.13.

Tamara slabije igra šah od Karoline. Stoga je Tamara odlučila da će prekinuti igru nakon što prvi put pobijedi, odnosno u krajnjem slučaju nakon pet odigranih partija ukoliko do tada ne bi niti jednom pobijedila. Koliko ima mogućih ishoda? U koliko je od tih ishoda Tamara dobila partiju?

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

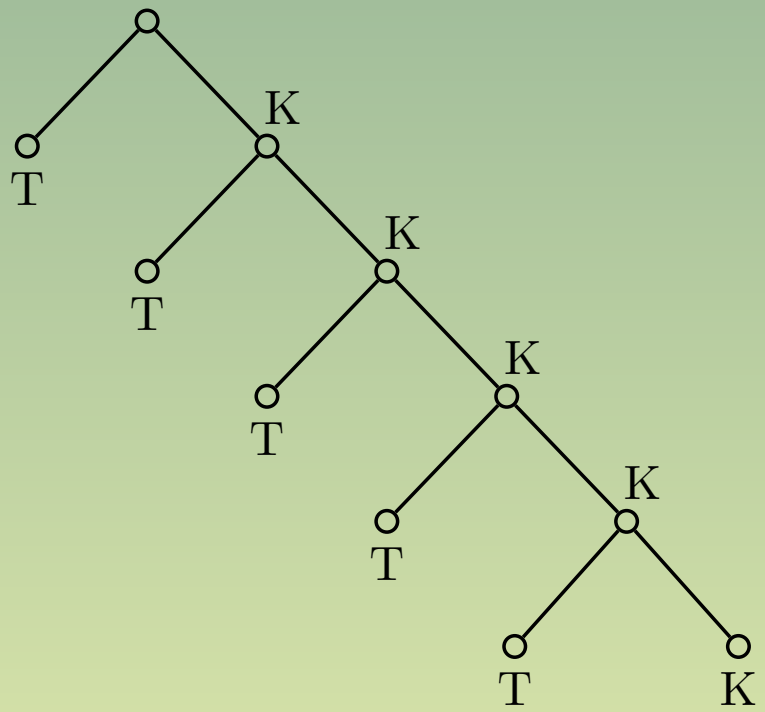
Primjer 8.13.

Tamara slabije igra šah od Karoline. Stoga je Tamara odlučila da će prekinuti igru nakon što prvi put pobijedi, odnosno u krajnjem slučaju nakon pet odigranih partija ukoliko do tada ne bi niti jednom pobijedila. Koliko ima mogućih ishoda? U koliko je od tih ishoda Tamara dobila partiju?

Rješenje.

Opet ćemo koristiti korijensko stablo. Korijen neće imati nikakvu oznaku, a ostali vrhovi će imati oznaku T (ukoliko je Tamara dobila partiju) ili K (ukoliko je Karolina dobila partiju). Broj svih mogućih ishoda jednak je broju svih putova od korijena prema svim listovima.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Svi mogući ishodi su

$$\mathrm{T},\ \mathrm{KT},\ \mathrm{KKT},\ \mathrm{KKKT},\ \mathrm{KKKKT},\ \mathrm{KKKKK}.$$

Ukupno je 6 mogućih ishoda. U pet tih ishoda je Tamara dobila jednu partiju.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Zadatak 8.2.

Koliko bi bilo mogućih ishoda da se igra do prve Tamarine pobjede ili do najviše n odigranih partija? Ispišite sve moguće ishode. U koliko je od tih ishoda Tamara dobila jednu partiju?

Primjer 8.14.

Na koliko se načina može odabrati delegacija od troje ljudi iz skupine od 5 ljudi A_1, A_2, A_3, A_4 i A_5? Nacrtajte stablo koje prikazuje sve mogućnosti.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Zadatak 8.2.

Koliko bi bilo mogućih ishoda da se igra do prve Tamarine pobjede ili do najviše n odigranih partija? Ispišite sve moguće ishode. U koliko je od tih ishoda Tamara dobila jednu partiju?

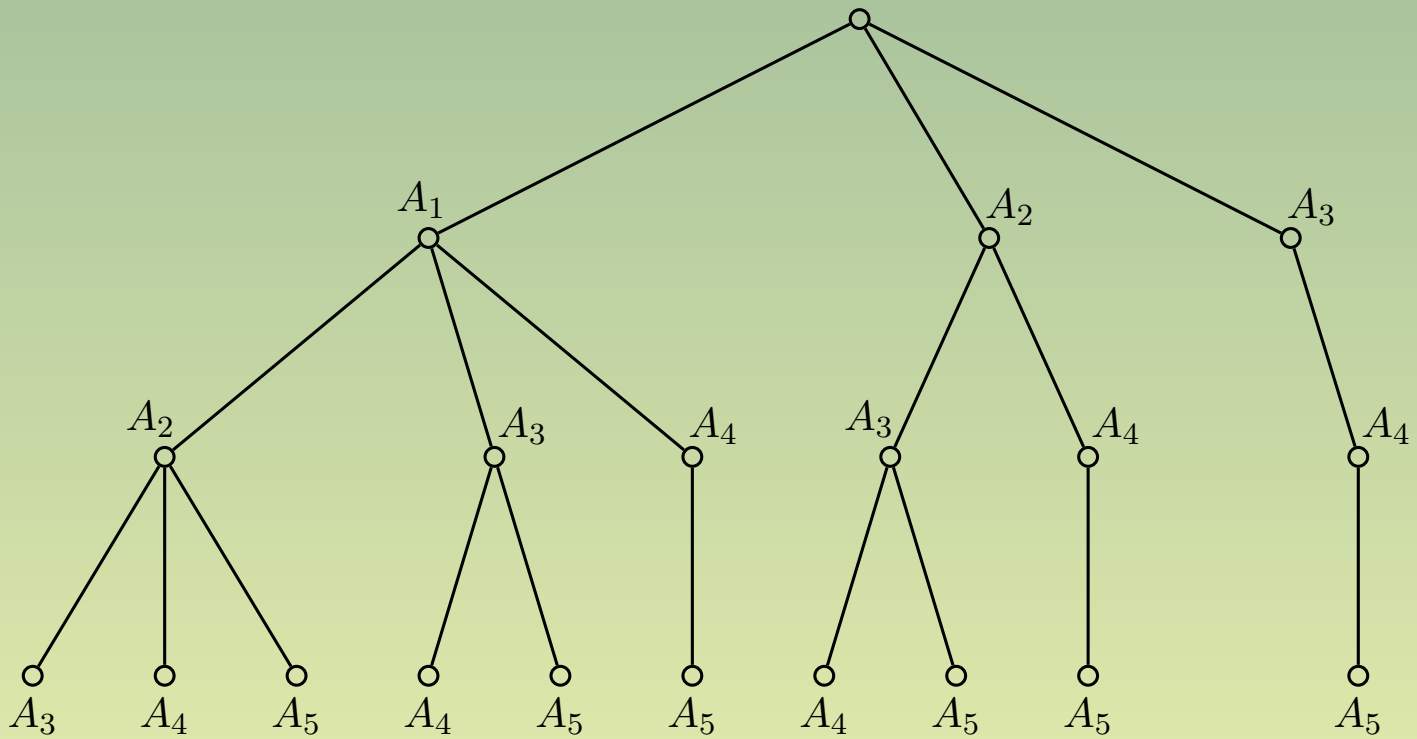
Primjer 8.14.

Na koliko se načina može odabrati delegacija od troje ljudi iz skupine od 5 ljudi A_1, A_2, A_3, A_4 i A_5? Nacrtajte stablo koje prikazuje sve mogućnosti.

Rješenje.

Ukupno imamo $\binom{5}{3} = 10$ mogućnosti. Iz prirode problema je jasno da nije važno kojim su redoslijedom ljudi birani, nego samo koje su osobe izabrane. Za prikaz svih mogućnosti opet koristimo korijensko stablo.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Izomorfizam korijenskih stabala

Dva korijenska stabla (T_1, v^*) i (T_2, u^*) su izomorfna ukoliko postoji izomorfizam $\varphi : V(T_1) \to V(T_2)$ grafova T_1 i T_2 za koji vrijedi $\varphi(v^*) = u^*$. Jednostavno rečeno, izomorfizam korijenskih stabala je izomorfizam grafova koji još ima svojstvo da čuva korijene, tj. korijen preslikava u korijen.

Primjer 8.15.

Nacrtajte sva neizomorfna korijenska stabla s četiri vrha.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Izomorfizam korijenskih stabala

Dva korijenska stabla (T_1, v^*) i (T_2, u^*) su izomorfna ukoliko postoji izomorfizam $\varphi : V(T_1) \to V(T_2)$ grafova T_1 i T_2 za koji vrijedi $\varphi(v^*) = u^*$. Jednostavno rečeno, izomorfizam korijenskih stabala je izomorfizam grafova koji još ima svojstvo da čuva korijene, tj. korijen preslikava u korijen.

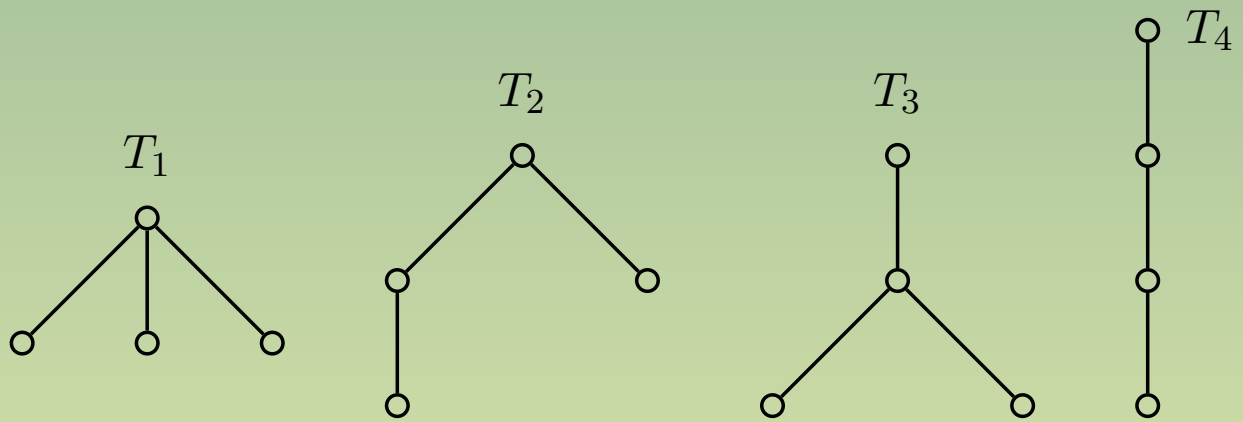
Primjer 8.15.

Nacrtajte sva neizomorfna korijenska stabla s četiri vrha.

Rješenje.

Postoje točno četiri međusobno neizomorfna korijenska stabla s četiri vrha.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



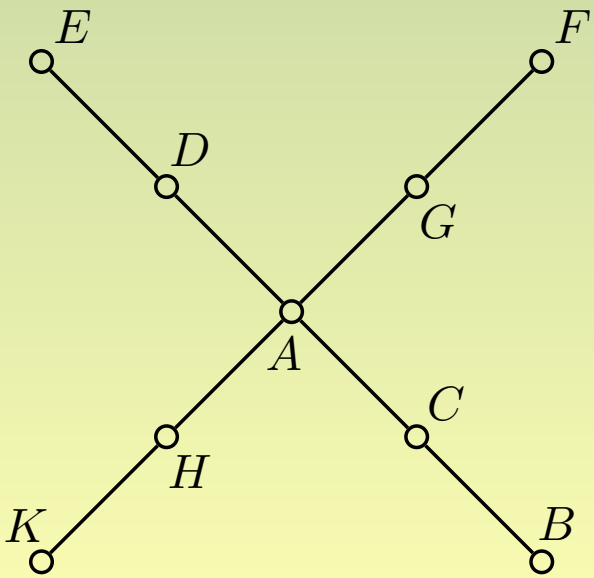
T_1 i T_3 su međusobno izomorfni kao stabla, ali kao korijenska stabla nisu izomorfni jer je T_1 ternarno stablo, a T_3 je binarno stablo. Isto tako, T_2 i T_4 su izomorfni kao stabla, ali nisu izomorfni kao korijenska stabla jer je T_2 binarno stablo, a T_4 je 1-arno stablo.

Napomena.

Od svakog stabla možemo napraviti korijensko stablo tako da odaberemo jedan njegov vrh za korijen. Međutim, odabirom različitih vrhova za korijene od istog stabla ćemo općenito dobiti neizomorfna korijenska stabla.

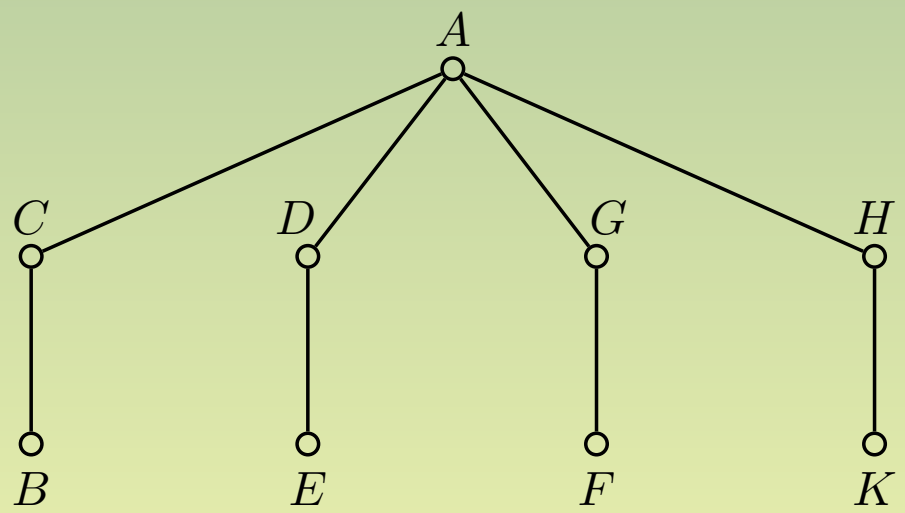
Primjer 8.16.

Nacrtajte sljedeće stablo kao korijensko stablo s korijenom A, odnosno s korijenom B.



Rješenje.

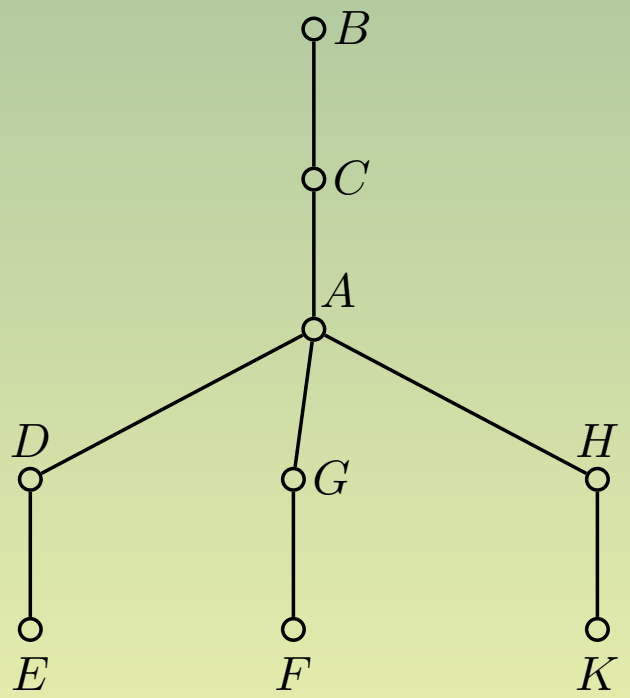
Nacrtamo li zadano stablo kao korijensko stablo s korijenom A, dobivamo



Vidimo da u ovom slučaju dobivamo 4-arno stablo visine 2.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Nacrtamo li zadano stablo kao korijensko stablo s korijenom B, dobivamo

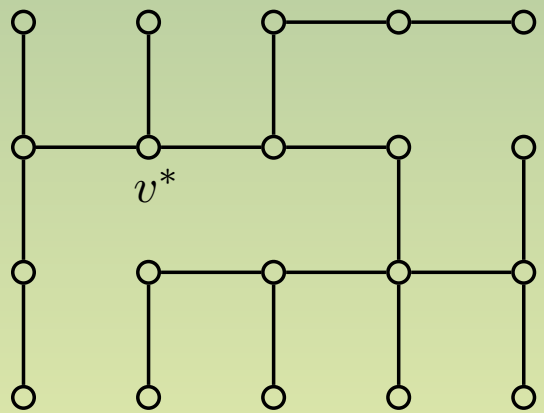


Vidimo da u ovom slučaju dobivamo ternarno stablo visine 4.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

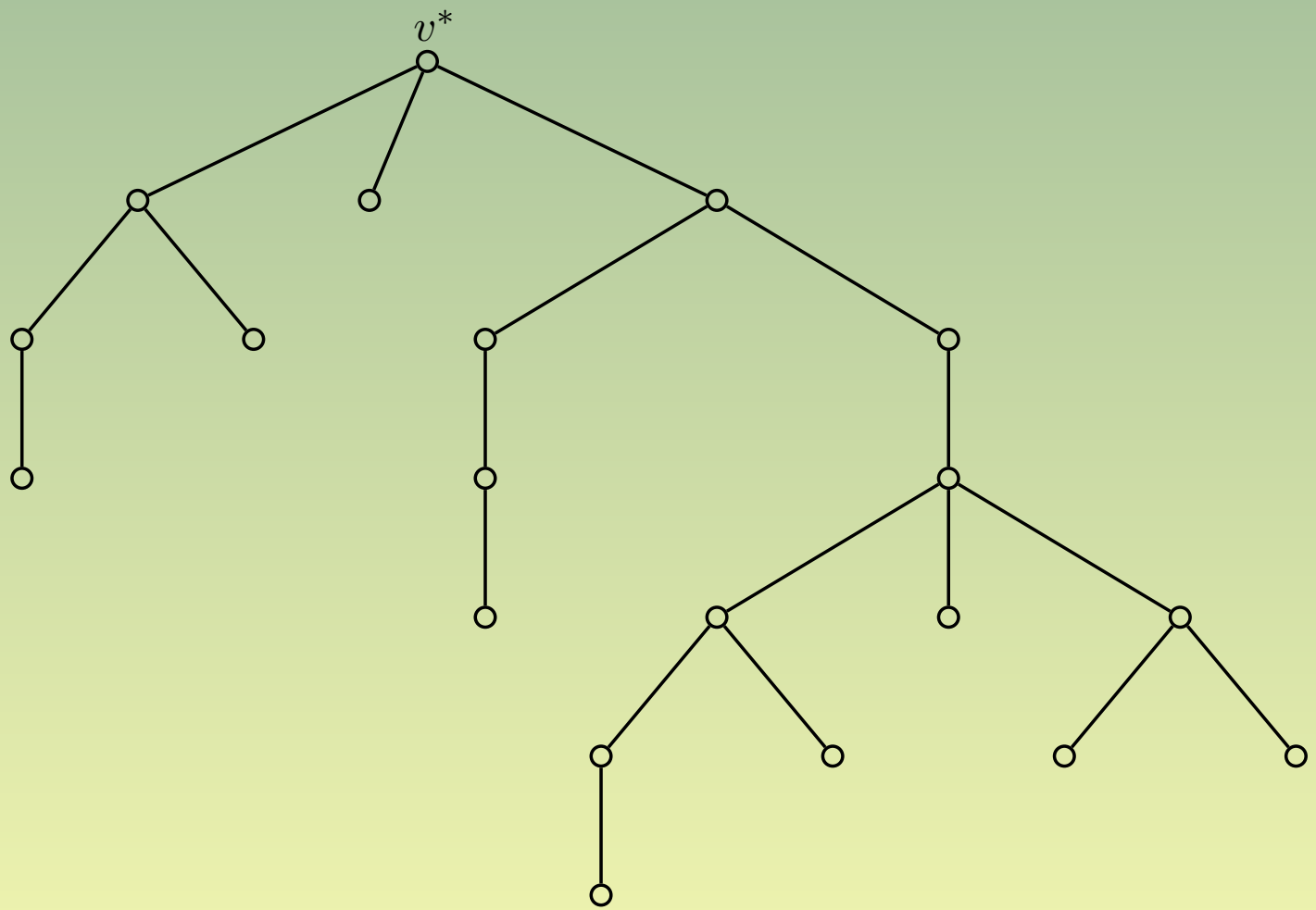
Primjer 8.17.

Nacrtajte sljedeće stablo kao korijensko stablo s korijenom v^*.



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Rješenje.



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.18.

Dokažite da puno binarno stablo ima neparan broj vrhova.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.18.

Dokažite da puno binarno stablo ima neparan broj vrhova.

Rješenje.

U punom binarnom stablu, korijen je stupnja 2. Bilo koji unutarnji vrh je dijete točno jednog roditelja i sam još ima dvoje djece (jer se radi o punom binarnom stablu). Dakle, svaki unutarnji vrh u punom binarnom stablu je stupnja 3. Preostali vrhovi su listovi i oni su stupnja 1. Zaključujemo da u punom binarnom stablu su svi vrhovi, osim korijena, neparnog stupnja. Znamo da je u svakom grafu broj vrhova neparnog stupnja paran broj. Kada im još dodamo korijen dobivamo da svako puno binarno stablo ima neparan broj vrhova.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Uređeno binarno stablo

Uređeno binarno stablo T je uređena trojka (L, S, R), gdje su L i R binarna stabla (moguće je i prazna), a S je jednočlan skup čiji element zovemo korijen. L i R zovemo redom lijevo i desno binarno stablo.

Ovdje ćemo uvijek smatrati da je binarno stablo uređeno ako ništa eksplicitno ne kažemo. Drugim riječima, pod binarnim stablom ćemo podrazumijevati uređeno binarno stablo.

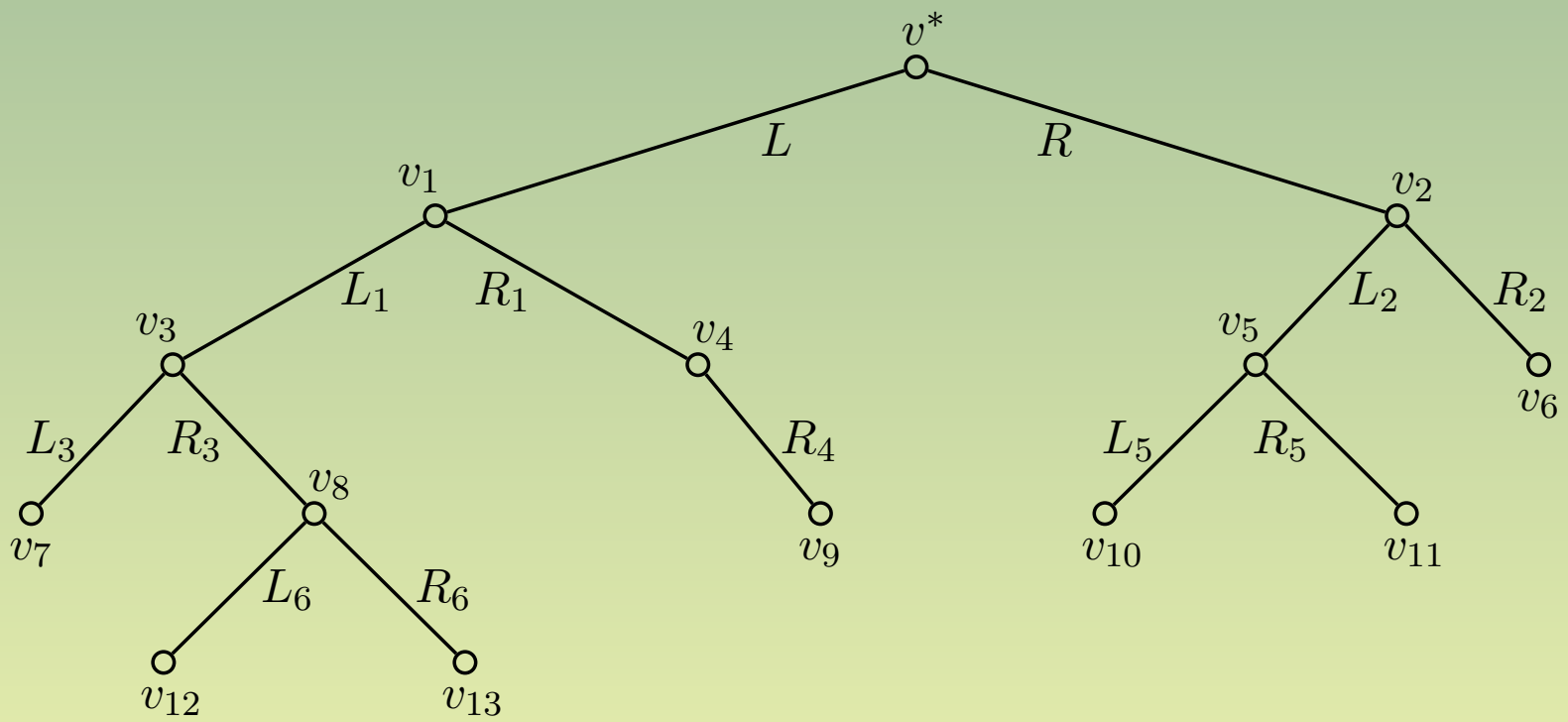
Primjer 8.19.

Nacrtajte rekurzivno definirano binarno stablo $(L, \{v^*\}, R)$ *sa*

$$
\begin{aligned}
L &= (L_1, \{v_1\}, R_1), & R &= (L_2, \{v_2\}, R_2)\\
L_1 &= (L_3, \{v_3\}, R_3), & R_1 &= (\emptyset, \{v_4\}, R_4)\\
L_2 &= (L_5, \{v_5\}, R_5), & R_2 &= (\emptyset, \{v_6\}, \emptyset)\\
L_3 &= (\emptyset, \{v_7\}, \emptyset), & R_3 &= (L_6, \{v_8\}, R_6)\\
& & R_4 &= (\emptyset, \{v_9\}, \emptyset)\\
L_5 &= (\emptyset, \{v_{10}\}, \emptyset), & R_5 &= (\emptyset, \{v_{11}\}, \emptyset)\\
L_6 &= (\emptyset, \{v_{12}\}, \emptyset), & R_6 &= (\emptyset, \{v_{13}\}, \emptyset)
\end{aligned}
$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Rješenje.



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Binarna stabla i algebarski izrazi

Neka je S skup, $+$ i $\times$ dvije binarne operacije na skupu S. Izraz

$$x + y \times z$$

može značiti

$$(x + y) \times z$$

ili pak

$$x + (y \times z).$$

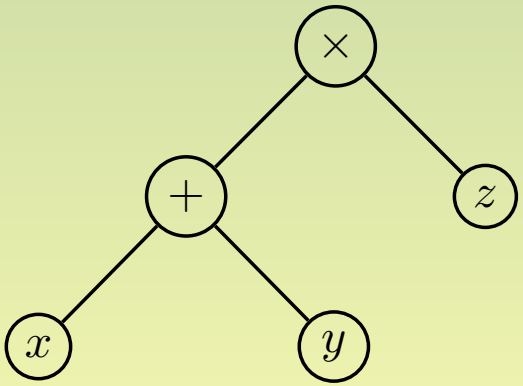
Dakle, da bismo jednoznačno mogli izračunati izraz $x + y \times z$, trebamo na odgovarajući način postaviti zagrade.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

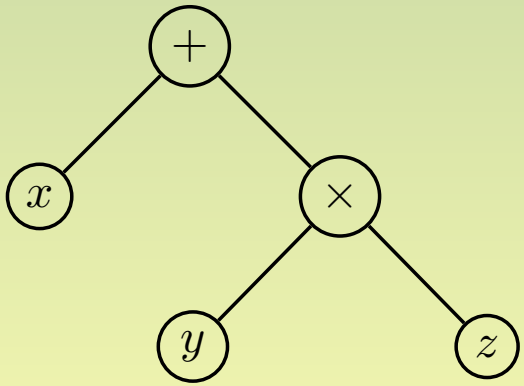
Algebarske izraze možemo reprezentirati pomoću binarnih stabala na sljedeći način:

- Binarna operacija se nalazi u korijenu.
- U lijevom podstablu je lijevi operand.
- U desnom podstablu je desni operand.

$(x + y) \times z$



$x + (y \times z)$



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Prefiks zapis

Prefiks zapis ili Poljska notacija algebarskog izraza je zapis u kojemu se binarna operacija piše prije oba elementa u izrazu na koje je primijenjenja. Dakle, $+XY$ je prefiks zapis od $X + Y$.

Postfiks zapis

Postfiks zapis ili obrnuta Poljska notacija algebarskog izraza je zapis u kojemu se binarna operacija piše nakon oba elementa u izrazu na koje je primijenjenja. Dakle, $XY+$ je postfiks zapis od $X + Y$.

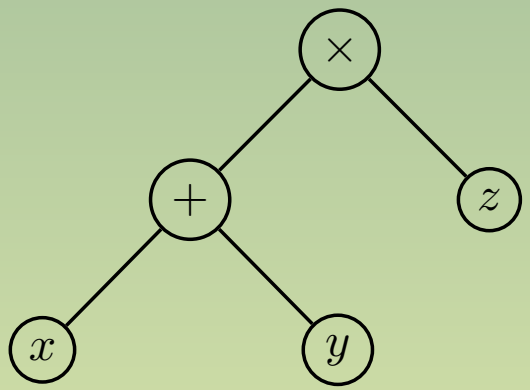
Uobičajeni zapis $X + Y$ zovemo **infiks** zapis.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Kod prefiks i postfiks zapisa nam nisu potrebne zagrade i to je jedna njihova prednost pred infiks zapisom. Ukoliko algebarski izraz imamo već spremljen u binarno stablo, tada prefiks zapis tog izraza možemo dobiti na sljedeći način. Ugrubo rečeno, kod tekućeg podstabla, najprije ispišemo korijen, zatim se prebacimo na lijevo podstablo, a nakon toga na desno podstablo. Za postfiks zapis, najprije ispišemo lijevo podstablo, pa onda desno podstablo, a tek na kraju korijen. Jasno, u oba slučaja postupak obavljamo rekurzivno.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

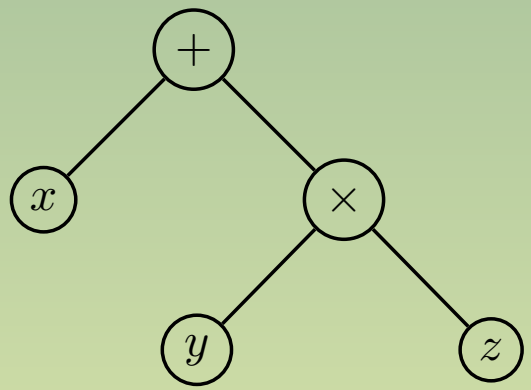
$(x + y) \times z$



prefiks zapis: $\times + xyz$

postfiks zapis: $xy + z \times$

$x + (y \times z)$



prefiks zapis: $+x \times yz$

postfiks zapis: $xyz \times +$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.20.

Reprezentirajte sljedeće algebarske izraze pomoću binarnih stabla i napišite njihove prefiks i postfiks zapise.

a. $(x + y) \times (z + t)$
b. $(r \times s) + ((x + y) \times z)$
c. $r \times (s + ((x + y) \times z))$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.20.

Reprezentirajte sljedeće algebarske izraze pomoću binarnih stabla i napišite njihove prefiks i postfiks zapise.

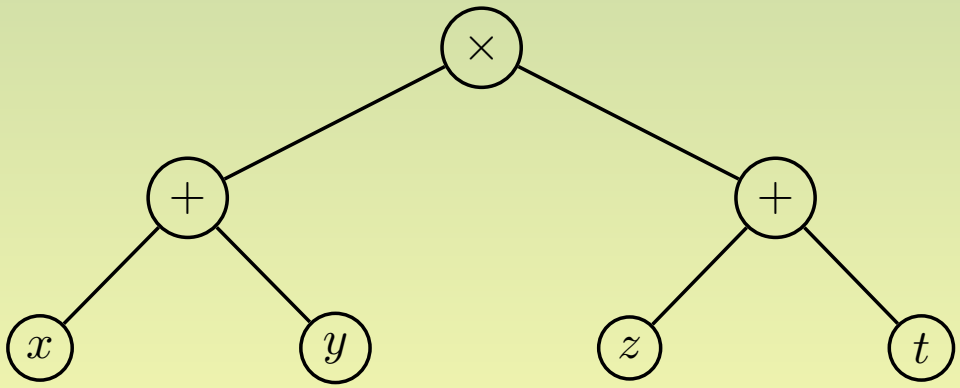
a. $(x + y) \times (z + t)$

b. $(r \times s) + ((x + y) \times z)$

c. $r \times (s + ((x + y) \times z))$

Rješenje.

a.

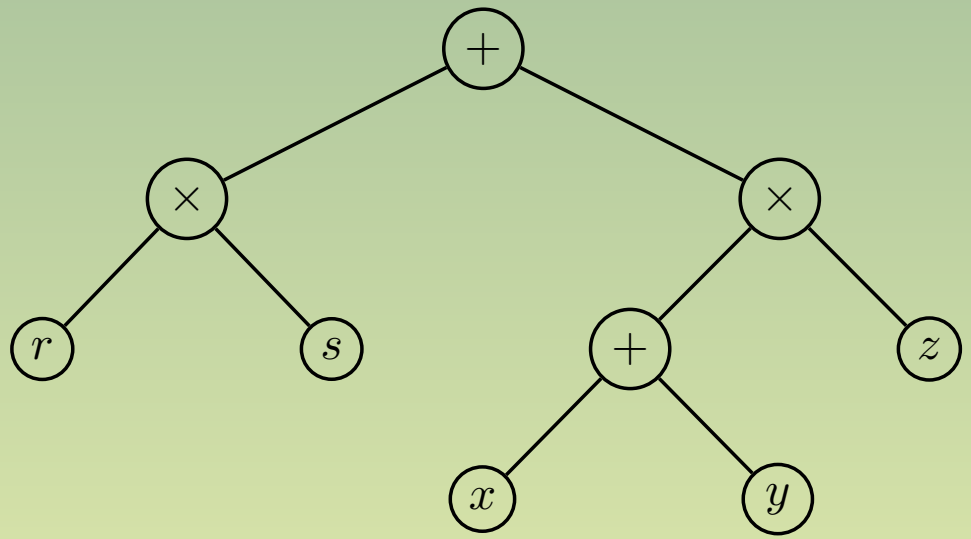


prefiks zapis: $\times + xy + zt$ postfiks zapis: $xy + zt + \times$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

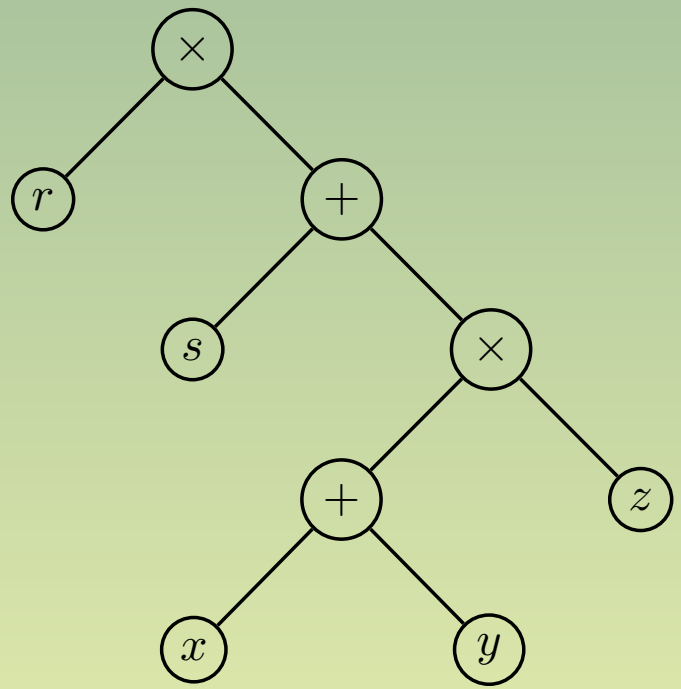
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

b



prefiks zapis: $+\times rs\times +xyz$

postfiks zapis: $rs\times xy+z\times +$



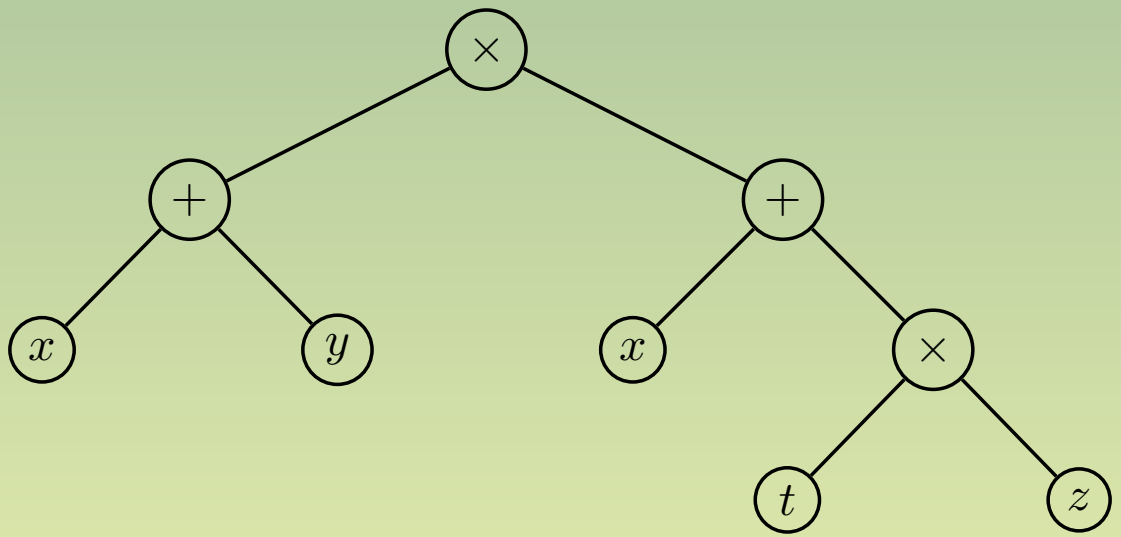
prefiks zapis: $\times r + s \times + xyz$

postfiks zapis: $rsxy + z \times + \times$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.21.

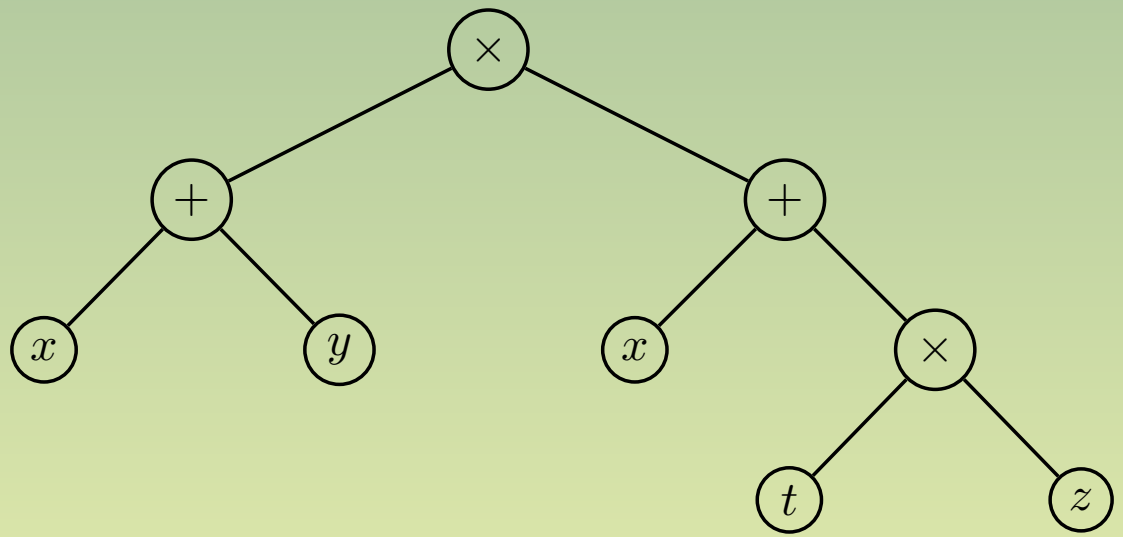
Napišite standardni (infiks), postfiks i prefiks zapis algebarskog izraza reprezentiranog binarnim stablom



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.21.

Napišite standardni (infiks), postfiks i prefiks zapis algebarskog izraza reprezentiranog binarnim stablom



Rješenje.

infiks: $(x + y) \times (x + (t \times z))$

prefiks: $\times + xy + x \times tz$

postfiks: $xy + xtz \times + \times$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Zadatak 8.3.

Opišite i implementirajte algoritam koji će pretvoriti algebarski izraz iz infiks zapisa u prefiks i postfiks zapis. Prisjetite se apstraktnih tipova podataka kao što su stog i red koji bi mogli pomoći u rješavanju ovog problema. Potražite na webu da li ima još kakvih gotovih algoritama koji rješavaju opisani problem.

Zadatak 8.4.

Opišite i implementirajte algoritam koji će algebarski izraz u prefiks zapisu reprezentirati pomoću binarnog stabla. Omogućite korisniku da može vidjeti i grafički prikaz tog stabla.

Zadatak 8.5.

Opišite i implementirajte algoritam koji će algebarski izraz u postfiks zapisu reprezentirati pomoću binarnog stabla. Omogućite korisniku da može vidjeti i grafički prikaz tog stabla.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Stablo sortiranja

Stablo sortiranja ili **binarno stablo pretraživanja** je uređeno binarno stablo za koje vrijedi:

i. Skup vrhova V je linearno uređen skup.

ii. Za svaki vrh $v \in V$ je $w_L \leqslant v$ za svaki vrh w_L iz lijevog podstabla od v, i $v \leqslant w_R$ za svaki vrh w_R iz desnog podstabla od v.

Sortiranje pomoću stabla sortiranja se odvija u dvije faze. Neka je zadana lista A nesortiranih objekata $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$. U prvoj fazi se pomoću dane liste konstruira stablo sortiranja čiji vrhovi su elementi od A i čiji korijen je prvi element a_1 iz liste. U drugoj fazi se iz stabla sortiranja dobiva sortirana lista.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Prva faza (konstrukcija stabla sortiranja)

Neka je $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ nesortirana lista uz linearni uređaj $\preccurlyeq$. Stablo sortiranja se konstruira korak po korak. Prvi element a_1 dane liste predstavlja korijen i na taj način dobijemo stablo sortiranja T_1. U svakom koraku se sljedeći element liste dodaje u stablo kao list stabla, a on može naknadno postati i roditelj. Konkretno, sljedeći element a_2 se uspoređuje s korijenom i ako je $a_2 \preccurlyeq a_1$, a_2 postaje lijevo dijete od a_1, a u protivnom postaje desno dijete od a_1. Na taj način dobivamo stablo sortiranja T_2. Dalje, element a_3 se uspoređuje s korijenom a_1. Ako je $a_3 \preccurlyeq a_1$, tada a_3 ide u lijevo podstablo. Ukoliko je lijevo podstablo prazno, a_3 postaje lijevo dijete od a_1, a ukoliko je neprazno, znači da je a_2 već lijevo dijete od a_1 pa se a_3 uspoređuje s a_2. Ako je $a_3 \preccurlyeq a_2$, a_3 postaje lijevo dijete od a_2, a u protivnom postaje desno dijete od a_2. Ako pak je $a_3 \succ a_1$, tada a_3 ide u desno podstablo i odvija se ista opisana procedura dalje. I tako radimo dok ne prođemo kroz sve elemente liste.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Algoritam za formiranje stabla sortiranja

ULAZ: Nesortirana lista $A = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$
IZLAZ: Stablo sortiranja sa skupom vrhova A

1: Stavi da je $n = 1$ i a_1 da bude korijen stabla sortiranja T_1. Povećaj n na $n + 1$.

2: Ako je $n > N$, tada je kraj. U protivnom, usporedi a_n sa korijenom.

a) Ako je a_n manji ili jednak od korijena, tada prijeđi na lijevo podstablo. Ukoliko je lijevo podstablo prazno, tada dodaj a_n kao lijevo dijete korijena i dobiva se novo stablo sortiranja T_n. Povećaj n na $n + 1$ i ponovi korak 2). Ako nije lijevo podstablo prazno, provedi korak 2) na lijevom podstablu.

b) Ako je a_n strogo veći od korijena, tada prijeđi na desno podstablo. Ako je desno podstablo prazno, tada dodaj a_n kao desno dijete od korijena i dobiva se stablo sortiranja T_n. Povećaj n na $n + 1$ i ponovi korak 2). Ako nije desno podstablo prazno, provedi korak 2) na desnom podstablu.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Napomena.

Svaki element iz lijevog podstabla stabla sortiranja je manji ili jednak od korijena, a svaki element iz desnog podstabla je veći od korijena. Želimo li dobiti sortiranu listu u rastućem poretku, svi elementi iz lijevog podstabla se trebaju ispisati prije korijena, a svi elementi iz desnog podstabla nakon korijena. Jasno, postupak radimo rekurzivno.

Druga faza (ispis sortirane liste)

Postupak rekurzivnog sortiranja se odvija na sljedeći način:

1. Obrađujemo sve elemente lijevog podstabla.
2. Ispisujemo korijen.
3. Obrađujemo sve elemente iz desnog podstabla.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.22.

Konstruirajte stablo sortiranja za listu

$$7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$$

uz standardni linearni uređaj $\leqslant$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.22.

Konstruirajte stablo sortiranja za listu

$$7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$$

uz standardni linearni uređaj $\leqslant$.

Rješenje.

Na ovom primjeru ćemo korak po korak objasniti kako se postupno formira stablo sortiranja. Na ostalim primjerima ćemo odmah dati samo konačno stablo sortiranja bez međukoraka, a na vama je da onda sami postupno provedete sve međukorake.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

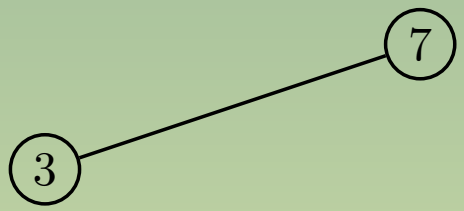
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

7

lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

konačno rješenje

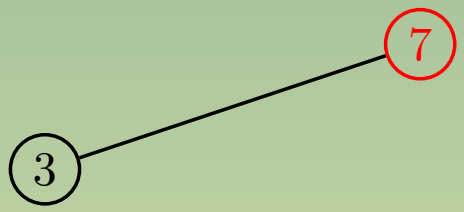
Prvi element 7 iz liste postavimo za korijen.



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Element 3 iz liste uspoređujemo s korijenom. Kako je $3 < 7$, element 3 postaje lijevo dijete od elementa 7.

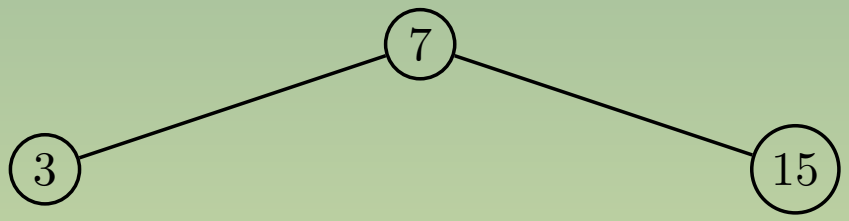
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Element 15 uspoređujemo s korijenom. Kako je $15 > 7$, element 15 postaje desno dijete od elementa 7.

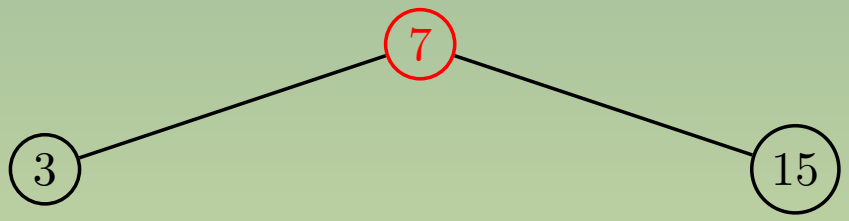
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Element 15 uspoređujemo s korijenom. Kako je $15 > 7$, element 15 postaje desno dijete od elementa 7.

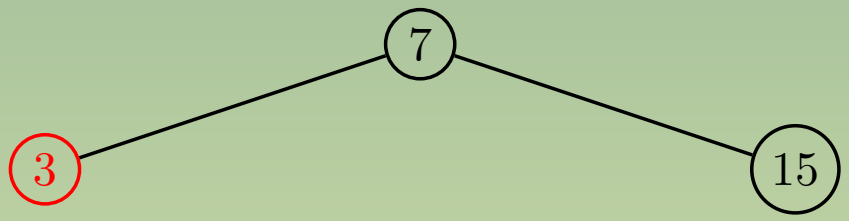
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Element 4 uspoređujemo s korijenom. Kako je $4 < 7$, element 4 bi trebao postati lijevo dijete od elementa 7.

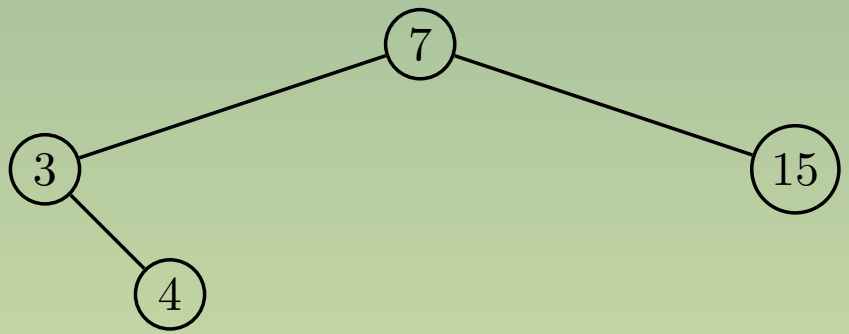
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Međutim, to mjesto je već zauzeto pa se element 4 uspoređuje s elementom na tom mjestu.

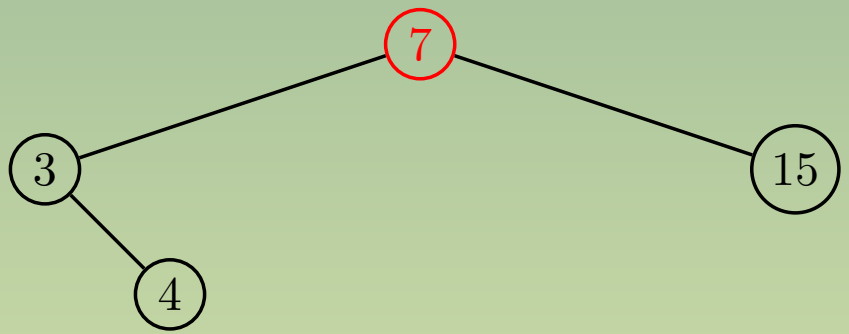
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Kako je $4 > 3$, element 4 postaje desno dijete elementa 3.

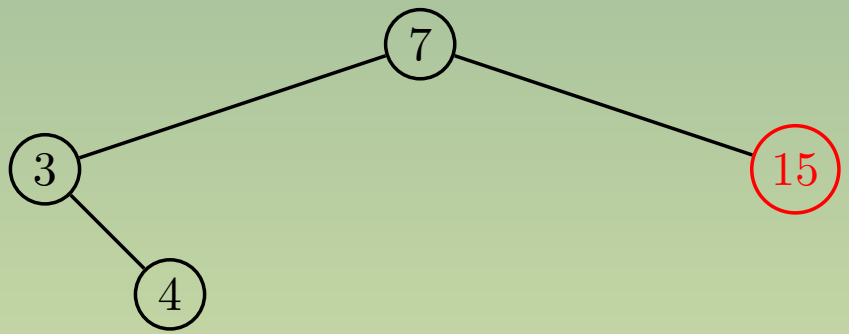
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Element 12 uspoređujemo s korijenom. Kako je $12 > 7$, element 12 bi trebao postati desno dijete od elementa 7.

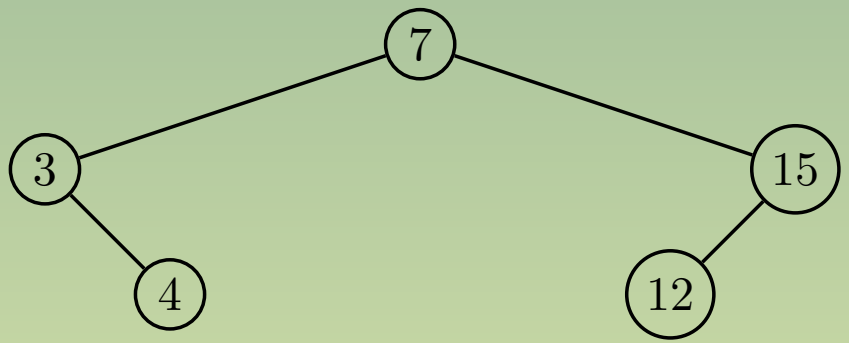
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Međutim, to mjesto je već zauzeto pa se element 12 uspoređuje s elementom na tom mjestu.

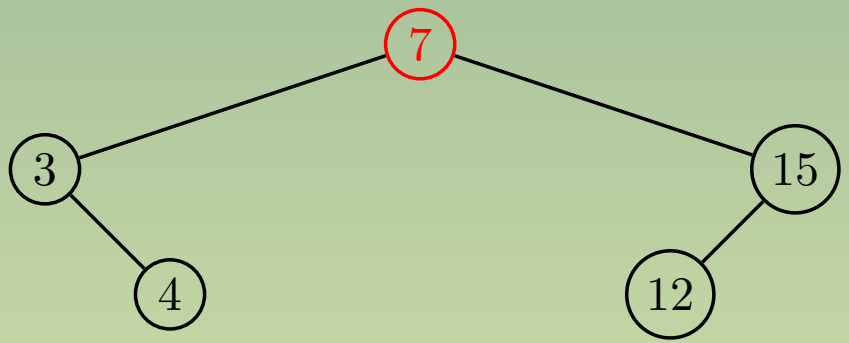
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Kako je $12 < 15$, element 12 postaje lijevo dijete elementa 15.

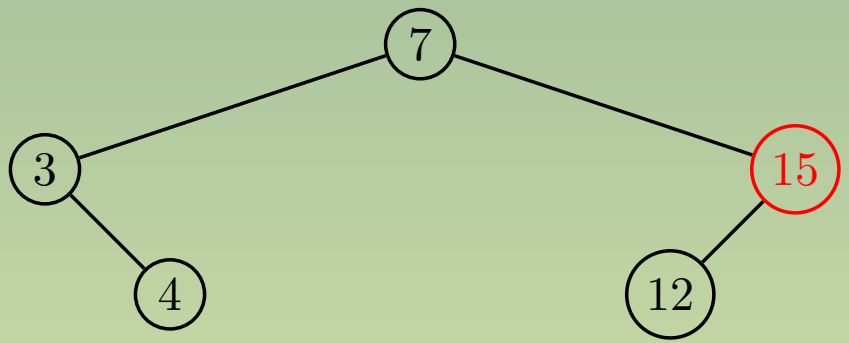
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Element 14 uspoređujemo s korijenom. Kako je $14 > 7$, element 14 bi trebao postati desno dijete od elementa 7.

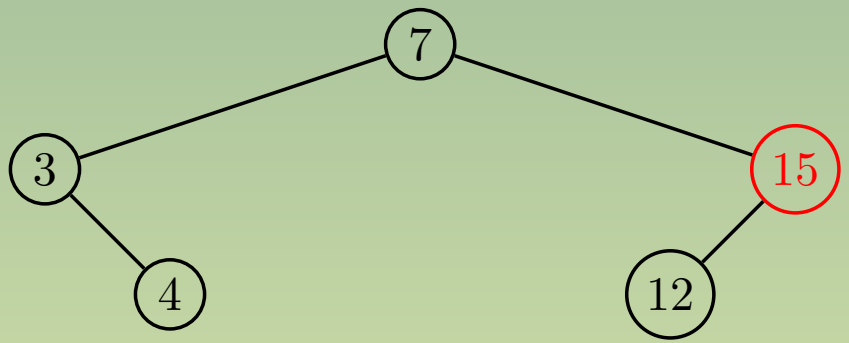
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Međutim, to mjesto je već zauzeto pa se element 14 uspoređuje s elementom na tom mjestu.

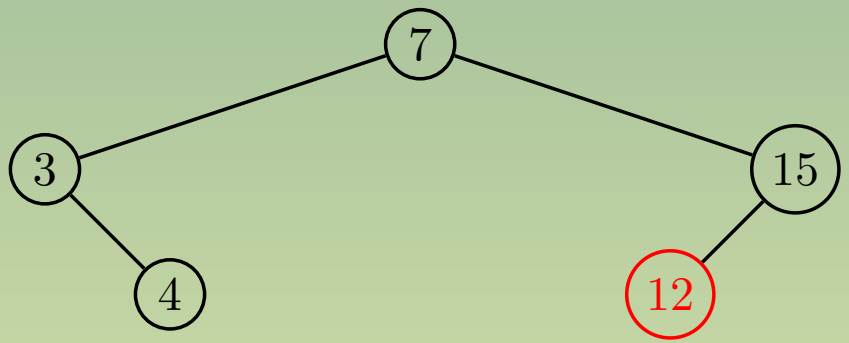
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Kako je $14 < 15$, element 14 bi trebao postati lijevo dijete elementa 15.

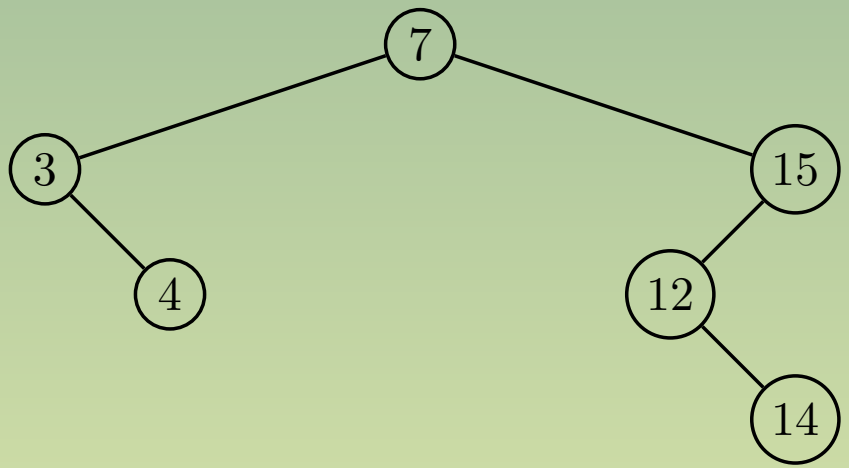
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Međutim, to mjesto je već zauzeto pa se element 14 uspoređuje s elementom na tom mjestu.

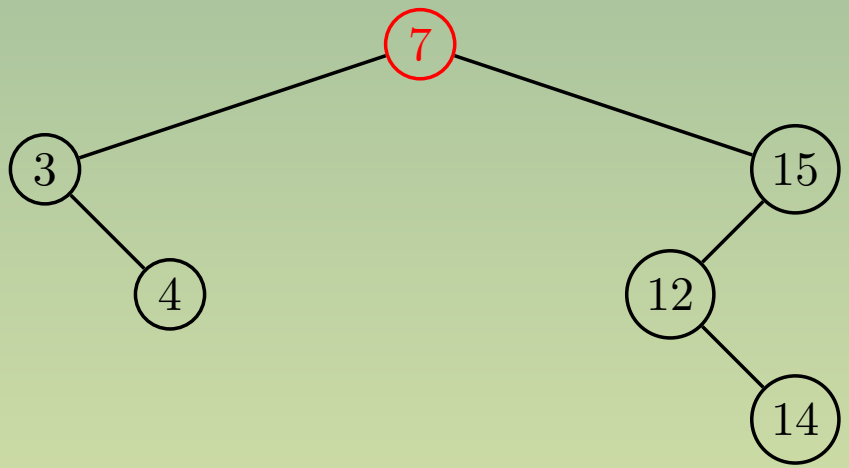
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Kako je $14 > 12$, element 14 postaje desno dijete elementa 12.

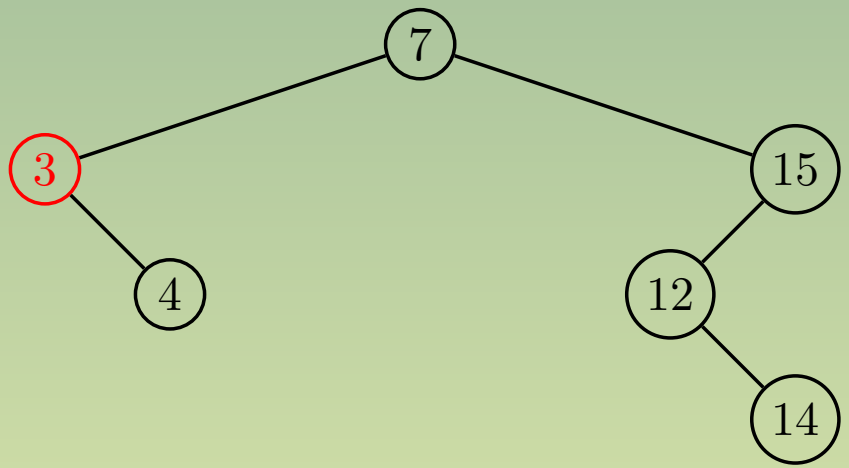
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Element 6 uspoređujemo s korijenom. Kako je $6 < 7$, element 6 bi trebao postati lijevo dijete od elementa 7.

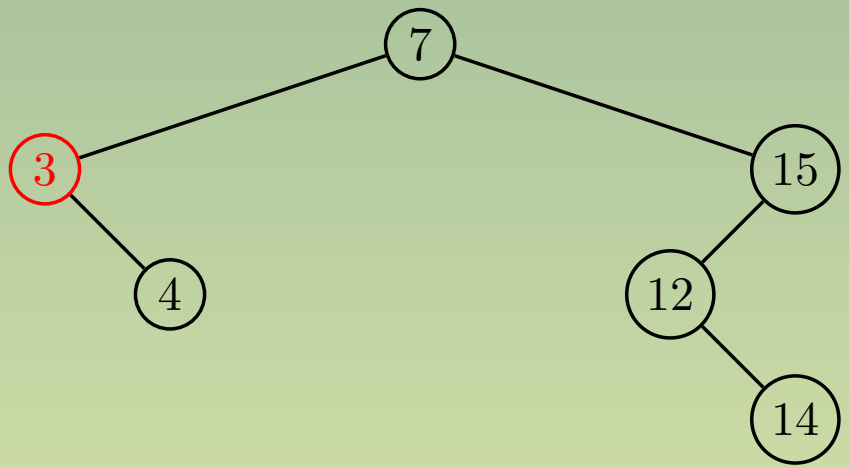
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Međutim, to mjesto je već zauzeto pa se element 6 uspoređuje s elementom na tom mjestu.

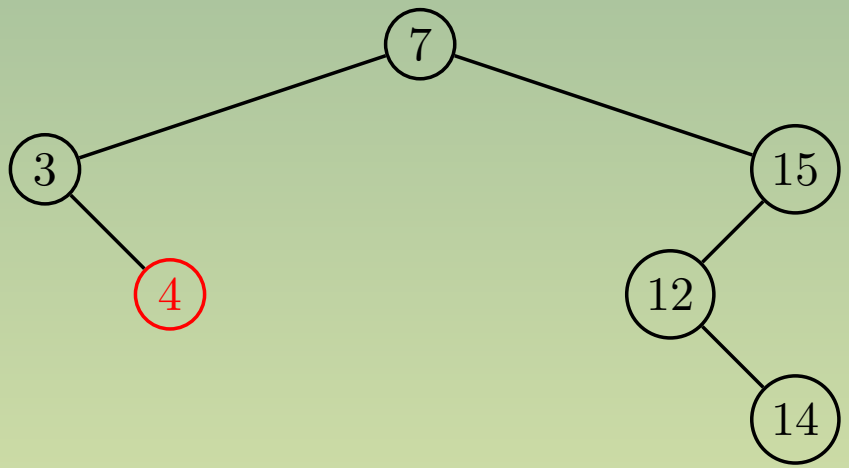
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Kako je $6 > 3$, element 6 bi trebao postati desno dijete od elementa 3.

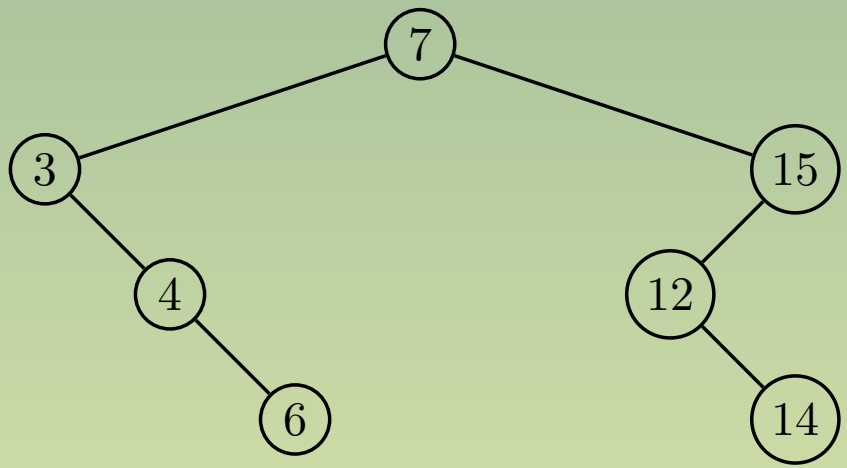
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Međutim, to mjesto je već zauzeto pa se element 6 uspoređuje s elementom na tom mjestu.

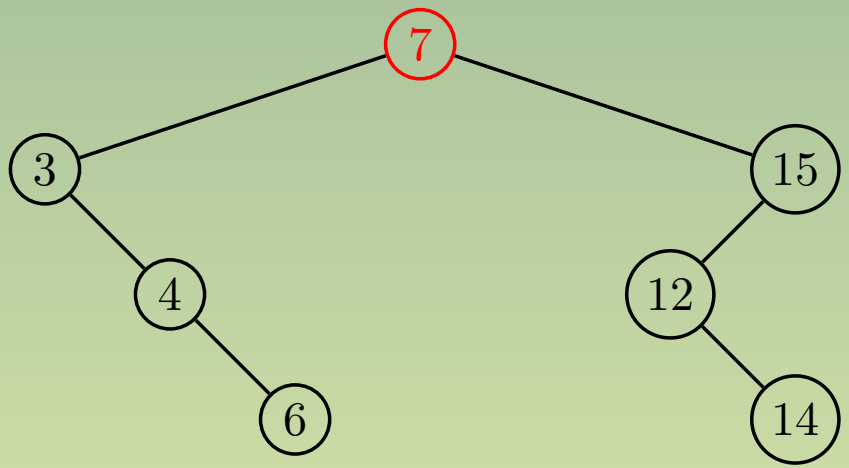
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Kako je $6 > 4$, element 6 postaje desno dijete od elementa 4.

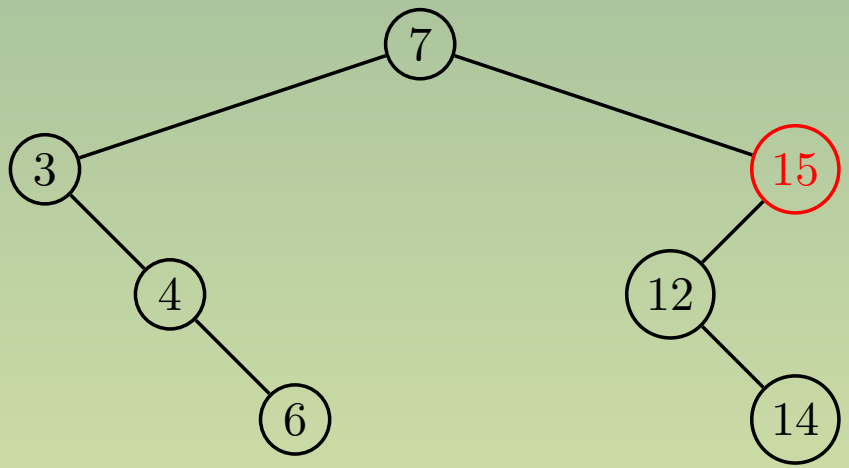
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Element 8 uspoređujemo s korijenom. Kako je $8 > 7$, element 8 bi trebao postati desno dijete od elementa 7.

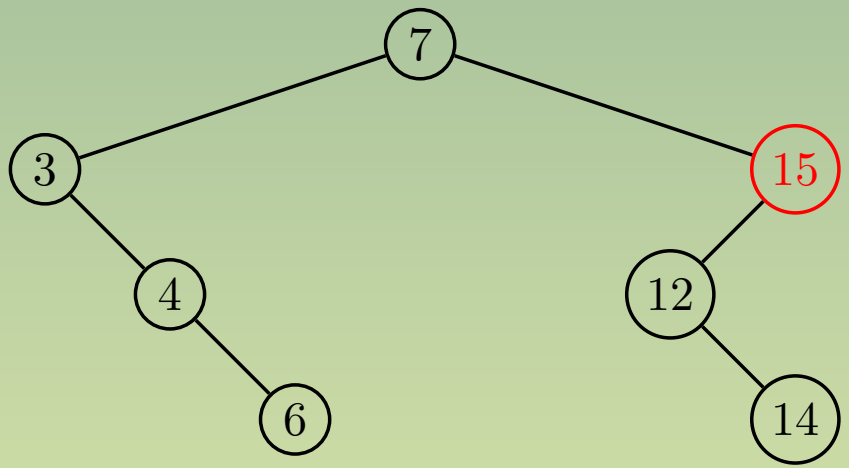
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Međutim, to mjesto je već zauzeto pa se element 8 uspoređuje s elementom na tom mjestu.

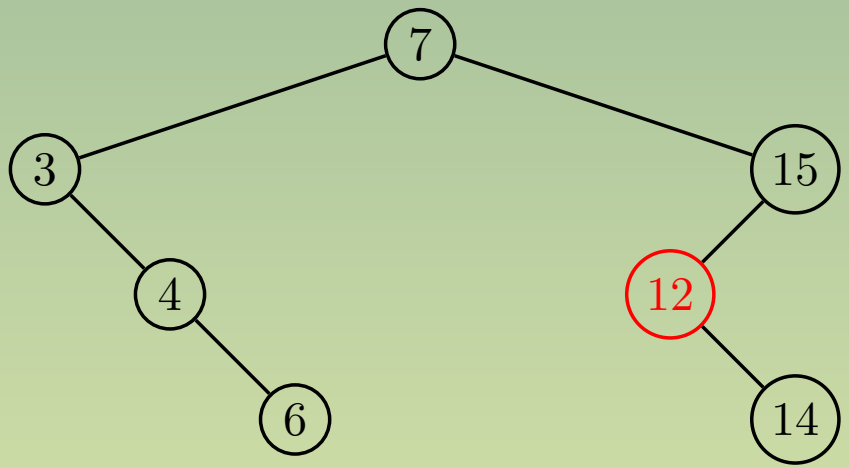
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Kako je $8 < 15$, element 8 bi trebao postati lijevo dijete od elementa 15.

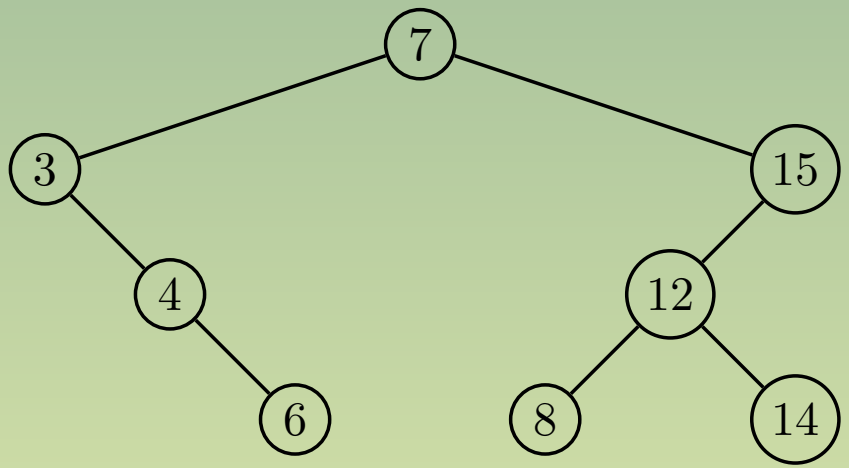
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Međutim, to mjesto je već zauzeto pa se element 8 uspoređuje s elementom na tom mjestu.

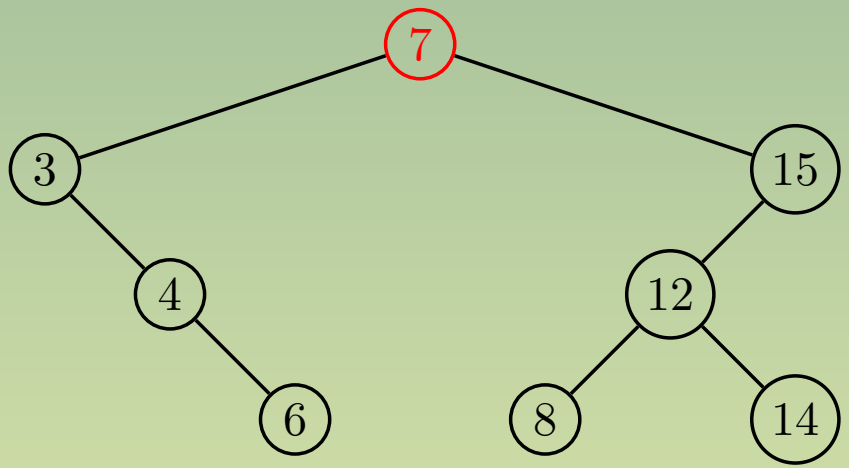
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Kako je $8 < 12$, element 8 postaje lijevo dijete od elementa 12.

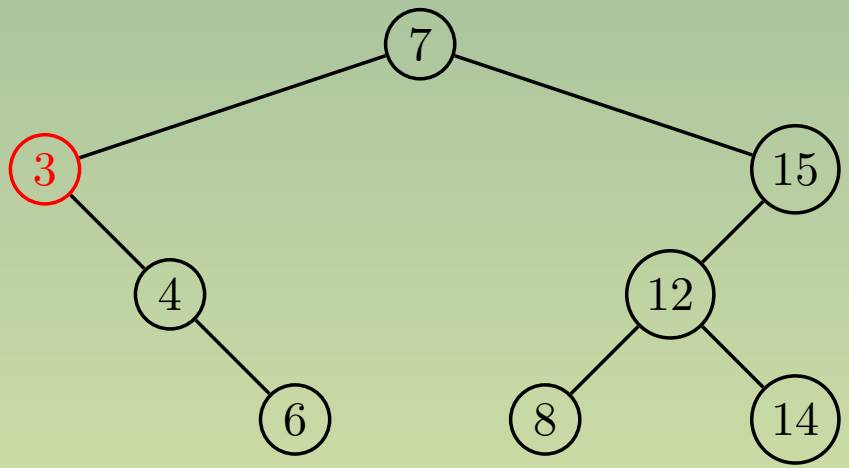
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Element 2 uspoređujemo s korijenom. Kako je $2 < 7$, element 2 bi trebao postati lijevo dijete od elementa 7.

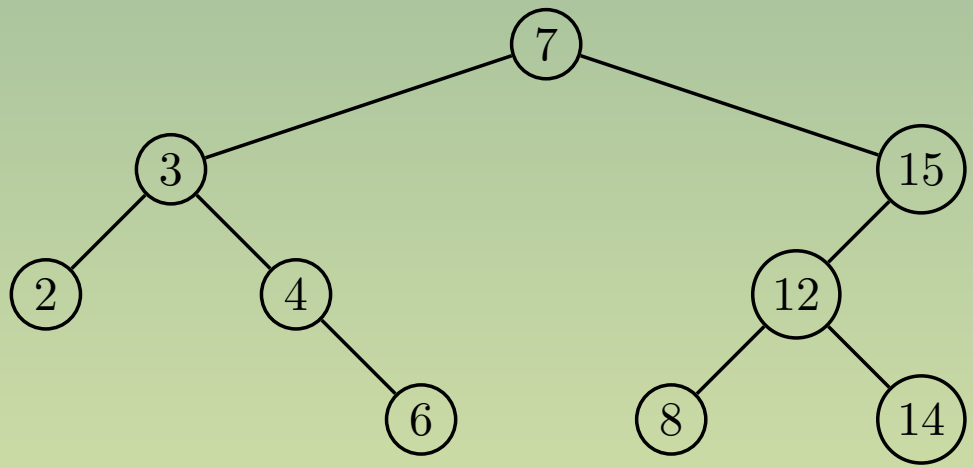
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Međutim, to mjesto je već zauzeto pa se element 2 uspoređuje s elementom na tom mjestu.

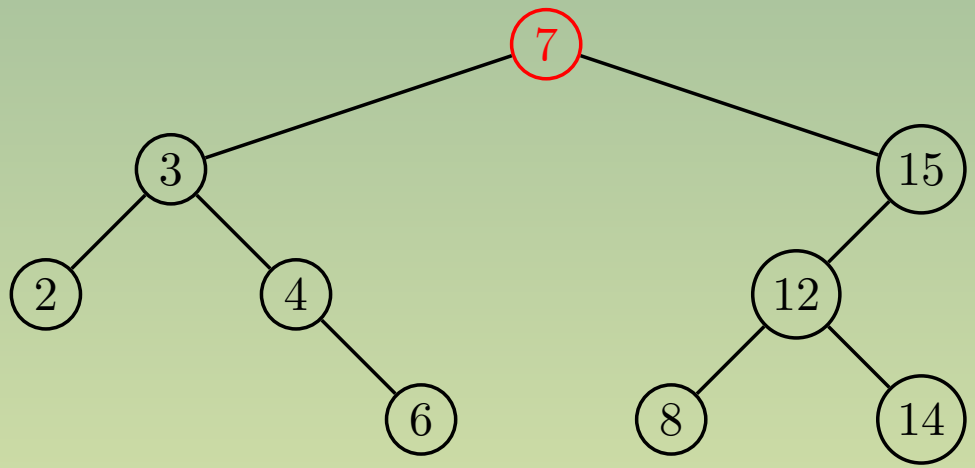
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Kako je $2 < 3$, element 2 postaje lijevo dijete od elementa 3.

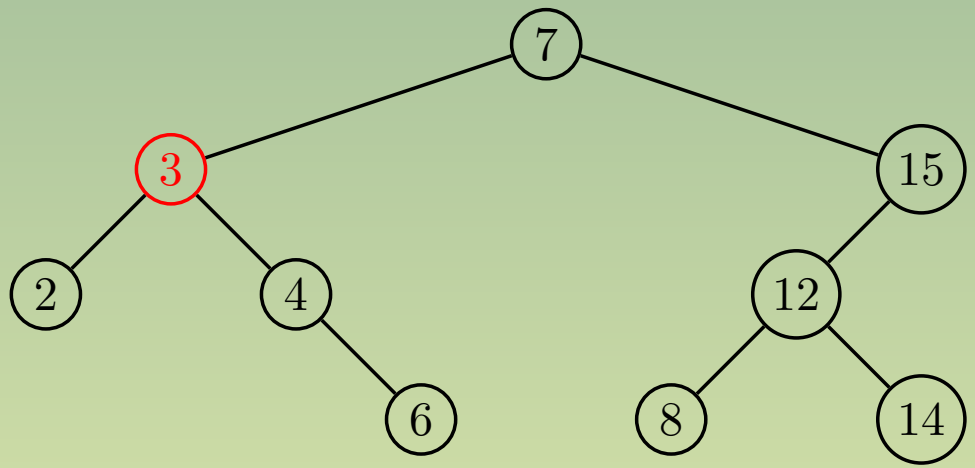
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Element 5 uspoređujemo s korijenom. Kako je $5 < 7$, element 5 bi trebao postati lijevo dijete od elementa 7.

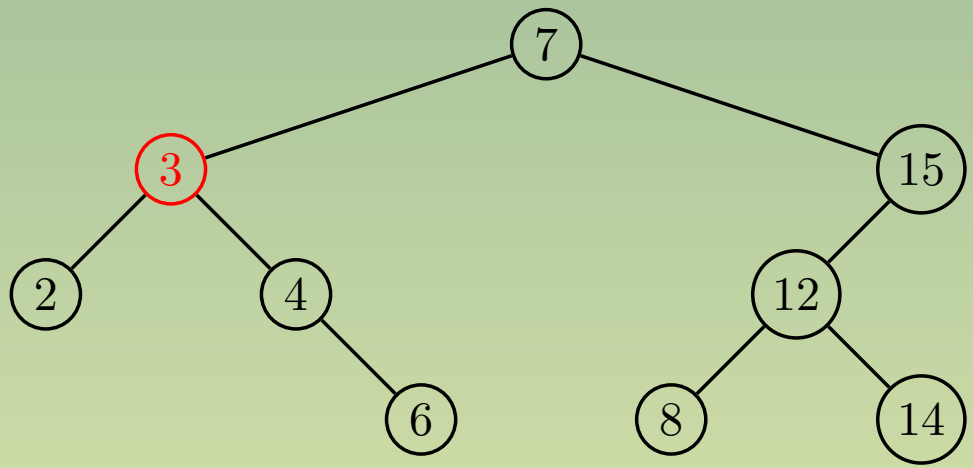
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Međutim, to mjesto je već zauzeto pa se element 5 uspoređuje s elementom na tom mjestu.

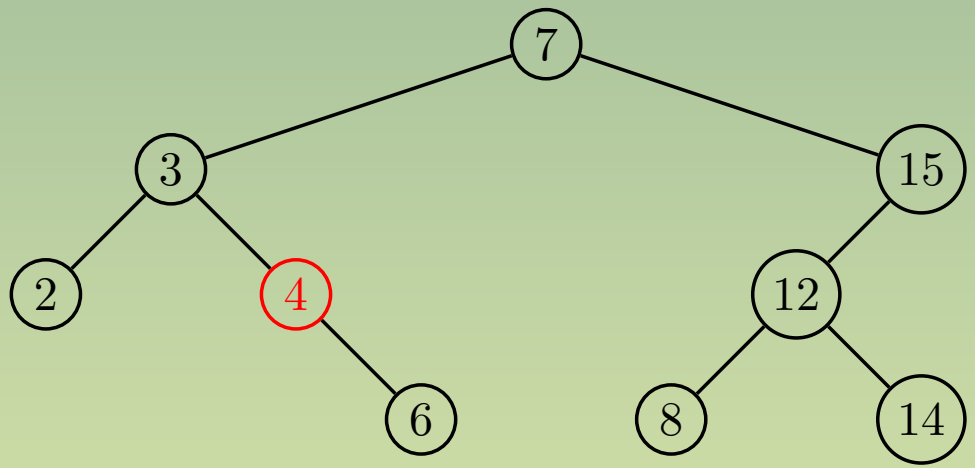
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Kako je $5 > 3$, element 5 bi trebao postati desno dijete od elementa 3.

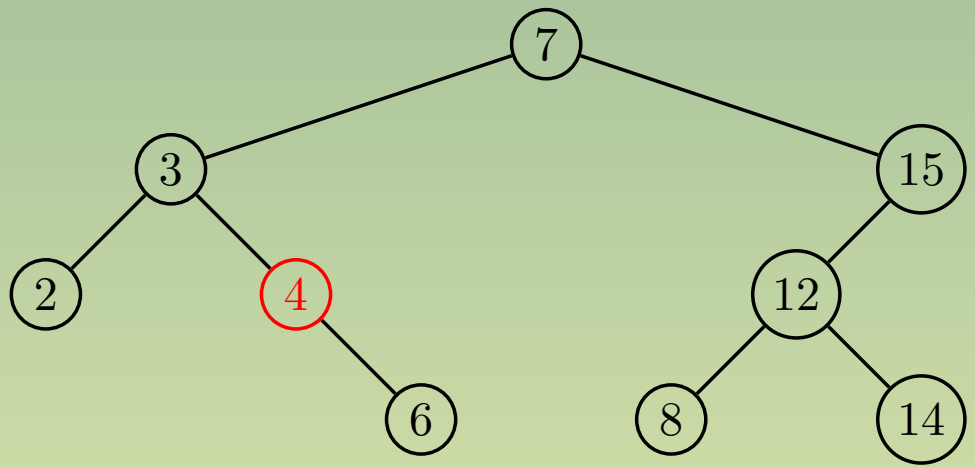
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Međutim, to mjesto je već zauzeto pa se element 5 uspoređuje s elementom na tom mjestu.

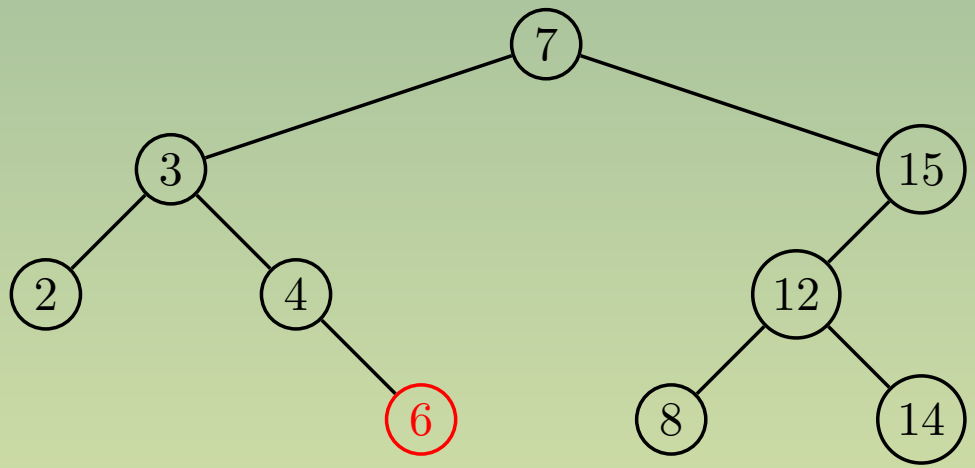
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Kako je $5 > 4$, element 5 bi trebao postati desno dijete od elementa 4.

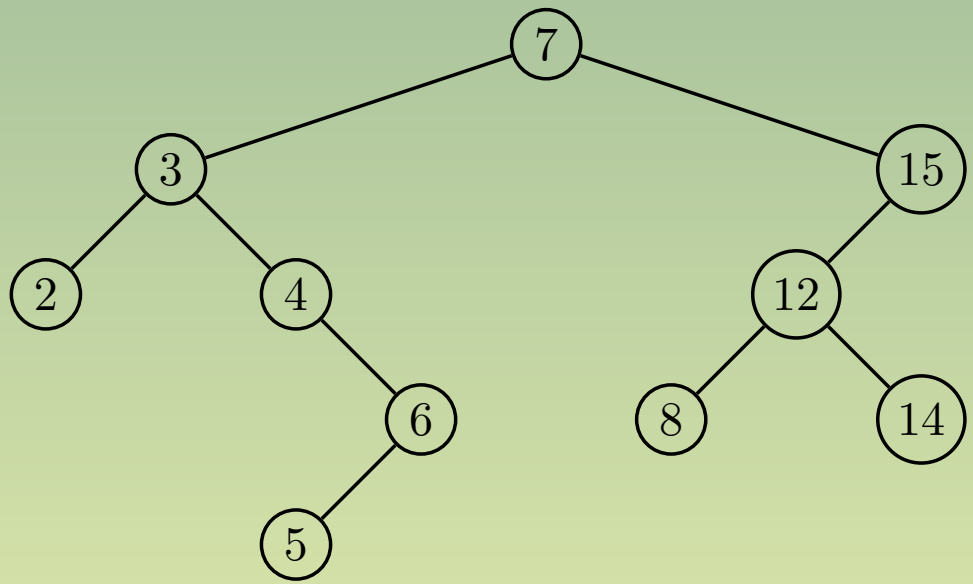
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Međutim, to mjesto je već zauzeto pa se element 5 uspoređuje s elementom na tom mjestu.

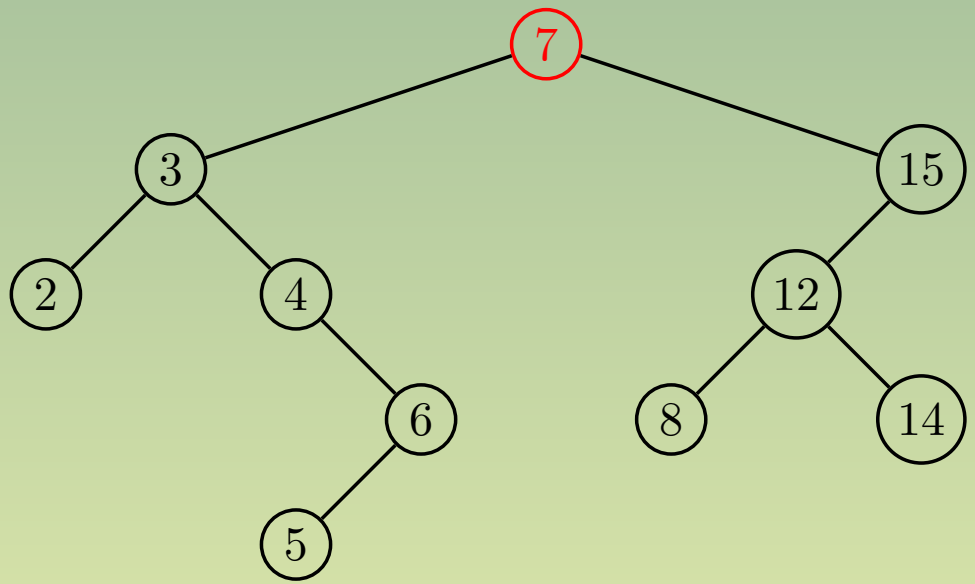
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Kako je $5 < 6$, element 5 postaje lijevo dijete od elementa 6.

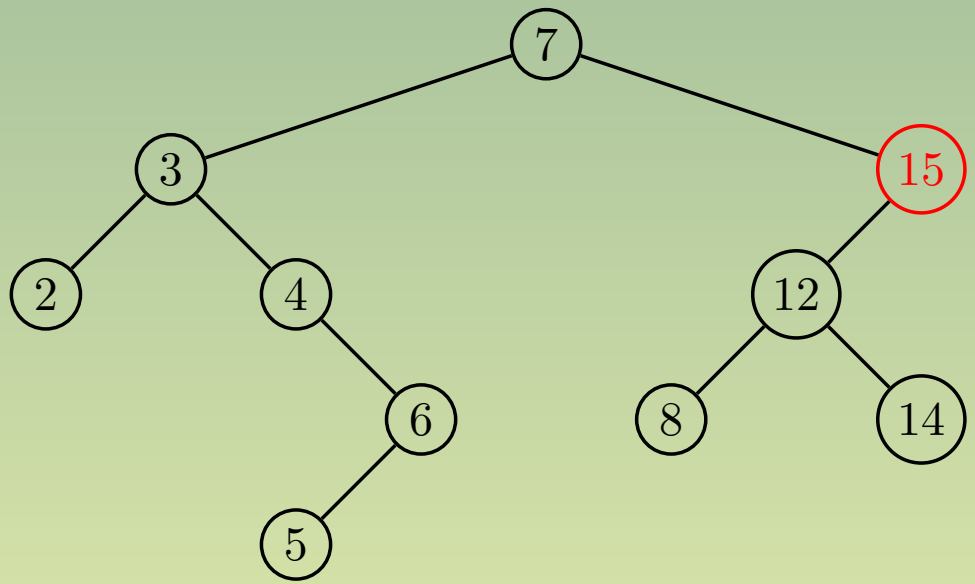
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Element 13 uspoređujemo s korijenom. Kako je $13 > 7$, element 13 bi trebao postati desno dijete od elementa 7.

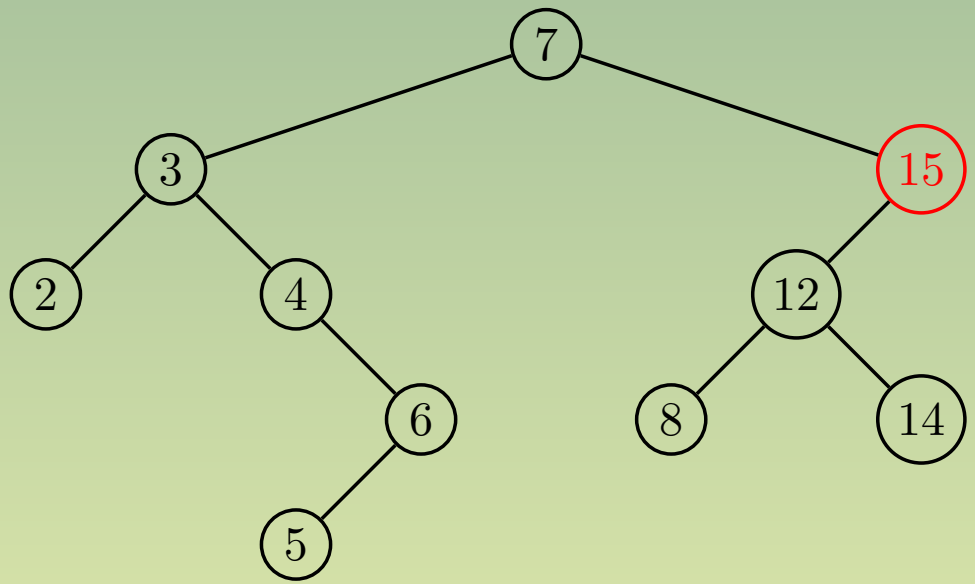
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Međutim, to mjesto je već zauzeto pa se element 13 uspoređuje s elementom na tom mjestu.

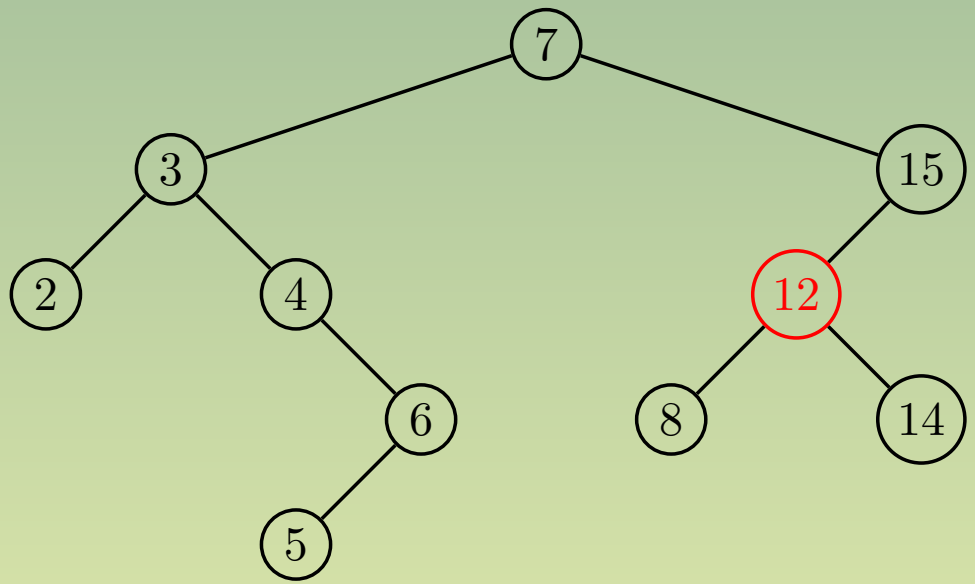
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Kako je $13 < 15$, element 13 bi trebao postati lijevo dijete od elementa 15.

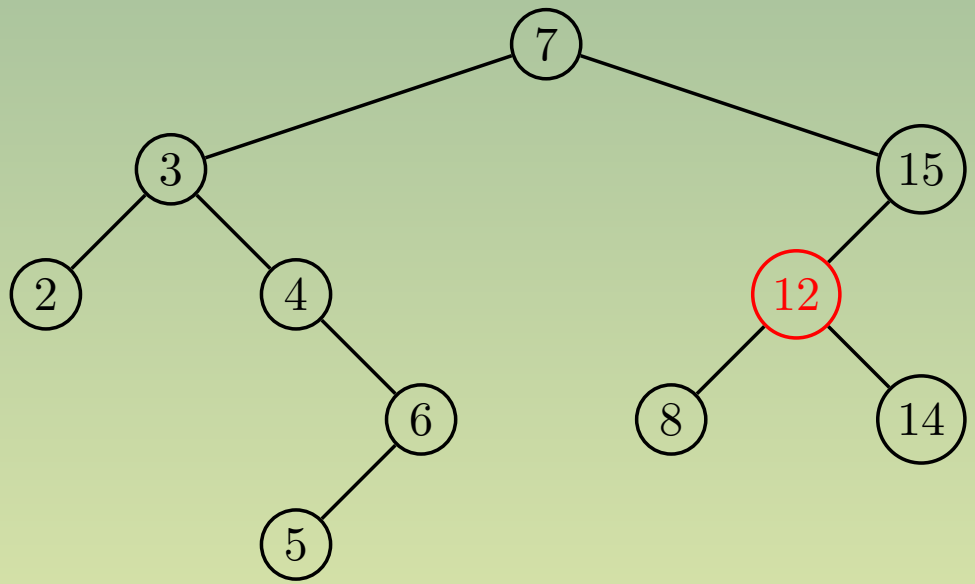
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Međutim, to mjesto je već zauzeto pa se element 13 uspoređuje s elementom na tom mjestu.

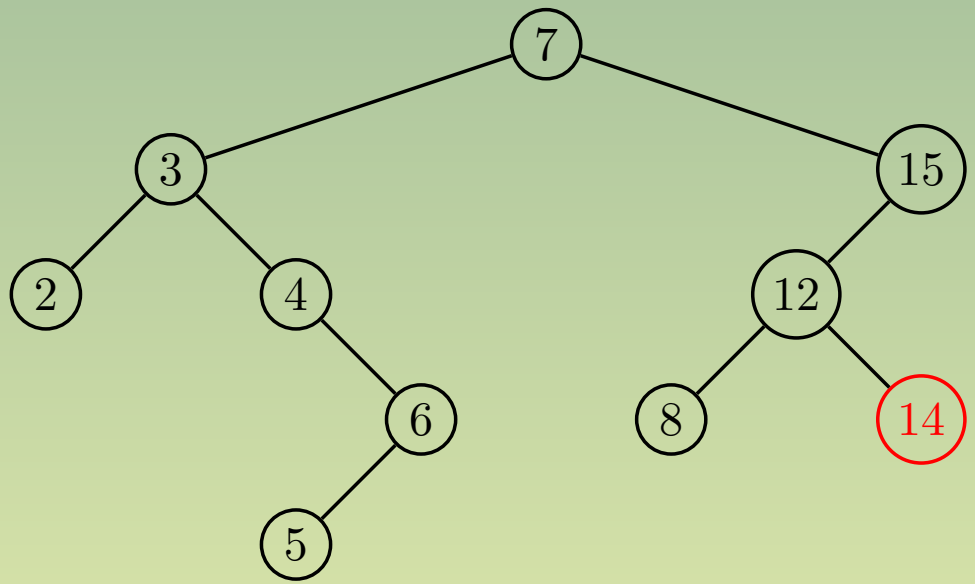
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Kako je $13 > 12$, element 13 bi trebao postati desno dijete od elementa 12.

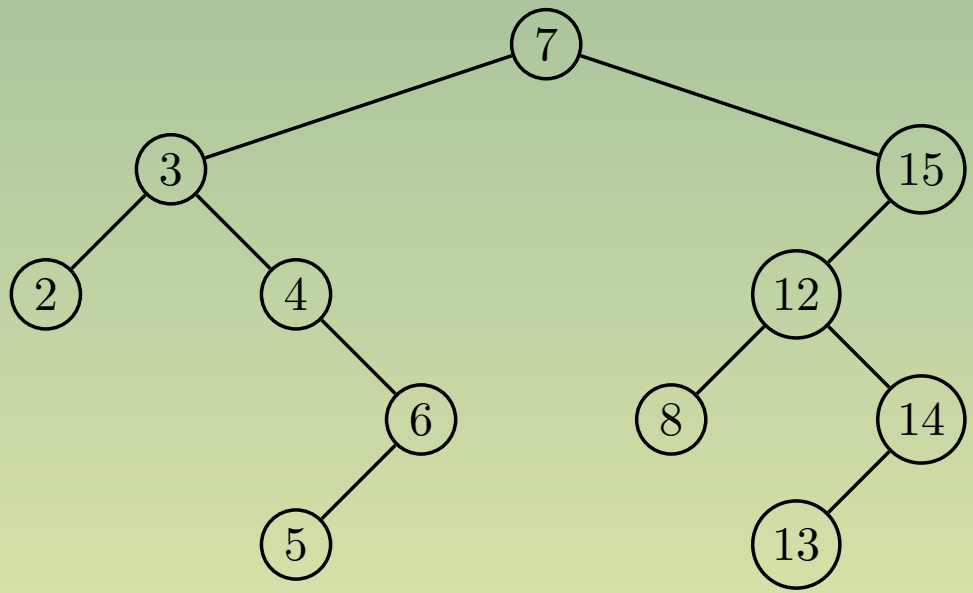
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Međutim, to mjesto je već zauzeto pa se element 13 uspoređuje s elementom na tom mjestu.

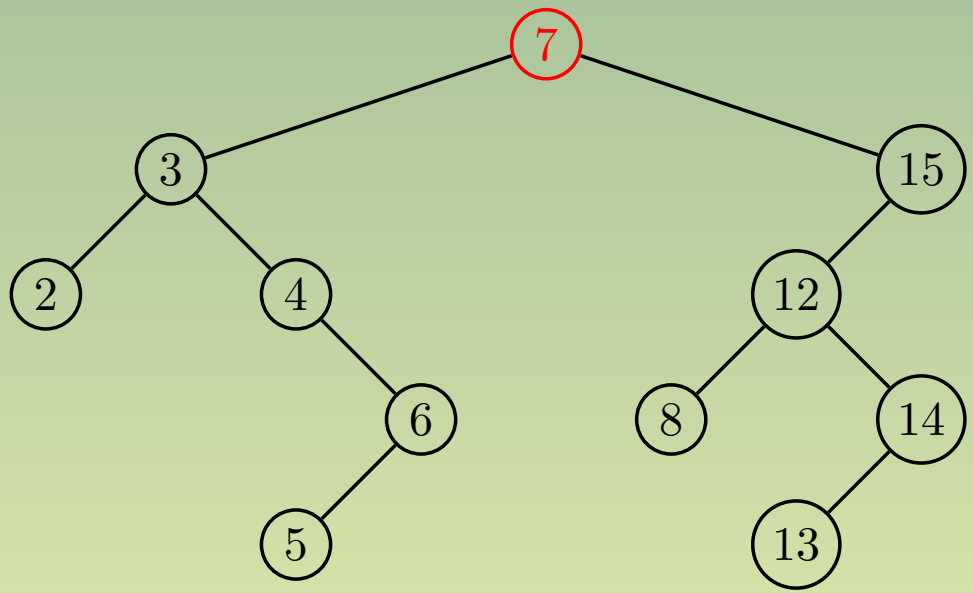
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Kako je $13 < 14$, element 13 postaje lijevo dijete od elementa 14.

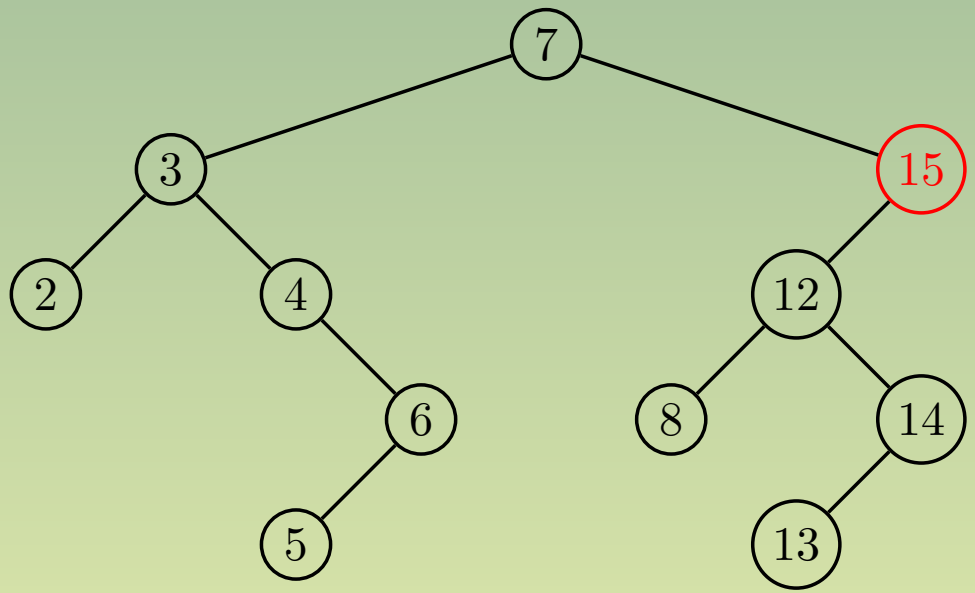
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Element 19 uspoređujemo s korijenom. Kako je $19 > 7$, element 19 bi trebao postati desno dijete od elementa 7.

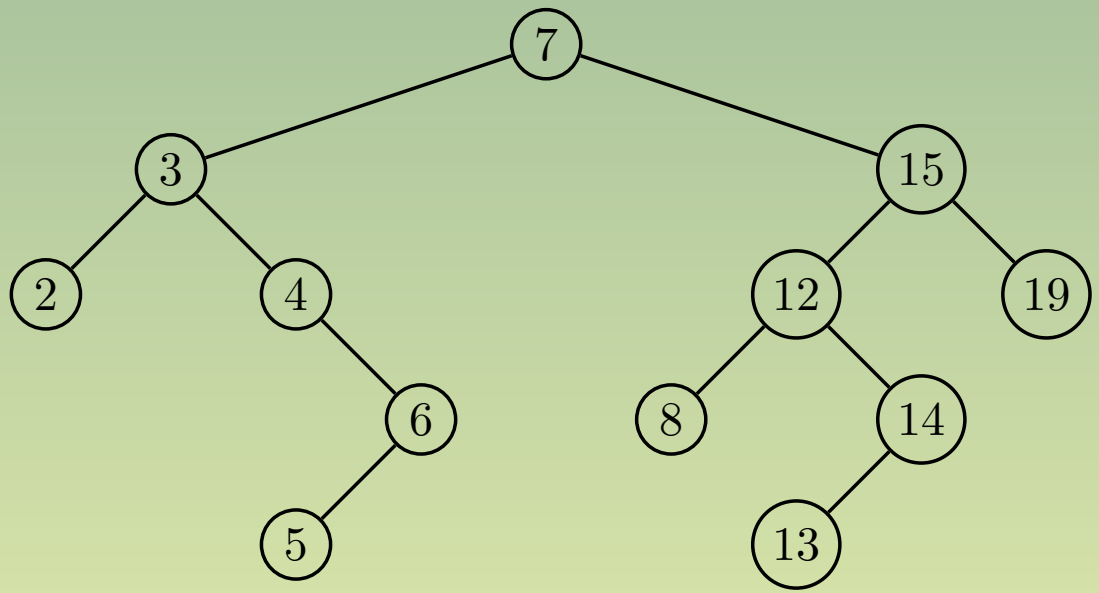
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Međutim, to mjesto je već zauzeto pa se element 19 uspoređuje s elementom na tom mjestu.

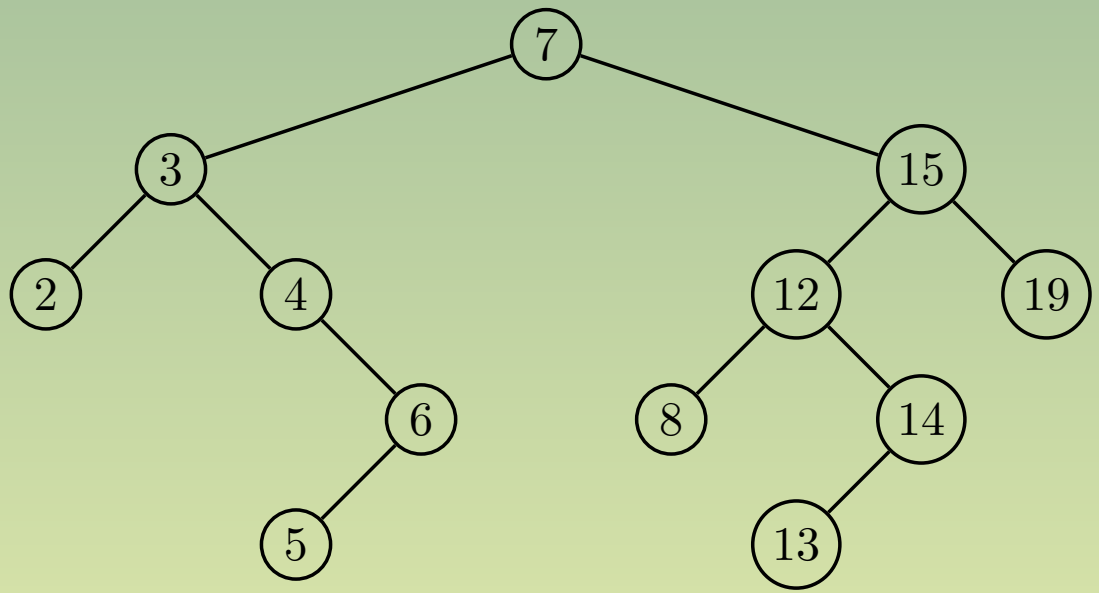
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Kako je $19 > 15$, element 19 postaje desno dijete od elementa 15.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

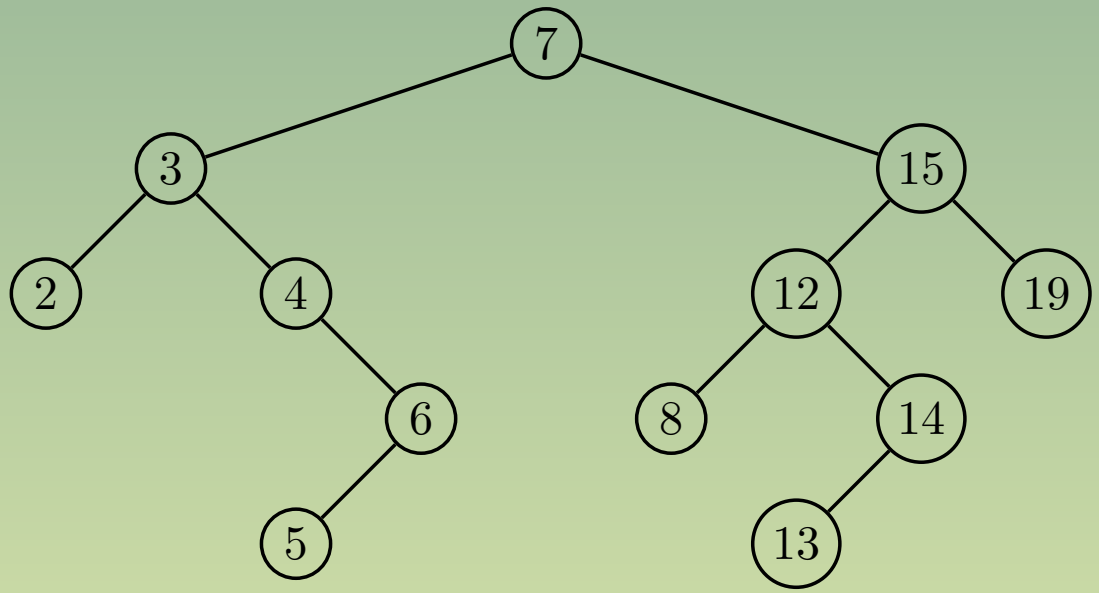


lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

objasni postupak

Kako smo prošli sve elemente iz dane liste, dobiveno stablo je stablo sortiranja za danu listu.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

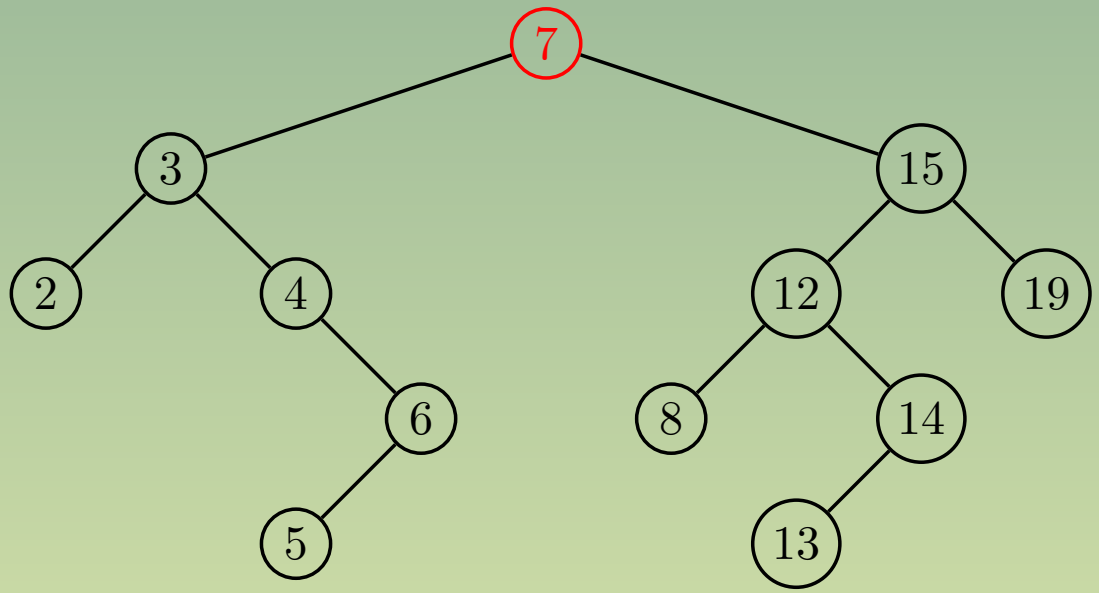
sortirana lista:

na čekanju:

Sada kada imamo stablo sortiranja za danu listu, htjeli bismo iz njega rekonstruirati sortiranu listu.

preskoči postupak

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



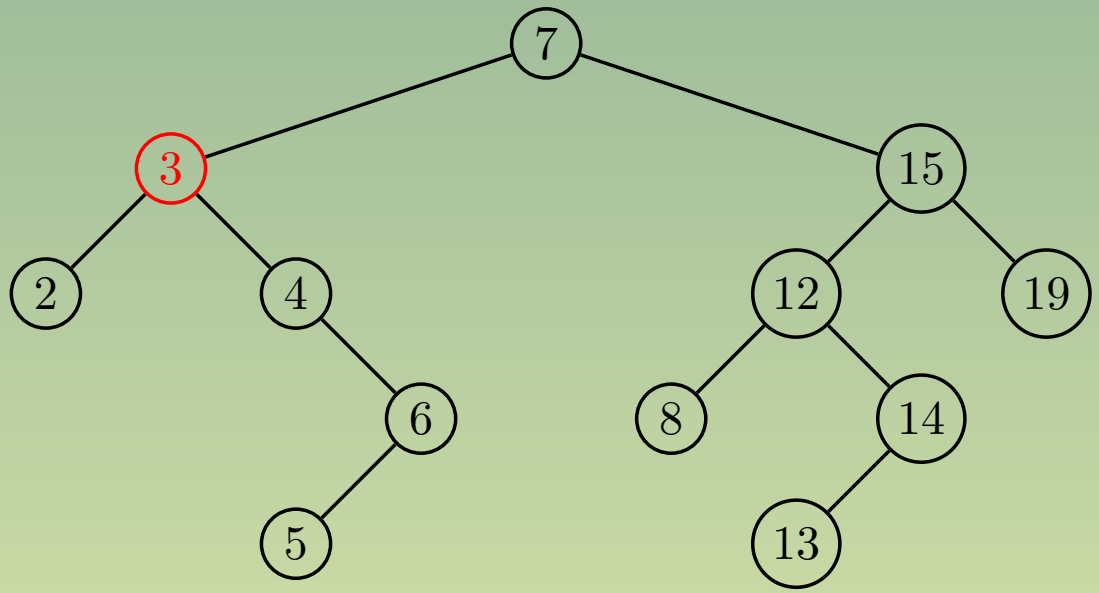
lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

sortirana lista:

na čekanju: 7

Krećemo od korijena. Kako 7 ima lijevo dijete, stavljamo ga na čekanje

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



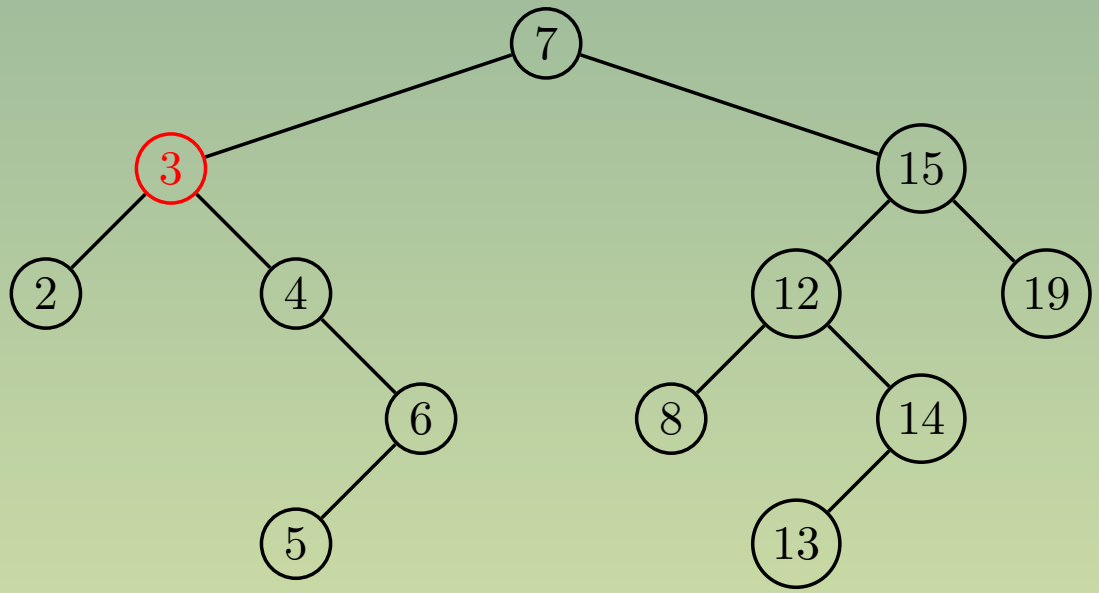
lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

sortirana lista:

na čekanju: 7

Krećemo od korijena. Kako 7 ima lijevo dijete, stavljamo ga na čekanje i prebacujemo se na njegovo lijevo dijete.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



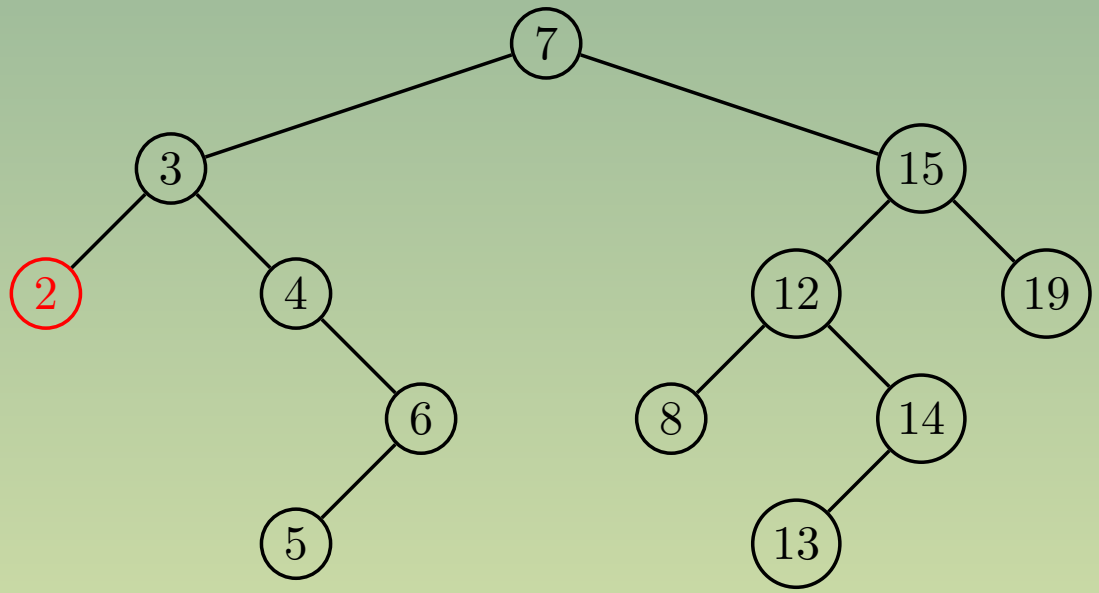
lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

sortirana lista:

na čekanju: 7, 3

Kako 3 ima lijevo dijete, stavljamo ga na čekanje

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



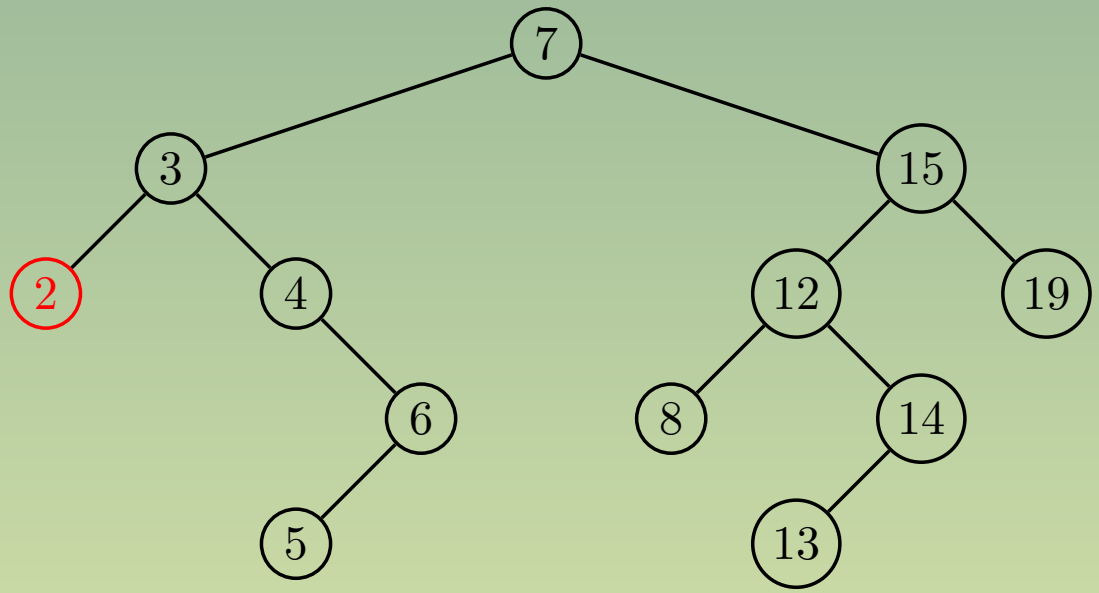
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista:

na čekanju: $7, 3$

Kako 3 ima lijevo dijete, stavljamo ga na čekanje i prebacujemo se na njegovo lijevo dijete.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



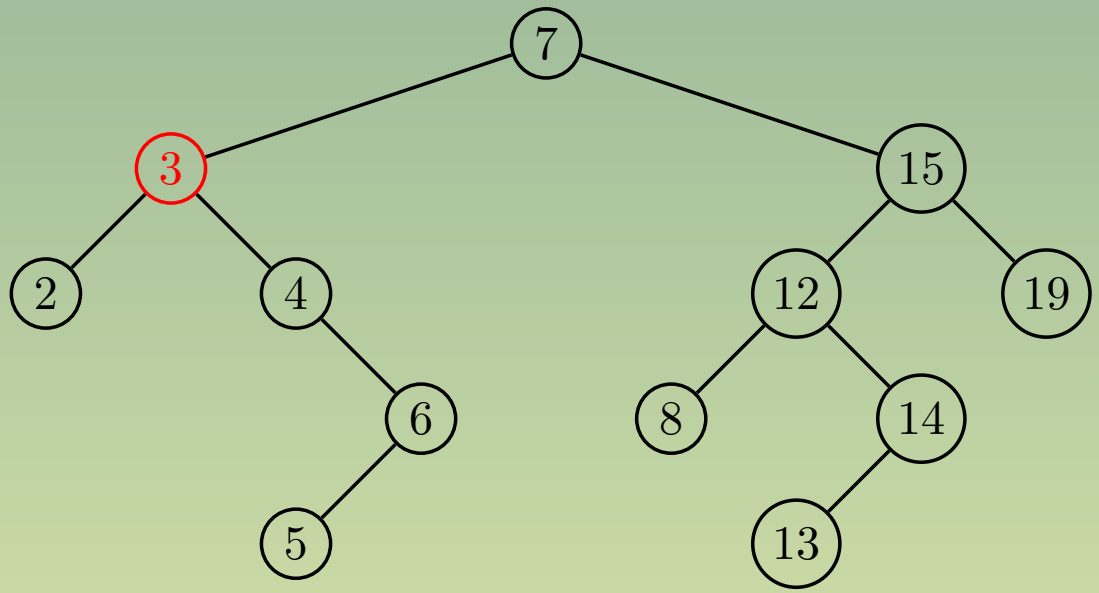
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: 2

na čekanju: $7, 3$

Kako 2 nema lijevog djeteta, ispisujemo taj element. Kako 2 nema desnog djeteta,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



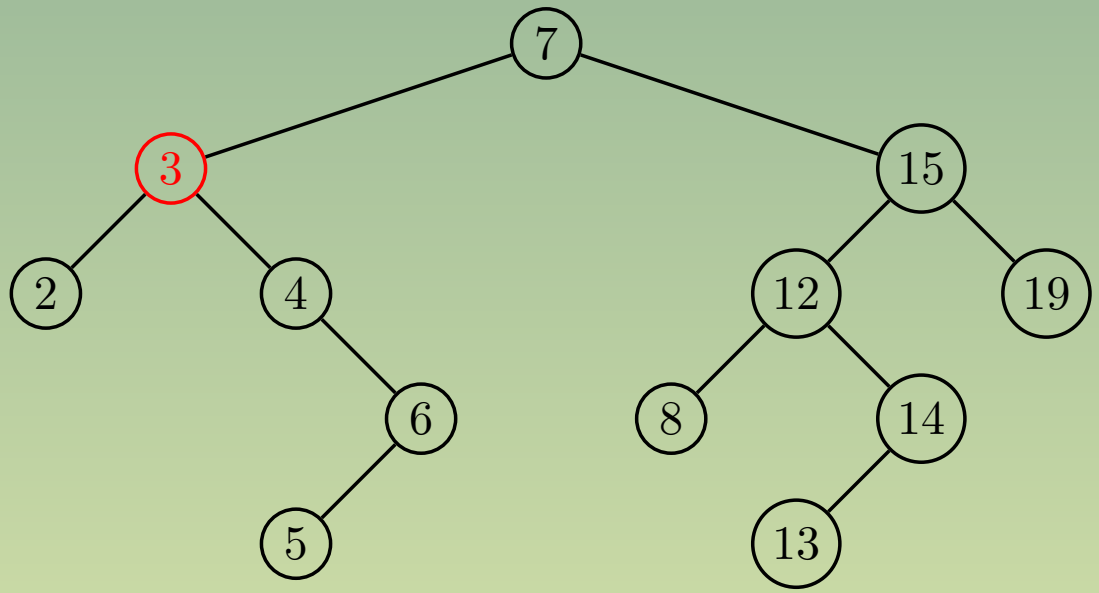
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: 2

na čekanju: $7, 3$

Kako 2 nema lijevog djeteta, ispisujemo taj element. Kako 2 nema desnog djeteta, prebacujemo se na zadnji element na čekanju, a to je ovdje element 3.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



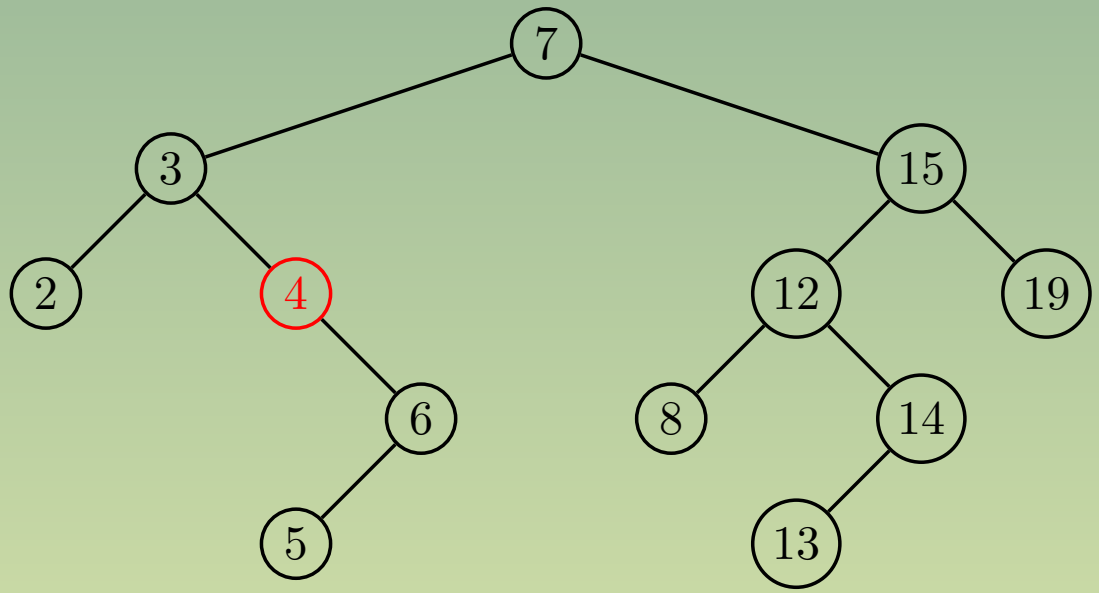
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3$

na čekanju: 7

Ispisujemo taj element

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



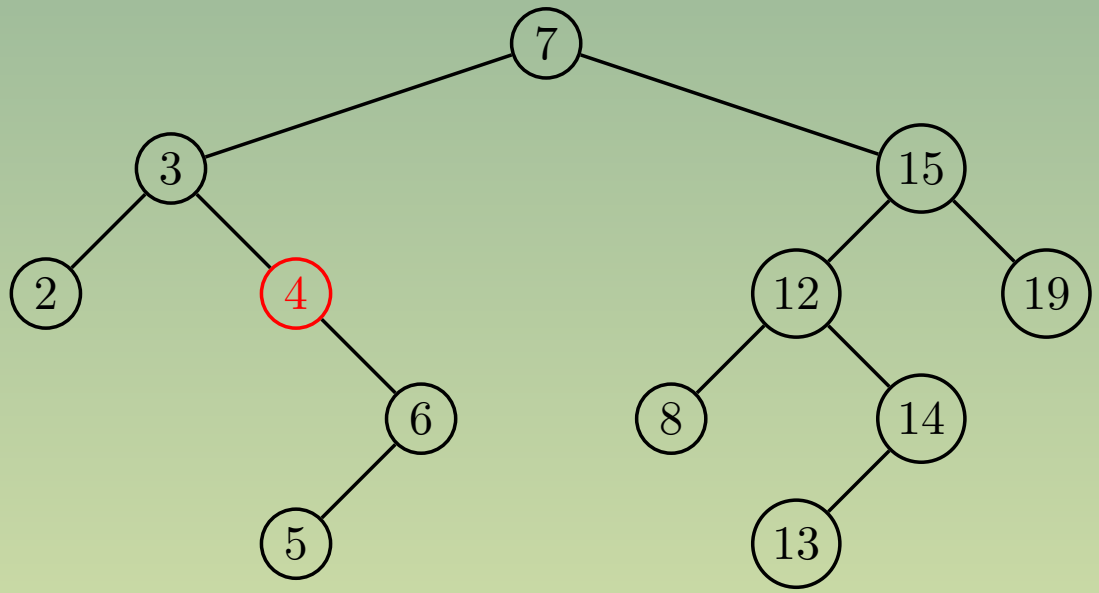
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3$

na čekanju: 7

Ispisujemo taj element i prebacujemo se na njegovo desno dijete.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



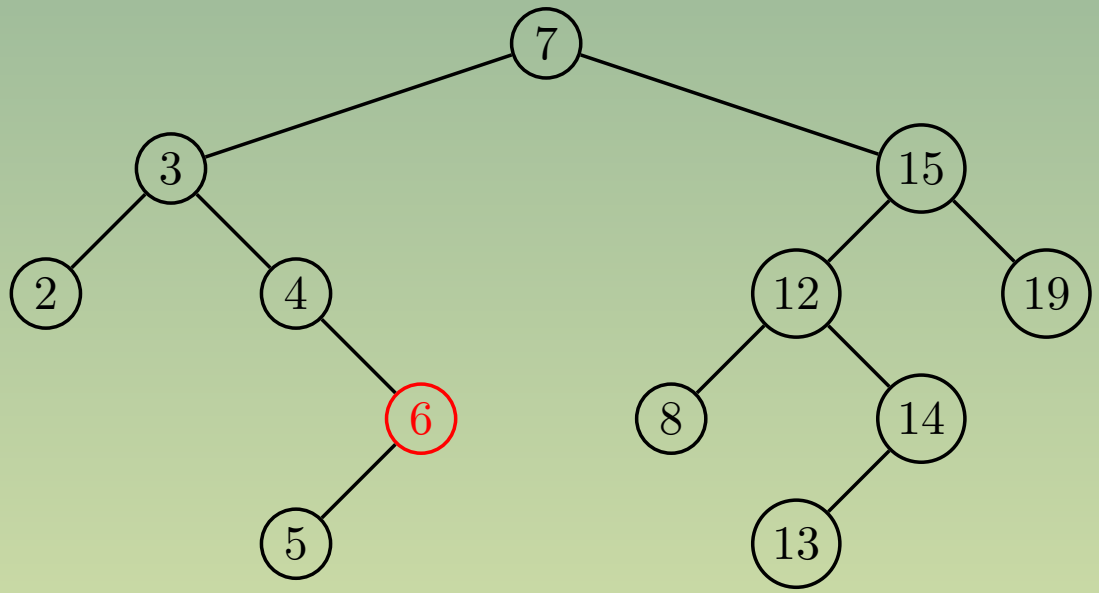
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4$

na čekanju: 7

Kako 4 nema lijevog djeteta, odmah ga ispišemo

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



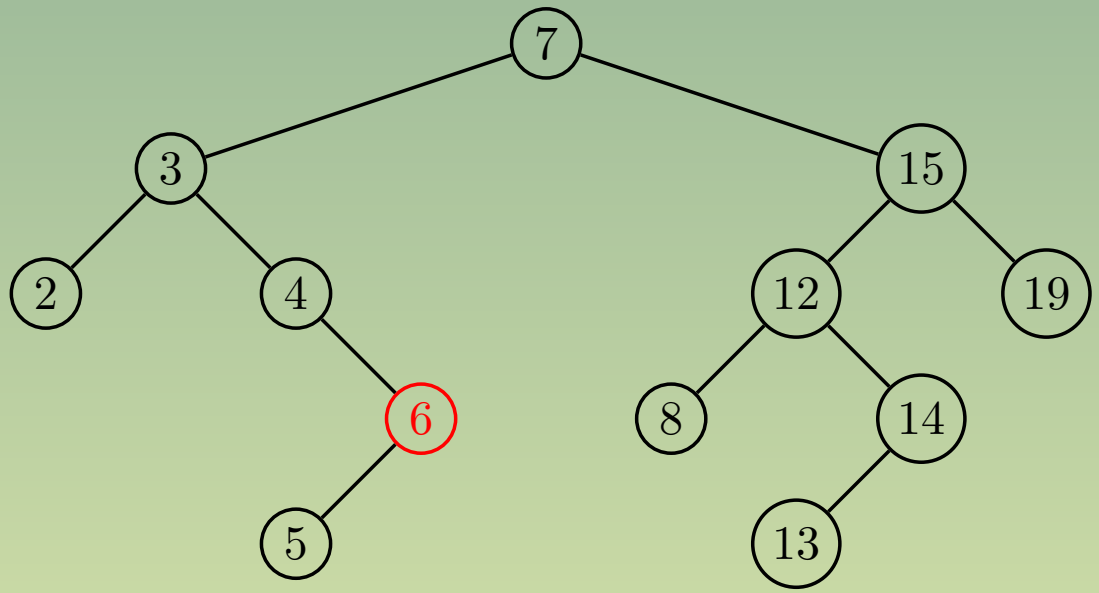
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4$

na čekanju: 7

Kako 4 nema lijevog djeteta, odmah ga ispišemo i prebacimo se na njegovo desno dijete.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



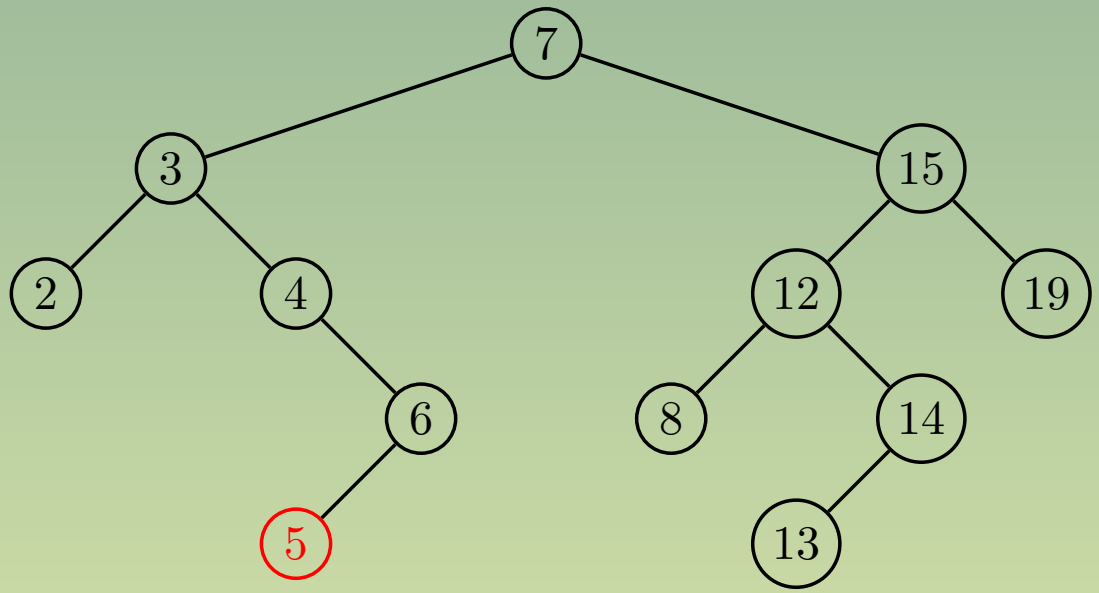
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4$

na čekanju: $7, 6$

Kako 6 ima lijevo dijete, stavljamo ga na čekanje

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



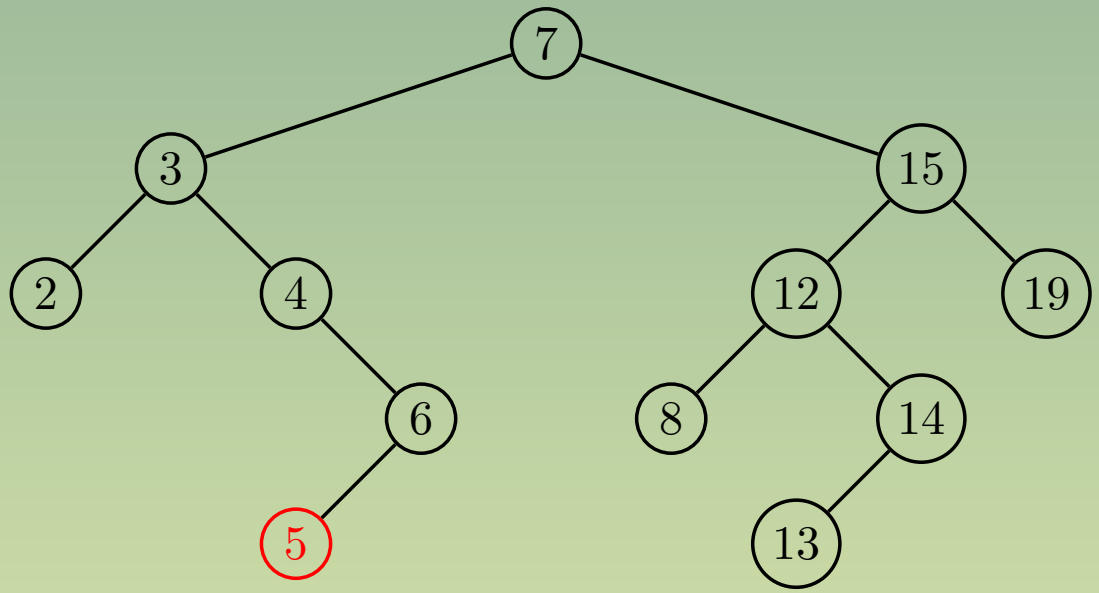
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4$

na čekanju: $7, 6$

Kako 6 ima lijevo dijete, stavljamo ga na čekanje i prebacimo se na njegovo lijevo dijete.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



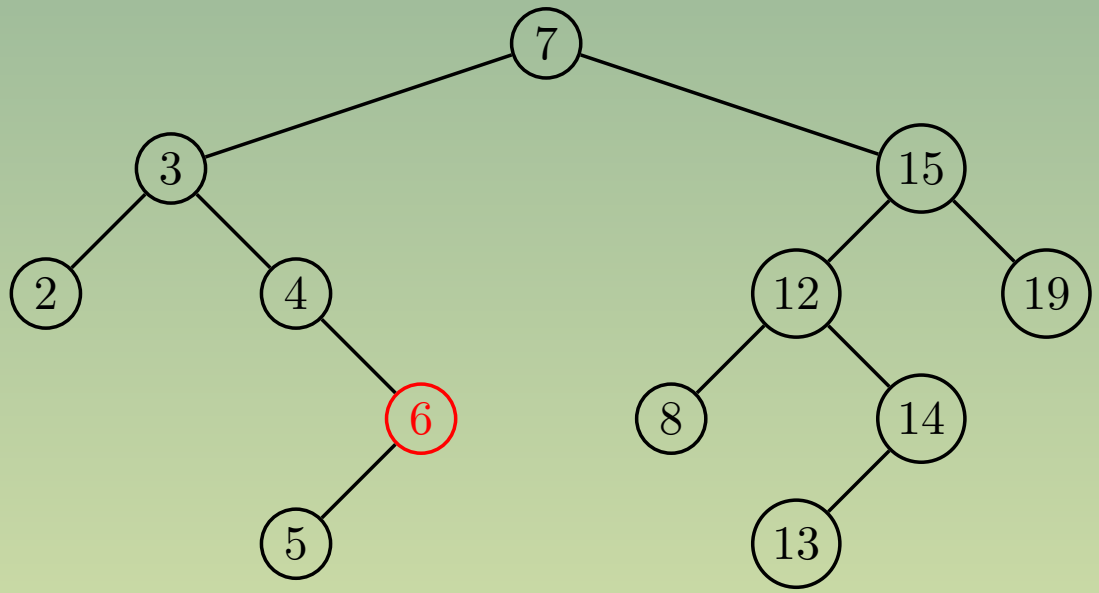
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5$

na čekanju: $7, 6$

Kako 5 nema lijevog djeteta, tada ga ispišemo.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



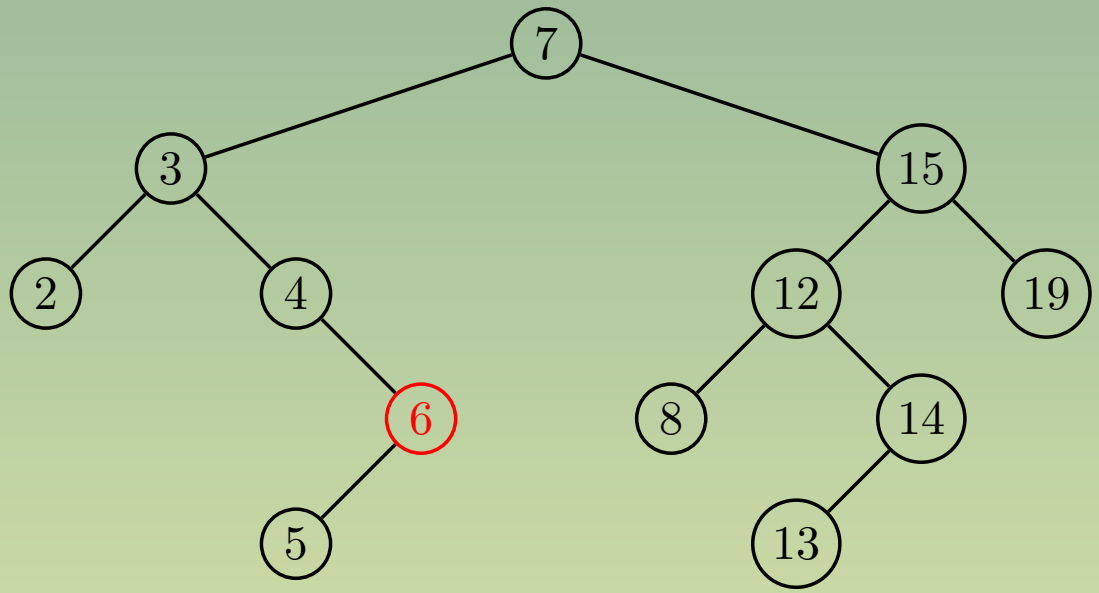
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5$

na čekanju: $7, 6$

Kako 5 nema lijevog djeteta, tada ga ispišemo. Kako 5 nema desnog djeteta, prebacujemo se na zadnji element na čekanju, a to je ovdje element 6.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



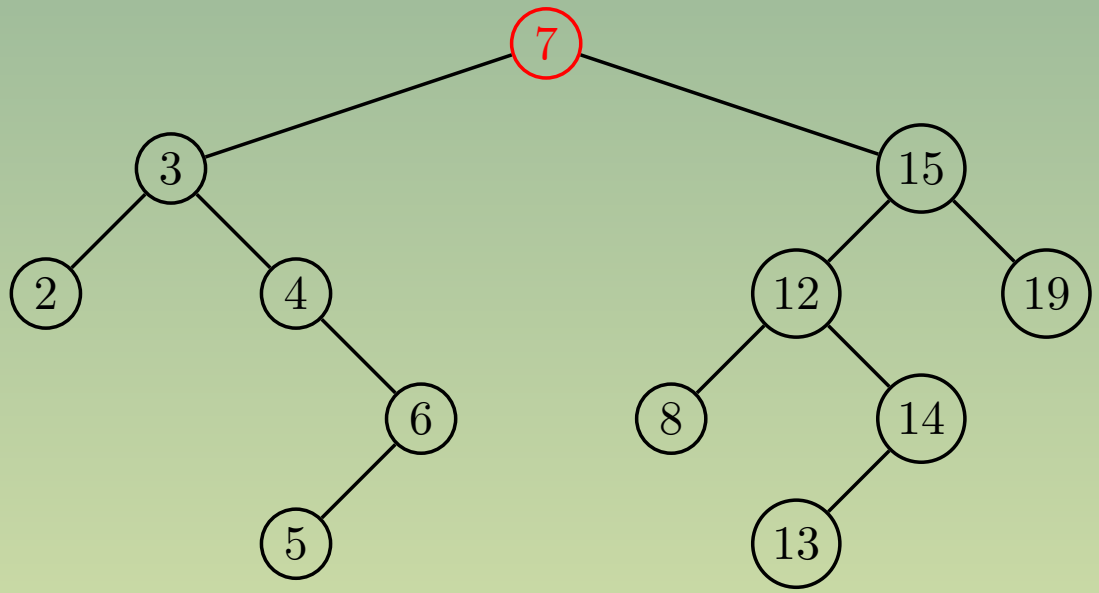
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6$

na čekanju: 7

Ispišemo taj element

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



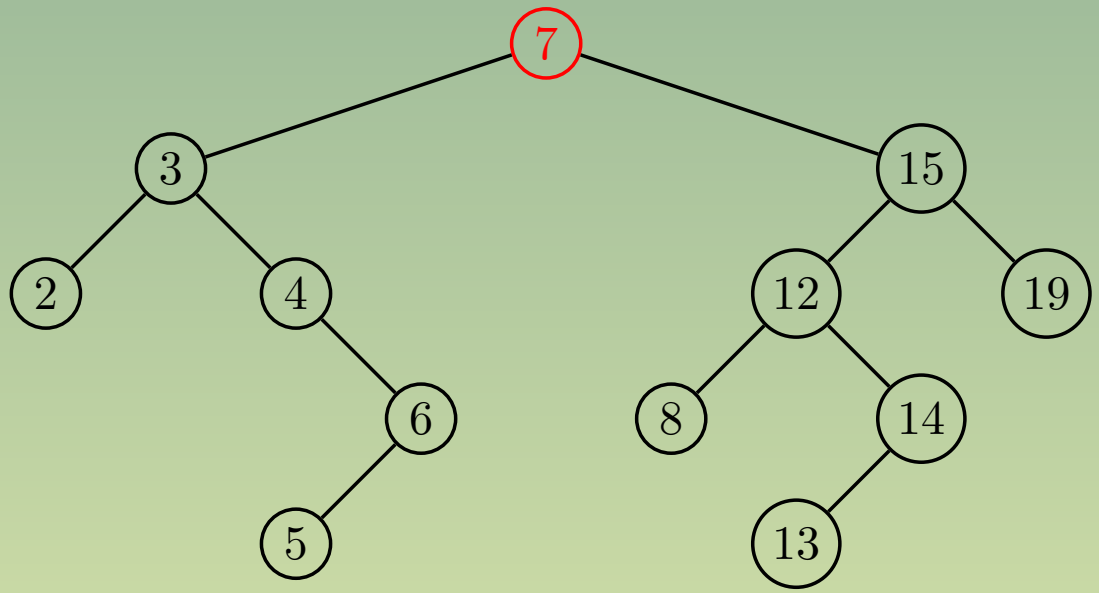
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6$

na čekanju: 7

Ispišemo taj element, a kako on nema desnog djeteta, prebacujemo se na zadnji element na čekanju, a to je ovdje element 7.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



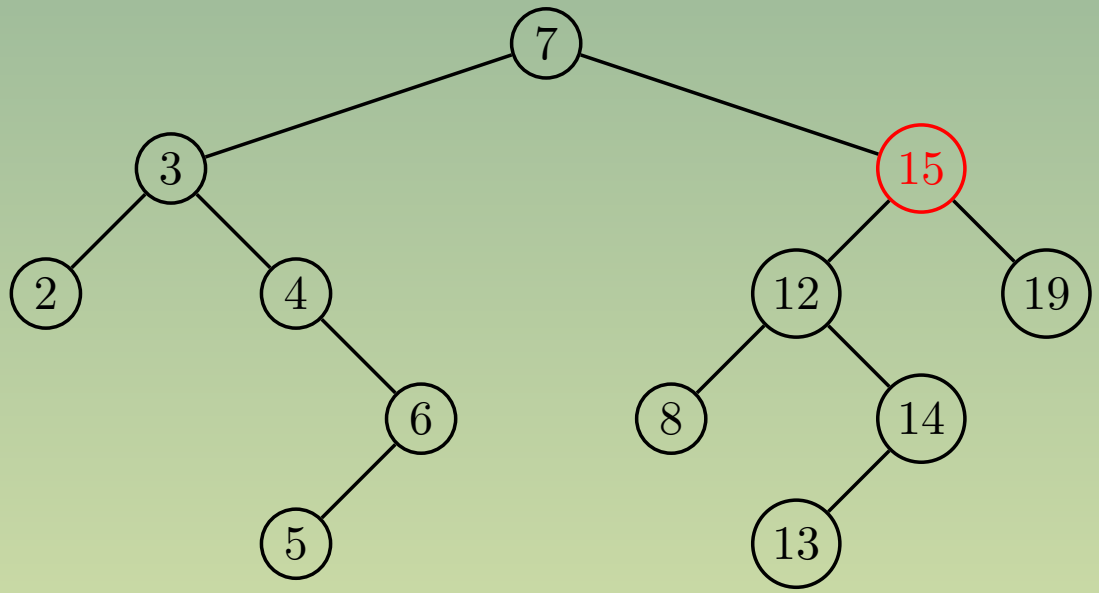
lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

sortirana lista: 2, 3, 4, 5, 6, 7

na čekanju:

Ispišemo taj element

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



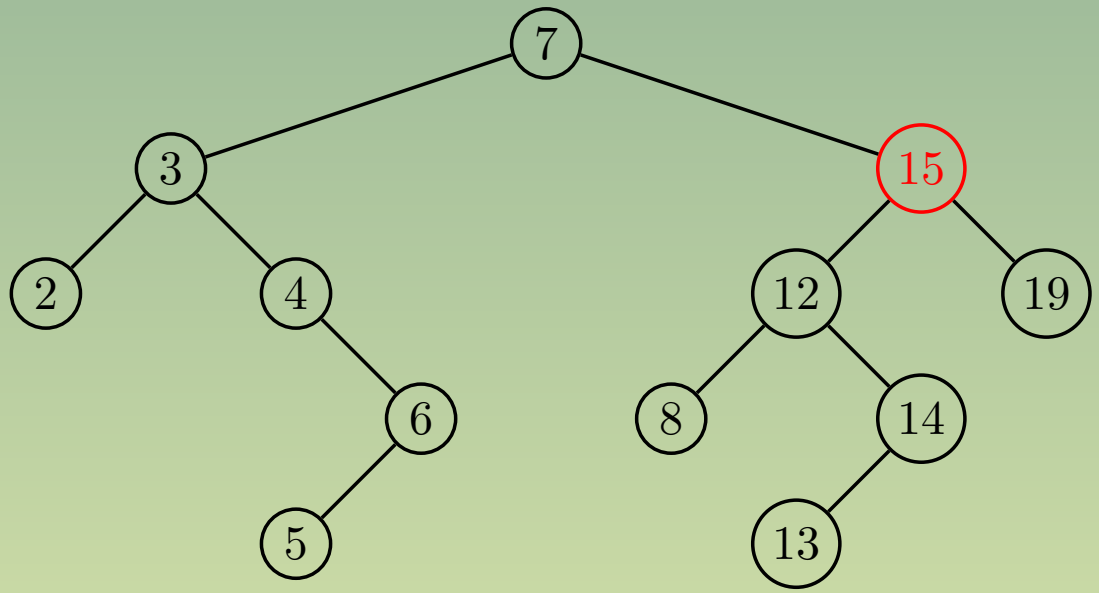
lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

sortirana lista: 2, 3, 4, 5, 6, 7

na čekanju:

Ispišemo taj element i prebacimo se na njegovo desno dijete.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



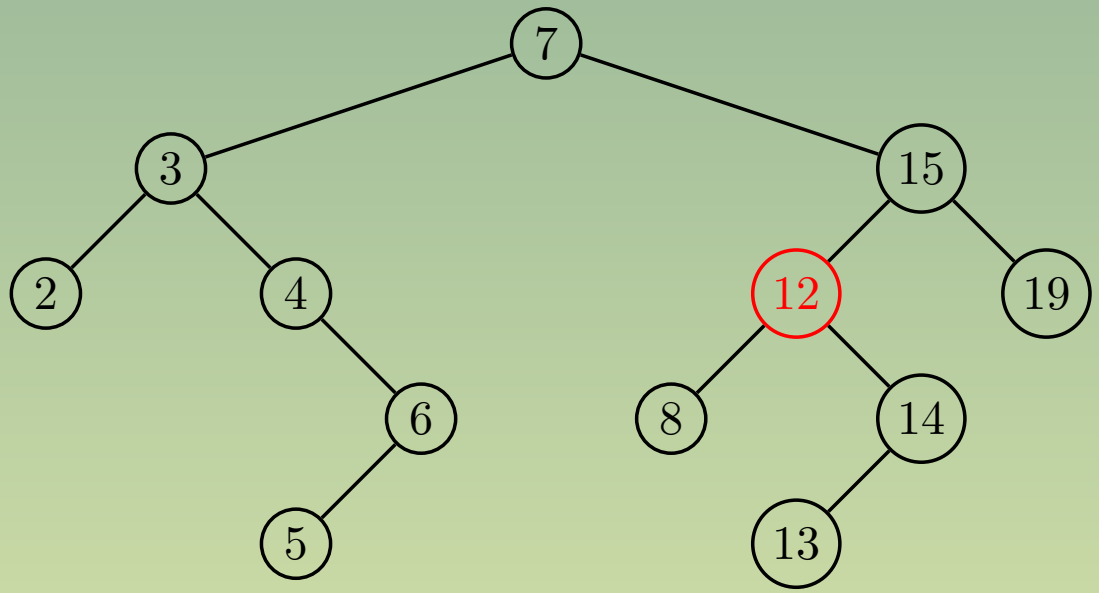
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7$

na čekanju: 15

Kako 15 ima lijevo dijete, stavljamo ga na čekanje

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



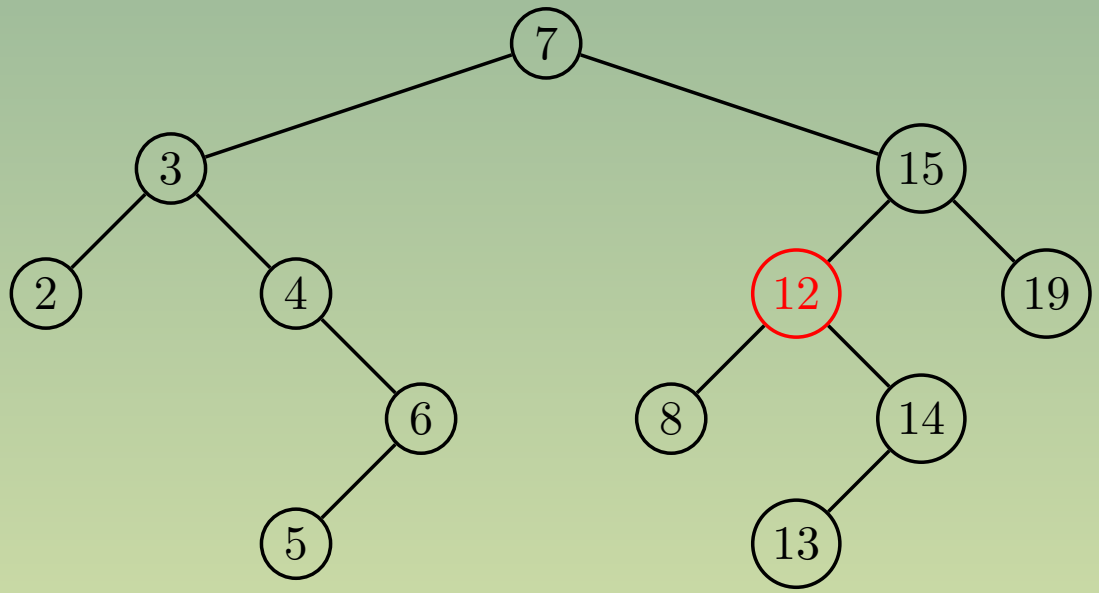
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7$

na čekanju: 15

Kako 15 ima lijevo dijete, stavljamo ga na čekanje i prebacujemo se na njegovo lijevo dijete.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



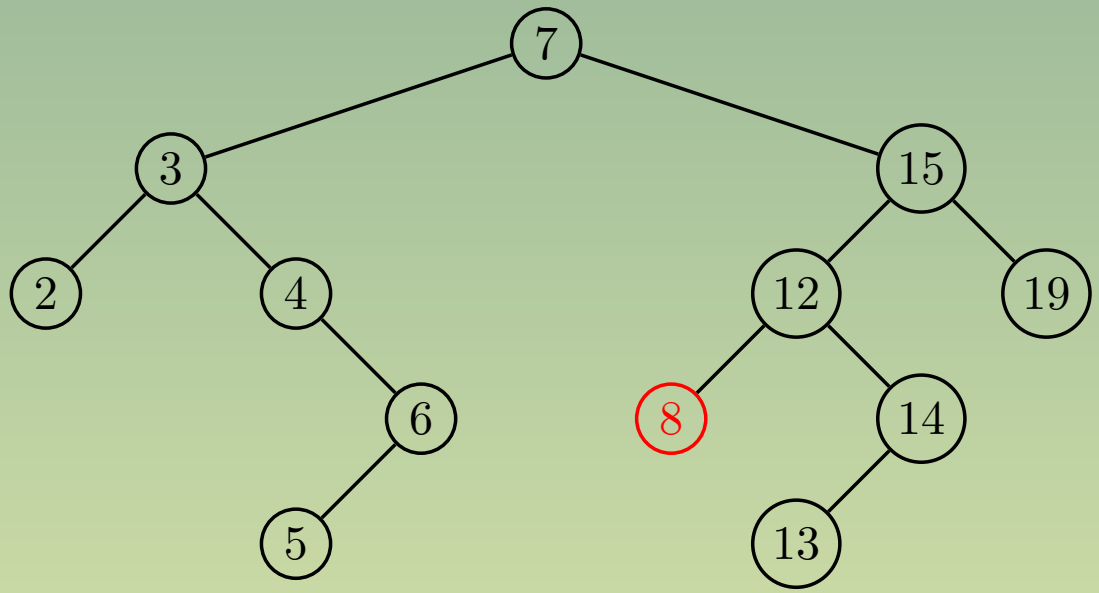
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7$

na čekanju: $15, 12$

Kako 12 ima lijevo dijete, stavljamo ga na čekanje

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



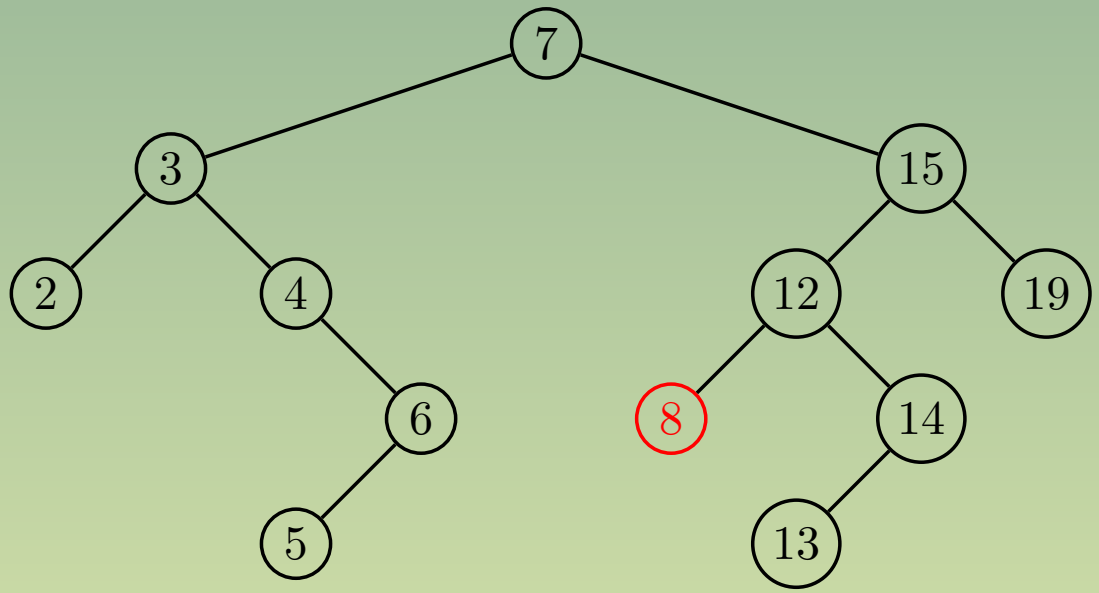
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7$

na čekanju: $15, 12$

Kako 12 ima lijevo dijete, stavljamo ga na čekanje i prebacujemo se na njegovo lijevo dijete.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



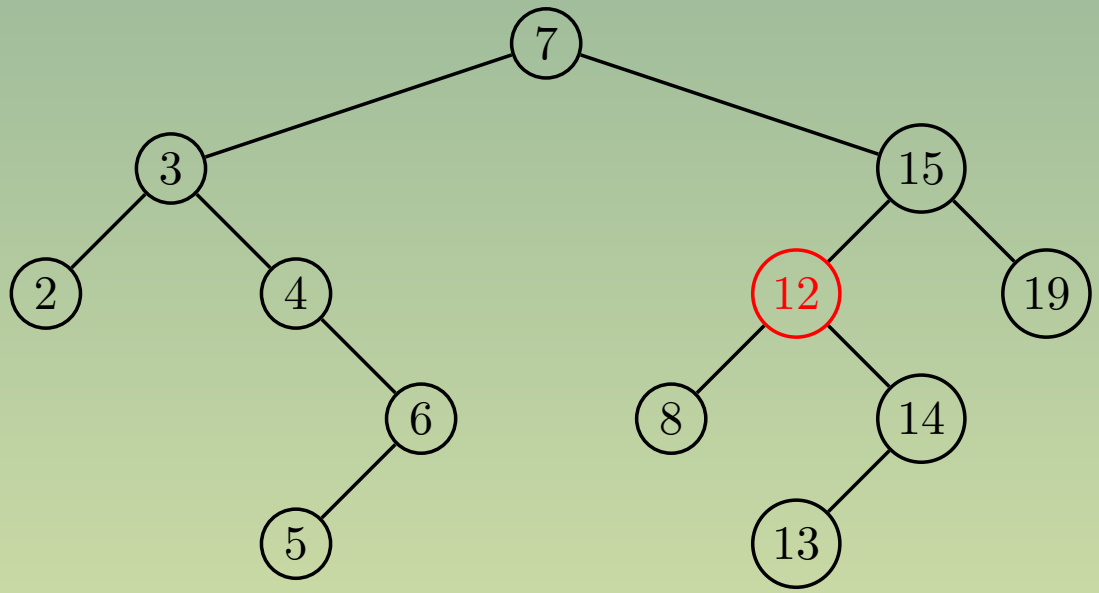
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

na čekanju: $15, 12$

Kako 8 nema lijevog djeteta, odmah ga ispišemo.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



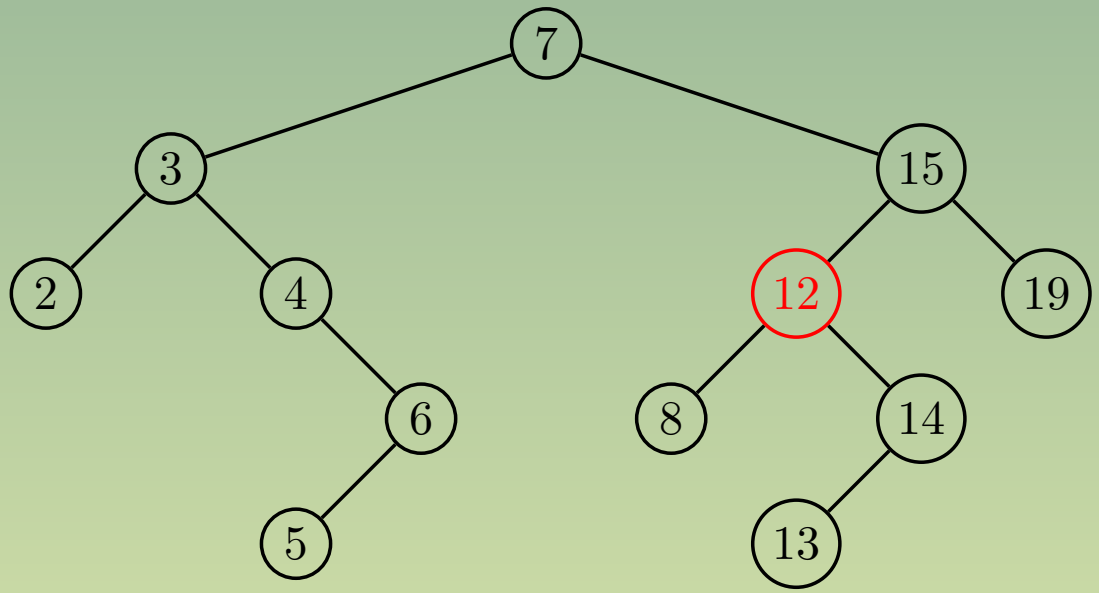
lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

sortirana lista: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

na čekanju: 15, 12

Kako 8 nema desnog djeteta, prebacujemo se na zadnji element na čekanju, a to je ovdje element 12.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



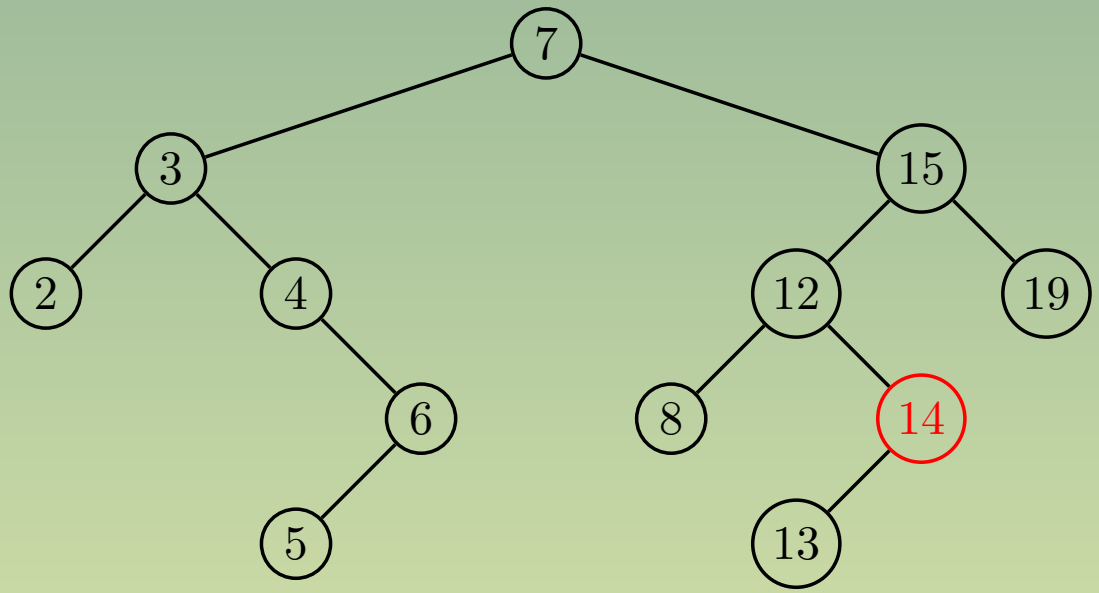
lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

sortirana lista: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12

na čekanju: 15

Ispišemo taj element

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



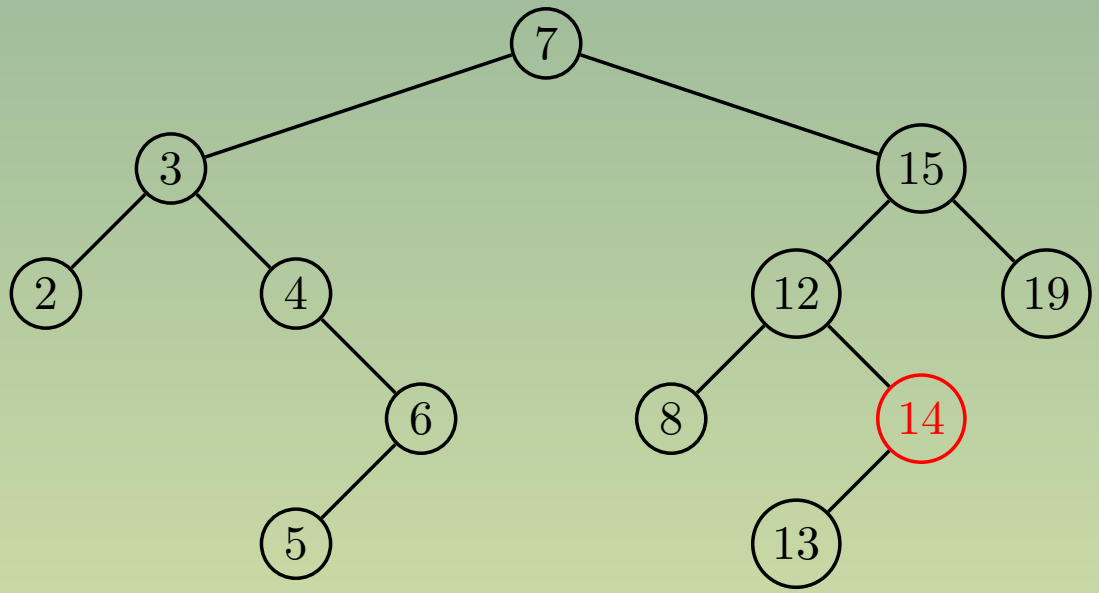
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12$

na čekanju: 15

Ispišemo taj element i prebacimo se na njegovo desno dijete.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

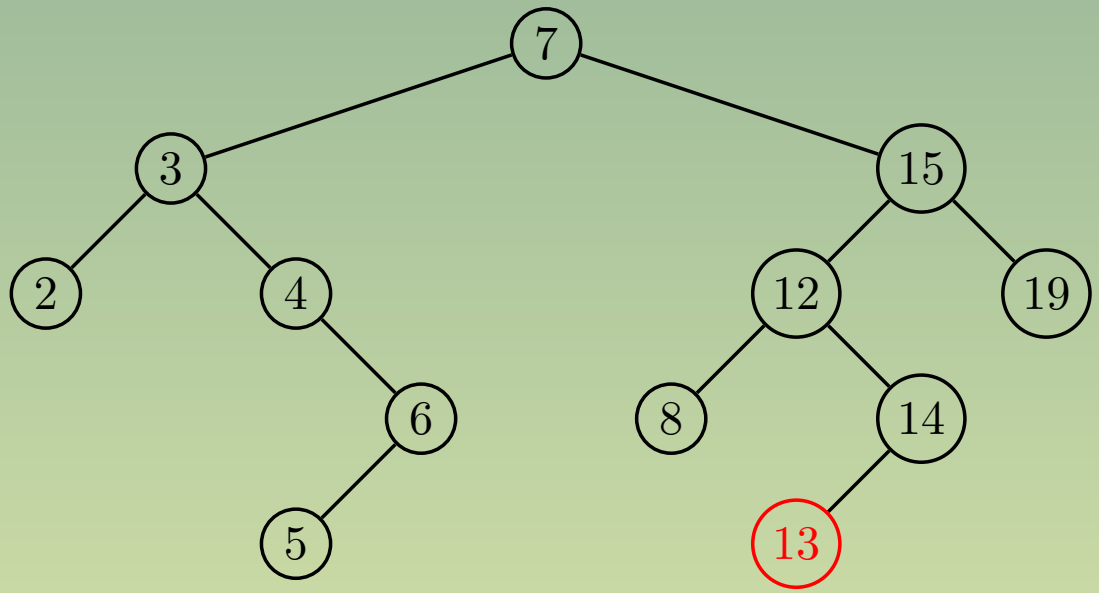


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12$

na čekanju: $15, 14$

Kako 14 ima lijevo dijete, stavljamo ga na čekanje



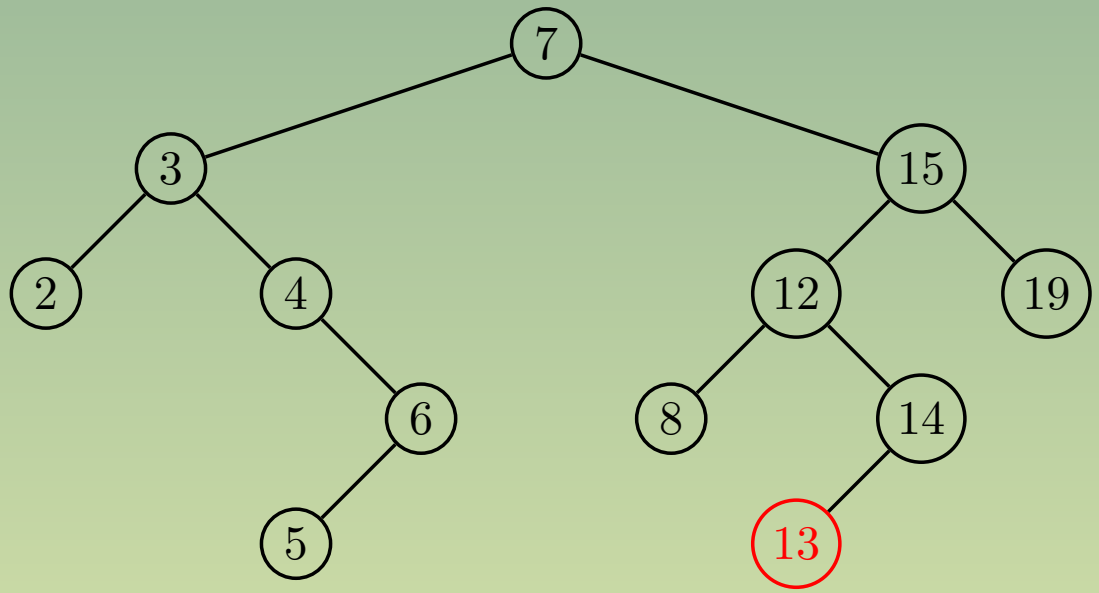
lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

sortirana lista: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12

na čekanju: 15, 14

Kako 14 ima lijevo dijete, stavljamo ga na čekanje i prebacujemo se na njegovo lijevo dijete.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



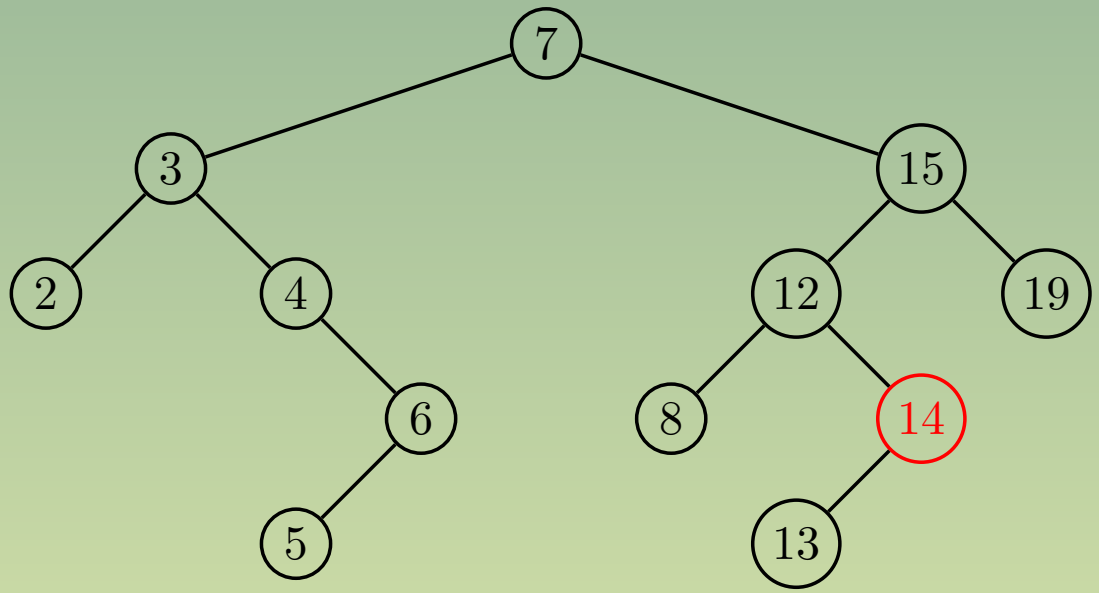
lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

sortirana lista: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13

na čekanju: 15, 14

Kako 13 nema lijevog djeteta, odmah ga ispišemo.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



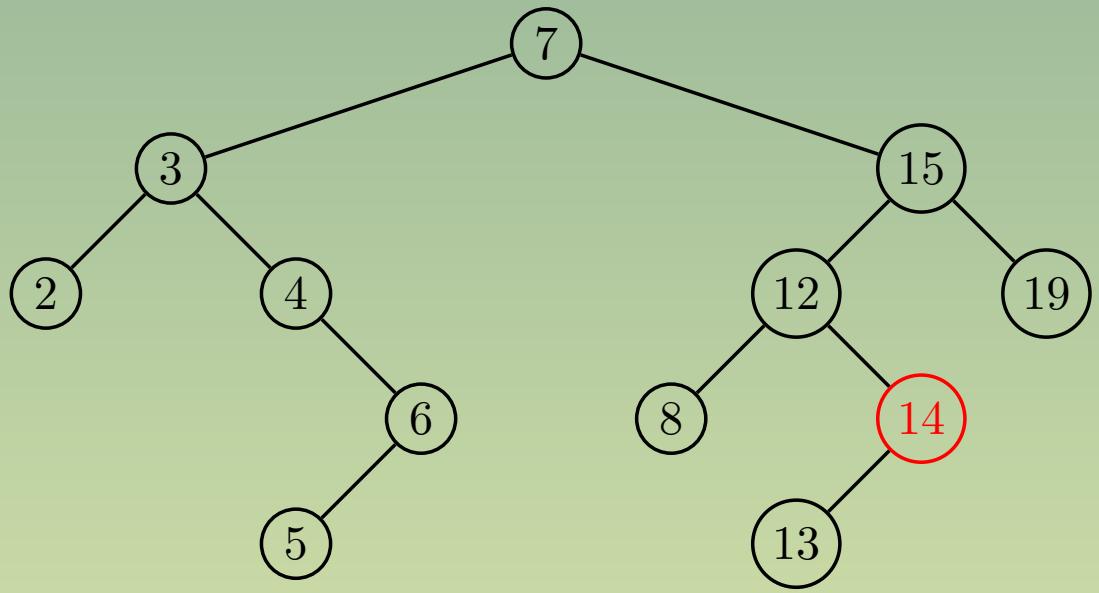
lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

sortirana lista: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13

na čekanju: 15, 14

Kako 13 nema desnog djeteta, prebacujemo sa na zadnji element na čekanju, a to je ovdje element 14.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



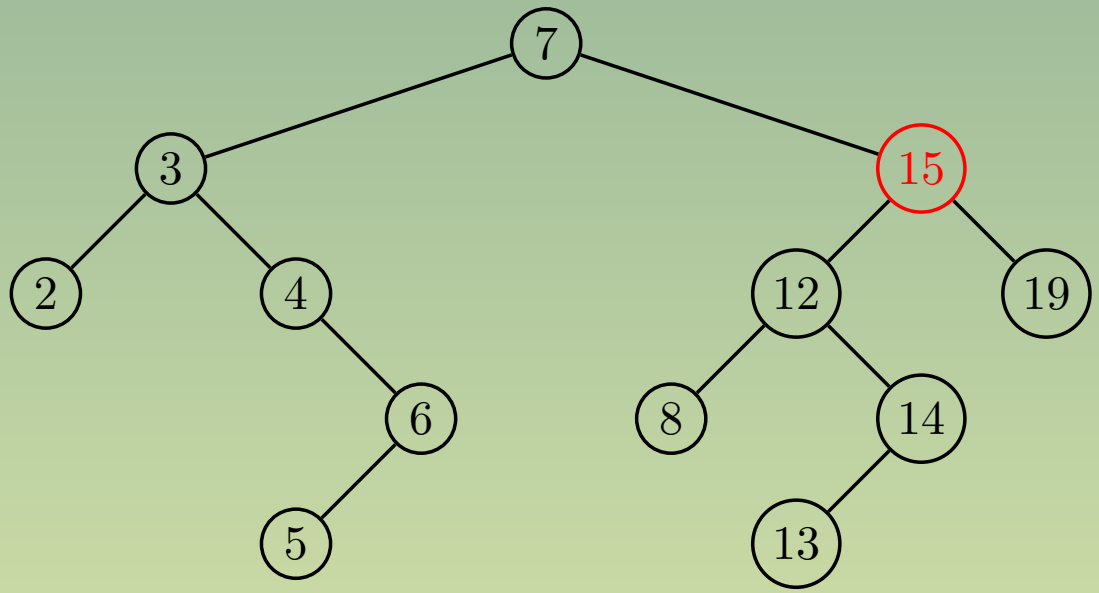
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14$

na čekanju: 15

Ispišemo taj element

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



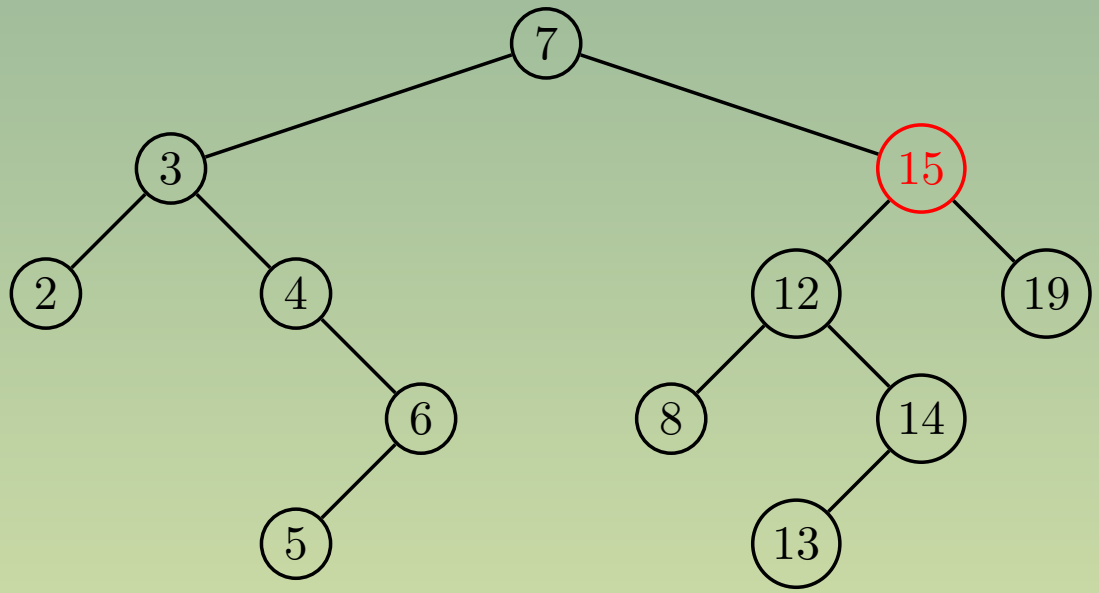
lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

sortirana lista: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14

na čekanju: 15

Ispišemo taj element, a kako on nema desnog djeteta, prebacujemo se na zadnji element na čekanju. To je ovdje element 15.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



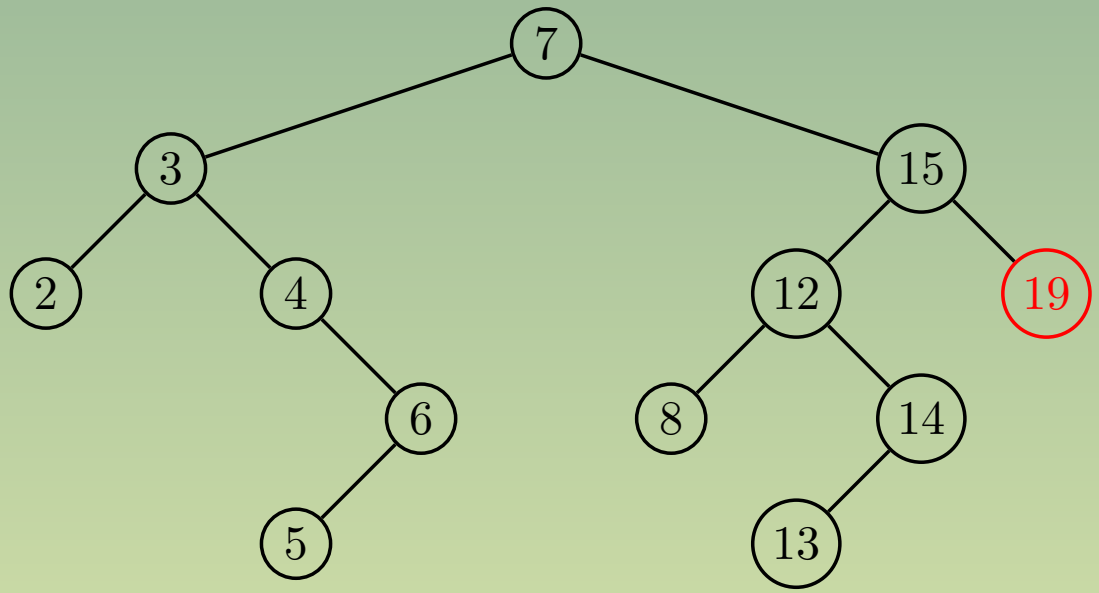
lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

sortirana lista: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15

na čekanju:

Ispišemo taj element

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



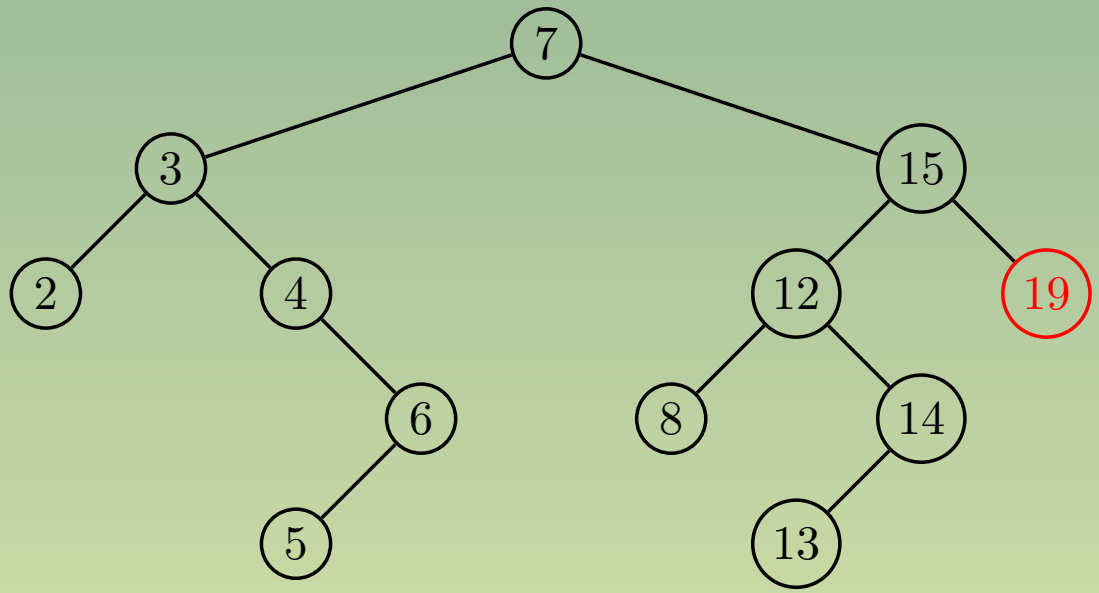
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15$

na čekanju:

Ispišemo taj element i prebacimo se na njegovo desno dijete.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



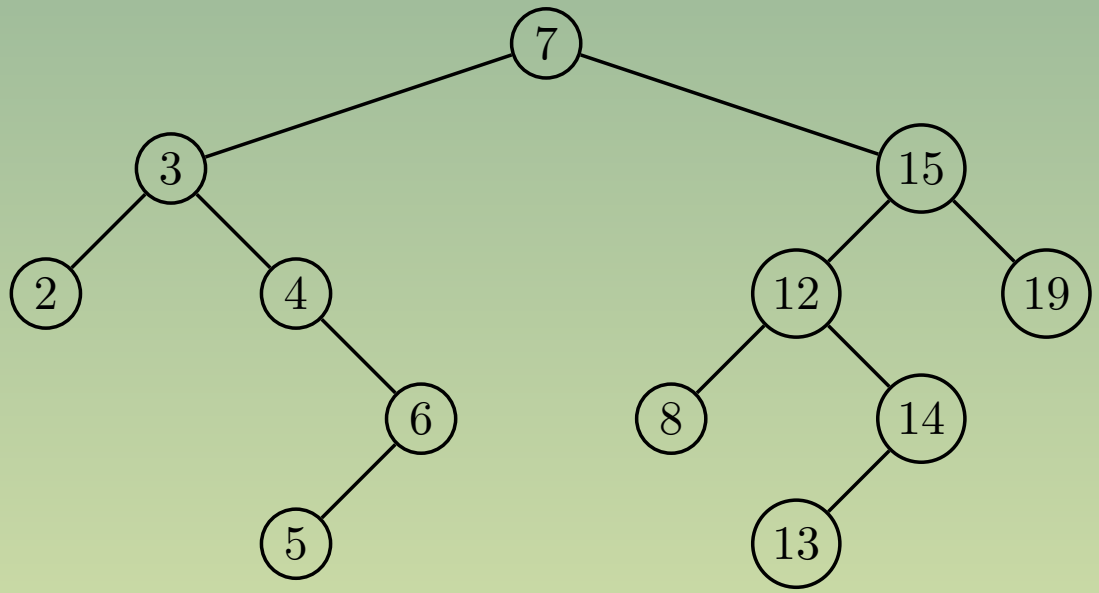
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 19$

na čekanju:

Kako 19 nema lijevog djeteta, tada ga odmah ispišemo.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 19$

na čekanju:

Kako 19 nema desnog djeteta i kako nema više elemenata na čekanju, dobili smo sortiranu listu.

◂ objasni postupak

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.23.

Konstruirajte stablo sortiranja za listu $5, 8, 3, 4, 6, 8, 2$.

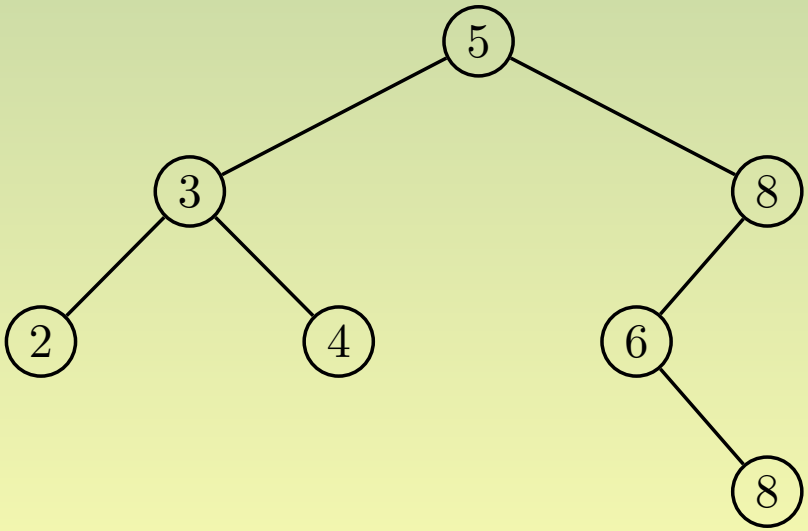
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.23.

Konstruirajte stablo sortiranja za listu $5, 8, 3, 4, 6, 8, 2$.

Rješenje.

U slučaju da su elementi jednaki, tada se element koji želimo ubaciti prebacuje u lijevo podstablo elementa s kojim se uspoređivao.



Primjer 8.24.

Konstruirajte stablo sortiranja za listu

Katarina, Maja, Natalija, Sanja, Sonja, Mirjana

uz leksikografski uređaj.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

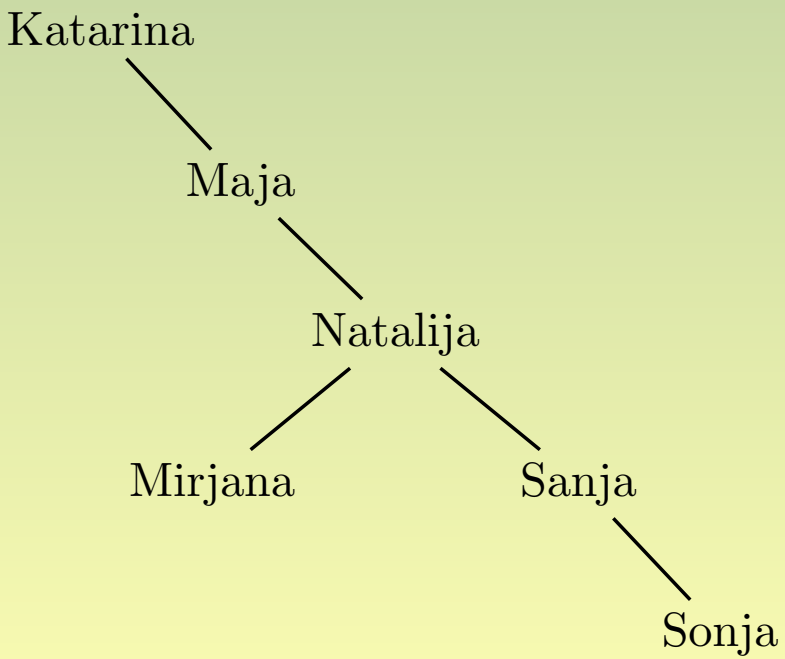
Primjer 8.24.

Konstruirajte stablo sortiranja za listu

Katarina, Maja, Natalija, Sanja, Sonja, Mirjana

uz leksikografski uređaj.

Rješenje.



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.25.

Konstruirajte stablo sortiranja za listu

Maja, Katarina, Natalija, Sanja, Sonja, Mirjana

uz leksikografski uređaj.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

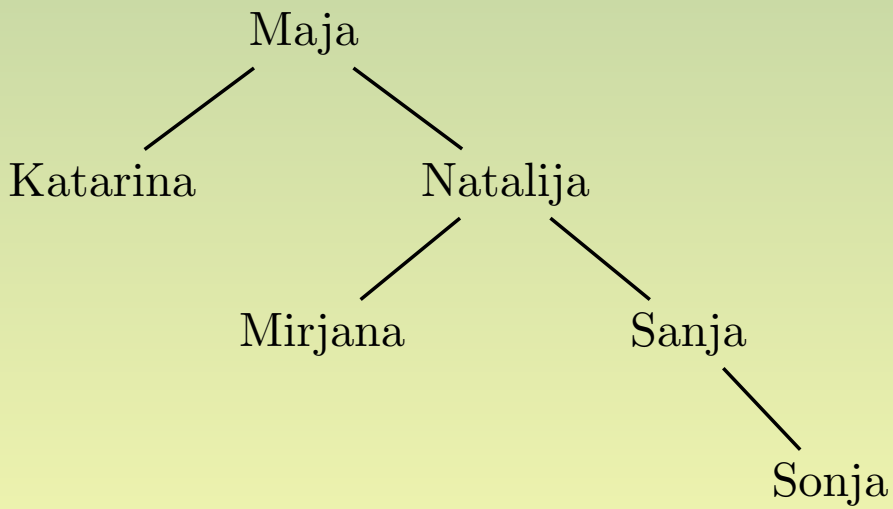
Primjer 8.25.

Konstruirajte stablo sortiranja za listu

Maja, Katarina, Natalija, Sanja, Sonja, Mirjana

uz leksikografski uređaj.

Rješenje.



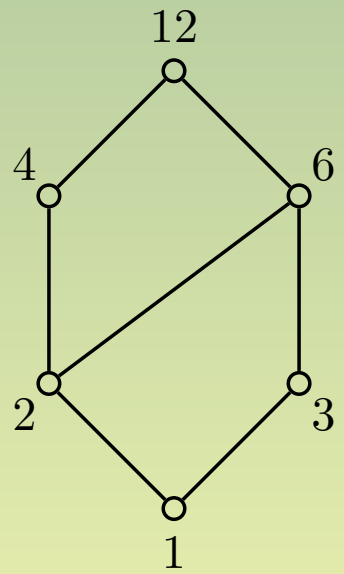
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Sortiranje u parcijalno uređenom skupu

U linearno uređenom skupu je sortirana lista jedinstveno određena. U parcijalno uređenom skupu sortirana lista nije jednoznačno određena jer za neusporedive elemente je svejedno koji se prije javlja u sortiranoj listi. Jedan način sortiranja elemenata u parcijalno uređenom skupu je pomoću opisanog stabla sortiranja. Pritom, konstrukcija stabla sortiranja ide na isti način kao i za linearno uređen skup ukoliko je element usporediv s korijenom. Ukoliko element nije usporediv s korijenom, usprkos tome, prebacujemo ga u desno podstablo. Sortirana lista u parcijalno uređenom skupu se može podijeliti na blokove koji su lanci.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Pogledajmo skup $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ svih djelitelja broja 12 uz relaciju $|$ "dijeli". Znamo da je $\left(D_{12}, |\ \right)$ parcijalno uređeni skup. Njegov Hasseov dijagram izgleda



Uzmimo da nam je zadana početna lista $4, 6, 12, 3, 1, 2$ i da ju želimo sortirati s obzirom na parcijalni uređaj $|$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

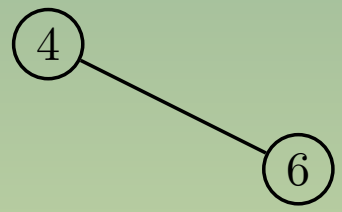


lista: 4, 6, 12, 3, 1, 2

preskoči postupak

Prvi element liste postavimo za korijen.

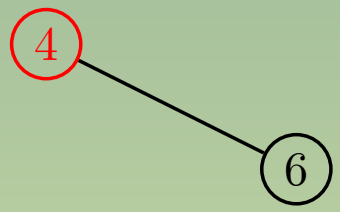
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $4, 6, 12, 3, 1, 2$

Drugi element liste uspoređujemo s korijenom. Kako 6 nije usporediv s 4 (jer ne vrijedi niti jedna od relacija $6 \mid 4$ ili $4 \mid 6$), element 6 postaje desno dijete elementa 4.

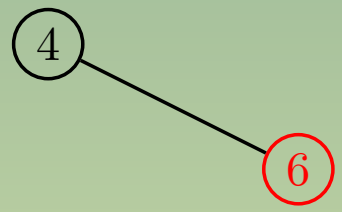
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $4, 6, 12, 3, 1, 2$

Element 12 uspoređujemo s korijenom. Kako je 12 veće od 4 (jer $4 \mid 12$), element 12 bi trebao postati desno dijete elementa 4.

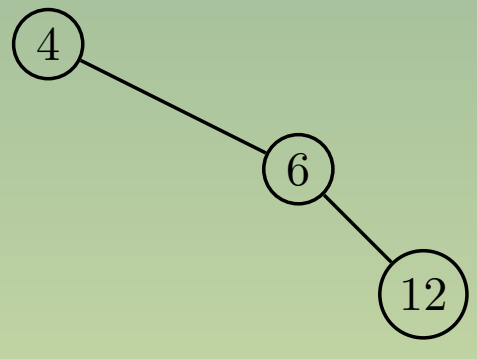
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $4, 6, 12, 3, 1, 2$

Kako je to mjesto već zauzeto, element 12 se uspoređuje s elementom na tom mjestu.

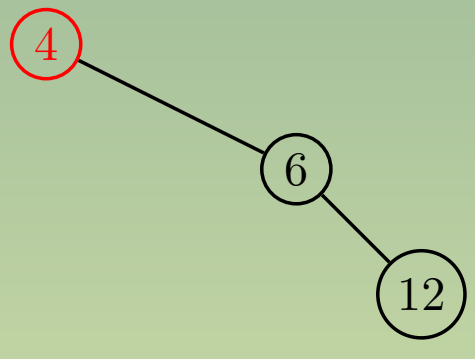
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $4, 6, 12, 3, 1, 2$

Kako je to mjesto već zauzeto, element 12 se uspoređuje s elementom na tom mjestu. Kako je 12 veće od 6 (jer $6 \mid 12$), element 12 postaje desno dijete elementa 6.

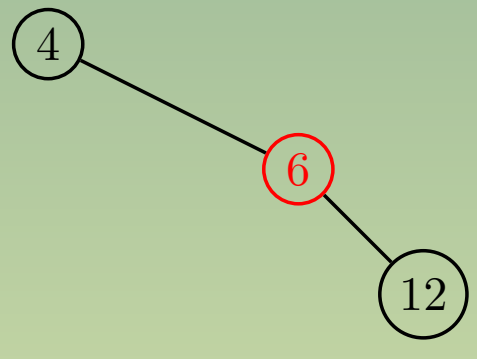
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $4, 6, 12, 3, 1, 2$

Element 3 uspoređujemo s korijenom. Kako 3 nije usporediv s 4 (jer ne vrijedi niti jedna od relacija $3 \mid 4$ ili $4 \mid 3$), element 3 bi trebao postati desno dijete elementa 4.

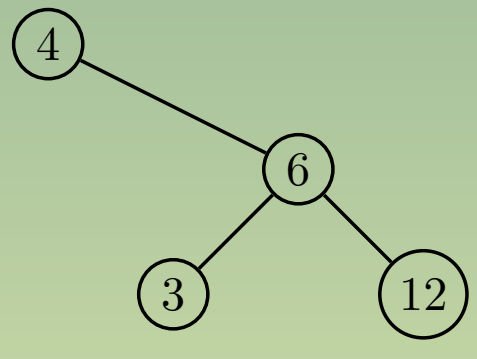
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $4, 6, 12, 3, 1, 2$

Kako je to mjesto već zauzeto, element 3 se uspoređuje s elementom na tom mjestu.

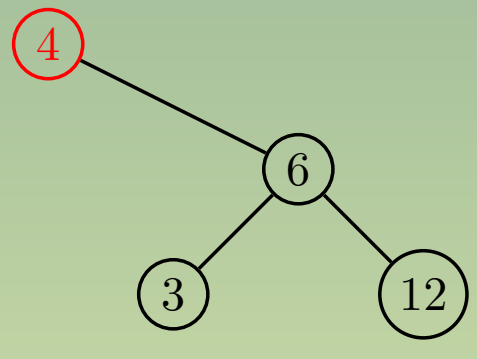
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $4,\ 6,\ 12,\ 3,\ 1,\ 2$

Kako je to mjesto već zauzeto, element 3 se uspoređuje s elementom na tom mjestu. Kako je 3 manje od 6 (jer $3 \mid 6$), element 3 postaje lijevo dijete elementa 6.

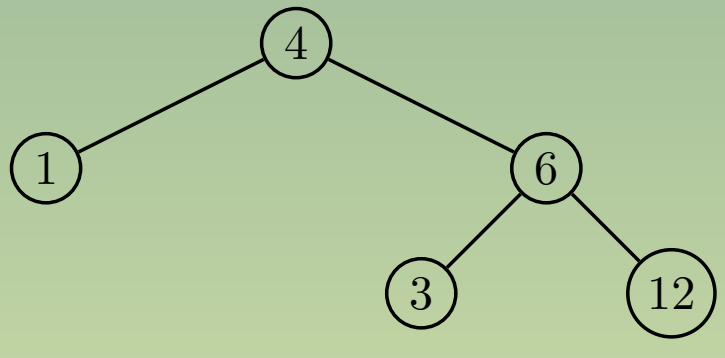
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $4, 6, 12, 3, 1, 2$

Element 1 uspoređujemo s korijenom.

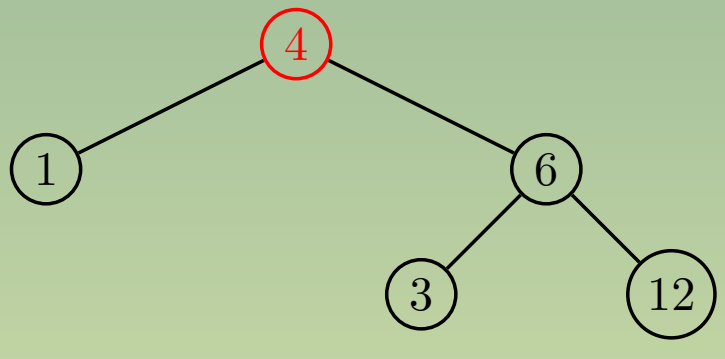
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $4, 6, 12, 3, 1, 2$

Element 1 uspoređujemo s korijenom. Kako je 1 manje od 4 (jer $1 \mid 4$), element 1 postaje lijevo dijete elementa 4.

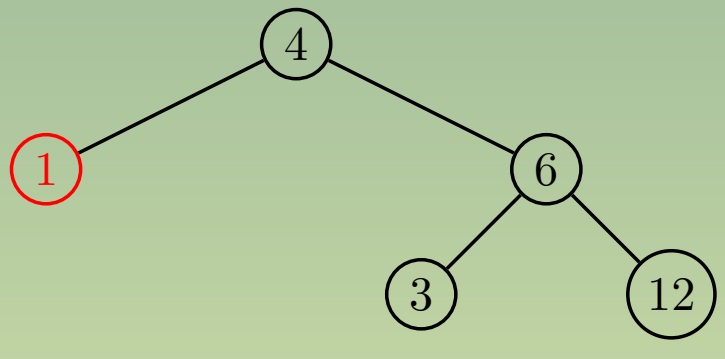
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $4, 6, 12, 3, 1, 2$

Element 2 uspoređujemo s korijenom. Kako je 2 manje od 4 (jer $2 \mid 4$), element 2 bi trebao postati lijevo dijete elementa 4.

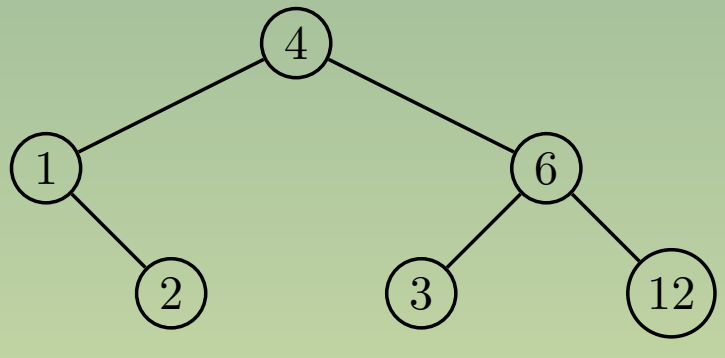
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $4, 6, 12, 3, 1, 2$

Kako je to mjesto zauzeto, element 2 se uspoređuje s elementom na tom mjestu.

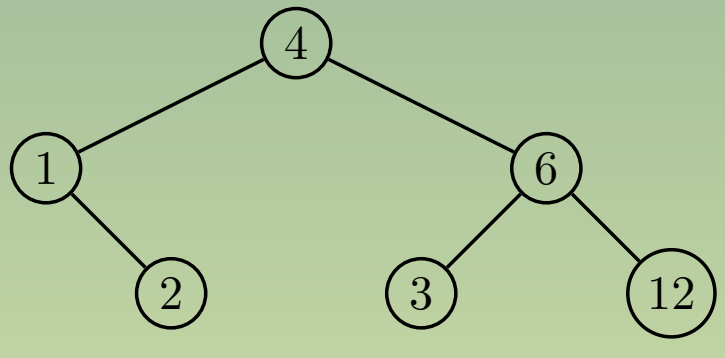
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $4, 6, 12, 3, 1, 2$

Kako je to mjesto zauzeto, element 2 se uspoređuje s elementom na tom mjestu. Kako je 2 veće od 1 (jer $1 \mid 2$), element 2 postaje desno dijete elementa 1.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

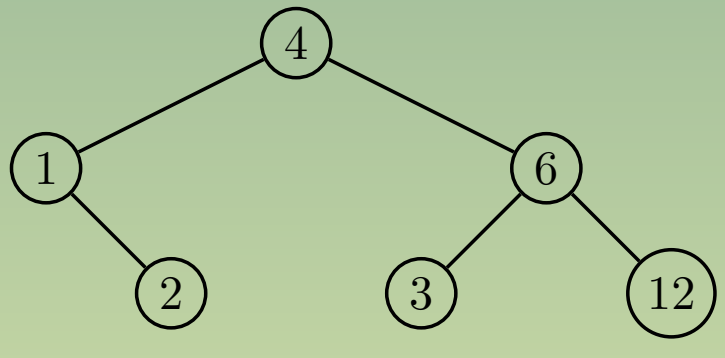


lista: $4, 6, 12, 3, 1, 2$

◂ objasni postupak

Kako smo prošli kroz sve elemente zadane liste, dobiveno stablo je stablo sortiranja dane liste uz parcijalni uređaj $|$.

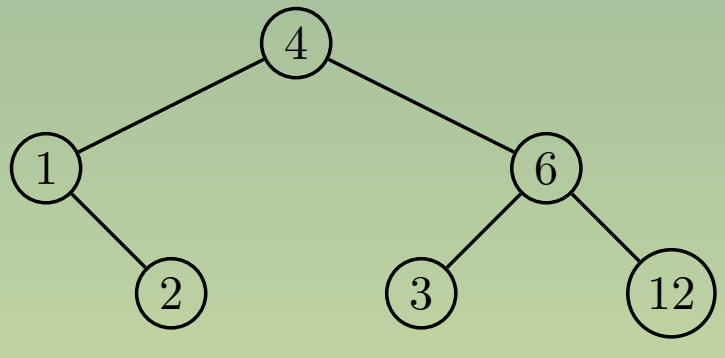
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $4, 6, 12, 3, 1, 2$

Sada kada imamo stablo sortiranja, htjeli bismo iz njega rekonstruirati sortiranu listu. Taj postupak je potpuno isti opisanom postupku kod linearno uređenog skupa pa ga nećemo opet detaljno objašnjavati.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

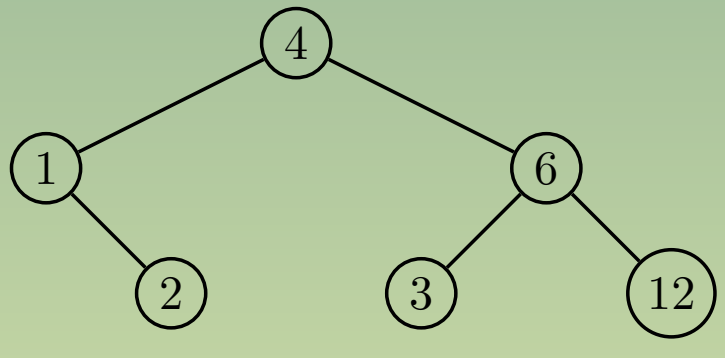


lista: $4, 6, 12, 3, 1, 2$ **sortirana lista:** $1, 2, 4, 3, 6, 12$

Tim postupkom dobivamo da sortirana lista izgleda

$$1, 2, 4, 3, 6, 12.$$

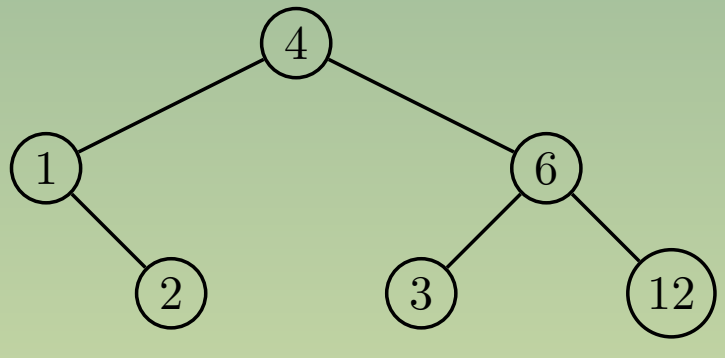
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $4, 6, 12, 3, 1, 2$ **sortirana lista:** $1, 2, 4, 3, 6, 12$

Uočite da je, npr. svejedno da li će element 4 biti napisan prije ili poslije elementa 3 jer ta dva elementa nisu usporediva. Tako je i lista $1, 2, 3, 4, 6, 12$ također sortirana lista s obzirom na parcijalni uređaj $|$, samo što nju ovim algoritmom nismo dobili iz početne liste. Kakva bi morala biti početna lista da bismo dobili na kraju ovu drugu sortiranu listu?

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $4, 6, 12, 3, 1, 2$ **sortirana lista:** $1, 2, 4, 3, 6, 12$

Na kraju, uočimo da se sortirana lista može podijeliti na blokove koji su lanci. U ovom slučaju vidimo da su $L_1 = \{1, 2, 4\}$ i $L_2 = \{3, 6, 12\}$ lanci s obzirom na parcijalni uređaj $|$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

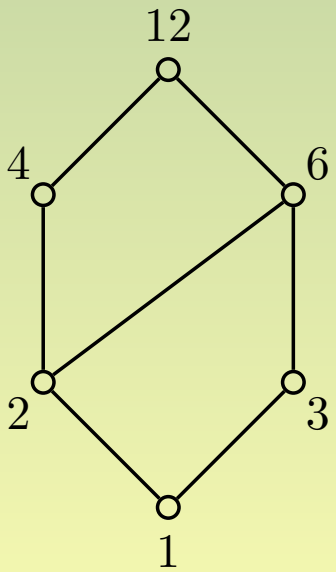
$$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, \quad (D_{12}, |\,)$$

početna lista: $4,\ 6,\ 12,\ 3,\ 1,\ 2$

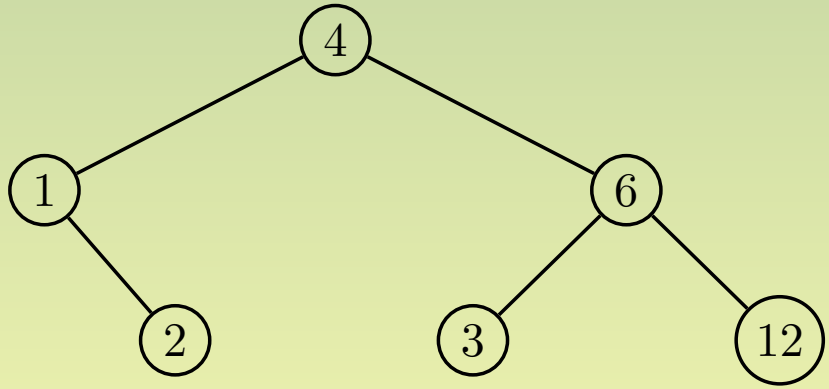
sortirana lista: $1,\ 2,\ 4,\ 3,\ 6,\ 12$

lanci: $\{1, 2, 4\}, \quad \{3, 6, 12\}$

Hasseov dijagram



Stablo sortiranja



Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Kao što smo već rekli, sortirana lista u parcijalno uređenom skupu nije jedinstveno određena. Koju ćemo sortiranu listu dobiti na kraju pomoću stabla sortiranja bitno ovisi o rasporedu elemenata u početnoj listi. Pogledajmo još jednom listu svih djelitelja broja 12, ali s drukčijim poretkom elemenata i vidjet ćemo da na kraju dobivamo drukčiju sortiranu listu od one maloprije uz parcijalni uređaj "dijeli" $|$. Naravno, u linearno uređenom skupu se to ne može dogoditi jer su tamo svaka dva elementa usporediva.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

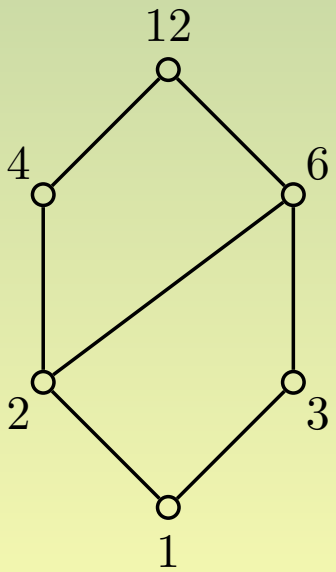
$$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, \quad (D_{12}, |\,)$$

početna lista: $3,\ 6,\ 12,\ 4,\ 1,\ 2$

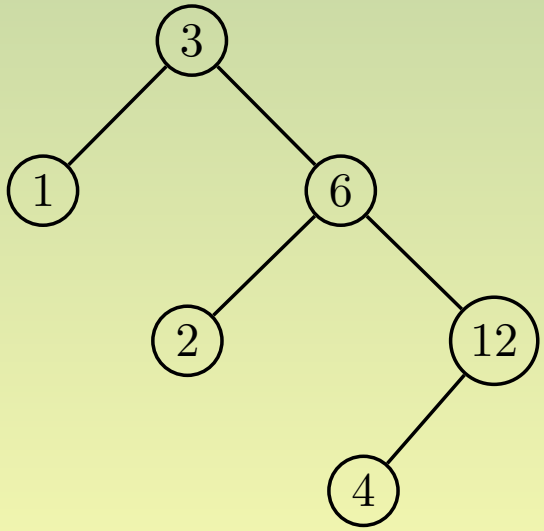
sortirana lista: $1,\ 3,\ 2,\ 6,\ 4,\ 12$

lanci: $\{1, 3\}, \quad \{2, 6\}, \quad \{4, 12\}$

Hasseov dijagram



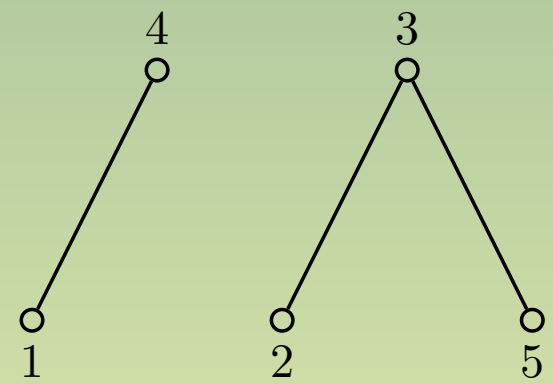
Stablo sortiranja



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.26.

Parcijalno uređeni skup zadan je Hasseovim dijagramom



Pomoću stabla sortiranja sortirajte sljedeće liste:

a. $2, 3, 1, 4, 5$

b. $4, 5, 3, 1, 2$

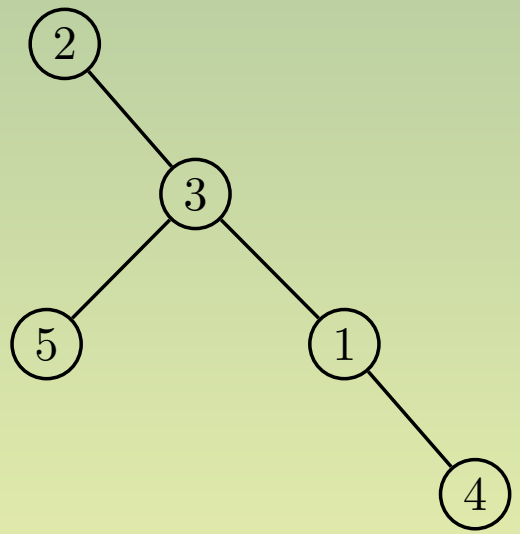
Uočite da ćete u pojedinom slučaju dobiti različite sortirane liste i podijelite te sortirane liste na lance.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Rješenje.

a. **Početna lista:** $2, 3, 1, 4, 5$

Stablo sortiranja

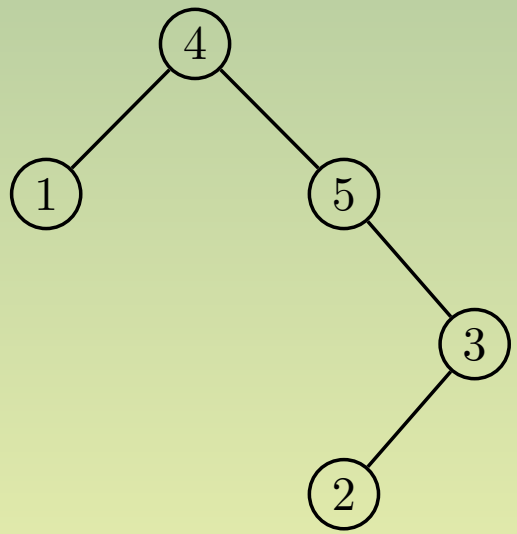


Sortirana lista: $2, 5, 3, 1, 4$

Lanci: $\{2\}, \quad \{5, 3\}, \quad \{1, 4\}$

b. **Početna lista:** $4, 5, 3, 1, 2$

Stablo sortiranja



Sortirana lista: $1, 4, 5, 2, 3$

Lanci: $\{1, 4\}, \quad \{5\}, \quad \{2, 3\}$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Hrpa

Padajuća hrpa je binarno stablo sa sljedećim svojstvima:

i. Svi listovi se nalaze na predzadnjem i zadnjem nivou.
ii. Ako se uklone svi vrhovi sa zadnjeg nivoa, dobivamo potpuno binarno stablo.
iii. Skup vrhova je linearno uređen.
iv. Ako je q roditelj od p, tada je $p \preccurlyeq q$, tj. svako dijete je manje ili jednako od svog roditelja.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Rastuća hrpa je binarno stablo sa sljedećim svojstvima:

(i) Svi listovi se nalaze na predzadnjem i zadnjem nivou.

(ii) Ako se uklone svi vrhovi sa zadnjeg nivoa, dobivamo potpuno binarno stablo.

(iii) Skup vrhova je linearno uređen.

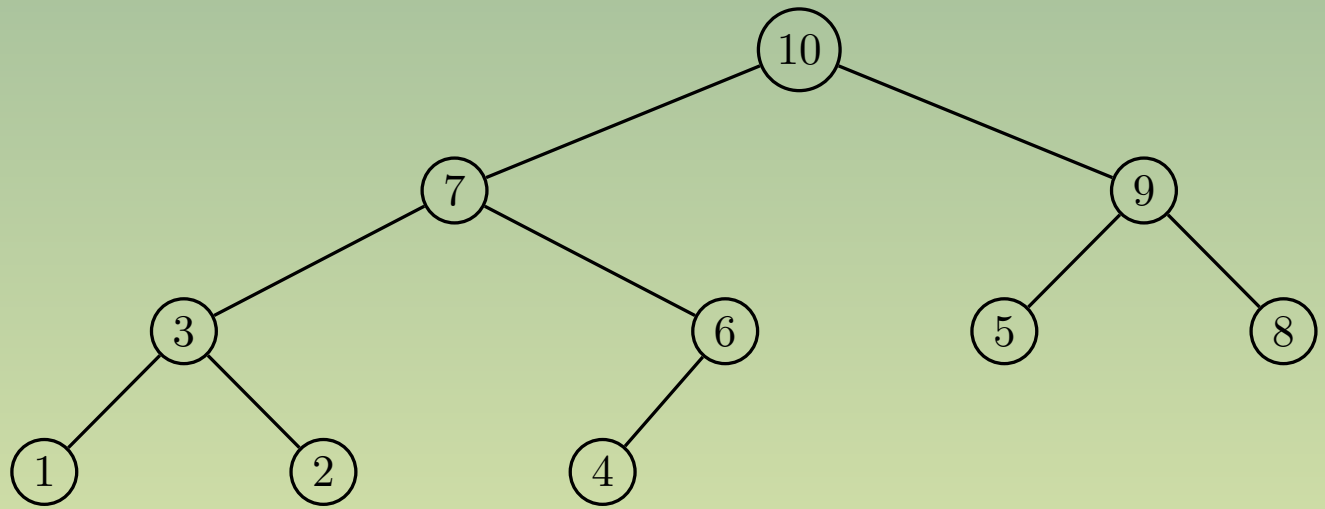
(iv) Ako je q roditelj od p, tada je $q \preccurlyeq p$, tj. svaki roditelj je manji ili jednak od svojeg djeteta.

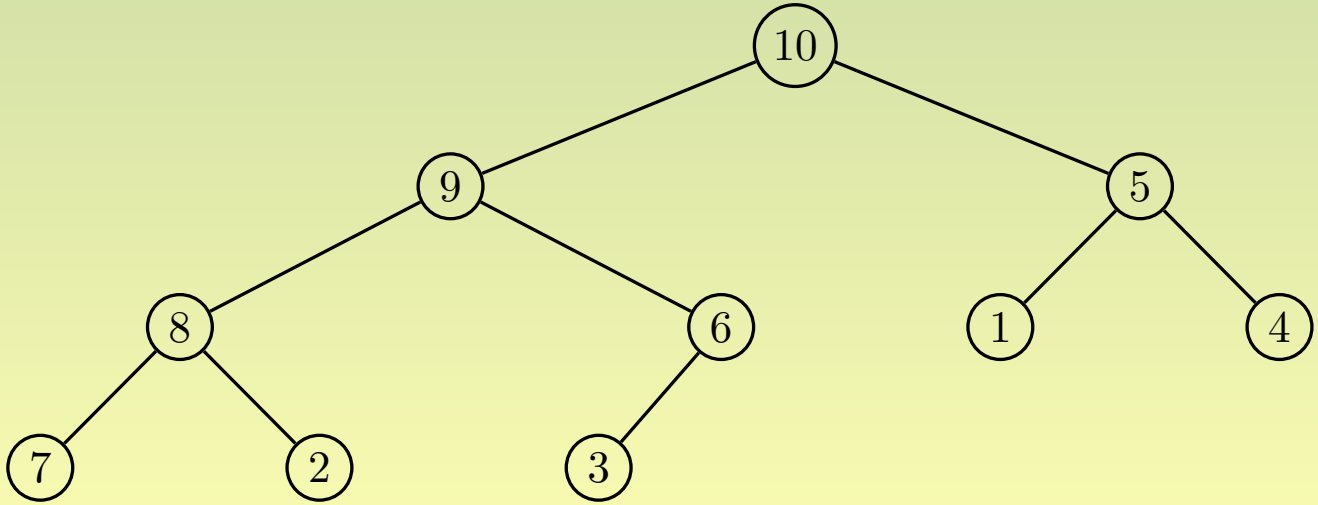
Napomena.

Uvjeti (i) i (ii) osiguravaju da sve hrpe (rastuće ili padajuće) s istim skupom vrhova imaju isti oblik. U padajućoj hrpi, vrhovi duž nekog puta koji počinje u korijenu se pojavljuju u padajućem poretku, a u rastućoj hrpi se pojavljuju u rastućem poretku.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Dvije različite padajuće hrpe s istim skupom vrhova $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ uz standardni linearni uređaj $\leqslant$.





Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Konstrukcija padajuće (rastuće) hrpe

ULAZ: Lista $A = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$
IZLAZ: Padajuća (rastuća) hrpa sa skupom vrhova A

1: Stavi a_1 kao korijen.
2: Dodaj sljedeći element na jedinstvenu poziciju odmah desno nakon posljednjeg vrha na zadnjem nivou ili pak na najljeviju poziciju na sljedećem nivou ukoliko je prethodni nivo popunjen.
3: Ukoliko je potrebno, pomakni dodani vrh prema gore u stablu tako da ostanu sačuvana svojstva padajuće (rastuće) hrpe.
4: Ponavljaj korake 2) i 3) dok se ne iscrpi zadana lista.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.27.

Konstruirajte rastuću hrpu za listu

$$7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$$

uz standardni linearni uređaj $\leqslant$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.27.

Konstruirajte rastuću hrpu za listu

$$7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$$

uz standardni linearni uređaj $\leqslant$.

Rješenje.

Na ovom primjeru ćemo korak po korak objasniti konstrukciju rastuće hrpe tako da prođemo kroz sve međukorake. Na svim ostalim primjerima to nećemo raditi, nego ćemo samo dati već gotovu hrpu bez opisivanja međukoraka, a na vama je da sami provedete te međukorake.

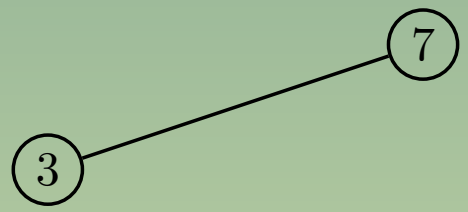
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Prvi element liste postavimo za korijen.

preskoči postupak

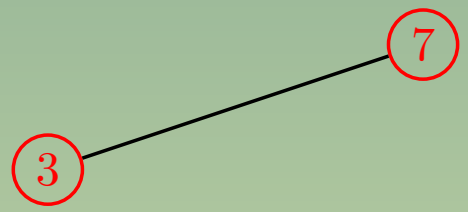
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Element 3 stavljamo na prvu slobodnu poziciju.

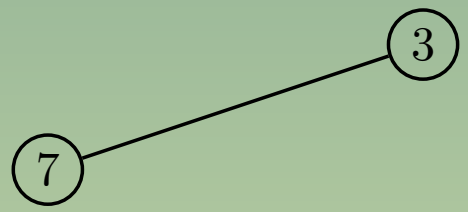
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Međutim, sada su narušena svojstva rastuće hrpe jer je $3 < 7$ (dijete ima manju oznaku od roditelja)

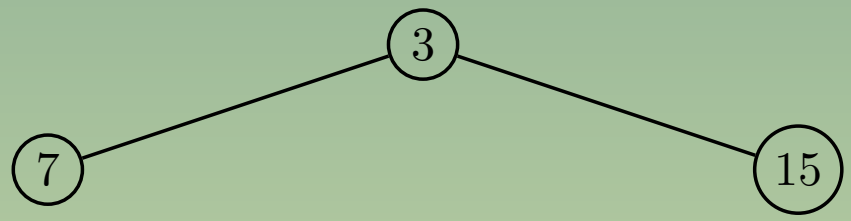
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Međutim, sada su narušena svojstva rastuće hrpe jer je $3 < 7$ (dijete ima manju oznaku od roditelja) pa treba zamijeniti mjesta tim dvama elementima.

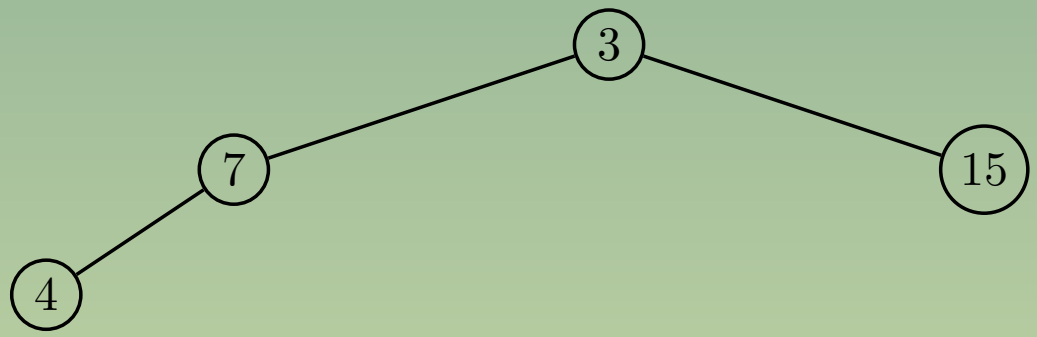
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Element 15 stavljamo na prvu slobodnu poziciju i pri tome su ostala sačuvana svojstva rastuće hrpe.

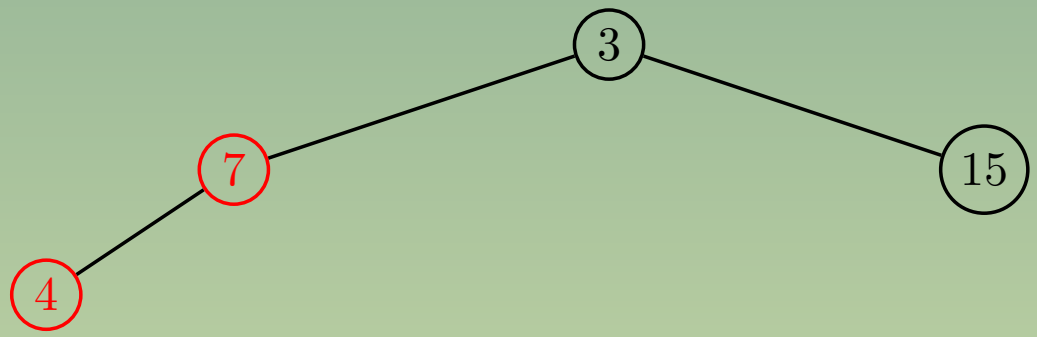
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Element 4 stavljamo na prvu slobodnu poziciju.

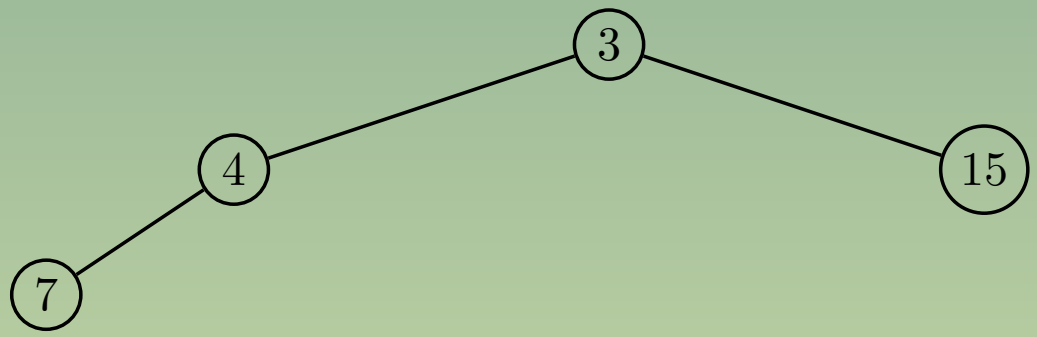
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Međutim, sada su narušena svojstva rastuće hrpe jer je $4 < 7$ (dijete ima manju oznaku od roditelja)

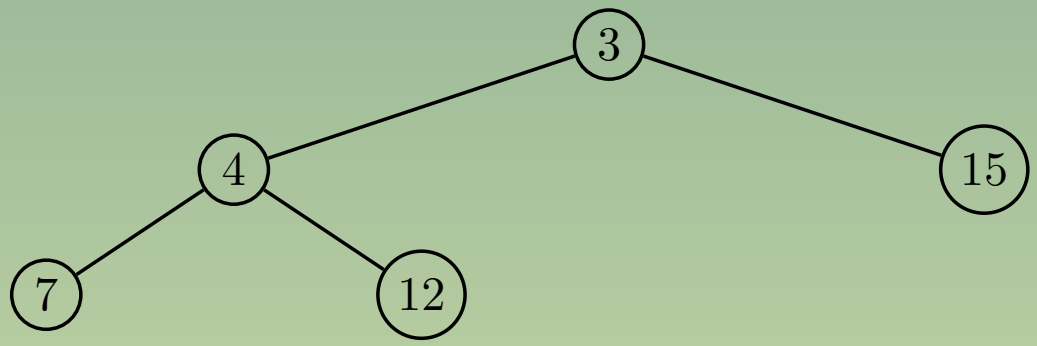
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Međutim, sada su narušena svojstva rastuće hrpe jer je $4 < 7$ (dijete ima manju oznaku od roditelja) pa treba zamijeniti mjesta tim dvama elementima.

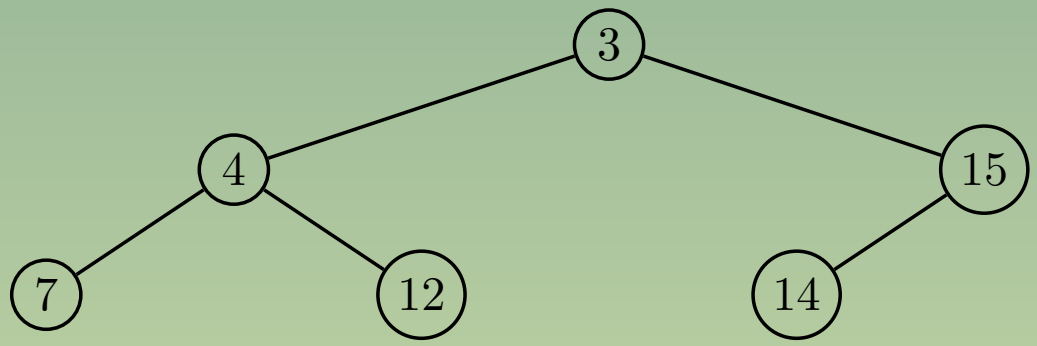
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Element 12 stavljamo na prvu slobodnu poziciju i pri tome su ostala sačuvana svojstva rastuće hrpe.

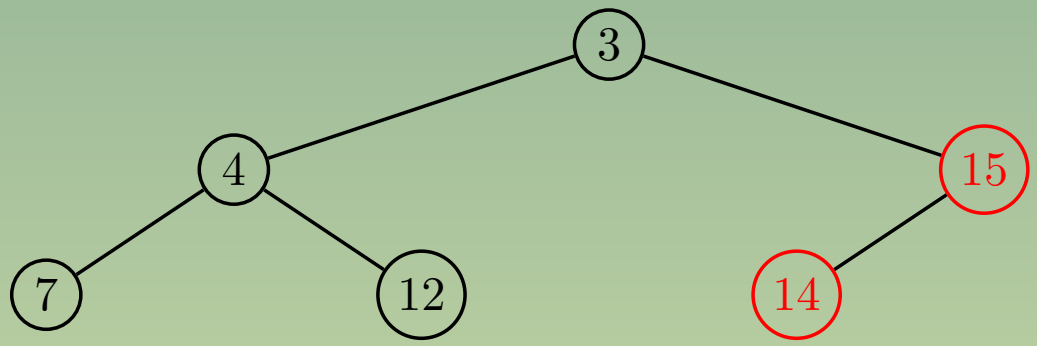
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Element 14 stavljamo na prvu slobodnu poziciju.

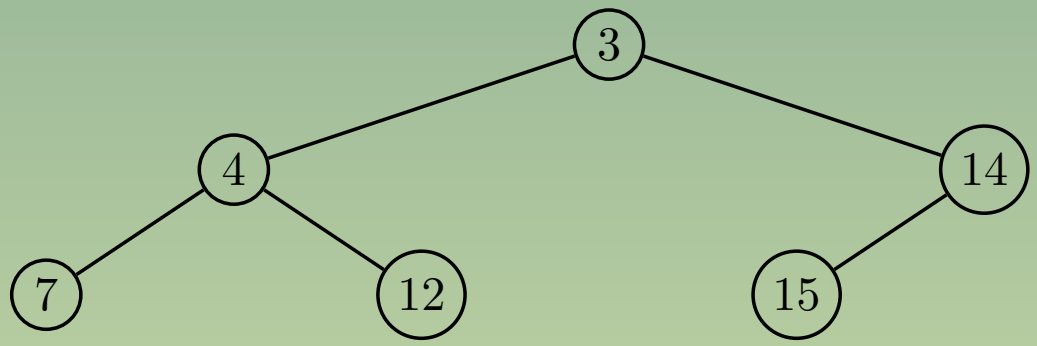
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Međutim, sada su narušena svojstva rastuće hrpe jer je $14 < 15$ (dijete ima manju oznaku od roditelja)

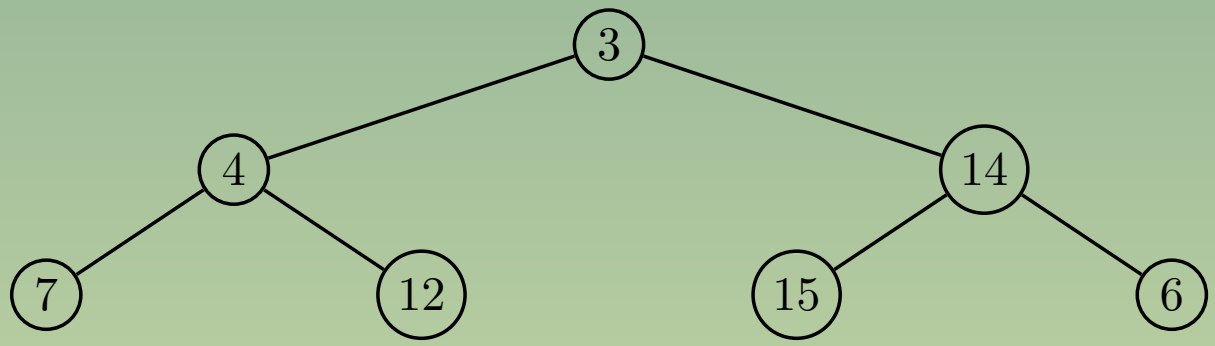
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Međutim, sada su narušena svojstva rastuće hrpe jer je $14 < 15$ (dijete ima manju oznaku od roditelja) pa treba zamijeniti mjesta tim dvama elementima.

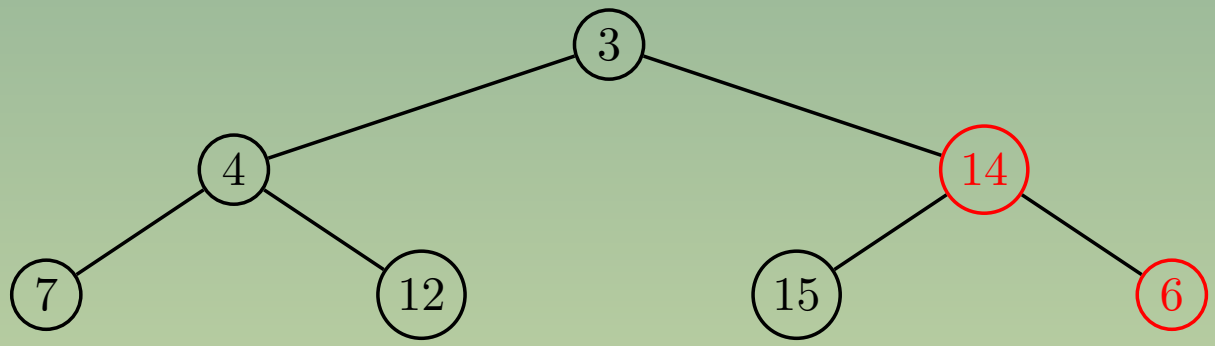
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Element 6 stavljamo na prvu slobodnu poziciju.

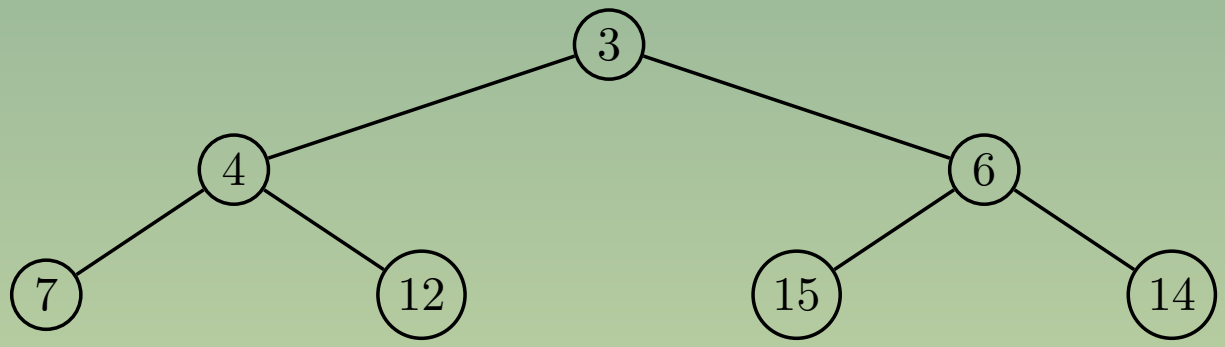
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Međutim, sada su narušena svojstva rastuće hrpe jer je $6 < 14$ (dijete ima manju oznaku od roditelja)

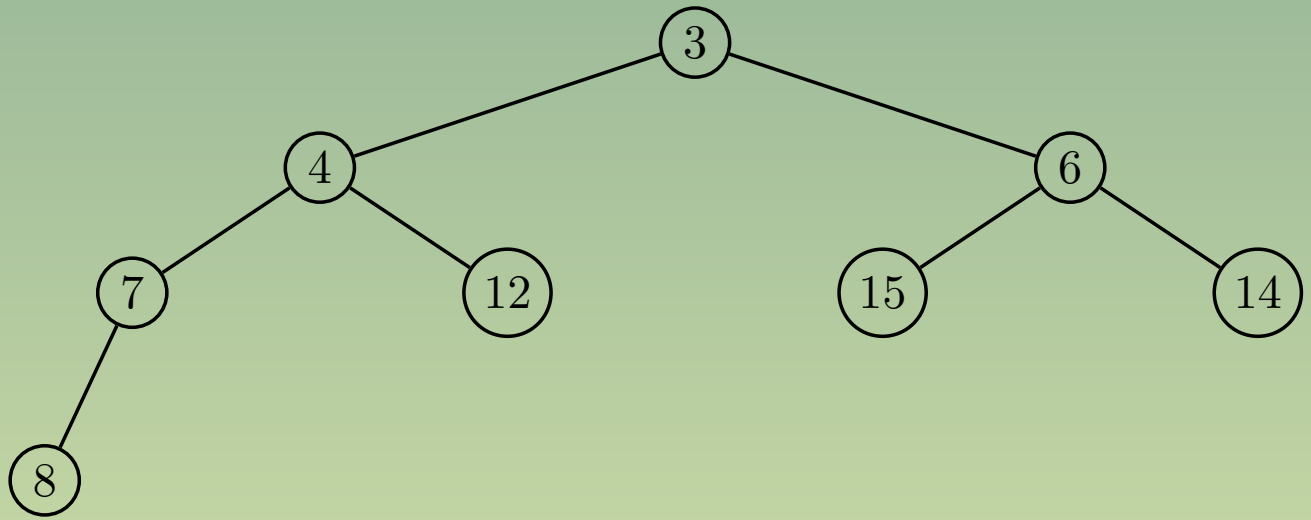
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Međutim, sada su narušena svojstva rastuće hrpe jer je $6 < 14$ (dijete ima manju oznaku od roditelja) pa treba zamijeniti mjesta tim dvama elementima.

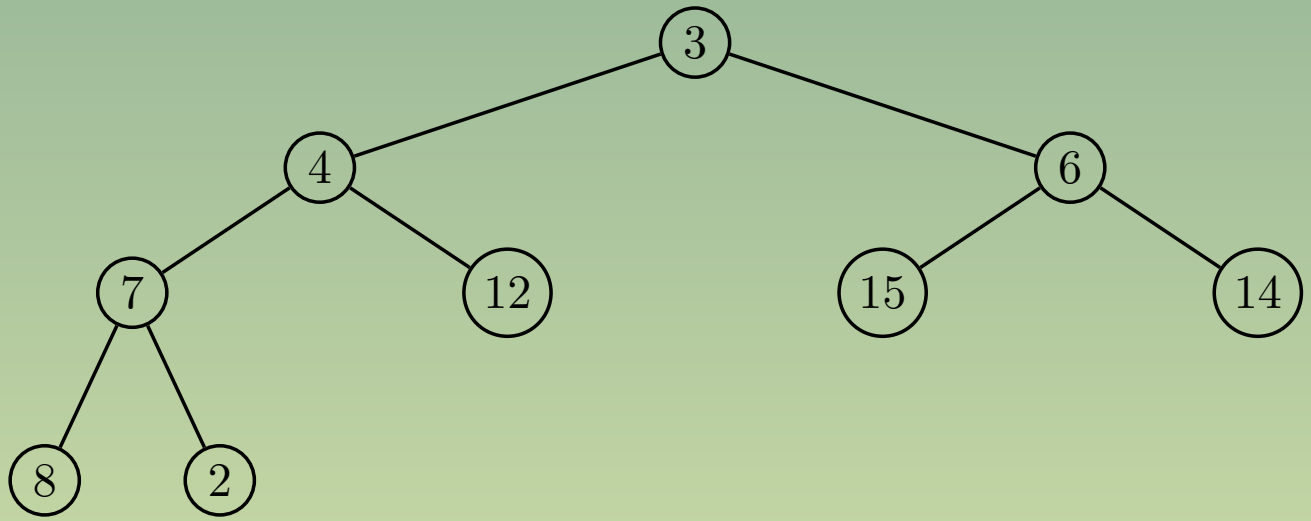
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Element 8 stavljamo na prvu slobodnu poziciju i pri tome su ostala sačuvana svojstva rastuće hrpe.

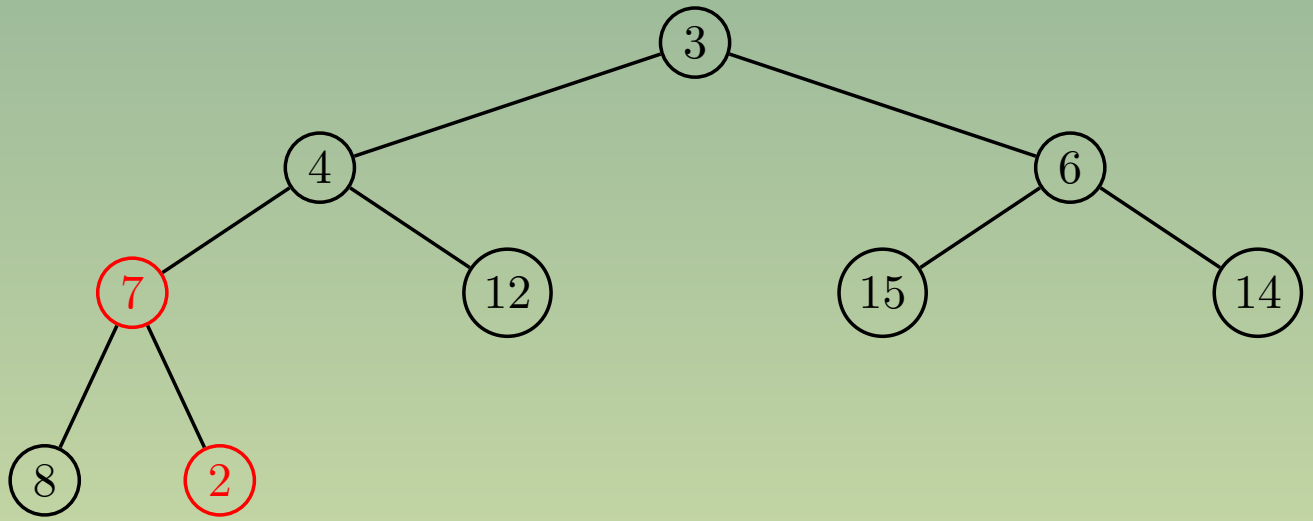
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Element 2 stavljamo na prvu slobodnu poziciju.

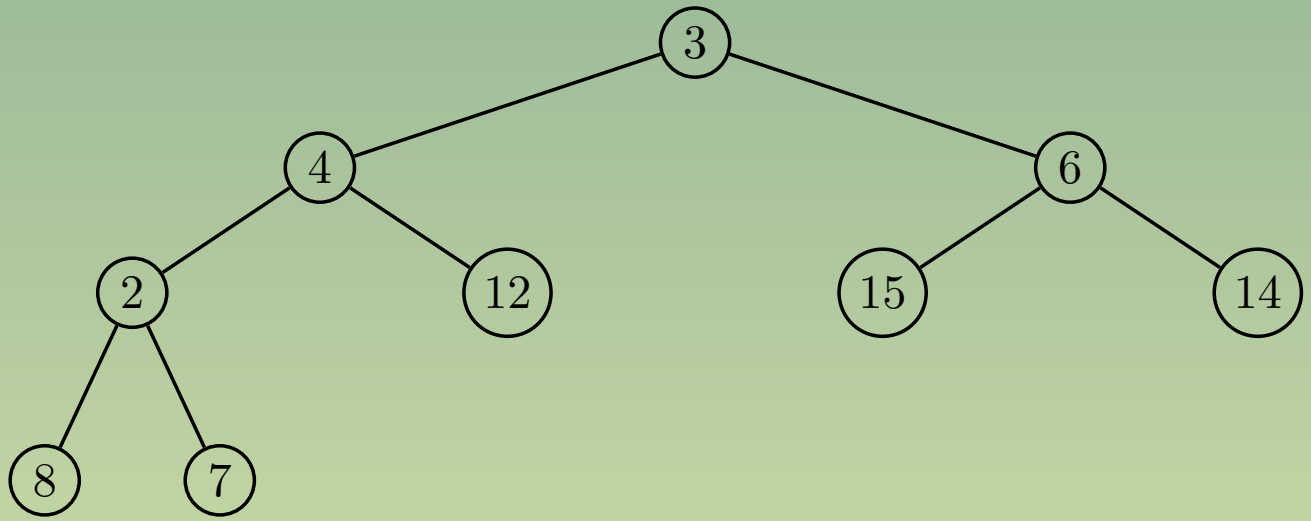
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Međutim, sada su narušena svojstva rastuće hrpe jer je $2 < 7$ (dijete ima manju oznaku od roditelja)

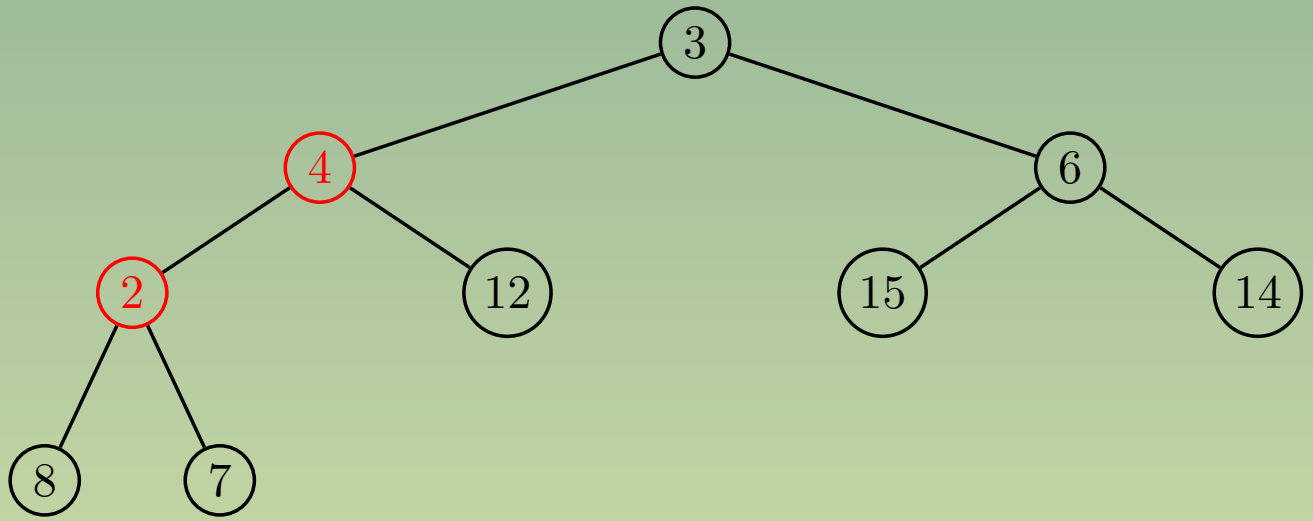
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Međutim, sada su narušena svojstva rastuće hrpe jer je $2 < 7$ (dijete ima manju oznaku od roditelja) pa treba zamijeniti mjesta tim dvama elementima.

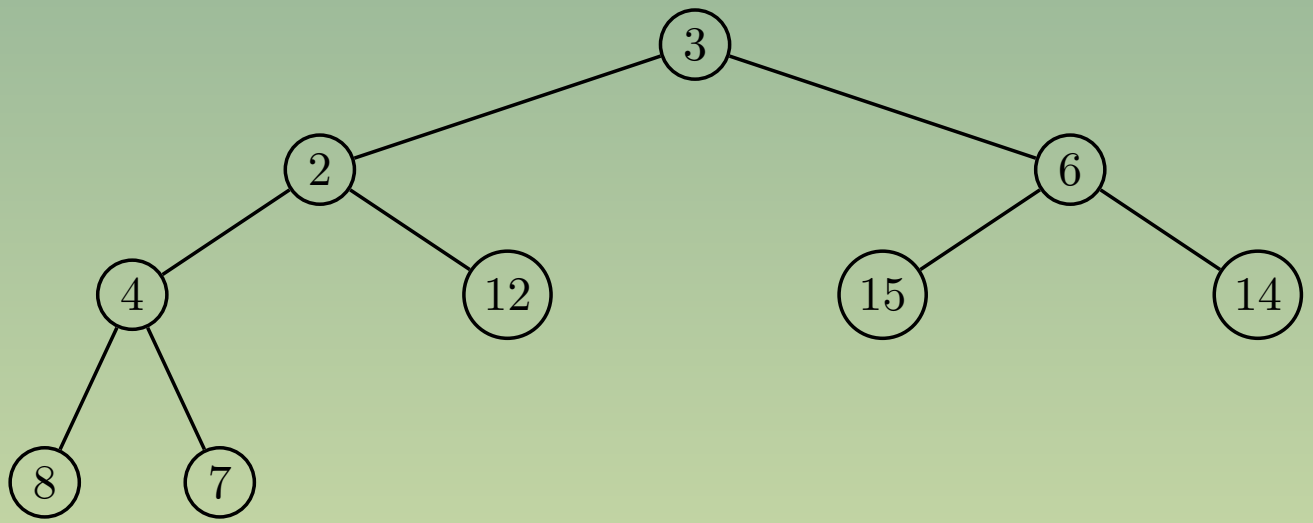
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

No, i dalje su svojstva rastuće hrpe narušena jer je $2 < 4$ (dijete ima manju oznaku od roditelja)

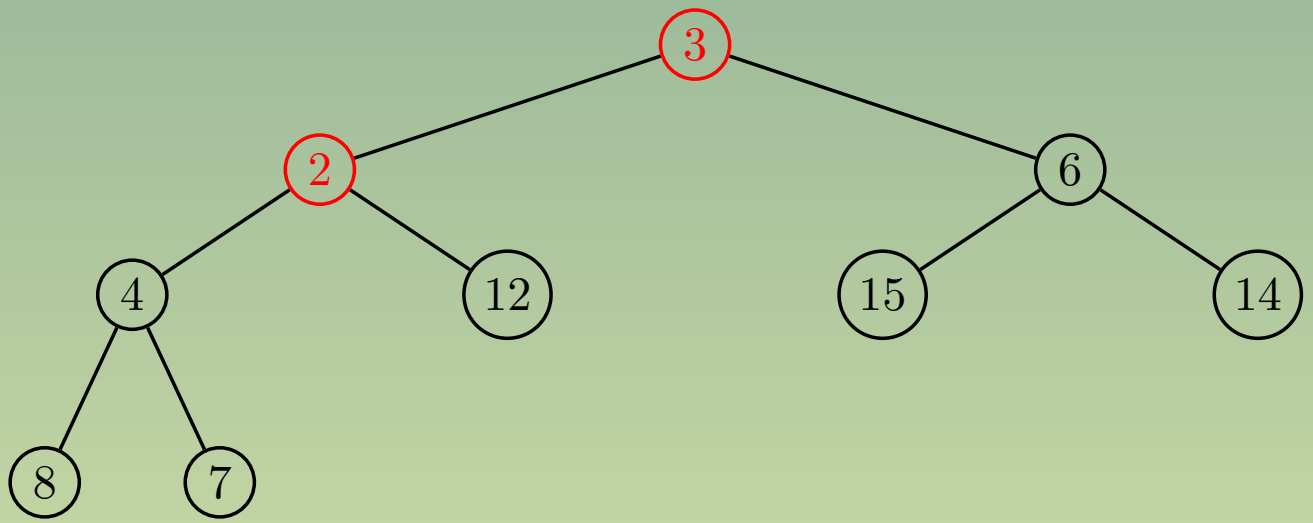
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

No, i dalje su svojstva rastuće hrpe narušena jer je $2 < 4$ (dijete ima manju oznaku od roditelja) pa treba zamijeniti mjesta tim dvama elementima.

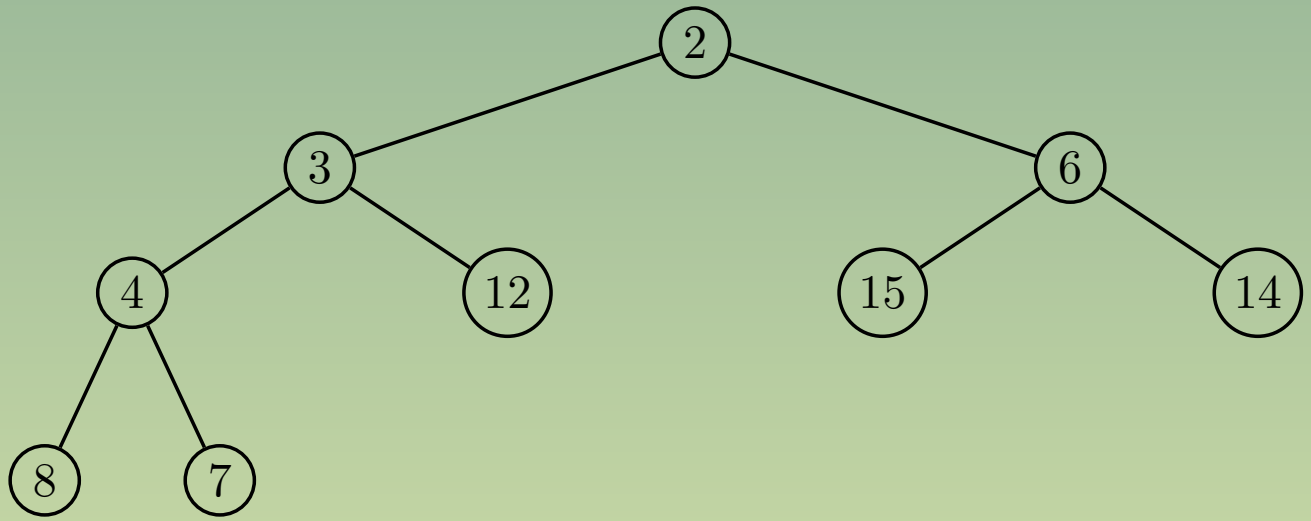
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

No, i dalje su svojstva rastuće hrpe narušena jer je $2 < 3$ (dijete ima manju oznaku od roditelja)

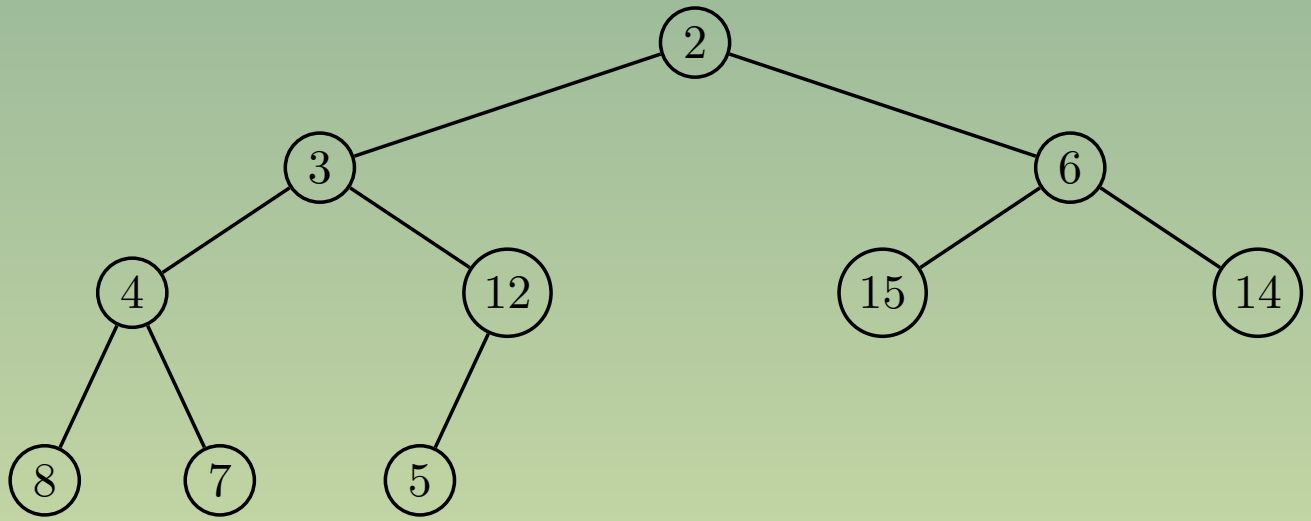
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

No, i dalje su svojstva rastuće hrpe narušena jer je $2 < 3$ (dijete ima manju oznaku od roditelja) pa treba zamijeniti mjesta tim dvama elementima.

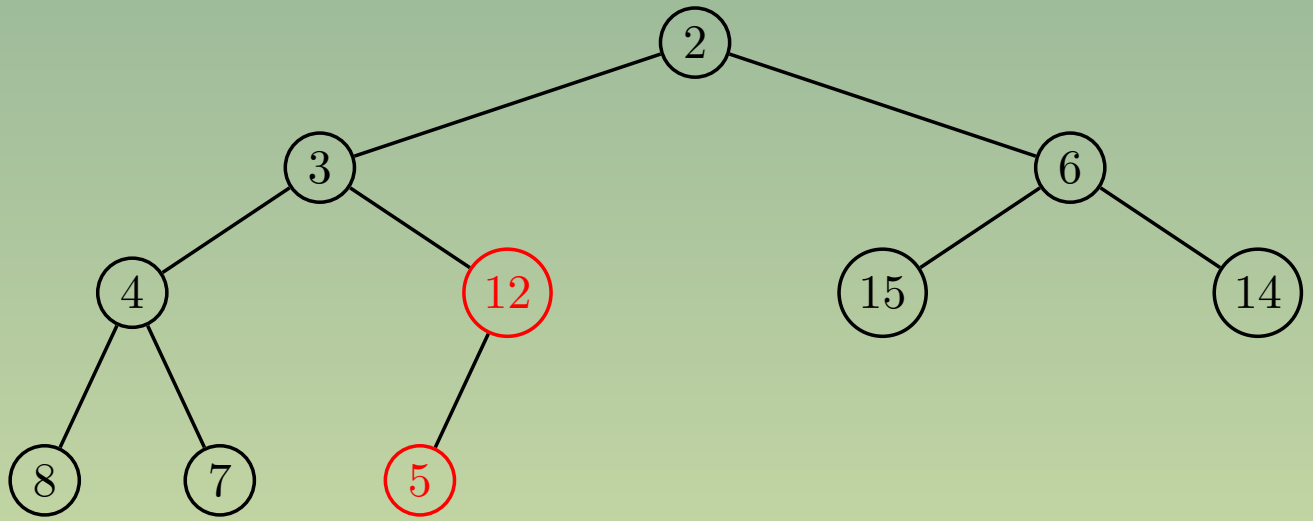
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Element 5 stavljamo na prvu slobodnu poziciju.

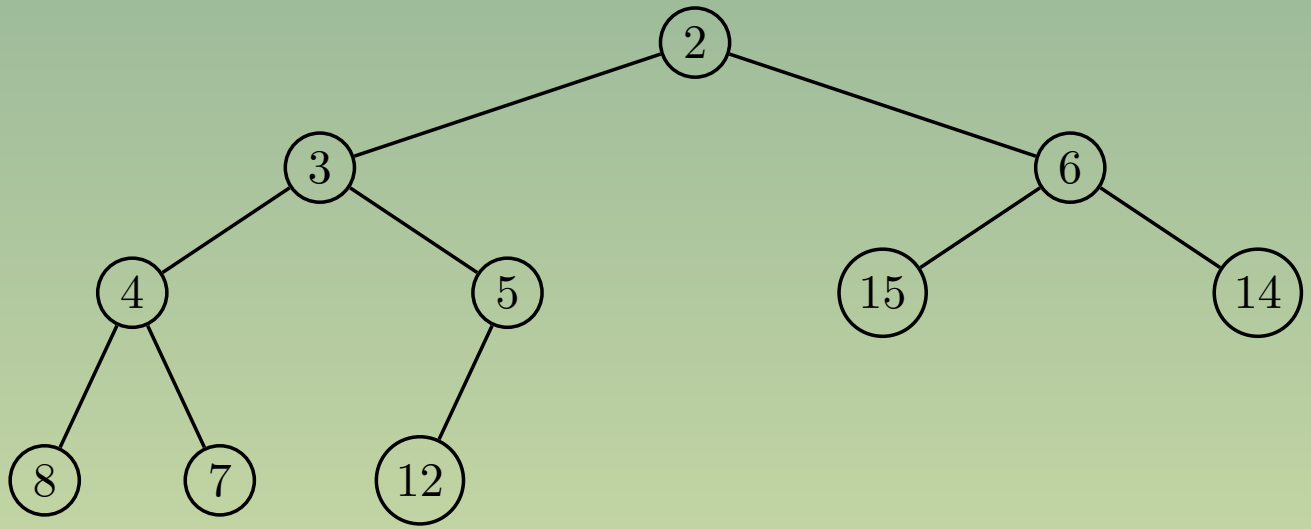
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Međutim, sada su narušena svojstva rastuće hrpe jer je $5 < 12$ (dijete ima manju oznaku od roditelja)

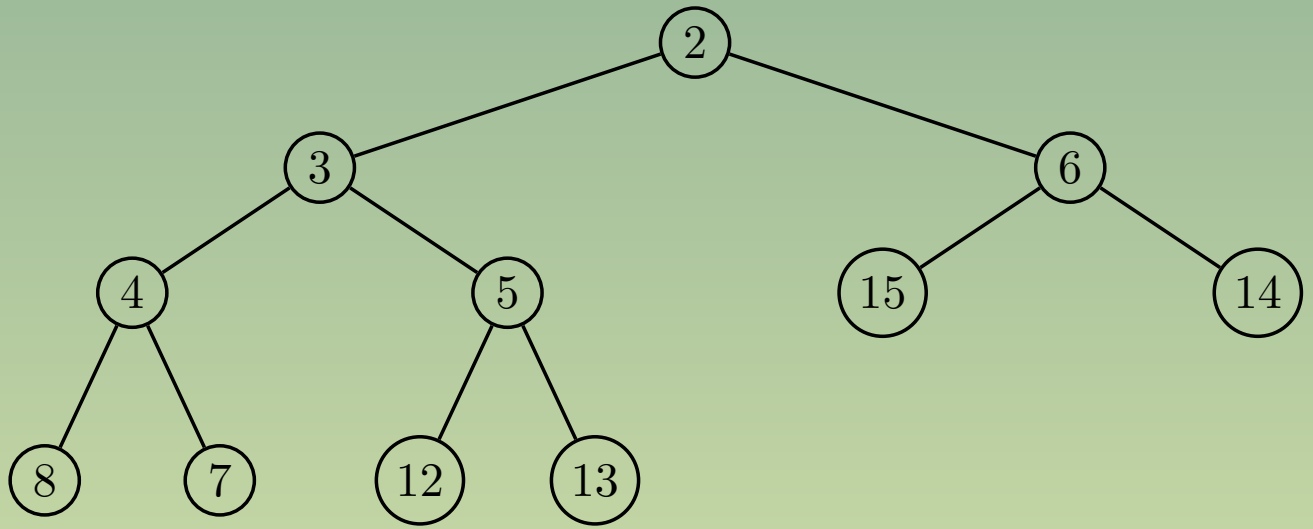
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Međutim, sada su narušena svojstva rastuće hrpe jer je $5 < 12$ (dijete ima manju oznaku od roditelja) pa treba zamijeniti mjesta tim dvama elementima.

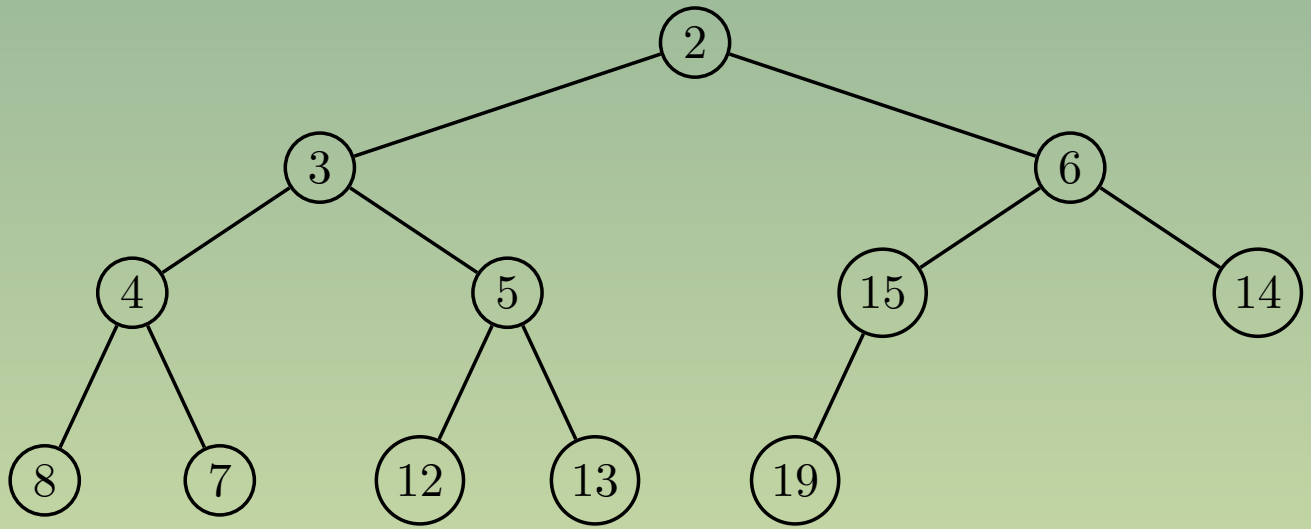
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Element 13 stavljamo na prvu slobodnu poziciju i pri tome su ostala sačuvana svojstva rastuće hrpe.

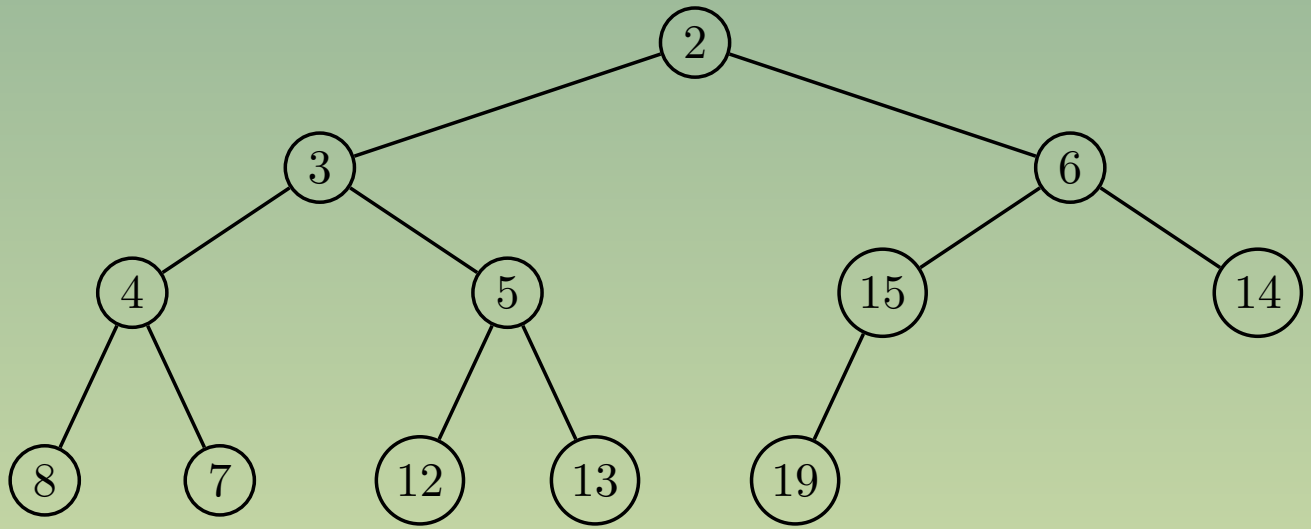
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

Element 19 stavljamo na prvu slobodnu poziciju i pri tome su ostala sačuvana svojstva rastuće hrpe.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

Kako smo prošli kroz sve elemente liste, dobiveno stablo je rastuća hrpa za zadanu listu.

◂ objasni postupak

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.28.

Konstruirajte padajuću hrpu za listu

$$7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$$

uz standardni linearni uređaj $\leqslant$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.28.

Konstruirajte padajuću hrpu za listu

$$7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$$

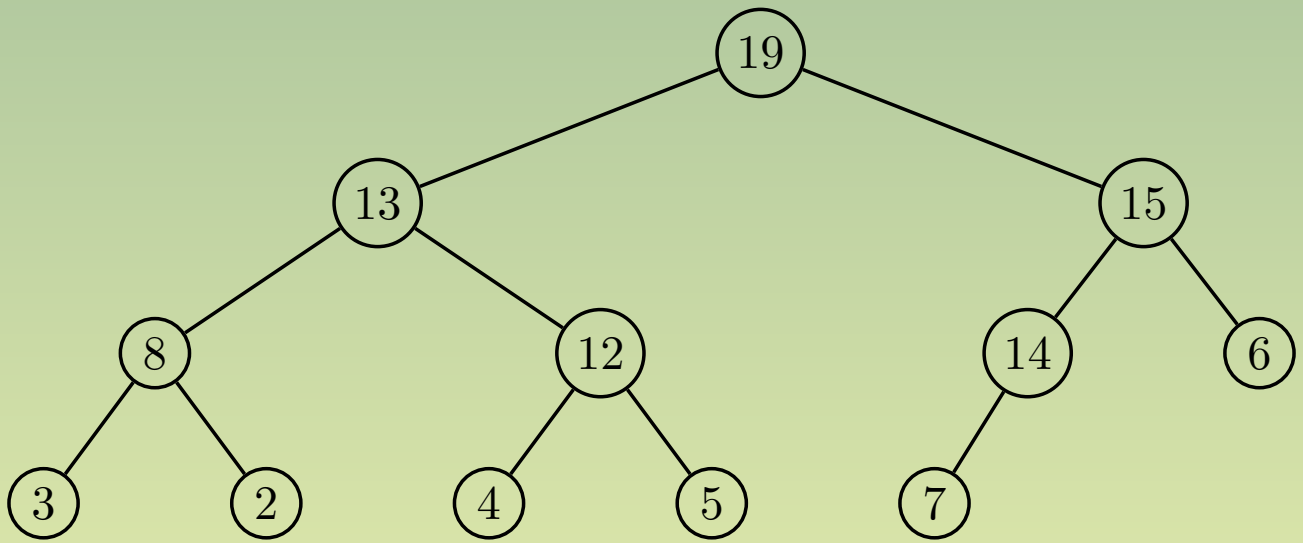
uz standardni linearni uređaj $\leqslant$.

Rješenje.

Postupak konstrukcije padajuće hrpe ide na isti način kao što smo to napravili maloprije za rastuću hrpu, samo što moramo paziti da roditelj ima uvijek veću oznaku od svog djeteta (kod rastuće hrpe je bilo obrnuto). Ukoliko to ne vrijedi, vršimo zamjene tako dugo dok ne zadovoljimo to svojstvo. Ovdje je dano konačno rješenje, a međukorake sami napravite kako je to napravljeno za rastuću hrpu.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Padajuća hrpa za listu $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$ je



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.29.

Konstruirajte padajuću hrpu za listu

Katarina, Maja, Natalija, Sanja, Sonja, Mirjana

uz standardni leksikografski uređaj.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.29.

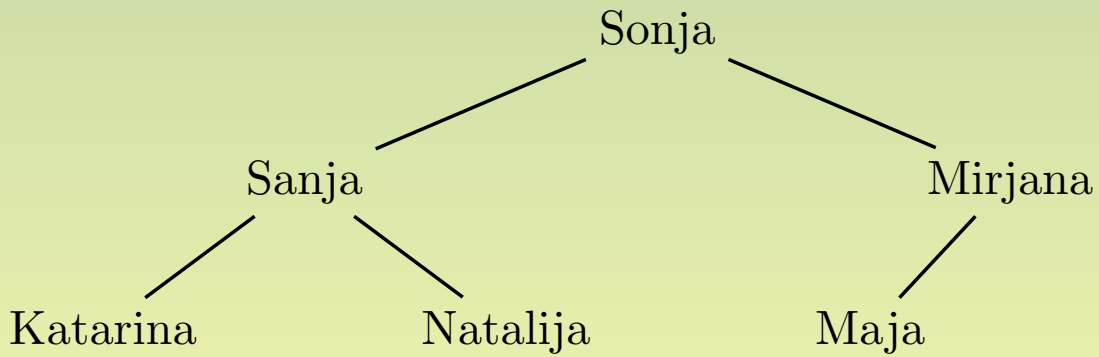
Konstruirajte padajuću hrpu za listu

Katarina, Maja, Natalija, Sanja, Sonja, Mirjana

uz standardni leksikografski uređaj.

Rješenje.

Dano je samo konačno rješenje, a međukorake sami provedite.



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.30.

Konstruirajte rastuću hrpu za listu

Katarina, Maja, Natalija, Sanja, Sonja, Mirjana

uz standardni leksikografski uređaj.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.30.

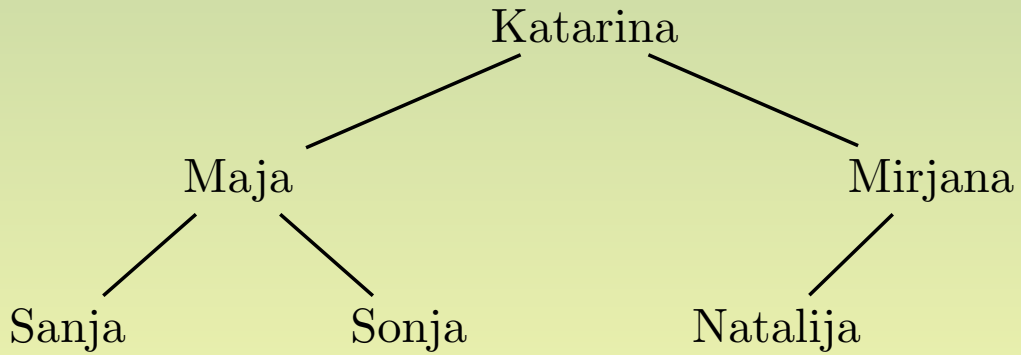
Konstruirajte rastuću hrpu za listu

Katarina, Maja, Natalija, Sanja, Sonja, Mirjana

uz standardni leksikografski uređaj.

Rješenje.

Dano je samo konačno rješenje, a međukorake sami provedite.



Sortiranje pomoću padajuće (rastuće) hrpe

ULAZ: Lista $A = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$
IZLAZ: Sortirana lista u padajućem (rastućem) poretku

1: Ispiši korijen i stavi posljednji vrh u hrpi u korijen. Pod posljednjim vrhom se misli na najdesniji vrh na zadnjem nivou.

2: Popravi dobiveno stablo tako da opet bude padajuća (rastuća) hrpa tako da se korijen u pomiče prema dolje na sljedeći način:

   i) Zamijeni korijen u s većim (manjim) od svoja dva djeteta.

   ii) Prijeđi na podstablo kojemu je u korijen. Ako ono ima visinu 0, idi na korak 3. U protivnom, ponovi korak 2)i) za to podstablo.

3: Ponavljaj korake 1) i 2) sve dok ima vrhova u hrpi.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.31.

Pomoću hrpe sortirajte listu

$$7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$$

u rastućem poretku.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.31.

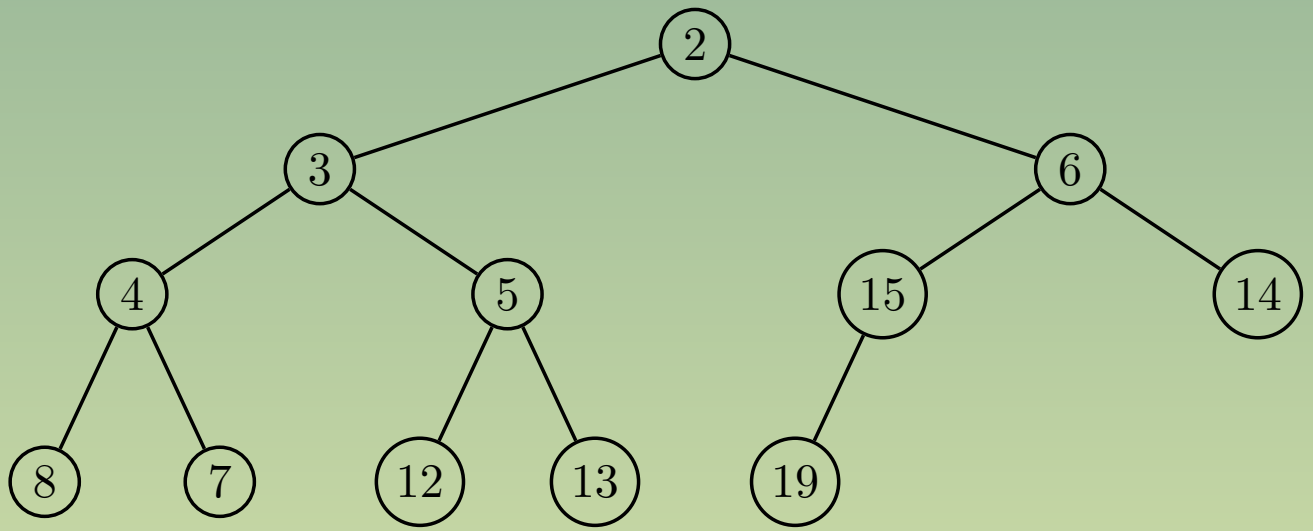
Pomoću hrpe sortirajte listu

$$7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$$

u rastućem poretku.

Rješenje.

Na ovom primjeru ćemo objasniti korak po korak sortiranje pomoću hrpe. Od prije imamo već konstruiranu rastuću hrpu za zadanu listu pa od nje i krećemo.



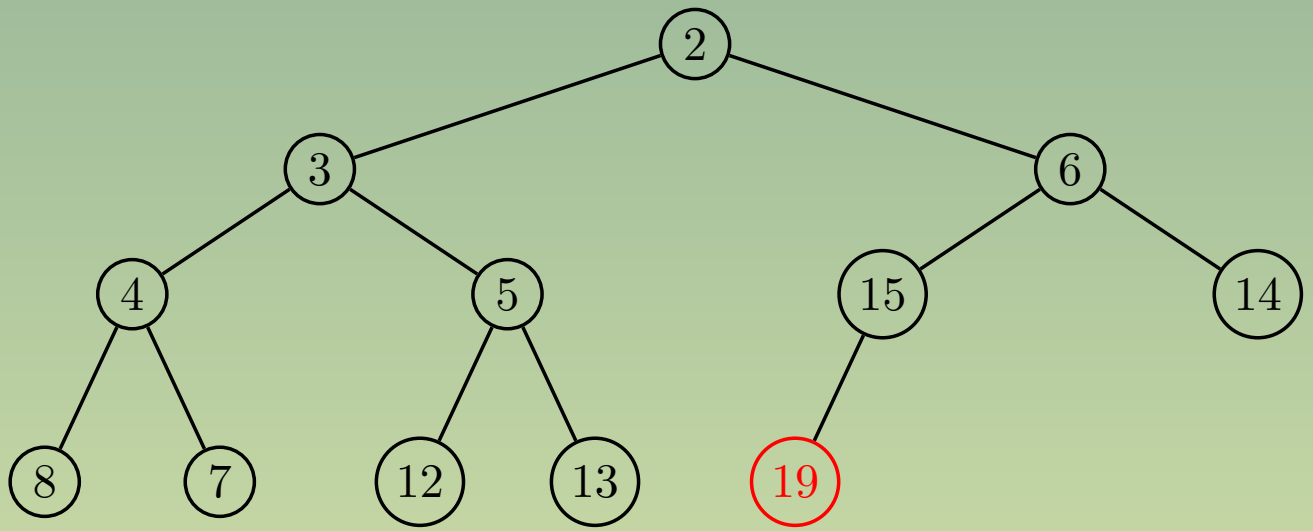
lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: 2

Ispišemo korijen.

preskoči postupak

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

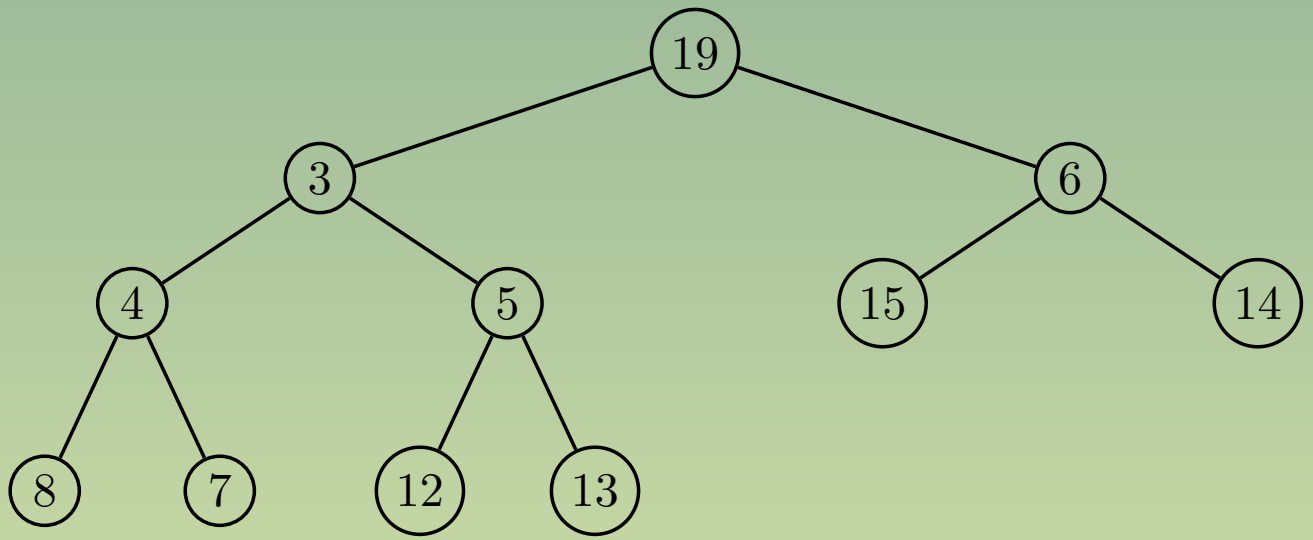


lista: 7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19

sortirana lista: 2

Zadnji element u hrpi, element 19,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

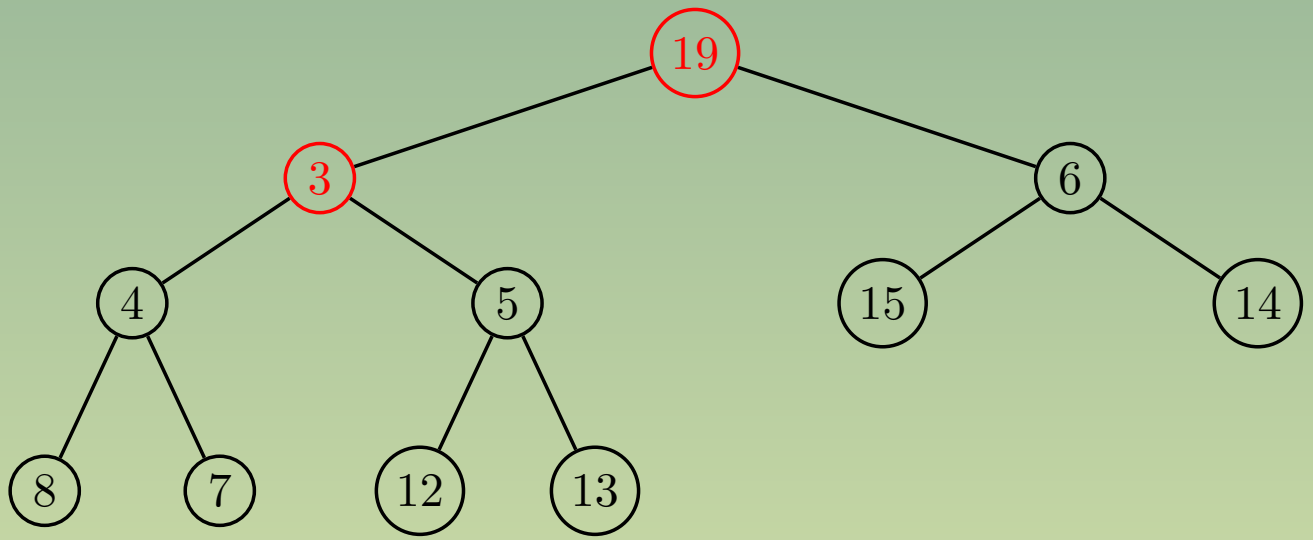


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: 2

Zadnji element u hrpi, element 19, stavimo u korijen.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

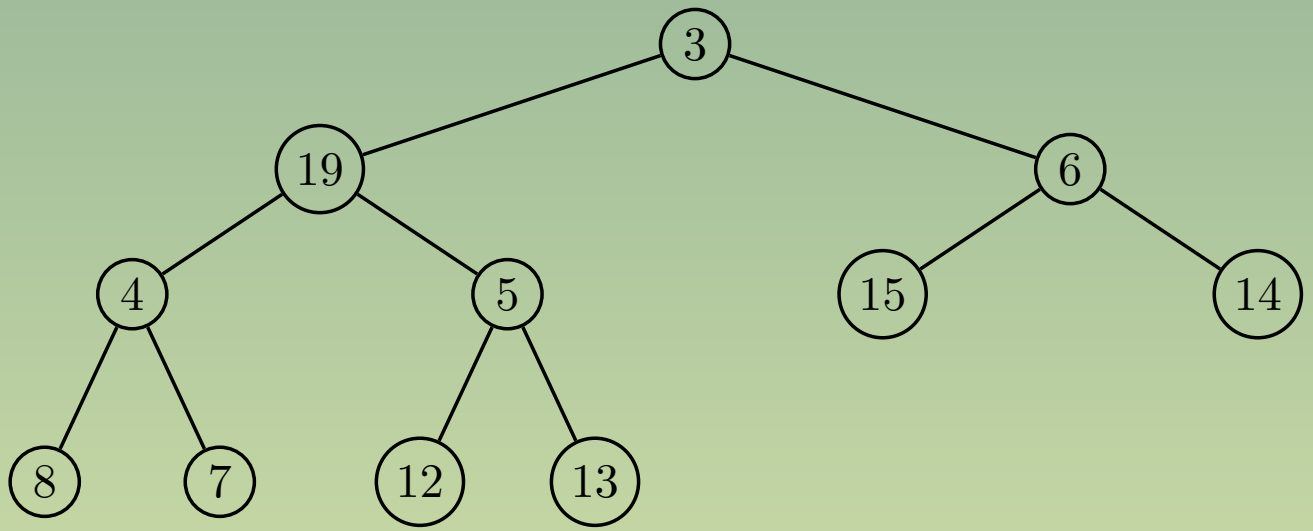


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: 2

Kako je element 3 manje dijete elementa 19 (element 6 je njegovo veće dijete),

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

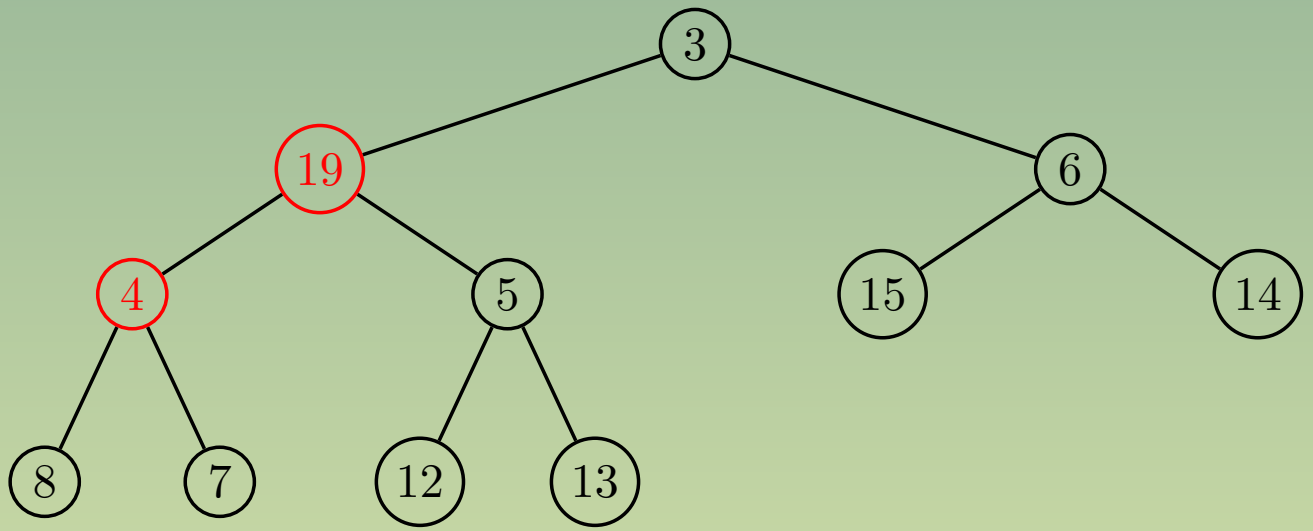


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: 2

Kako je element 3 manje dijete elementa 19 (element 6 je njegovo veće dijete), zamijenimo im mjesta.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

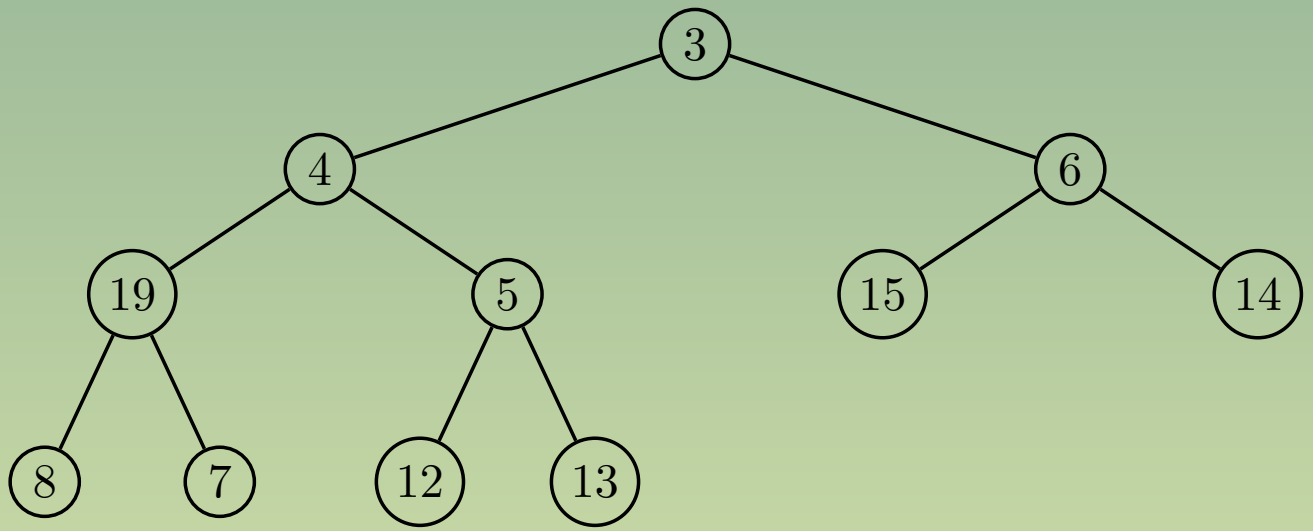


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: 2

Kako je element 4 manje dijete elementa 19 (element 5 je njegovo veće dijete),

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

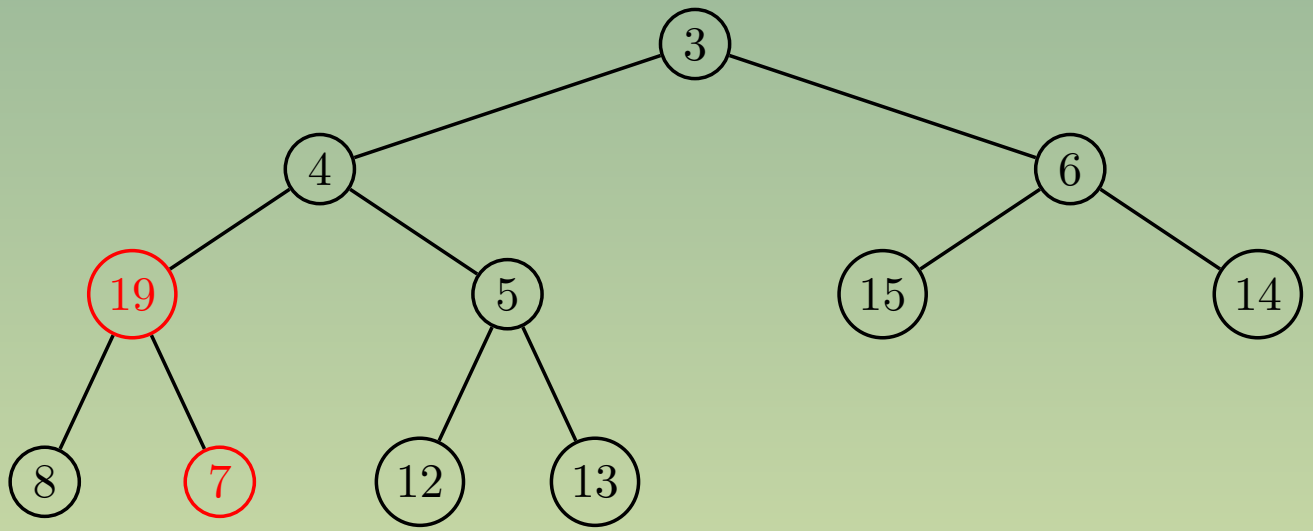


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: 2

Kako je element 4 manje dijete elementa 19 (element 5 je njegovo veće dijete), zamijenimo im mjesta.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

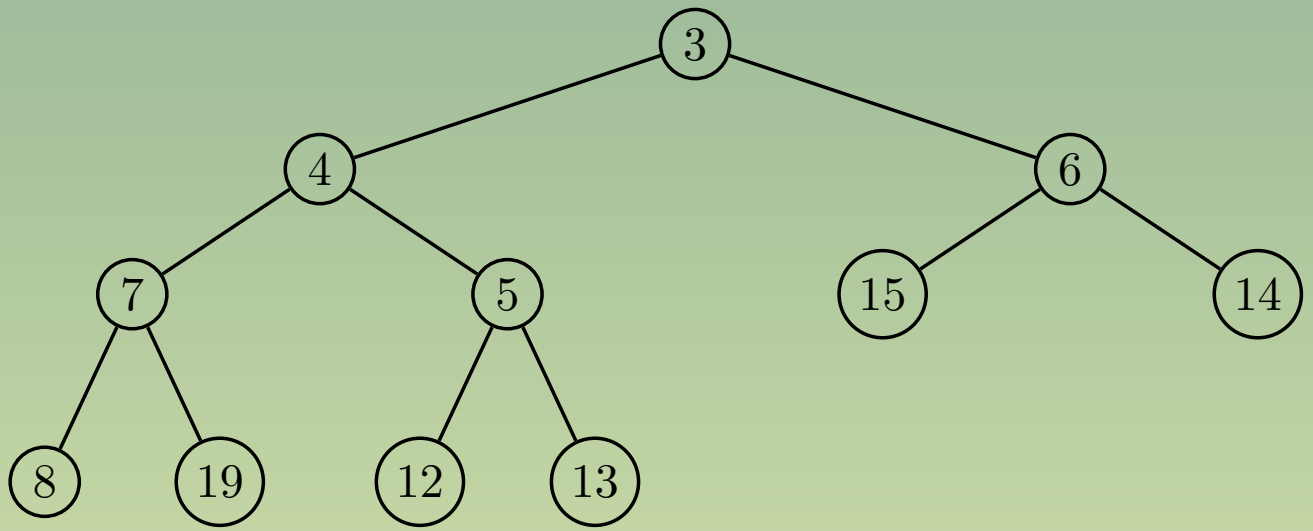


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: 2

Kako je element 7 manje dijete elementa 19 (element 8 je njegovo veće dijete),

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

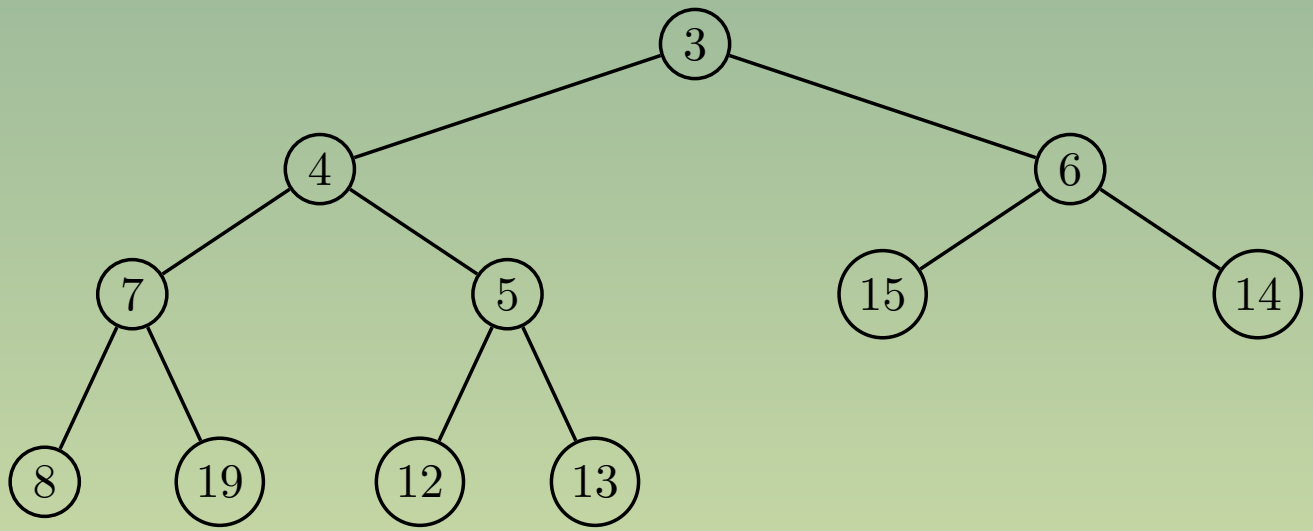


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: 2

Kako je element 7 manje dijete elementa 19 (element 8 je njegovo veće dijete), zamijenimo im mjesta.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

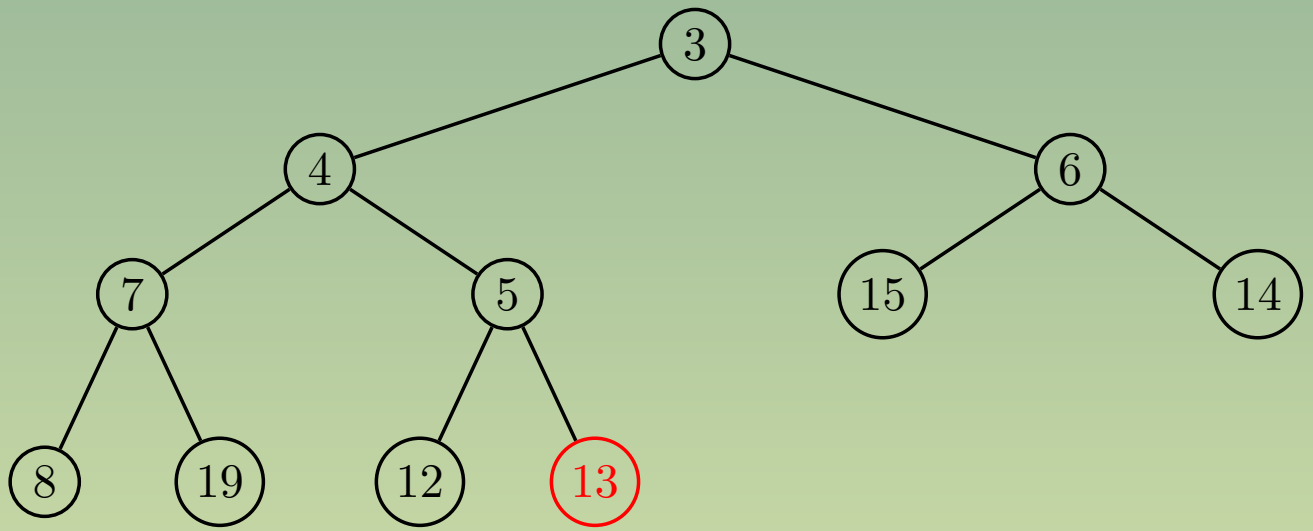


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3$

Sada smo opet dobili rastuću hrpu pa ispišemo njezin korijen.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

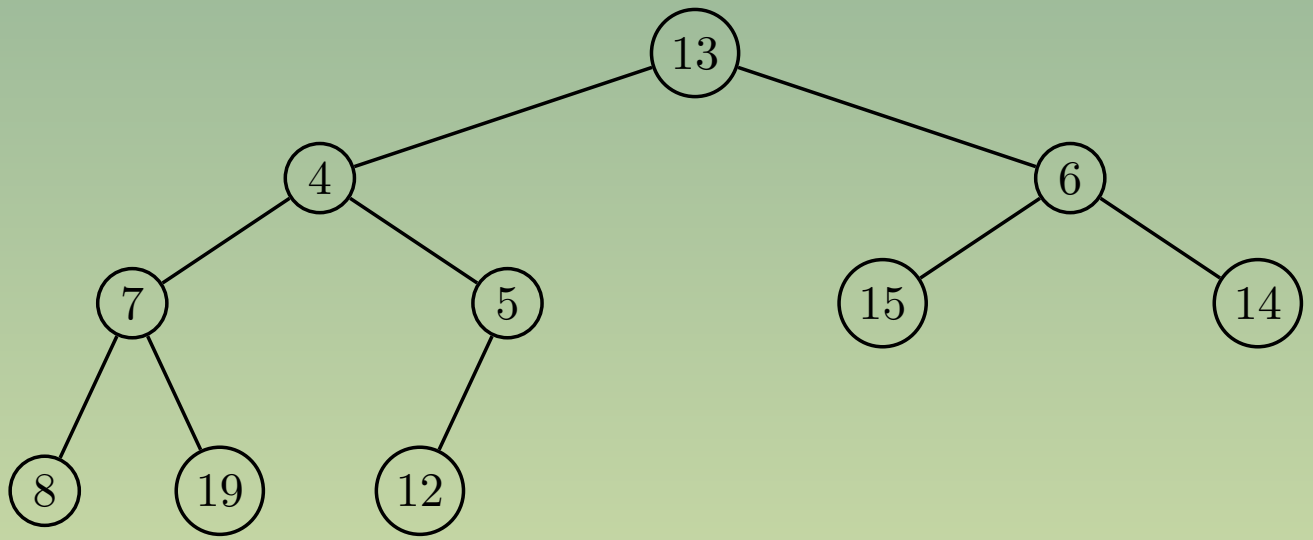


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3$

Zadnji element u hrpi, element 13,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

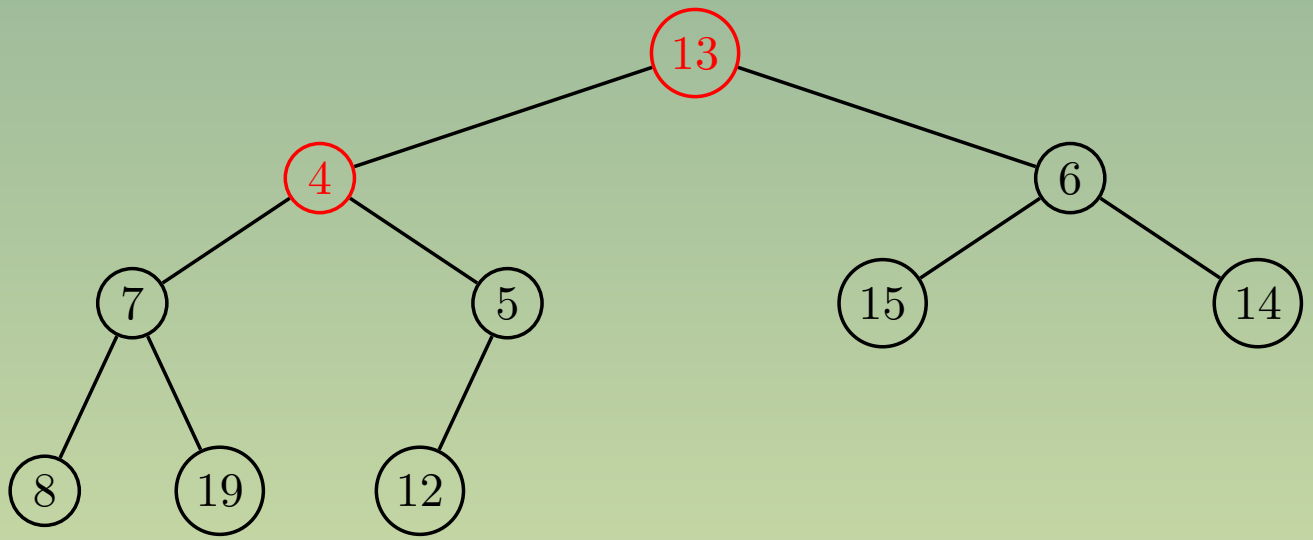


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3$

Zadnji element u hrpi, element 13, stavimo u korijen.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

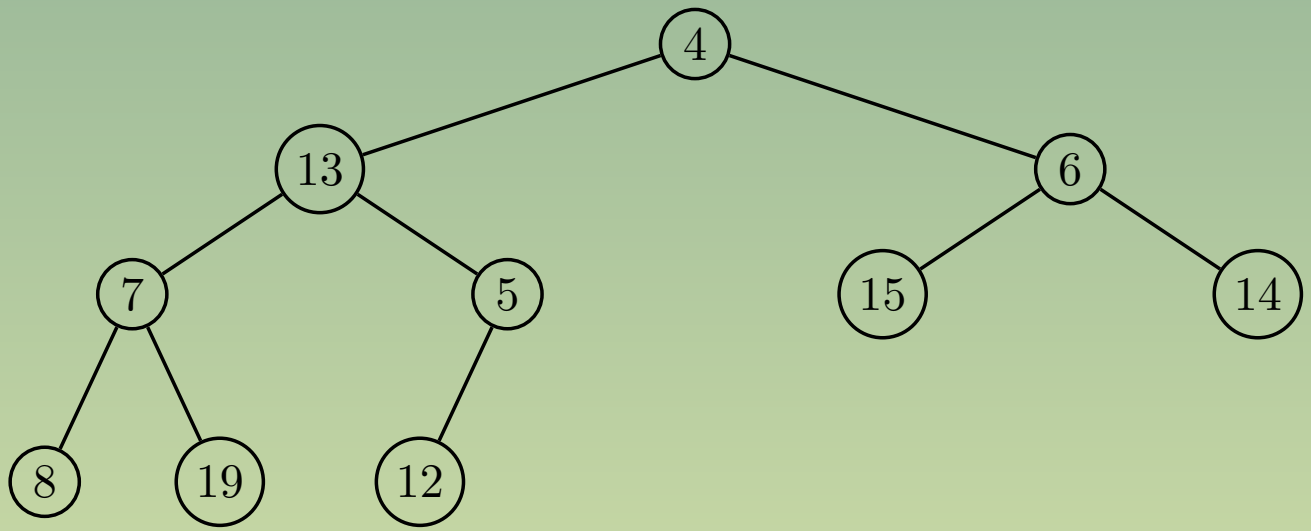


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3$

Kako je element 4 manje dijete elementa 13 (element 6 je njegovo veće dijete),

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

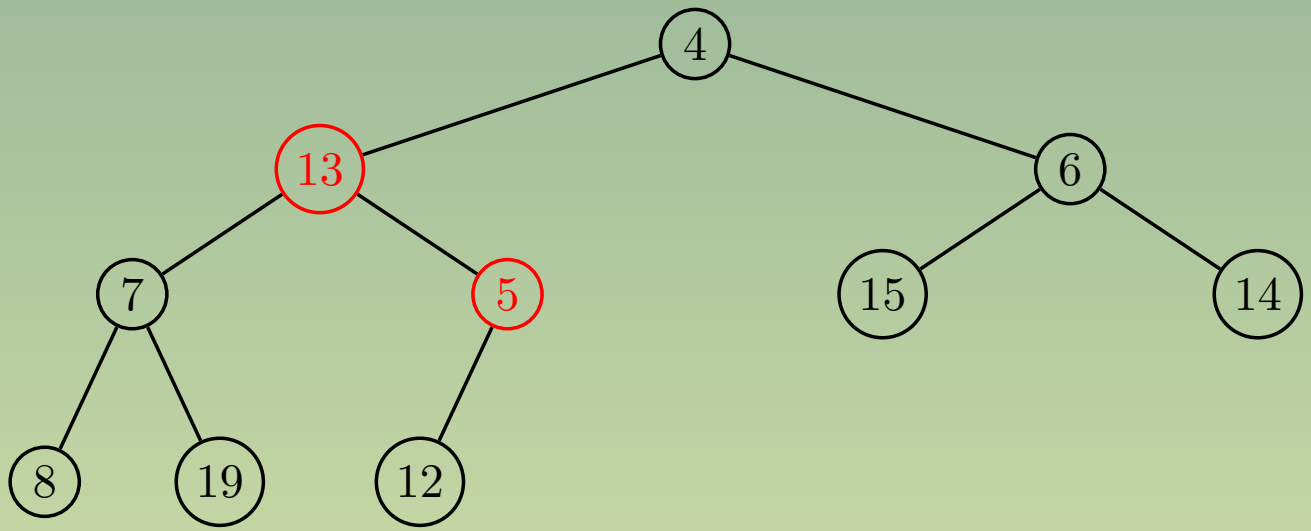


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3$

Kako je element 4 manje dijete elementa 13 (element 6 je njegovo veće dijete), zamijenimo im mjesta.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

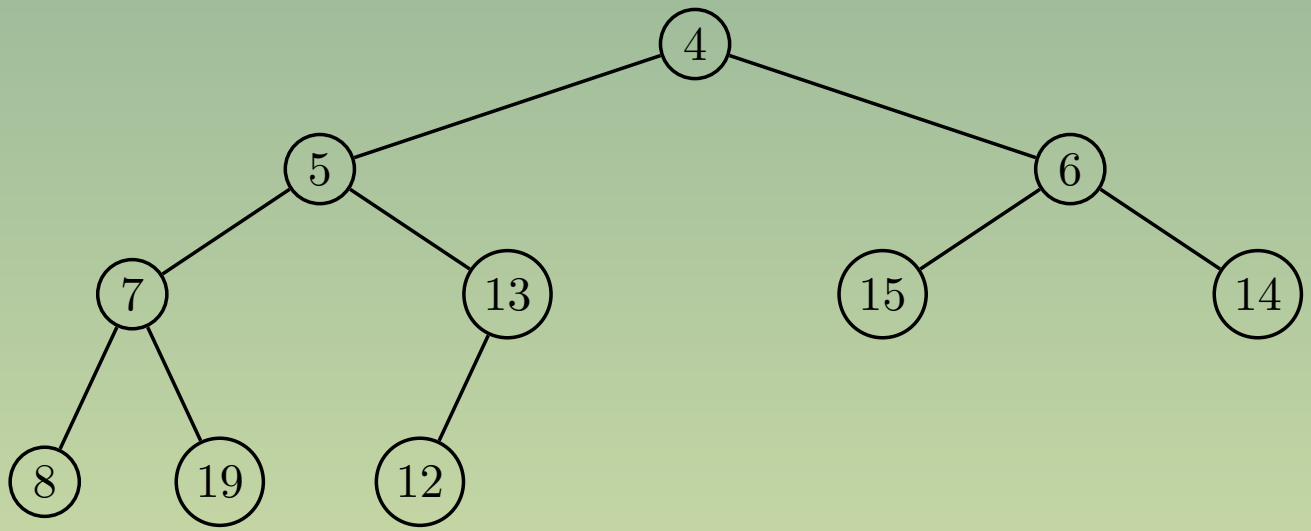


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3$

Kako je element 5 manje dijete elementa 13 (element 7 je njegovo veće dijete),

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

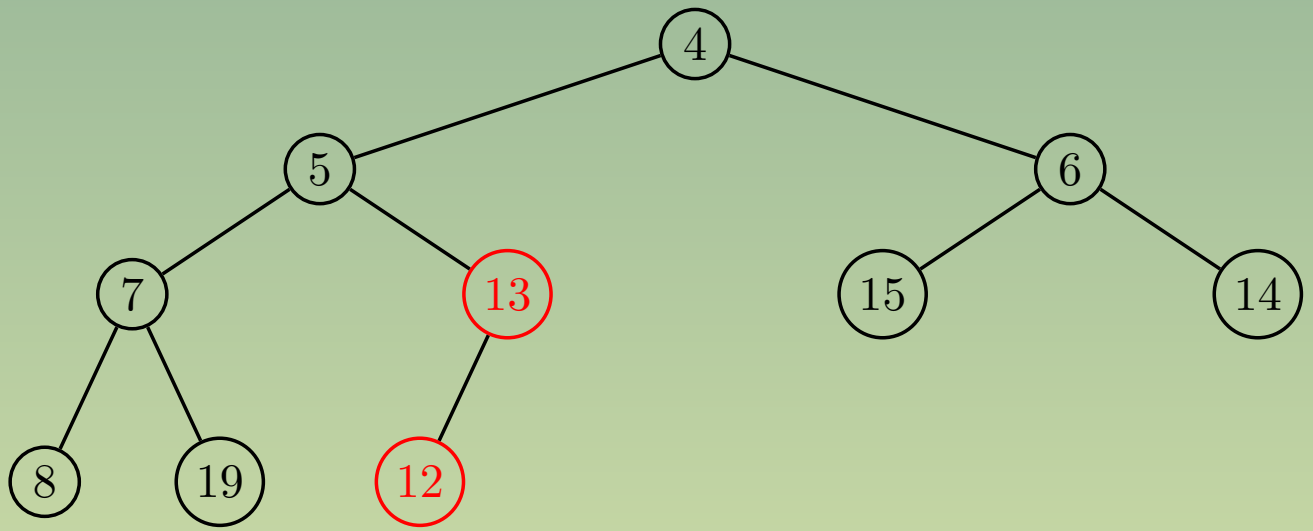


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3$

Kako je element 5 manje dijete elementa 13 (element 7 je njegovo veće dijete), zamijenimo im mjesta.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

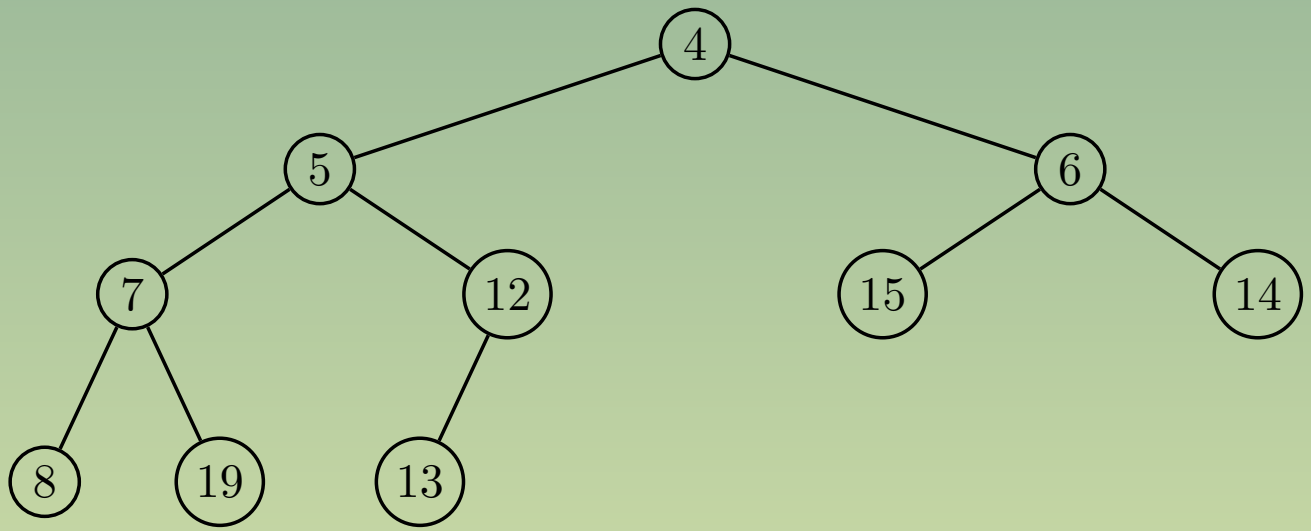


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3$

Kako je element 12 jedino dijete elementa 13 i dijete ima manju oznaku od roditelja,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

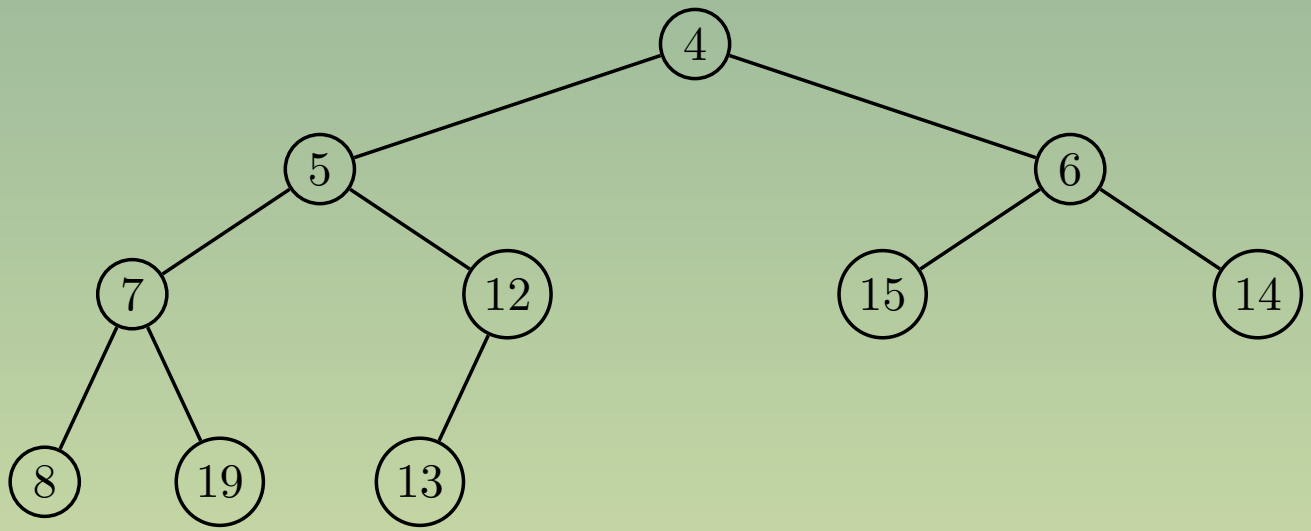


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3$

Kako je element 12 jedino dijete elementa 13 i dijete ima manju oznaku od roditelja, zamijenimo im mjesta.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

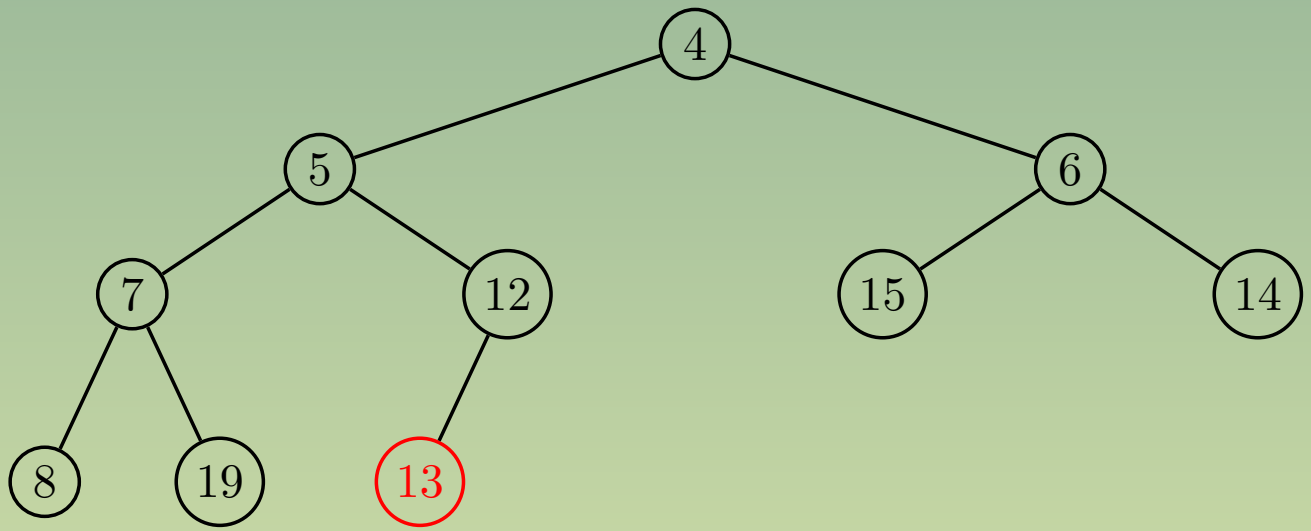


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4$

Sada smo opet dobili rastuću hrpu pa ispišemo njezin korijen.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

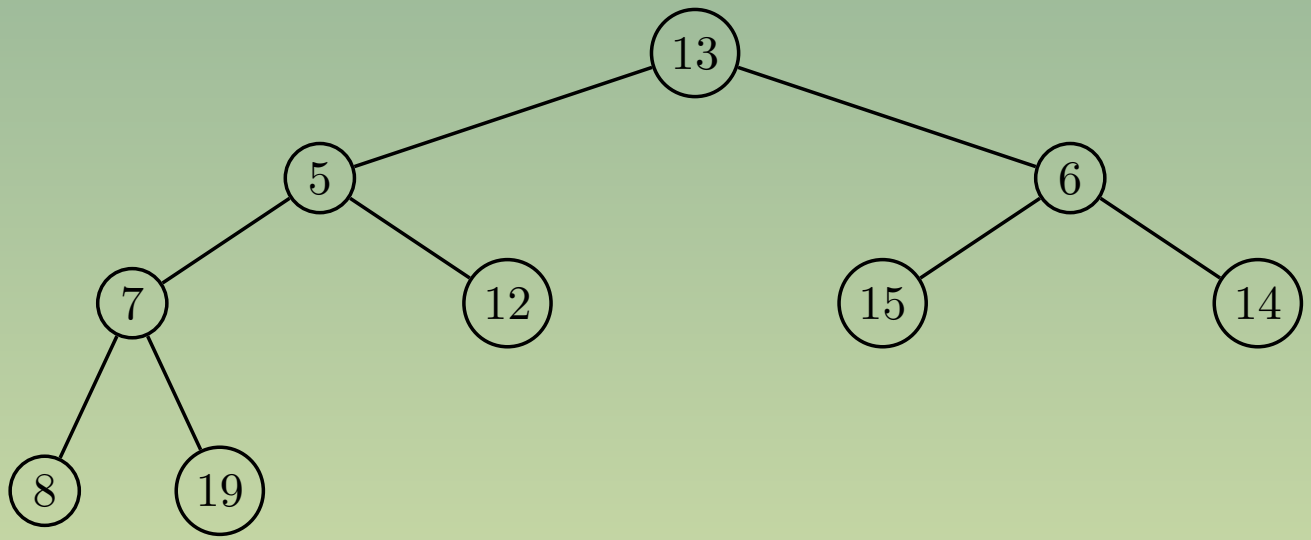


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4$

Zadnji element u hrpi, element 13,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

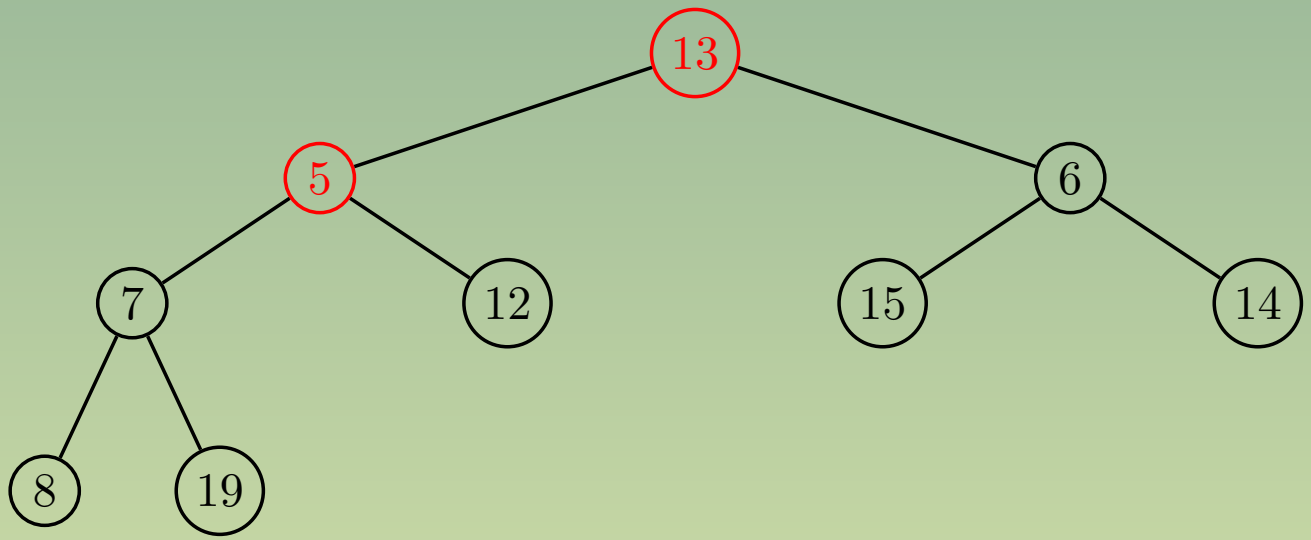


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4$

Zadnji element u hrpi, element 13, stavimo u korijen.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

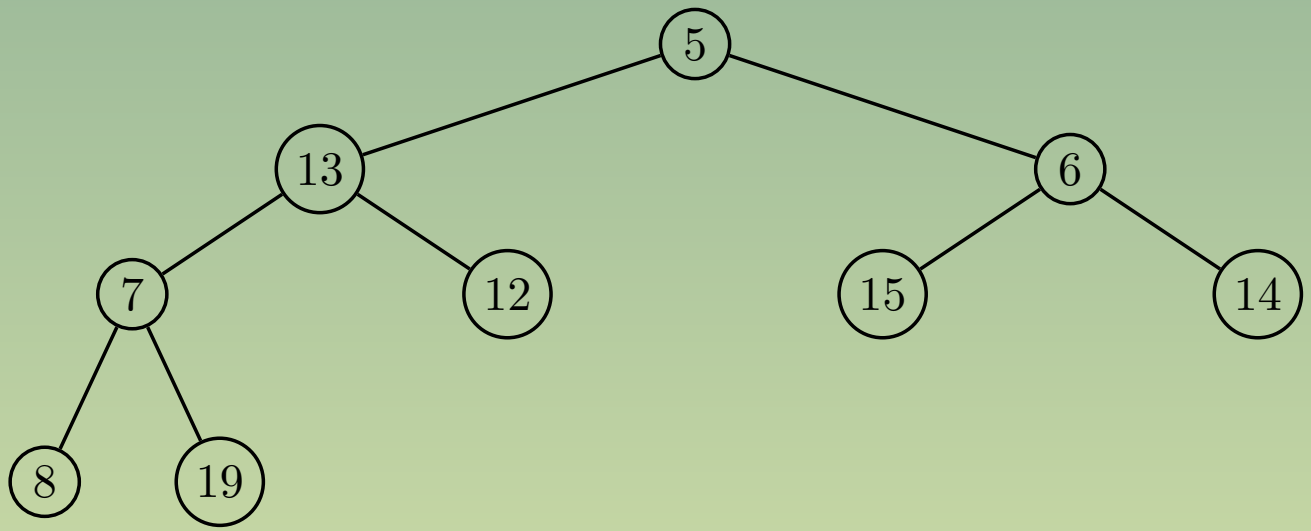


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4$

Kako je element 5 manje dijete elementa 13 (element 6 je njegovo veće dijete),

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

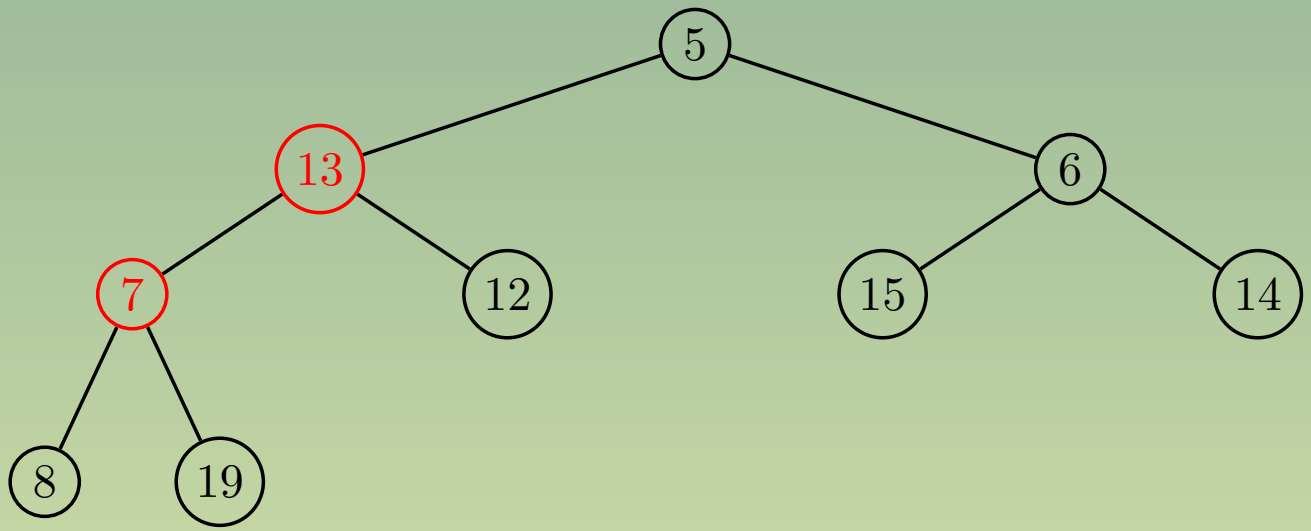


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4$

Kako je element 5 manje dijete elementa 13 (element 6 je njegovo veće dijete), zamijenimo im mjesta.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

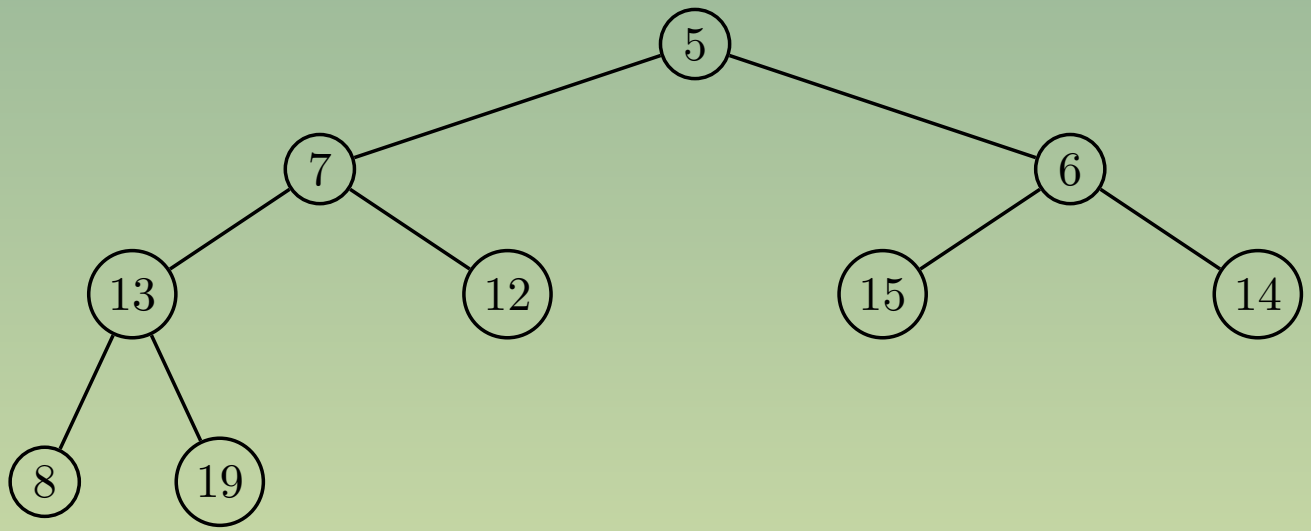


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4$

Kako je element 7 manje dijete elementa 13 (element 12 je njegovo veće dijete),

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

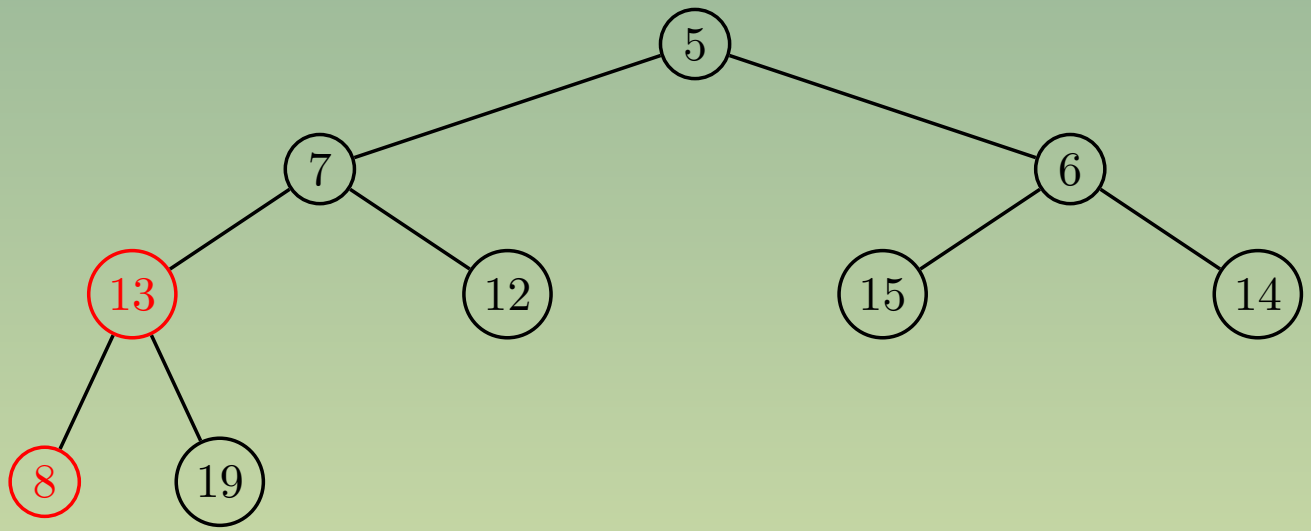


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4$

Kako je element 7 manje dijete elementa 13 (element 12 je njegovo veće dijete), zamijenimo im mjesta.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

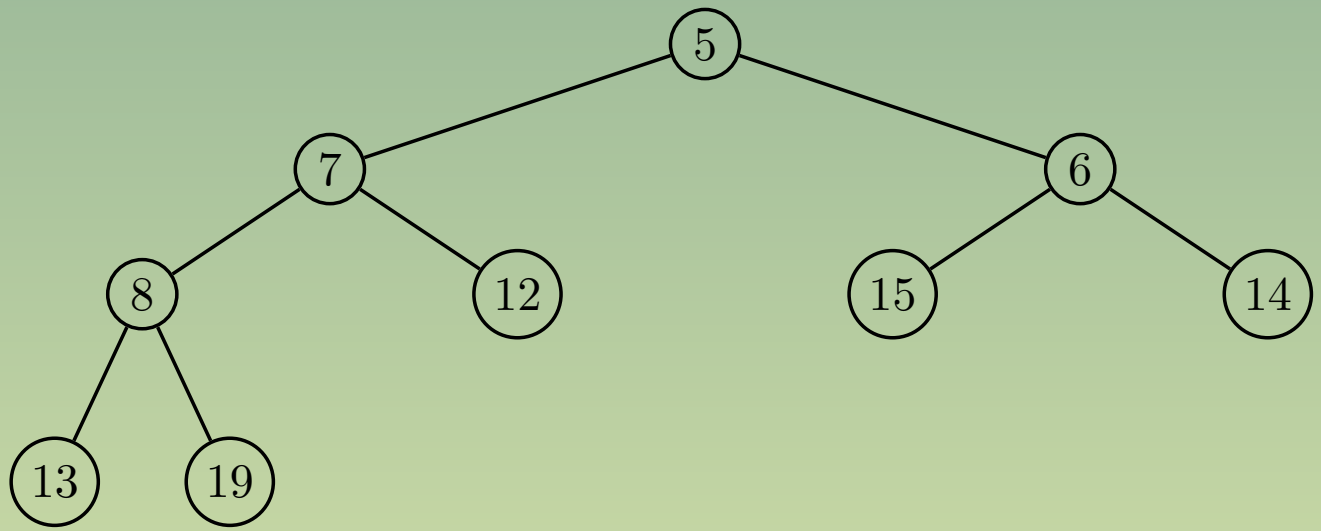


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4$

Kako je element 8 manje dijete elementa 13 (element 19 je njegovo veće dijete),

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

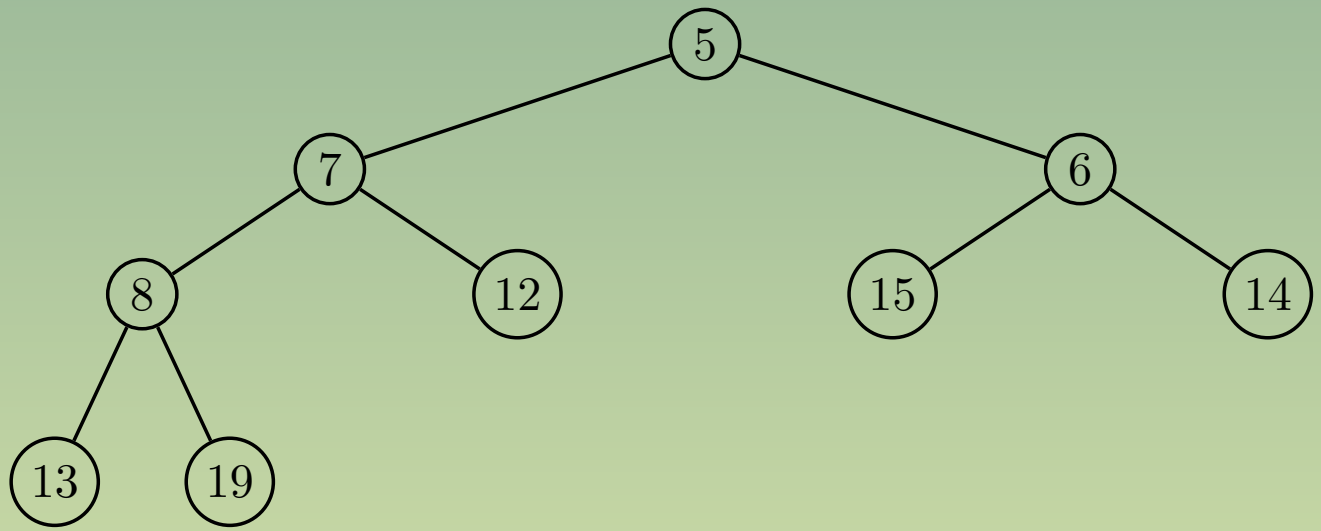


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4$

Kako je element 8 manje dijete elementa 13 (element 19 je njegovo veće dijete), zamijenimo im mjesta.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

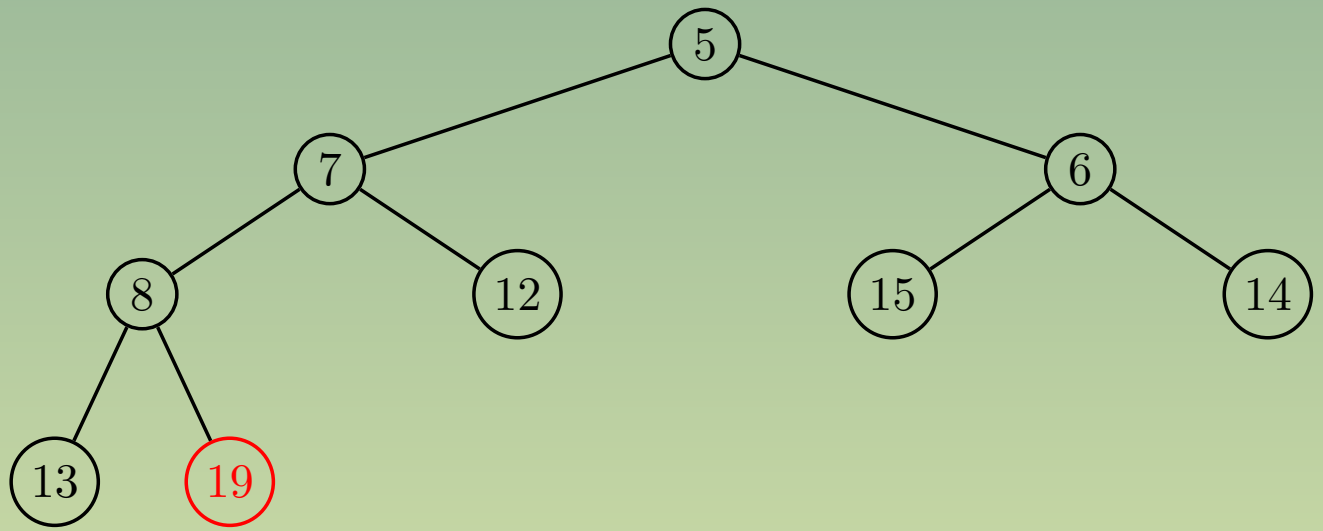


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5$

Sada smo opet dobili rastuću hrpu pa ispišemo njezin korijen.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

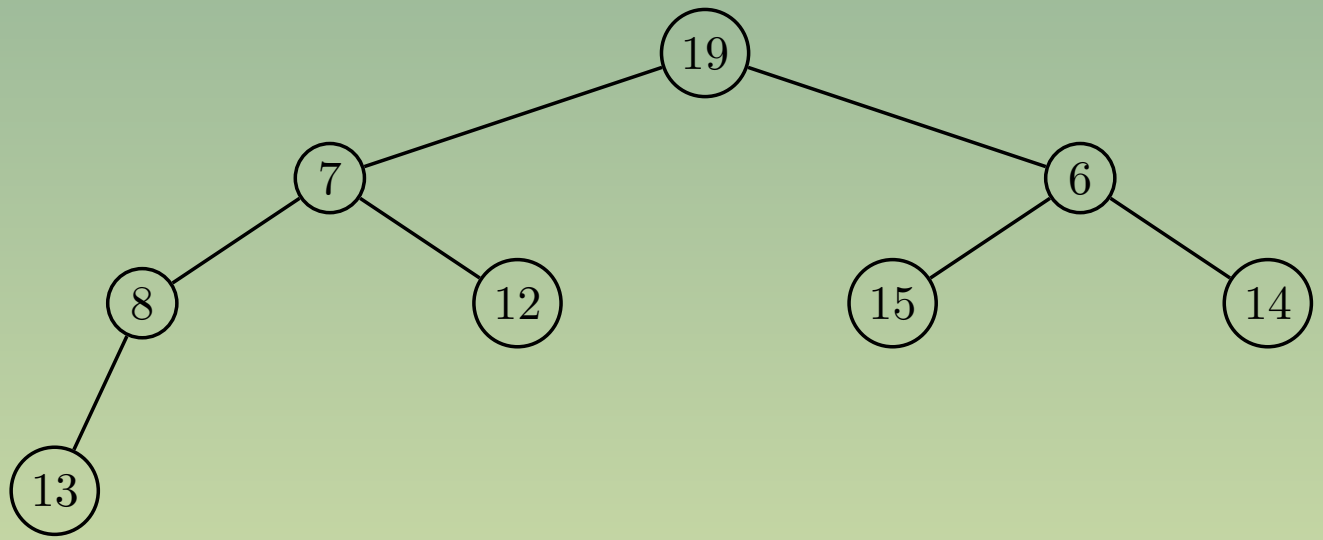


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5$

Zadnji element u hrpi, element 19,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

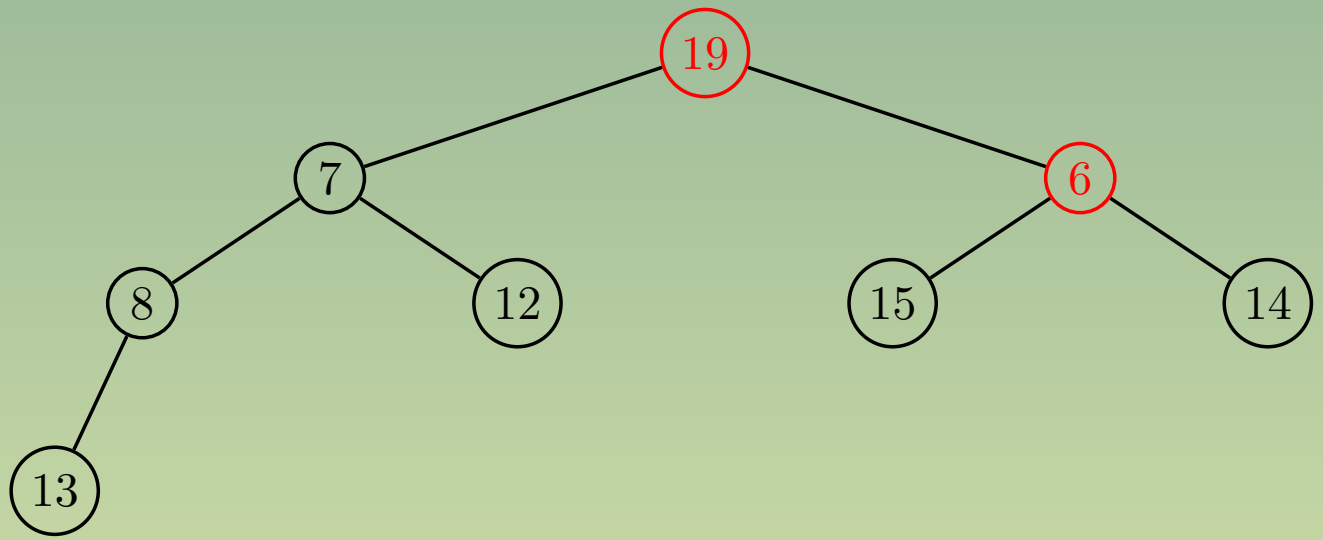


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5$

Zadnji element u hrpi, element 19, stavimo u korijen.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

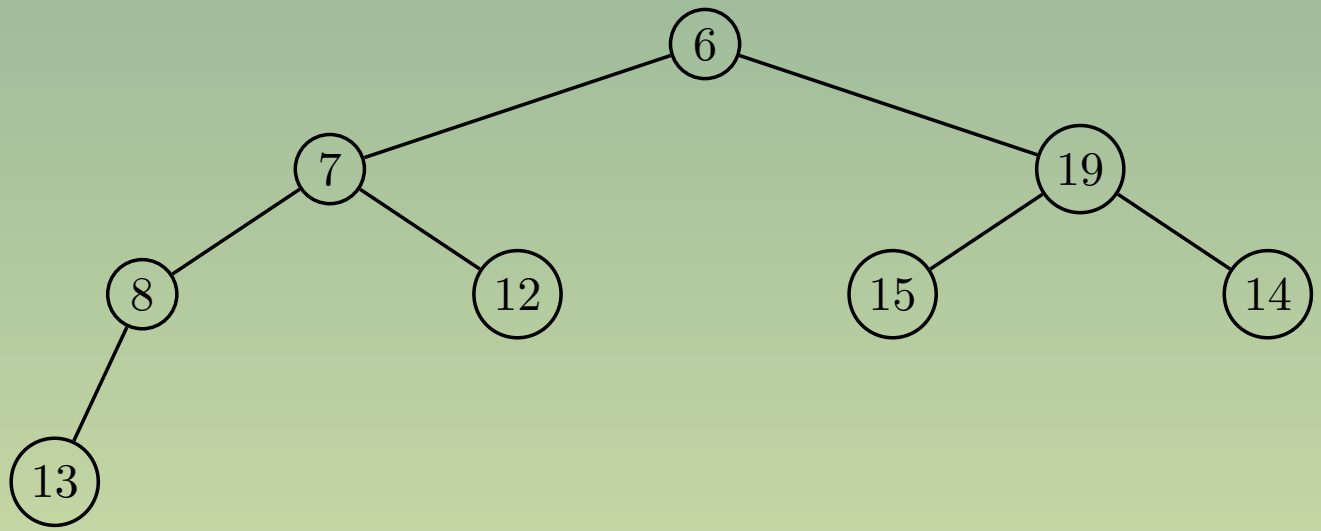


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5$

Kako je element 6 manje dijete elementa 19 (element 7 je njegovo veće dijete),

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

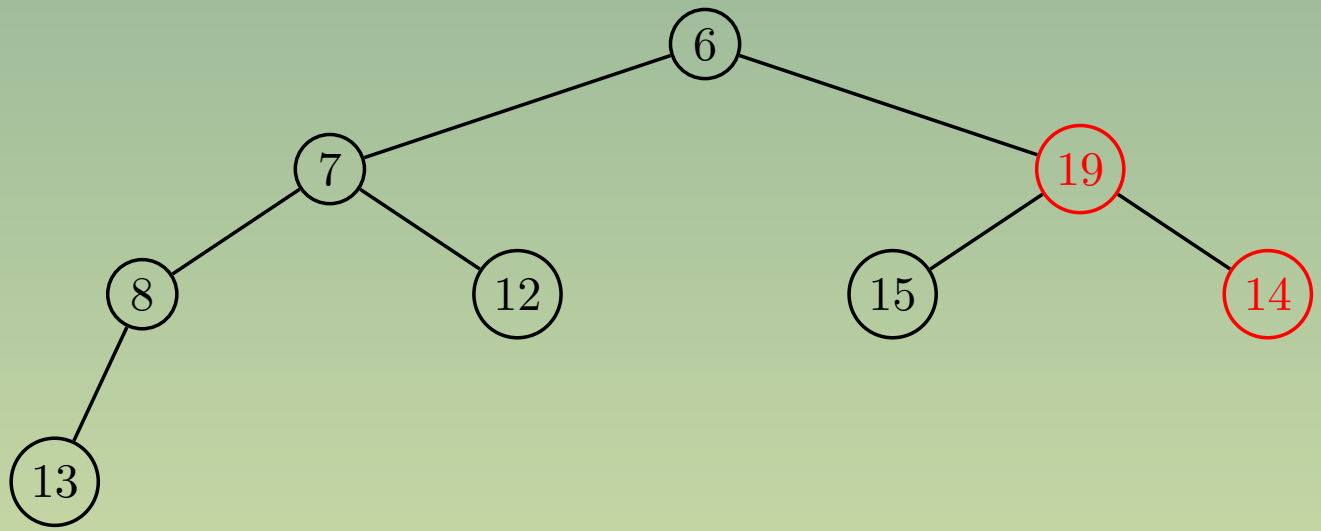


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5$

Kako je element 6 manje dijete elementa 19 (element 7 je njegovo veće dijete), zamijenimo im mjesta.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

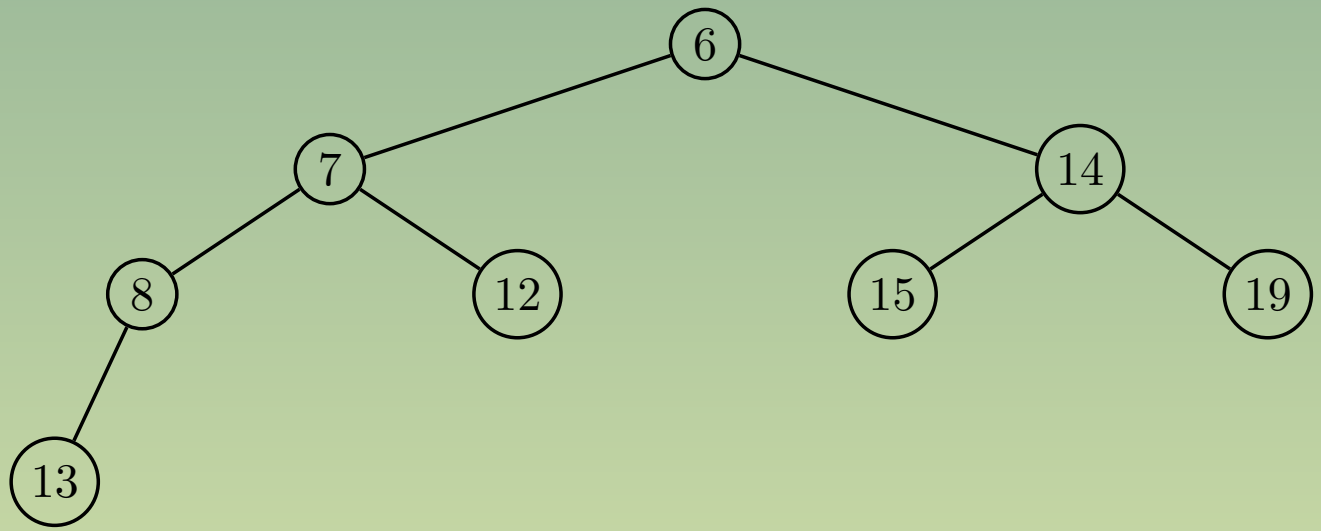


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5$

Kako je element 14 manje dijete elementa 19 (element 15 je njegovo veće dijete),

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

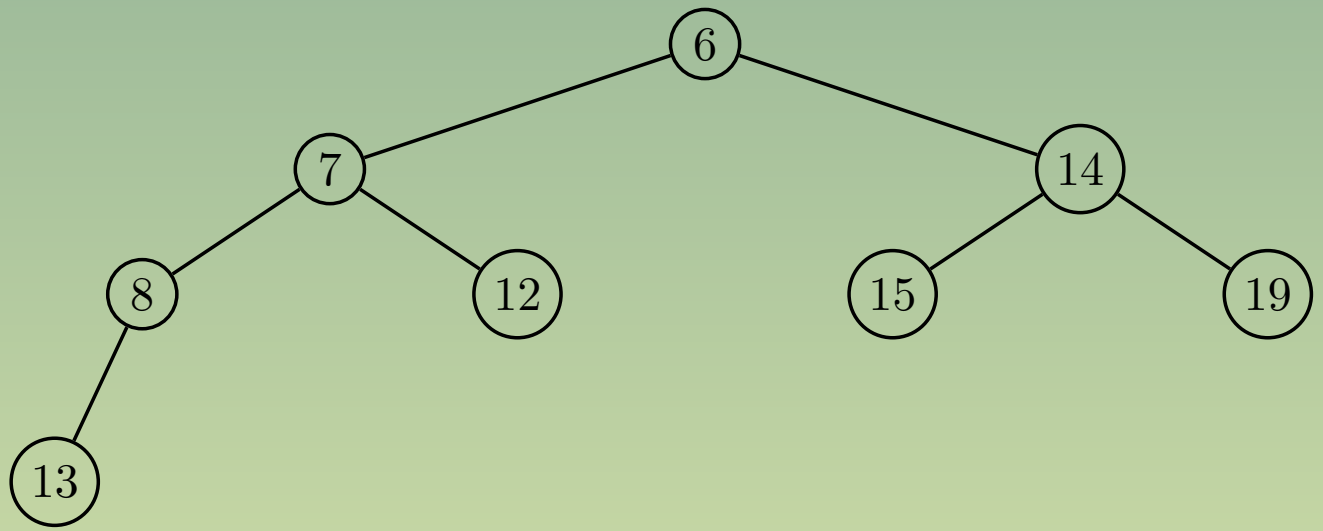


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5$

Kako je element 14 manje dijete elementa 19 (element 15 je njegovo veće dijete), zamijenimo im mjesta.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

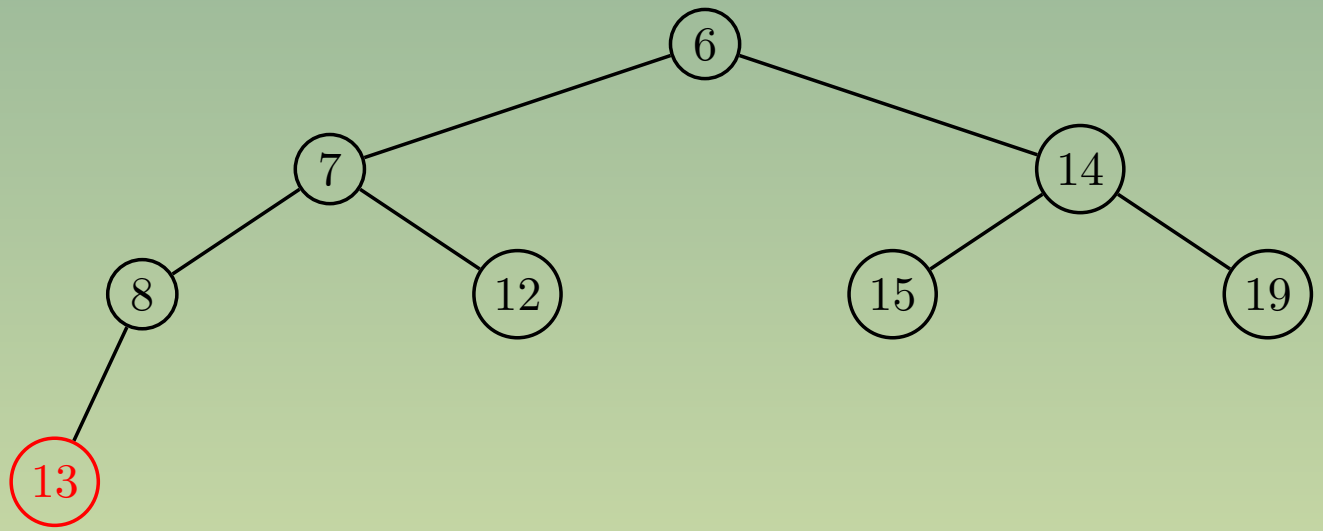


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6$

Sada smo opet dobili rastuću hrpu pa ispišemo njezin korijen.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

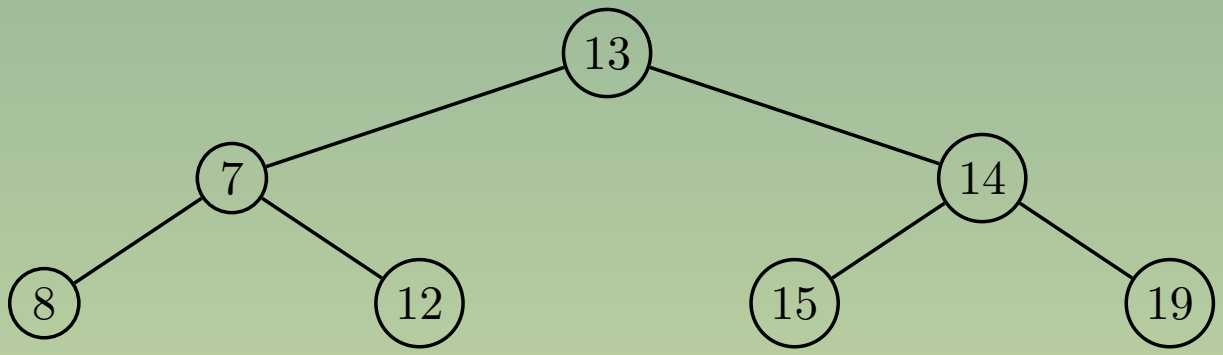


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6$

Zadnji element u hrpi, element 13,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

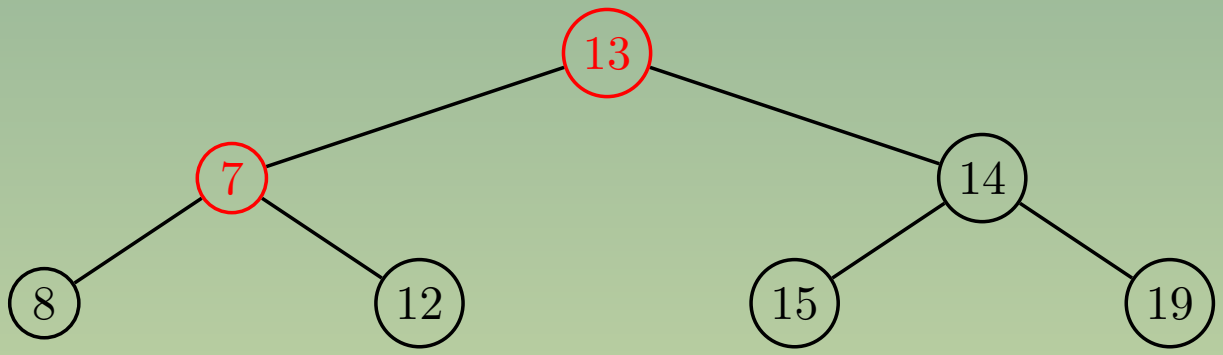


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6$

Zadnji element u hrpi, element 13, stavimo u korijen.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

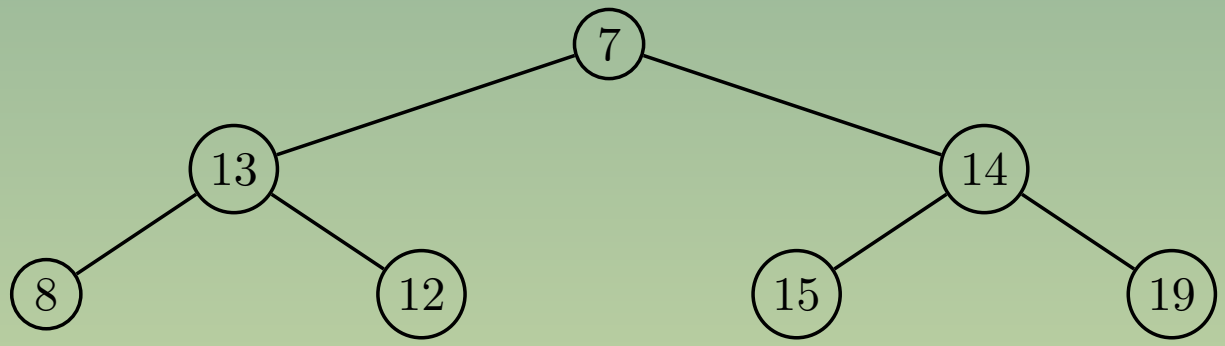


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6$

Kako je element 7 manje dijete elementa 13 (element 14 je njegovo veće dijete),

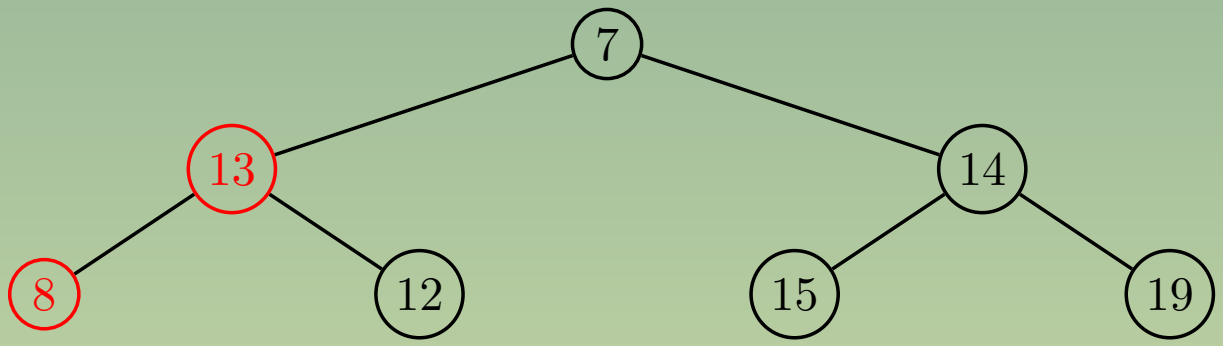
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6$

Kako je element 7 manje dijete elementa 13 (element 14 je njegovo veće dijete), zamijenimo im mjesta.

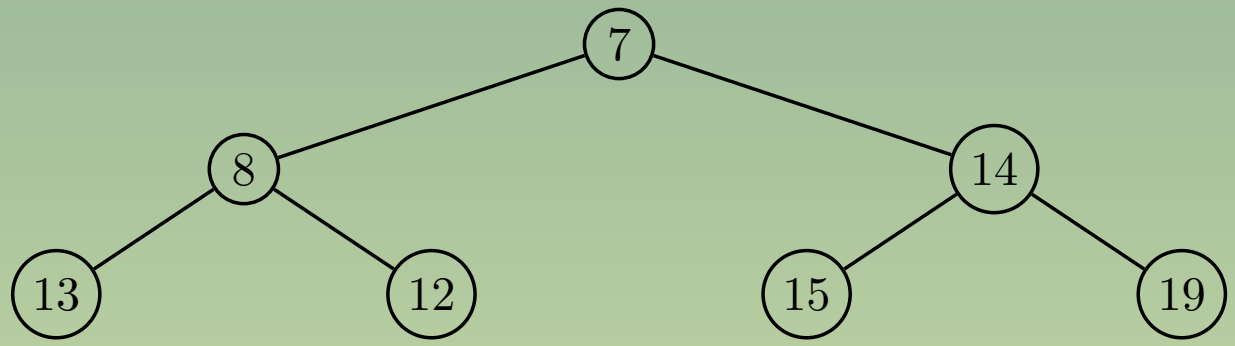


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6$

Kako je element 8 manje dijete elementa 13 (element 12 je njegovo veće dijete),

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

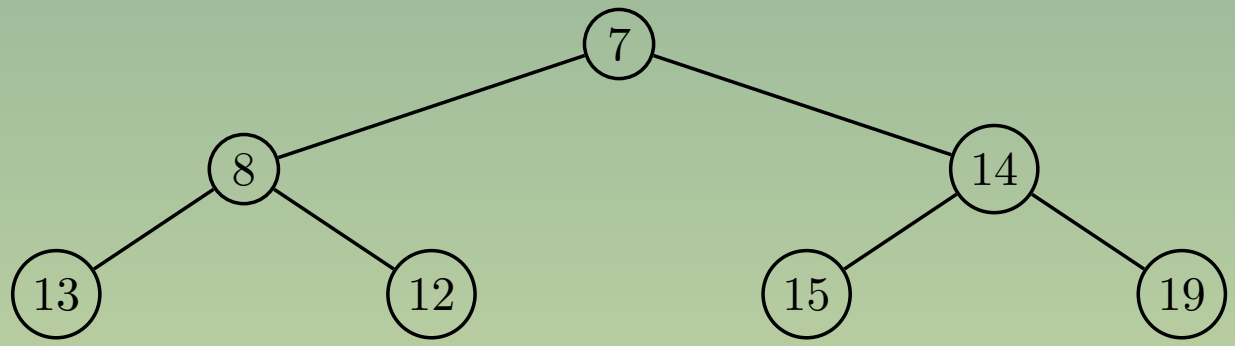


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6$

Kako je element 8 manje dijete elementa 13 (element 12 je njegovo veće dijete), zamijenimo im mjesta.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

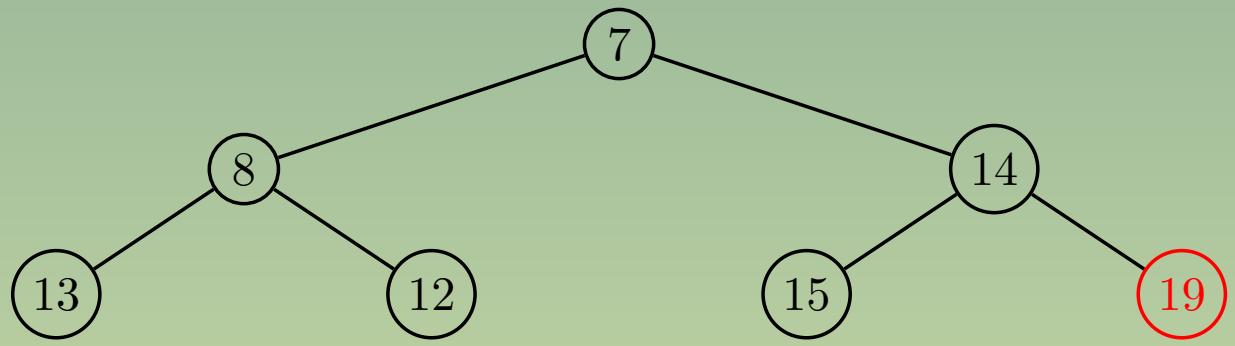


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7$

Sada smo opet dobili rastuću hrpu pa ispišemo njezin korijen.

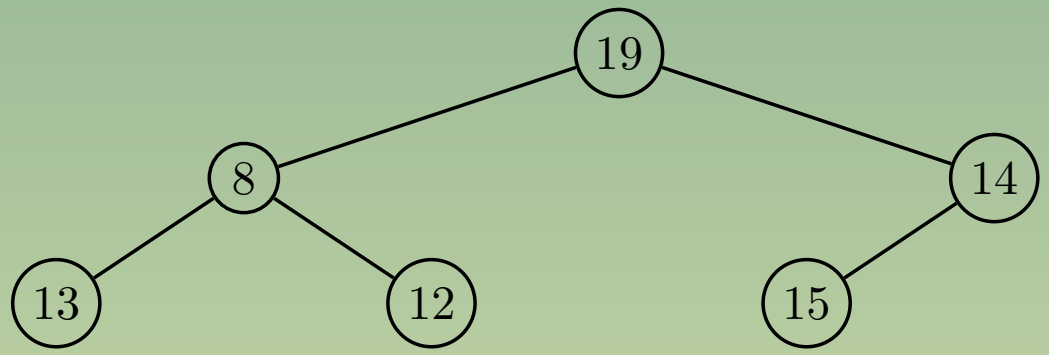
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7$

Zadnji element u hrpi, element 19,

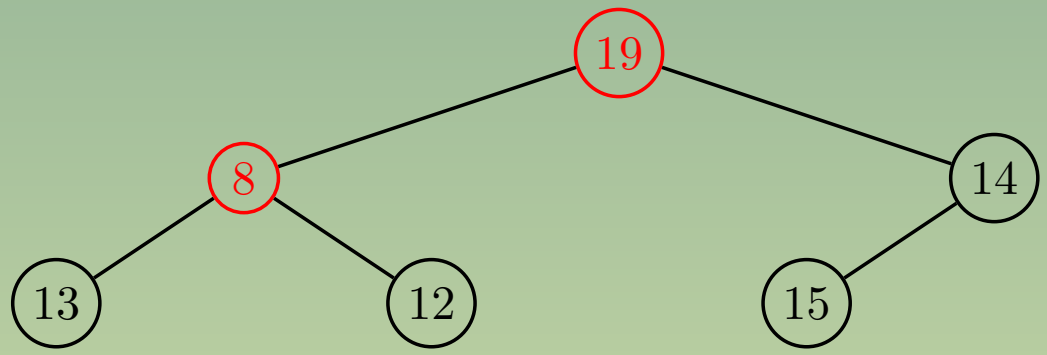


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7$

Zadnji element u hrpi, element 19, stavimo u korijen.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

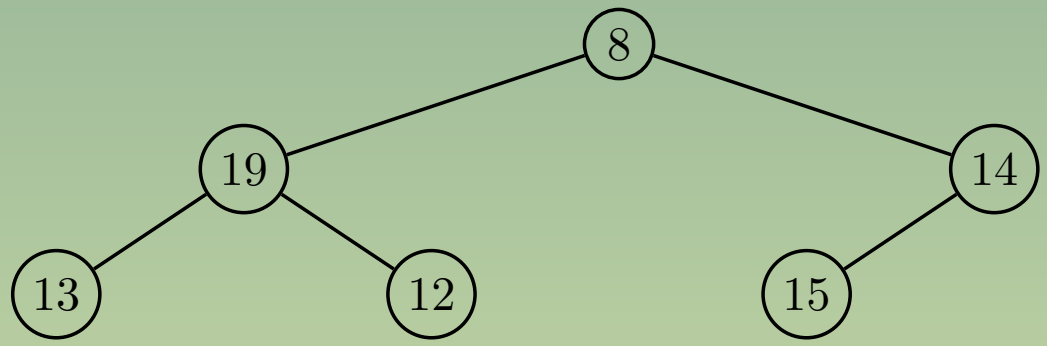


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7$

Kako je element 8 manje dijete elementa 19 (element 14 je njegovo veće dijete),

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

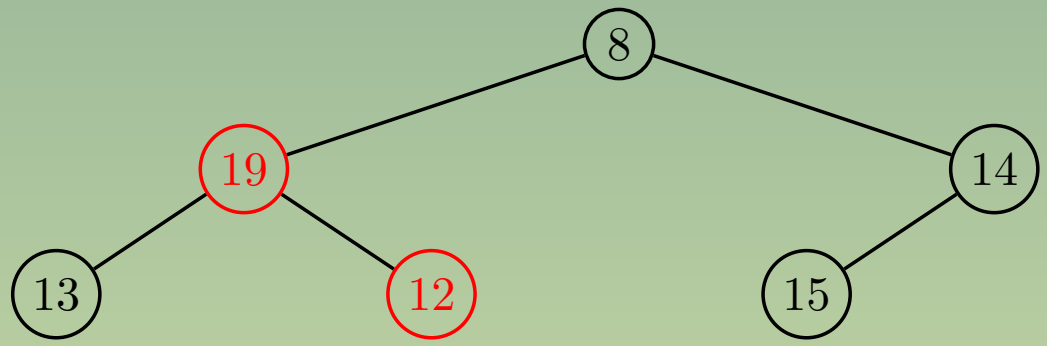


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7$

Kako je element 8 manje dijete elementa 19 (element 14 je njegovo veće dijete), zamijenimo im mjesta.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

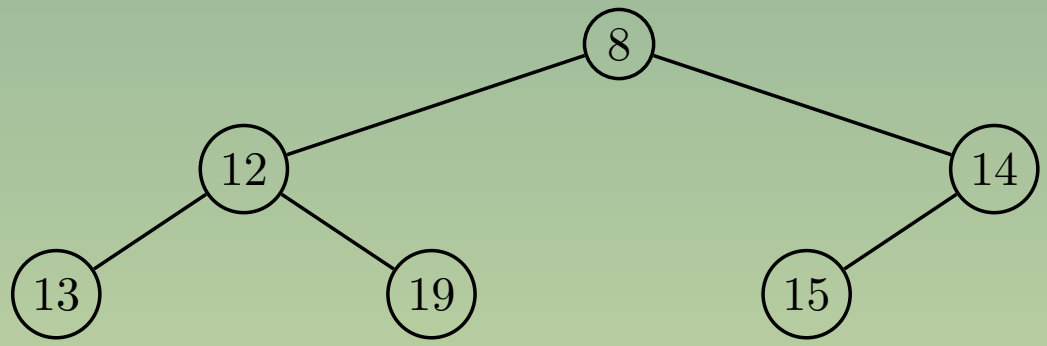


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7$

Kako je element 12 manje dijete elementa 19 (element 13 je njegovo veće dijete),

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

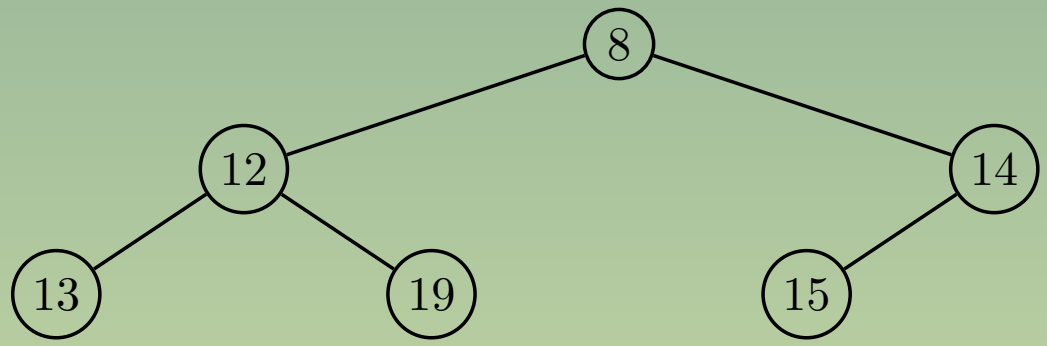


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7$

Kako je element 12 manje dijete elementa 19 (element 13 je njegovo veće dijete), zamijenimo im mjesta.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

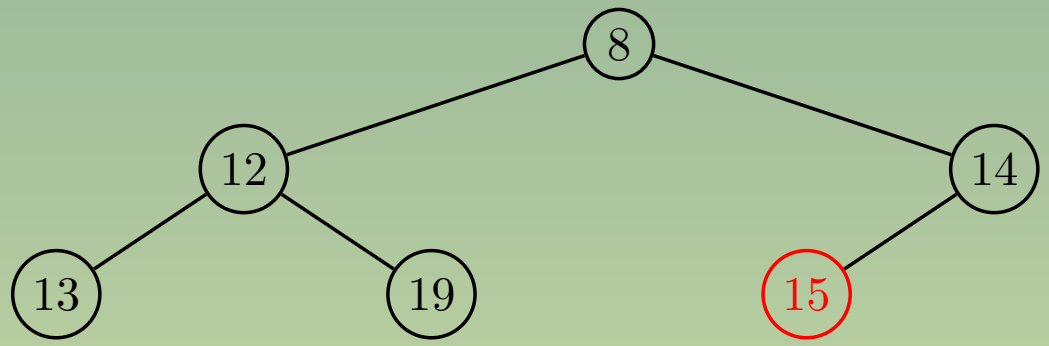


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

Sada smo opet dobili rastuću hrpu pa ispišemo njezin korijen.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

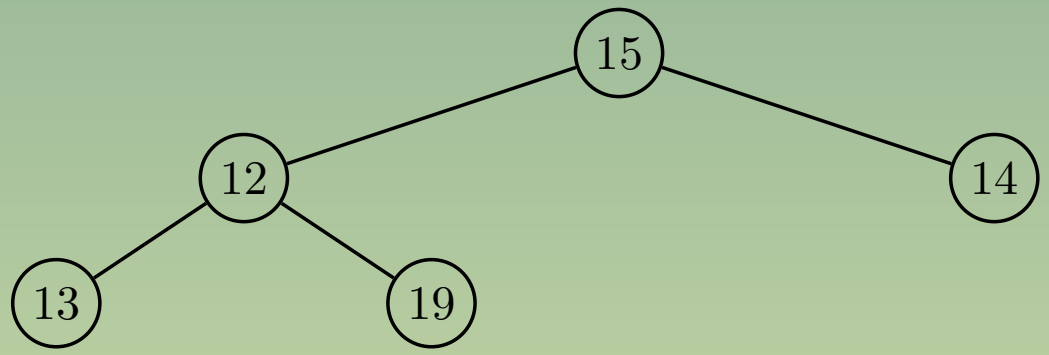


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

Zadnji element u hrpi, element 15,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

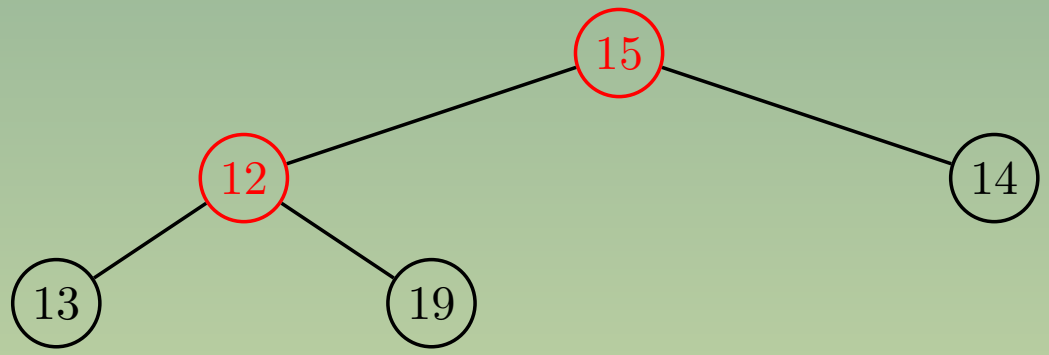


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

Zadnji element u hrpi, element 15, stavimo u korijen.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

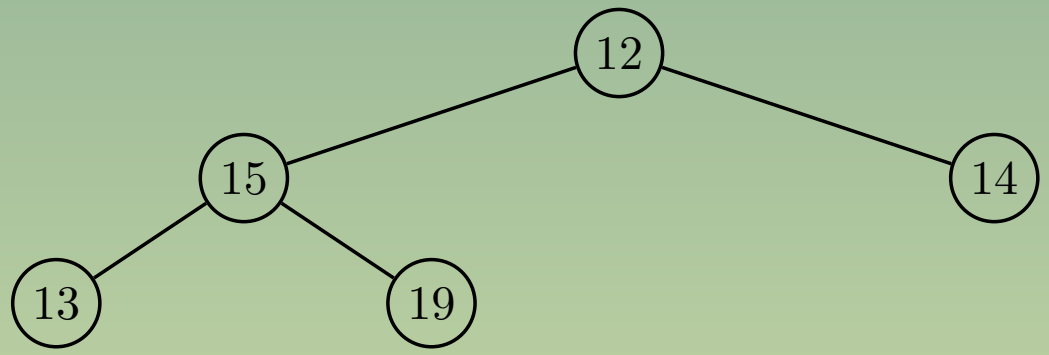


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

Kako je element 12 manje dijete elementa 15 (element 14 je njegovo veće dijete),

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

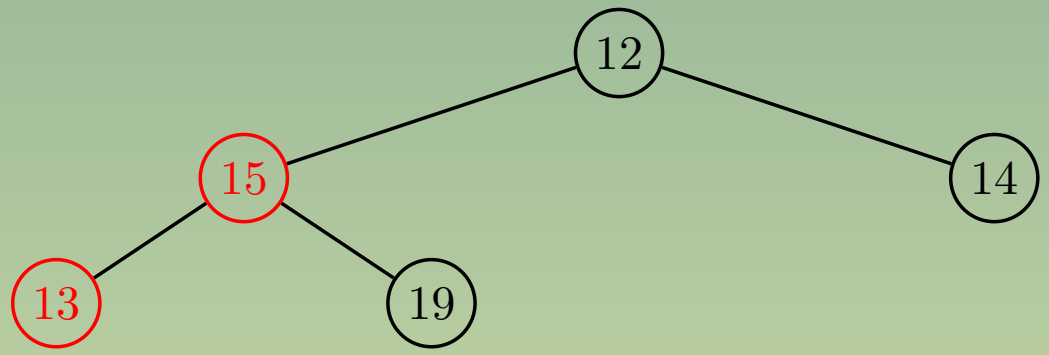


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

Kako je element 12 manje dijete elementa 15 (element 14 je njegovo veće dijete), zamijenimo im mjesta.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

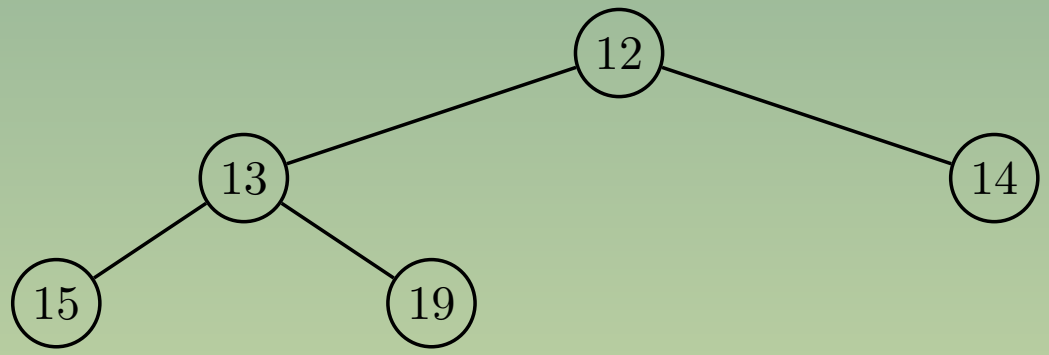


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

Kako je element 13 manje dijete elementa 15 (element 19 je njegovo veće dijete),

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

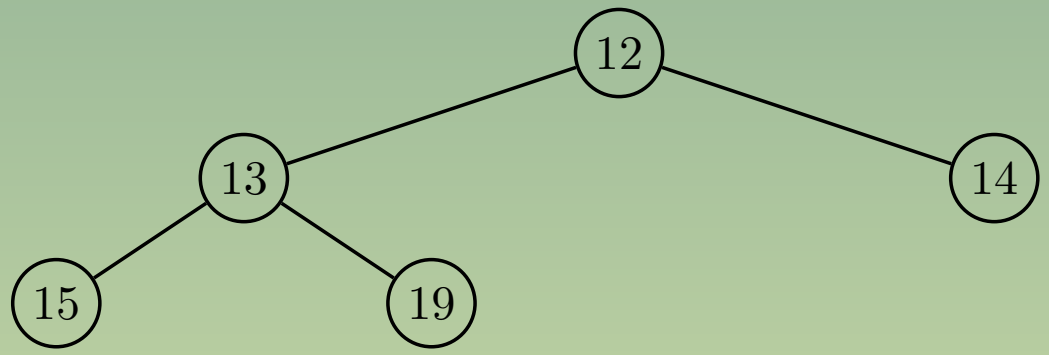


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

Kako je element 13 manje dijete elementa 15 (element 19 je njegovo veće dijete), zamijenimo im mjesta.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

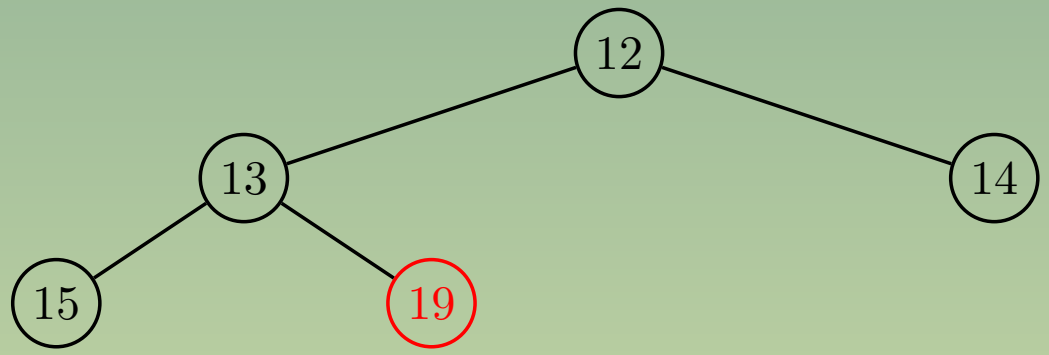


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12$

Sada smo opet dobili rastuću hrpu pa ispišemo njezin korijen.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

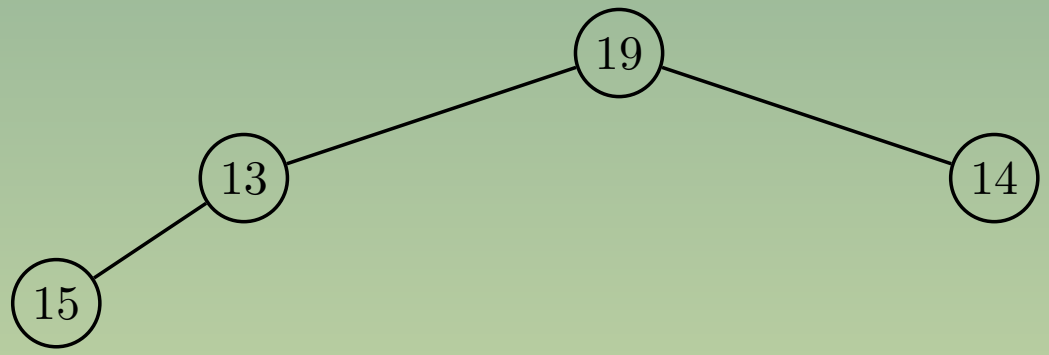


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12$

Zadnji element u hrpi, element 19,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

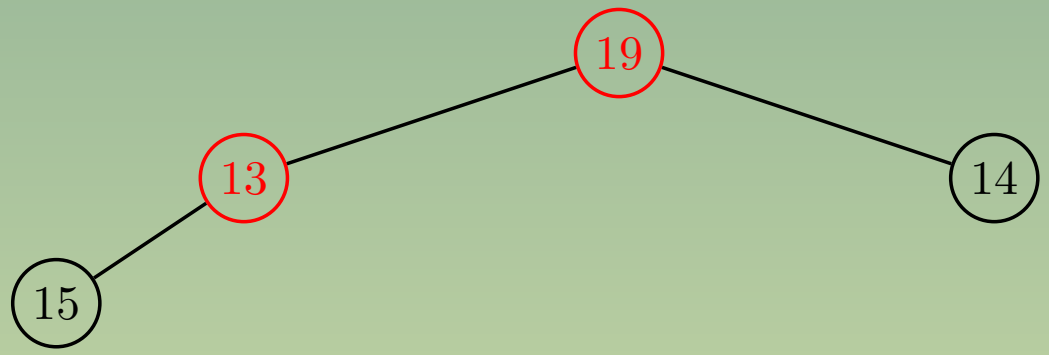


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12$

Zadnji element u hrpi, element 19, stavimo u korijen.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

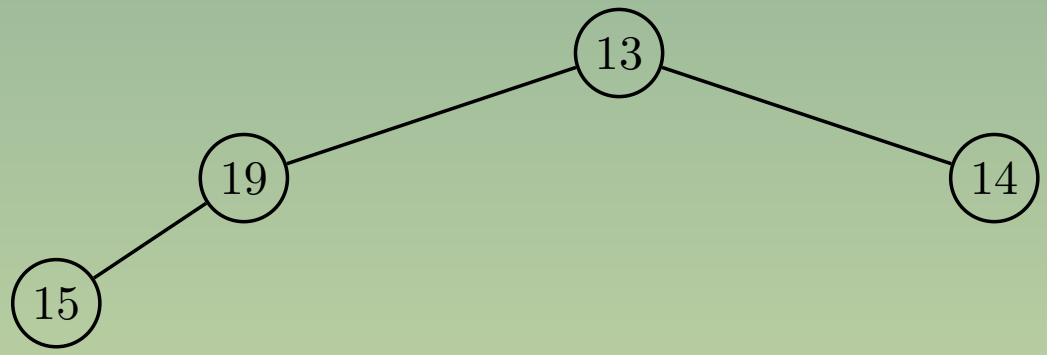


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12$

Kako je element 13 manje dijete elementa 19 (element 14 je njegovo veće dijete),

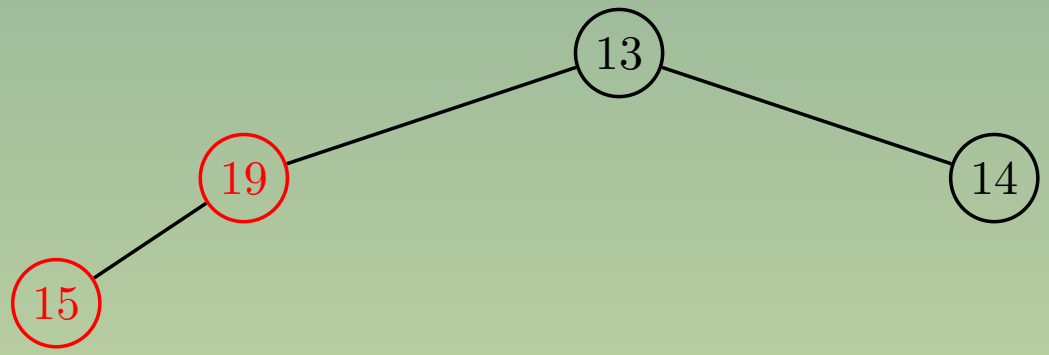
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12$

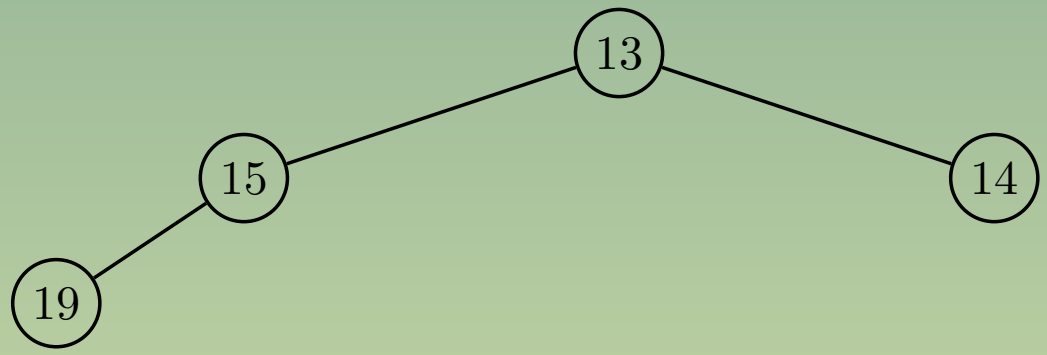
Kako je element 13 manje dijete elementa 19 (element 14 je njegovo veće dijete), zamijenimo im mjesta.



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12$

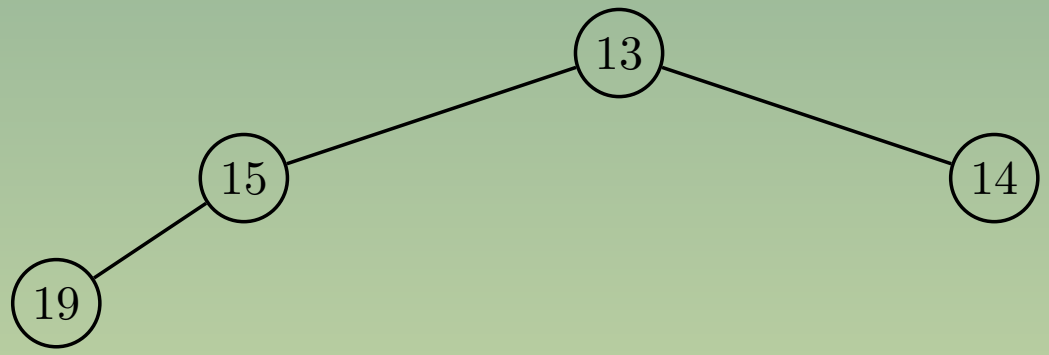
Kako je element 15 jedino dijete elementa 19 i dijete ima manju oznaku od roditelja,



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12$

Kako je element 15 jedino dijete elementa 19 i dijete ima manju oznaku od roditelja, zamijenimo im mjesta.

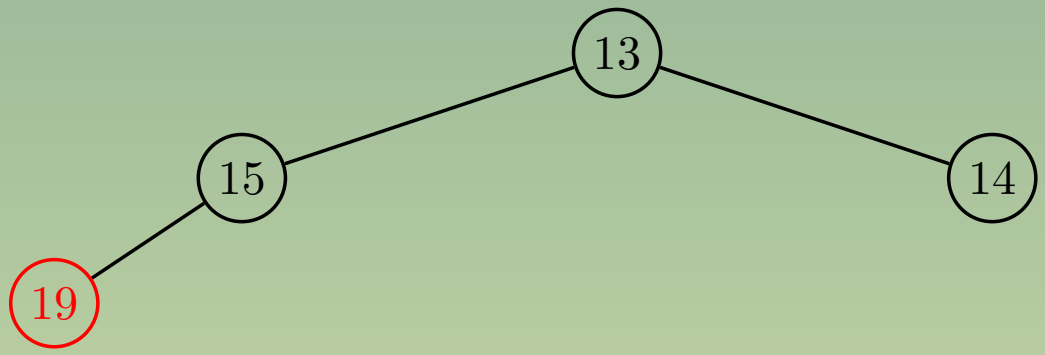


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13$

Sada smo opet dobili rastuću hrpu pa ispišemo njezin korijen.

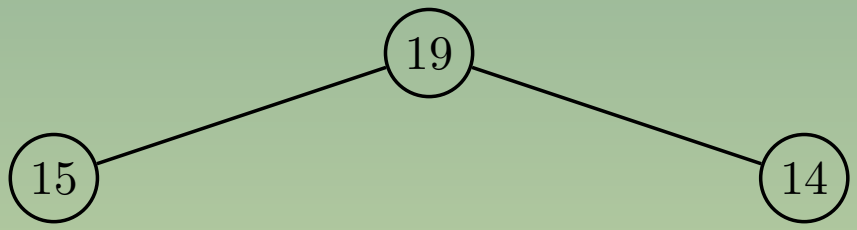
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13$

Zadnji element u hrpi, element 19,

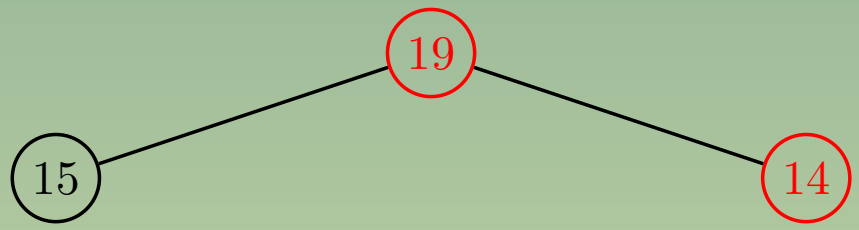


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13$

Zadnji element u hrpi, element 19, stavimo u korijen.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

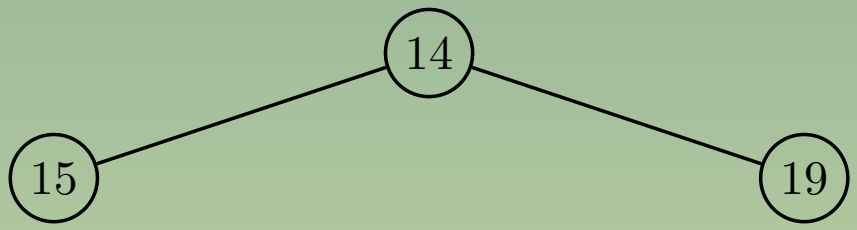


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13$

Kako je element 14 manje dijete elementa 19 (element 15 je njegovo veće dijete),

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

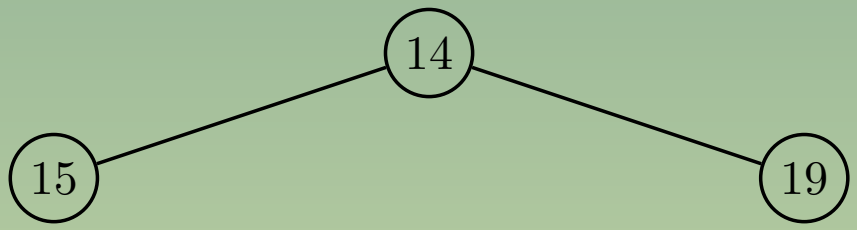


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13$

Kako je element 14 manje dijete elementa 19 (element 15 je njegovo veće dijete), zamijenimo im mjesta.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

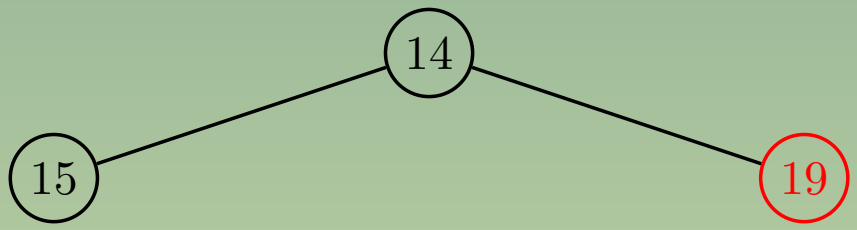


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14$

Sada smo opet dobili rastuću hrpu pa ispišemo njezin korijen.

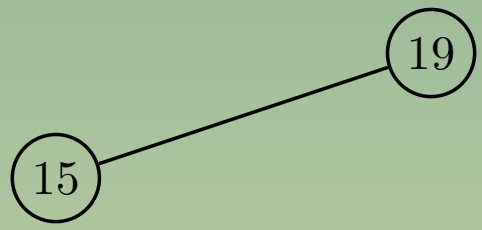
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14$

Zadnji element u hrpi, element 19,

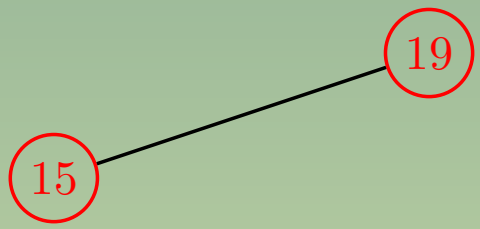


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14$

Zadnji element u hrpi, element 19, stavimo u korijen.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

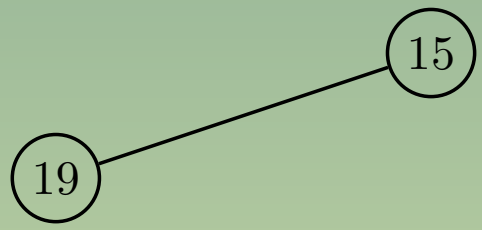


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14$

Kako je element 15 jedino dijete elementa 19 i dijete ima manju oznaku od roditelja,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

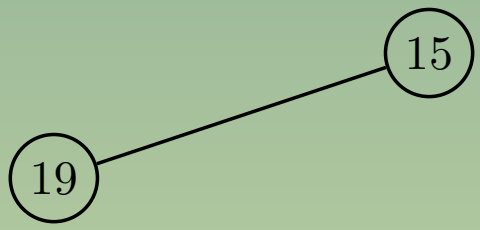


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14$

Kako je element 15 jedino dijete elementa 19 i dijete ima manju oznaku od roditelja, zamijenimo im mjesta.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

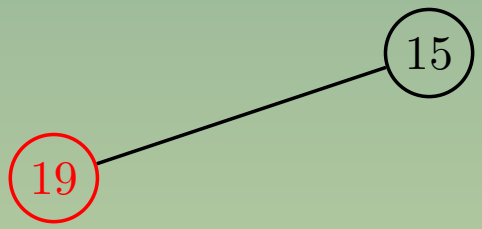


lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15$

Sada smo opet dobili rastuću hrpu pa ispišemo njezin korijen.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15$

Zadnji element u hrpi, element 19,

lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15$

Zadnji element u hrpi, element 19, stavimo u korijen.

lista: $7, 3, 15, 4, 12, 14, 6, 8, 2, 5, 13, 19$

sortirana lista: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 19$

Kako element 19 nema više djece, ispišemo ga i gotovo je.

◂ objasni postupak

Zadatak 8.6.

Implementirajte algoritam koji će za zadanu listu brojeva konstruirati njezino stablo sortiranja i omogućite korisniku da vidi grafički prikaz tog stabla sortiranja.

Zadatak 8.7.

Implementirajte algoritam koji će zadanu listu brojeva sortirati pomoću stabla sortiranja, uzlazno ili silazno, ovisno o želji korisnika.

Zadatak 8.8.

Implementirajte algoritam koji će za zadanu listu brojeva konstruirati njezinu padajuću i rastuću hrpu i omogućite korisniku da vidi grafičke prikaze tih hrpa.

Zadatak 8.9.

Implementirajte algoritam koji će zadanu listu brojeva sortirati pomoću hrpe, uzlazno ili silazno, ovisno o želji korisnika.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Zadatak 8.10.

Implementirajte algoritam koji će zadanu listu prirodnih brojeva sortirati s obzirom na parcijalni uređaj "dijeli" | pomoću stabla sortiranja. Omogućite korisniku i grafički prikaz stabla sortiranja.

Zadatak 8.11.

Implementirajte algoritam koji će zadanu listu konačnih skupova sortirati s obzirom na parcijalni uređaj "biti podskup" $\subseteq$ pomoću stabla sortiranja. Omogućite korisniku i grafički prikaz stabla sortiranja.

Zadatak 8.12.

Implementirajte algoritam koji će zadanu listu elemenata iz nekog skupa sortirati s obzirom na zadani linearni ili parcijalni uređaj (kojeg zadaje korisnik) pomoću stabla sortiranja. Omogućite korisniku i grafički prikaz stabla sortiranja.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Razapinjuća stabla

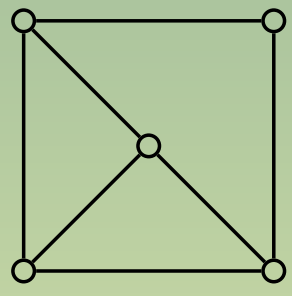
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Razapinjuće stablo

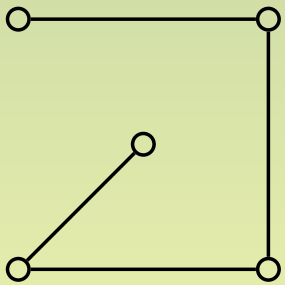
Razapinjuće stablo grafa G je razapinjući podgraf od G koji je stablo.

Razapinjuće stablo grafa G sadrži sve vrhove grafa G i neke njegove bridove. Jasno, da bi graf imao razapinjuće stablo, mora biti povezan. Općenito, povezani graf ima više različitih razapinjućih stabala među kojima može biti i izomorfnih. No, i na ta izomorfna stabla gledamo kao na različita razapinjuća stabla grafa G u smislu da ne sadrže sve iste bridove grafa G.

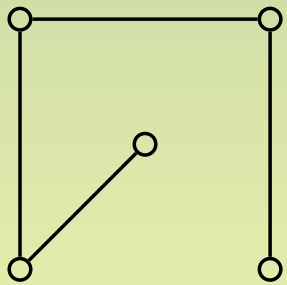
Na primjer, neka razapinjuća stabla grafa G



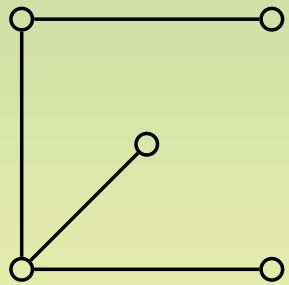
su stabla T_1, T_2 i T_3



T_1



T_2



T_3

T_1 i T_2 su izomorfna stabla, ali su drukčija razapinjuća stabla od G jer koriste različite bridove od G.

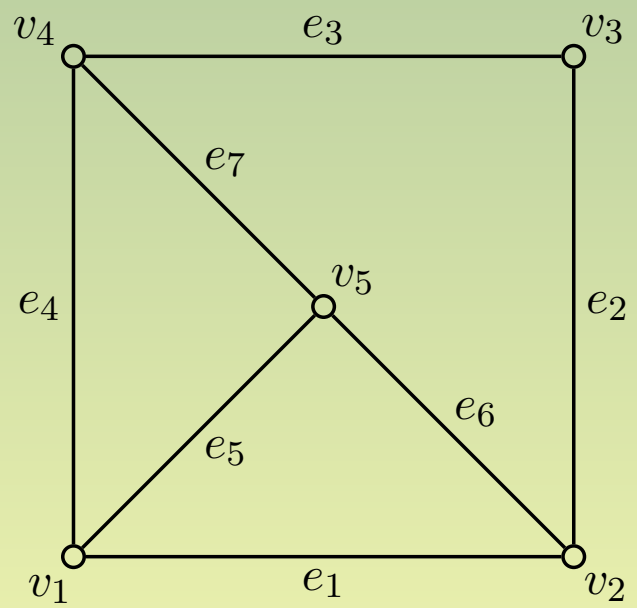
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Željeli bismo doći do neke formule pomoću koje bismo za dani povezani graf izračunali koliko on ima ukupno različitih razapinjućih stabala. Pritom, izomorfna stabla smatramo različitim razapinjućim stablima povezanog grafa G ukoliko ne sadrže sve iste bridove grafa G. Naime, problem brojanja međusobno neizomorfnih razapinjućih stabala danog povezanog grafa je težak problem. Na svu sreću, problem brojanja svih razapinjućih stabala povezanog grafa nije toliko težak problem. Najprije ćemo izvesti jednu rekurzivnu formulu za računanje broja razapinjućih stabala povezanog grafa. Za tu formulu nam je potreban pojam kontrakcije brida.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Kontrakcija brida

Neka je $G = (V, E)$ graf. Za brid $e \in E$ kažemo da je **kontraktiran** ako je odstranjen, a njegovi vrhovi su identificirani. Tako dobiveni graf označavamo s $G \cdot e$.

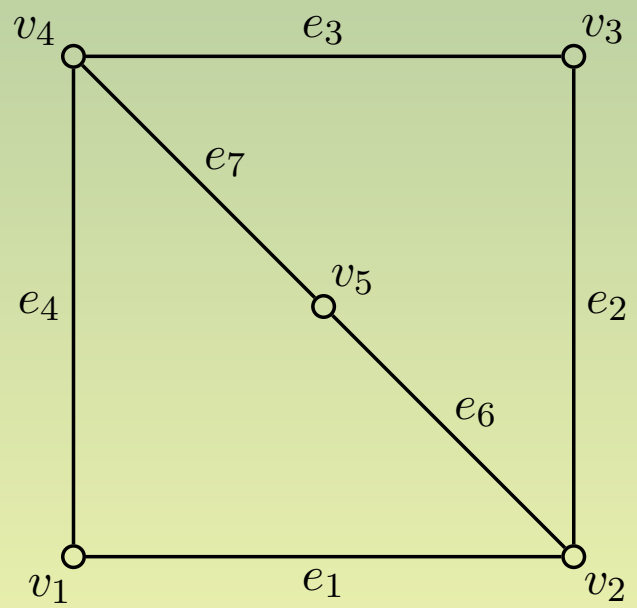


Zadan je graf G. Želimo li dobiti graf $G \cdot e_5$,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Kontrakcija brida

Neka je $G = (V, E)$ graf. Za brid $e \in E$ kažemo da je **kontraktiran** ako je odstranjen, a njegovi vrhovi su identificirani. Tako dobiveni graf označavamo s $G \cdot e$.

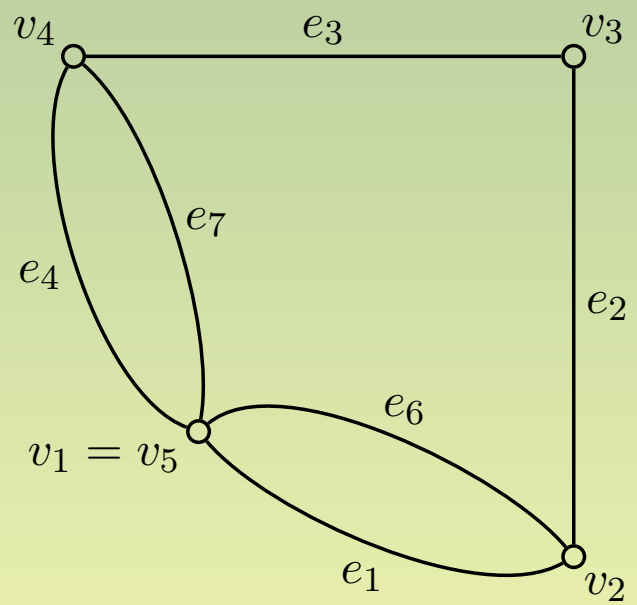


Zadan je graf G. Želimo li dobiti graf $G \cdot e_5$, najprije odstranimo brid e_5,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Kontrakcija brida

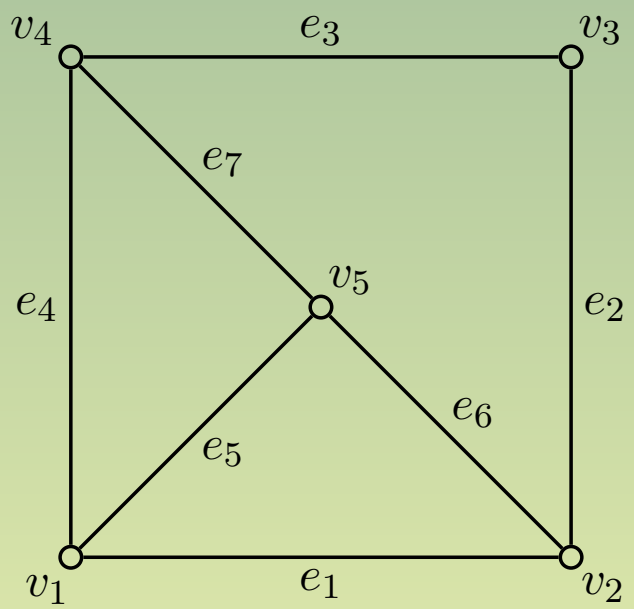
Neka je $G = (V, E)$ graf. Za brid $e \in E$ kažemo da je **kontraktiran** ako je odstranjen, a njegovi vrhovi su identificirani. Tako dobiveni graf označavamo s $G \cdot e$.



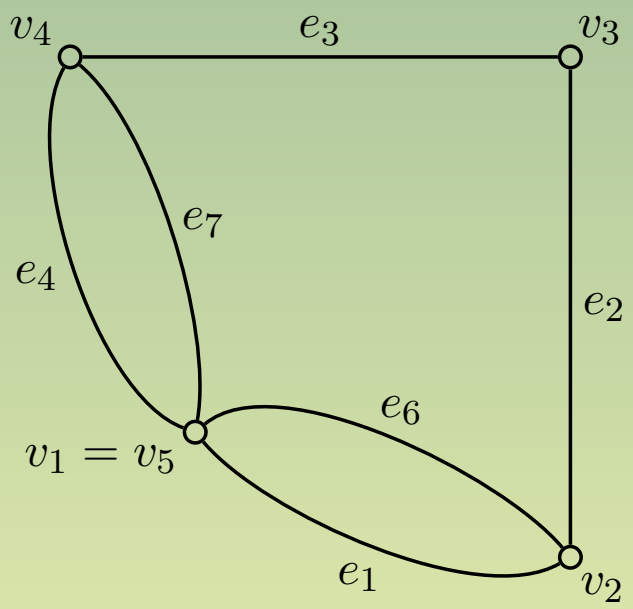
Zadan je graf G. Želimo li dobiti graf $G \cdot e_5$, najprije odstranimo brid e_5, a zatim njegove krajeve identificiramo.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

graf G



graf $G \cdot e_5$



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Napomena.

Ako je $G = (V, E)$ graf i $e \in E$ **karika** (brid koji nije petlja), tada vrijedi

$$\nu(G \cdot e) = \nu(G) - 1, \quad \varepsilon(G \cdot e) = \varepsilon(G) - 1, \quad \omega(G \cdot e) = \omega(G).$$

Dakle, ako je G stablo, tada je i $G \cdot e$ stablo.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Teorem 8.5 (Rekurzija za broj razapinjućih stabala).

Neka je $\tau(G)$ broj razapinjućih stabala grafa G. Ako je $e \in E(G)$ karika, tada vrijedi

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e).$$

Dokaz.

Ako je G nepovezan graf, tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da je G povezan graf. Neka je T razapinjuće stablo povezanog grafa G. Razlikujemo dva slučaja.

1. $e \notin E(T)$

U tom slučaju je T razapinjuće stablo grafa $G - e$. Međutim, vrijedi i obrnuto. Svako razapinjuće stablo grafa $G - e$ je također razapinjuće stablo grafa G. Dakle, skup svih razapinjućih

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

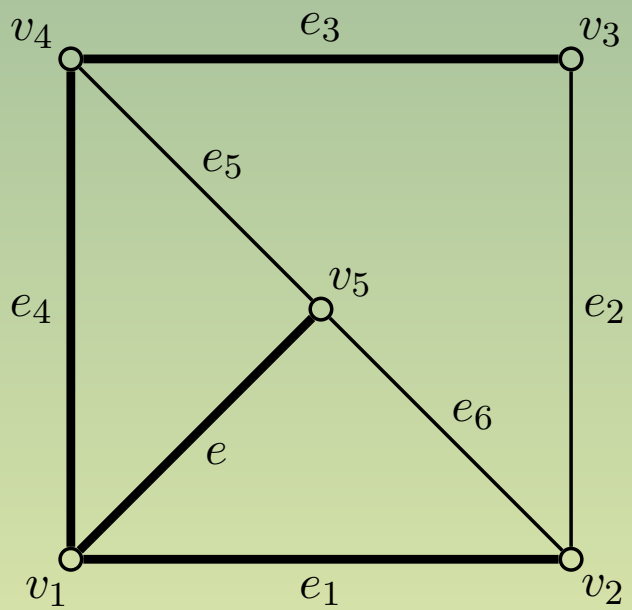
stabala grafa $G - e$ je u bijekciji sa skupom svih razapinjućih stabala grafa G koja ne sadrže kariku e. Iz toga zaključujemo da je $\tau(G - e)$ jednak broju svih razapinjućih stabala grafa G koja ne sadrže kariku e.

ii. $e \in E(T)$

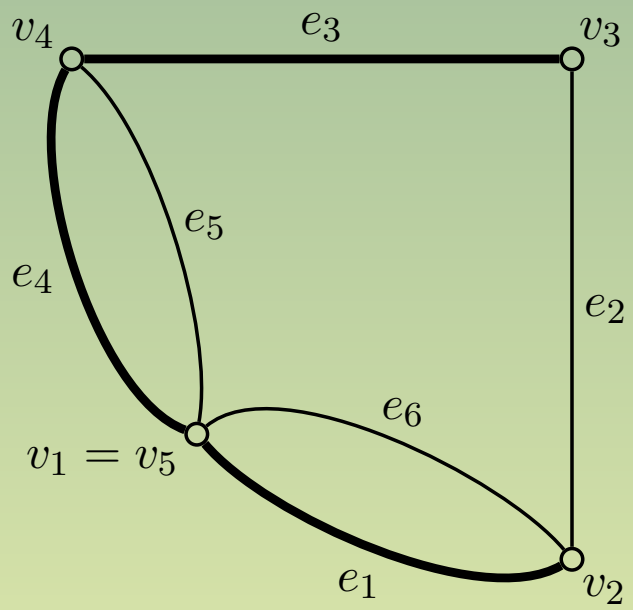
U tom slučaju je $T \cdot e$ razapinjuće stablo grafa $G \cdot e$. Međutim, vrijedi i obrnuto. Svakom razapinjućem stablu T grafa $G \cdot e$ odgovara jedno razapinjuće stablo grafa G koje se dobiva tako da stablu T "dodamo" kariku e natrag (pogledajte sliku na sljedećem slajdu). Zaključujemo da je $\tau(G \cdot e)$ jednak ukupnom broju razapinjućih stabala grafa G koja sadrže kariku e.

Prema principu sume slijedi da je $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$ jer svako razapinjuće stablo grafa G, ili sadrži ili pak ne sadrži odabranu kariku e. ♡

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



razapinjuće stablo od G koje sadrži brid e



razapinjuće stablo od $G \cdot e$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

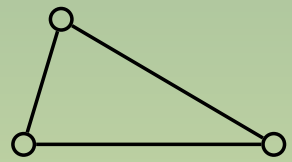
Sada ćemo na nekoliko primjera pokazati kako se koristi izvedena rekurzija za računanje ukupnog broja svih razapinjućih stabala danog grafa. Jasno je da ako je T stablo, tada je $\tau(T) = 1$. Obrnuti smjer vrijedi jedino ako u grafu nema petlji. Isto tako je jasno da petlje u grafu ne utječu na broj razapinjućih stabala jer stablo ne smije imati petlju pa tokom računanja petlje možemo zanemariti. Ideja je da pogodno biramo bridove e i primijenjujemo rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$ tako dugo dok ne dođemo do stabala ili do grafova za koje napamet možemo odrediti ukupni broj njihovih razapinjućih stabala.

Pritom, radi jednostavnosti, tokom računanja, umjesto $\tau(G)$ ćemo samo pisati G, tj. samo ćemo nacrtati graf G, a na tu sliku gledamo kao na broj koji nam broji sva razapinjuća stabla nacrtanog grafa.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.32.

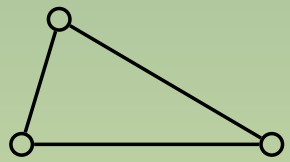
Pomoću rekurzije odredite ukupni broj razapinjućih stabala grafa



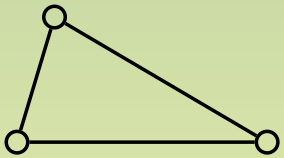
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.32.

Pomoću rekurzije odredite ukupni broj razapinjućih stabala grafa



Rješenje.



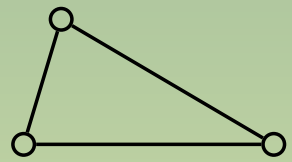
$=$

Odaberemo jedan brid

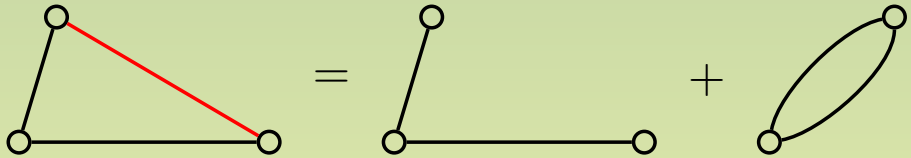
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.32.

Pomoću rekurzije odredite ukupni broj razapinjućih stabala grafa



Rješenje.



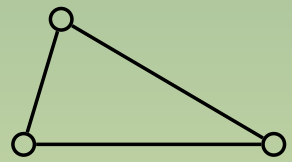
Odaberemo jedan brid i primijenimo rekurziju

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e).$$

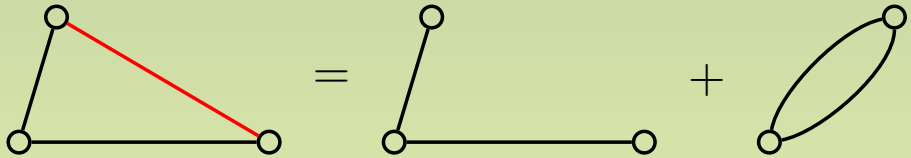
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.32.

Pomoću rekurzije odredite ukupni broj razapinjućih stabala grafa



Rješenje.

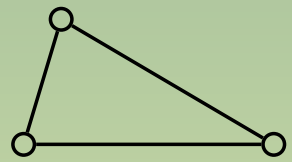


Prvi dobiveni graf je stablo pa ima samo jedno razapinjuće stablo, a drugi dobiveni graf ima očito dva razapinjuća stabla.

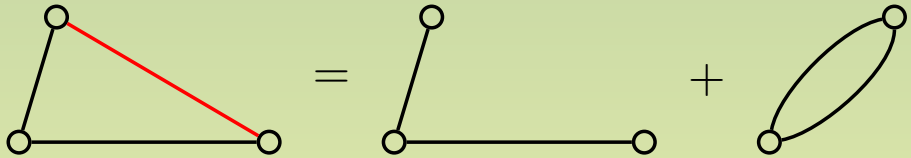
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.32.

Pomoću rekurzije odredite ukupni broj razapinjućih stabala grafa



Rješenje.



Stoga je $\tau = 1 + 2 = 3$, tj. početni graf ima tri razapinjuća stabla.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.33.

Neka je C_n ciklus duljine n. Dokažite da je $\tau(C_n) = n$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.33.

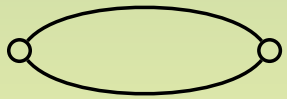
Neka je C_n ciklus duljine n. Dokažite da je $\tau(C_n) = n$.

Rješenje.

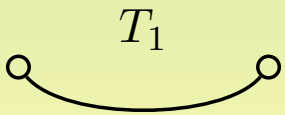
Dokaz provodimo indukcijom po n. Za $n = 1$ imamo graf

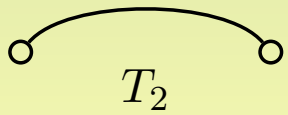


Graf C_1 ima samo jedno razapinjuće stablo i to prazno stablo. Stoga je $\tau(C_1) = 1$. Za $n = 2$ imamo graf



čija razapinjuća stabla su





pa je $\tau(C_2) = 2$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Pretpostavimo da je $\tau(C_n) = n$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Promatrajmo ciklus C_{n+1} duljine $n+1$ i odaberimo jedan njegov brid e. Tada je

$$\tau(C_{n+1}) = \tau(C_{n+1} - e) + \tau(C_{n+1} \cdot e).$$

Međutim, kako je C_{n+1} ciklus duljine $n+1$, tada je $C_{n+1} - e$ stablo, a $C_{n+1} \cdot e$ je ciklus duljine n. Zato je $\tau(C_{n+1} - e) = 1$, a zbog pretpostavke indukcije je $\tau(C_{n+1} \cdot e) = n$. Stoga je zaista $\tau(C_{n+1}) = n + 1$.

Prema principu matematičke indukcije slijedi tvrdnja.

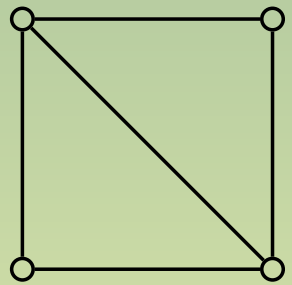
Za rješavanje zadataka

- Ako je G stablo, tada je $\tau(G) = 1$.
- Ako je G nepovezan graf, tada je $\tau(G) = 0$.
- Ako je G ciklus duljine n, tada je $\tau(G) = n$.
- Izomorfni grafovi imaju jednak broj razapinjućih stabala.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.34.

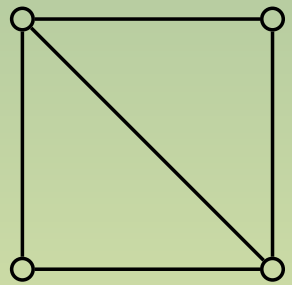
Pomoću rekurzije odredite broj razapinjućih stabala grafa



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.34.

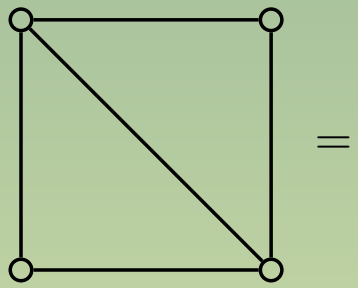
Pomoću rekurzije odredite broj razapinjućih stabala grafa



Rješenje.

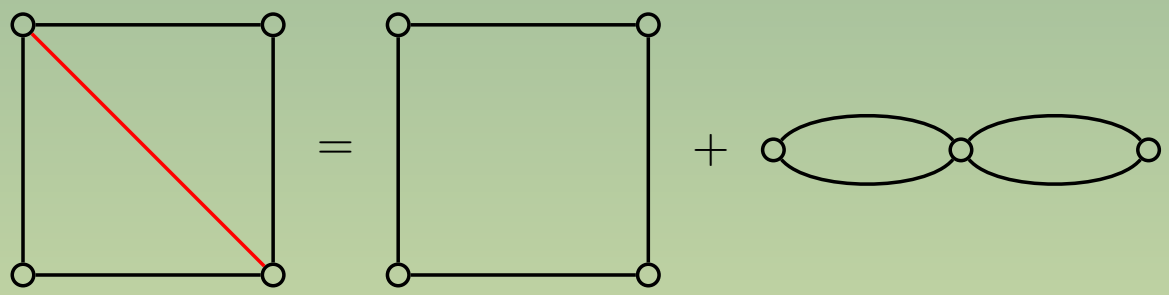
Način rješavanja zadatka nije jedinstven, već ovisi o tome u kojem ćemo trenutku odabrati pojedini brid u grafu. Pokazat ćemo jedan način rješavanja, a za vježbu je dobro probati rješavati zadatak na još neke načine.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



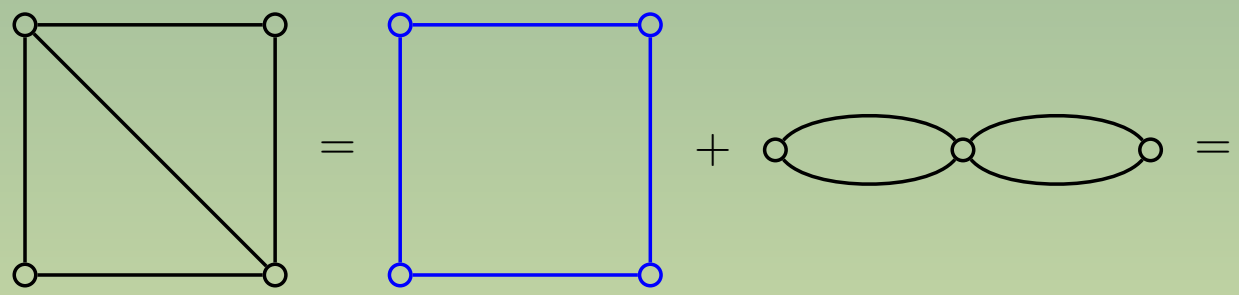
Odaberemo jedan brid,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Odaberemo jedan brid, npr. crveni brid, i primijenimo rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

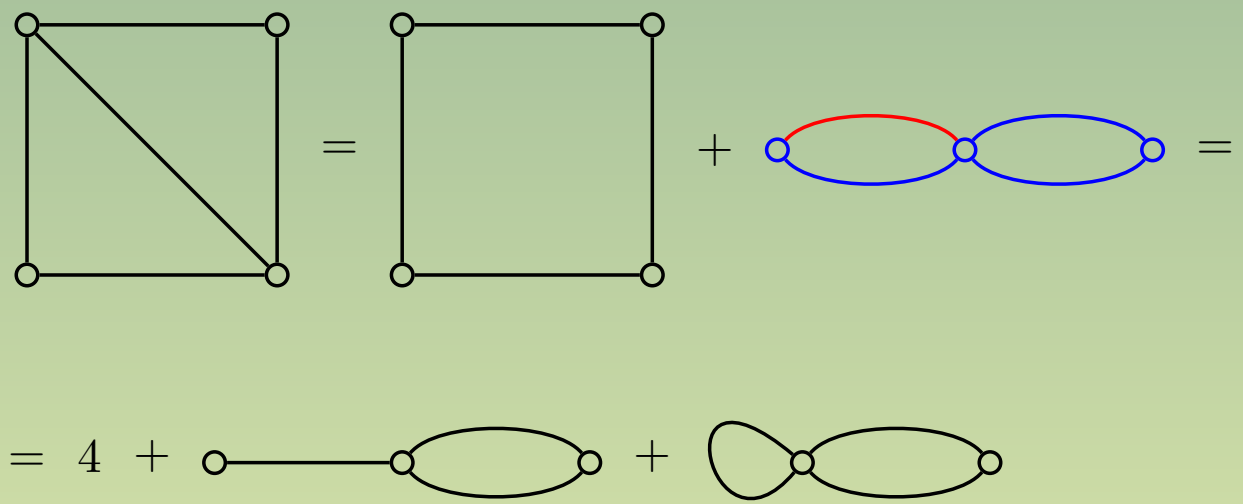
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



$= 4 +$

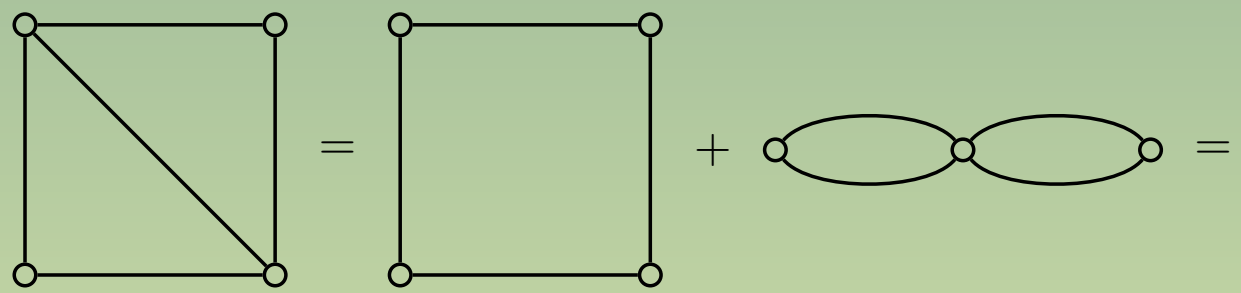
Plavi graf je ciklus duljine 4 i za njega znamo da ima ukupno 4 razapinjuća stabla.

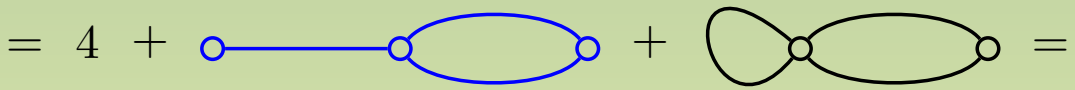
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Na drugom grafu (opet plavo označen), odaberemo jedan brid (crveni brid) i na taj graf primijenimo dalje rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu





$= 4 +$

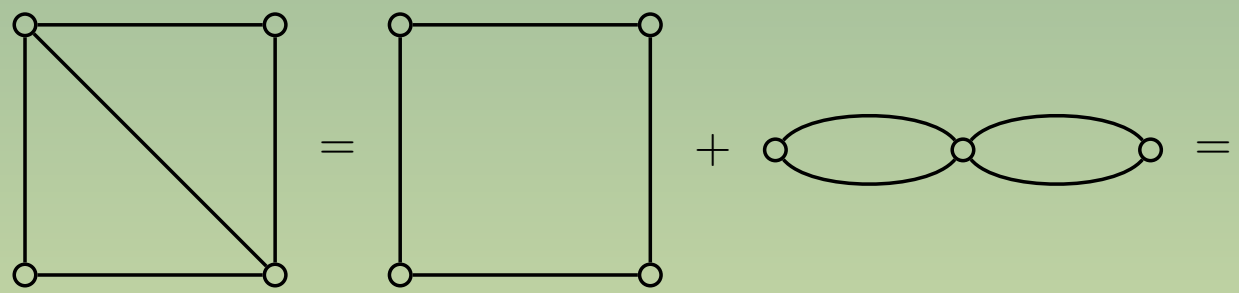
$+$

$=$

$= 4 + 2 +$

Jasno je da prvi graf (plavo označeni) ima ukupno dva razapinjuća stabla.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

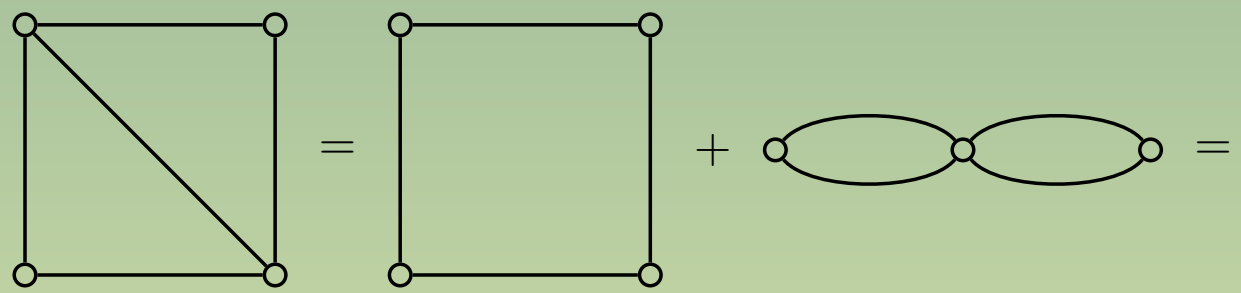




$= 4 + 2 + 2$

Jasno je da drugi graf (plavo označeni) ima isto ukupno dva razapinjuća stabla.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

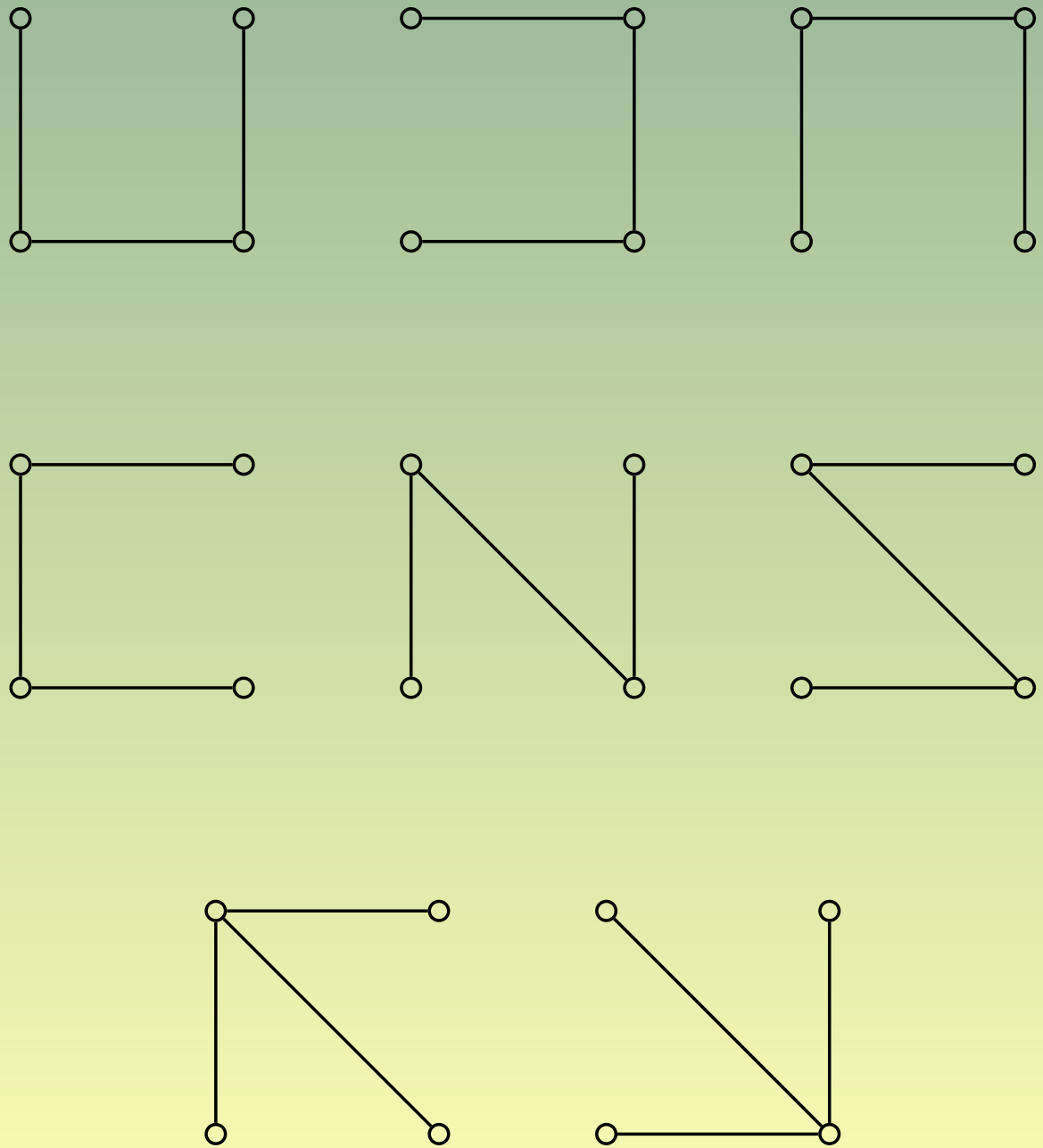




$= 4 + 2 + 2$

Stoga je $\tau = 4 + 2 + 2 = 8$, tj. početni graf ima ukupno 8 razapinjućih stabala koja su nacrtana na sljedećem slajdu.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.35.

Pomoću rekurzije odredite broj razapinjućih stabala grafa $K_{2,3}$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

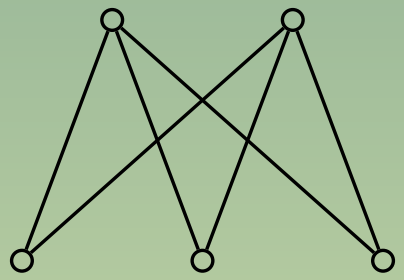
Primjer 8.35.

Pomoću rekurzije odredite broj razapinjućih stabala grafa $K_{2,3}$.

Rješenje.

Način rješavanja zadatka nije jedinstven, već ovisi o tome u kojem ćemo trenutku odabrati pojedini brid u grafu. Pokazat ćemo jedan način rješavanja, a za vježbu je dobro probati rješavati zadatak na još neke načine birajući neke druge bridove.

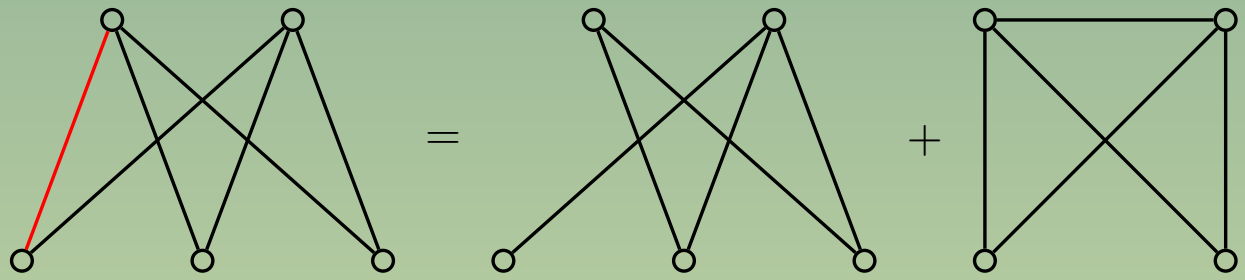
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



$=$

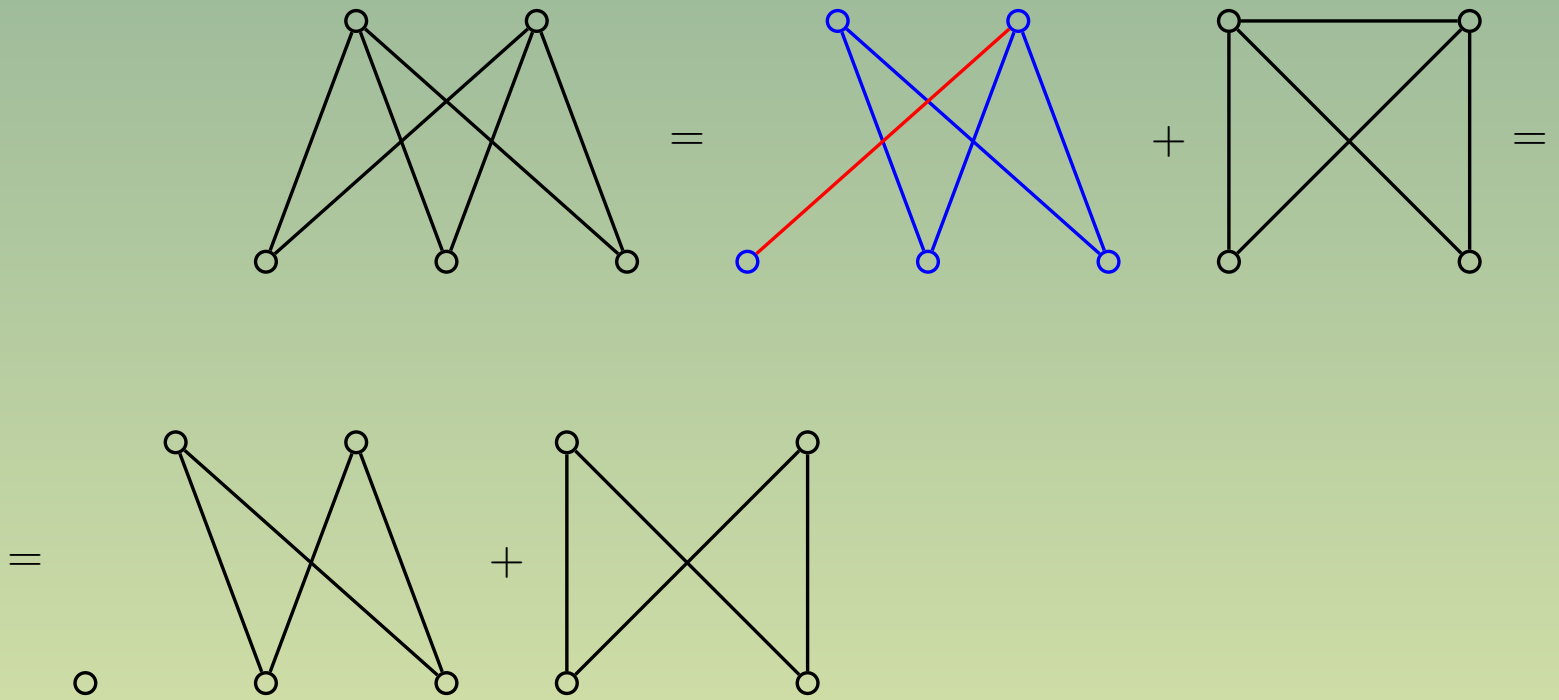
Odaberemo jedan brid,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Odaberemo jedan brid, npr. crveni brid, i primijenimo rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

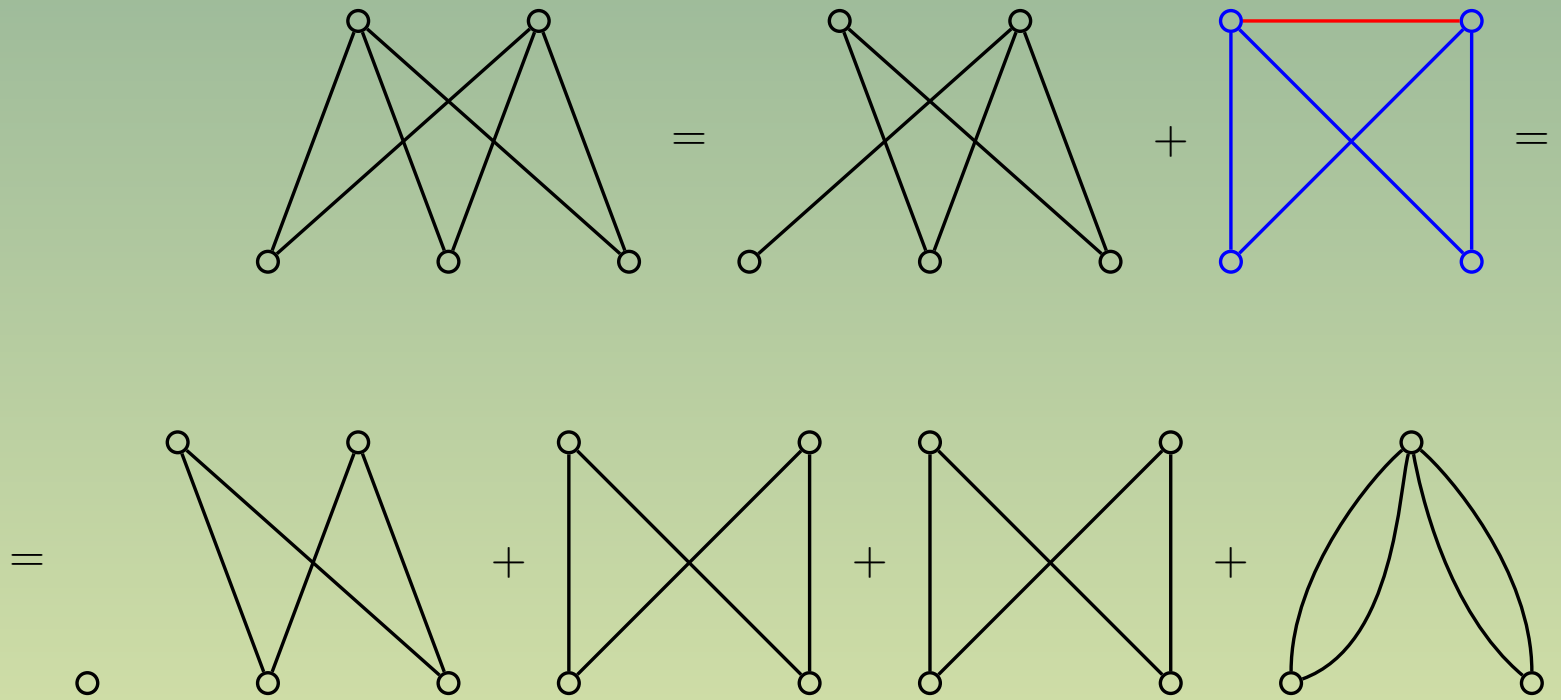


Na plavom grafu odaberemo jedan brid (crveni brid) i primijenimo opet rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

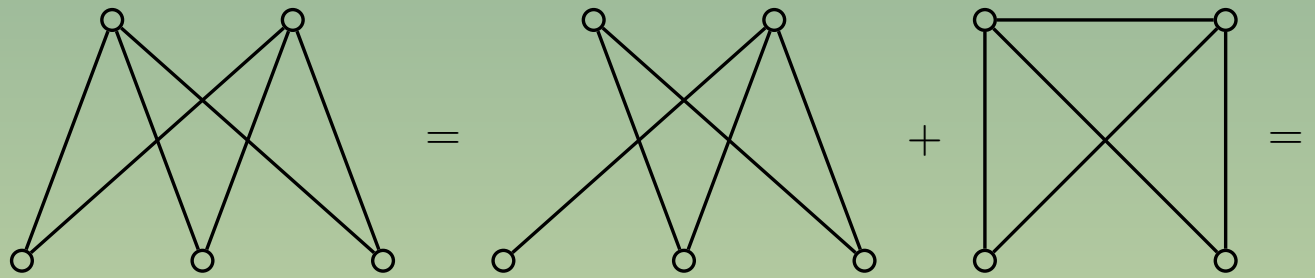


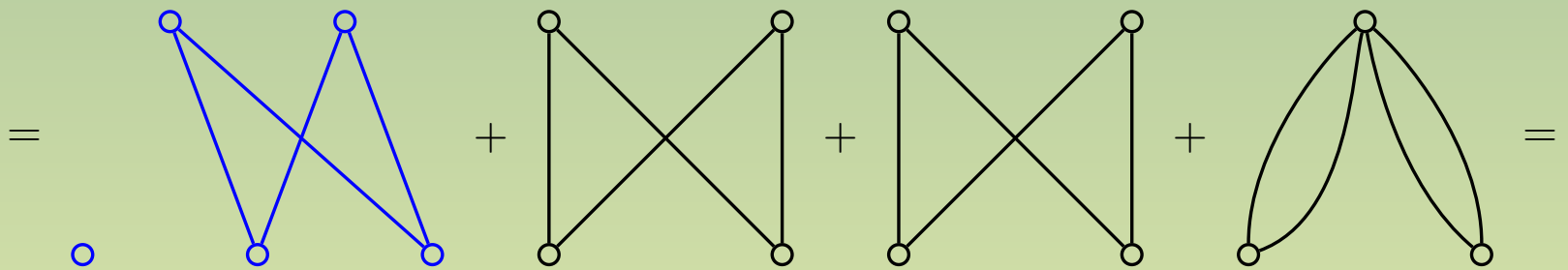
Na plavom grafu odaberemo jedan brid (crveni brid) i primijenimo opet rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu





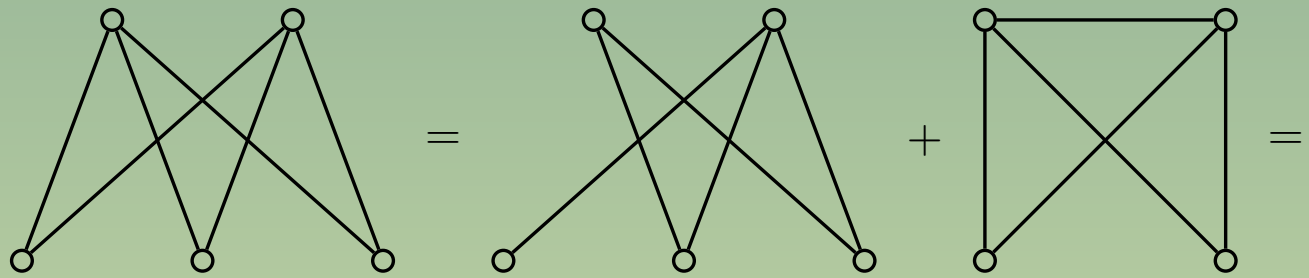
$= 0 +$

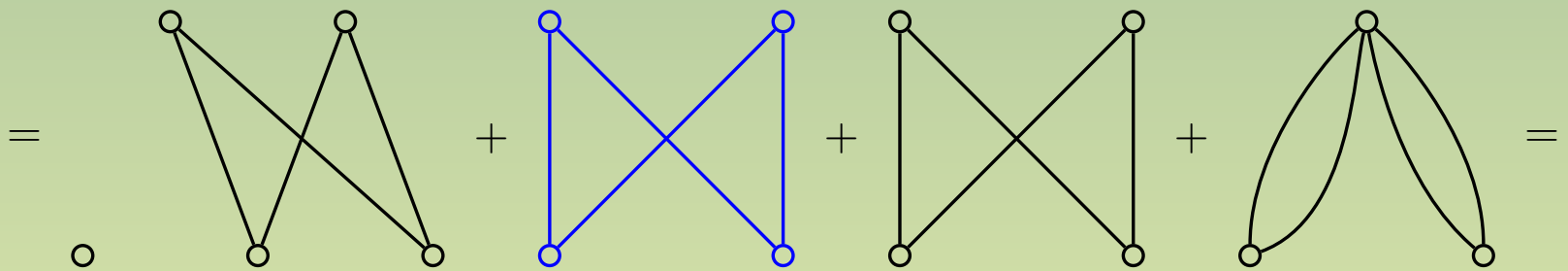
Plavi graf je nepovezan pa ima 0 razapinjućih stabala.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

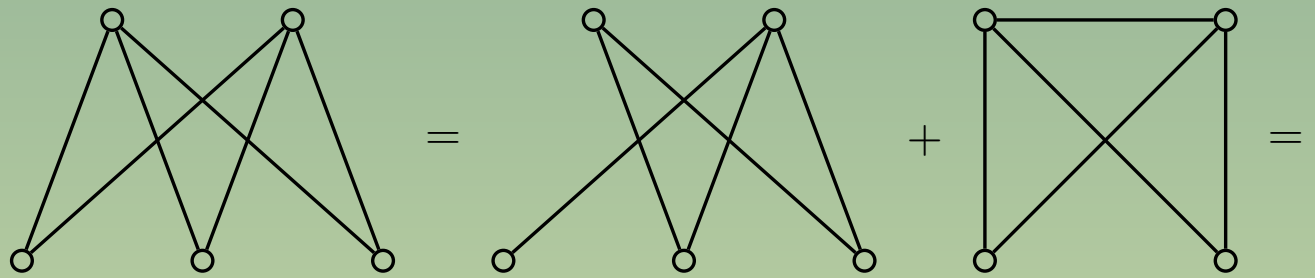


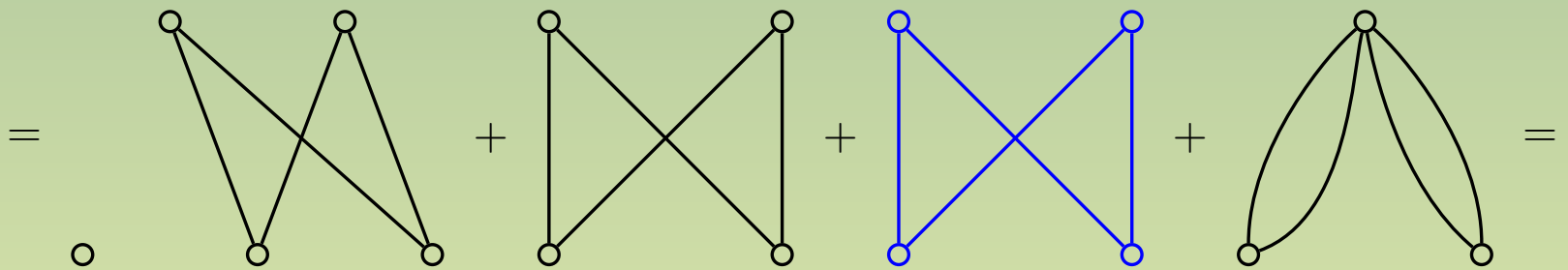


$= \quad 0 + 4 +$

Plavi graf je 4-ciklus pa ima 4 razapinjuća stabla.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

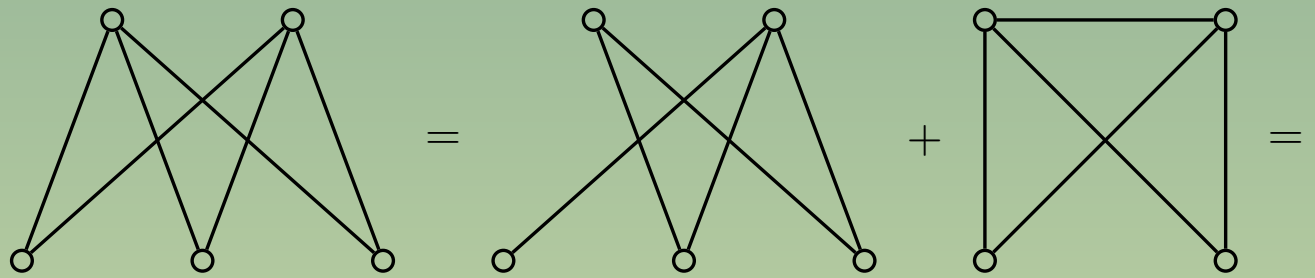


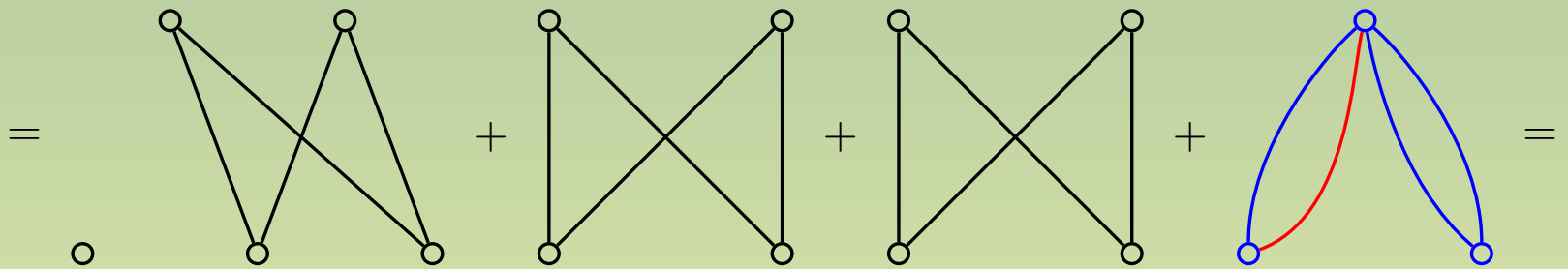


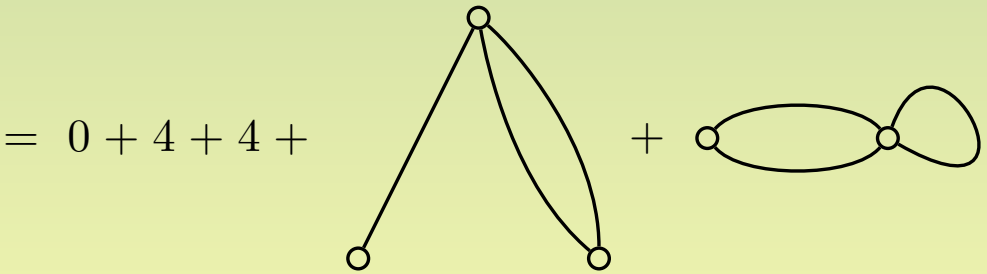
$= 0 + 4 + 4 +$

Plavi graf je 4-ciklus pa ima 4 razapinjuća stabla.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu







Na plavom grafu odaberemo jedan brid (crveni brid) i primijenimo opet rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

Stabla

Def. i karakterizacije

Riješeni primjeri

Korijenska stabla

Bin. stabla i alg. izrazi

Stablo sortiranja

Sortiranje u parcijalno uređenom skupu

Hrpa

Razapinjuća stabla

Rekurzija za raz. stabla

Riješeni primjeri

Matrični teorem o stablima

Teoretski primjeri

DFS i BFS algoritam

DFS algoritam

BFS algoritam

Povezanost grafa

Kruskal i Prim

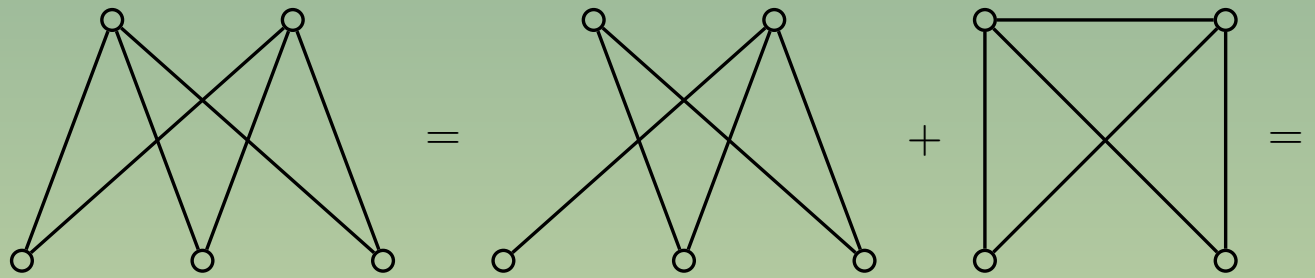
Kruskalov algoritam

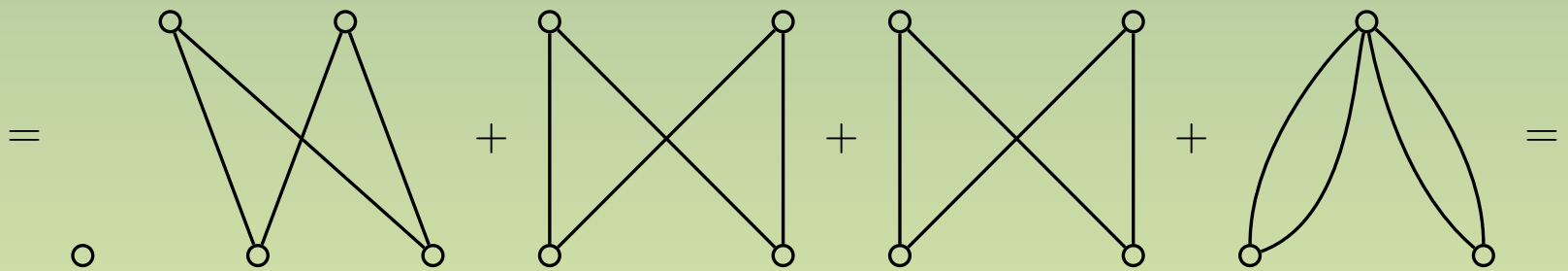
Implementacija Kruskala

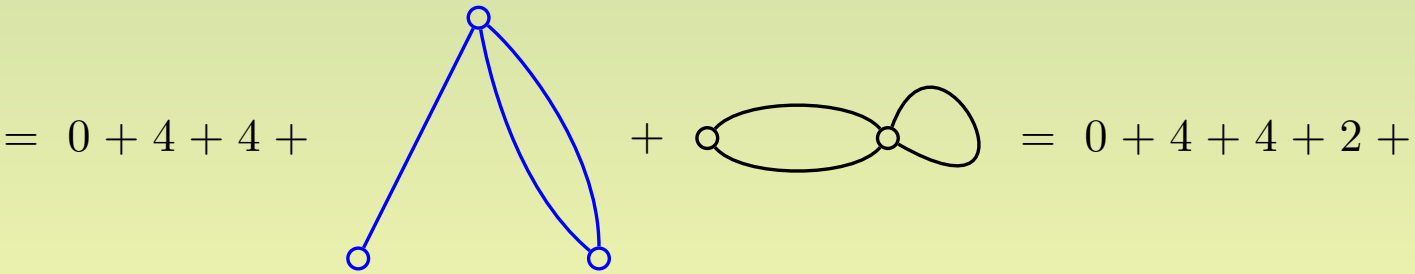
Primov algoritam

Implementacija Prima

Još o Ham. ciklusu

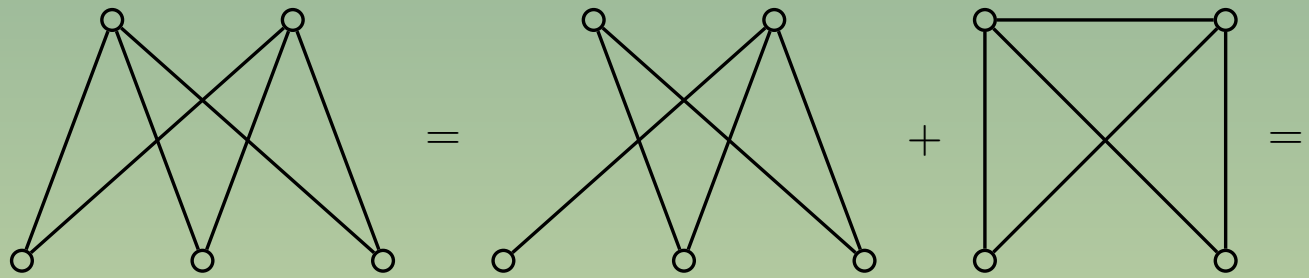


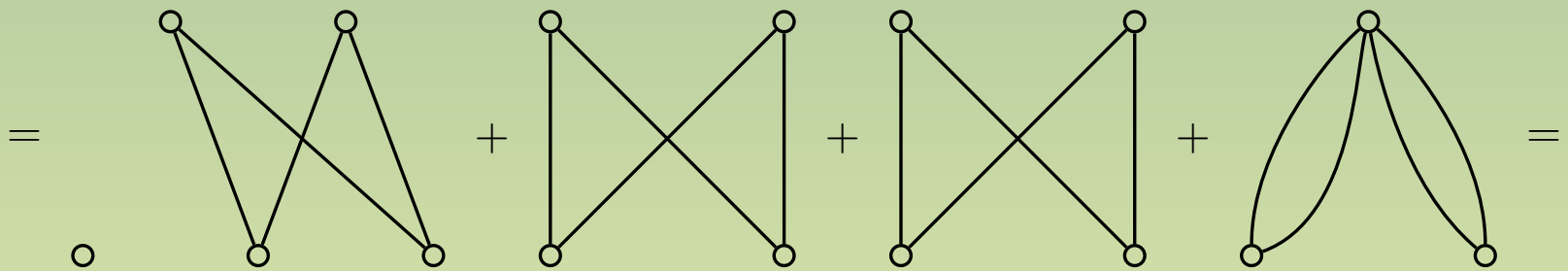


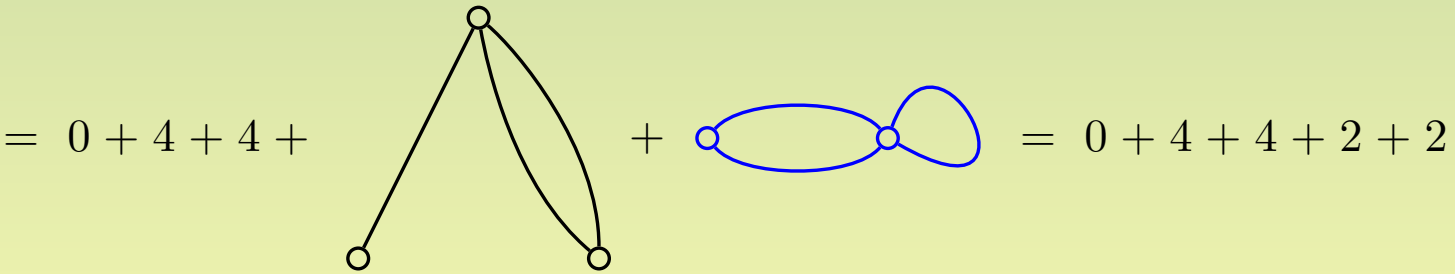


Očito je da plavi graf ima 2 razapinjuća stabla.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

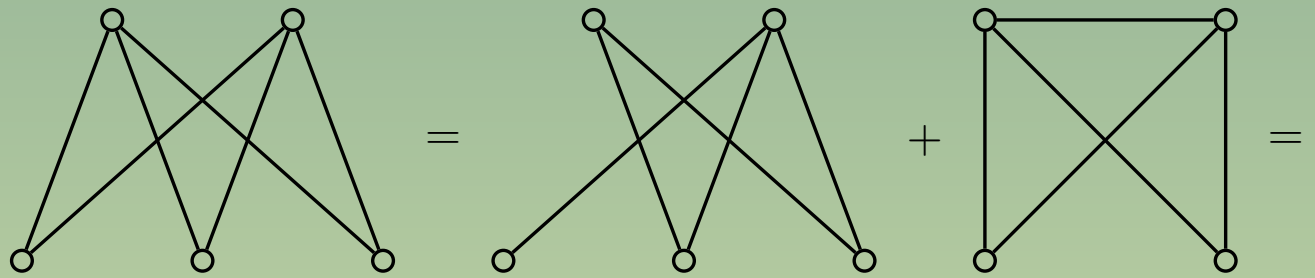


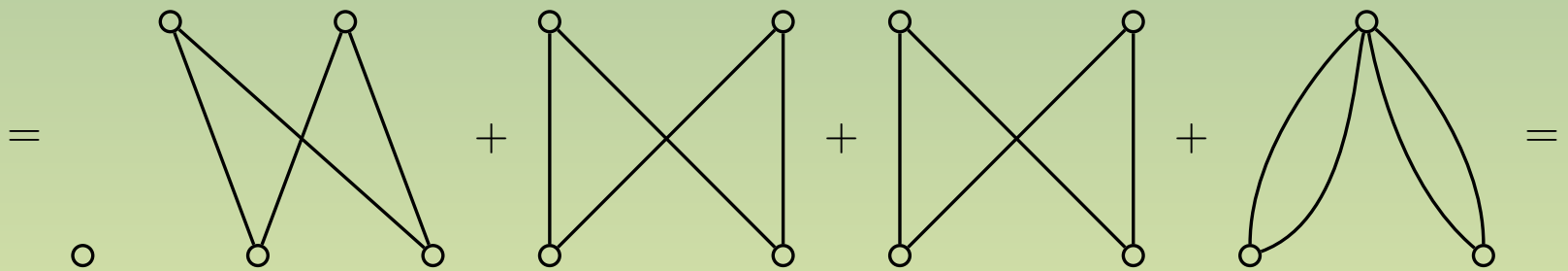


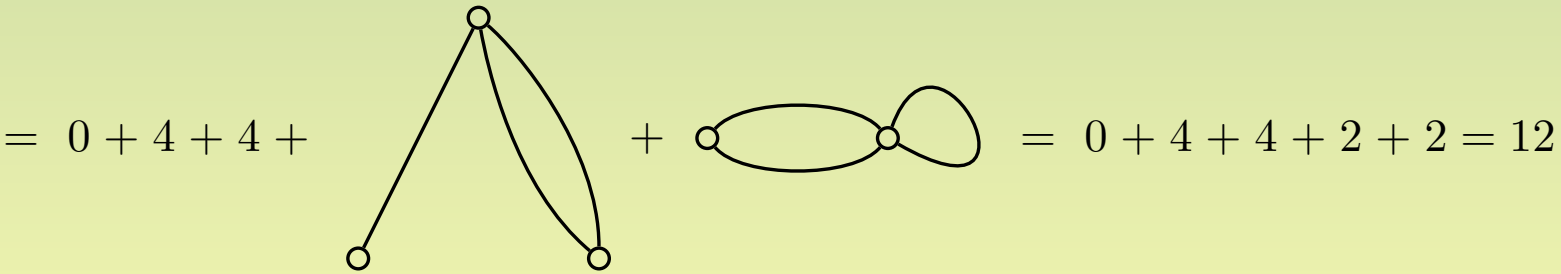


Očito je da plavi graf ima 2 razapinjuća stabla.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu







Stoga je $\tau = 12$, tj. $K_{2,3}$ ima ukupno 12 razapinjućih stabala.

Stabla

Def. i karakterizacije

Riješeni primjeri

Korijenska stabla

Bin. stabla i alg. izrazi

Stablo sortiranja

Sortiranje u parcijalno uređenom skupu

Hrpa

Razapinjuća stabla

Rekurzija za raz. stabla

Riješeni primjeri

Matrični teorem o stablima

Teoretski primjeri

DFS i BFS algoritam

DFS algoritam

BFS algoritam

Povezanost grafa

Kruskal i Prim

Kruskalov algoritam

Implementacija Kruskala

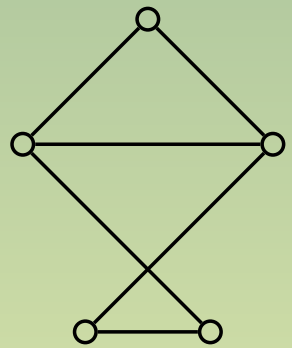
Primov algoritam

Implementacija Prima

Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.36.

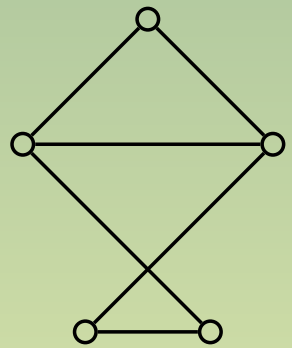
Pomoću rekurzije odredite broj razapinjućih stabala grafa



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.36.

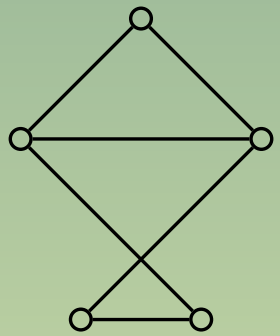
Pomoću rekurzije odredite broj razapinjućih stabala grafa



Rješenje.

Način rješavanja zadatka nije jedinstven, već ovisi o tome u kojem ćemo trenutku odabrati pojedini brid u grafu. Pokazat ćemo jedan način rješavanja, a za vježbu je dobro probati rješavati zadatak na još neke načine.

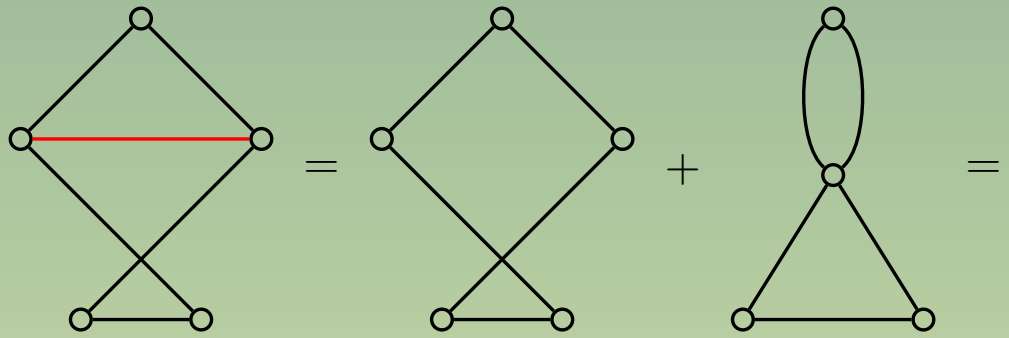
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



$=$

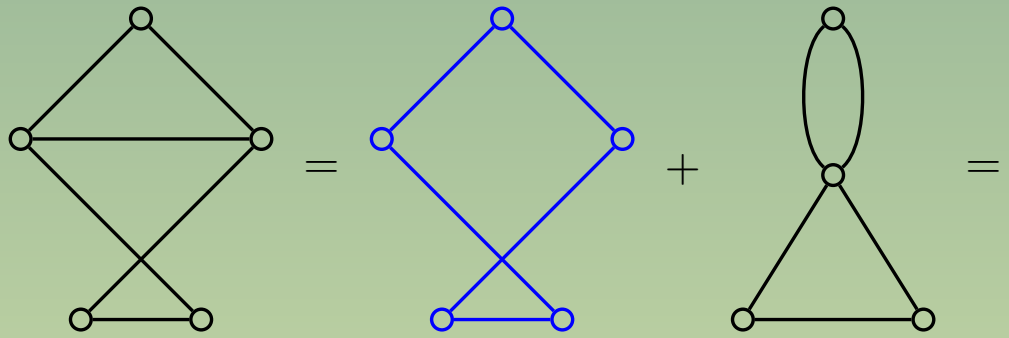
Odaberemo jedan brid,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Odaberemo jedan brid, npr. crveni brid, i primijenimo rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

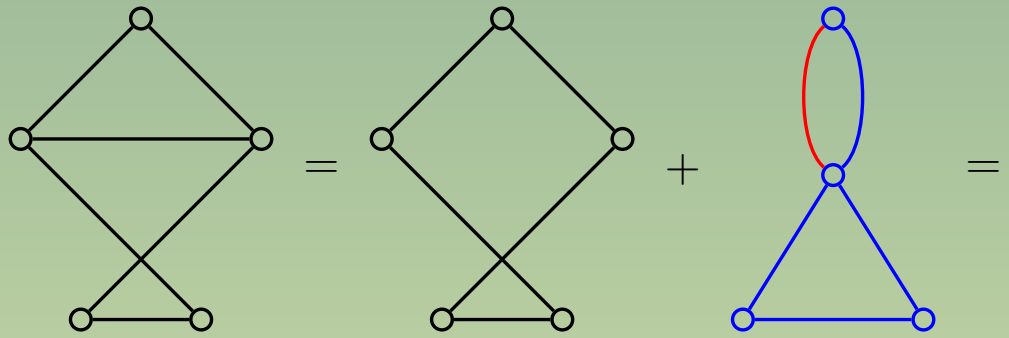
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

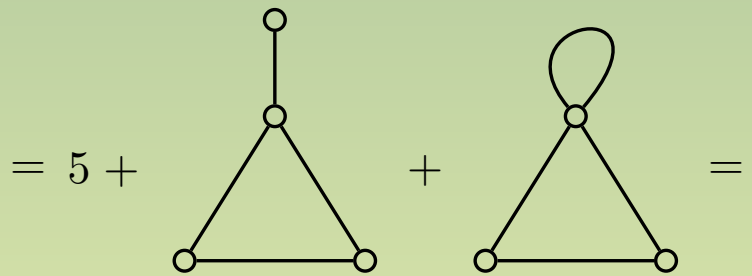


$= 5 +$

Plavi graf je 5-ciklus pa ima 5 razapinjućih stabala.

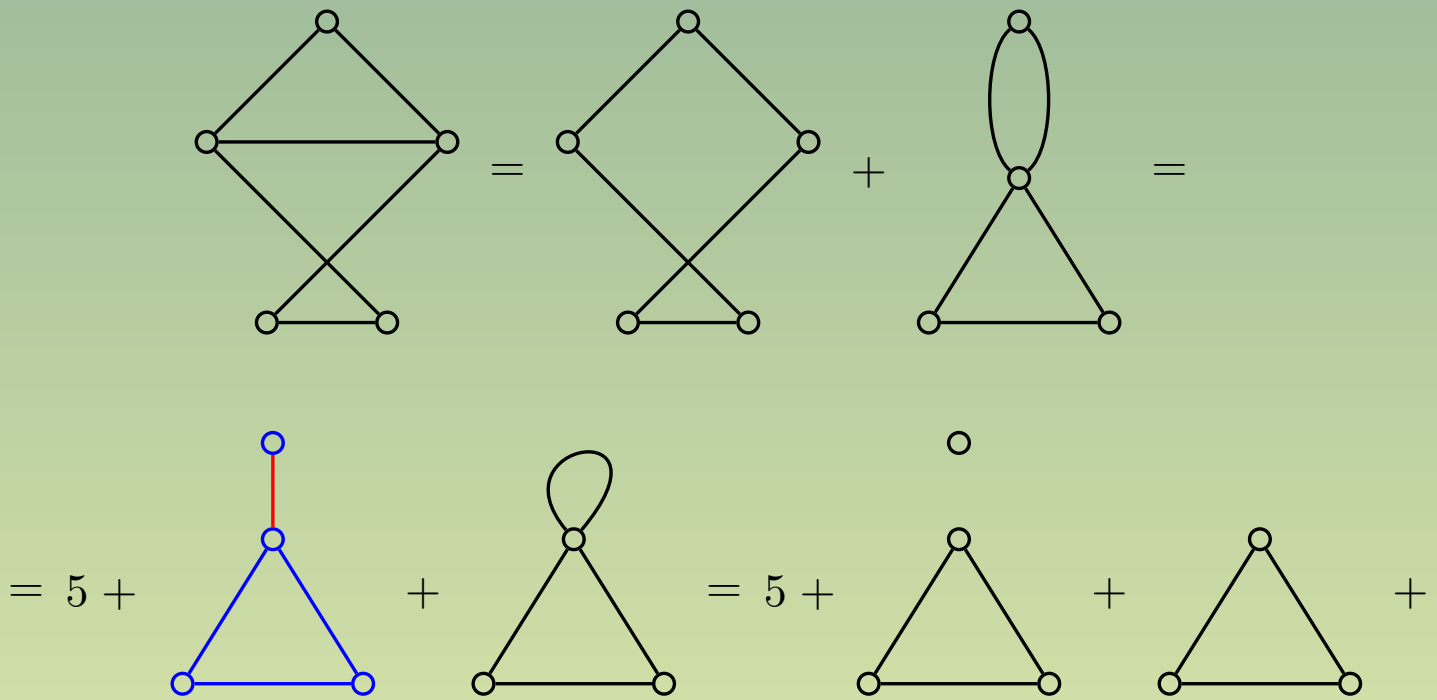
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu





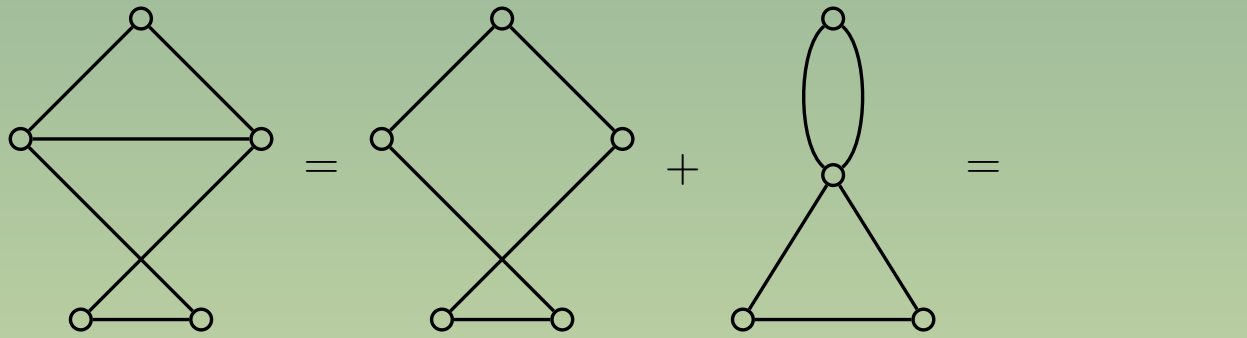
Na plavom grafu odaberemo jedan brid (crveni brid) i primijenimo opet rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

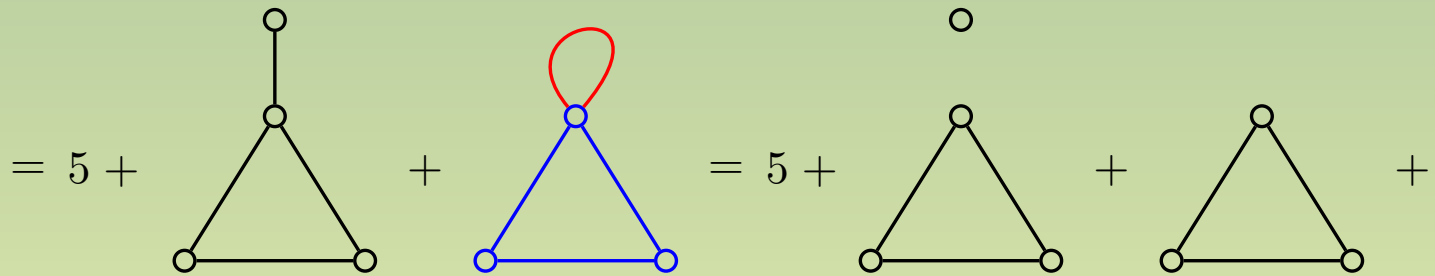
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

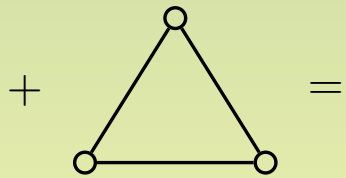


Na plavom grafu odaberemo jedan brid (crveni brid) i primijenimo opet rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

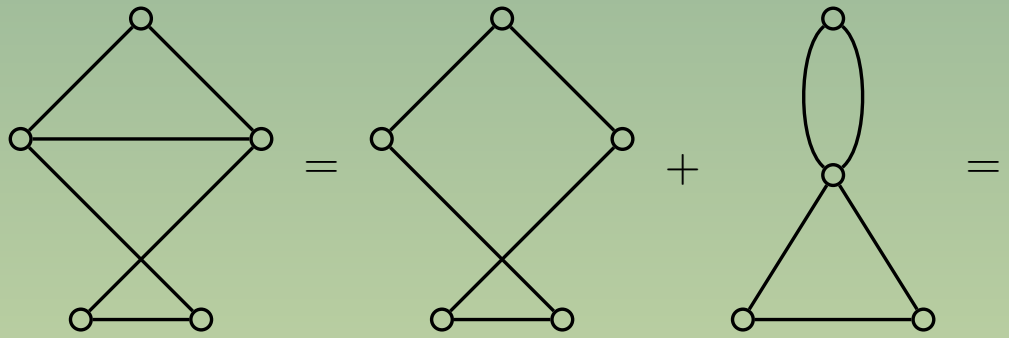


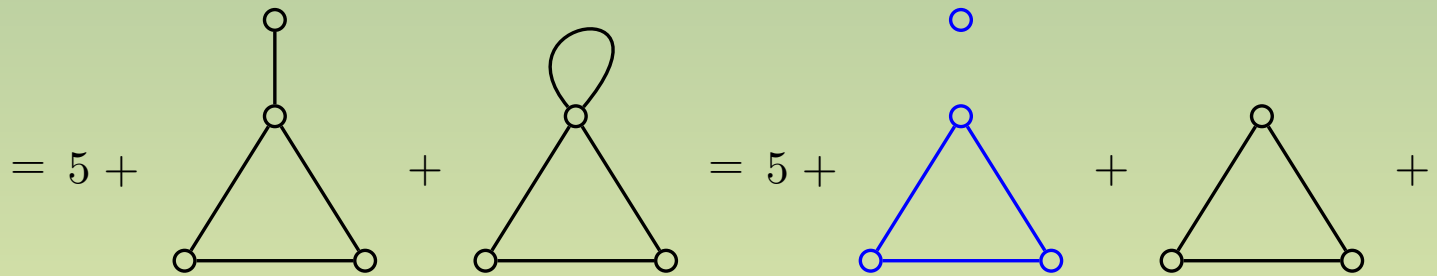


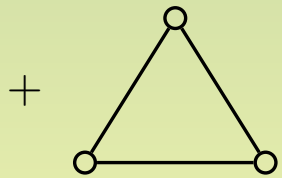


Petlje možemo zanemariti.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

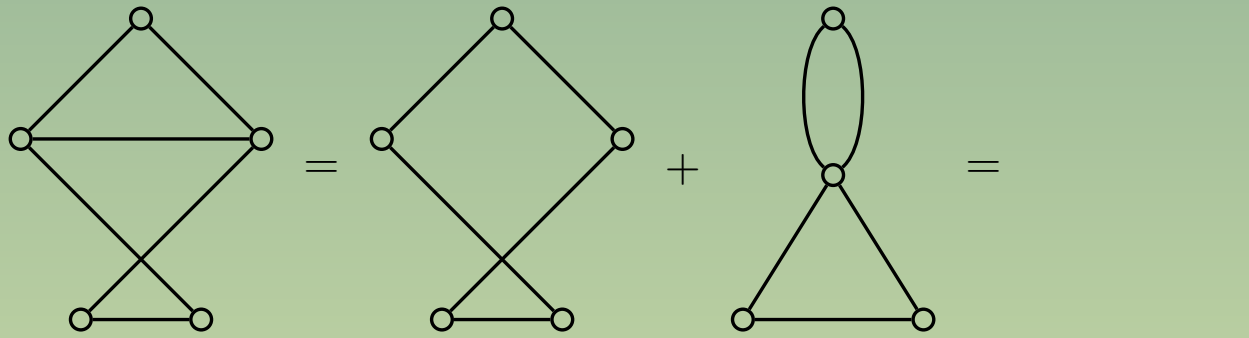


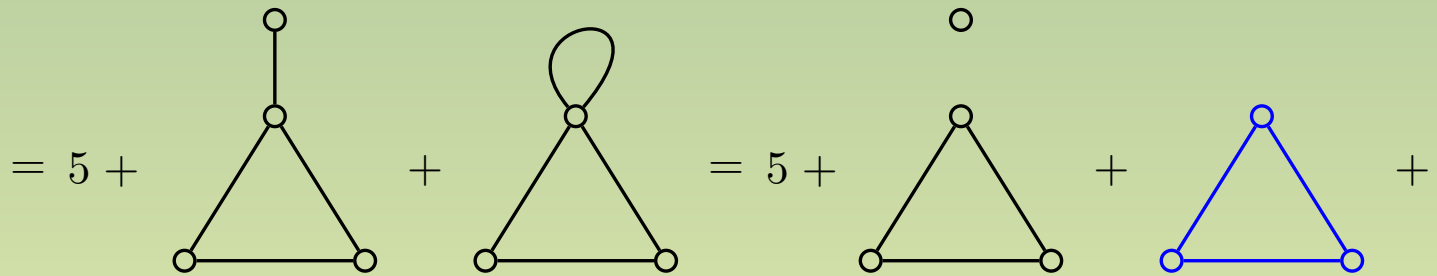


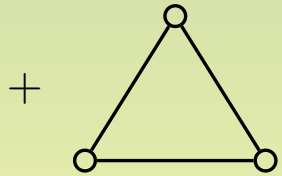


Plavi graf je nepovezan pa ima 0 razapinjućih stabala.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

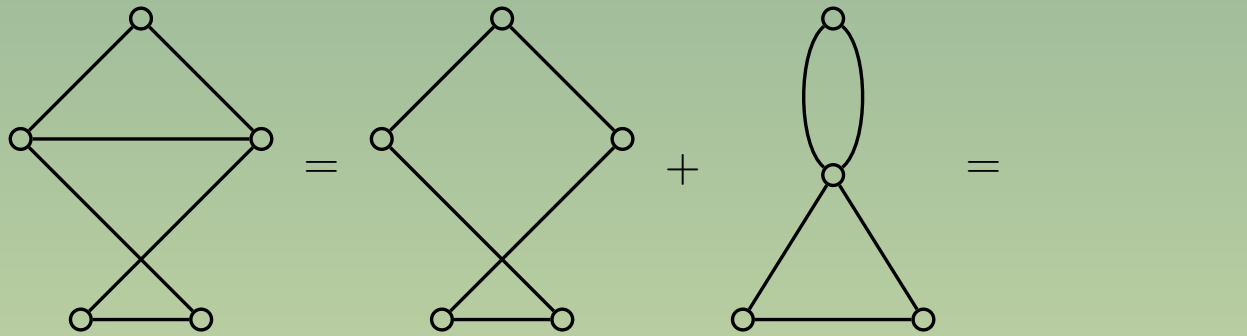


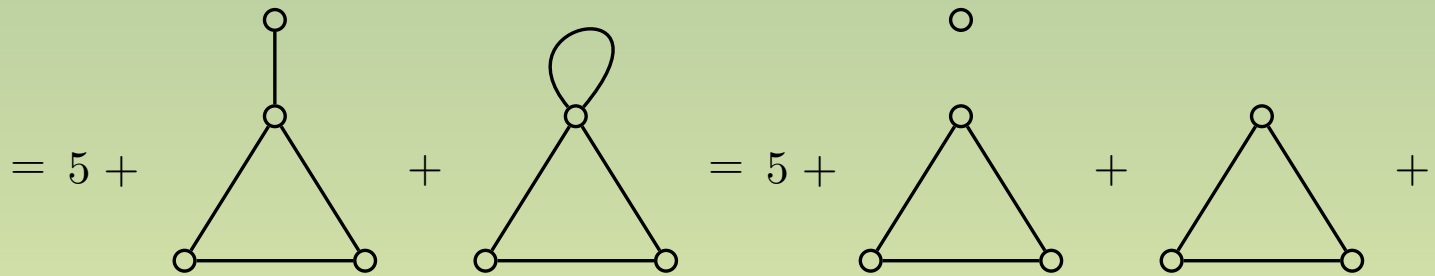


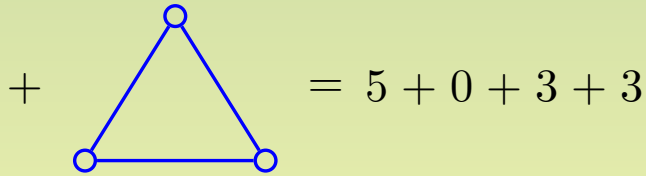


Plavi graf je 3-ciklus pa ima 3 razapinjuća stabla.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

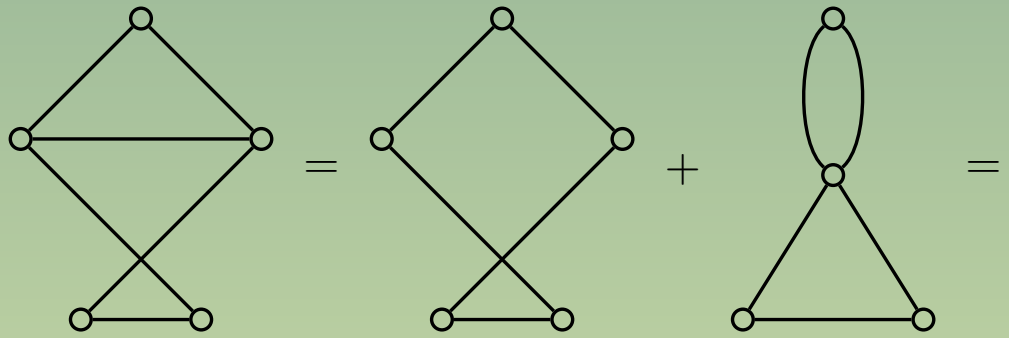


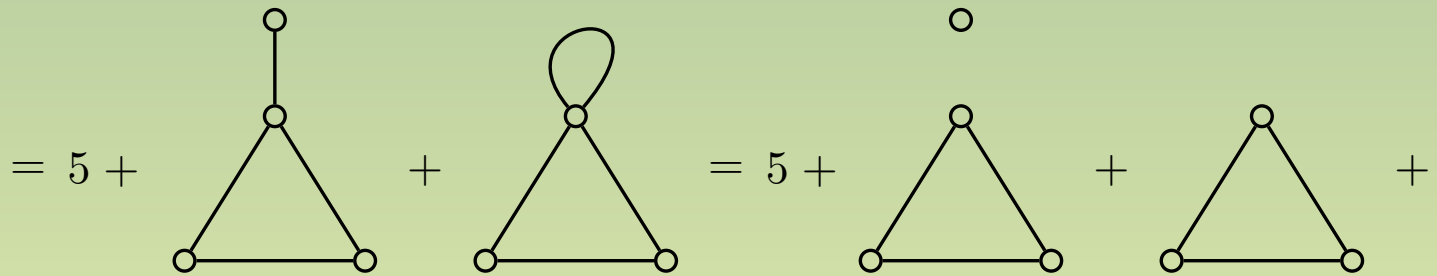


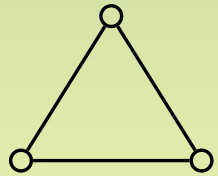


Plavi graf je 3-ciklus pa ima 3 razapinjuća stabla.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu







$$= 5 + 0 + 3 + 3 = 11$$

Stoga je $\tau = 11$, tj. početni graf ima ukupno 11 razapinjućih stabala.

Stabla

Def. i karakterizacije

Riješeni primjeri

Korijenska stabla

Bin. stabla i alg. izrazi

Stablo sortiranja

Sortiranje u parcijalno uređenom skupu

Hrpa

Razapinjuća stabla

Rekurzija za raz. stabla

Riješeni primjeri

Matrični teorem o stablima

Teoretski primjeri

DFS i BFS algoritam

DFS algoritam

BFS algoritam

Povezanost grafa

Kruskal i Prim

Kruskalov algoritam

Implementacija Kruskala

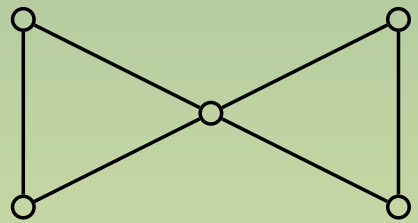
Primov algoritam

Implementacija Prima

Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.37.

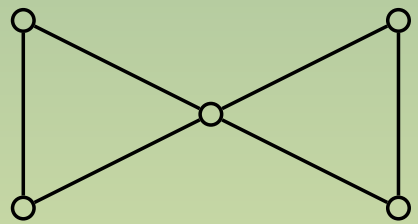
Pomoću rekurzije odredite broj razapinjućih stabala grafa



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.37.

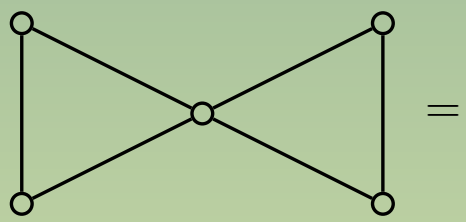
Pomoću rekurzije odredite broj razapinjućih stabala grafa



Rješenje.

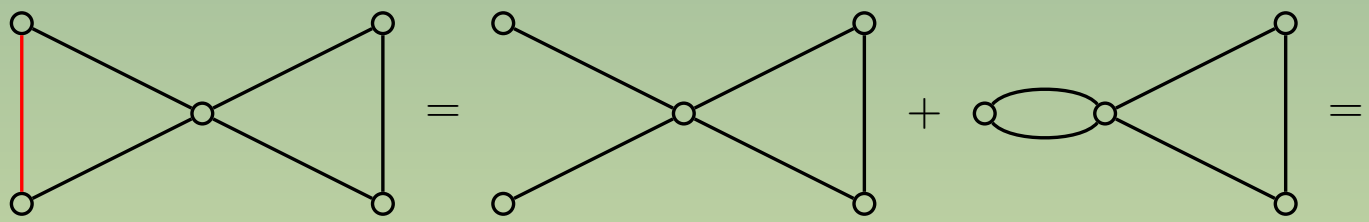
Način rješavanja zadatka nije jedinstven, već ovisi o tome u kojem ćemo trenutku odabrati pojedini brid u grafu. Pokazat ćemo jedan način rješavanja, a za vježbu je dobro probati rješavati zadatak na još neke načine.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



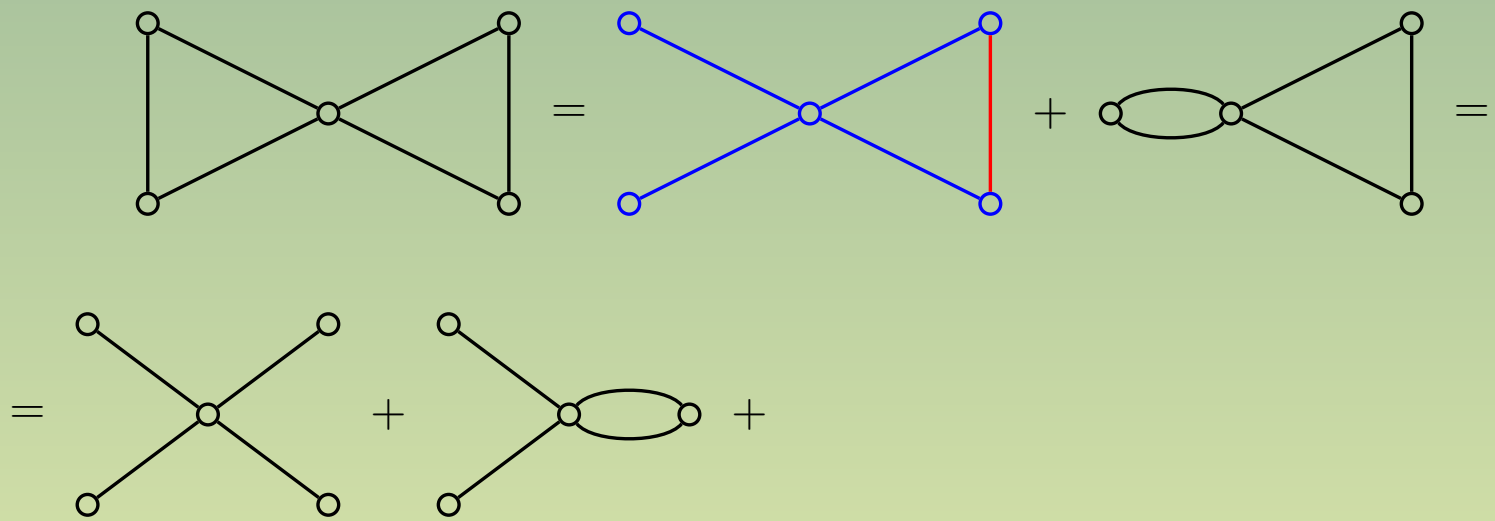
Odaberemo jedan brid,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Odaberemo jedan brid, npr. crveni brid, i primijenimo rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

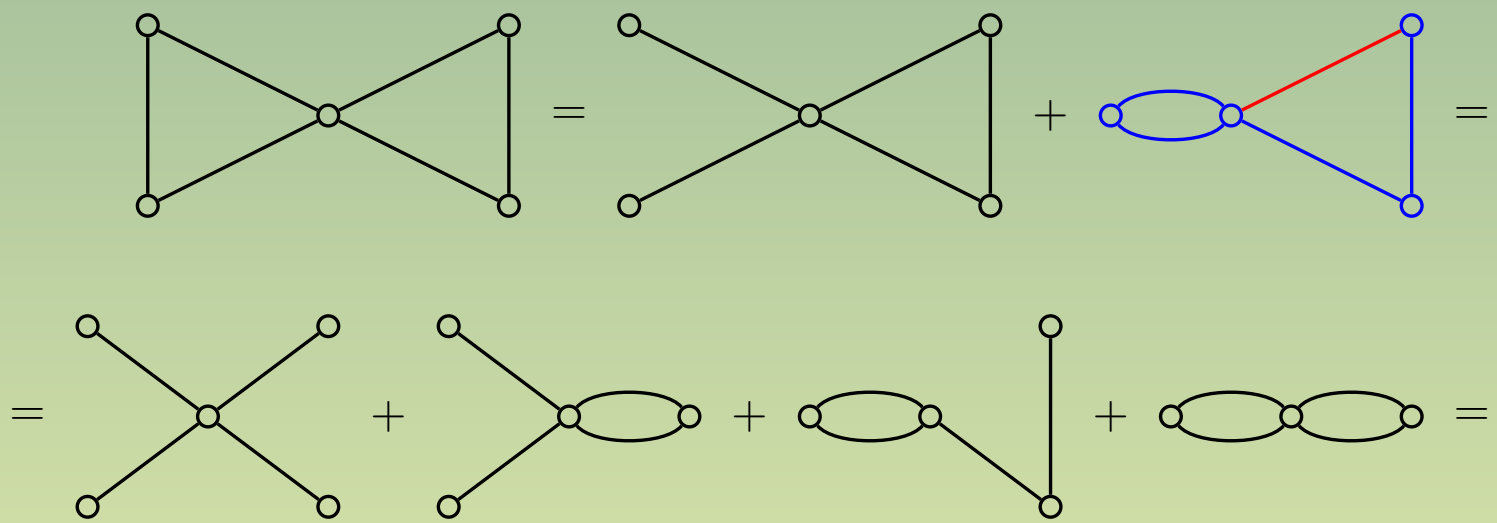


Na plavom grafu odaberemo jedan brid (crveni brid) i primijenimo opet rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

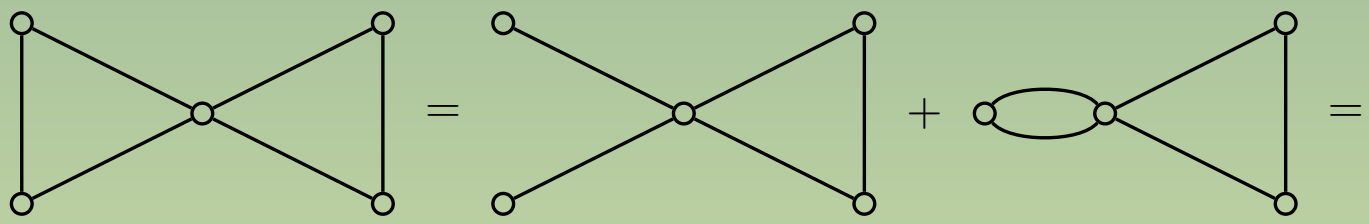
prof. dr. sc. Blaženka Divjak

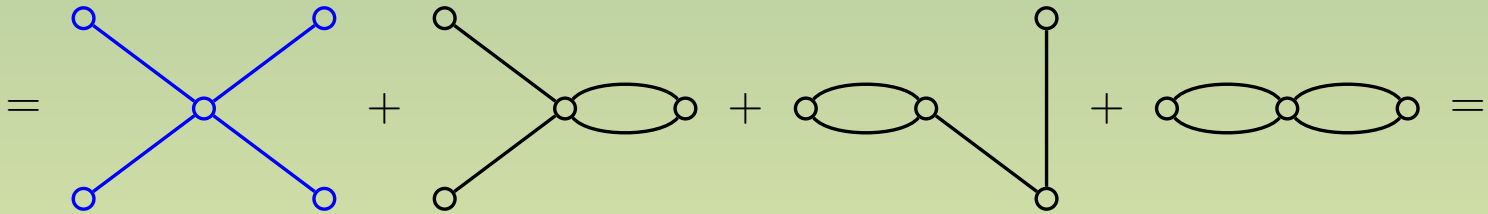
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Na plavom grafu odaberemo jedan brid (crveni brid) i primijenimo opet rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

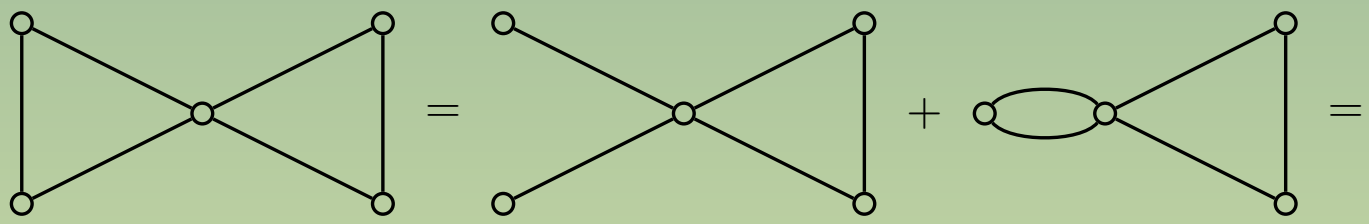


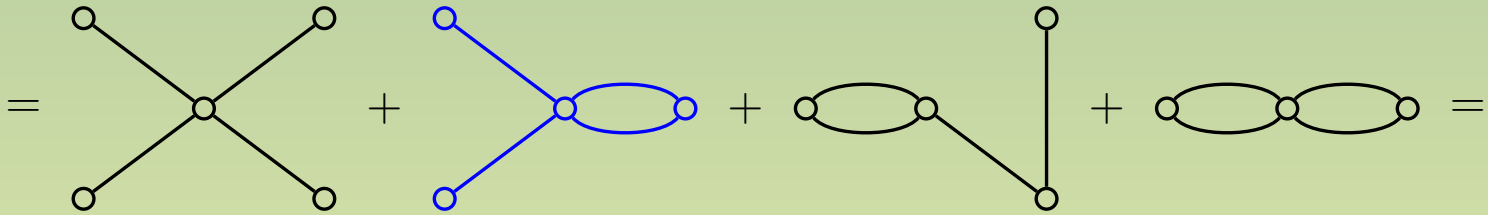


$= 1 +$

Plavi graf je stablo pa ima jedno razapinjuće stablo.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

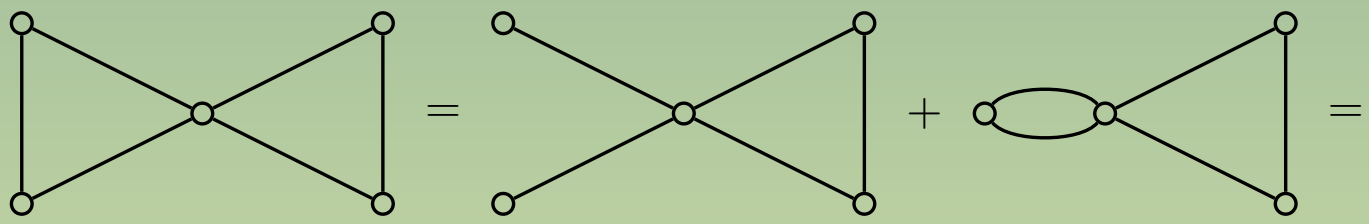


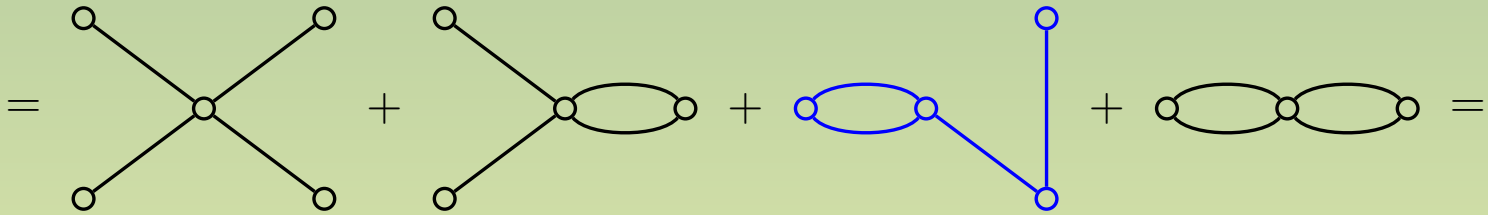


$= 1 + 2 +$

Očito je da plavi graf ima 2 razapinjuća stabla.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

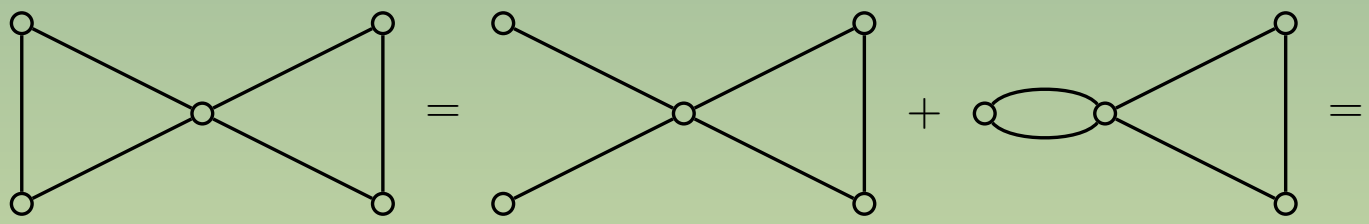


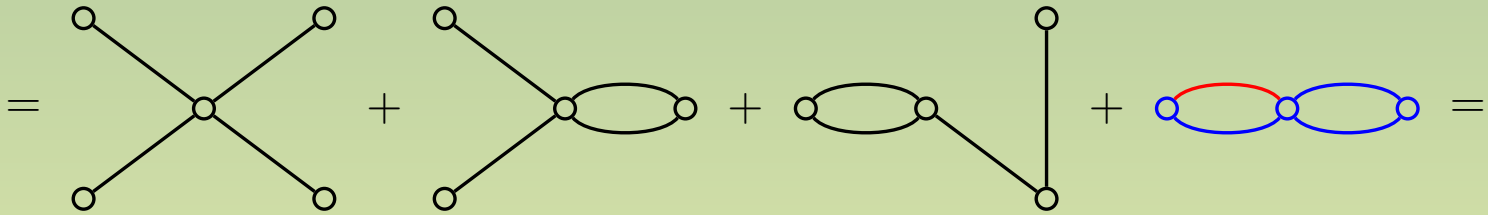


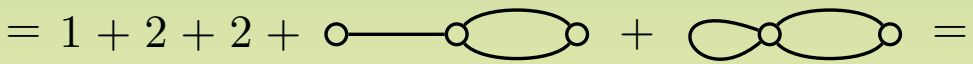
$= 1 + 2 + 2 +$

Očito je da plavi graf ima 2 razapinjuća stabla.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

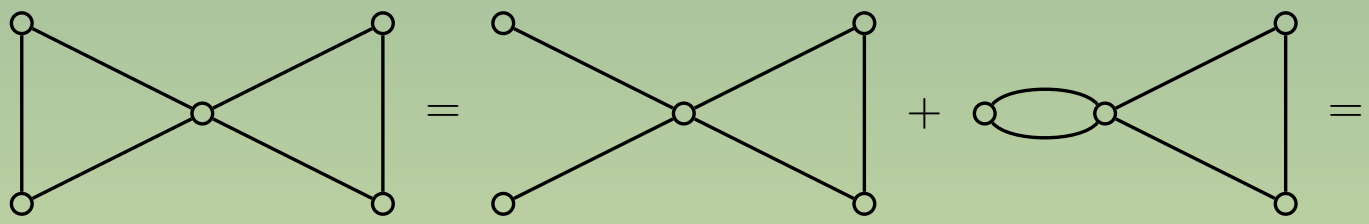


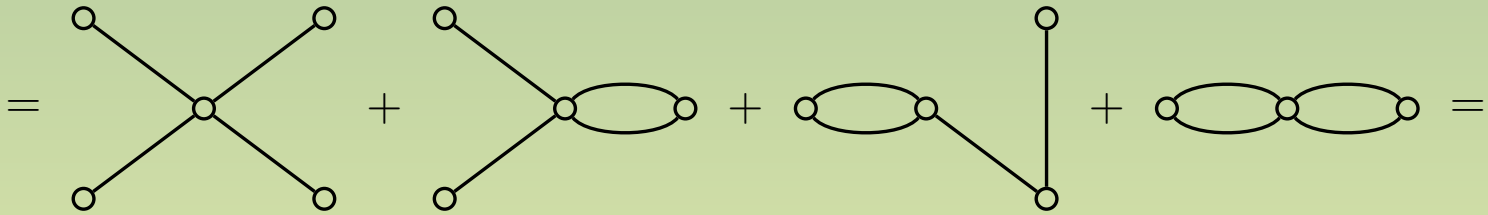


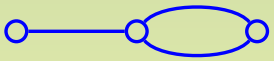
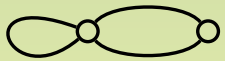


Na plavom grafu odaberemo jedan brid (crveni brid) i primijenimo opet rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

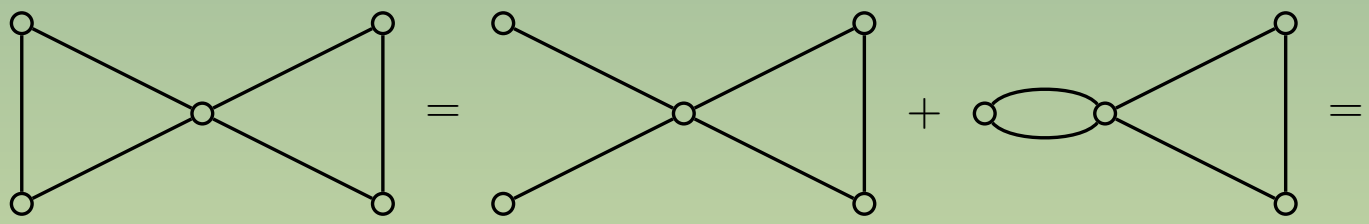


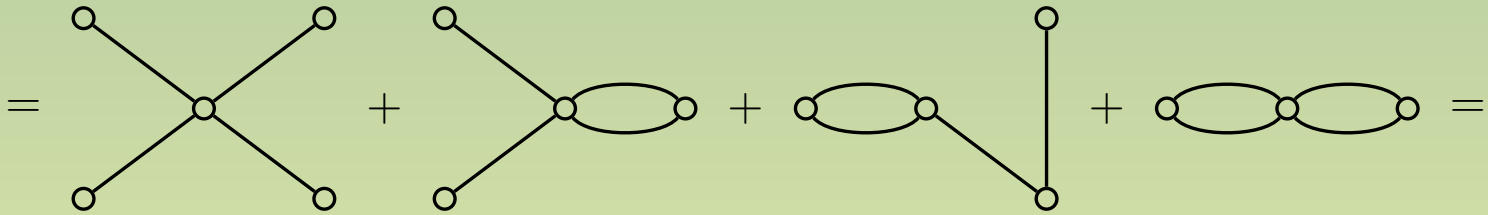


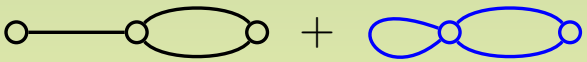
$= 1 + 2 + 2 +$  $+$  $= 1 + 2 + 2 + 2 +$

Očito je da plavi graf ima 2 razapinjuća stabla.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

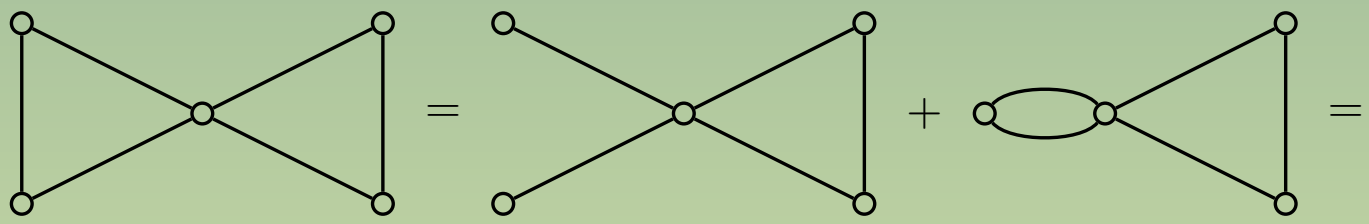


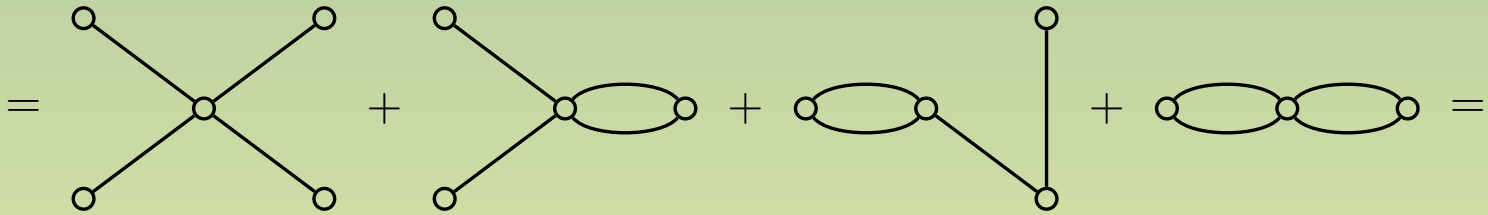


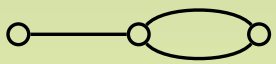
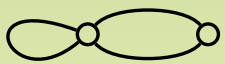


Očito je da plavi graf ima 2 razapinjuća stabla.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu





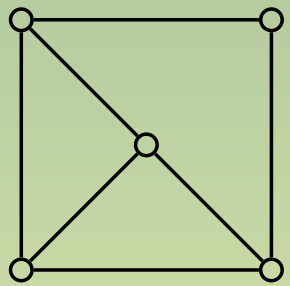
$= 1 + 2 + 2 +$  $+$  $= 1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 9$

Stoga je $\tau = 9$, tj. početni graf ima ukupno 9 razapinjućih stabala.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.38.

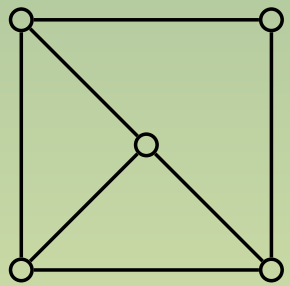
Pomoću rekurzije odredite broj razapinjućih stabala grafa



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.38.

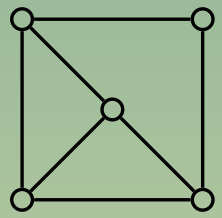
Pomoću rekurzije odredite broj razapinjućih stabala grafa



Rješenje.

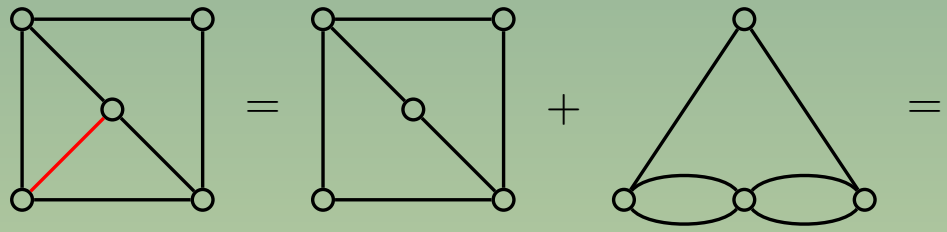
Način rješavanja zadatka nije jedinstven, već ovisi o tome u kojem ćemo trenutku odabrati pojedini brid u grafu. Pokazat ćemo jedan način rješavanja, a za vježbu je dobro probati rješavati zadatak na još neke načine.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



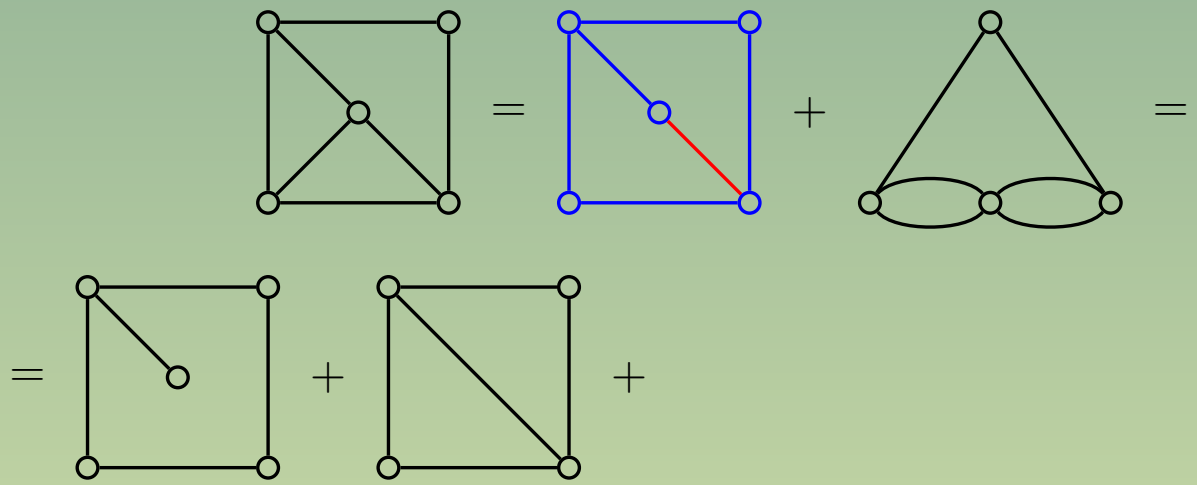
Odaberemo jedan brid,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



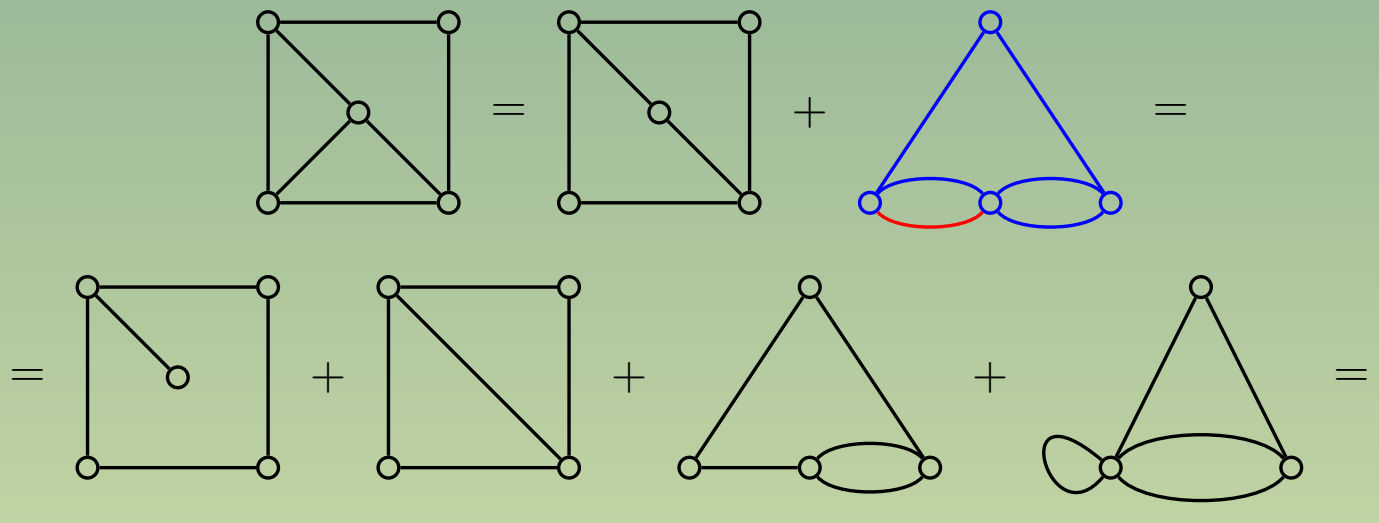
Odaberemo jedan brid, npr. crveni brid, i primijenimo rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



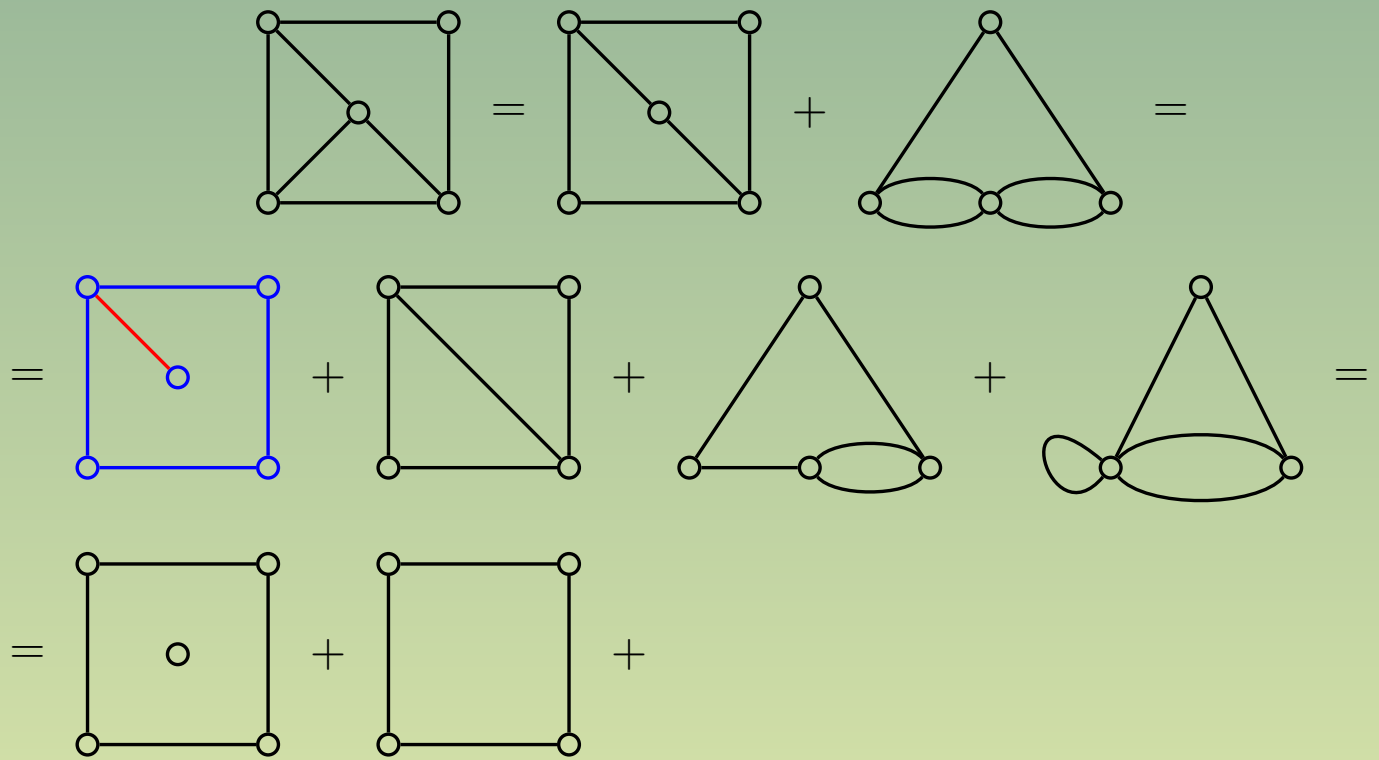
Na plavom grafu odaberemo jedan brid (crveni brid) i primijenimo opet rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



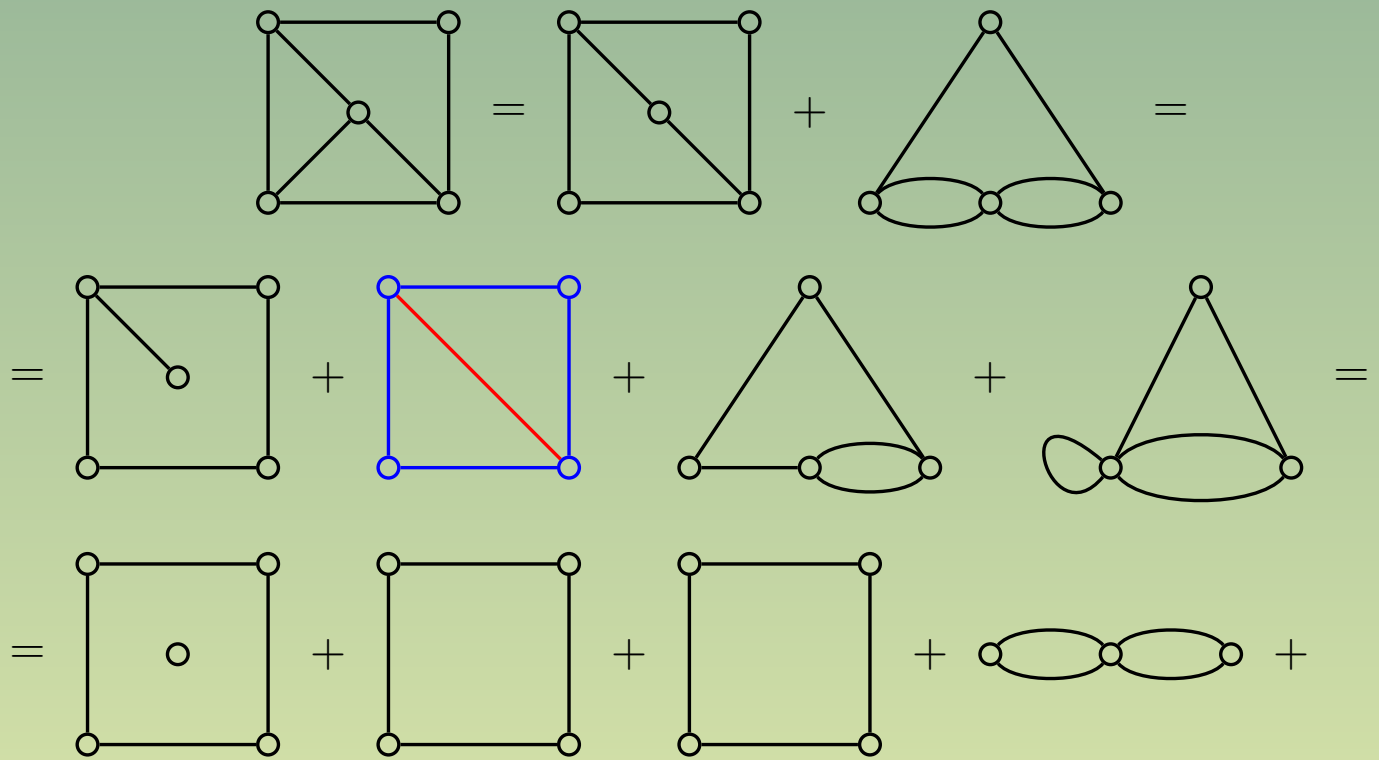
Na plavom grafu odaberemo jedan brid (crveni brid) i primijenimo opet rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



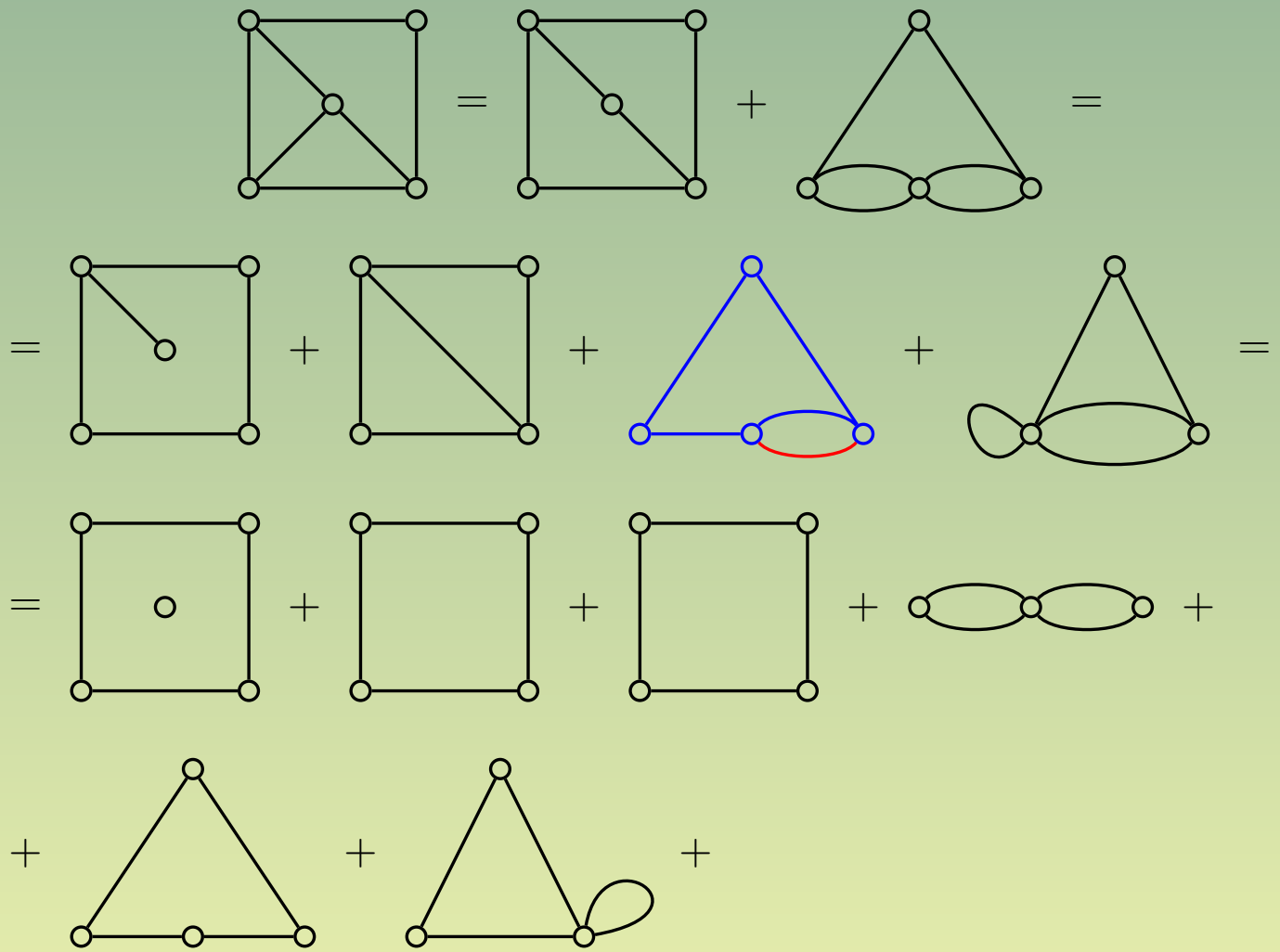
Na plavom grafu odaberemo jedan brid (crveni brid) i primijenimo opet rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



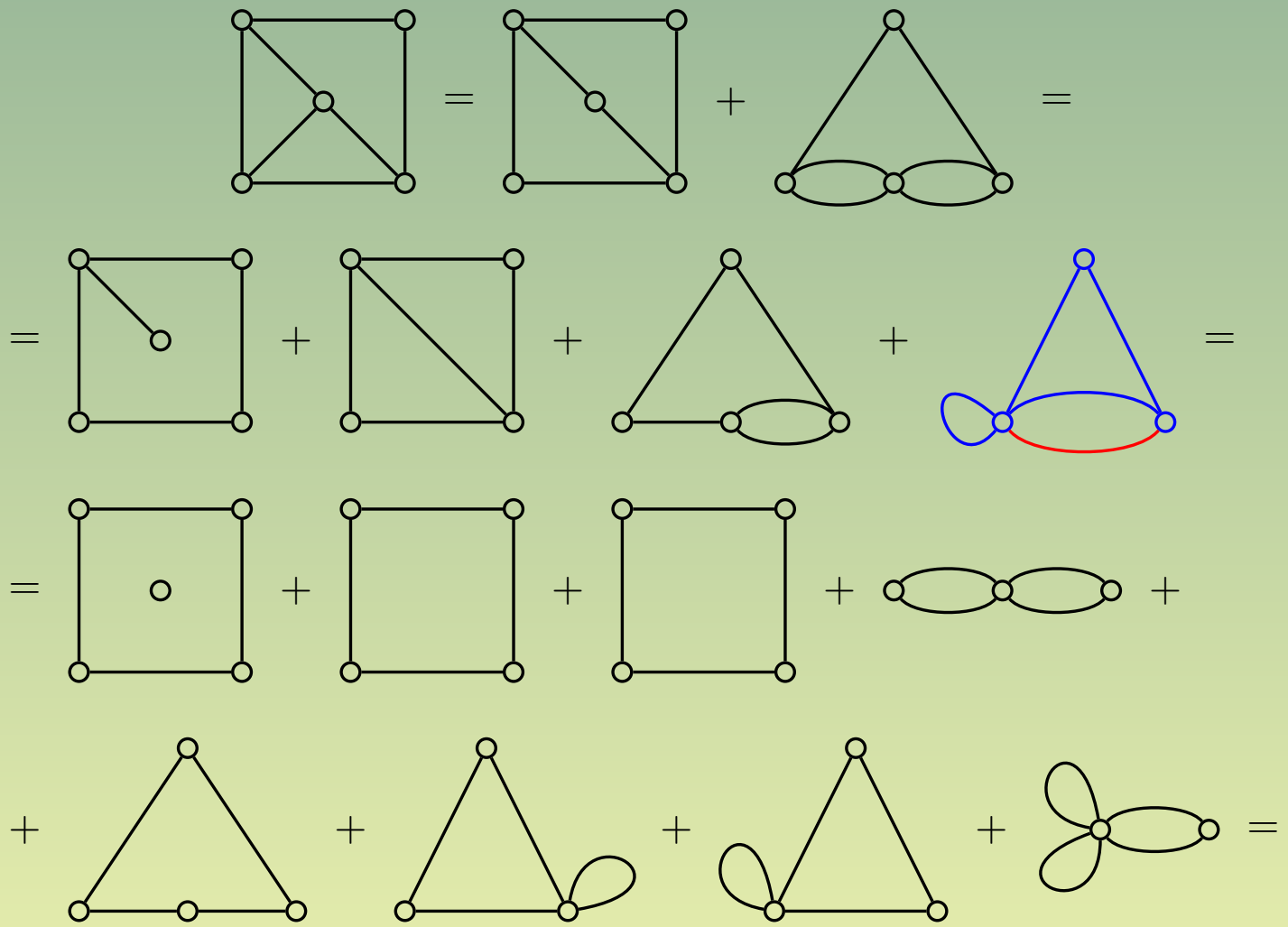
Na plavom grafu odaberemo jedan brid (crveni brid) i primijenimo opet rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



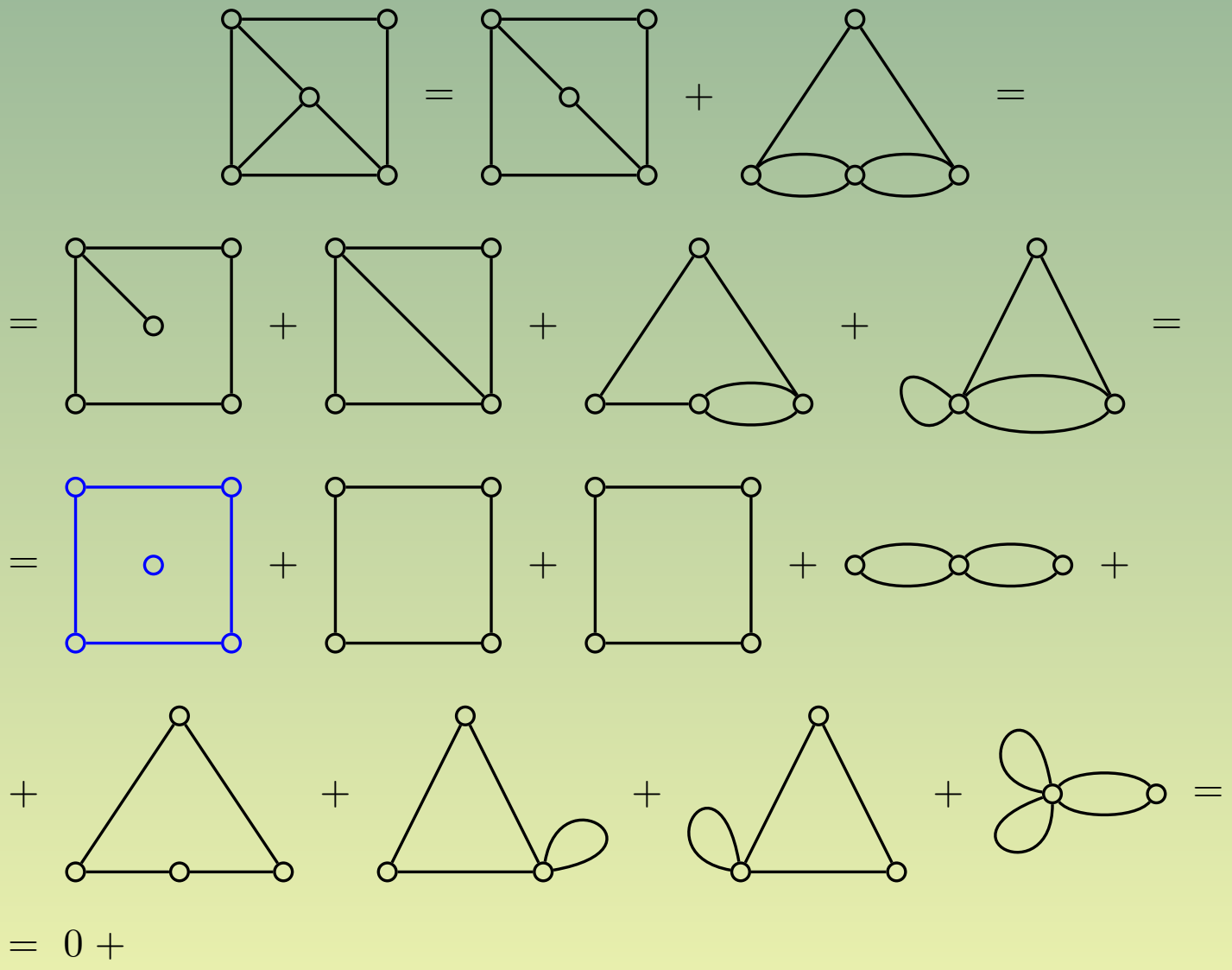
Na plavom grafu odaberemo jedan brid (crveni brid) i primijenimo opet rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Na plavom grafu odaberemo jedan brid (crveni brid) i primijenimo opet rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



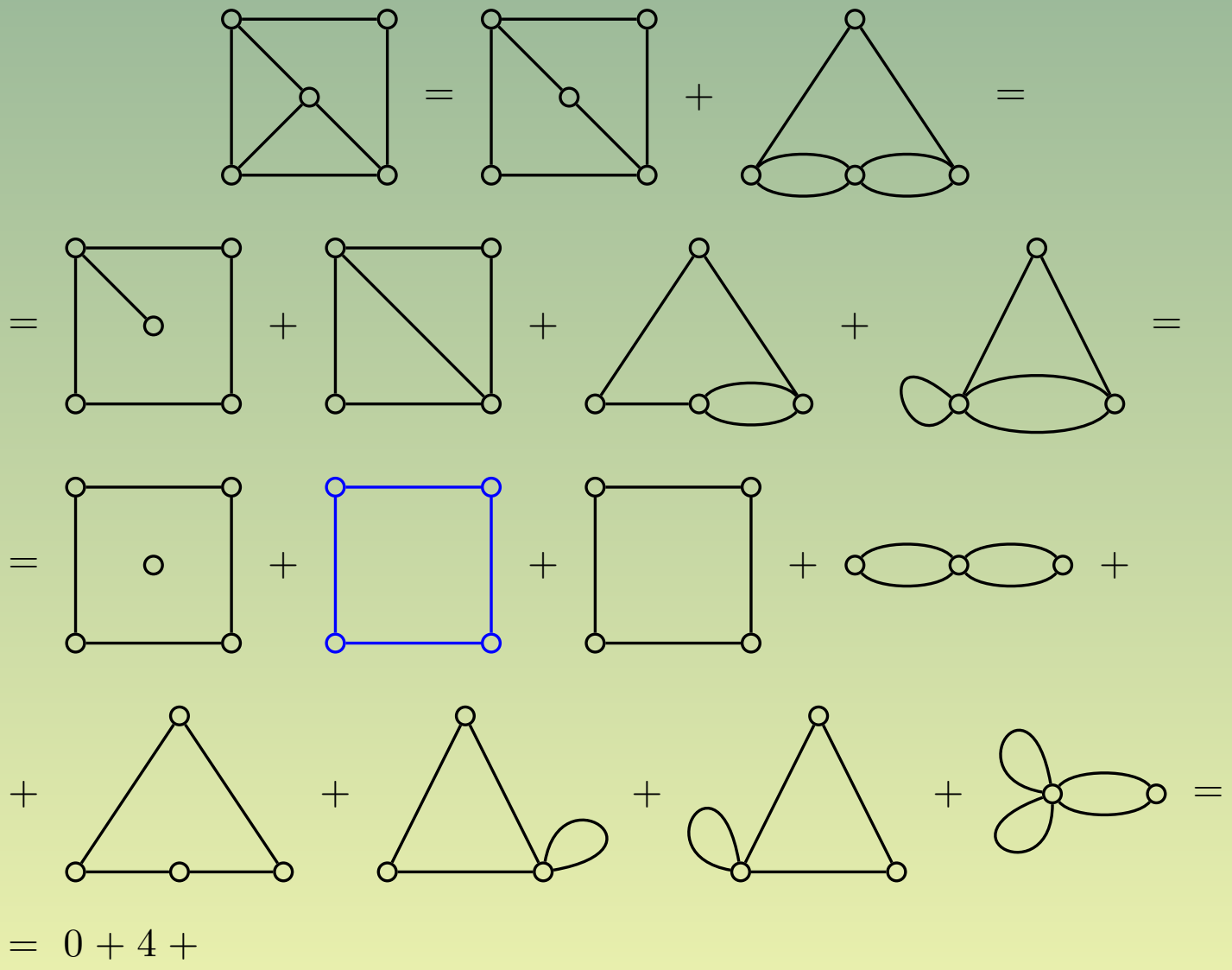
$= 0 +$

Plavi graf je nepovezan pa ima 0 razapinjućih stabala.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

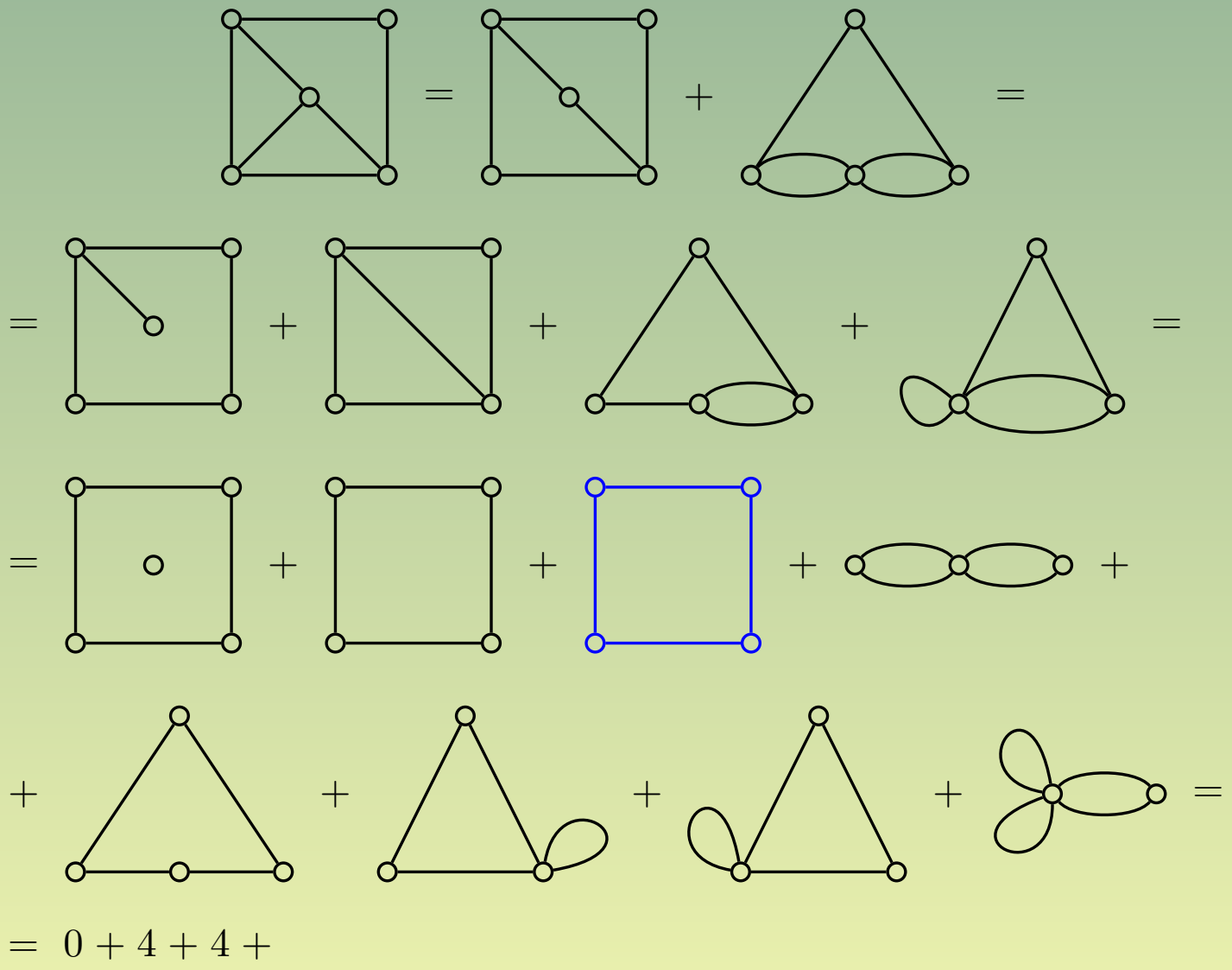
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



$= 0 + 4 +$

Plavi graf je 4-ciklus pa ima 4 razapinjuća stabla.

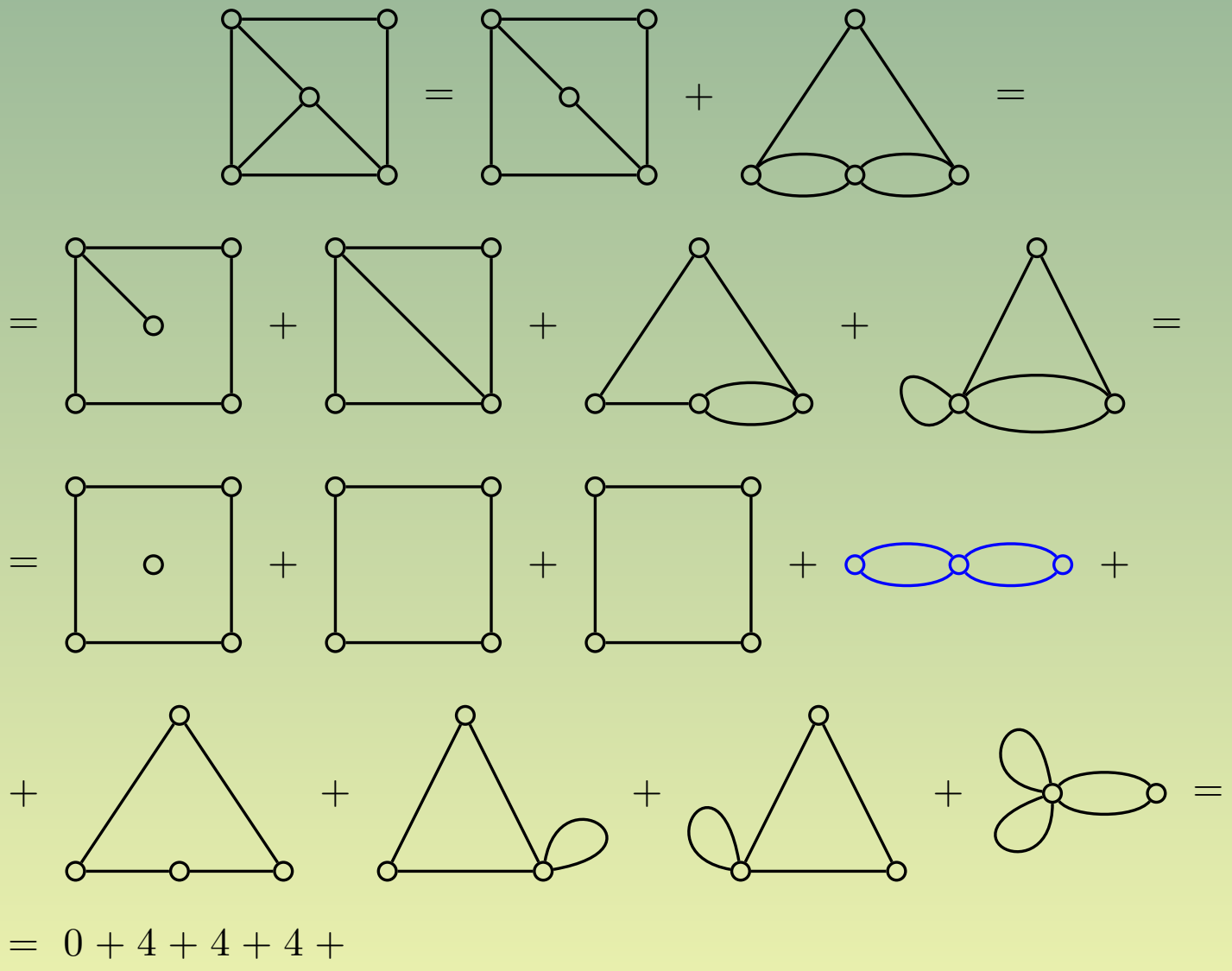
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



$= 0 + 4 + 4 +$

Plavi graf je 4-ciklus pa ima 4 razapinjuća stabla.

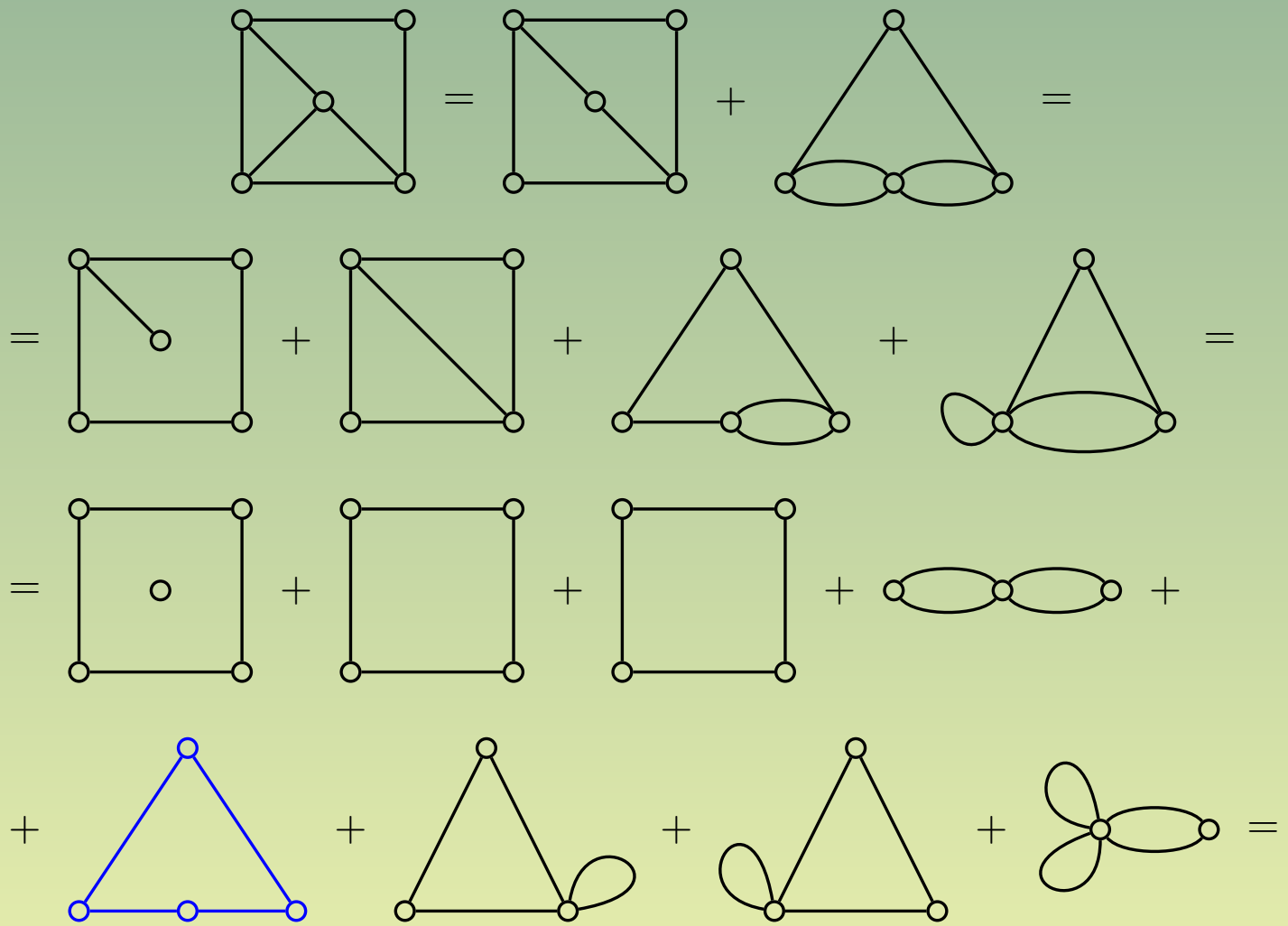
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



$= 0 + 4 + 4 + 4 +$

Plavi graf ima 4 razapinjuća stabla (taj graf se već puno puta prije javljao).

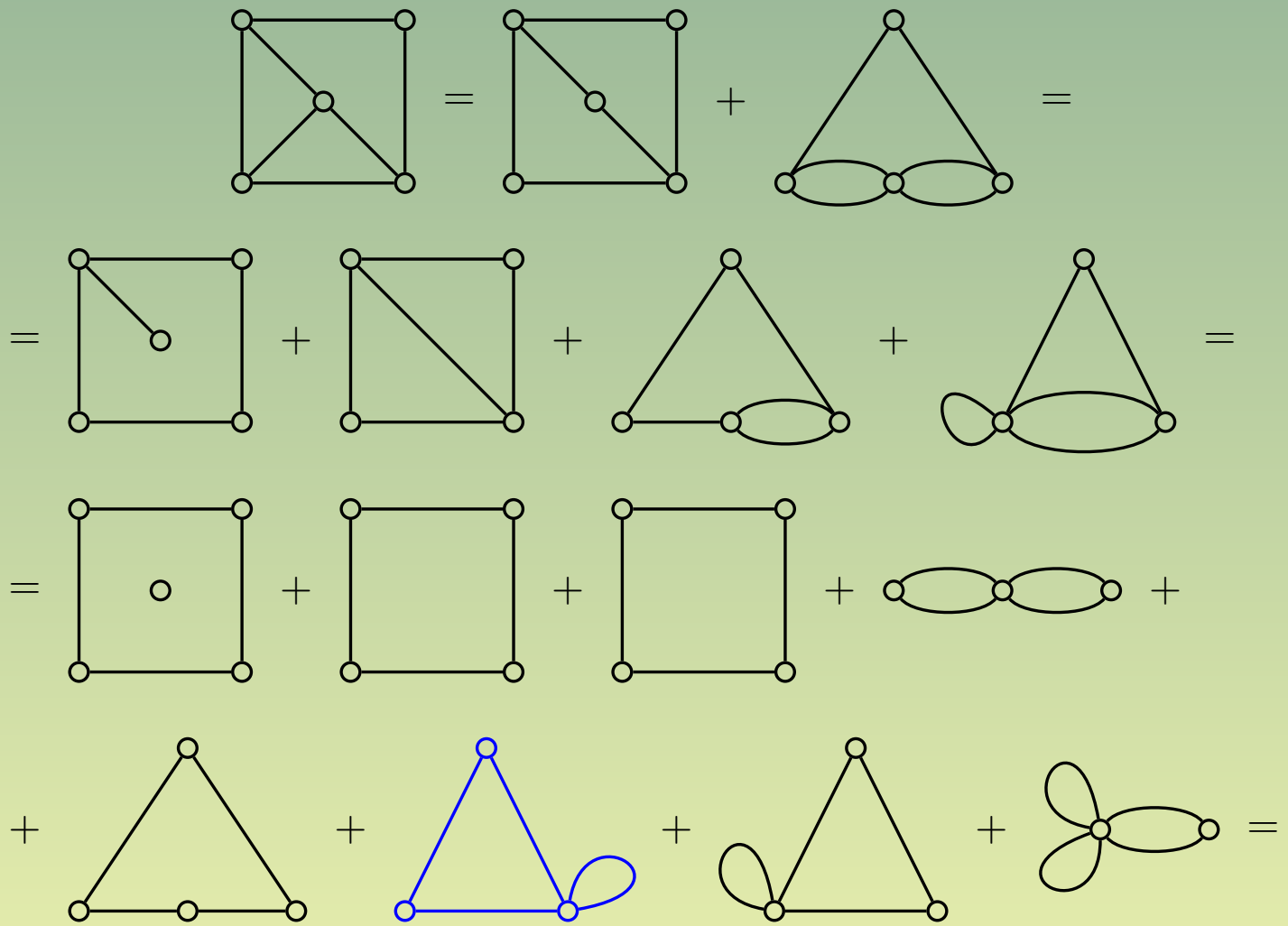
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



$= 0 + 4 + 4 + 4 + 4 +$

Plavi graf je 4-ciklus pa ima 4 razapinjuća stabla.

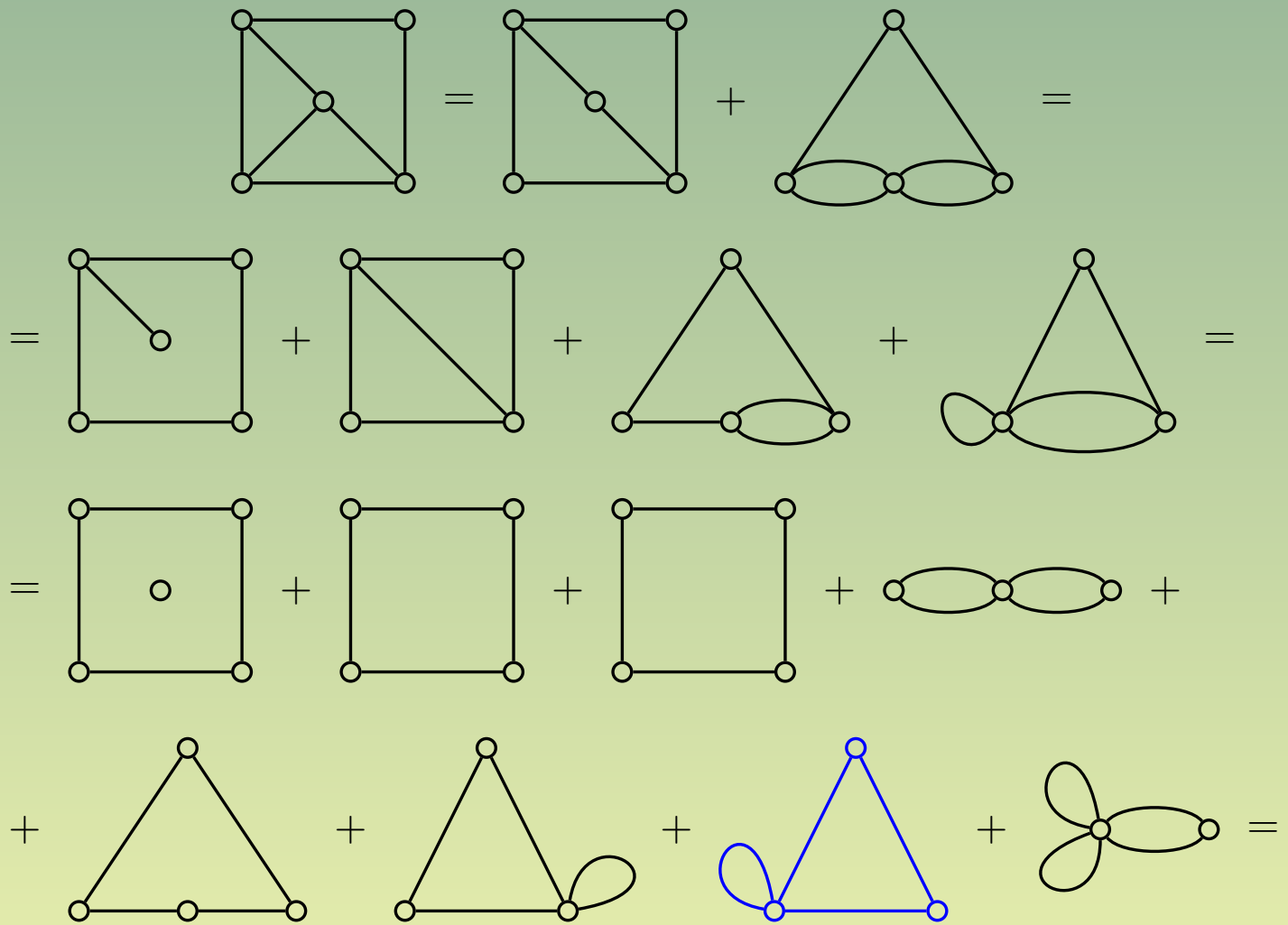
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



$= 0 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 +$

Kada zanemarimo petlju, tada zapravo imamo 3-ciklus. Stoga plavi graf ima 3 razapinjuća stabla.

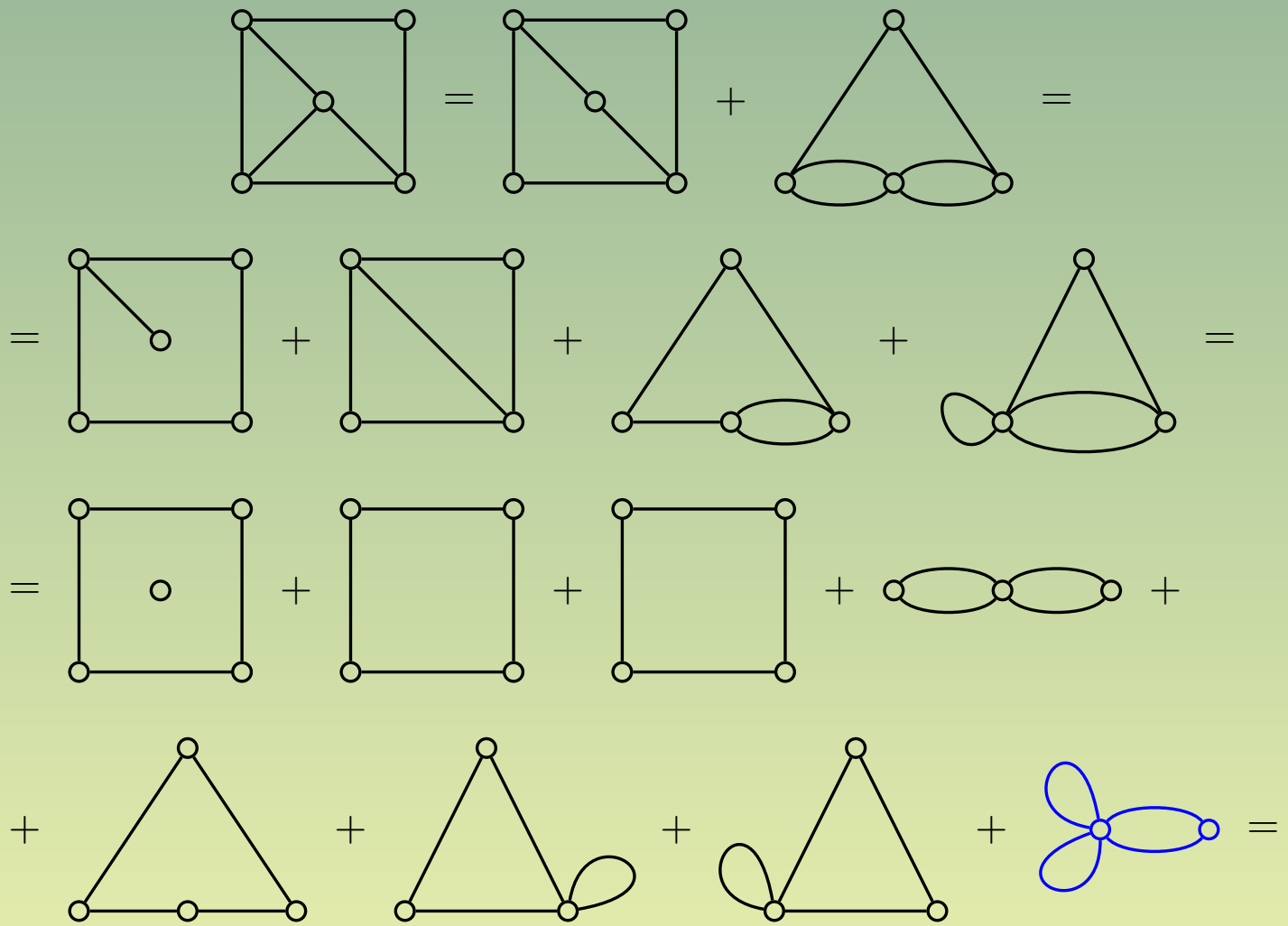
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



$= 0 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 + 3 +$

Kada zanemarimo petlju, tada zapravo imamo 3-ciklus. Stoga plavi graf ima 3 razapinjuća stabla.

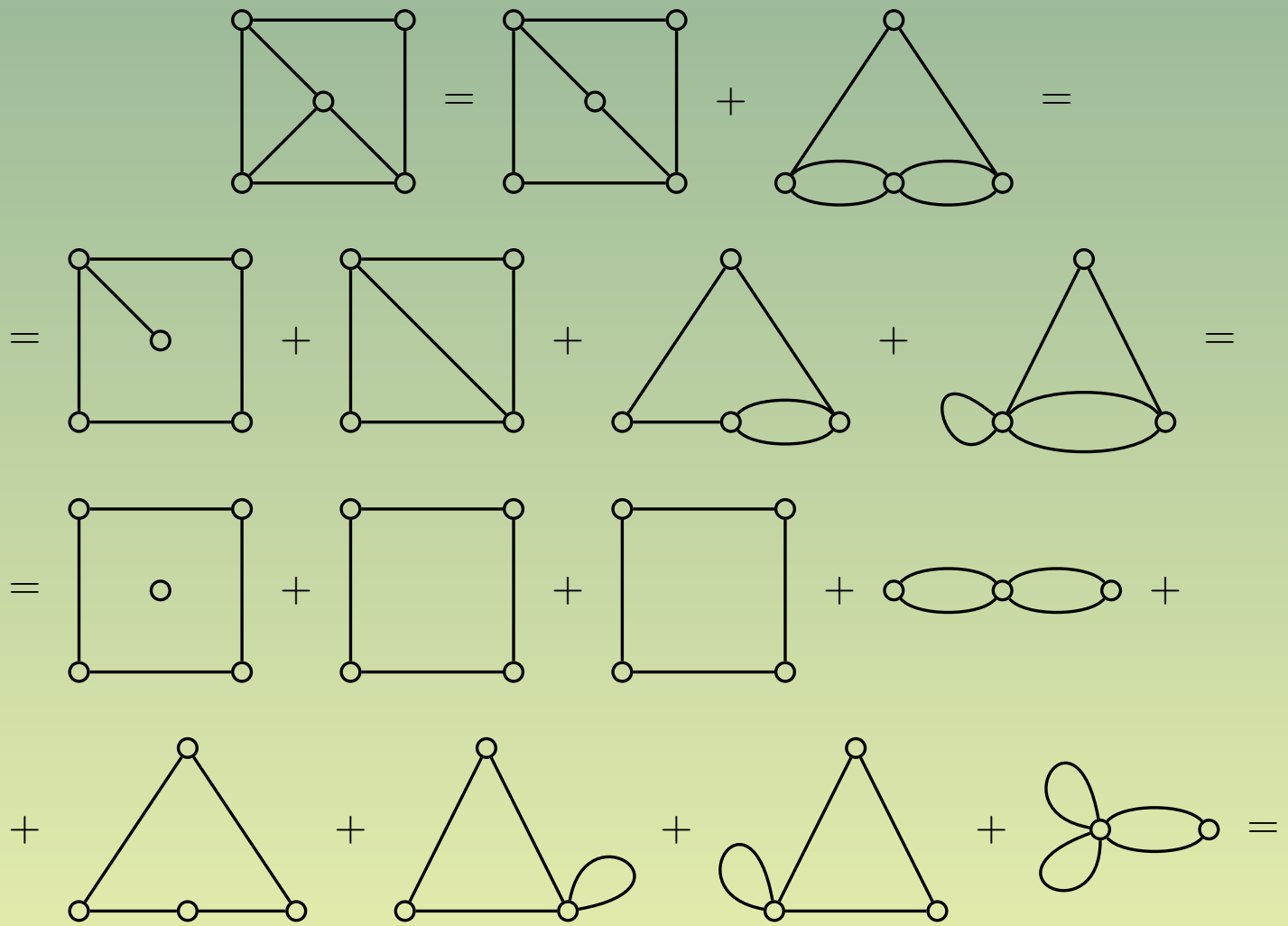
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



$= 0 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 + 3 + 2$

Kada zanemarimo obje petlje, tada zapravo imamo 2-ciklus. Stoga plavi graf ima 2 razapinjuća stabla.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



$$= 0 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 + 3 + 2 = 24$$

Konačno, $\tau = 24$, tj. početni graf ima ukupno 24 razapinjućih stabala.

Stabla

Def. i karakterizacije

Riješeni primjeri

Korijenska stabla

Bin. stabla i alg. izrazi

Stablo sortiranja

Sortiranje u parcijalno uređenom skupu

Hrpa

Razapinjuća stabla

Rekurzija za raz. stabla

Riješeni primjeri

Matrični teorem o stablima

Teoretski primjeri

DFS i BFS algoritam

DFS algoritam

BFS algoritam

Povezanost grafa

Kruskal i Prim

Kruskalov algoritam

Implementacija Kruskala

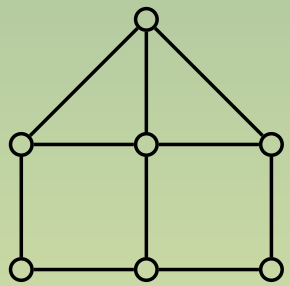
Primov algoritam

Implementacija Prima

Još o Ham. ciklusu

Zadatak 8.13.

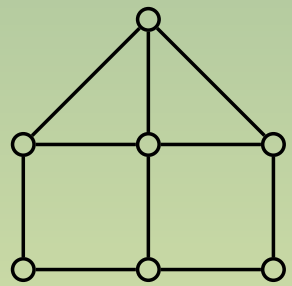
Pomoću rekurzije odredite broj razapinjućih stabala grafa



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Zadatak 8.13.

Pomoću rekurzije odredite broj razapinjućih stabala grafa



Rješenje.

Zadani graf ima ukupno 95 razapinjućih stabala. Budite strpljivi tokom rješavanja jer treba puno puta pozivati rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$ na puno grafova dobivenih u međukoracima.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Ako ste riješili prethodni zadatak, mogli ste uočiti da je rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$ nezgodno primjenjivati na grafovima s puno vrhova i bridova jer ju se tada mora puno puta pozivati. Međutim, postoji jedan elegantniji način za računanje broja razapinjućih stabala povezanog grafa. O tome govori sljedeći teorem.

Teorem 8.6 (Matrični teorem o stablima).

Neka je G povezani graf bez petlji sa skupom vrhova $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Neka je $A = [a_{ij}]$ matrica susjedstva grafa G. Neka je $Q = [q_{ij}]$ $n \times n$ matrica za koju vrijedi

$$q_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & i \neq j \\ d_G(v_i), & i = j \end{cases}.$$

Tada je $\tau(G)$ jednak bilo kojem kofaktoru matrice Q.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Skica dokaza.

Nećemo vas zamarati s nepotrebnim detaljima, nego bismo samo željeli da zapamtite strukturu samog dokaza da vidite na koji se način dokazuje ovaj prekrasni teorem i na koji se način uopće uspostavlja veza između razapinjućih stabala i matrice susjedstva. Također, unutar samog opisa dokaza, obratite pažnju na koji se način matrica Q iz teorema može dobiti i iz matrice incidencije grafa G.

Najprije se pogleda matrica incidencije M grafa G. U svakom stupcu matrice M se nalaze točno dvije jedinice (jer po pretpostavci graf nema petlji) i jednu od njih zamijenimo s -1. To napravimo za svaki stupac matrice M i na taj način dobijemo matricu E. Tada se dokaže da je $EE^T = Q$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Neka je E_0 matrica dobivena iz matrice E izbacivanjem, npr. zadnjeg retka. Matrica E_0 ima tada $n-1$ redaka. Neka je B bilo koja $(n-1) \times (n-1)$ podmatrica od E_0. Tada se dokaže da je

$$\det B = \begin{cases} \pm 1, & \text{ako je podgraf } G' \subseteq G \text{ induciran bridovima koji} \\ & \text{odgovaraju stupcima od } B \text{ razapinjuće stablo od } G \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Dokaz se provodi indukcijom po n. U samom dokazu se razlikuju dva slučaja:

- Postoji vrh v_i $(i \neq n)$ stupnja 1 u G'.
- Nema vrha stupnja 1 u G', osim možda vrha v_n.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Nakon toga se primjenom Binet-Cauchyjeve formule dobiva

$$\det\left(E_0 E_0^T\right) = \sum \left(\det B\right)^2,$$

gdje se sumira po svim $(n-1)\times(n-1)$ podmatricama B od E_0. Tada je

$$\left(\det B\right)^2 = \begin{cases} 1, & \text{ako je } B \text{ pridružena razapinjućem stablu od } G \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Iz $EE^T = Q$ i svega navedenog slijedi tvrdnja. ♡

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Teorem 8.7 (Cayleyeva formula).

Potpuni graf K_n ima ukupno n^{n-2} razapinjućih stabala, tj. $\tau(K_n) = n^{n-2}$.

Dokaz.

Matrica susjedstva grafa K_n je $n \times n$ matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica A na glavnoj dijagonali ima nule, a izvan glavne dijagonale jedinice.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Matrica Q iz matričnog teorema o stablima tada izgleda

$$Q = \begin{bmatrix} n-1 & & & \\ & \cdot & & -1 \\ & & \cdot & \\ & -1 & & \cdot \\ & & & & n-1 \end{bmatrix}.$$

Matrica Q je $n \times n$ matrica koja na glavnoj dijagonali ima brojeve $n-1$, a izvan glavne dijagonale -1.

Prema matričnom teoremu o stablima je tada $\tau(K_n)$ jednak bilo kojem kofaktoru matrice Q. Izračunat ćemo Q_{11}, tj. kofaktor na poziciji $(1,1)$ matrice Q.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Slijedi da je

$$\tau(K_n) = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

pri čemu je gornja determinanta reda $n-1$.

Dodamo li sukcesivno prvom retku svaki preostali redak (pri toj transformaciji se vrijednost determinante ne mijenja), dobivamo da je

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

$$\tau(K_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}.$$

Nakon toga prvi redak dodamo svim preostalim recima pa dobivamo

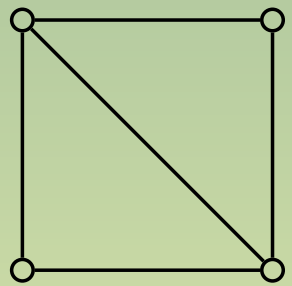
$$\tau(K_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

Dobili smo $(n-1) \times (n-1)$ gornjetrokutastu determinantu, a njezina vrijednost je jednaka produktu elemenata na glavnoj dijagonali pa je $\tau(K_n) = n^{n-2}$. ♡

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.39.

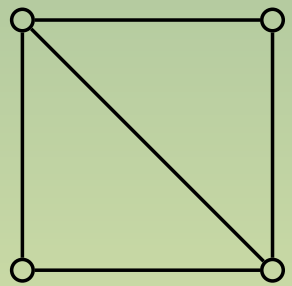
Pomoću matričnog teorema o stablima odredite broj razapinjućih stabala grafa



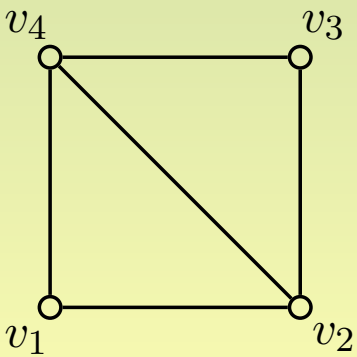
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.39.

Pomoću matričnog teorema o stablima odredite broj razapinjućih stabala grafa



Rješenje.



Matrica susjedstva

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Iz toga slijedi da je

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Broj svih razapinjućih stabala zadanog grafa jednak je bilo kojem kofaktoru matrice Q. Izračunat ćemo Q_{11}, tj. kofaktor na poziciji $(1,1)$ u matrici Q. Dobivamo da je

$$\tau = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8.$$

Dakle, zadani graf ima ukupno 8 razapinjućih stabala. Uvjerite se da su i svi preostali kofaktori matrice Q zaista jednaki 8.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.40.

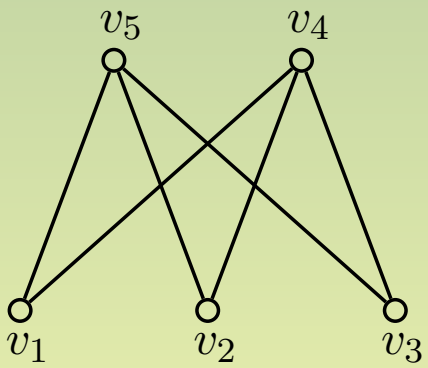
Pomoću matričnog teorema o stablima odredite broj razapinjućih stabala grafa $K_{2,3}$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.40.

Pomoću matričnog teorema o stablima odredite broj razapinjućih stabala grafa $K_{2,3}$.

Rješenje.



Matrica susjedstva

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrica Q iz matričnog teorema o stablima je tada jednaka

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Broj svih razapinjućih stabala zadanog grafa jednak je bilo kojem kofaktoru matrice Q. Izračunat ćemo Q_{55}, tj. kofaktor na poziciji $(5,5)$ u matrici Q. Dobivamo da je

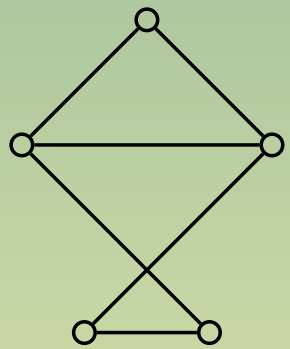
$$\tau = (-1)^{5+5} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

Dakle, zadani graf ima ukupno 12 razapinjućih stabala. Uvjerite se da su i svi preostali kofaktori matrice Q zaista jednaki 12.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.41.

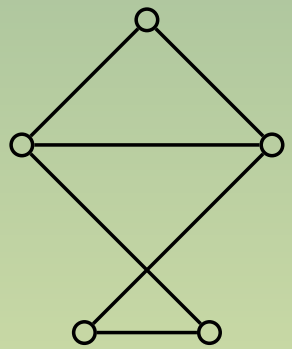
Pomoću matričnog teorema o stablima odredite broj razapinjućih stabala grafa



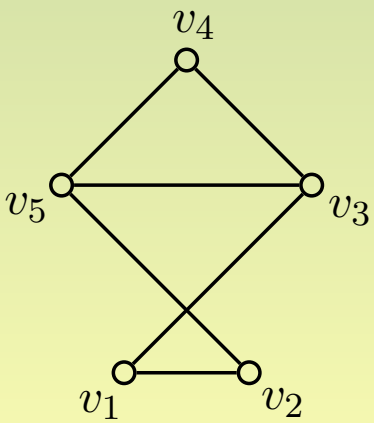
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.41.

Pomoću matričnog teorema o stablima odredite broj razapinjućih stabala grafa



Rješenje.



Matrica susjedstva

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Iz toga slijedi da je

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Broj svih razapinjućih stabala zadanog grafa jednak je bilo kojem kofaktoru matrice Q. Izračunat ćemo Q_{11}, tj. kofaktor na poziciji $(1,1)$ u matrici Q. Dobivamo da je

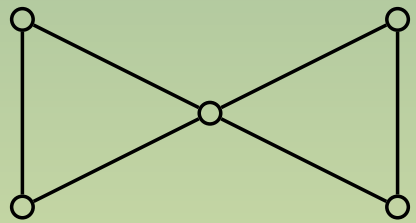
$$\tau = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 11.$$

Dakle, zadani graf ima ukupno 11 razapinjućih stabala. Uvjerite se da su i svi preostali kofaktori matrice Q zaista jednaki 11.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.42.

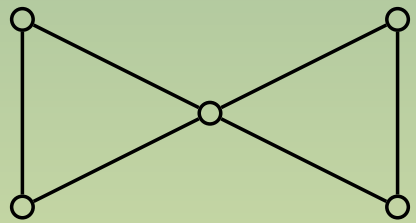
Pomoću matričnog teorema o stablima odredite broj razapinjućih stabala grafa



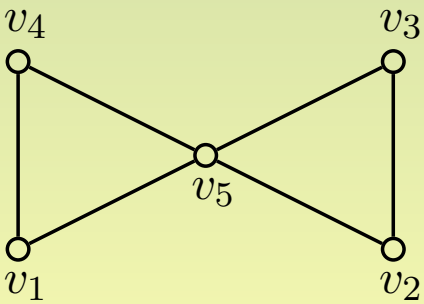
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.42.

Pomoću matričnog teorema o stablima odredite broj razapinjućih stabala grafa



Rješenje.



Matrica susjedstva

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Iz toga slijedi da je

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Broj svih razapinjućih stabala zadanog grafa jednak je bilo kojem kofaktoru matrice Q. Izračunat ćemo Q_{11}, tj. kofaktor na poziciji $(1,1)$ u matrici Q. Dobivamo da je

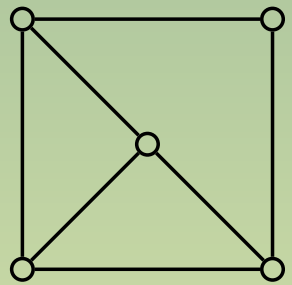
$$\tau = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 9.$$

Dakle, zadani graf ima ukupno 9 razapinjućih stabala. Uvjerite se da su i svi preostali kofaktori matrice Q zaista jednaki 9.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.43.

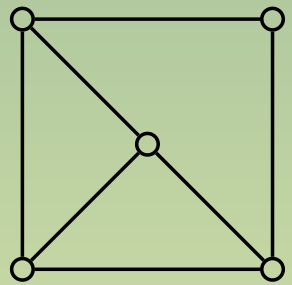
Pomoću matričnog teorema o stablima odredite broj razapinjućih stabala grafa



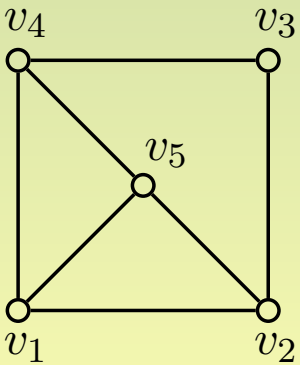
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.43.

Pomoću matričnog teorema o stablima odredite broj razapinjućih stabala grafa



Rješenje.



Matrica susjedstva

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Iz toga slijedi da je

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Broj svih razapinjućih stabala zadanog grafa jednak je bilo kojem kofaktoru matrice Q. Izračunat ćemo Q_{51}, tj. kofaktor na poziciji $(5,1)$ u matrici Q. Dobivamo da je

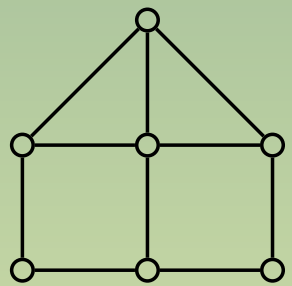
$$\tau = (-1)^{5+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 24.$$

Dakle, zadani graf ima ukupno 24 razapinjućih stabala. Uvjerite se da su i svi preostali kofaktori matrice Q zaista jednaki 24.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

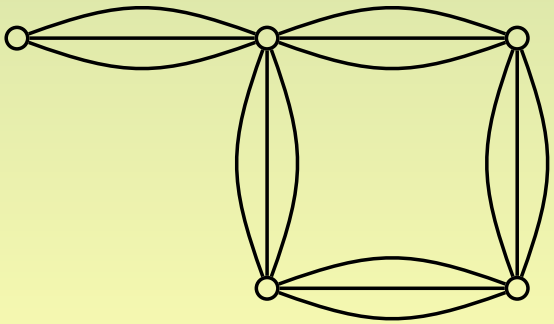
Zadatak 8.14.

Pomoću matričnog teorema o stablima odredite broj razapinjućih stabala grafa



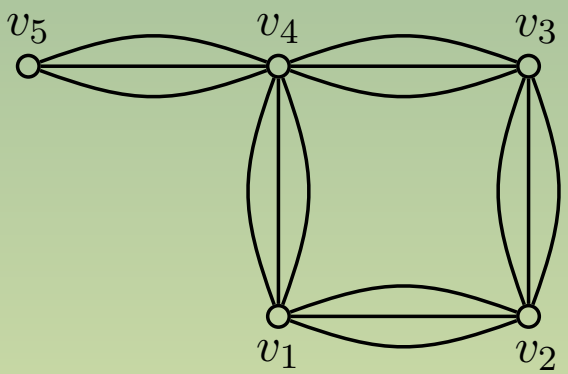
Primjer 8.44.

Odredite broj neizomorfnih i ukupni broj razapinjućih stabala grafa



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Rješenje.



Matrica susjedstva

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Iz toga slijedi da je

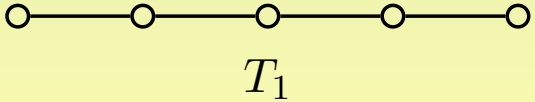
$$Q = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

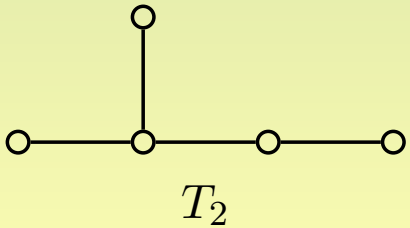
Broj svih razapinjućih stabala zadanog grafa jednak je bilo kojem kofaktoru matrice Q. Izračunat ćemo Q_{51}, tj. kofaktor na poziciji $(5,1)$ u matrici Q. Dobivamo da je

$$\tau = (-1)^{5+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 & -3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & -3 \end{vmatrix} = 324.$$

Dakle, zadani graf ima ukupno 324 razapinjućih stabala. Uvjerite se da su i svi preostali kofaktori matrice Q zaista jednaki 324. Među svim tim stablima samo su dvije klase neizomorfnih stabala, tj. svako od tih stabala je izomorfno ili sa stablom T_1 ili sa stablom T_2.



T_1



T_2

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.45.

Neka je e bilo koji brid potpunog grafa K_n pri čemu je $n \geqslant 2$. Dokažite da je broj razapinjućih stabala grafa K_n koja sadrže brid e jednak $2n^{n-3}$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.45.

Neka je e bilo koji brid potpunog grafa K_n pri čemu je $n \geqslant 2$. Dokažite da je broj razapinjućih stabala grafa K_n koja sadrže brid e jednak $2n^{n-3}$.

Rješenje.

Od prije znamo da za odabrani brid e koji nije petlja vrijedi rekurzija

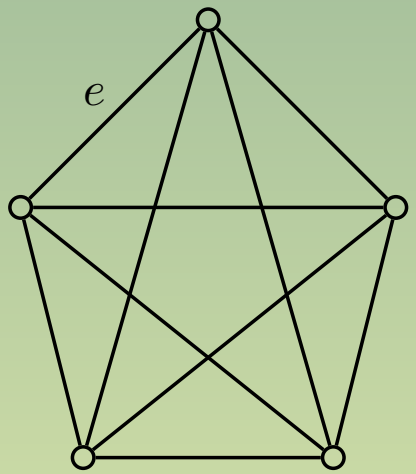
$$\tau(K_n) = \tau(K_n - e) + \tau(K_n \cdot e).$$

Pritom je $\tau(K_n - e)$ broj razapinjućih stabala od K_n koja ne sadrže brid e, a $\tau(K_n \cdot e)$ je broj razapinjućih stabala od K_n koja sadrže brid e. Trebamo dokazati da je $\tau(K_n \cdot e) = 2n^{n-3}$.

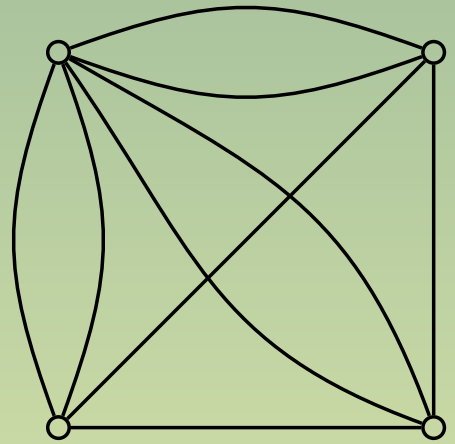
Graf $K_n \cdot e$ je zapravo potpuni graf K_{n-1} kojemu su iz jednog vrha dodani dvostruki bridovi prema svim ostalim vrhovima.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Na primjer, za $n = 5$ slika izgleda



K_5



$K_5 \cdot e$

Matrica susjedstva grafa $K_n \cdot e$ je $(n-1) \times (n-1)$ matrica oblika

$$A(K_n \cdot e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

Stabla

Def. i karakterizacije

Riješeni primjeri

Korijenska stabla

Bin. stabla i alg. izrazi

Stablo sortiranja

Sortiranje u parcijalno uređenom skupu

Hrpa

Razapinjuća stabla

Rekurzija za raz. stabla

Riješeni primjeri

Matrični teorem o stablima

Teoretski primjeri

DFS i BFS algoritam

DFS algoritam

BFS algoritam

Povezanost grafa

Kruskal i Prim

Kruskalov algoritam

Implementacija Kruskala

Primov algoritam

Implementacija Prima

Još o Ham. ciklusu

gdje smo (bez smanjenja općenitosti) vrh s dvostrukim bridovima prema svim ostalim vrhovima stavili u posljednji redak, odnosno stupac. Matrica $Q(K_n \cdot e)$ je tada $(n-1) \times (n-1)$ matrica oblika

$$Q(K_n \cdot e) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -2 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -2 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2 & -2 & -2 & \cdots & 2(n-2) \end{bmatrix}.$$

Tada je $\tau(K_n \cdot e)$ jednak bilo kojem kofaktoru matrice $Q(K_n \cdot e)$. Izračunat ćemo kofaktor na poziciji $(n-1, n-1)$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Slijedi da je

$$\tau(K_n \cdot e) = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

pri čemu je gornja determinanta reda $n-2$. Dodamo li svaki redak prvom retku, dobivamo

$$\tau(K_n \cdot e) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}.$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Elementi prvog retka imaju zajednički faktor 2 kojeg smijemo izlučiti izvan determinante pa je

$$\tau(K_n \cdot e) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}.$$

Dodamo li sada prvi redak svim preostalim recima, dobivamo da je

$$\tau(K_n \cdot e) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Posljednja $(n-2) \times (n-2)$ determinanta je gornjetrokutasta pa je njezina vrijednost jednaka produktu elemenata na glavnoj dijagonali. Stoga je $\tau(K_n \cdot e) = 2n^{n-3}$.

Primjer 8.46.

Odredite broj razapinjućih stabala grafa $K_{2,n}$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

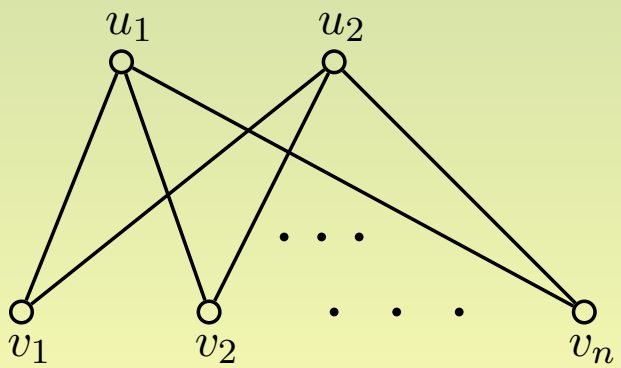
Posljednja $(n-2) \times (n-2)$ determinanta je gornjetrokutasta pa je njezina vrijednost jednaka produktu elemenata na glavnoj dijagonali. Stoga je $\tau(K_n \cdot e) = 2n^{n-3}$.

Primjer 8.46.

Odredite broj razapinjućih stabala grafa $K_{2,n}$.

Rješenje.

Graf $K_{2,n}$ izgleda



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Njegova matrica susjedstva je $(n+2) \times (n+2)$ matrica

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

pa je

$$Q = \left[\begin{array}{cc|ccc} n & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & n & -1 & \cdots & -1 \\ \hline -1 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 2 \end{array}\right].$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Broj razapinjućih stabala grafa $K_{2,n}$ jednak je bilo kojem kofaktoru matrice Q. Izračunat ćemo kofaktor na poziciji $(1,1)$. Dobivamo da je

$$\tau(K_{2,n}) = \begin{vmatrix} n & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

pri čemu je gornja determinanta reda $n+1$. Pomnožimo li svaki redak (osim prvog) s $\frac{1}{2}$ i zatim ga dodamo prvom retku, dobit ćemo da je

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

$$\tau(K_{2,n}) = \begin{vmatrix} \frac{n}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

Dobili smo donjetrokutastu determinantu reda $n+1$ pa je njezina vrijednost jednaka produktu elemenata na glavnoj dijagonali, tj.

$$\tau(K_{2,n}) = \frac{n}{2} \cdot 2^n = n \cdot 2^{n-1}.$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.47.

Neka je e brid povezanog grafa G koji pripada svakom razapinjućem stablu grafa G. Dokažite da je tada e rezni brid grafa G.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.47.

Neka je e brid povezanog grafa G koji pripada svakom razapinjućem stablu grafa G. Dokažite da je tada e rezni brid grafa G.

Rješenje.

Pretpostavimo da e nije rezni brid grafa G. Tada je $G - e$ povezani graf pa ima razapinjuće stablo T. No, kako $G - e$ sadrži sve vrhove grafa G, tada je T razapinjuće stablo od G koje ne sadrži brid e, što je kontradikcija s pretpostavkom zadatka. Stoga je e zaista rezni brid grafa G.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.48.

Dokažite da se svaki brid (osim petlje) u povezanom grafu nalazi u nekom njegovom razapinjućem stablu.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.48.

Dokažite da se svaki brid (osim petlje) u povezanom grafu nalazi u nekom njegovom razapinjućem stablu.

Rješenje.

Neka je e bilo koji brid povezanog grafa G. Neka je T neko razapinjuće stablo od G. Ako se brid e ne nalazi u T, tada $T + e$ mora sadržavati ciklus. Izbacimo li neki brid iz tog ciklusa (osim brida e), dobivamo razapinjuće stablo od G koje sadrži brid e.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.49.

Dokažite da se bilo koja dva brida (različita od petlje) u jednostavnom povezanom grafu nalaze u nekom njegovom razapinjućem stablu.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.49.

Dokažite da se bilo koja dva brida (različita od petlje) u jednostavnom povezanom grafu nalaze u nekom njegovom razapinjućem stablu.

Rješenje.

Neka su e_1 i e_2 dva brida u jednostavnom povezanom grafu G. Prema prethodnom zadatku e_1 se nalazi u nekom razapinjućem stablu T grafa G. Ukoliko je e_2 također u tom stablu T, onda je gotovo. Ako e_2 nije brid od T, tada $T + e_2$ sadrži ciklus. Iz tog ciklusa tada izbacimo jedan brid (osim bridova e_1 i e_2) i dobivamo novo razapinjuće stablo T' grafa G koje sadrži oba brida e_1 i e_2. Da li tvrdnja vrijedi ukoliko graf G nije jednostavan? Objasnite!

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.50.

Da li postoji razapinjuće stablo jednostavnog povezanog grafa G koje sadrži unaprijed zadana tri različita brida grafa G?

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.50.

Da li postoji razapinjuće stablo jednostavnog povezanog grafa G koje sadrži unaprijed zadana tri različita brida grafa G?

Rješenje.

Ukoliko ta tri brida čine ciklus, tada takvo razapinjuće stablo ne postoji.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.51.

Neka je G povezani graf s barem dva vrha. Dokažite da graf G ima vrh v takav da je $G - v$ povezan graf. Dokažite da graf G ima barem dva vrha s tim svojstvom.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.51.

Neka je G povezani graf s barem dva vrha. Dokažite da graf G ima vrh v takav da je $G - v$ povezan graf. Dokažite da graf G ima barem dva vrha s tim svojstvom.

Rješenje.

Kako je G povezani graf, tada ima barem jedno razapinjuće stablo T. Kako svako neprazno stablo ima barem dva vrha stupnja 1, neka su tada v_1 i v_2 vrhovi u stablu T koji su stupnja 1 u stablu T. Jasno je da su $T - v_1$ i $T - v_2$ povezani grafovi, dapače to su i dalje stabla. Međutim, tada su $G - v_1$ i $G - v_2$ također povezani grafovi jer se oni dobiju iz grafova $T - v_1$ i $T - v_2$ dodavanjem eventualno još nekih bridova, što ne može narušiti povezanost.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.52.

Dokažite da svaki graf G sadrži barem $\varepsilon - \nu + \omega$ različitih ciklusa.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.52.

Dokažite da svaki graf G sadrži barem $\varepsilon - \nu + \omega$ različitih ciklusa.

Rješenje.

Pretpostavimo najprije da je graf G povezan, tj. da je $\omega = 1$. Tada G ima razapinjuće stablo T koje sadrži $\nu - 1$ bridova od G. U stablu T nema niti jednog ciklusa. Bridova od G koji nisu u stablu T ima ukupno još $\varepsilon - (\nu - 1) = \varepsilon - \nu + 1$. Neka su to bridovi $e_1, e_2, \ldots, e_{\varepsilon-\nu+1}$. Dodamo li bilo koji od bridova e_i stablu T, dobivamo graf $T + e_i$ koji ima ciklus koji sadrži brid e_i. To je ujedno i ciklus u G. Stoga povezani graf G ima barem $\varepsilon - \nu + 1$ različitih ciklusa.

Pogledajmo sada bilo koji graf G, ne nužno povezan. Neka su $G_1, G_2, \ldots, G_\omega$ komponente povezanosti grafa G. Svaka komponenta povezanosti G_i (prema maloprije dokazanom) ima barem $\varepsilon_i - \nu_i + 1$ različitih ciklusa za $i = 1, 2, \ldots, \omega$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Stoga graf G ima barem

$$\sum_{i=1}^{\omega} (\varepsilon_i - \nu_i + 1)$$

različitih ciklusa. Raspisivanjem dobivamo

$$\sum_{i=1}^{\omega} (\varepsilon_i - \nu_i + 1) = \sum_{i=1}^{\omega} \varepsilon_i - \sum_{i=1}^{\omega} \nu_i + \omega = \varepsilon - \nu + \omega.$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.53.

Ako su svi vrhovi grafa G parnog stupnja, tada G nema reznih bridova. Dokažite!

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.53.

Ako su svi vrhovi grafa G parnog stupnja, tada G nema reznih bridova. Dokažite!

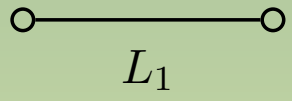
Rješenje.

Pretpostavimo prvo da je G povezan graf. Kako su svi vrhovi u G parnog stupnja, graf G je Eulerov. Uklonimo li iz njega bilo koji brid e, dobiveni graf $G - e$ tada ima Eulerovu stazu pa je stoga $G - e$ povezan. Dakle, niti jedan brid e grafa G nije rezni.

Ukoliko je graf G nepovezan, tada prethodno razmatranje provedemo na nekoj komponenti povezanosti grafa G jer su po pretpostavci sve njegove komponente povezanosti Eulerovi grafovi. Uklonimo li neki brid e iz grafa G, tada pripadna komponenta povezanosti ima Eulerovu stazu pa graf $G - e$ ima isti broj komponenata povezanosti kao i graf G. Stoga brid e nije rezni brid grafa G. Dakle, u svakom slučaju graf G nema reznih bridova.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

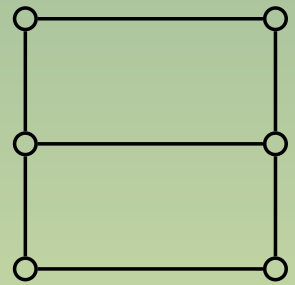
Ljestve s n prečki: L_n



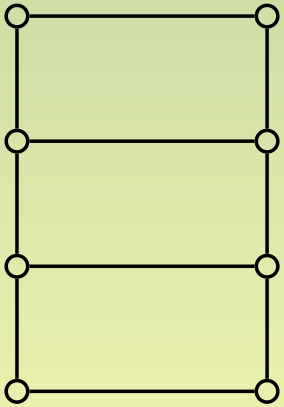
L_1



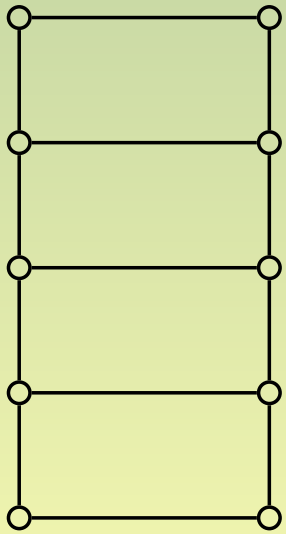
L_2



L_3



L_4



L_5

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.54.

Odredite rekurziju za računanje broja razapinjućih stabala ljestvi s n prečki.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.54.

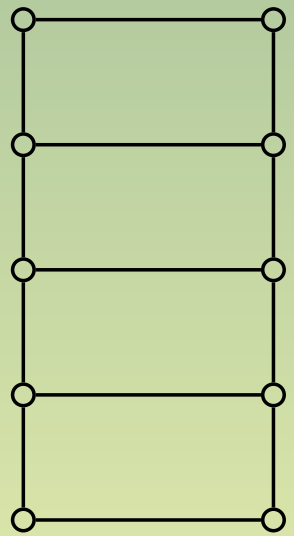
Odredite rekurziju za računanje broja razapinjućih stabala ljestvi s n prečki.

Rješenje.

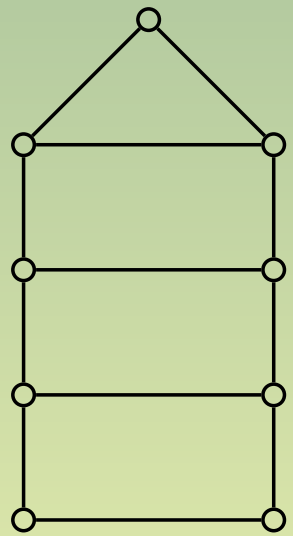
Neka je $l_n = \tau(L_n)$. Kako je L_1 zapravo stablo, tada je $l_1 = 1$. Nadalje, L_2 je zapravo 4-ciklus pa je $l_2 = 4$.

Da bismo dobili neku rekurziju za l_n, krenut ćemo od grafa L_n i pomoću poznate rekurzije $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$ ga svesti na graf L_{n-1}. U međukoraku će nam se pojaviti još jedan graf kojeg ćemo označiti s T_n, a koji je u uskoj vezi s L_n. Naime, graf T_n $(n > 1)$ umjesto zadnje "prečke" ima "krov", što je najbolje da se pogleda na sljedećoj slici pa će biti jasnije o čemu se radi.

Na primjer, za $n = 5$ imamo



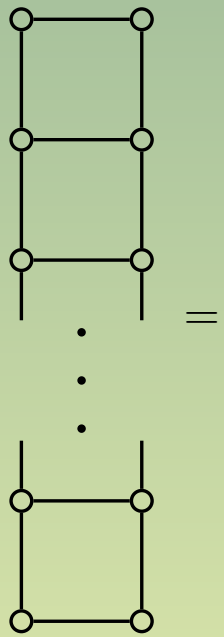
L_5



T_5

Krenimo sada s primjenom rekurzije $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$ na graf L_n.

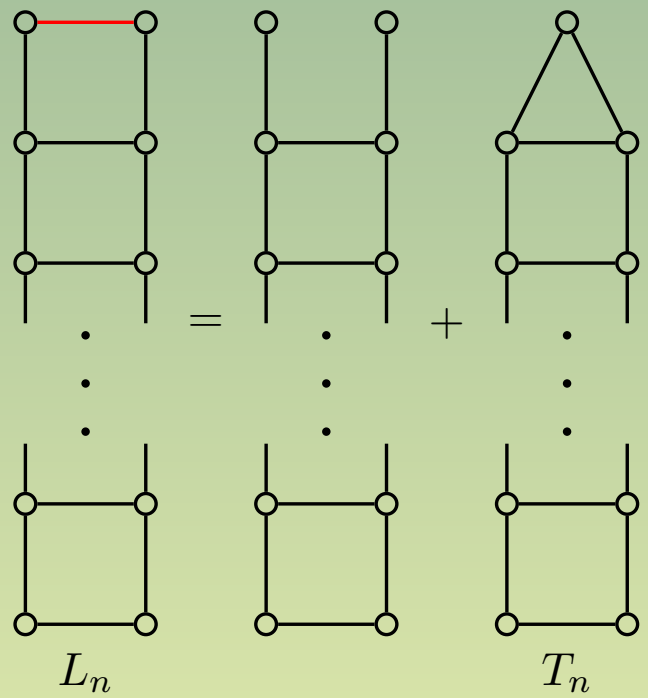
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



L_n

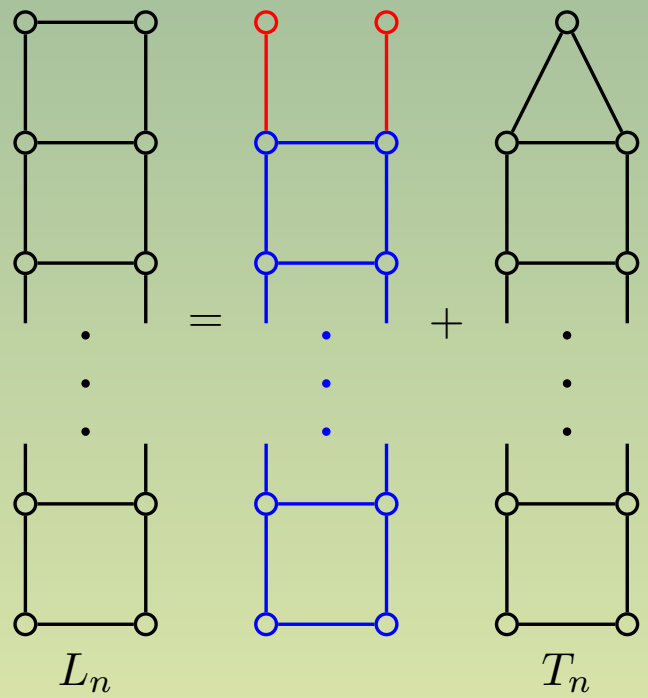
Odaberemo jedan brid,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



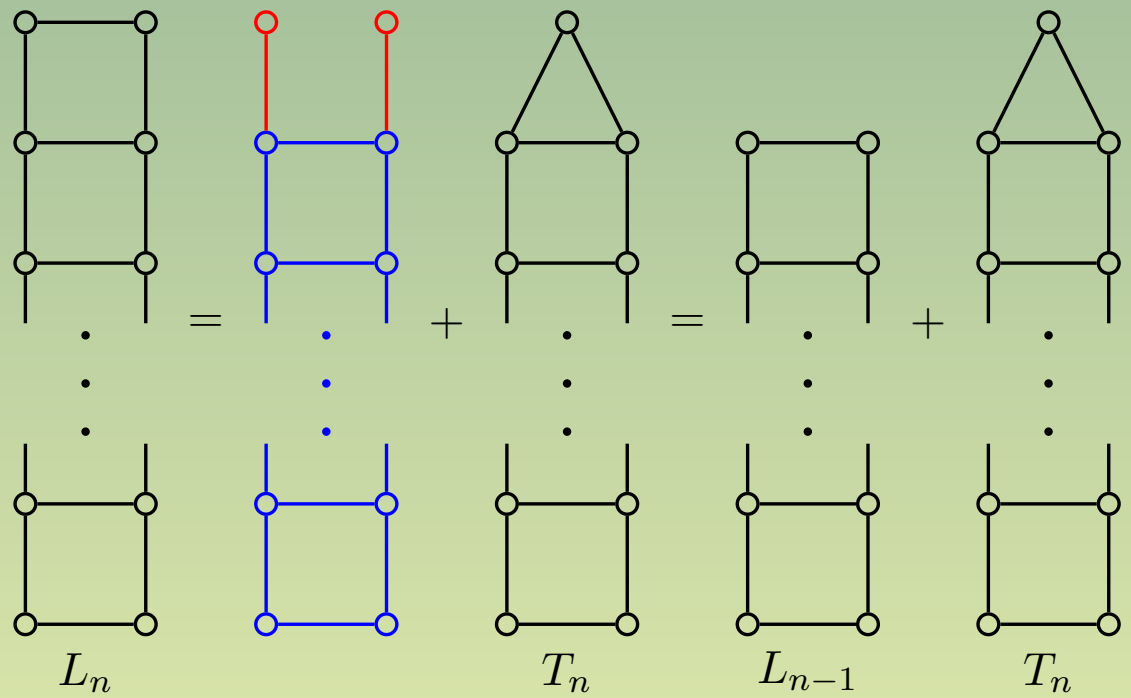
Odaberemo jedan brid, npr. crveni brid, i primijenimo rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



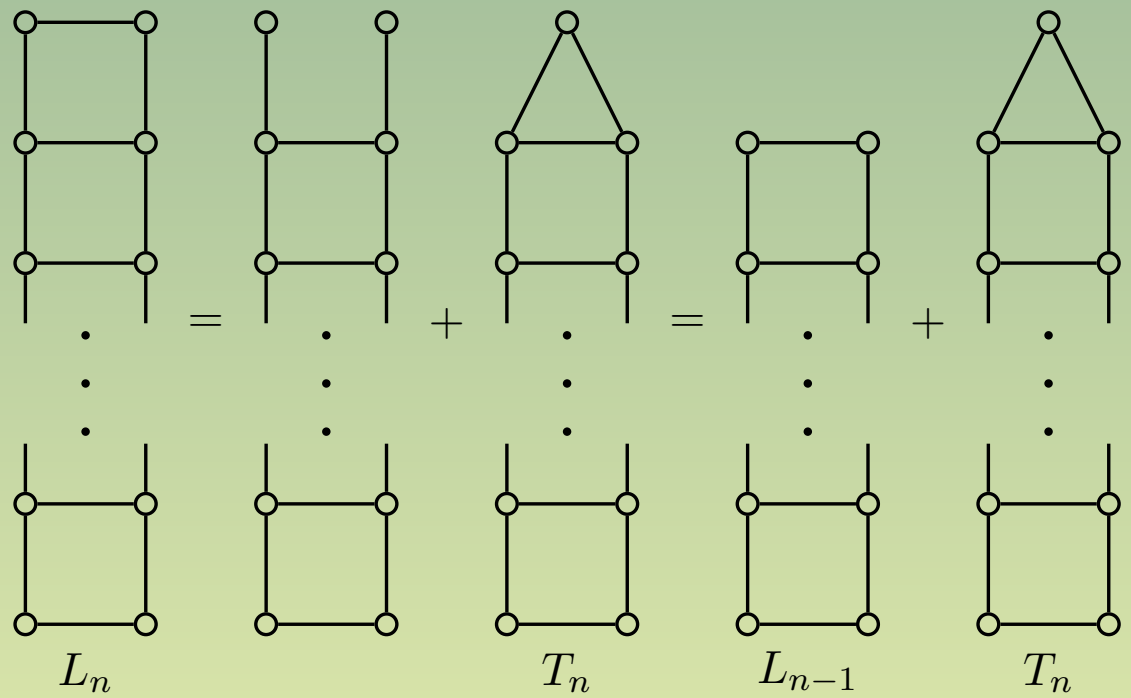
Plavi graf bez crvenih bridova i vrhova je zapravo graf L_{n-1}, a oni imaju isti broj razapinjućih stabala jer crveni bridovi se nalaze u svakom razapinjućem stablu plavog grafa.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Stoga plavi graf smijemo zamijeniti s grafom L_{n-1}.

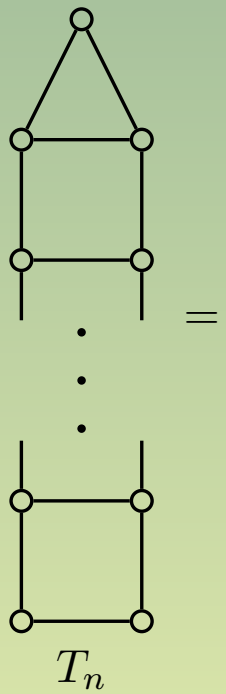
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Stavimo li $t_n = \tau(T_n)$, dobivamo rekurziju

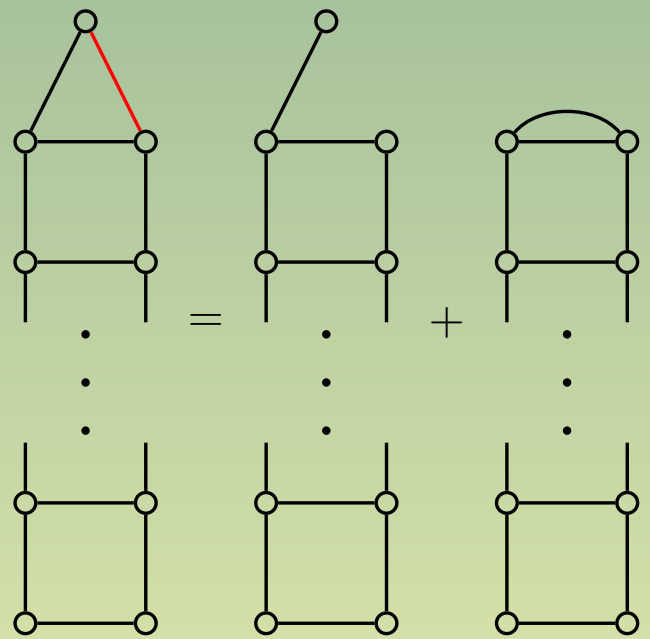
$$l_n = l_{n-1} + t_n, \quad n \geqslant 2.$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



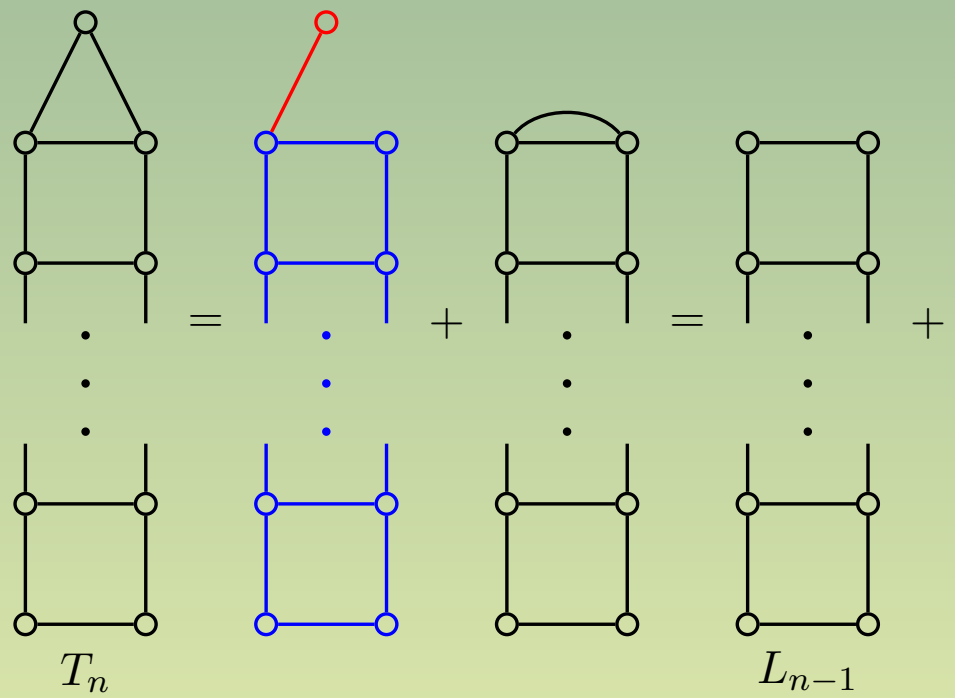
Sada istu stvar napravimo s grafom T_n. Odaberemo jedan brid,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



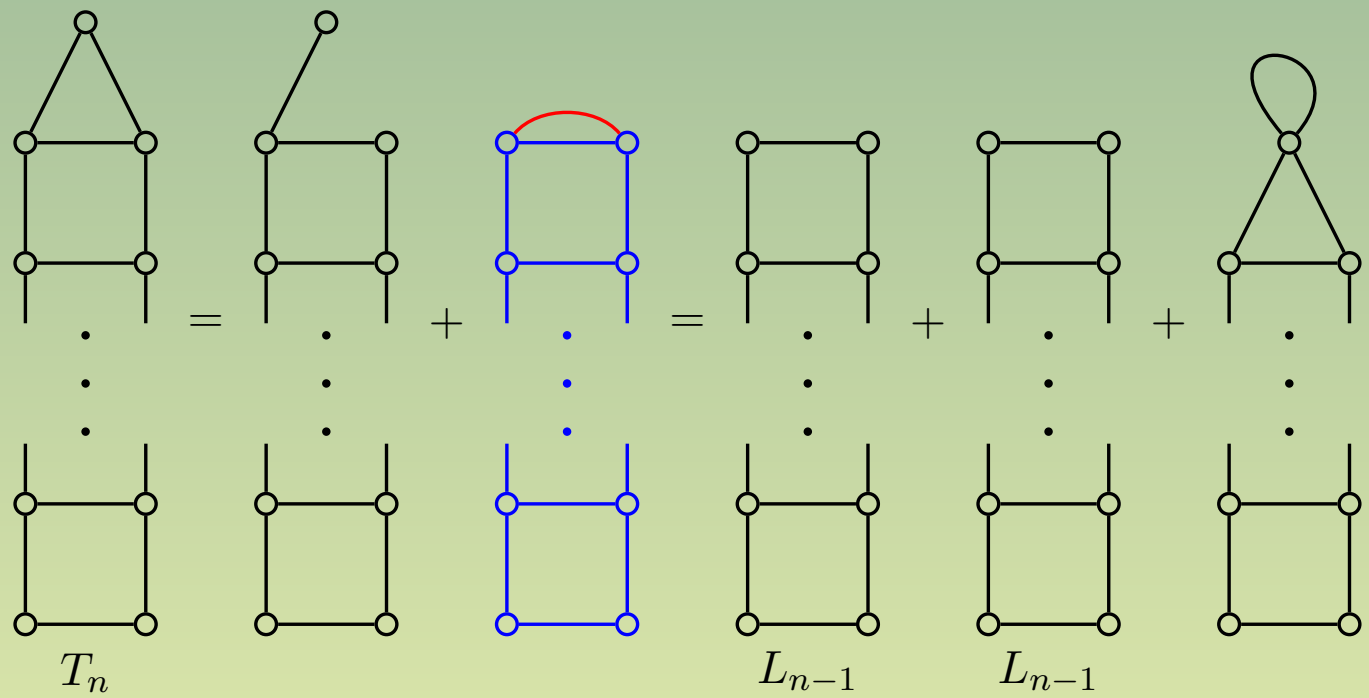
Sada istu stvar napravimo s grafom T_n. Odaberemo jedan brid, npr. crveni brid, i primijenimo rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



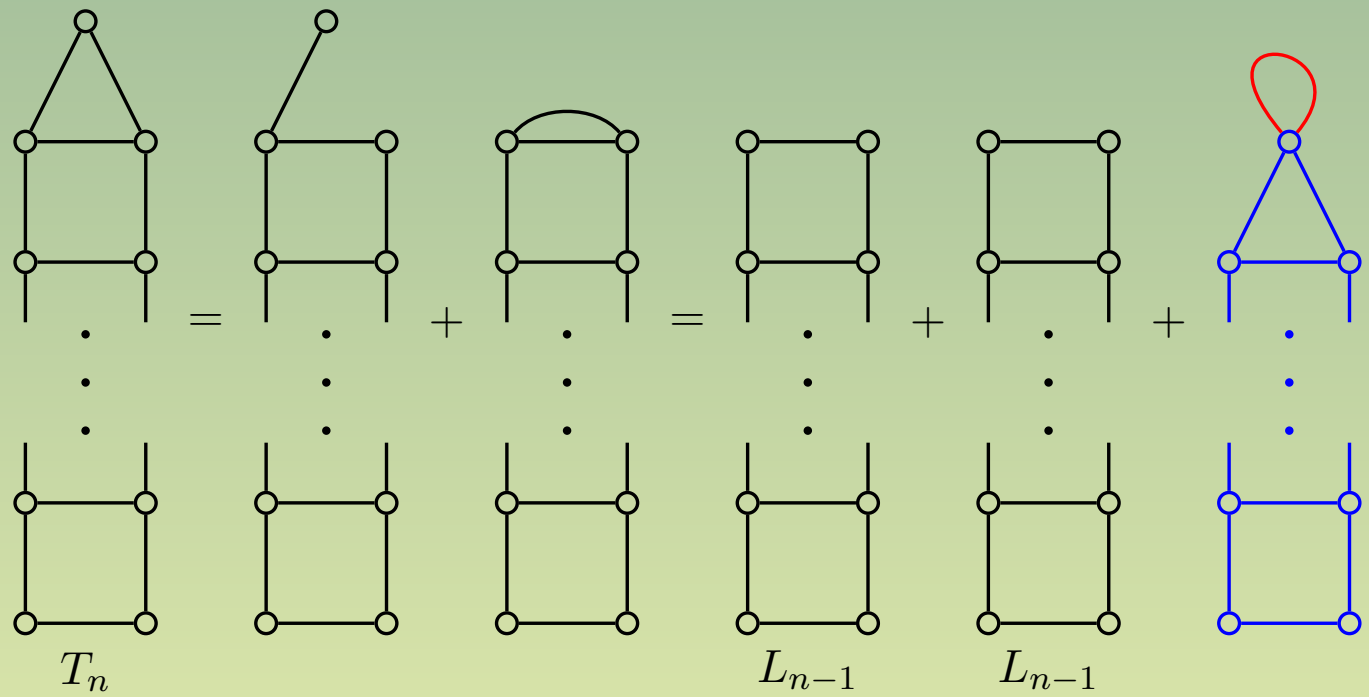
Plavi graf bez crvenog brida i vrha je zapravo graf L_{n-1}, a oni imaju isti broj razapinjućih stabala jer crveni brid se nalazi u svakom razapinjućem stablu plavog grafa. Stoga plavi graf smijemo zamijeniti s grafom L_{n-1}.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



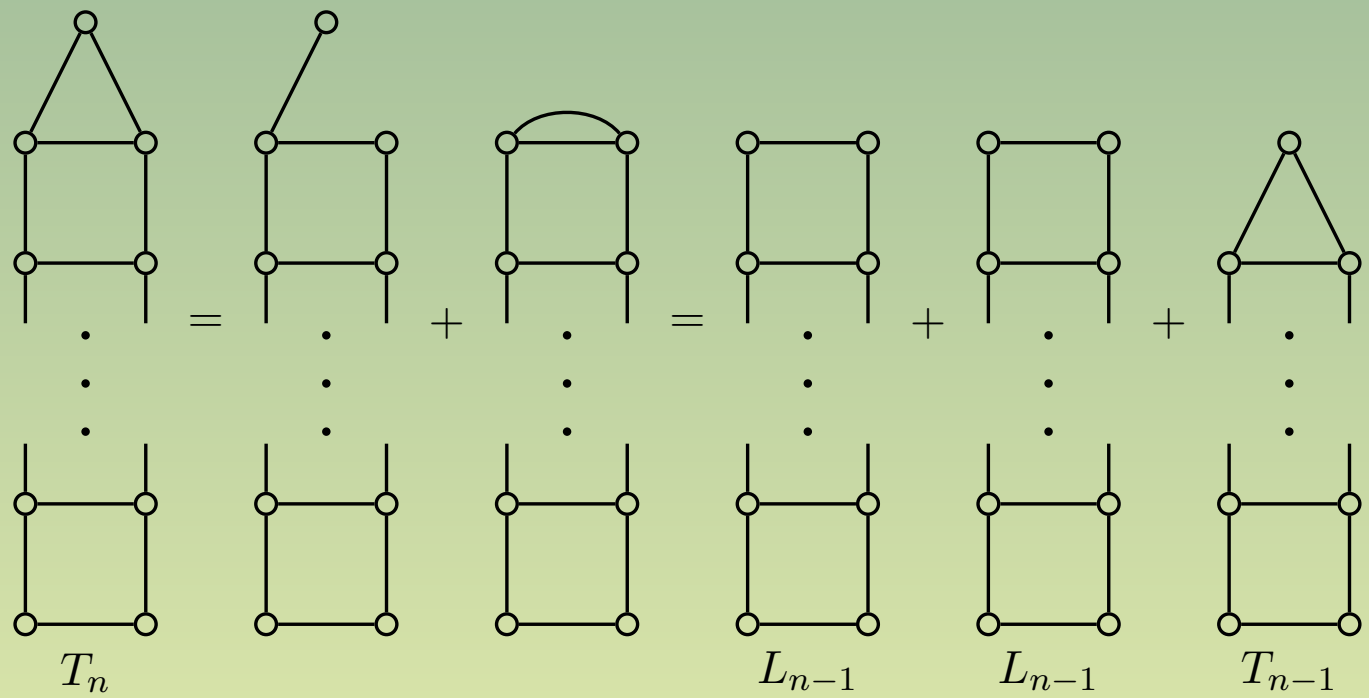
Na plavom grafu odaberemo jedan brid (crveni brid) i primijenimo rekurziju $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



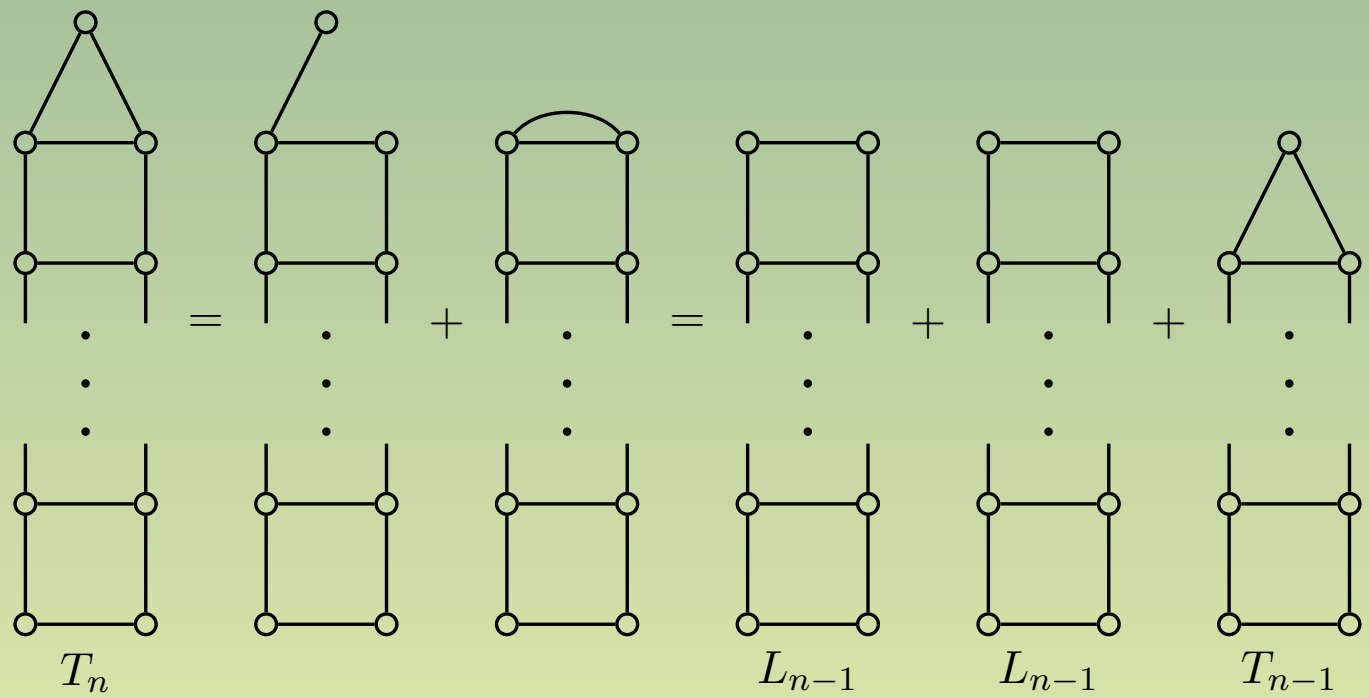
Na plavom grafu petlju smijemo zanemariti

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Na plavom grafu petlju smijemo zanemariti pa dobivamo graf T_{n-1}.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Konačno, dobili smo rekurziju

$$t_n = 2l_{n-1} + t_{n-1}, \quad n \geqslant 3.$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Sve zajedno, dobili smo sustav rekurzija

$$l_n = l_{n-1} + t_n$$
$$t_n = 2l_{n-1} + t_{n-1}$$

Iz prve rekurzije dobivamo da je $t_n = l_n - l_{n-1}$ pa uvrštavanjem u drugu dobivamo

$$l_n - l_{n-1} = 2l_{n-1} + \left(l_{n-1} - l_{n-2}\right)$$

odnosno

$$l_n = 4l_{n-1} - l_{n-2}$$

uz početne uvjete $l_1 = 1$, $l_2 = 4$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

DFS i BFS algoritam

Postavlja se pitanje kako za dani povezani graf pronaći neko njegovo razapinjuće stablo. Preciznije, kako natjerati računalo da to napravi. Problem za nas izgleda trivijalan jer kad imamo nacrtani graf nije nam teško nacrtati neko njegovo razapinjuće stablo. Međutim, računalu slika ništa ne znači jer računalo s grafom radi preko njegove matrice susjedstva ili neke druge zgodne reprezentacije.

Dijkstrin algoritam, koji nam je poznat od prije, se može primijeniti na traženje razapinjućeg stabla danog grafa tako da se svim bridovima pridruže težine 1.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Međutim, ovdje ćemo spomenuti dva efikasna algoritma koji ne zahtijevaju da bridovi moraju imati težine. Složenost oba algoritma je $O(\nu + \varepsilon)$.

- **DFS algoritam (depth-first search)**

  Ugrubo rečeno, algoritam konstruira razapinjuće stablo tako da ide u "dubinu" sve dok je to moguće. Kad to više nije moguće, vraća se korak unatrag i ponavlja postupak.

- **BFS algoritam (breadth-first search)**

  Ugrubo rečeno, algoritam konstruira razapinjuće stablo tako da ide u "širinu" sve dok je to moguće. Kad to više nije moguće, ide korak naprijed u dubinu i ponavlja postupak.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

DFS algoritam

ULAZ: Povezani graf G i vrh $v_0 \in V(G)$
IZLAZ: Razapinjuće stablo grafa G

1: Stavi da je $w = v_0$ i $n = 0$. w se zove trenutni centar traženja. Neka je T_0 stablo bez bridova sa jednim vrhom v_0.

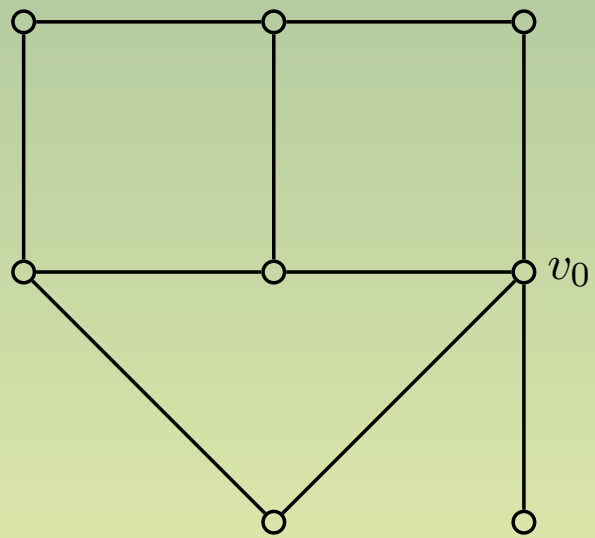
2: Ako je moguće, odaberi brid e_n koji je incidentan s w i vrhom v_{n+1} koji se još ne nalazi u stablu T_n, odnosno koji još nije posjećen. Pridruži brid e_n i vrh v_{n+1} stablu T_n i na taj način se dobije novo stablo T_{n+1}. Stavi $w = v_{n+1}$.

3: Ponavljaj korak 2) sve dok trenutni vrh w nema više susjednih neposjećenih vrhova. Ako je T_n razapinjuće stablo, tada je gotovo. Ako T_n nije razapinjuće stablo, tada se vrati natrag preko brida kojim si prvi puta došao u vrh w do prethodnog centra i povećaj n na $n + 1$. Ponavljaj korak 2) ako je to moguće. Ukoliko to nije moguće, potrebno je nekoliko vraćanja unatrag, prije nego će biti moguće dodati novi vrh.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.55.

Pomoću DFS algoritma pronađite jedno razapinjuće stablo zadanog grafa tako da počnete s vrhom v_0.



Stabla

Def. i karakterizacije

Riješeni primjeri

Korijenska stabla

Bin. stabla i alg. izrazi

Stablo sortiranja

Sortiranje u parcijalno uređenom skupu

Hrpa

Razapinjuća stabla

Rekurzija za raz. stabla

Riješeni primjeri

Matrični teorem o stablima

Teoretski primjeri

DFS i BFS algoritam

DFS algoritam

BFS algoritam

Povezanost grafa

Kruskal i Prim

Kruskalov algoritam

Implementacija Kruskala

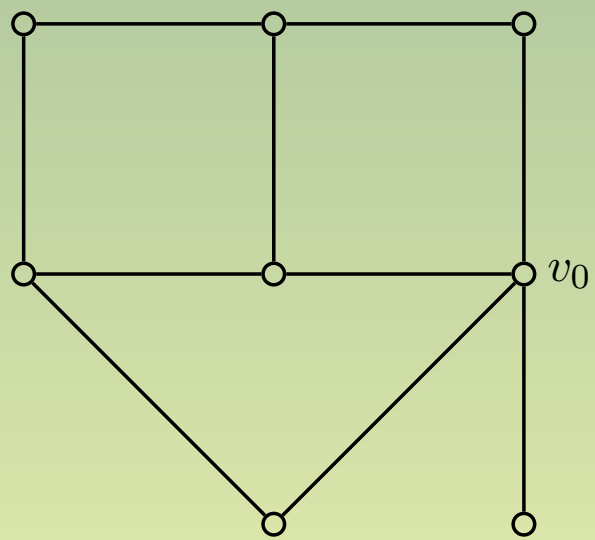
Primov algoritam

Implementacija Prima

Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.55.

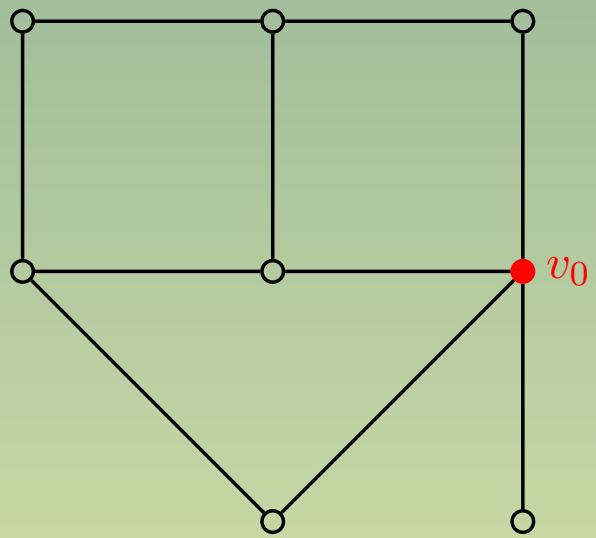
Pomoću DFS algoritma pronađite jedno razapinjuće stablo zadanog grafa tako da počnete s vrhom v_0.



Rješenje.

Postupak rješavanja nije jedinstven, ovisi o tome koji ćemo vrh posjetiti u danom trenutku. Ovdje ćemo pokazati dva različita načina s objašnjenim međukoracima.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

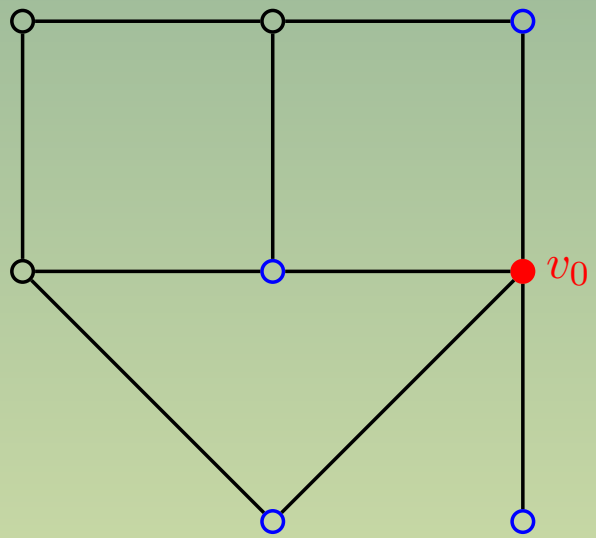


bridovi u stablu:

konačno rješenje

Stavimo da je $w = v_0$.

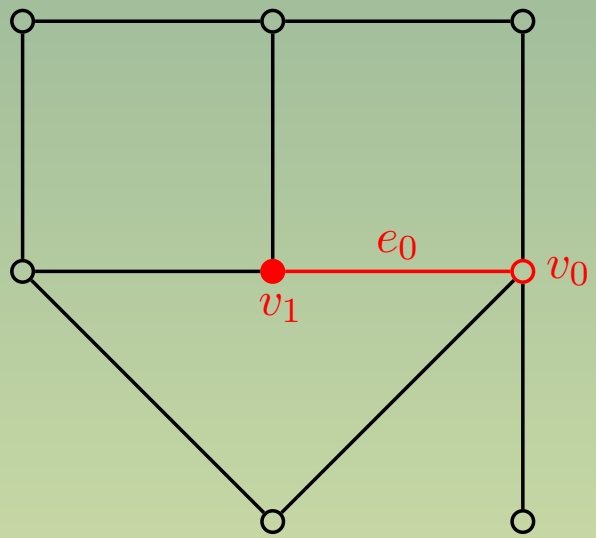
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu:

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_0$

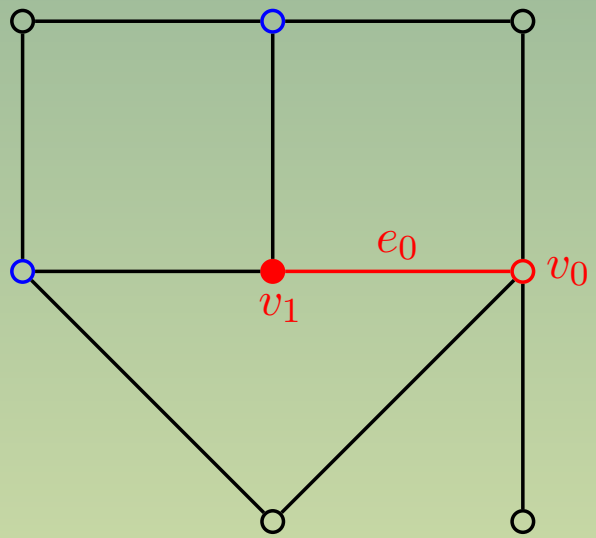
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_0$ i odaberemo jedan od tih vrhova kojeg označimo s v_1. Brid $e_0 = v_0v_1$ ubacimo u stablo i stavimo $w = v_1$ (vrh v_1 je novi centar traženja).

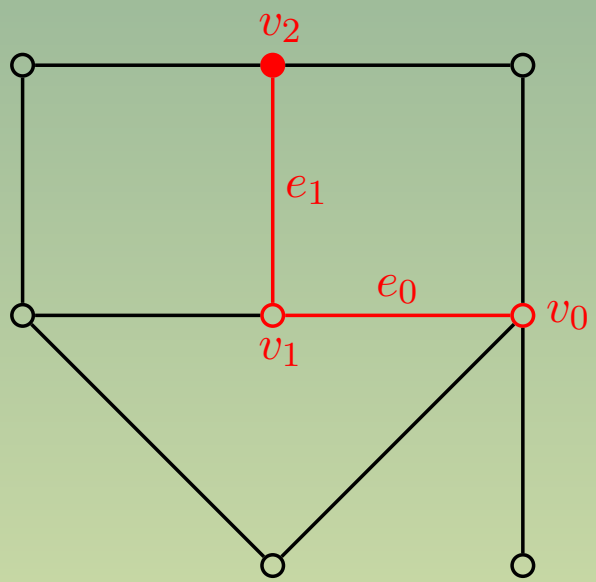
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_1$

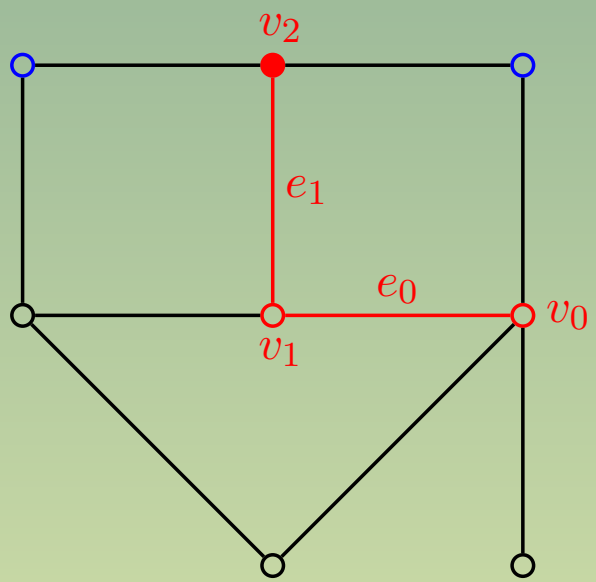
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_1$ i odaberemo jedan od tih vrhova kojeg označimo s v_2. Brid $e_1 = v_1v_2$ ubacimo u stablo i stavimo $w = v_2$ (vrh v_2 je novi centar traženja).

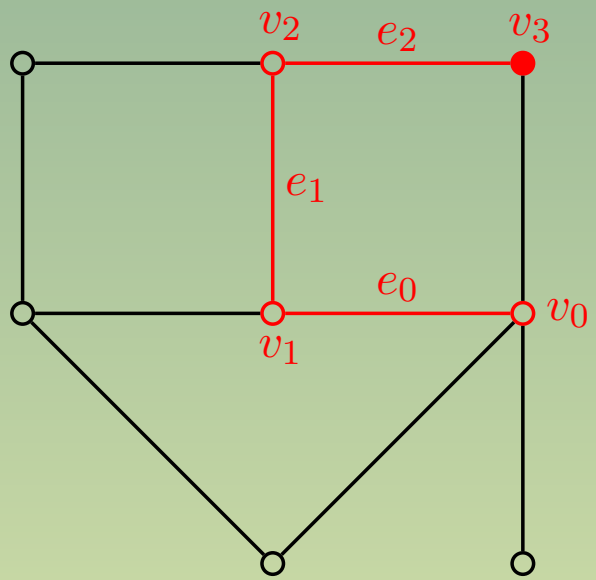
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_2$

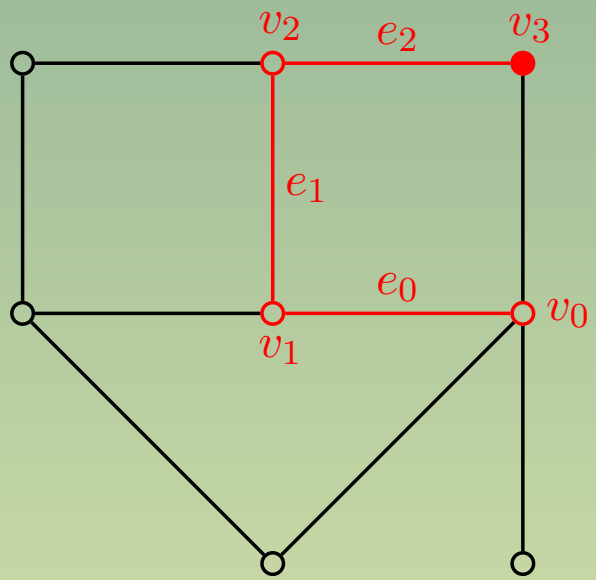
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_2$ i odaberemo jedan od tih vrhova kojeg označimo s v_3. Brid $e_2 = v_2v_3$ ubacimo u stablo i stavimo $w = v_3$ (vrh v_3 je novi centar traženja).

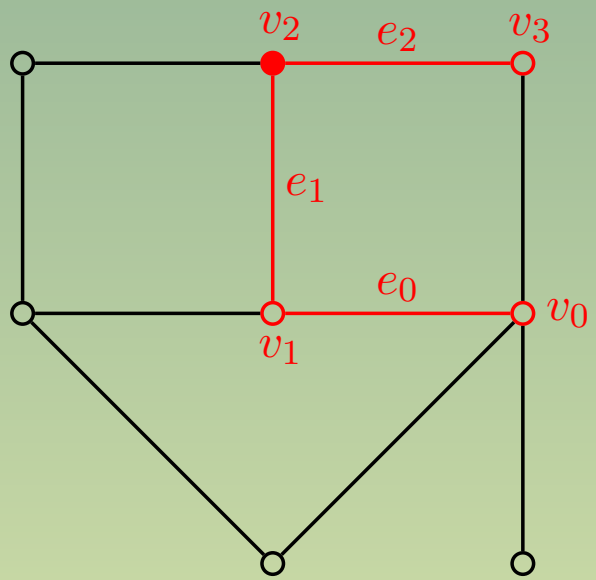
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2

Vrh $w = v_3$ nema više susjednih neposjećenih vrhova, a kako trenutno stablo nije još uvijek razapinjuće stablo,

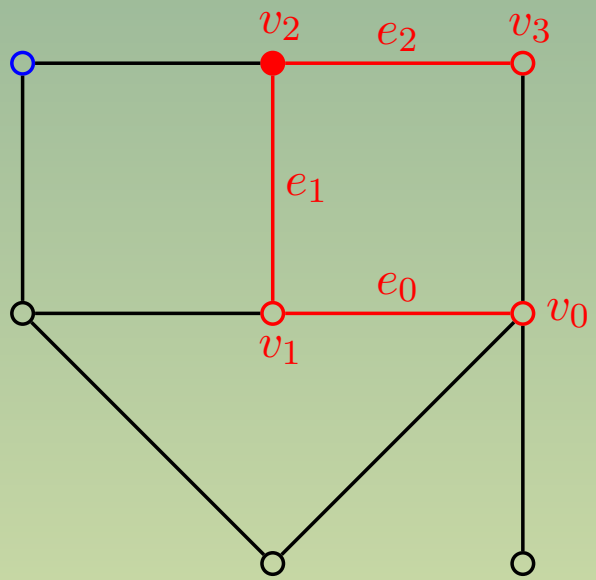
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2

Vrh $w = v_3$ nema više susjednih neposjećenih vrhova, a kako trenutno stablo nije još uvijek razapinjuće stablo, vraćamo se preko brida e_2 na prethodni centar traženja i stavljamo da je $w = v_2$.

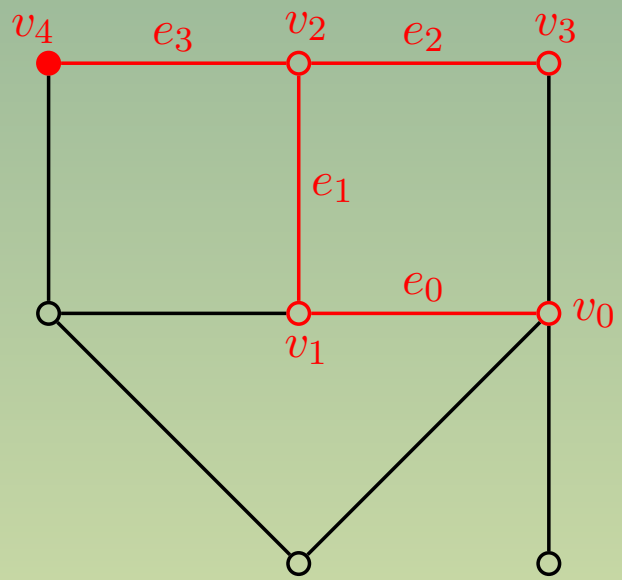
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2

Vrh $w = v_2$ ima samo jedan neposjećeni susjedni vrh (plavi vrh)

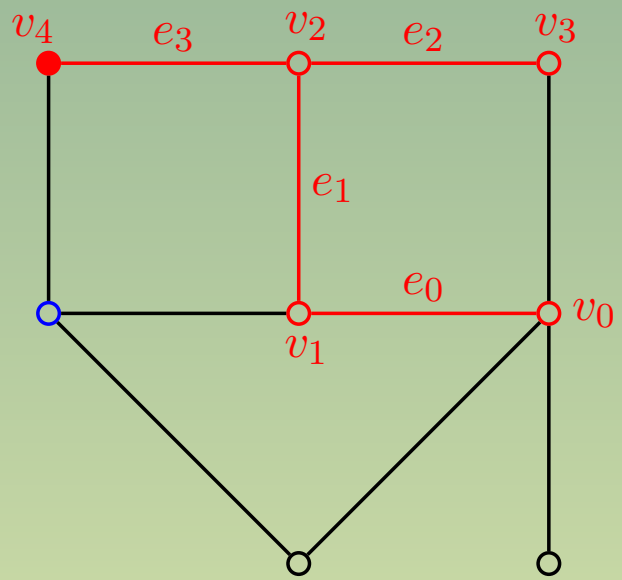
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3

Vrh $w = v_2$ ima samo jedan neposjećeni susjedni vrh (plavi vrh) pa uzmemo taj vrh i označimo ga s v_4. Brid $e_3 = v_2v_4$ ubacimo u stablo i stavimo $w = v_4$ (vrh v_4 je novi centar traženja).

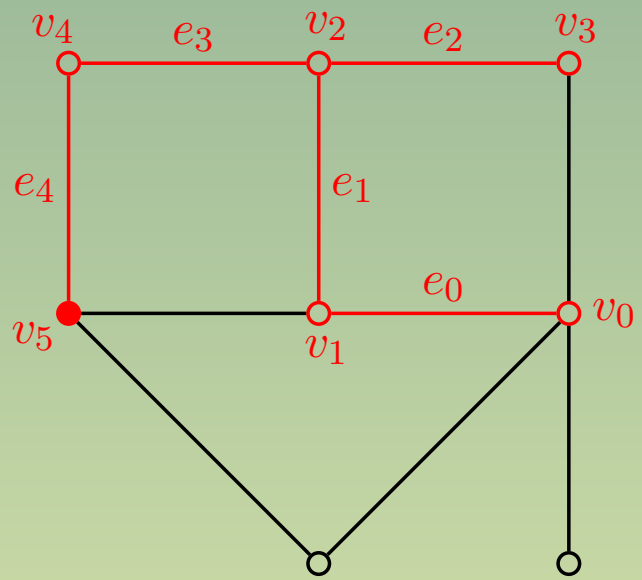
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3

Vrh $w = v_4$ ima samo jedan neposjećeni susjedni vrh (plavi vrh)

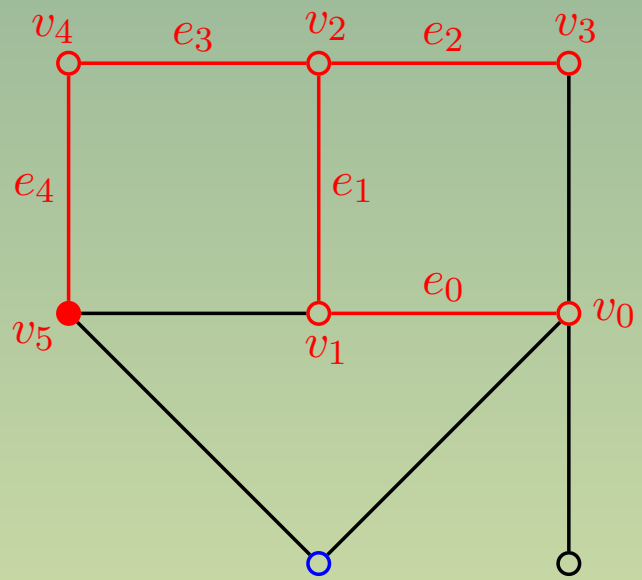
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3, e_4

Vrh $w = v_4$ ima samo jedan neposjećeni susjedni vrh (plavi vrh) pa uzmemo taj vrh i označimo ga s v_5. Brid $e_4 = v_4v_5$ ubacimo u stablo i stavimo $w = v_5$ (vrh v_5 je novi centar traženja).

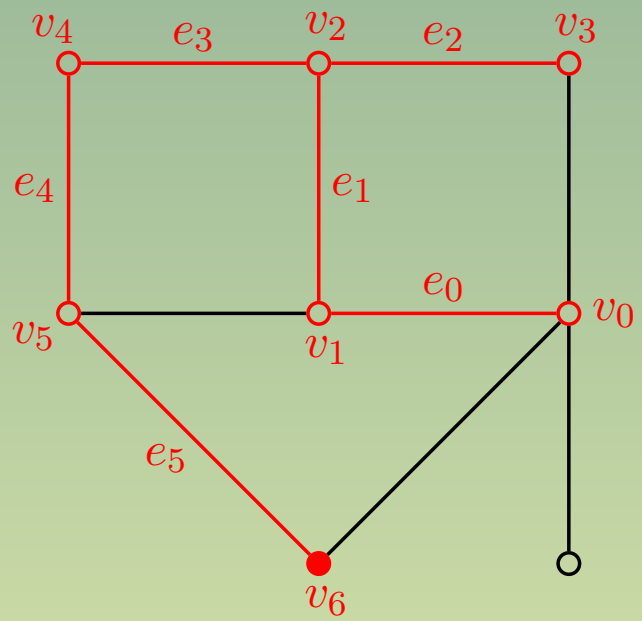
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3, e_4

Vrh $w = v_5$ ima samo jedan neposjećeni susjedni vrh (plavi vrh)

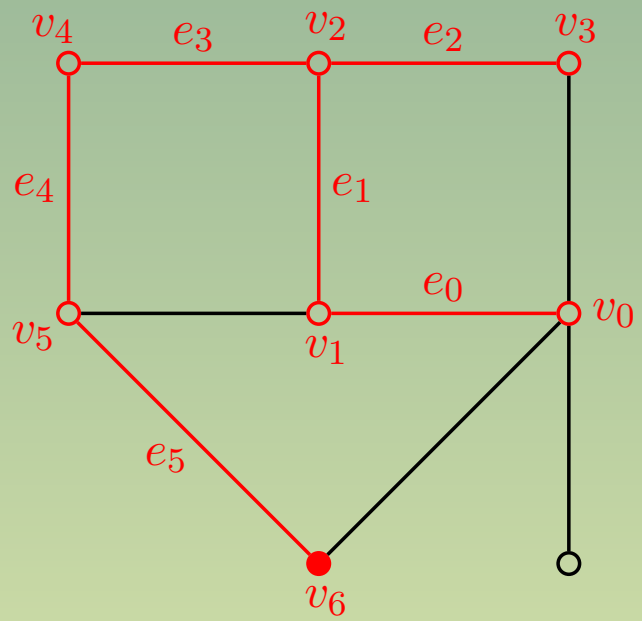
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Vrh $w = v_5$ ima samo jedan neposjećeni susjedni vrh (plavi vrh) pa uzmemo taj vrh i označimo ga s v_6. Brid $e_5 = v_5v_6$ ubacimo u stablo i stavimo $w = v_6$ (vrh v_6 je novi centar traženja).

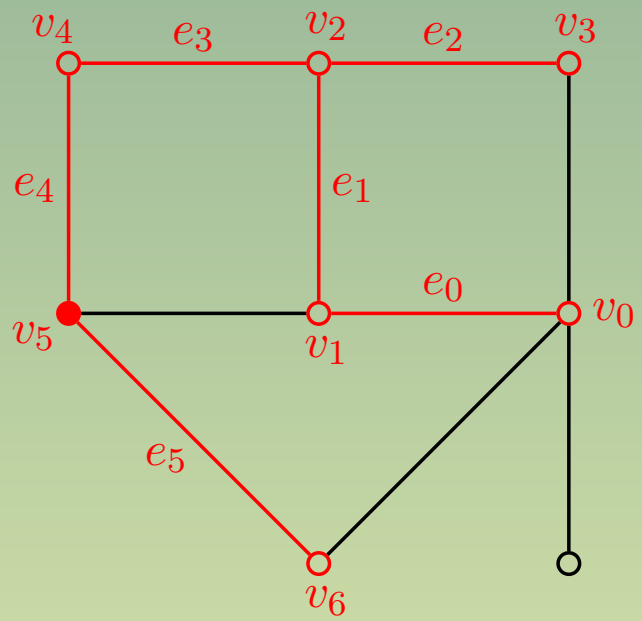
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Vrh $w = v_6$ nema više susjednih neposjećenih vrhova, a kako trenutno stablo nije još uvijek razapinjuće stablo,

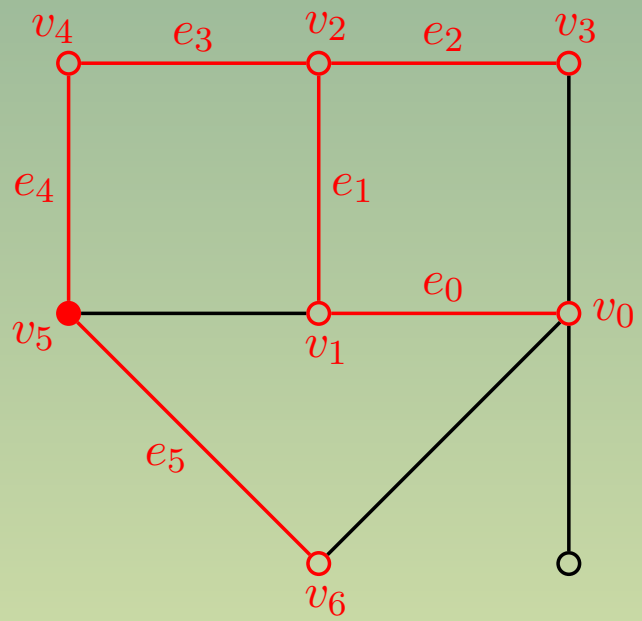
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Vrh $w = v_6$ nema više susjednih neposjećenih vrhova, a kako trenutno stablo nije još uvijek razapinjuće stablo, vraćamo se preko brida e_5 na prethodni centar traženja i stavljamo da je $w = v_5$.

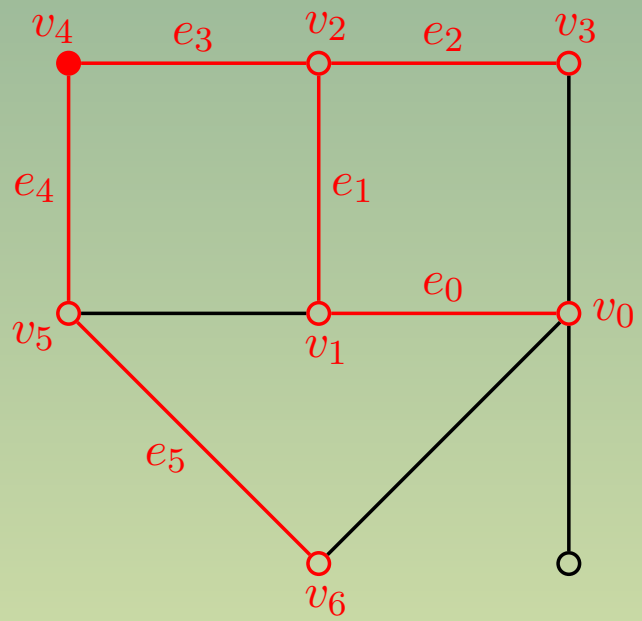
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Vrh $w = v_5$ nema više susjednih neposjećenih vrhova, a kako trenutno stablo nije još uvijek razapinjuće stablo,

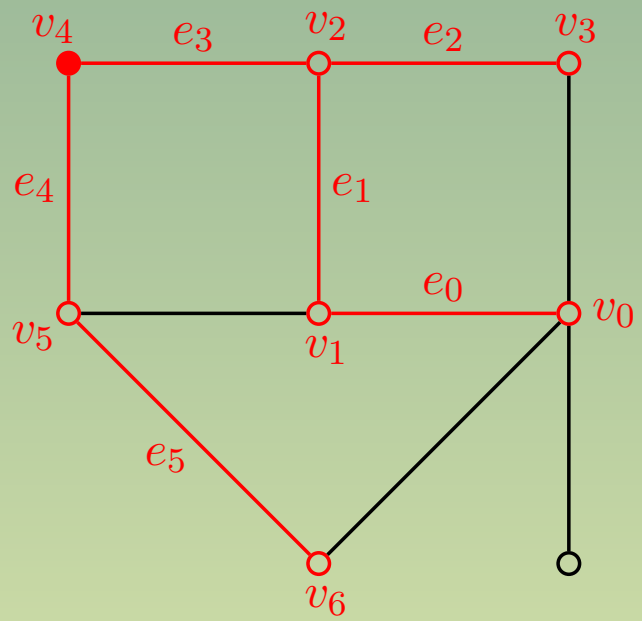
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Vrh $w = v_5$ nema više susjednih neposjećenih vrhova, a kako trenutno stablo nije još uvijek razapinjuće stablo, vraćamo se preko brida e_4 na prethodni centar traženja i stavljamo da je $w = v_4$.

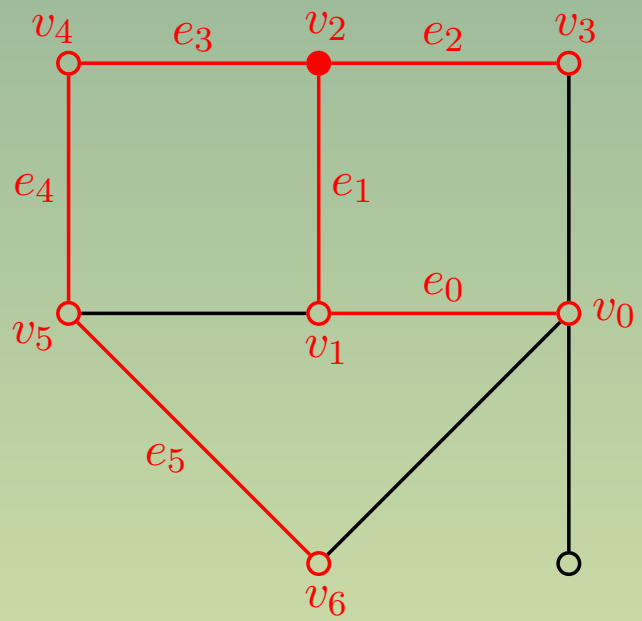
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Vrh $w = v_4$ nema više susjednih neposjećenih vrhova, a kako trenutno stablo nije još uvijek razapinjuće stablo,

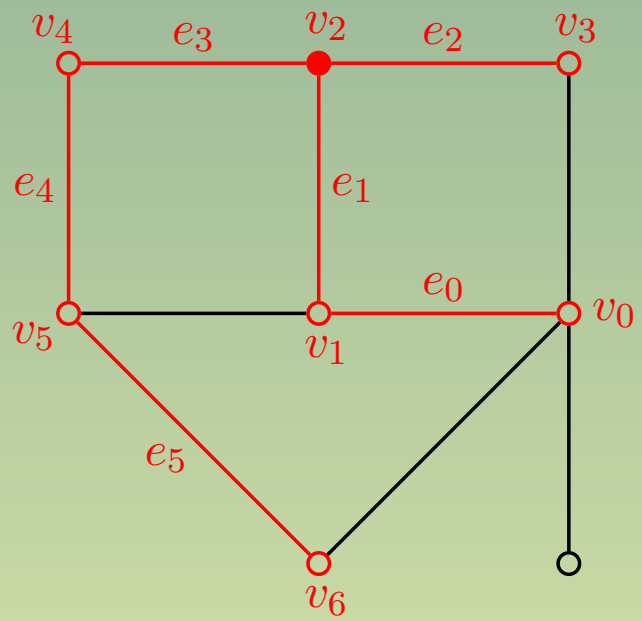
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Vrh $w = v_4$ nema više susjednih neposjećenih vrhova, a kako trenutno stablo nije još uvijek razapinjuće stablo, vraćamo se preko brida e_3 na prethodni centar traženja i stavljamo da je $w = v_2$ (uočite, ne vraćamo se s v_4 na v_3 jer smo na vrh v_4 došli s vrha v_2).

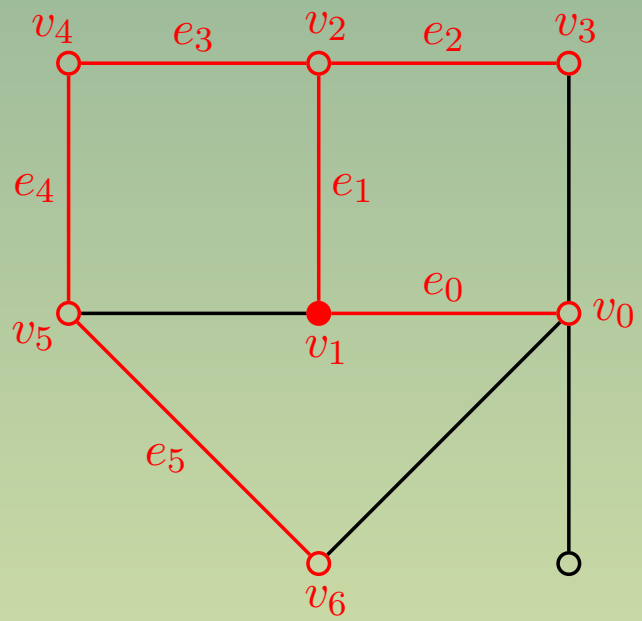
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Vrh $w = v_2$ nema više susjednih neposjećenih vrhova, a kako trenutno stablo nije još uvijek razapinjuće stablo,

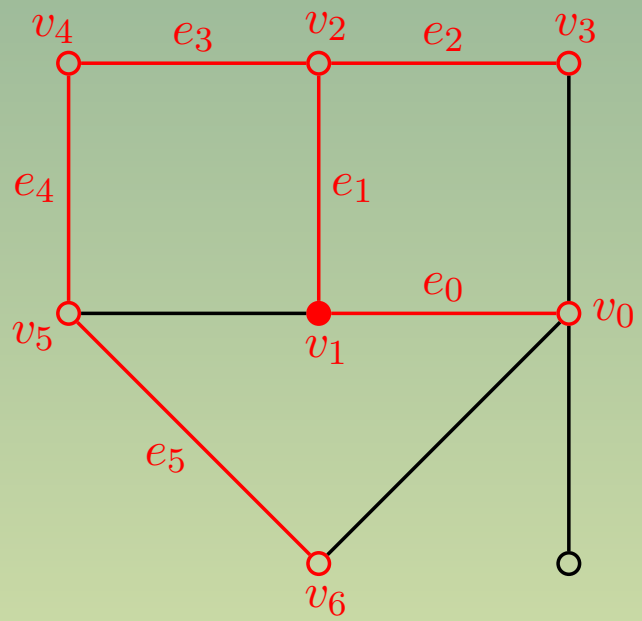
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Vrh $w = v_2$ nema više susjednih neposjećenih vrhova, a kako trenutno stablo nije još uvijek razapinjuće stablo, vraćamo se preko brida e_1 na prethodni centar traženja i stavljamo da je $w = v_1$ (uočite, ne vraćamo se s v_2 na v_3 jer smo prvi put u v_2 došli s vrha v_1, a s vrha v_3 smo došli na vrh v_2 već kad je on bio posjećen, tj. kad smo bili prisiljeni vraćati se natrag).

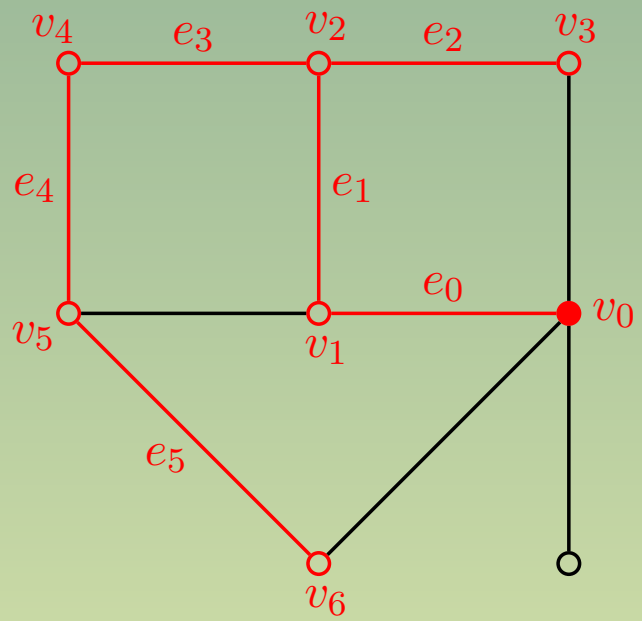
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Vrh $w = v_1$ nema više susjednih neposjećenih vrhova, a kako trenutno stablo nije još uvijek razapinjuće stablo,

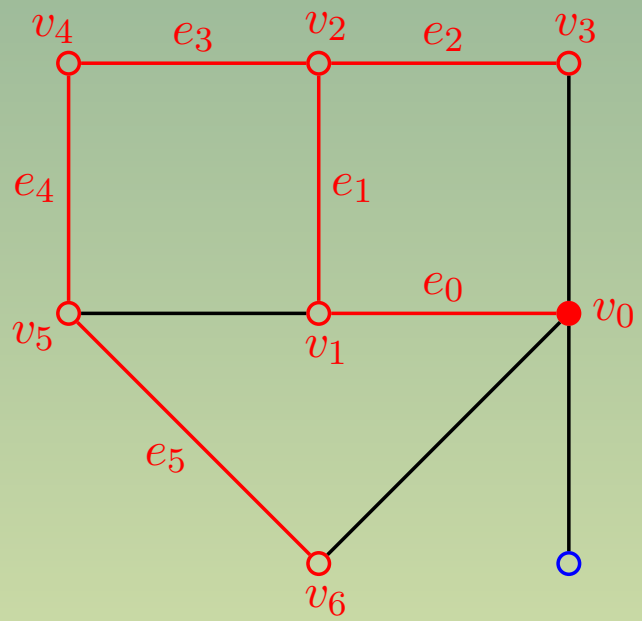
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Vrh $w = v_1$ nema više susjednih neposjećenih vrhova, a kako trenutno stablo nije još uvijek razapinjuće stablo, vraćamo se preko brida e_0 na prethodni centar traženja i stavljamo da je $w = v_0$.

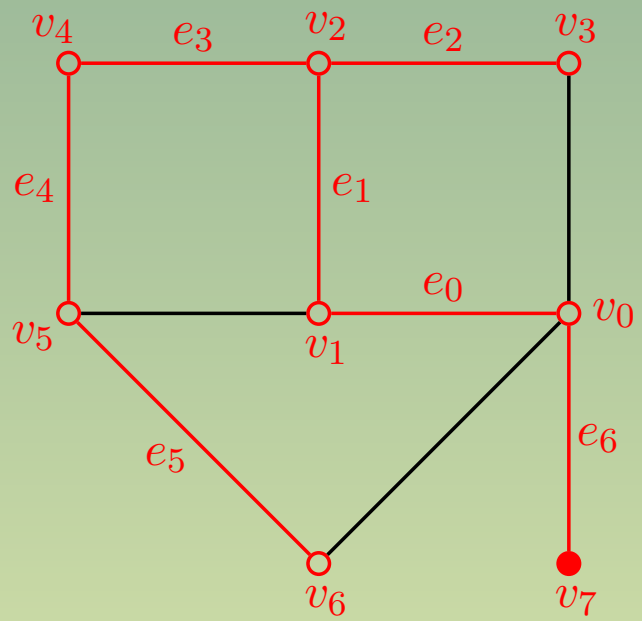
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Vrh $w = v_0$ ima samo jedan neposjećeni susjedni vrh (plavi vrh)

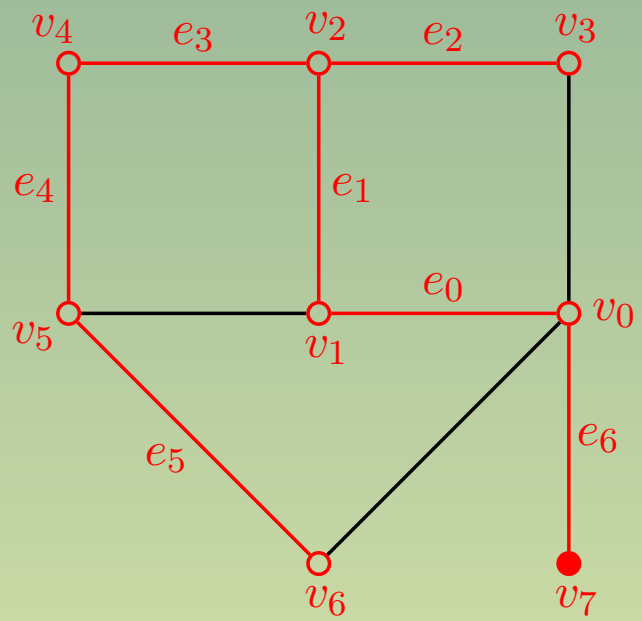
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$

Vrh $w = v_0$ ima samo jedan neposjećeni susjedni vrh (plavi vrh) pa uzmemo taj vrh i označimo ga s v_7. Brid $e_6 = v_0v_7$ ubacimo u stablo i stavimo $w = v_7$ (vrh v_7 je novi centar traženja).

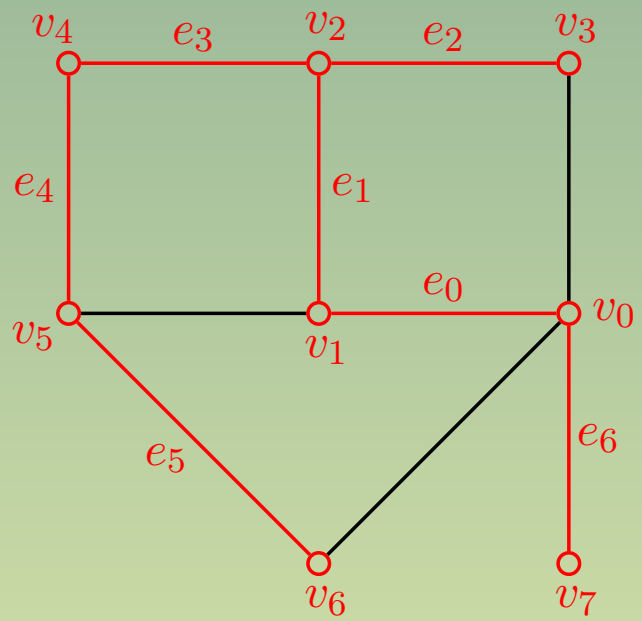
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$

Vrh $w = v_7$ nema neposjećenih susjednih vrhova, a kako su svi vrhovi u grafu posjećeni,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

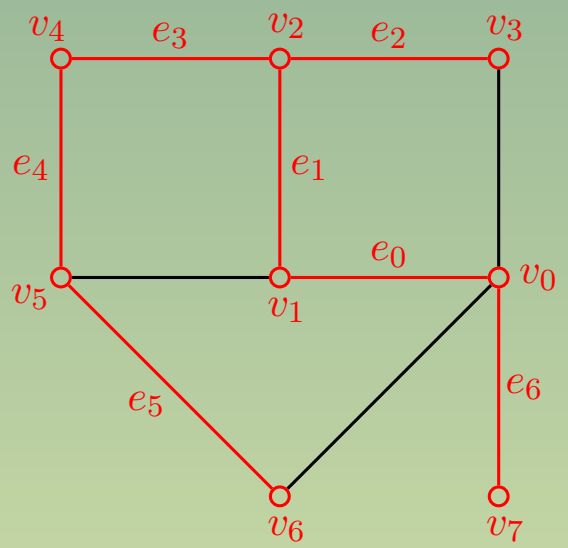


bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$

◂ objasni postupak

Vrh $w = v_7$ nema neposjećenih susjednih vrhova, a kako su svi vrhovi u grafu posjećeni, dobiveno stablo je razapinjuće stablo zadanog grafa.

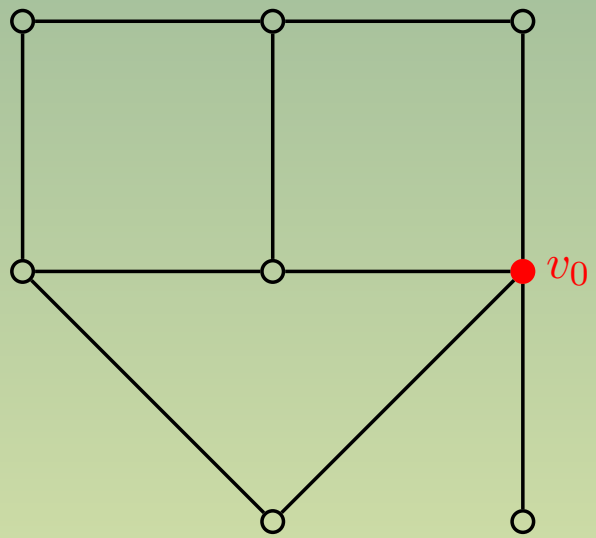
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Kratko ćemo to pisati u obliku tablice

korak		korak	
1	$e_0,\ w = v_1$	8	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_5$
2	$e_0e_1,\ w = v_2$	9	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_4$
3	$e_0e_1e_2,\ w = v_3$	10	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_2$
4	$e_0e_1e_2,\ w = v_2$	11	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_1$
5	$e_0e_1e_2e_3,\ w = v_4$	12	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_0$
6	$e_0e_1e_2e_3e_4,\ w = v_5$	13	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\ w = v_7$
7	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_6$		

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

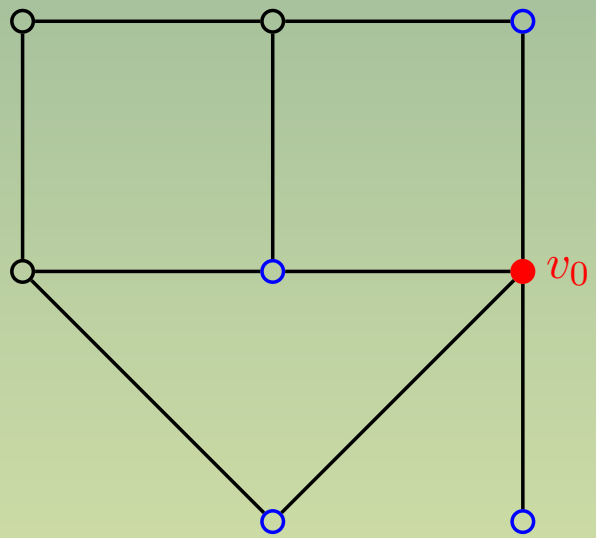


bridovi u stablu:

konačno rješenje

Pokažimo još jedan način biranja vrhova koji će završiti u manje koraka. Stavimo da je $w = v_0$.

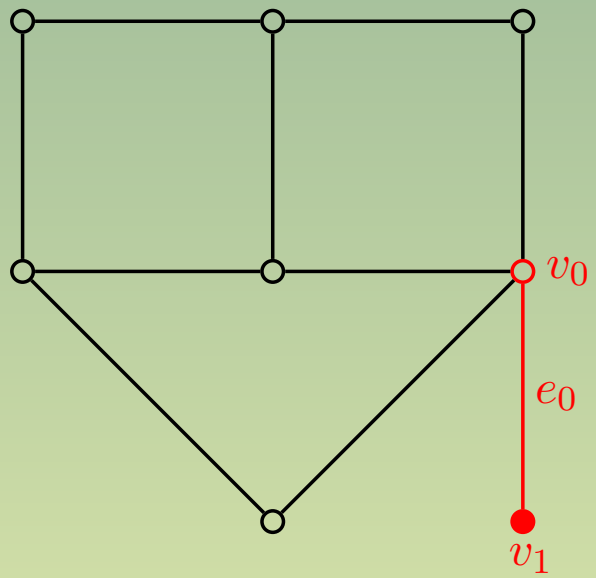
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu:

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_0$

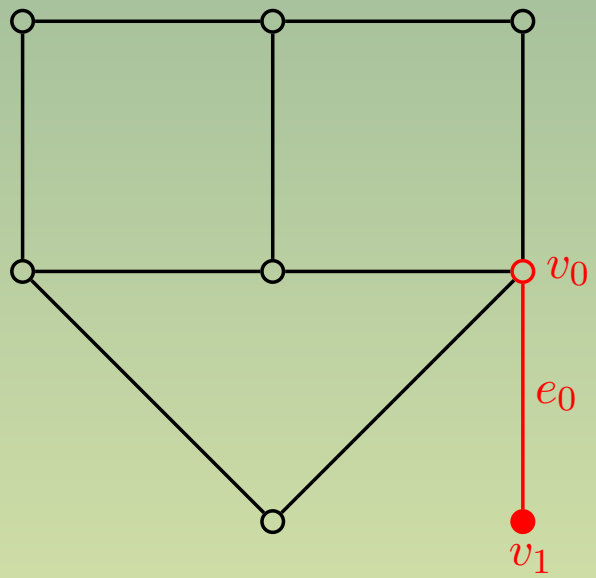
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_0$ i odaberemo jedan od tih vrhova kojeg označimo s v_1. Brid $e_0 = v_0v_1$ ubacimo u stablo i stavimo $w = v_1$ (vrh v_1 je novi centar traženja).

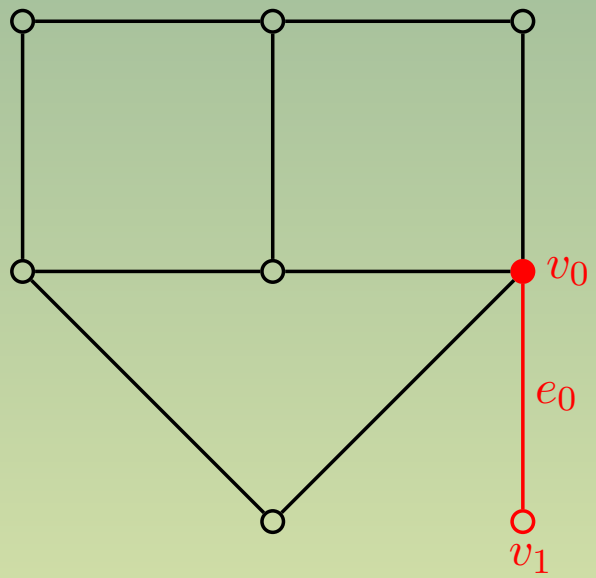
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0

Vrh $w = v_1$ nema više susjednih neposjećenih vrhova, a kako trenutno stablo nije još uvijek razapinjuće stablo,

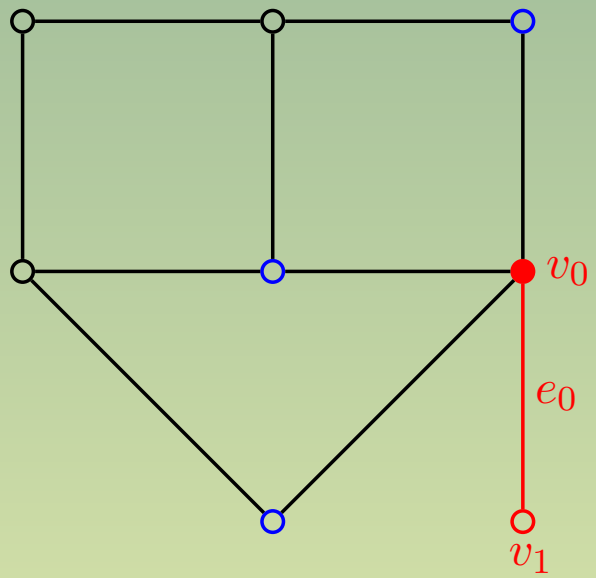
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0

Vrh $w = v_1$ nema više susjednih neposjećenih vrhova, a kako trenutno stablo nije još uvijek razapinjuće stablo, vraćamo se preko brida e_0 na prethodni centar traženja i stavljamo da je $w = v_0$.

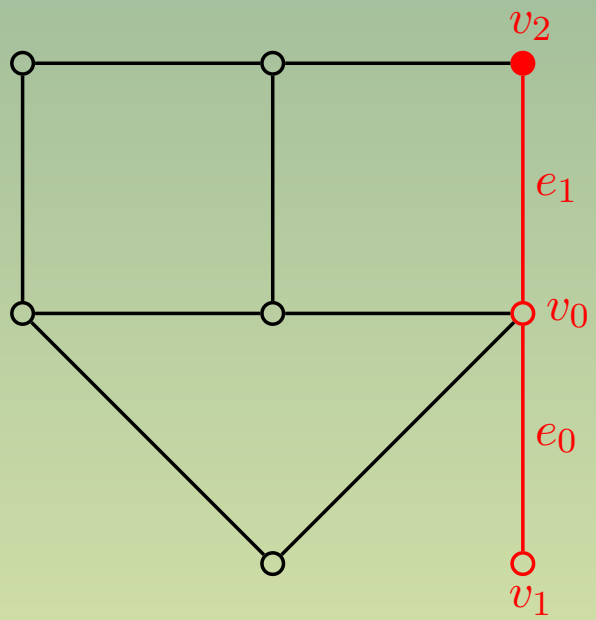
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_0$

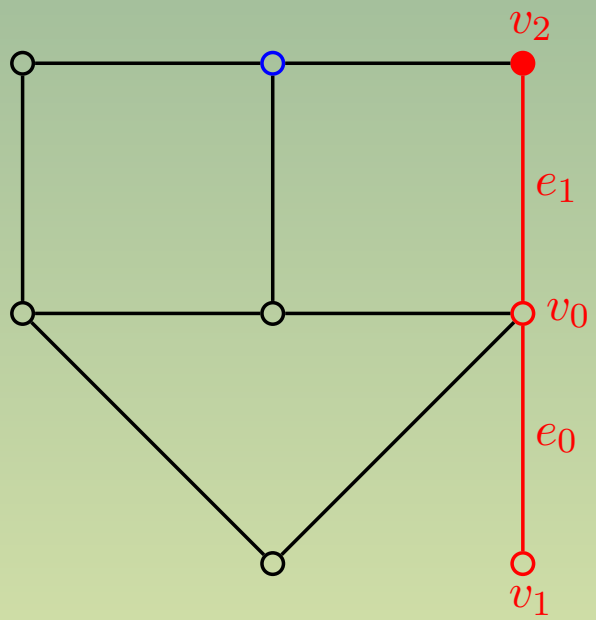
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_0$ i odaberemo jedan od tih vrhova kojeg označimo s v_2. Brid $e_1 = v_0v_2$ ubacimo u stablo i stavimo $w = v_2$ (vrh v_2 je novi centar traženja).

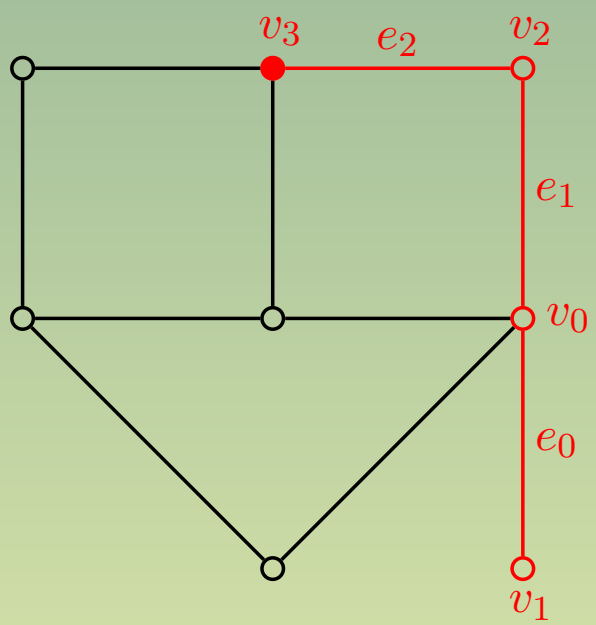
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1

Vrh $w = v_2$ ima samo jedan neposjećeni susjedni vrh (plavi vrh)

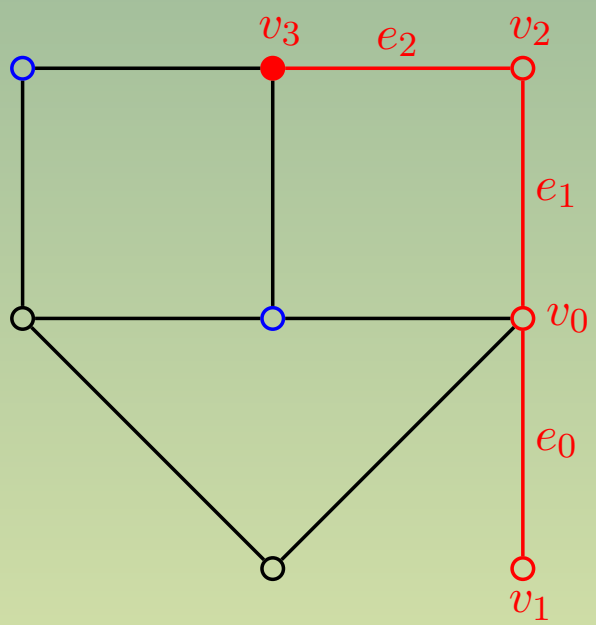
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2

Vrh $w = v_2$ ima samo jedan neposjećeni susjedni vrh (plavi vrh) pa uzmemo taj vrh i označimo ga s v_3. Brid $e_2 = v_2v_3$ ubacimo u stablo i stavimo $w = v_3$ (vrh v_3 je novi centar traženja).

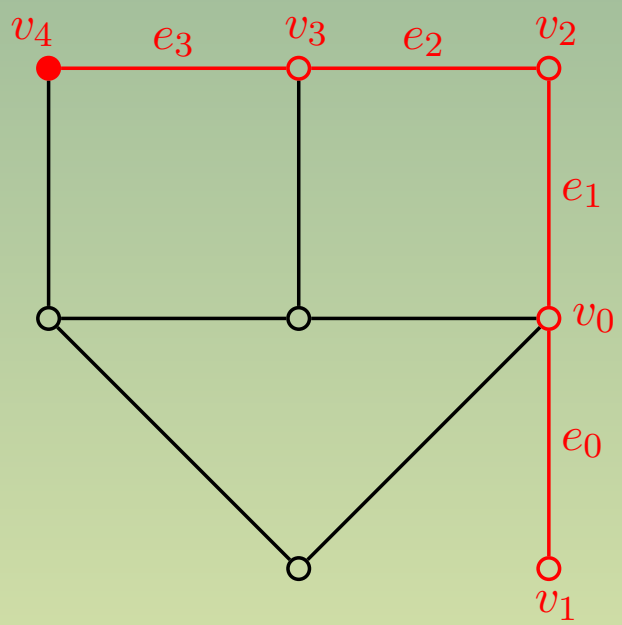
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_3$

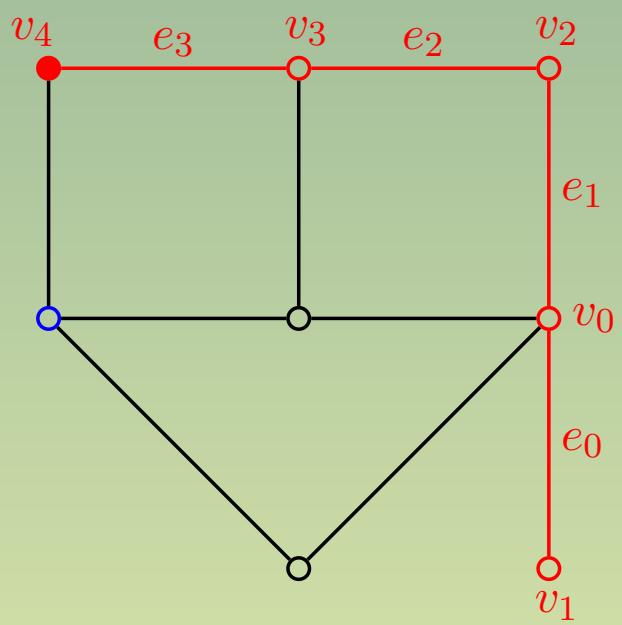
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_3$ i odaberemo jedan od tih vrhova kojeg označimo s v_4. Brid $e_3 = v_3v_4$ ubacimo u stablo i stavimo $w = v_4$ (vrh v_4 je novi centar traženja).

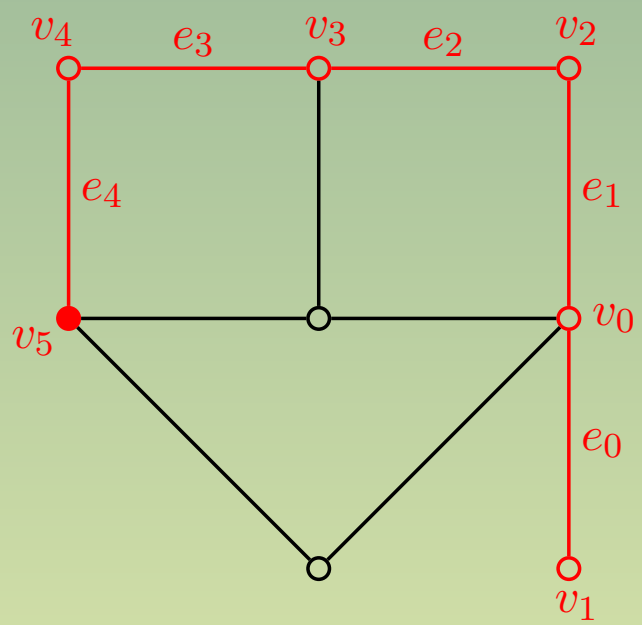
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3

Vrh $w = v_4$ ima samo jedan neposjećeni susjedni vrh (plavi vrh)

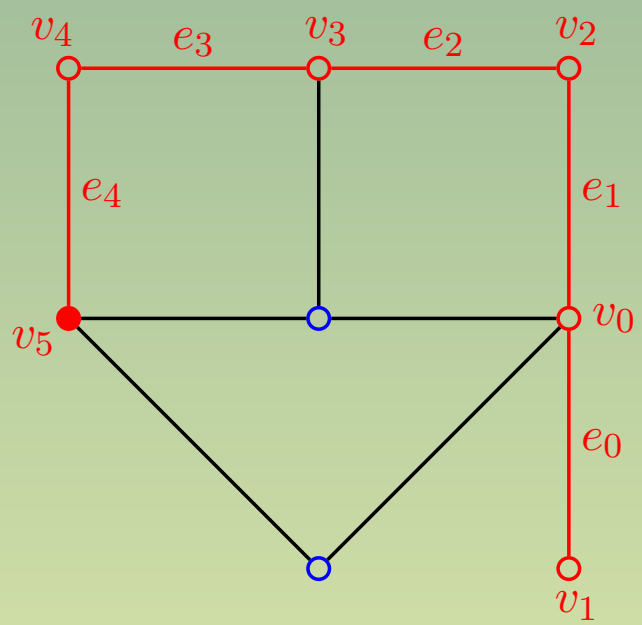
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3, e_4

Vrh $w = v_4$ ima samo jedan neposjećeni susjedni vrh (plavi vrh) pa uzmemo taj vrh i označimo ga s v_5. Brid $e_4 = v_4v_5$ ubacimo u stablo i stavimo $w = v_5$ (vrh v_5 je novi centar traženja).

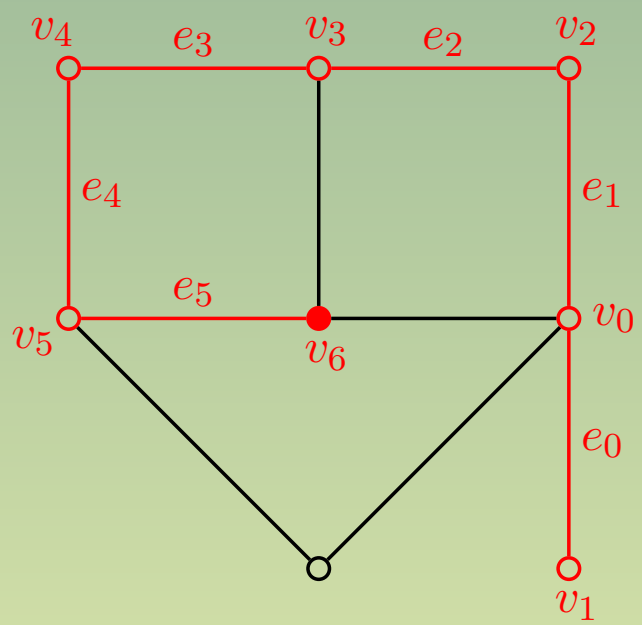
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3, e_4

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_5$

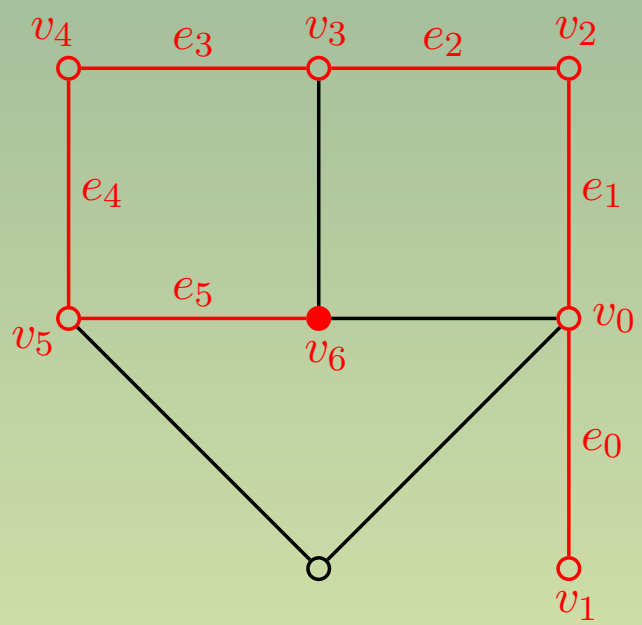
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_5$ i odaberemo jedan od tih vrhova kojeg označimo s v_6. Brid $e_5 = v_5v_6$ ubacimo u stablo i stavimo $w = v_6$ (vrh v_6 je novi centar traženja).

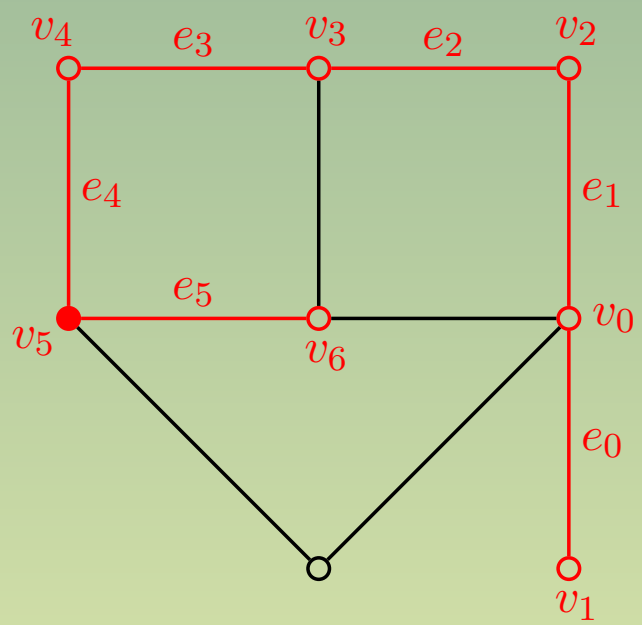
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Vrh $w = v_6$ nema više susjednih neposjećenih vrhova, a kako trenutno stablo nije još uvijek razapinjuće stablo,

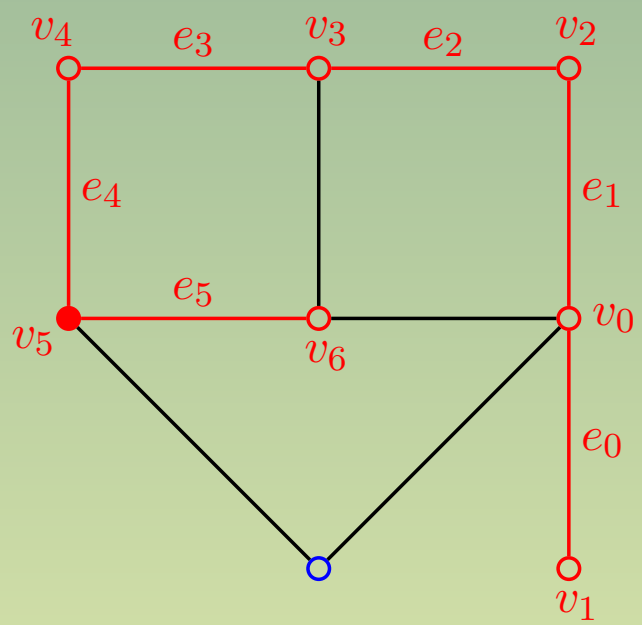
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Vrh $w = v_6$ nema više susjednih neposjećenih vrhova, a kako trenutno stablo nije još uvijek razapinjuće stablo, vraćamo se preko brida e_5 na prethodni centar traženja i stavljamo da je $w = v_5$.

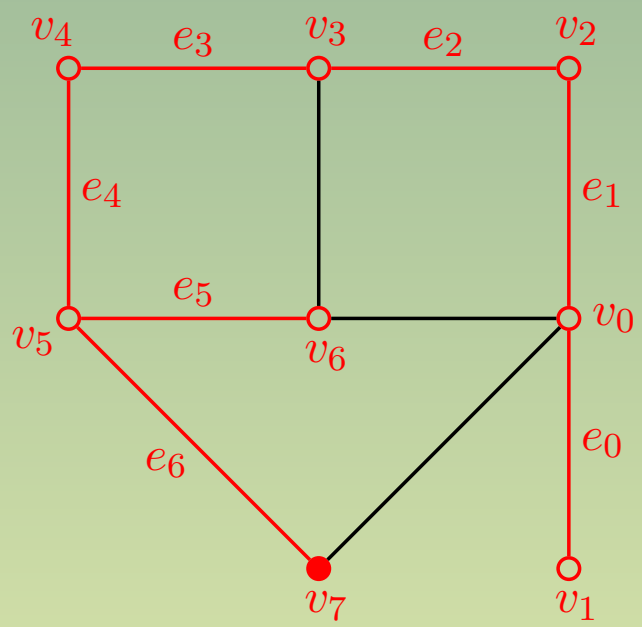
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Vrh $w = v_5$ ima samo jedan neposjećeni susjedni vrh (plavi vrh)

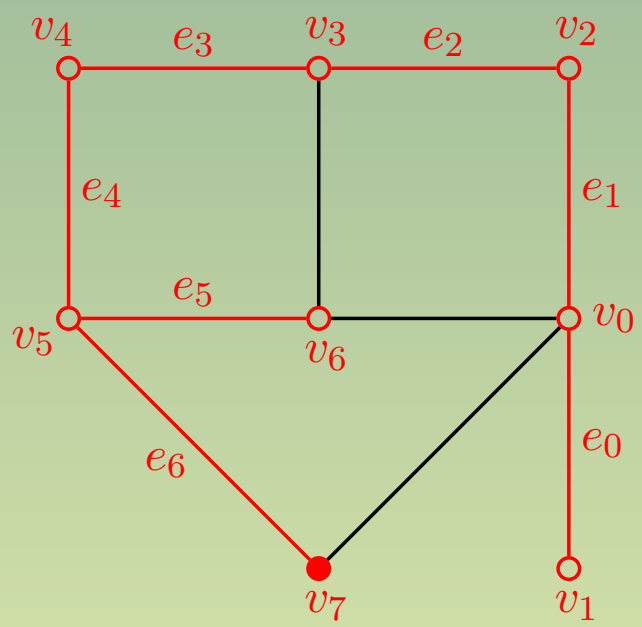
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$

Vrh $w = v_5$ ima samo jedan neposjećeni susjedni vrh (plavi vrh) pa uzmemo taj vrh i označimo ga s v_7. Brid $e_6 = v_5v_7$ ubacimo u stablo i stavimo $w = v_7$ (vrh v_7 je novi centar traženja).

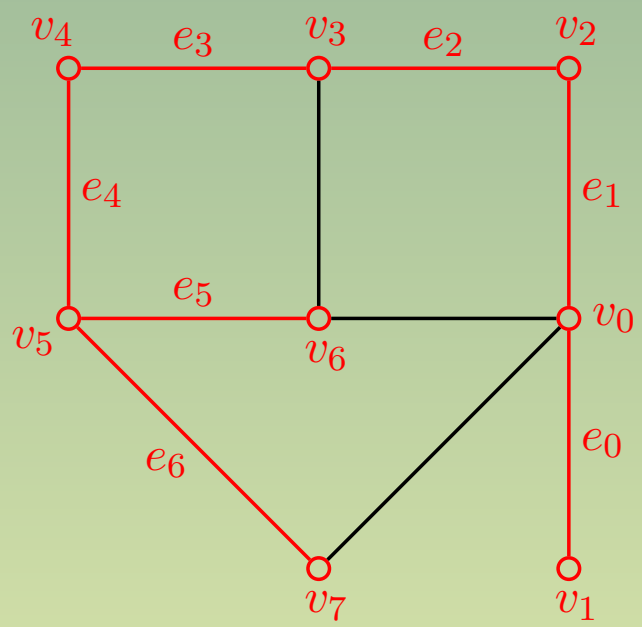
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$

Vrh $w = v_7$ nema neposjećenih susjednih vrhova, a kako su svi vrhovi u grafu posjećeni,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

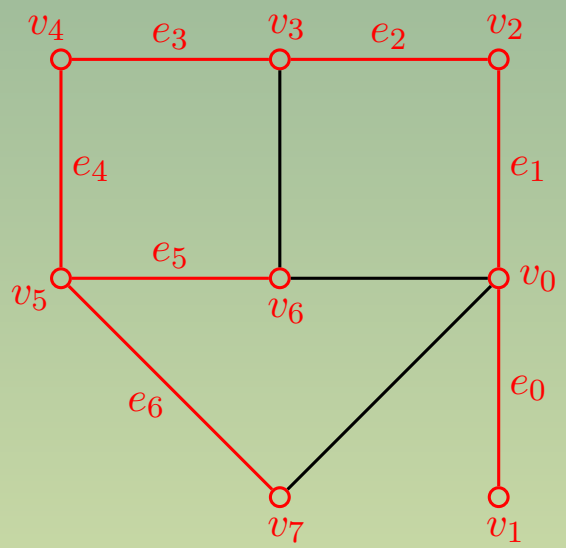


bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$

◂ objasni postupak

Vrh $w = v_7$ nema neposjećenih susjednih vrhova, a kako su svi vrhovi u grafu posjećeni, dobiveno stablo je razapinjuće stablo zadanog grafa.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



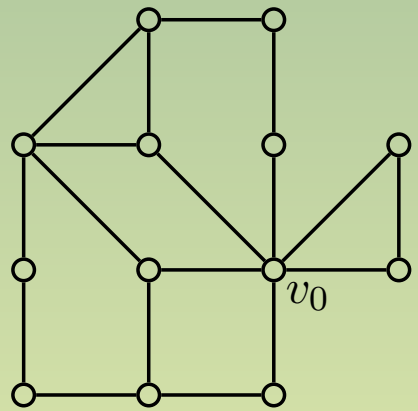
Kratko ćemo to pisati u obliku tablice

korak		korak	
1	$e_0,\ w = v_1$	6	$e_0e_1e_2e_3e_4,\ w = v_5$
2	$e_0,\ w = v_0$	7	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_6$
3	$e_0e_1,\ w = v_2$	8	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_5$
4	$e_0e_1e_2,\ w = v_3$	9	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\ w = v_7$
5	$e_0e_1e_2e_3,\ w = v_4$		

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.56.

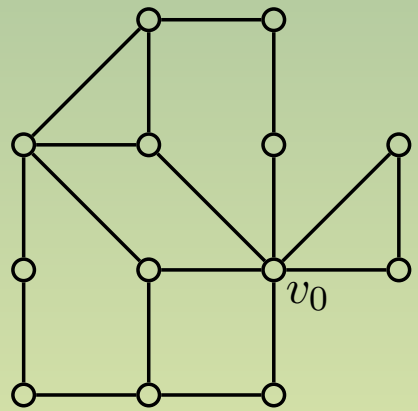
Pomoću DFS algoritma pronađite razapinjuće stablo zadanog grafa tako da počnete s vrhom v_0.



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.56.

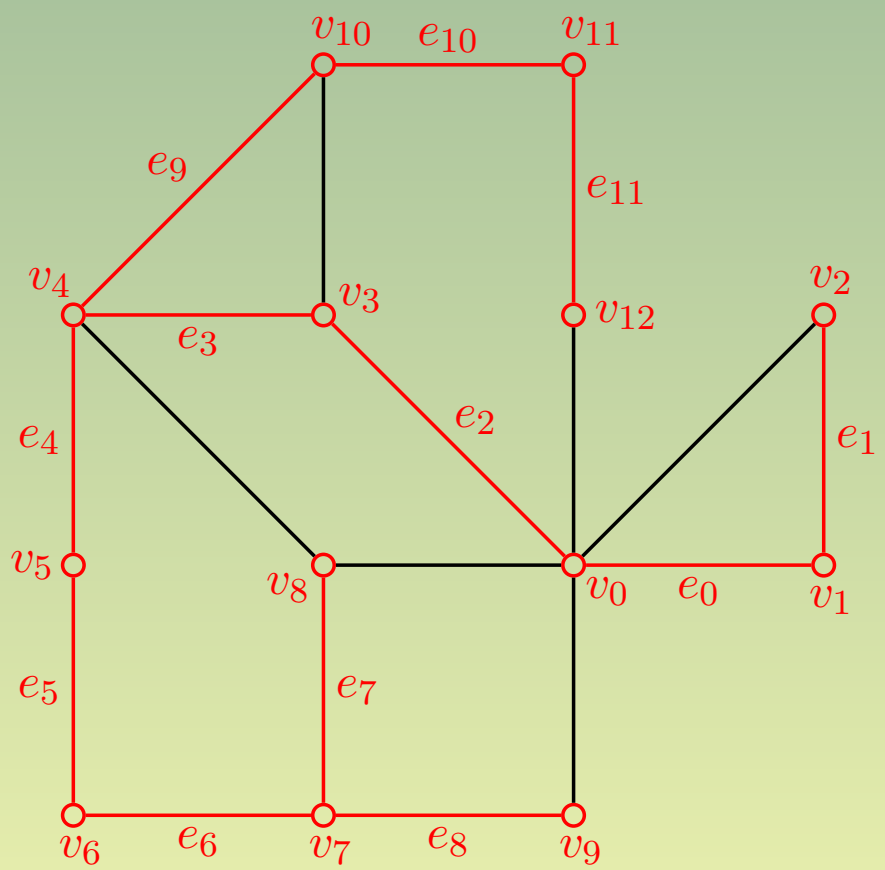
Pomoću DFS algoritma pronađite razapinjuće stablo zadanog grafa tako da počnete s vrhom v_0.



Rješenje.

Rješenje nije jedinstveno, već ovisi o tome kojim ćemo redom posjećivati pojedine vrhove. Za vježbu pronađite još neka razapinjuća stabla tako da drukčijim redoslijedom posjećujete pojedine vrhove, ali svaki put počnite s vrhom v_0.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Stabla

Def. i karakterizacije

Riješeni primjeri

Korijenska stabla

Bin. stabla i alg. izrazi

Stablo sortiranja

Sortiranje u parcijalno uređenom skupu

Hrpa

Razapinjuća stabla

Rekurzija za raz. stabla

Riješeni primjeri

Matrični teorem o stablima

Teoretski primjeri

DFS i BFS algoritam

DFS algoritam

BFS algoritam

Povezanost grafa

Kruskal i Prim

Kruskalov algoritam

Implementacija Kruskala

Primov algoritam

Implementacija Prima

Još o Ham. ciklusu

korak	
1	$e_0,\ w = v_1$
2	$e_0e_1,\ w = v_2$
3	$e_0e_1,\ w = v_1$
4	$e_0e_1,\ w = v_0$
5	$e_0e_1e_2,\ w = v_3$
6	$e_0e_1e_2e_3,\ w = v_4$
7	$e_0e_1e_2e_3e_4,\ w = v_5$
8	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_6$
9	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\ w = v_7$
10	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7,\ w = v_8$
11	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7,\ w = v_7$
12	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8,\ w = v_9$
13	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8,\ w = v_7$
14	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8,\ w = v_6$
15	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8,\ w = v_5$
16	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8,\ w = v_4$
17	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8e_9,\ w = v_{10}$
18	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8e_9e_{10},\ w = v_{11}$
19	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8e_9e_{10}e_{11},\ w = v_{12}$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

BFS algoritam

ULAZ: Povezani graf G i vrh $v_0 \in V(G)$
IZLAZ: Razapinjuće stablo grafa G

1: Stavi da je $w = v_0$, $n = 0$ i $m = 1$. Neka je T_0 stablo bez bridova sa jednim vrhom v_0.

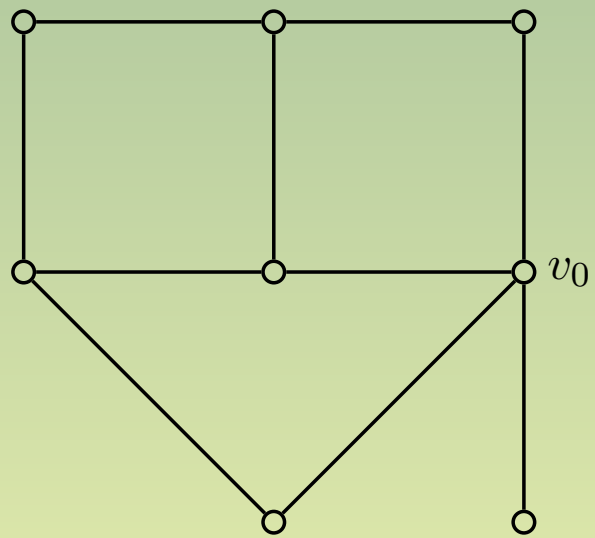
2: Ako je moguće, odaberi brid e_n koji je incidentan s w i vrhom v_{n+1} koji se još ne nalazi u stablu T_n, odnosno koji još nije posjećen. Pridruži brid e_n i vrh v_{n+1} stablu T_n i na taj način se dobije novo stablo T_{n+1}. Povećaj n na $n + 1$.

3: Ponavljaj korak 2) sve dok više nema neposjećenih susjeda vrha w. Ako je T_n razapinjuće stablo, tada je gotovo. Ako T_n nije razapinjuće stablo, tada stavi $w = v_m$ (prvi od posjećenih vrhova koji još nije bio trenutni centar) i povećaj m na $m + 1$. Ponovi korak 2).

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.57.

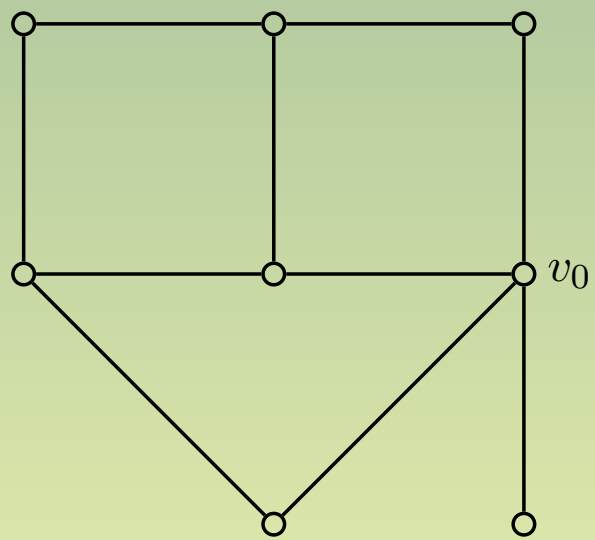
Pomoću BFS algoritma pronađite jedno razapinjuće stablo zadanog grafa tako da počnete s vrhom v_0.



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.57.

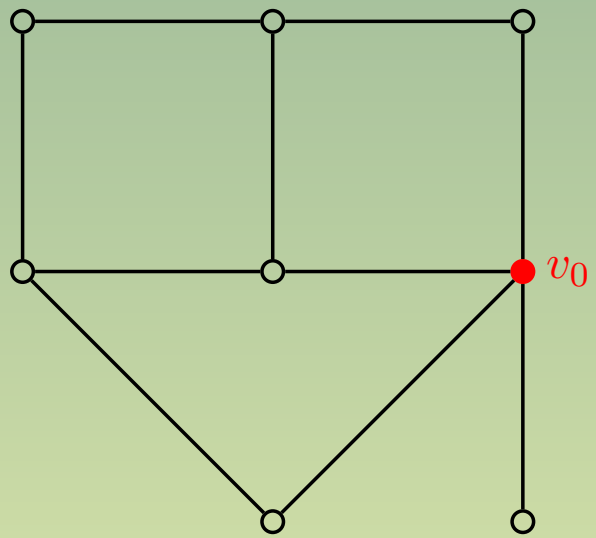
Pomoću BFS algoritma pronađite jedno razapinjuće stablo zadanog grafa tako da počnete s vrhom v_0.



Rješenje.

Postupak rješavanja nije jedinstven, ovisi o tome koji ćemo vrh posjetiti u danom trenutku. Ovdje ćemo pokazati dva različita načina s objašnjenim međukoracima.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

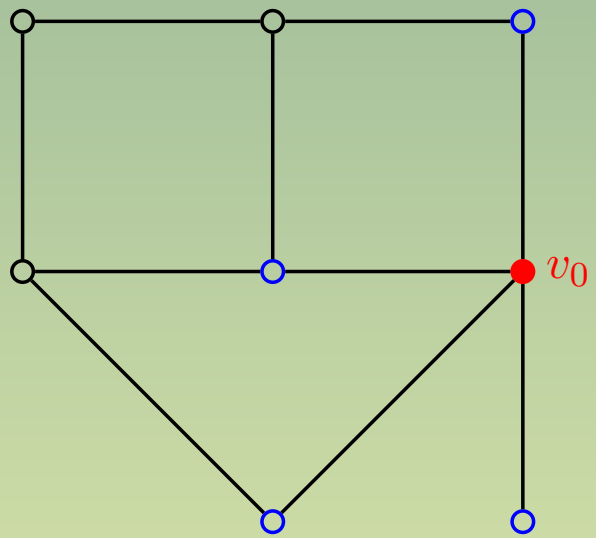


bridovi u stablu:

konačno rješenje

Stavimo da je $w = v_0$.

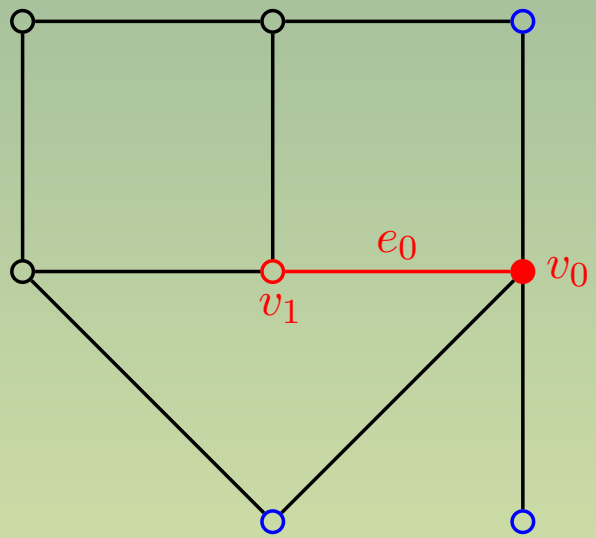
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu:

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_0$

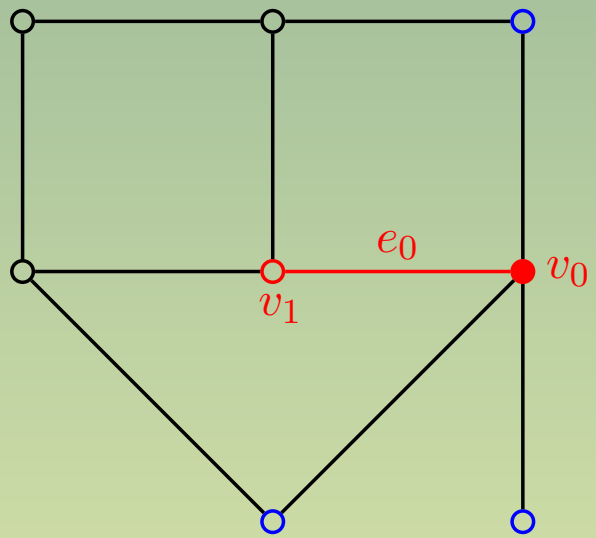
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_0$ i odaberemo jedan od tih vrhova kojeg označimo s v_1. Brid $e_0 = v_0v_1$ ubacimo u stablo. I dalje je $w = v_0$.

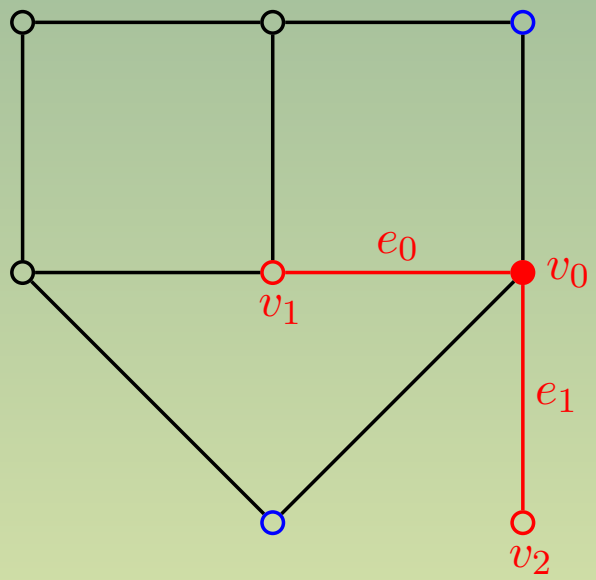
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_0$

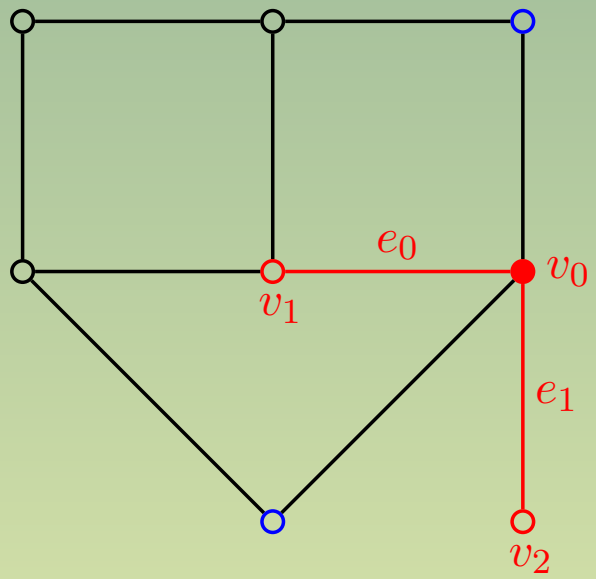
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_0$ i odaberemo jedan od tih vrhova kojeg označimo s v_2. Brid $e_1 = v_0v_2$ ubacimo u stablo. I dalje je $w = v_0$.

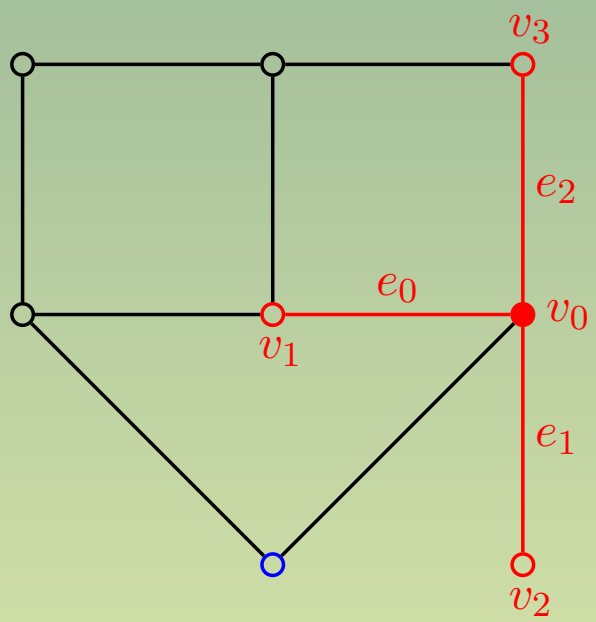
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_0$

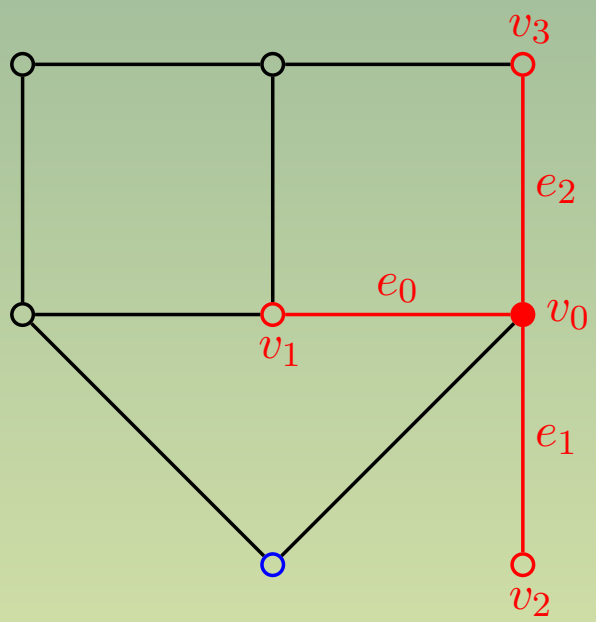
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_0$ i odaberemo jedan od tih vrhova kojeg označimo s v_3. Brid $e_2 = v_0v_3$ ubacimo u stablo. I dalje je $w = v_0$.

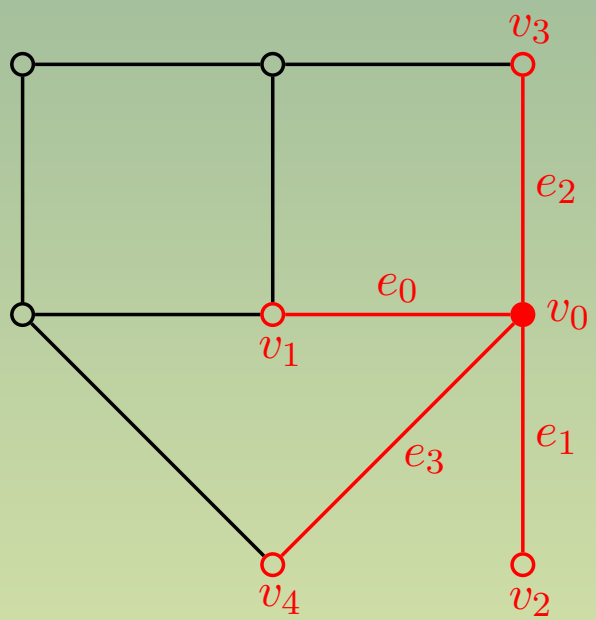
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrh) vrha $w = v_0$

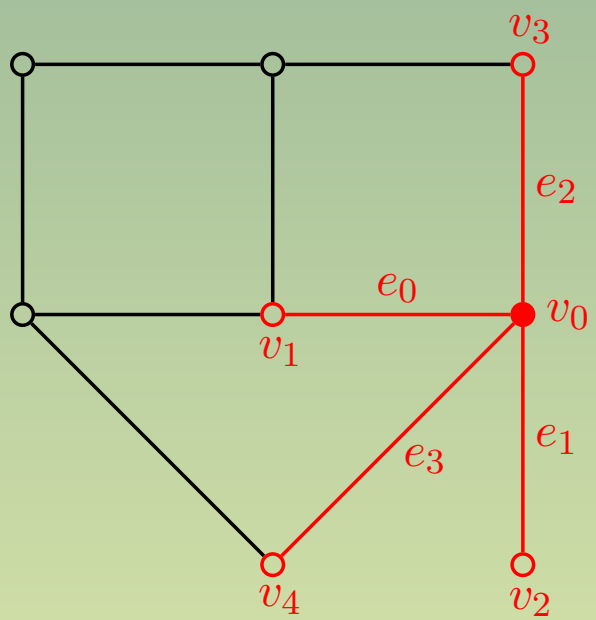
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrh) vrha $w = v_0$ i uzmemo taj jedini još neposjećeni vrh i označimo ga s v_4. Brid $e_3 = v_0v_4$ ubacimo u stablo. I dalje je $w = v_0$.

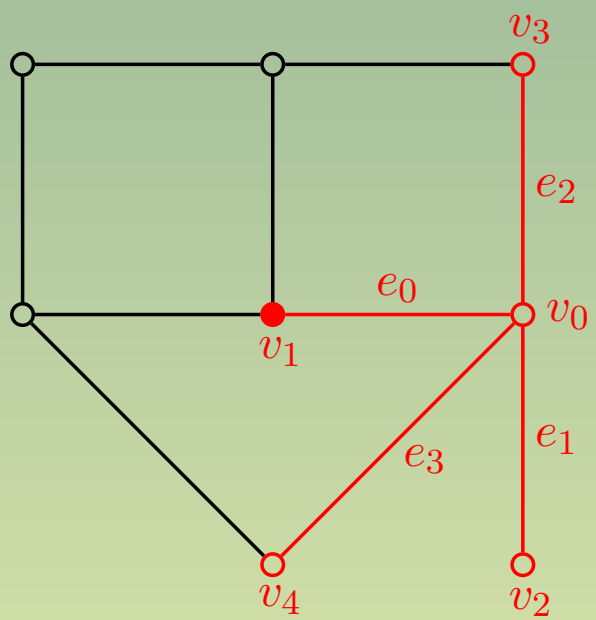
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3

Kako su posjećeni svi susjedni vrhovi vrha v_0 i trenutno stablo nije razapinjuće stablo

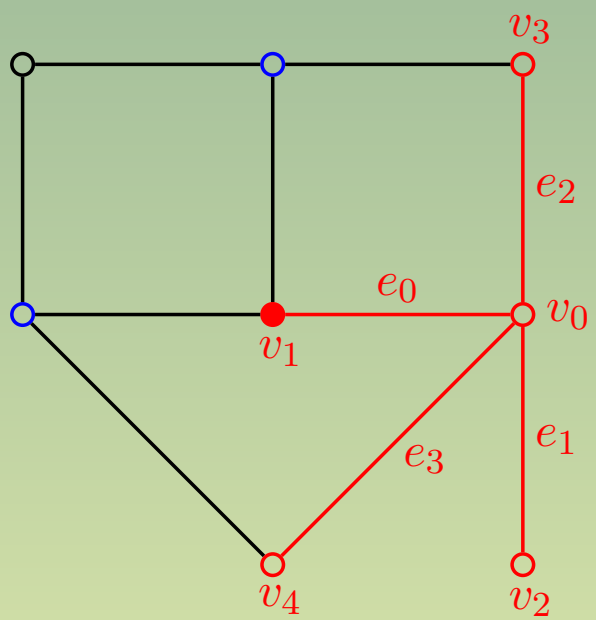
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3

Kako su posjećeni svi susjedni vrhovi vrha v_0 i trenutno stablo nije razapinjuće stablo, stavimo $w = v_1$.

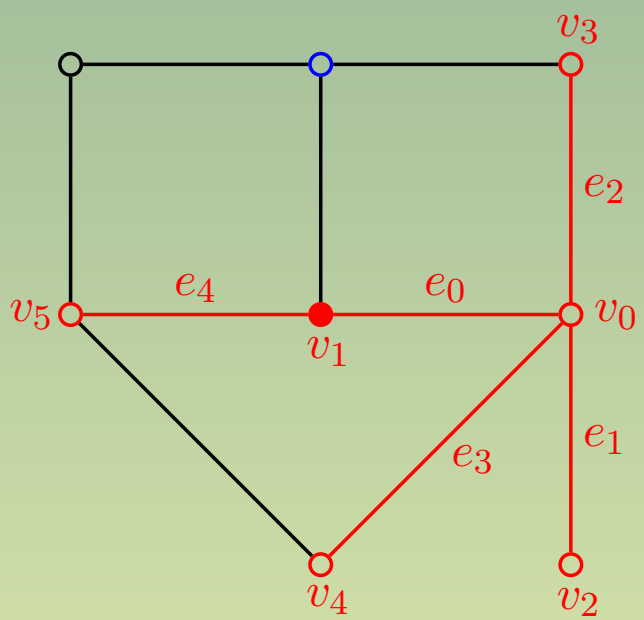
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_1$

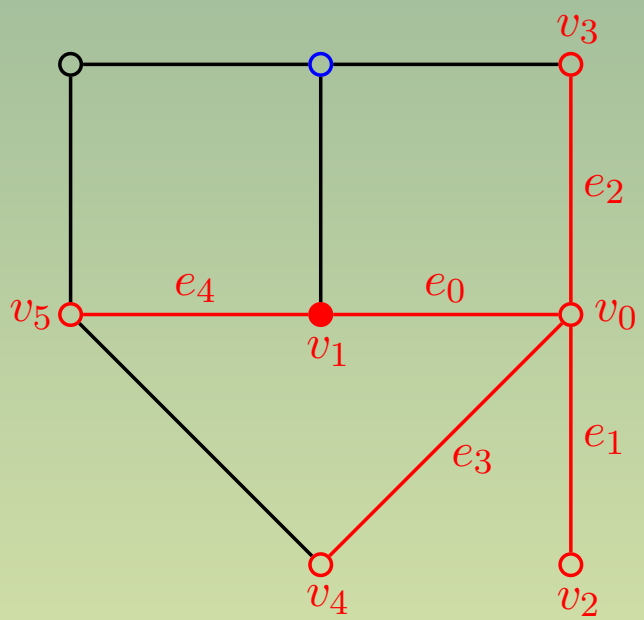
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3, e_4

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_1$ i odaberemo jedan od tih vrhova kojeg označimo s v_5. Brid $e_4 = v_1v_5$ ubacimo u stablo. I dalje je $w = v_1$.

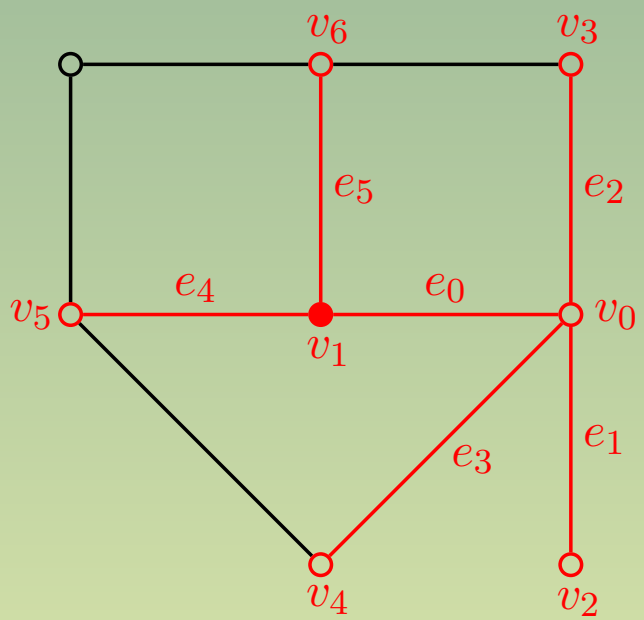
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3, e_4

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrh) vrha $w = v_1$

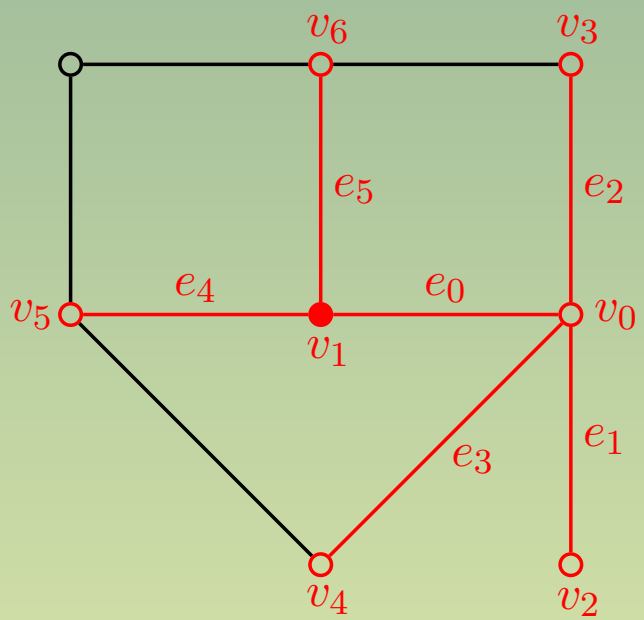
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrh) vrha $w = v_1$ i uzmemo taj jedini još neposjećeni vrh i označimo ga s v_6. Brid $e_5 = v_1v_6$ ubacimo u stablo. I dalje je $w = v_1$.

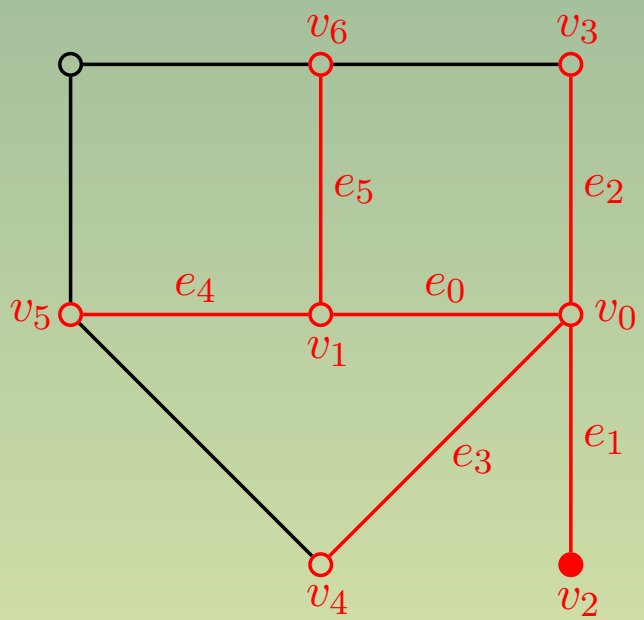
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Kako su posjećeni svi susjedni vrhovi vrha v_1 i trenutno stablo nije razapinjuće stablo,

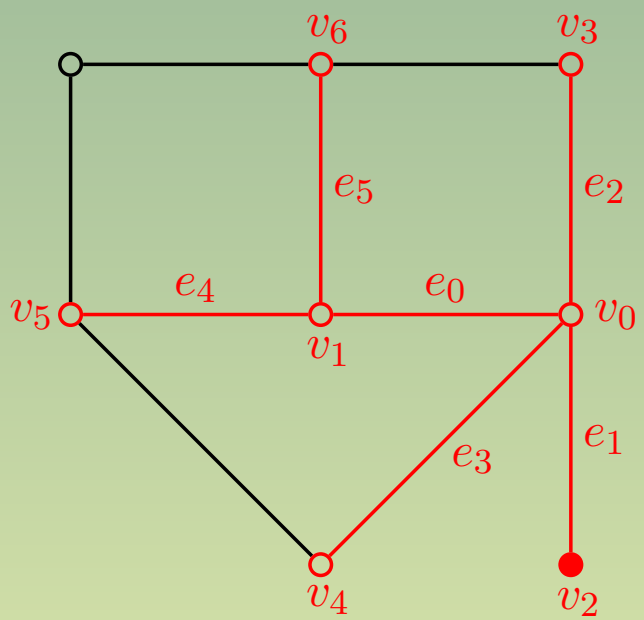
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Kako su posjećeni svi susjedni vrhovi vrha v_1 i trenutno stablo nije razapinjuće stablo, stavimo $w = v_2$.

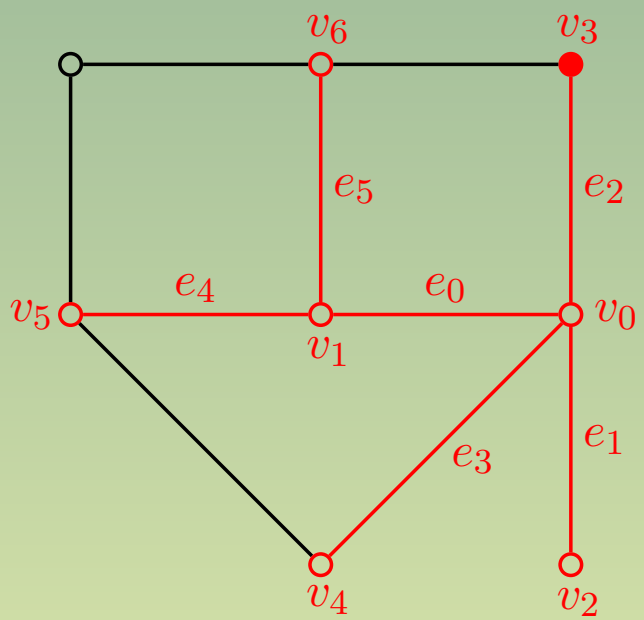
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Kako su posjećeni svi susjedni vrhovi vrha v_2 i trenutno stablo nije razapinjuće stablo,

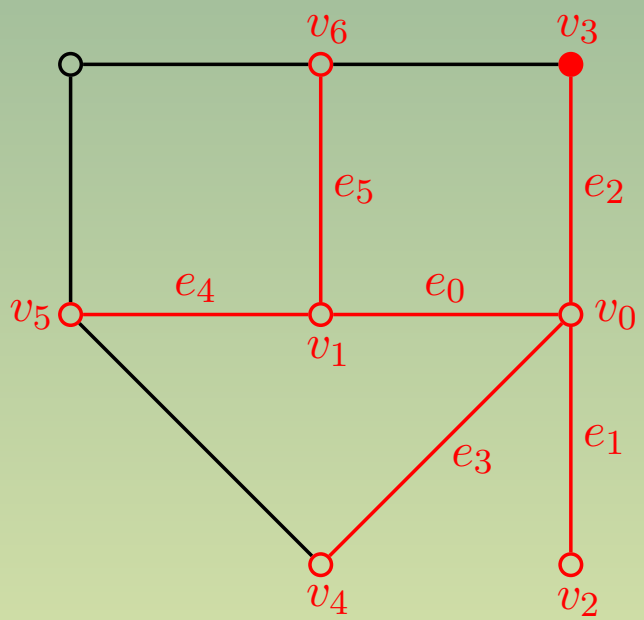
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Kako su posjećeni svi susjedni vrhovi vrha v_2 i trenutno stablo nije razapinjuće stablo, stavimo $w = v_3$.

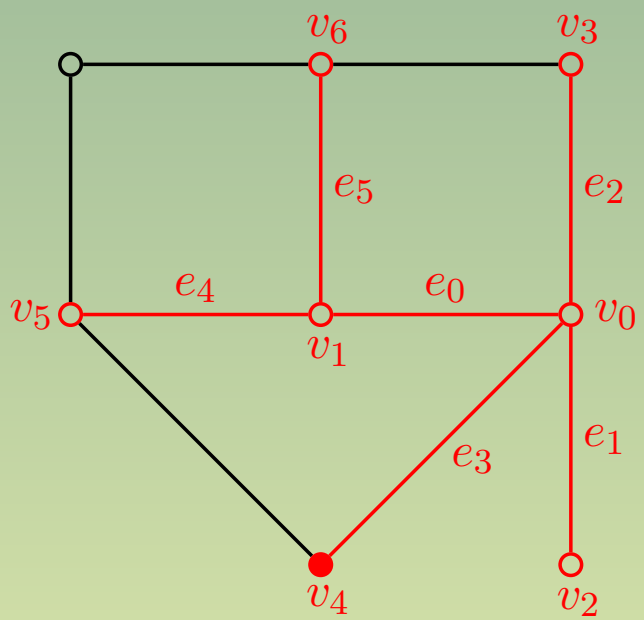
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Kako su posjećeni svi susjedni vrhovi vrha v_3 i trenutno stablo nije razapinjuće stablo,

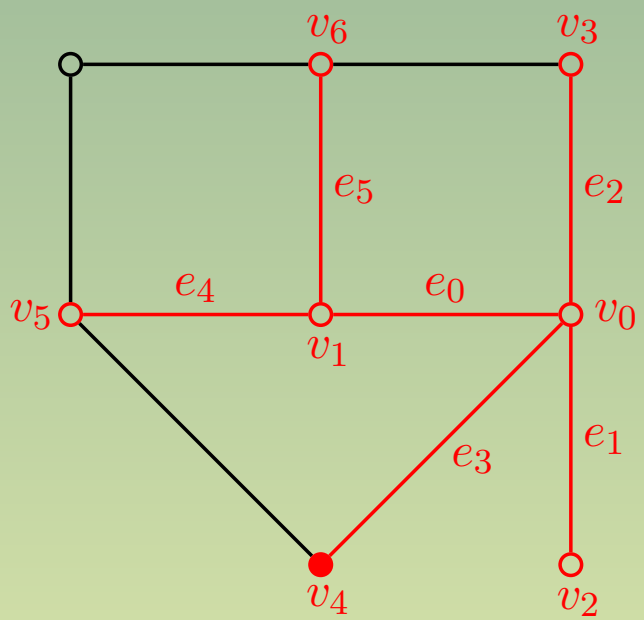
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Kako su posjećeni svi susjedni vrhovi vrha v_3 i trenutno stablo nije razapinjuće stablo, stavimo $w = v_4$.

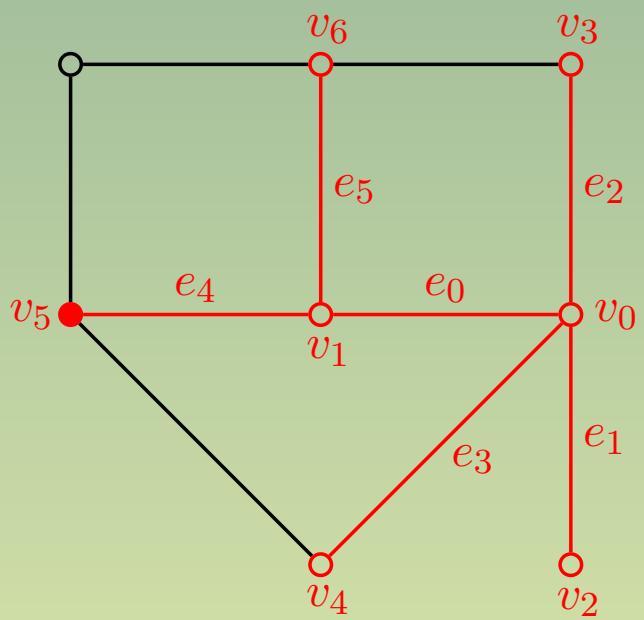
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Kako su posjećeni svi susjedni vrhovi vrha v_4 i trenutno stablo nije razapinjuće stablo,

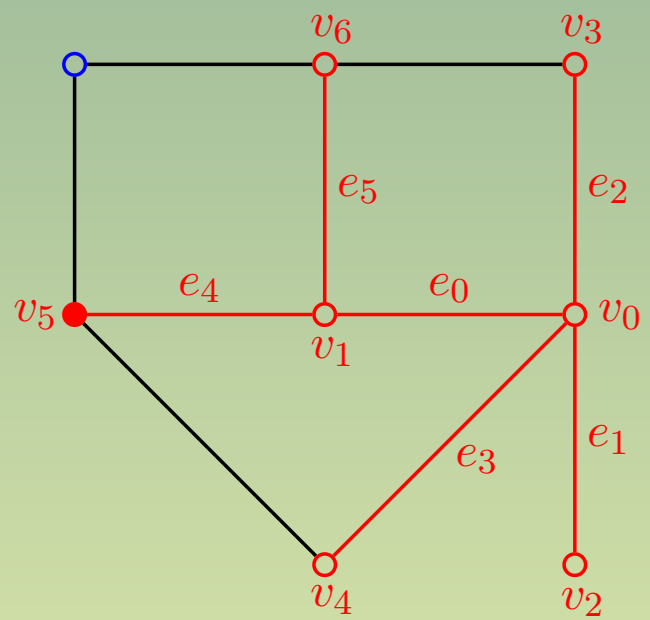
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Kako su posjećeni svi susjedni vrhovi vrha v_4 i trenutno stablo nije razapinjuće stablo, stavimo $w = v_5$.

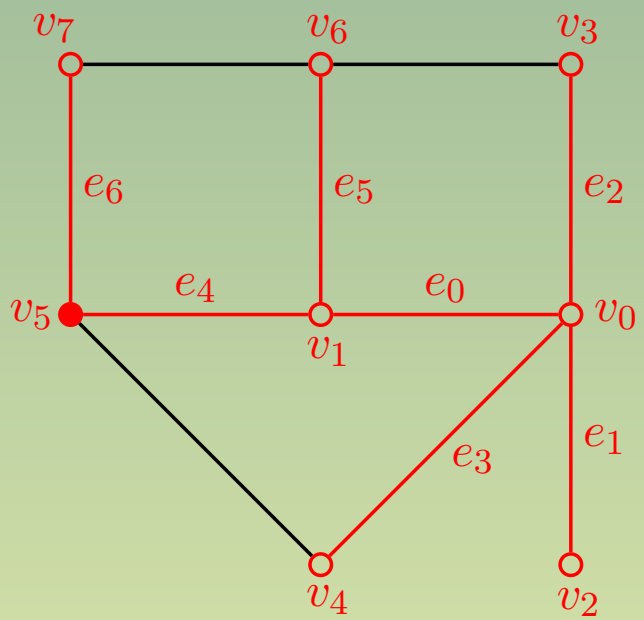
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Pogledamo jedini neposjećeni susjedni vrh (plavi vrh) vrha v_5

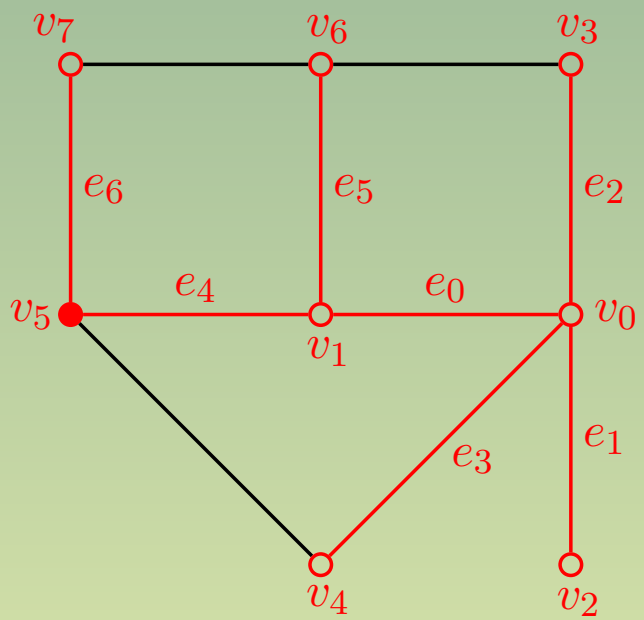
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$

Pogledamo jedini neposjećeni susjedni vrh (plavi vrh) vrha v_5 i označimo ga s v_7, a brid $e_6 = v_5v_7$ stavimo u stablo.

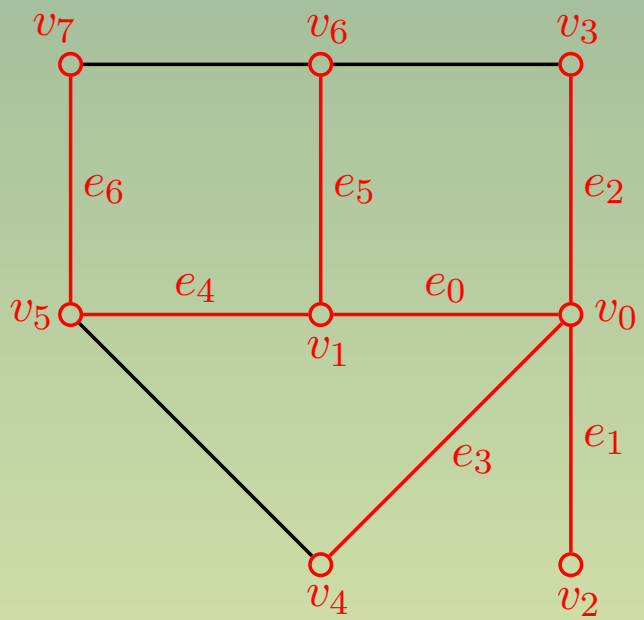
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$

Kako su posjećeni svi vrhovi u grafu,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

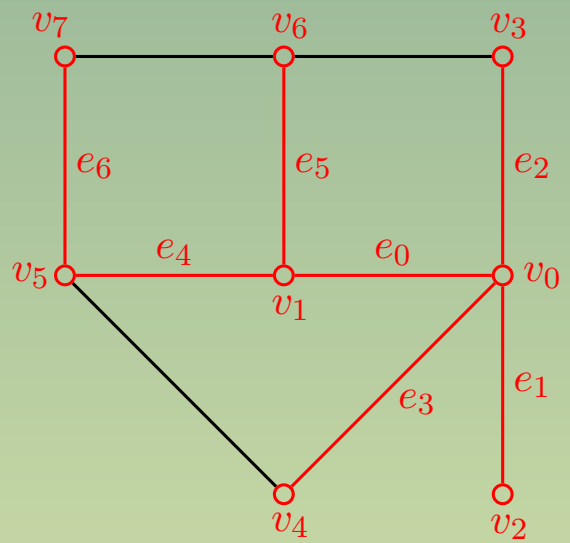


bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$

◂ objasni postupak

Kako su posjećeni svi vrhovi u grafu, dobiveno stablo je razapinjuće stablo zadanog grafa.

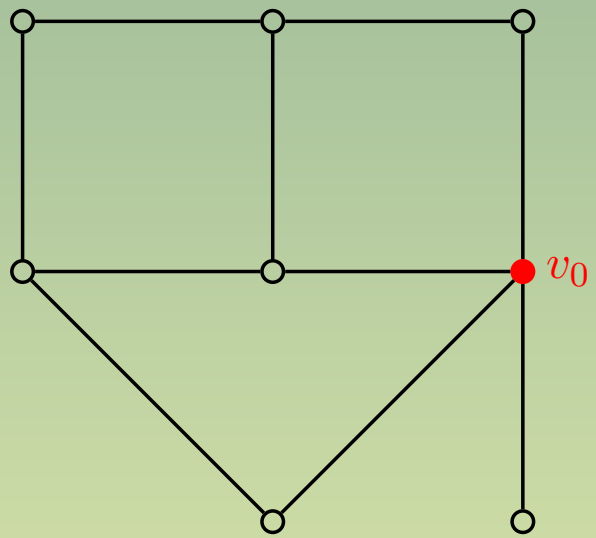
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Kratko ćemo to pisati u obliku tablice

korak		korak	
1	$e_0,\ w = v_0$	7	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_1$
2	$e_0e_1,\ w = v_0$	8	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_2$
3	$e_0e_1e_2,\ w = v_0$	9	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_3$
4	$e_0e_1e_2e_3,\ w = v_0$	10	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_4$
5	$e_0e_1e_2e_3,\ w = v_1$	11	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_5$
6	$e_0e_1e_2e_3e_4,\ w = v_1$	12	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\ w = v_5$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

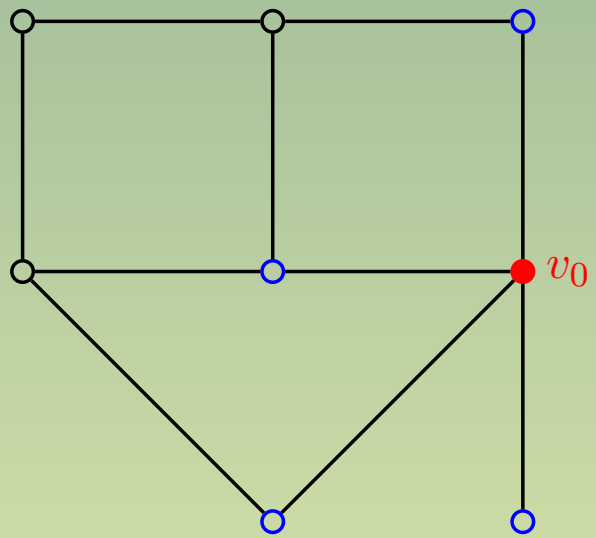


bridovi u stablu:

konačno rješenje

Pogledajmo još jedan način biranja vrhova u BFS algoritmu. Stavimo da je $w = v_0$.

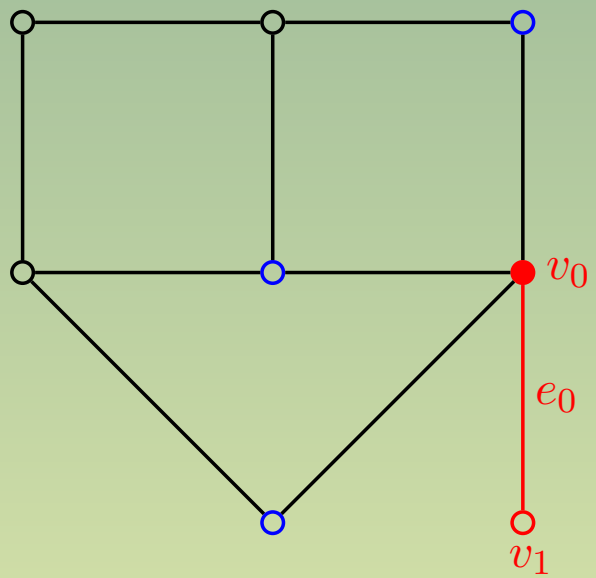
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu:

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_0$

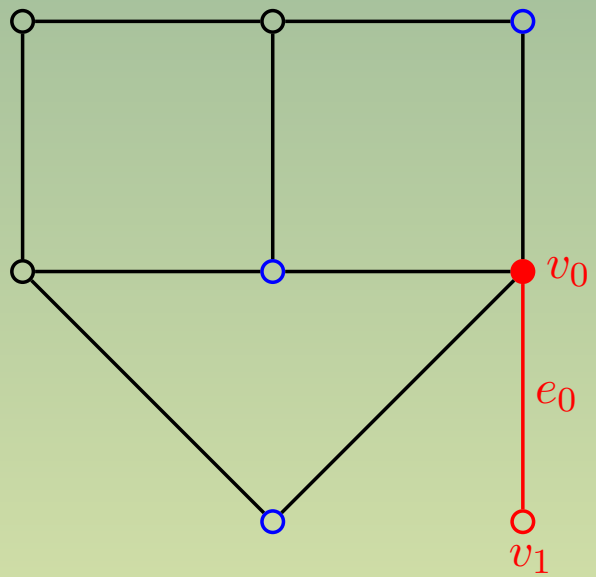
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_0$ i odaberemo jedan od tih vrhova kojeg označimo s v_1. Brid $e_0 = v_0v_1$ ubacimo u stablo. I dalje je $w = v_0$.

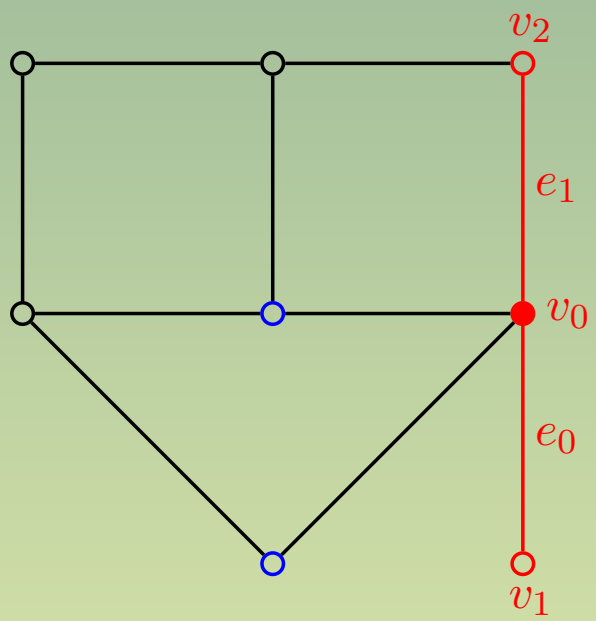
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_0$

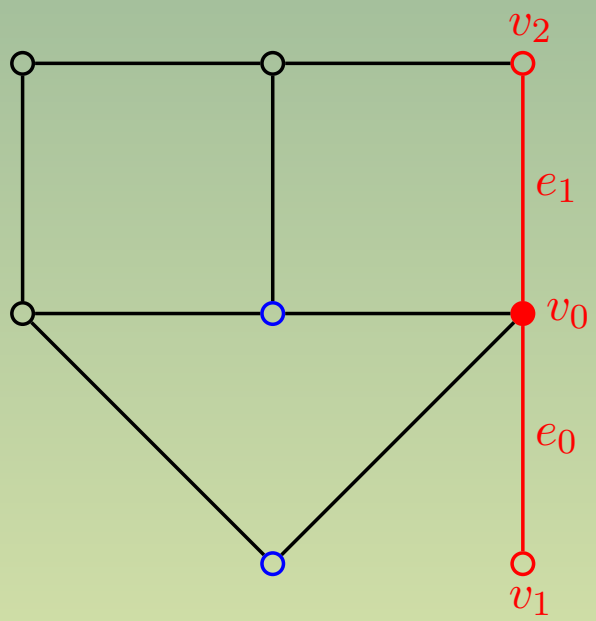
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_0$ i odaberemo jedan od tih vrhova kojeg označimo s v_2. Brid $e_1 = v_0v_2$ ubacimo u stablo. I dalje je $w = v_0$.

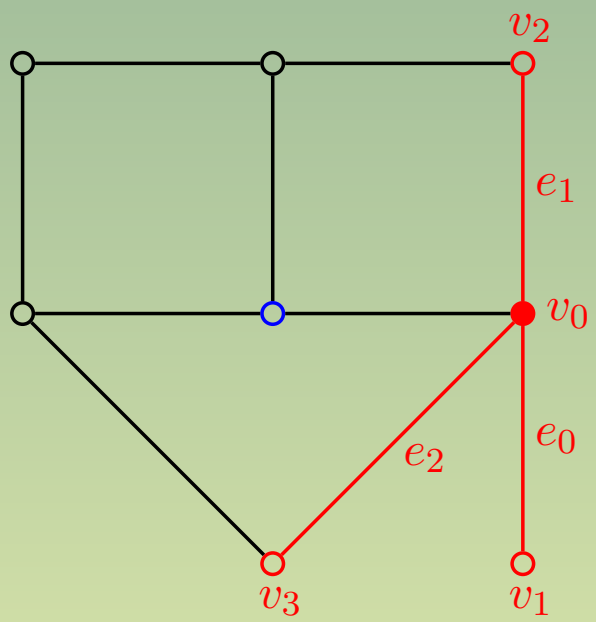
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_0$

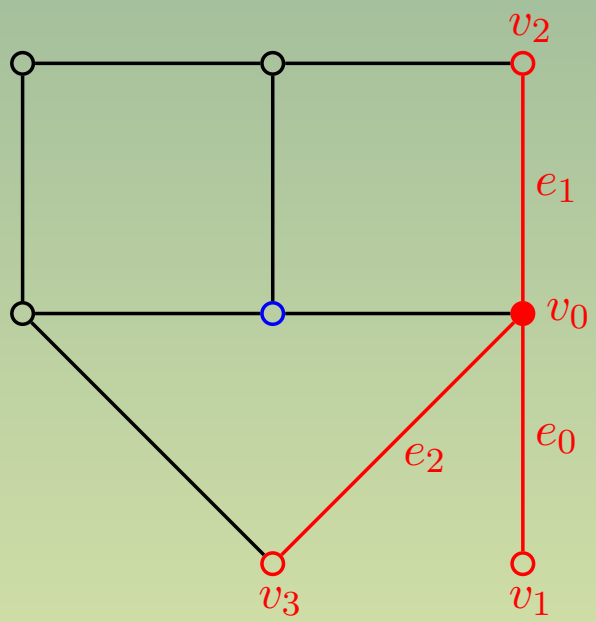
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrhovi) vrha $w = v_0$ i odaberemo jedan od tih vrhova kojeg označimo s v_3. Brid $e_2 = v_0v_3$ ubacimo u stablo. I dalje je $w = v_0$.

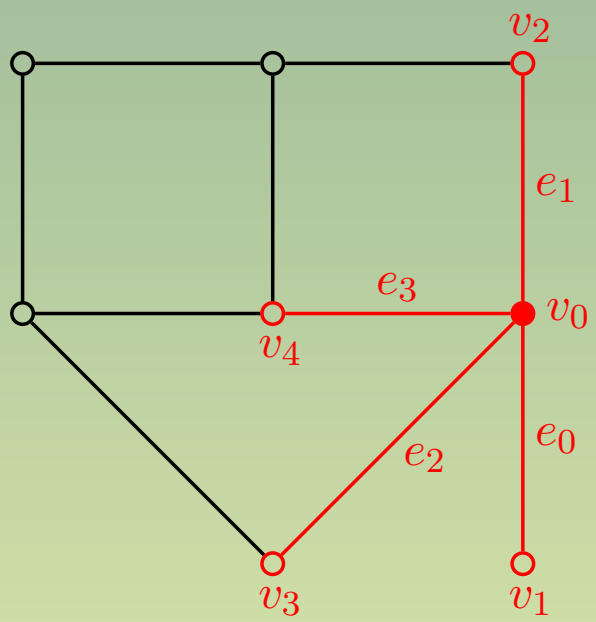
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrh) vrha $w = v_0$

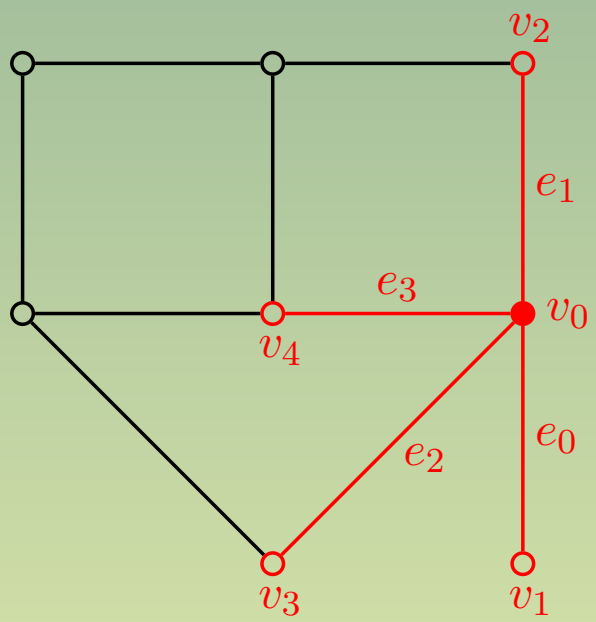
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrh) vrha $w = v_0$ i uzmemo taj jedini još neposjećeni vrh i označimo ga s v_4. Brid $e_3 = v_0v_4$ ubacimo u stablo. I dalje je $w = v_0$.

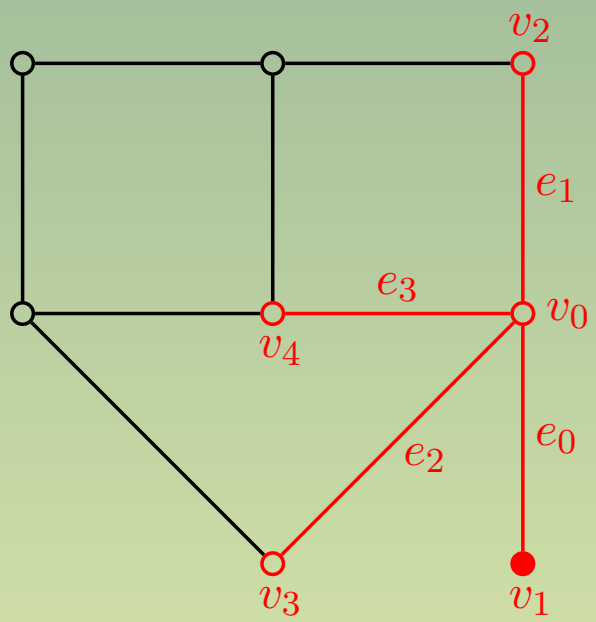
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3

Kako su posjećeni svi susjedni vrhovi vrha v_0 i trenutno stablo nije razapinjuće stablo

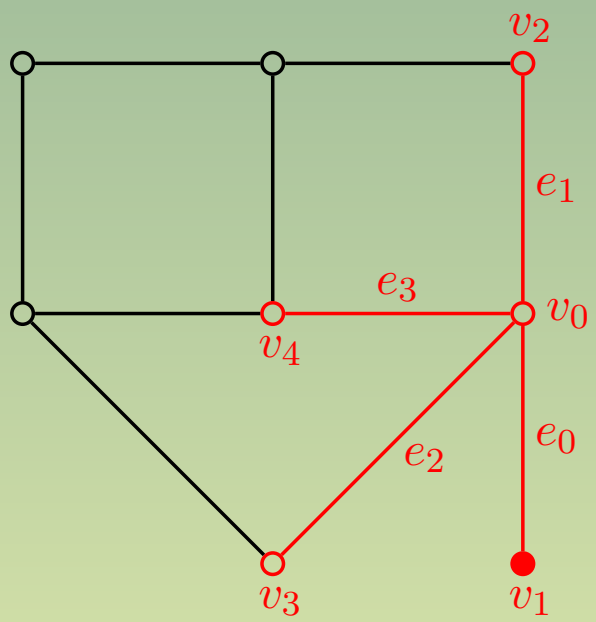
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3

Kako su posjećeni svi susjedni vrhovi vrha v_0 i trenutno stablo nije razapinjuće stablo, stavimo $w = v_1$.

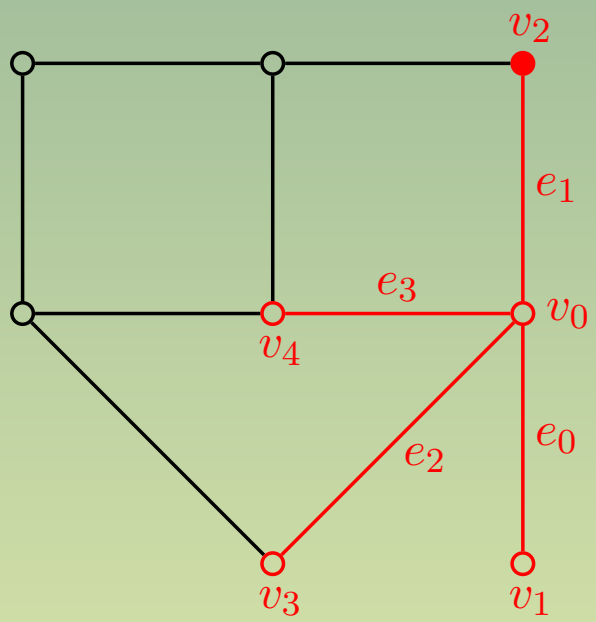
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3

Kako su posjećeni svi susjedni vrhovi vrha v_1 i trenutno stablo nije razapinjuće stablo,

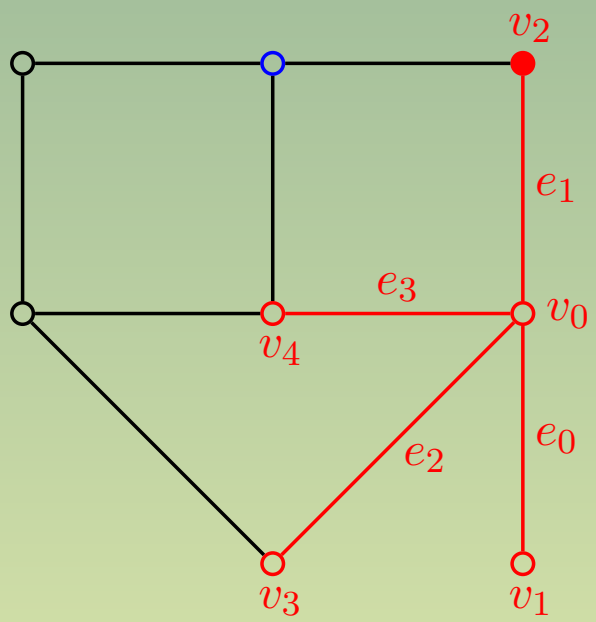
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3

Kako su posjećeni svi susjedni vrhovi vrha v_1 i trenutno stablo nije razapinjuće stablo, stavimo $w = v_2$.

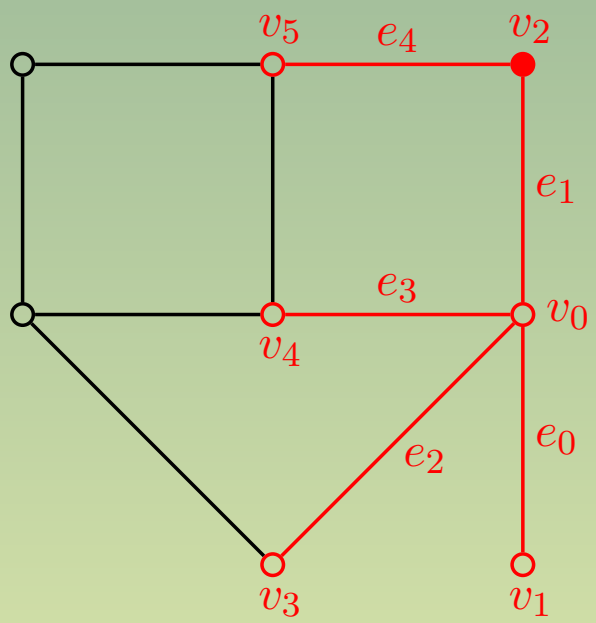
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrh) vrha $w = v_2$

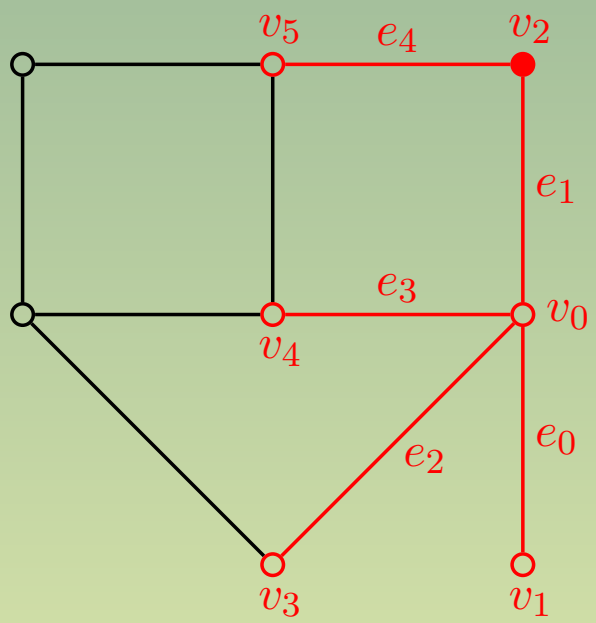
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3, e_4

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove (plavi vrh) vrha $w = v_2$ i uzmemo taj jedini još neposjećeni vrh i označimo ga s v_5. Brid $e_4 = v_2v_5$ ubacimo u stablo. I dalje je $w = v_2$.

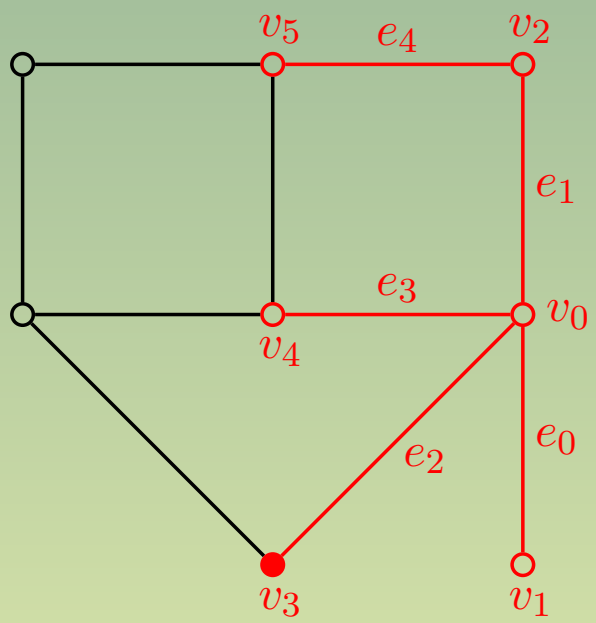
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3, e_4

Kako su posjećeni svi susjedni vrhovi vrha v_2 i trenutno stablo nije razapinjuće stablo,

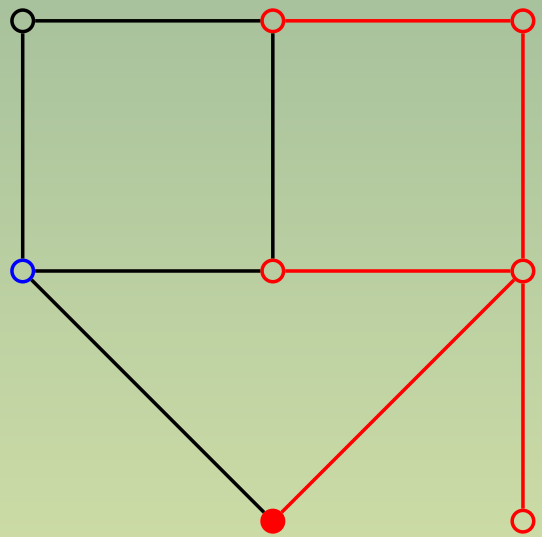
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3, e_4

Kako su posjećeni svi susjedni vrhovi vrha v_1 i trenutno stablo nije razapinjuće stablo, stavimo $w = v_3$.

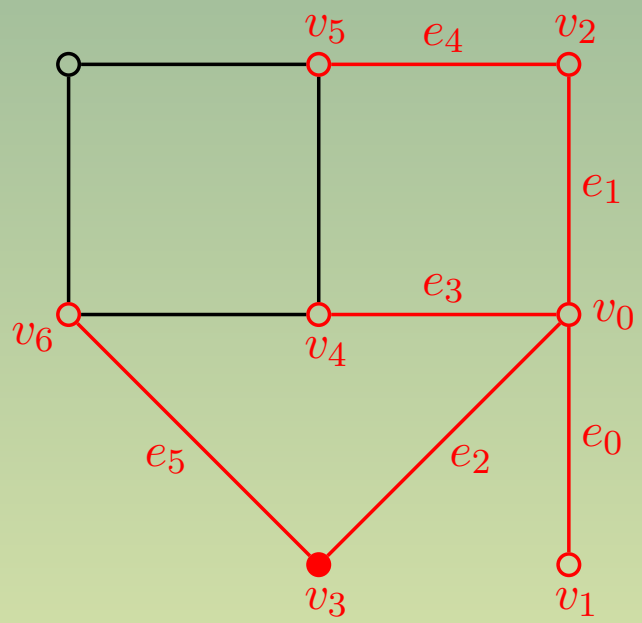
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: e_0, e_1, e_2, e_3, e_4

Pogledamo jedini neposjećeni susjedni vrh (plavi vrh) vrha v_3

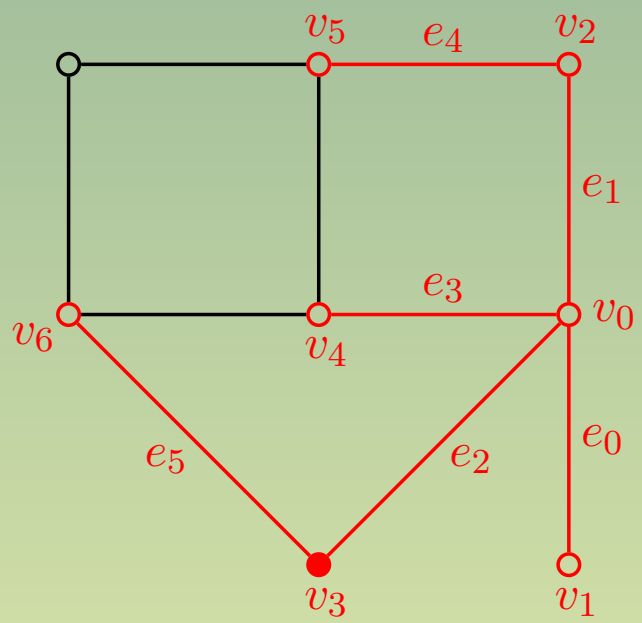
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Pogledamo jedini neposjećeni susjedni vrh (plavi vrh) vrha v_3 i označimo ga s v_6, a brid $e_5 = v_3v_6$ stavimo u stablo.

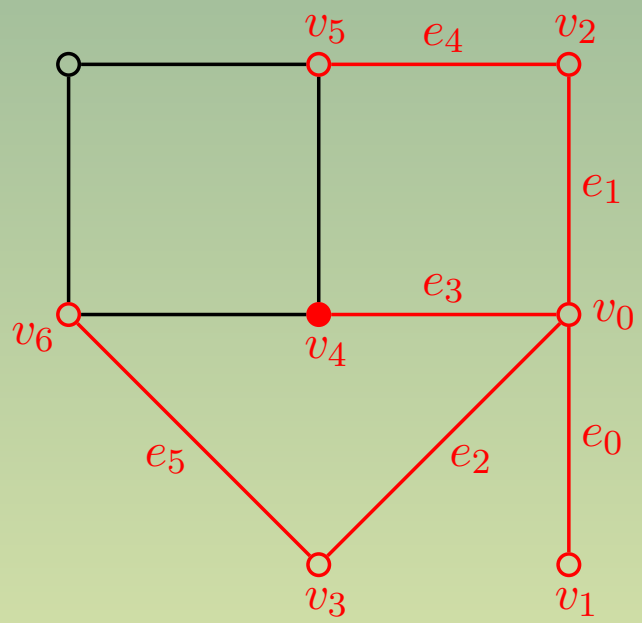
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Kako su posjećeni svi susjedni vrhovi vrha v_3 i trenutno stablo nije razapinjuće stablo,

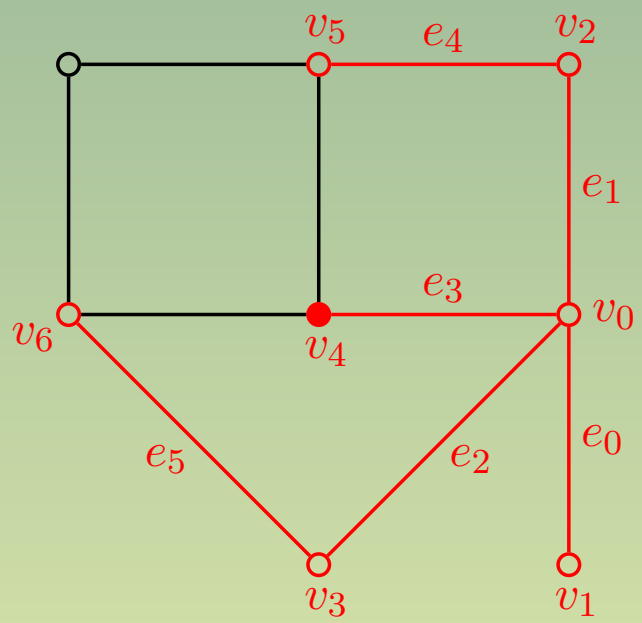
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Kako su posjećeni svi susjedni vrhovi vrha v_3 i trenutno stablo nije razapinjuće stablo, stavimo $w = v_4$.

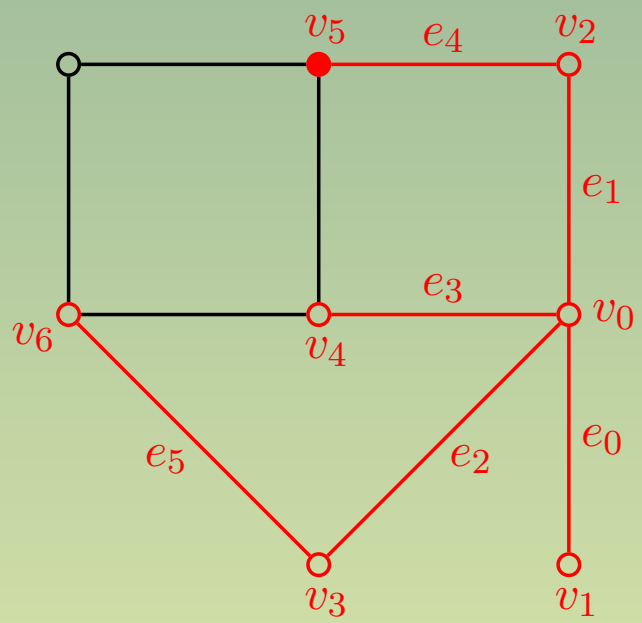
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Kako su posjećeni svi susjedni vrhovi vrha v_4 i trenutno stablo nije razapinjuće stablo,

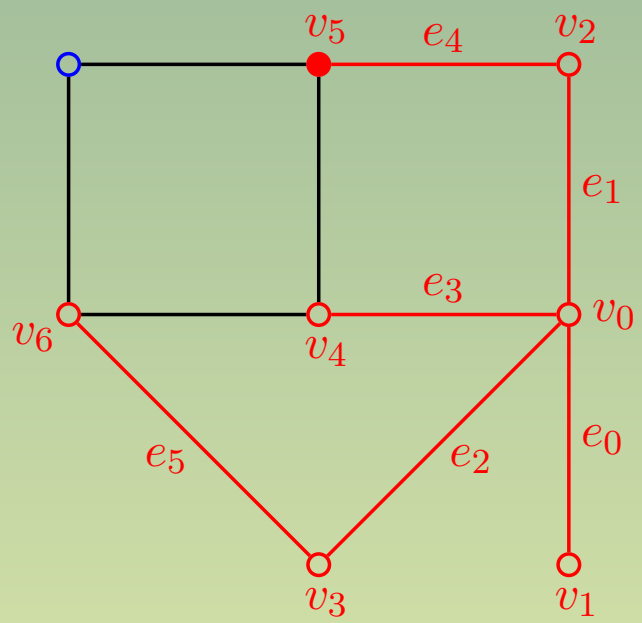
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Kako su posjećeni svi susjedni vrhovi vrha v_4 i trenutno stablo nije razapinjuće stablo, stavimo $w = v_5$.

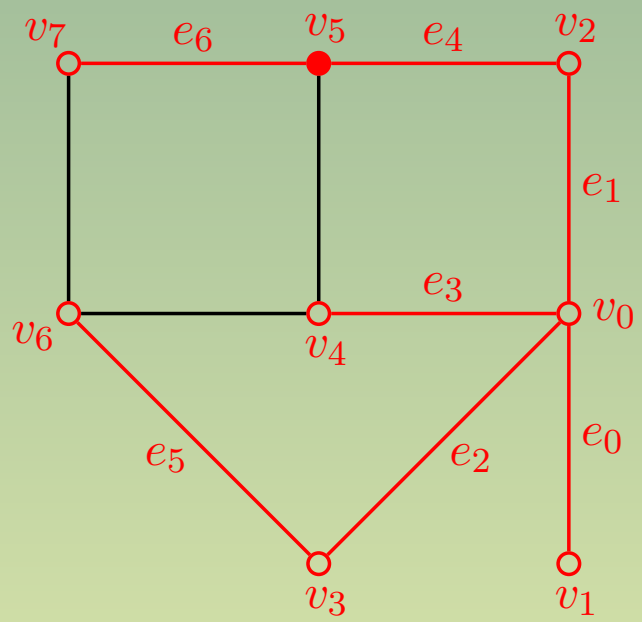
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$

Pogledamo jedini neposjećeni susjedni vrh (plavi vrh) vrha v_5

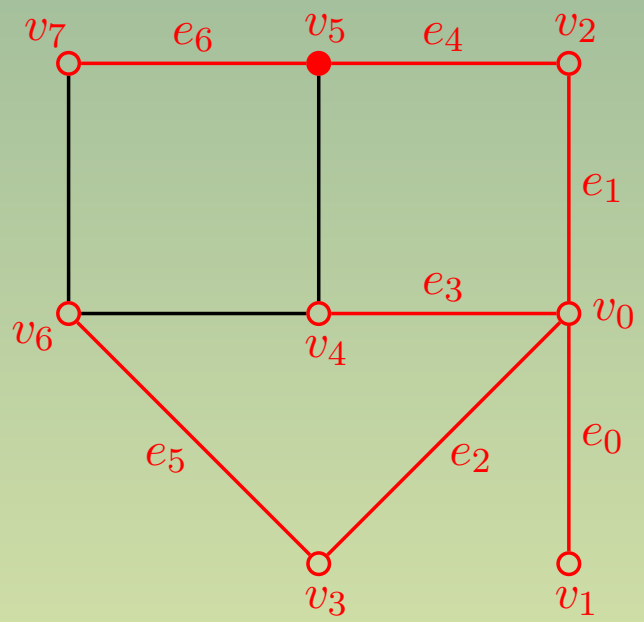
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$

Pogledamo jedini neposjećeni susjedni vrh (plavi vrh) vrha v_5 i označimo ga s v_7, a brid $e_6 = v_5v_7$ stavimo u stablo.

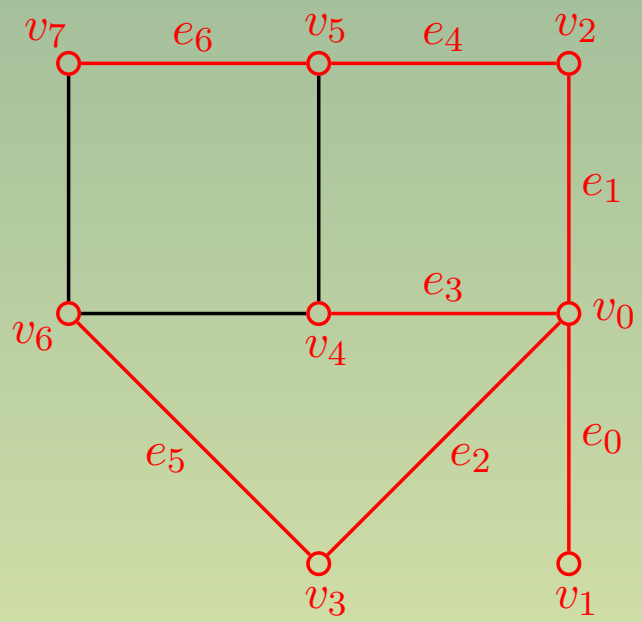
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$

Kako su posjećeni svi vrhovi u grafu,

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

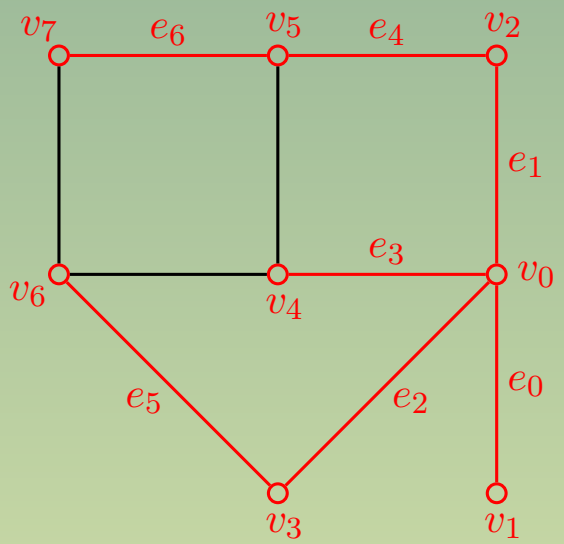


bridovi u stablu: $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$

◂ objasni postupak

Kako su posjećeni svi vrhovi u grafu, dobiveno stablo je razapinjuće stablo zadanog grafa.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



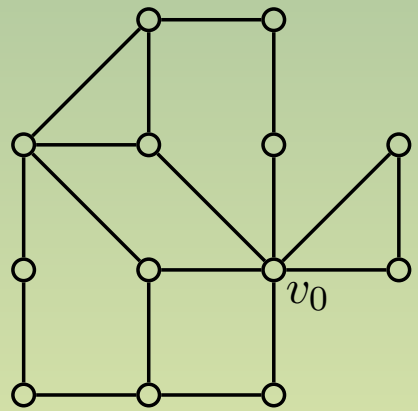
Kratko ćemo to pisati u obliku tablice

korak		korak	
1	$e_0,\ w = v_0$	7	$e_0e_1e_2e_3e_4,\ w = v_2$
2	$e_0e_1,\ w = v_0$	8	$e_0e_1e_2e_3e_4,\ w = v_3$
3	$e_0e_1e_2,\ w = v_0$	9	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_3$
4	$e_0e_1e_2e_3,\ w = v_0$	10	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_4$
5	$e_0e_1e_2e_3,\ w = v_1$	11	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_5$
6	$e_0e_1e_2e_3,\ w = v_2$	12	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\ w = v_5$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.58.

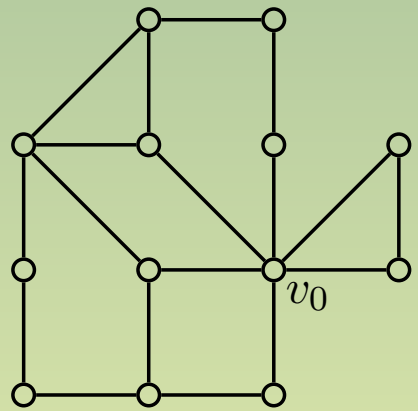
Pomoću BFS algoritma pronađite razapinjuće stablo zadanog grafa tako da počnete s vrhom v_0.



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.58.

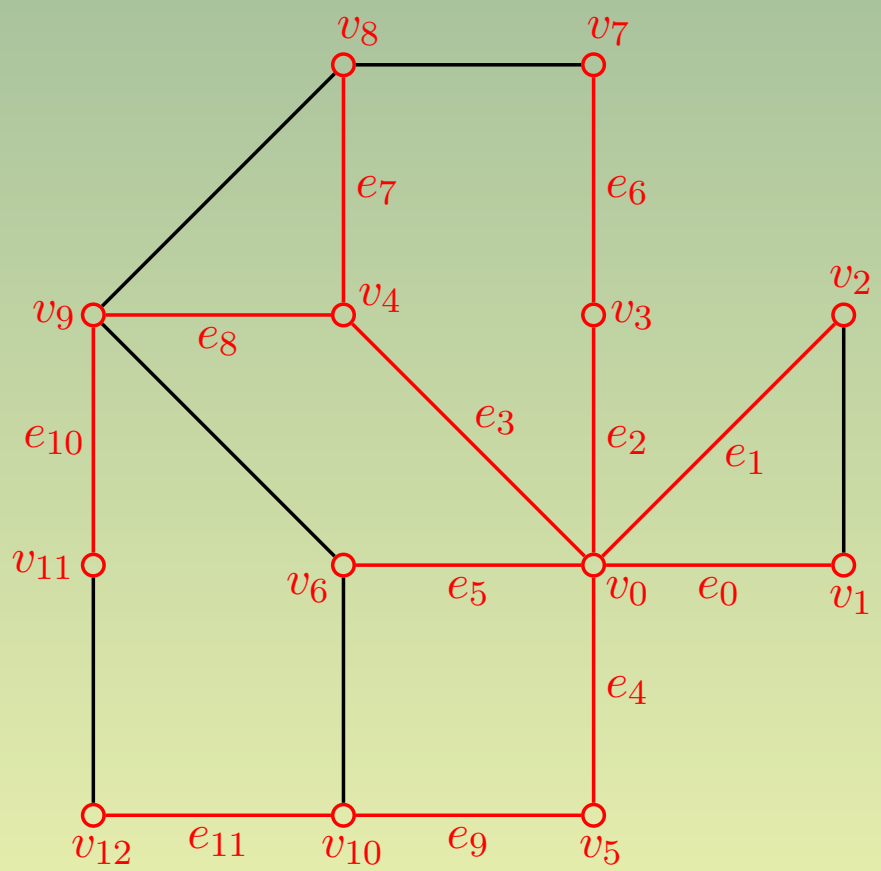
Pomoću BFS algoritma pronađite razapinjuće stablo zadanog grafa tako da počnete s vrhom v_0.



Rješenje.

Rješenje nije jedinstveno, već ovisi o tome kojim ćemo redom posjećivati pojedine vrhove. Za vježbu pronađite još neka razapinjuća stabla tako da drukčijim redoslijedom posjećujete pojedine vrhove, ali svaki put počnite s vrhom v_0.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Stabla

Def. i karakterizacije

Riješeni primjeri

Korijenska stabla

Bin. stabla i alg. izrazi

Stablo sortiranja

Sortiranje u parcijalno uređenom skupu

Hrpa

Razapinjuća stabla

Rekurzija za raz. stabla

Riješeni primjeri

Matrični teorem o stablima

Teoretski primjeri

DFS i BFS algoritam

DFS algoritam

BFS algoritam

Povezanost grafa

Kruskal i Prim

Kruskalov algoritam

Implementacija Kruskala

Primov algoritam

Implementacija Prima

Još o Ham. ciklusu

korak	
1	$e_0,\ w = v_0$
2	$e_0e_1,\ w = v_0$
3	$e_0e_1e_2,\ w = v_0$
4	$e_0e_1e_2e_3,\ w = v_0$
5	$e_0e_1e_2e_3e_4,\ w = v_0$
6	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_0$
7	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_1$
8	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_2$
9	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_3$
10	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\ w = v_3$
11	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\ w = v_4$
12	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7,\ w = v_4$
13	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8,\ w = v_4$
14	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8,\ w = v_5$
15	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8e_9,\ w = v_5$
16	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8e_9,\ w = v_6$
17	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8e_9,\ w = v_7$
18	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8e_9,\ w = v_8$
19	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8e_9,\ w = v_9$
20	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8e_9e_{10},\ w = v_9$
21	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8e_9e_{10},\ w = v_{10}$
22	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8e_9e_{10}e_{11},\ w = v_{10}$

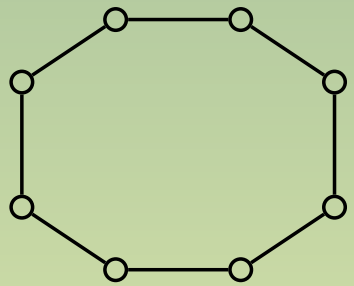
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Sada kada smo vidjeli DFS i BFS algoritam na primjerima, pitamo se koji je od njih ipak efikasniji. Odgovor je, nijedan, tj. to bitno ovisi o strukturi grafa na koji se ti algoritmi primjenjuju. U nekim slučajevima će biti efikasniji DFS algoritam, a u drugim slučajevima pak BFS algoritam. Isto tako, sa prethodnih primjera smo mogli uočiti jednu bitnu razliku između ta dva algoritma. Naime, DFS algoritam želi što prije napustiti trenutni centar, tj. čim dosegne neki neposjećeni susjedni vrh, odmah se prebacuje na njega (prioritet mu je čim brže ići u dubinu grafa). S druge strane, BFS algoritam ne napušta trenutni centar tako dugo dok ne posjeti sve njegove susjedne vrhove, a tek nakon toga napušta taj vrh i prebacuje se na novi (prioritet mu je čim brže ići u širinu grafa). Da li je bolje ići čim brže u dubinu ili pak čim brže u širinu, kao što smo već rekli, bitno ovisi o samom grafu. Pogledajmo to na primjerima.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.59.

Primijenite DFS i BFS algoritam na graf

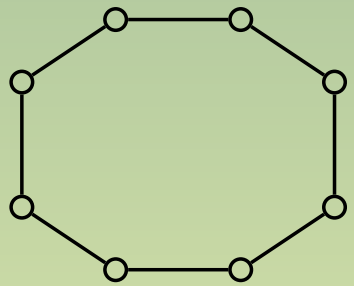


i odredite koji je od njih efikasniji u ovom slučaju.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.59.

Primijenite DFS i BFS algoritam na graf



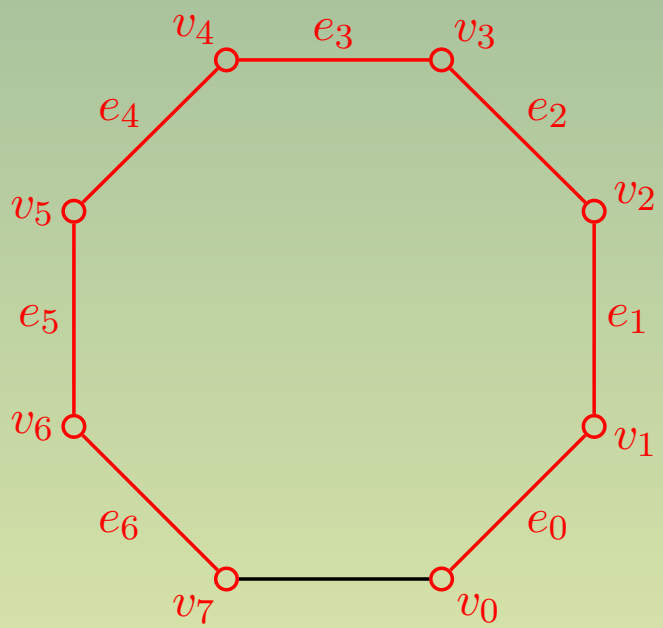
i odredite koji je od njih efikasniji u ovom slučaju.

Rješenje.

Zbog simetrije u grafu, svejedno je s kojim vrhom počnemo oba algoritma jer to u ovom slučaju neće utjecati na vrijeme izvršavanja algoritama. Vidjet ćemo da je u ovom slučaju DFS algoritam efikasniji. Objasnite zašto!

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

DFS algoritam



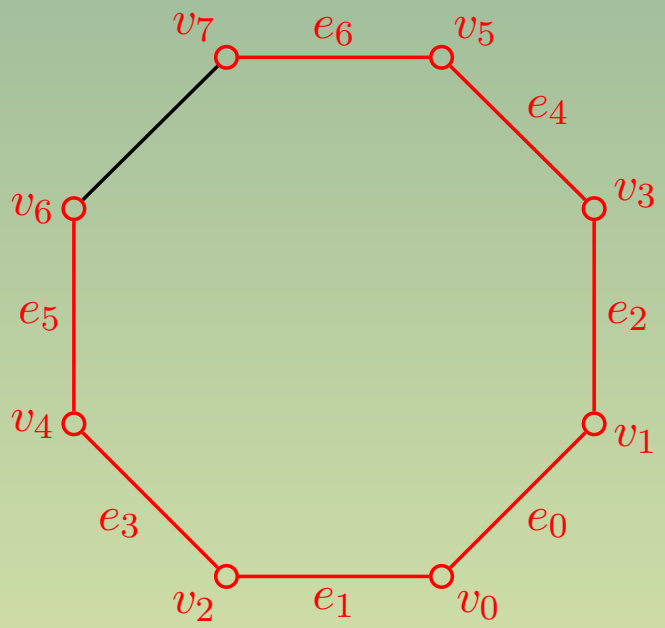
korak		korak	
1	$e_0,\ w = v_1$	5	$e_0e_1e_2e_3e_4,\ w = v_5$
2	$e_0e_1,\ w = v_2$	6	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_6$
3	$e_0e_1e_2,\ w = v_3$	7	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\ w = v_7$
4	$e_0e_1e_2e_3,\ w = v_4$		

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

BFS algoritam

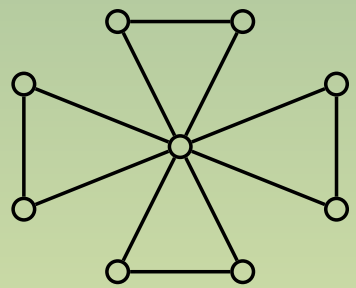


korak		korak	
1	$e_0,\ w = v_0$	7	$e_0e_1e_2e_3,\ w = v_3$
2	$e_0e_1,\ w = v_0$	8	$e_0e_1e_2e_3e_4,\ w = v_3$
3	$e_0e_1,\ w = v_1$	9	$e_0e_1e_2e_3e_4,\ w = v_4$
4	$e_0e_1e_2,\ w = v_1$	10	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_4$
5	$e_0e_1e_2,\ w = v_2$	11	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_5$
6	$e_0e_1e_2e_3,\ w = v_2$	12	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\ w = v_5$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.60.

Primijenite DFS i BFS algoritam na graf

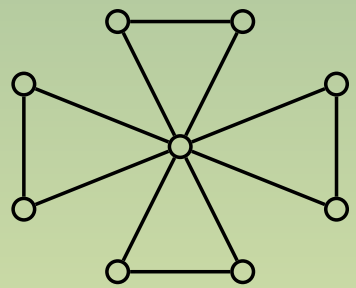


i odredite koji je od njih efikasniji u ovom slučaju.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.60.

Primijenite DFS i BFS algoritam na graf



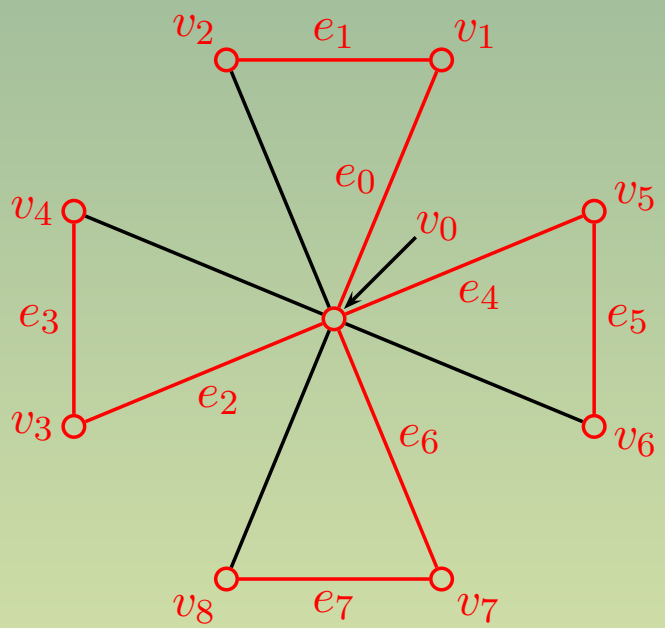
i odredite koji je od njih efikasniji u ovom slučaju.

Rješenje.

U ovom slučaju imamo dva bitno različita početka. Možemo oba algoritma započeti sa vrhom u "sredini" ili pak s nekim "vanjskim" vrhom u zadanom grafu. Vidjet ćemo da je u oba slučaja BFS algoritam efikasniji. Objasnite zašto!

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

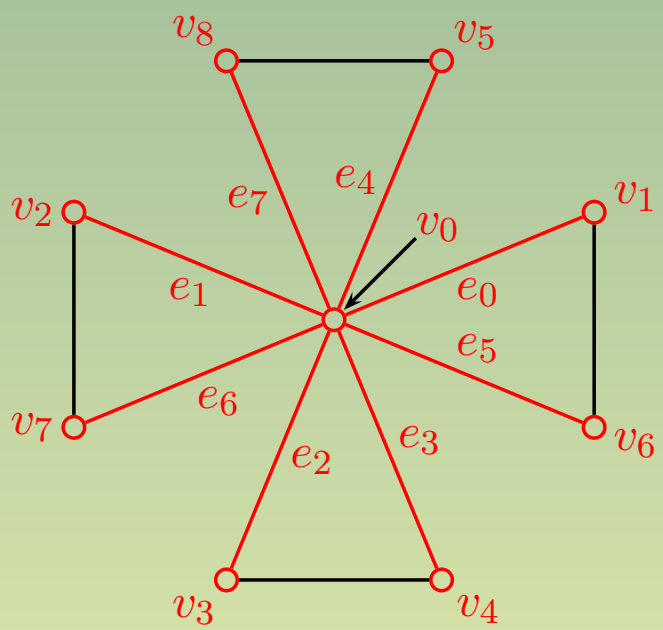
DFS algoritam s početnim vrhom u "sredini"



korak		korak	
1	$e_0,\ w = v_1$	8	$e_0e_1e_2e_3,\ w = v_0$
2	$e_0e_1,\ w = v_2$	9	$e_0e_1e_2e_3e_4,\ w = v_5$
3	$e_0e_1,\ w = v_1$	10	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_6$
4	$e_0e_1,\ w = v_0$	11	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_5$
5	$e_0e_1e_2,\ w = v_3$	12	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_0$
6	$e_0e_1e_2e_3,\ w = v_4$	13	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\ w = v_7$
7	$e_0e_1e_2e_3,\ w = v_3$	14	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7,\ w = v_8$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

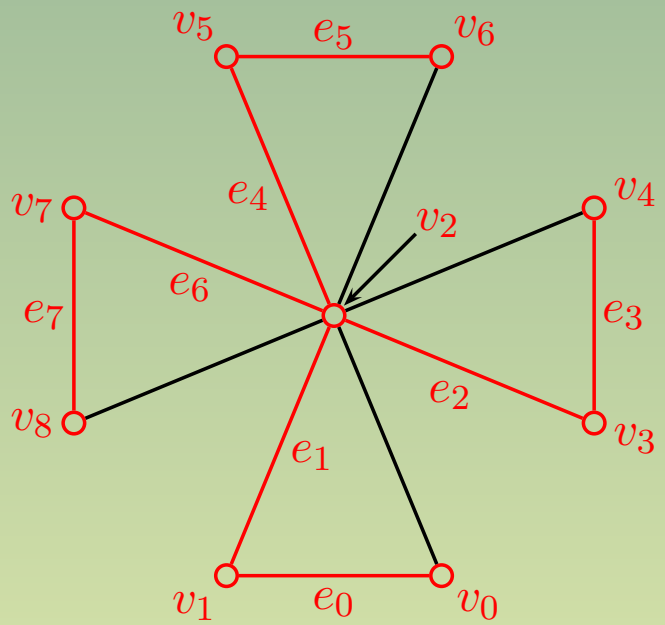
BFS algoritam s početnim vrhom u "sredini"



korak		korak	
1	$e_0,\ w = v_0$	5	$e_0e_1e_2e_3e_4,\ w = v_0$
2	$e_0e_1,\ w = v_0$	6	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_0$
3	$e_0e_1e_2,\ w = v_0$	7	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\ w = v_0$
4	$e_0e_1e_2e_3,\ w = v_0$	8	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7,\ w = v_0$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

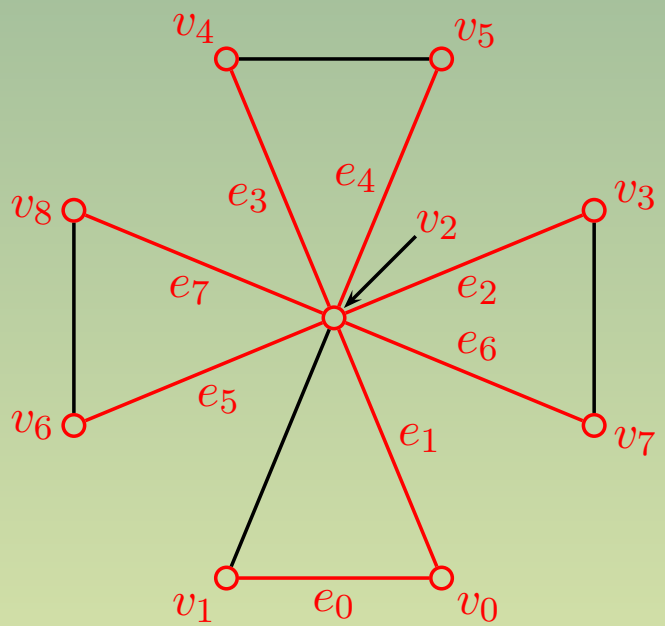
DFS algoritam s početnim "vanjskim" vrhom



korak		korak	
1	$e_0,\ w = v_1$	7	$e_0e_1e_2e_3e_4,\ w = v_5$
2	$e_0e_1,\ w = v_2$	8	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_6$
3	$e_0e_1e_2,\ w = v_3$	9	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_5$
4	$e_0e_1e_2e_3,\ w = v_4$	10	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_2$
5	$e_0e_1e_2e_3,\ w = v_3$	11	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\ w = v_7$
6	$e_0e_1e_2e_3,\ w = v_2$	12	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7,\ w = v_8$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

BFS algoritam s početnim "vanjskim" vrhom

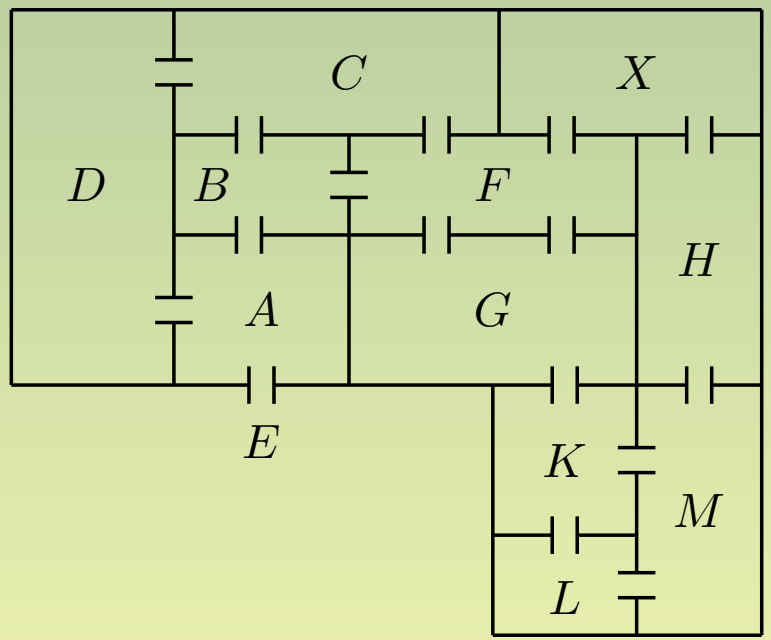


korak		korak	
1	$e_0,\ w = v_0$	6	$e_0e_1e_2e_3,\ w = v_2$
2	$e_0e_1,\ w = v_0$	7	$e_0e_1e_2e_3e_4,\ w = v_2$
3	$e_0e_1,\ w = v_1$	8	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_2$
4	$e_0e_1,\ w = v_2$	9	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\ w = v_2$
5	$e_0e_1e_2,\ w = v_2$	10	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7,\ w = v_2$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.61.

Tlocrt muzeja je dan na donjoj slici, pri čemu je ulaz u muzej označen s E.



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

a. *Reprezentirajte dani tlocrt pomoću grafa.*

b. *Primijenite DFS i BFS algoritme na obilazak muzeja.*

c. *Posjetitelj želi jedino vidjeti izložbu u sobi X. Da li ćete mu preporučiti DFS ili BFS traženje sobe X? Objasnite!*

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

a. *Reprezentirajte dani tlocrt pomoću grafa.*

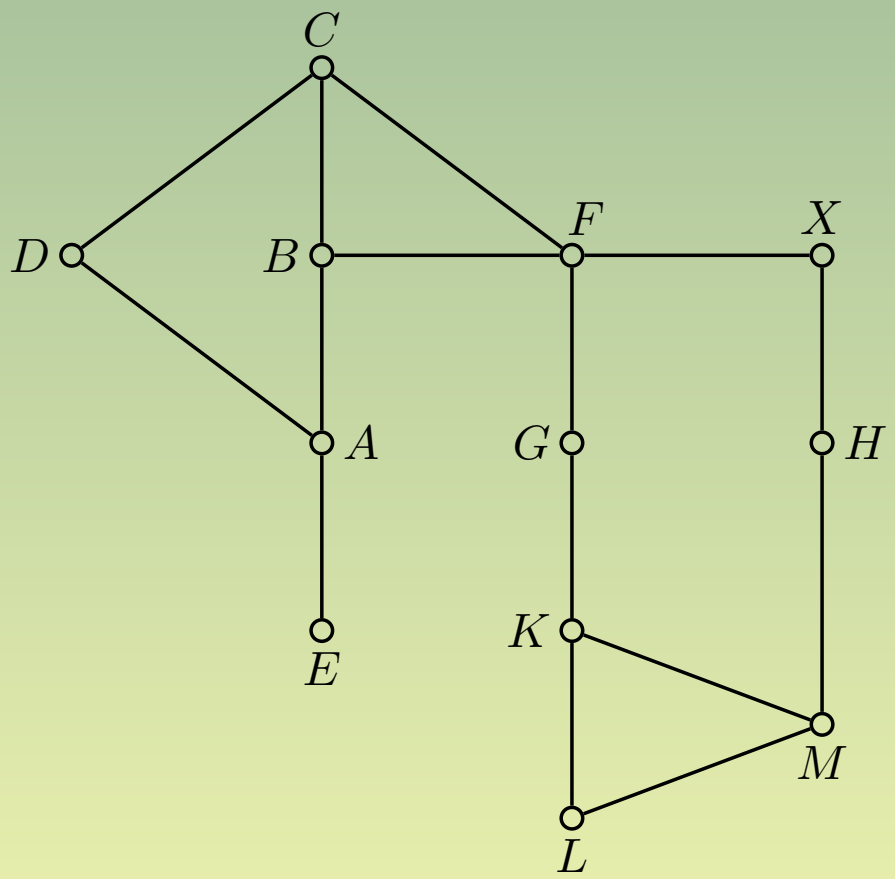
b. *Primijenite DFS i BFS algoritme na obilazak muzeja.*

c. *Posjetitelj želi jedino vidjeti izložbu u sobi X. Da li ćete mu preporučiti DFS ili BFS traženje sobe X? Objasnite!*

Rješenje.

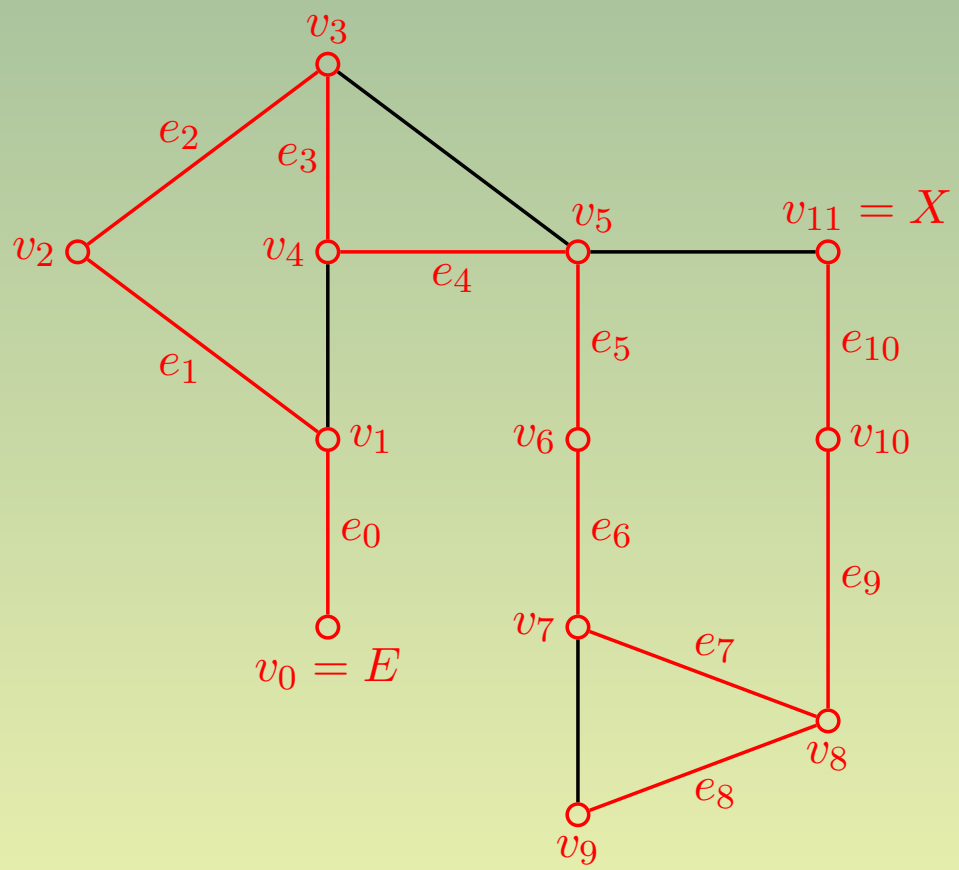
a. Tlocrt muzeja ćemo reprezentirati grafom tako da vrhovi grafa predstavljaju prostorije u muzeju, a dva vrha su susjedna jedino ako postoje vrata između soba koje predstavljaju promatrani vrhovi.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

DFS algoritam



Diskretne strukture s teorijom grafova

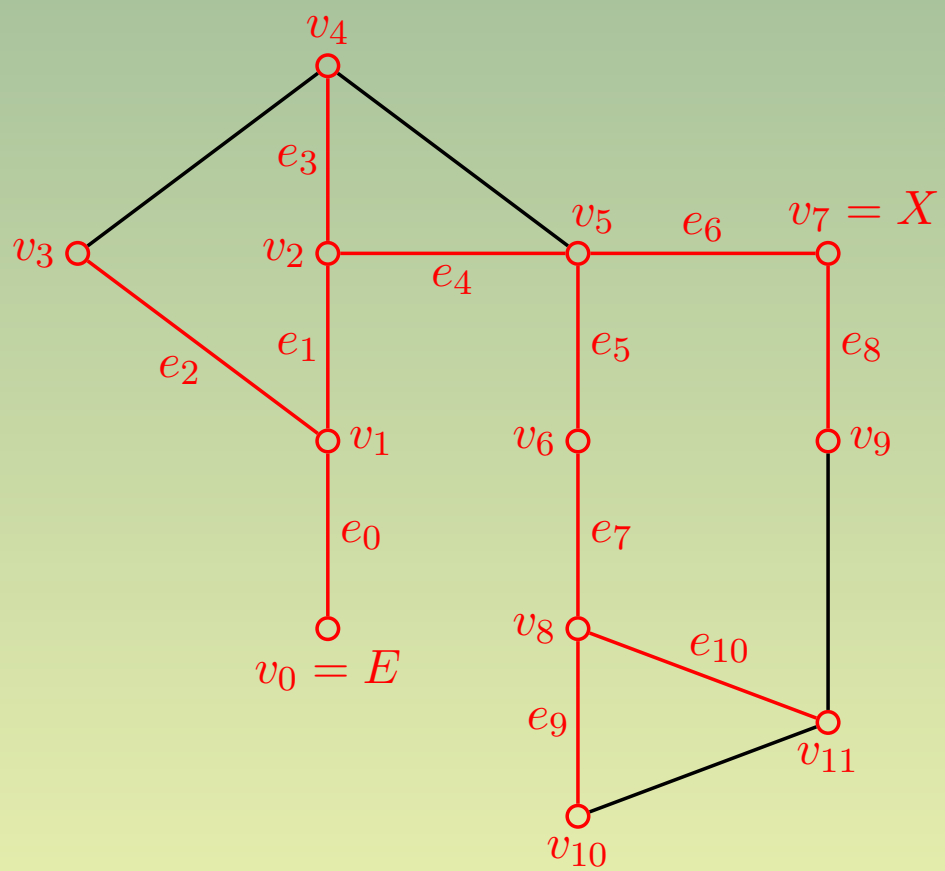
prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

korak	
1	$e_0,\ w = v_1$
2	$e_0e_1,\ w = v_2$
3	$e_0e_1e_2,\ w = v_3$
4	$e_0e_1e_2e_3,\ w = v_4$
5	$e_0e_1e_2e_3e_4,\ w = v_5$
6	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_6$
7	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\ w = v_7$
8	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7,\ w = v_8$
9	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8,\ w = v_9$
10	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8,\ w = v_8$
11	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8e_9,\ w = v_{10}$
12	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8e_9e_{10},\ w = v_{11}$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

BFS algoritam



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

korak	
1	$e_0,\ w = v_0$
2	$e_0,\ w = v_1$
3	$e_0e_1,\ w = v_1$
4	$e_0e_1e_2,\ w = v_1$
5	$e_0e_1e_2,\ w = v_2$
6	$e_0e_1e_2e_3,\ w = v_2$
7	$e_0e_1e_2e_3e_4,\ w = v_2$
8	$e_0e_1e_2e_3e_4,\ w = v_3$
9	$e_0e_1e_2e_3e_4,\ w = v_4$
10	$e_0e_1e_2e_3e_4,\ w = v_5$
11	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5,\ w = v_5$
12	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\ w = v_5$
13	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\ w = v_6$
14	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7,\ w = v_6$
15	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7,\ w = v_7$
16	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8,\ w = v_7$
17	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8,\ w = v_8$
18	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8e_9,\ w = v_8$
19	$e_0e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8e_9e_{10},\ w = v_8$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

- **DFS algoritam**
  - U najboljem slučaju će posjetitelj doći do prostorije X u četvrtom pokušaju, nakon što prođe kroz prostorije A, B i F
  - U najgorem slučaju posjetitelj može doći do prostorije X tek na kraju nakon što prođe kroz sve prostorije muzeja.

BFS algoritam

- U najboljem slučaju će posjetitelj doći do prostorije X nakon što prođe kroz prostorije A, B, C, D i F.
- U najgorem slučaju posjetitelj može doći do prostorije X nakon što prođe kroz prostorije A, B, C, D, F i G.

Pogledamo li neki prosječni slučaj, za posjetitelja je najbolje da pretražuje muzej BFS algoritmom želi li što prije doći do prostorije X u nekom prosječnom broju pokušaja.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.62.

Navedite primjer povezanog grafa koji ima razapinjuće stablo koje ne možemo niti na koji način dobiti pomoću DFS algoritma.

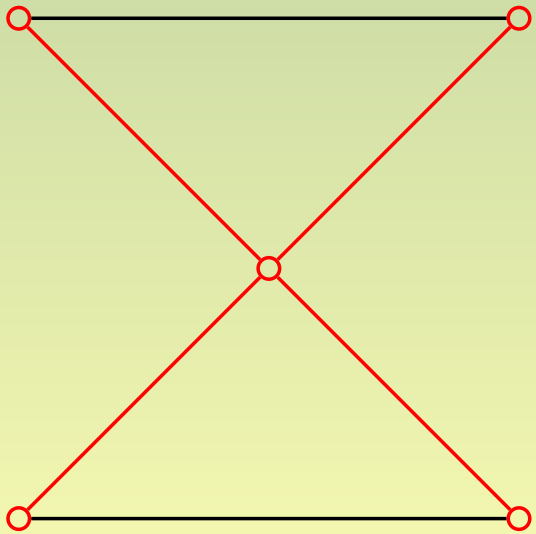
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.62.

Navedite primjer povezanog grafa koji ima razapinjuće stablo koje ne možemo niti na koji način dobiti pomoću DFS algoritma.

Rješenje.

Na primjer, crveno razapinjuće stablo zadanog grafa nije moguće dobiti nikako pomoću DFS algoritma.



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.63.

Navedite primjer povezanog grafa koji ima razapinjuće stablo koje ne možemo niti na koji način dobiti pomoću BFS algoritma.

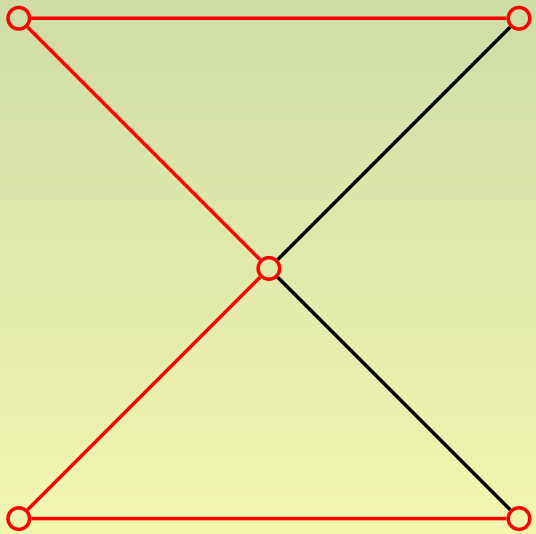
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.63.

Navedite primjer povezanog grafa koji ima razapinjuće stablo koje ne možemo niti na koji način dobiti pomoću BFS algoritma.

Rješenje.

Na primjer, crveno razapinjuće stablo zadanog grafa nije moguće dobiti nikako pomoću BFS algoritma.



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.64.

Navedite primjer povezanog grafa čije se svako razapinjuće stablo može dobiti i pomoću DFS i pomoću BFS algoritma.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

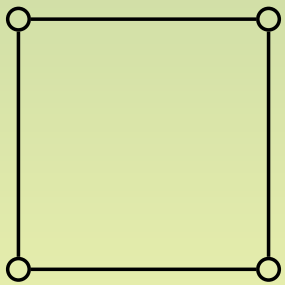
Primjer 8.64.

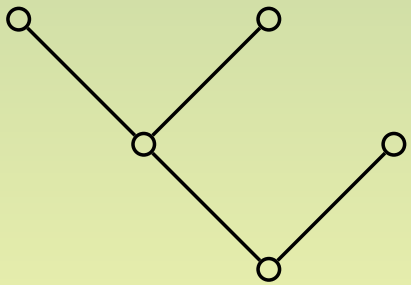
Navedite primjer povezanog grafa čije se svako razapinjuće stablo može dobiti i pomoću DFS i pomoću BFS algoritma.

Rješenje.

Na primjer, C_n (ciklus duljine n) ili pak bilo koje stablo.

Navedite još neke primjere takvih grafova!





Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.65.

Objasnite kako se DFS (također i BFS) algoritam može iskoristiti za računanje broja komponenata povezanosti grafa G.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.65.

Objasnite kako se DFS (također i BFS) algoritam može iskoristiti za računanje broja komponenata povezanosti grafa G.

Rješenje.

Svaki puta kada se DFS (ili BFS) algoritam zaustavi, a nisu svi vrhovi posjećeni, to znači da su posjećeni svi vrhovi u nekoj njegovoj komponenti povezanosti u kojoj se nalazi i početni vrh s kojim je započet algoritam. U tom slučaju algoritam ponovimo ponovo s nekim novim početnim vrhom koji još nije posjećen. Postupak ponavljamo tako dugo dok svi vrhovi ne budu posjećeni. Broj komponenata povezanosti je tada jednak broju zaustavljanja DFS (ili BFS) algoritma.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.66.

Zadan je graf G matricom susjedstva

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bez crtanja grafa provjerite da li je graf G povezan i izračunajte broj komponenata povezanosti grafa G.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.66.

Zadan je graf G matricom susjedstva

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bez crtanja grafa provjerite da li je graf G povezan i izračunajte broj komponenata povezanosti grafa G.

Rješenje.

Primijenit ćemo algoritam opisan u prethodnom primjeru.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

$$A = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_0 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_0 & & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

komponente povezanosti: v_0

Krenemo s nekim vrhom, npr. vrhom v_0 u prvom retku (odnosno stupcu) matrice susjedstva i primijenjujemo DFS algoritam sve dok svi vrhovi ne budu posjećeni. Broj prekida DFS algoritma jednak je broju komponenata povezanosti grafa G.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

$$A = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_0 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_0 & & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

komponente povezanosti: v_0

Pogledamo susjedne vrhove vrha v_0. To su vrhovi u drugom i četvrtom stupcu (ili retku, ovisi kako se odlučimo gledati).

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

$$A = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_0 & v_1 & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

komponente povezanosti: $v_0 v_1$

Odaberemo jedan od tih vrhova, npr. vrh u drugom stupcu (odnosno retku) i označimo ga s v_1.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

$$A = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_0 & v_1 & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

komponente povezanosti: $v_0 v_1$

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove vrha v_1. Jedini takav vrh je vrh u četvrtom stupcu (retku) jer je vrh u prvom retku (vrh v_0), koji je također susjedan vrhu v_1, već prije posjećen.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

$$A = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ \\ v_2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_0 & v_1 & & v_2 & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

komponente povezanosti: $v_0 v_1 v_2$

Stoga uzmemo taj jedini mogući vrh u četvrtom stupcu (retku) i označimo ga s v_2.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

$$A = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ \\ v_2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_0 & v_1 & & v_2 & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

komponente povezanosti: $v_0 v_1 v_2$

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove vrha v_2. Jedini takav vrh je vrh u petom stupcu (retku). Vrhovi u prvom i drugom stupcu (retku) su također susjedni vrhu v_2, ali oni su već prije posjećeni.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

$$A = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ \\ v_2 \\ v_3 \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_0 & v_1 & & v_2 & v_3 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

komponente povezanosti: $v_0v_1v_2v_3$

Stoga uzmemo taj jedini mogući vrh u petom stupcu (retku) i označimo ga s v_3.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

$$A = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ \\ v_2 \\ v_3 \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_0 & v_1 & & v_2 & v_3 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

komponente povezanosti: $v_0v_1v_2v_3$

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove vrha v_3. Međutim, jedini njegov susjedni vrh je vrh v_2 iz četvrtog stupca kojeg smo već ranije posjetili. Stoga se (prema DFS algoritmu) moramo vratiti na prethodni centar traženja (jer još nisu svi vrhovi posjećeni), a to je vrh v_2.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

$$A = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ \\ v_2 \\ v_3 \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_0 & v_1 & & v_2 & v_3 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

komponente povezanosti: $v_0 v_1 v_2 v_3$

Svi susjedni vrhovi vrha v_2 su već posjećeni pa se moramo vratiti na prethodni centar traženja, a to je vrh v_1.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

$$A = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ \\ v_2 \\ v_3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_0 & v_1 & & v_2 & v_3 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

komponente povezanosti: $v_0 v_1 v_2 v_3$

Svi susjedni vrhovi vrha v_1 su isto već posjećeni pa se moramo vratiti na prethodni centar traženja, a to je vrh v_0.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

$$A = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ \\ v_2 \\ v_3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_0 & v_1 & & v_2 & v_3 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

komponente povezanosti: $v_0 v_1 v_2 v_3$

Svi susjedni vrhovi vrha v_0 su isto već posjećeni. Kako se nemamo kamo više vraćati, a nisu svi vrhovi u grafu još posjećeni (dakle, graf je nepovezan), prekidamo DFS algoritam i počnemo ga natrag iz početka s nekim još neposjećenim vrhom kao početnim vrhom. Vrhovi v_0, v_1, v_2, v_3 određuju jednu komponentu povezanosti grafa G.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

$$A = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ \\ v_2 \\ v_3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_0 & v_1 & & v_2 & v_3 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

komponente povezanosti: $v_0 v_1 v_2 v_3$

Jedini još neposjećeni vrhovi se nalaze u trećem i šestom stupcu (retku).

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

$$A = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_4 \\ v_2 \\ v_3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_0 & v_1 & v_4 & v_2 & v_3 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

komponente povezanosti: $v_0v_1v_2v_3, \quad v_4$

Jedini još neposjećeni vrhovi se nalaze u trećem i šestom stupcu (retku). Odaberemo, npr. vrh u trećem stupcu i označimo ga s v_4.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

$$A = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_4 \\ v_2 \\ v_3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_0 & v_1 & v_4 & v_2 & v_3 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

komponente povezanosti: $v_0v_1v_2v_3, \quad v_4$

Pogledamo susjedne neposjećene vrhove vrha v_4. Jedini takav vrh je u šestom stupcu (retku).

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

$$A = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_4 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_0 & v_1 & v_4 & v_2 & v_3 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

komponente povezanosti: $v_0v_1v_2v_3, \quad v_4v_5$

Uzmemo taj jedini mogući vrh i označimo ga s v_5.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

$$A = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_4 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_0 & v_1 & v_4 & v_2 & v_3 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

komponente povezanosti: $v_0v_1v_2v_3, \quad v_4v_5$

Pogledamo sve susjedne neposjećene vrhove vrha v_5. Takvih vrhova više nema jer je jedini njegov susjedni vrh v_4 već posjećen.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

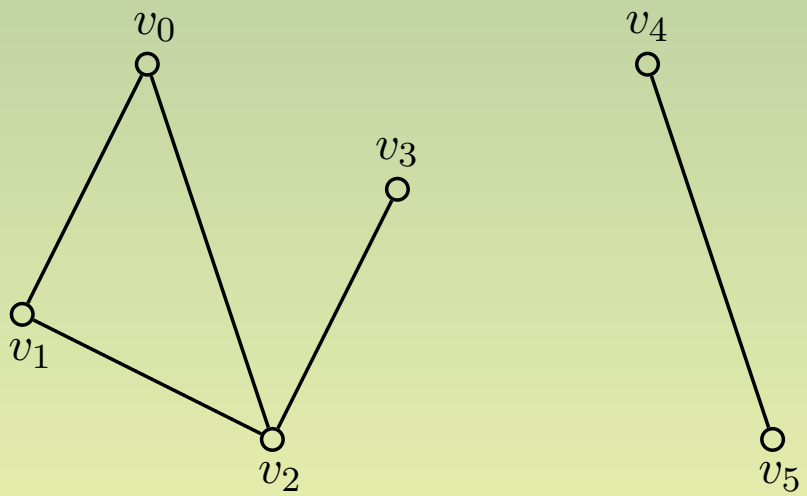
$$A = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_4 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_0 & v_1 & v_4 & v_2 & v_3 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

komponente povezanosti: $v_0v_1v_2v_3, \quad v_4v_5$

Kako su svi vrhovi u grafu posjećeni, prekidamo DFS algoritam (po drugi puta). Vrhovi v_4, v_5 određuju drugu komponentu povezanosti grafa G. Kako smo DFS algoritam dva puta prekidali, graf G ima dvije komponente povezanosti, tj. $\omega(G) = 2$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Evo i slike, da se zaista još jednom uvjerimo da zadani graf ima dvije komponente povezanosti. Primijetite, uspjeli smo to saznati bez da smo imali nacrtani graf, nego smo samo gledali njegovu matricu susjedstva. Na taj način možemo i računalo naučiti da određuje komponente povezanosti danog grafa.



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Zadatak 8.15.

Implementirajte na računalu DFS algoritam. Algoritam na ulazu neka prima graf i jedan njegov vrh s kojim će algoritam početi, a na izlazu neka daje razapinjuće stablo danog grafa. Također, omogućite korisniku da vidi i grafičke prikaze zadanog grafa i dobivenog razapinjućeg stabla. Omogućite korisniku da može crtati graf, a računalo neka samo napravi matricu susjedstva i izbaci razapinjuće stablo. Također, napravite sve to i za BFS algoritam.

Zadatak 8.16.

Implementirajte na računalu algoritam za računanje broja komponenata povezanosti zadanog grafa kao i određivanje tih komponenata povezanosti.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Kruskalov i Primov algoritam

U prethodnom dijelu smo se zabavljali s algoritmima za određivanje razapinjućeg stabla zadanog grafa. Takvih stabala je moglo biti puno, a nama je bilo u interesu da nađemo jedno takvo stablo. U ovom dijelu će nas zanimati malo drukčija situacija. Naime, radit ćemo s težinskim grafovima i željet ćemo pronaći minimalno razapinjuće stablo danog težinskog grafa. Dakle, ne zanima nas bilo koje razapinjuće stablo, nego samo ono koje ima najmanju težinu (ili u nekim slučajevima najveću težinu, ovisno o problemu kojeg rješavamo).

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Kako pronaći minimalno razapinjuće stablo u težinskom grafu? Prva ideja koja bi nam se mogla nametnuti je da pogledamo sva razapinjuća stabla danog težinskog grafa, a zatim uzmemo ono koje je minimalne težine. Međutim, ako je graf kompliciraniji, takvih stabala ima jako puno pa bi takav algoritam bio neefikasan. Druga ideja koja nam se nameće je da malo modificiramo DFS algoritam tako da on u svakom koraku uzima brid najmanje težine iz trenutnog centra traženja. Međutim, u ovom slučaju pohlepni pristup neće uvijek dati minimalno razapinjuće stablo, što ćemo vidjeti na sljedećem primjeru.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.67.

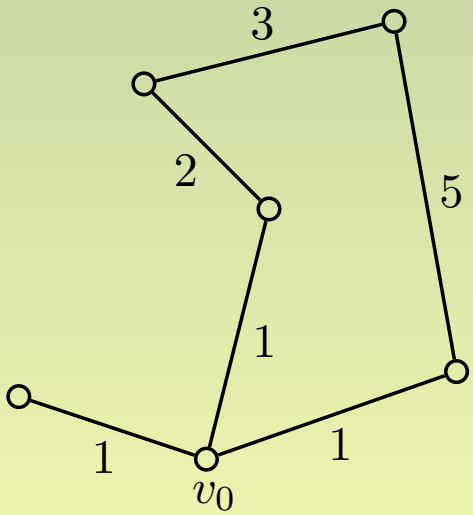
Konstruirajte povezani težinski graf i naznačite početni vrh za koji primjena DFS algoritma (modificiranog tako da u svakom koraku uzme brid najmanje težine iz trenutnog centra traženja) neće na kraju dati minimalno razapinjuće stablo.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

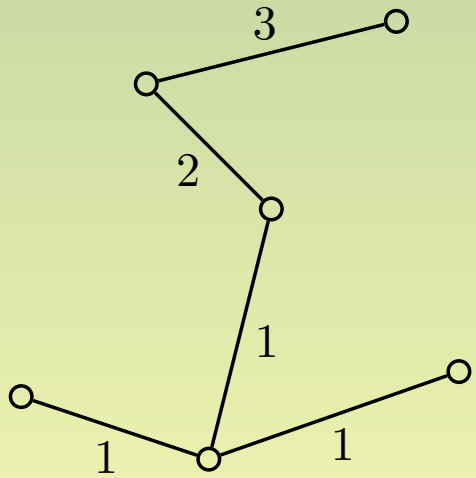
Primjer 8.67.

Konstruirajte povezani težinski graf i naznačite početni vrh za koji primjena DFS algoritma (modificiranog tako da u svakom koraku uzme brid najmanje težine iz trenutnog centra traženja) neće na kraju dati minimalno razapinjuće stablo.

Rješenje.



težinski graf G



minimalno razapinjuće stablo od G

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

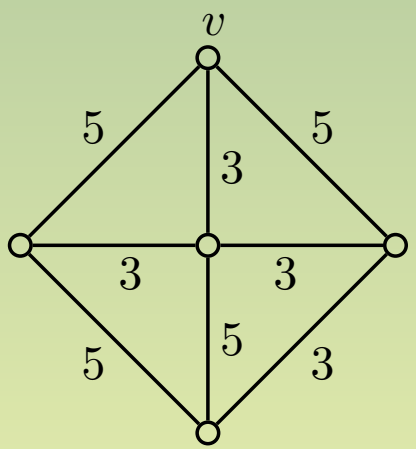
Krenemo li od vrha v_0 sa modificiranim DFS algoritmom, na kraju nećemo dobiti minimalno razapinjuće stablo od G. Naime, kako god krenuli od vrha v_0, uvijek ćemo pokupiti brid težine 5 koji očito ne može biti u minimalnom razapinjućem stablu zadanog težinskog grafa.

Zadatak 8.17.

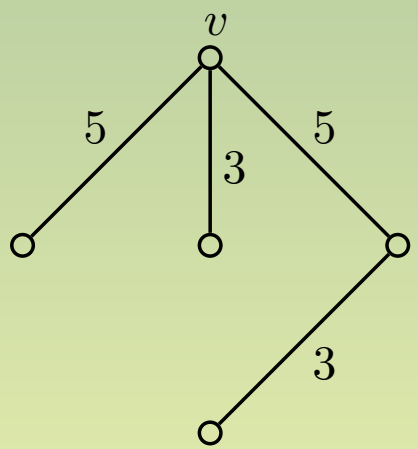
Objasnite zašto uopće nema još više smisla modificirati BFS algoritam tako da on u svakom koraku uzima brid najmanje težine iz trenutnog centra traženja? Navedite primjer na kojem će taj algoritam propasti, tj. neće na kraju dati minimalno razapinjuće stablo zadanog težinskog grafa.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

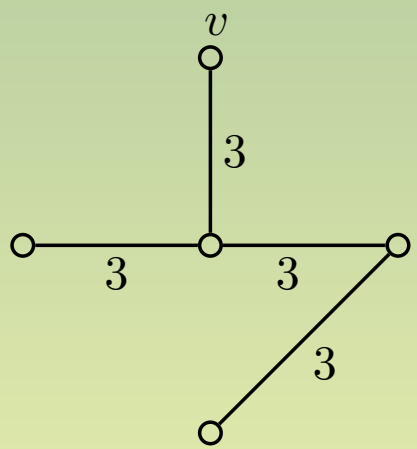
Isto tako, ne možemo primijeniti Dijkstrin algoritam na traženje minimalnog razapinjućeg stabla jer ono nema baš puno veze sa stablom najkraćih putova iz danog vrha prema svim ostalim vrhovima u grafu kojeg dobivamo Dijkstrinim algoritmom.



težinski graf G



stablo najkraćih putova iz v



minimalno razapinjuće stablo od G

Dakle, svi prethodni algoritmi koje smo naučili nam baš ne mogu puno pomoći u traženju minimalnog razapinjućeg stabla danog težinskog grafa. Trebaju nam novi algoritmi. Ovdje ćemo spomenuti dva takva algoritma, Kruskalov algoritam i Primov algoritam. To su pohlepni algoritmi koji daju minimalno razapinjuće stablo brid po brid, tako da u svakom koraku uzmu najbolji mogući izbor brida, ne mareći što će se dogoditi i kako će to utjecati na kasnije korake. Vidjet ćemo da zaista taj pohlepni pristup u oba algoritma daje na kraju minimalno razapinjuće stablo zadanog težinskog grafa.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Kruskalov algoritam

ULAZ: Težinski povezani graf G

IZLAZ: Minimalno razapinjuće stablo od G

1: Uzmi brid e_1 najmanje težine. Stavi $k = 1$.

2: Dok je $k < n$ radi sljedeće:
Ako postoji brid e takav da $\{e\} \cup \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ ne sadrži ciklus, uzmi takav brid e_{k+1} najmanje težine i zamijeni k s $k + 1$. U protivnom, ispiši $e_1, e_2, \ldots, e_k$ i zaustavi se.

Primjer 8.68.

Dokažite da je Kruskalov algoritam ispravan.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Kruskalov algoritam

ULAZ: Težinski povezani graf G

IZLAZ: Minimalno razapinjuće stablo od G

1: Uzmi brid e_1 najmanje težine. Stavi $k = 1$.

2: Dok je $k < n$ radi sljedeće:
Ako postoji brid e takav da $\{e\} \cup \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ ne sadrži ciklus, uzmi takav brid e_{k+1} najmanje težine i zamijeni k s $k + 1$. U protivnom, ispiši $e_1, e_2, \ldots, e_k$ i zaustavi se.

Primjer 8.68.

Dokažite da je Kruskalov algoritam ispravan.

Rješenje.

Trebamo dokazati da algoritam na izlazu daje razapinjuće stablo $\mathcal{T}_K$ i da je to stablo minimalne težine. Dokažimo prvo da je $\mathcal{T}_K$ razapinjuće stablo. Treba vidjeti da $\mathcal{T}_K$ sadrži svaki vrh

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

težinskog grafa G, da je povezan i da ne sadrži cikluse. Jasno je da $\mathcal{T}_K$ ne sadrži cikluse jer algoritam to u svakom koraku provjerava. Pretpostavimo da $\mathcal{T}_K$ ne sadrži neki vrh v grafa G. Kako je G povezan graf, postoji neki brid incidentan s v. Dodamo li taj brid grafu $\mathcal{T}_K$, ne možemo dobiti ciklus jer niti jedan od bridova grafa $\mathcal{T}_K$ tada nije incidentan s vrhom v. U tom bi slučaju algoritam mogao nastaviti dalje, što je kontradikcija (jer je završio prije nego što je vrh v dodan u $\mathcal{T}_K$). Stoga $\mathcal{T}_K$ zaista sadrži sve vrhove grafa G. Dokažimo još da je $\mathcal{T}_K$ povezan graf. Neka su v i w dva vrha iz $\mathcal{T}_K$. Kako je G povezan graf, postoji put u G od vrha v do vrha w. Svaki brid tog puta koji nije u $\mathcal{T}_K$ može se zamijeniti putom u $\mathcal{T}_K$ koji ima početak i kraj u vrhovima tog brida jer ako dodamo bilo koji brid u $\mathcal{T}_K$ dobivamo ciklus (naime, Kruskalov algoritam se upravo prekida tek kad naiđe na takvu situaciju). Na taj ćemo način

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

tim zamjenama dobiti put u $\mathcal{T}_K$ koji povezuje vrhove v i w. Stoga je $\mathcal{T}_K$ povezan graf. Iz svega do sada dokazanog slijedi da je $\mathcal{T}_K$ zaista razapinjuće stablo težinskog grafa G.

Trebamo još dokazati da je $\mathcal{T}_K$ minimalno razapinjuće stablo. Neka je $\mathcal{T}_m$ neko minimalno razapinjuće stablo grafa G. Tvrdimo da je tada $w(\mathcal{T}_K) = w(\mathcal{T}_m)$. Ako G ima n vrhova, tada $\mathcal{T}_K$ i $\mathcal{T}_m$ sadrže $n-1$ bridova. Pretpostavimo da su ti bridovi određeni algoritmom u poretku

$$e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}.$$

Ako je $\mathcal{T}_K = \mathcal{T}_m$, onda nemamo što dokazivati. Pretpostavimo da je $\mathcal{T}_K \neq \mathcal{T}_m$. U tom slučaju neki od bridova e_i nisu u $\mathcal{T}_m$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Neka je e_k prvi u nizu tih bridova koji nije u $\mathcal{T}_m$ i pretpostavimo prvo da je $k > 1$. Tvrdimo da tada u $\mathcal{T}_m$ postoji brid e različit od $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ takav da je $\left(\mathcal{T}_m + e_k\right) - e$ razapinjuće stablo. Naime, $\mathcal{T}_m + e_k$ je povezan graf jer je $\mathcal{T}_m$ povezan, a kako je $\mathcal{T}_m$ stablo, tada $\mathcal{T}_m + e_k$ nije stablo pa sadrži ciklus. Neka je e brid u tom ciklusu koji nije u $\mathcal{T}_K$ (takav brid postoji jer $\mathcal{T}_K$ ne sadrži cikluse). Tada je $\left(\mathcal{T}_m + e_k\right) - e$ još uvijek povezan graf, a kako ima n vrhova i $n-1$ bridova, to je razapinjuće stablo grafa G. Stavimo $\mathcal{T} := \left(\mathcal{T}_m + e_k\right) - e$. Tada je

$$w(\mathcal{T}) = w(\mathcal{T}_m) + w(e_k) - w(e) \geqslant w(\mathcal{T}_m)$$

jer je $\mathcal{T}_m$ minimalno razapinjuće stablo. Stoga je $w(e_k) \geqslant w(e)$. Ako je $k = 1$, tada je $w(e_k) \leqslant w(e)$ jer je e_1 prvi odabrani brid pa je on najmanje težine. U tom slučaju je tada $w(e_k) = w(e)$.

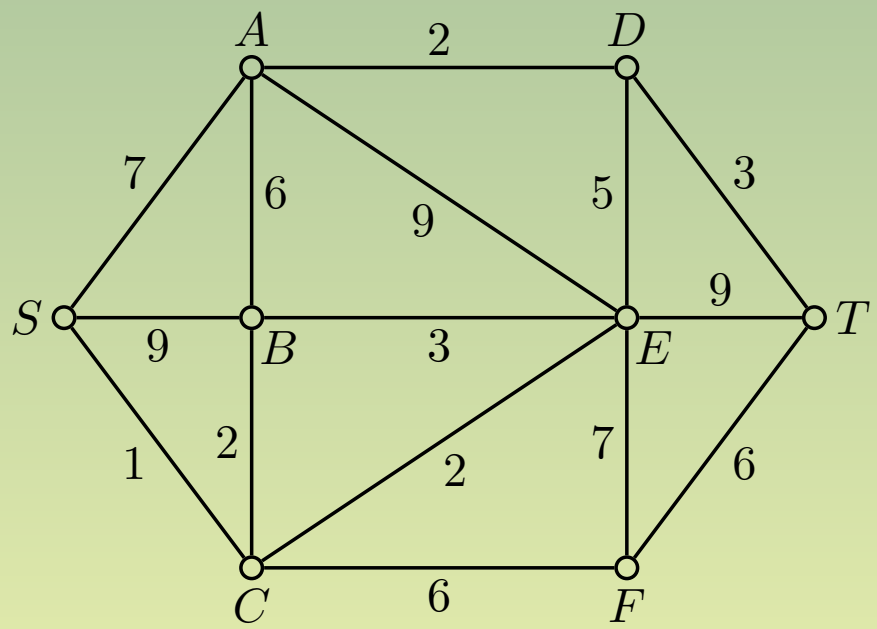
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Ako je $k > 1$, tada bridovi $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}, e$ ne sadrže ciklus jer su oni bridovi iz stabla $\mathcal{T}_m$. Međutim, i u ovom slučaju je $w(e) = w(e_k)$ jer ako bi bilo da je $w(e) < w(e_k)$, tada bi Kruskalov algoritam umjesto brida e_k odabrao brid e. Dakle, u svakom slučaju je $w(e) = w(e_k)$ pa je $w(\mathcal{T}) = w(\mathcal{T}_m)$. Stoga je $\mathcal{T}$ također minimalno razapinjuće stablo. Uočite da $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}_K$ imaju zajedničke bridove $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}, e_k$. Ako je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_K$, tada je gotovo. Ukoliko je $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}_K$, primijenimo na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}_K$ istu proceduru koju smo primijenili na $\mathcal{T}_m$ i $\mathcal{T}_K$ pa dobivamo novo minimalno razapinjuće stablo koje ima još jedan brid više zajednički s $\mathcal{T}_K$. Nastavljajući taj postupak doći ćemo do minimalnog razapinjućeg stabla s bridovima $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ zajedničkih s $\mathcal{T}_K$ iz čega slijedi da je $\mathcal{T}_K$ zaista minimalno razapinjuće stablo.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

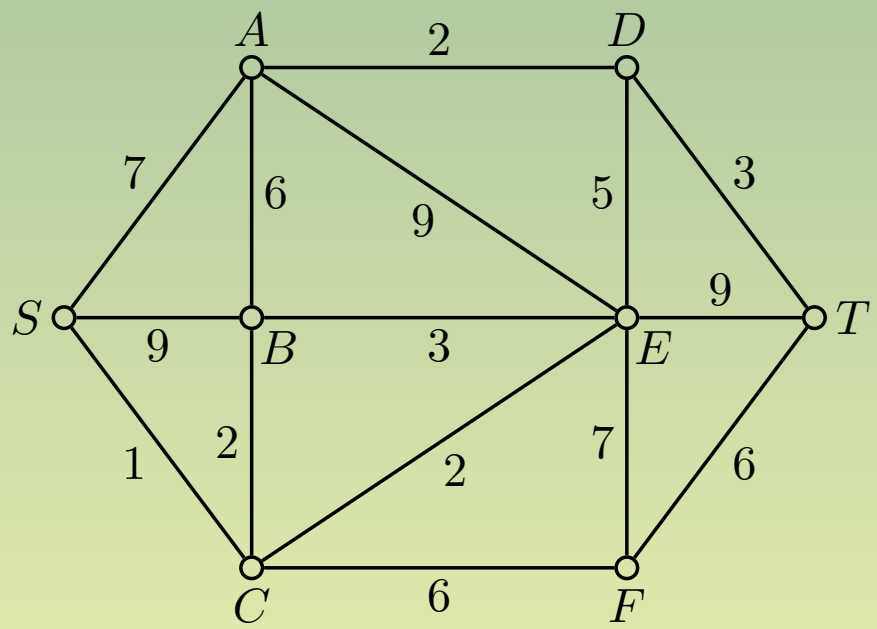
Primjer 8.69.

Pomoću Kruskalovog algoritma pronađite minimalno razapinjuće stablo u težinskom grafu



Primjer 8.69.

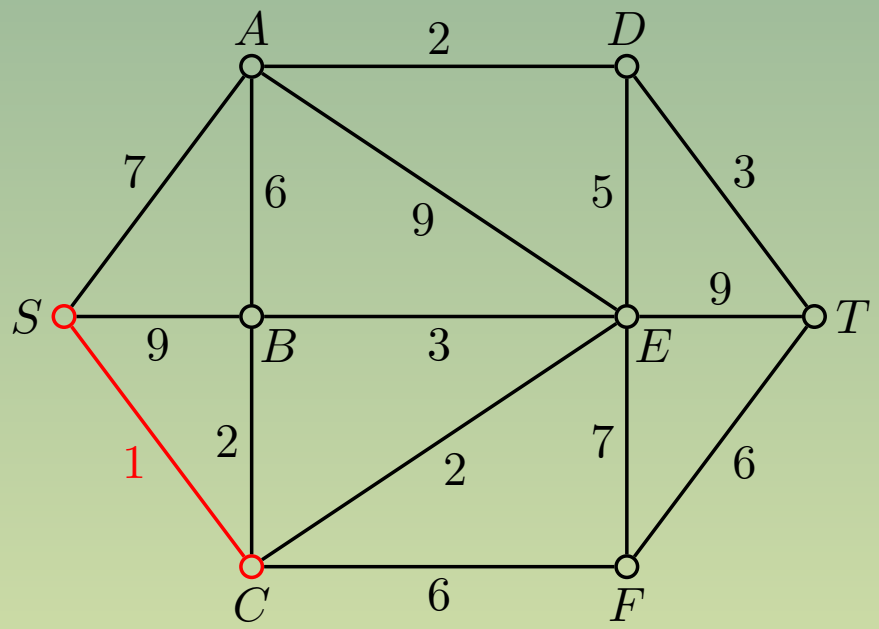
Pomoću Kruskalovog algoritma pronađite minimalno razapinjuće stablo u težinskom grafu



Rješenje.

Na ovom primjeru ćemo objasniti svaki međukorak. Na ostalim primjerima to nećemo raditi, nego ćemo samo dati konačno rješenje.

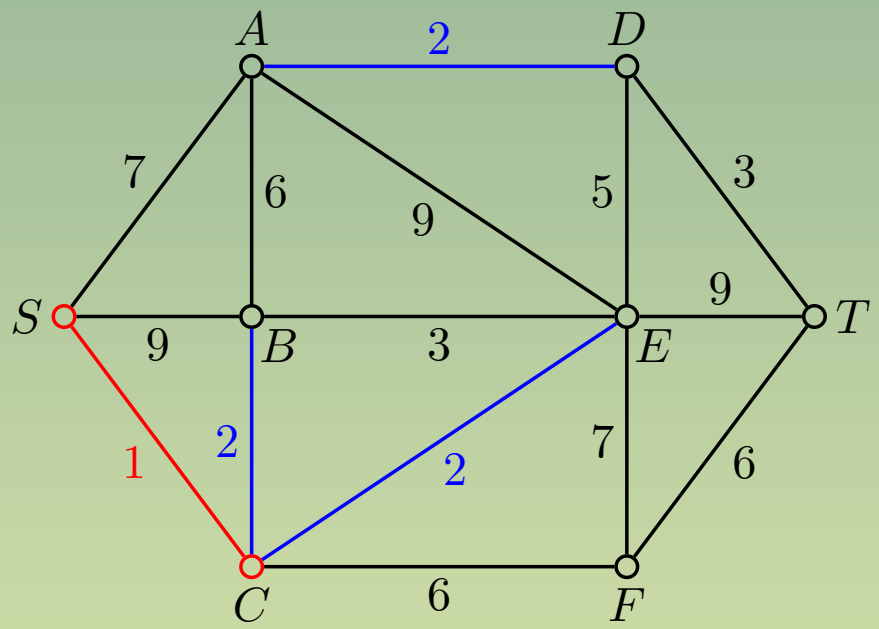
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Odaberemo brid najmanje težine. To je ovdje brid SC.

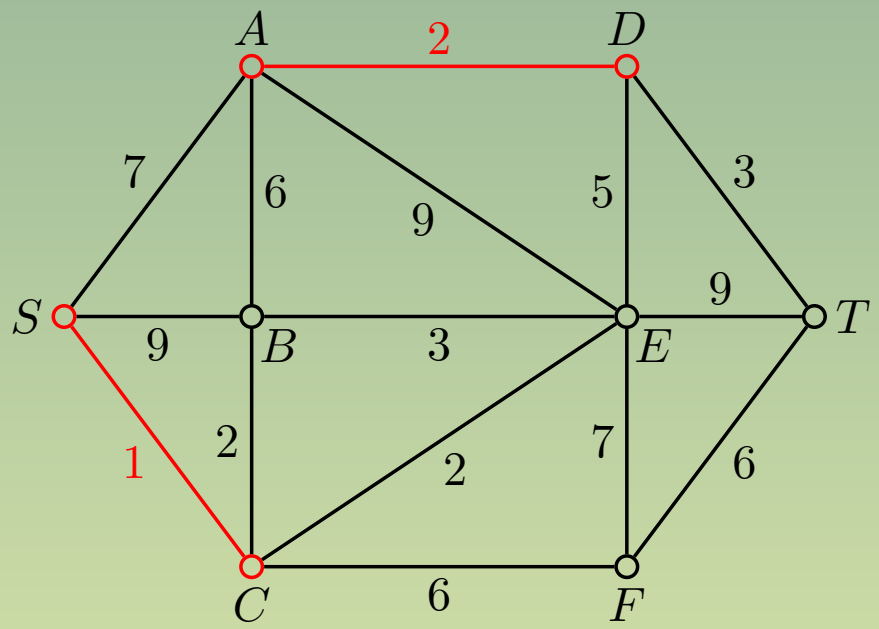
konačno rješenje

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



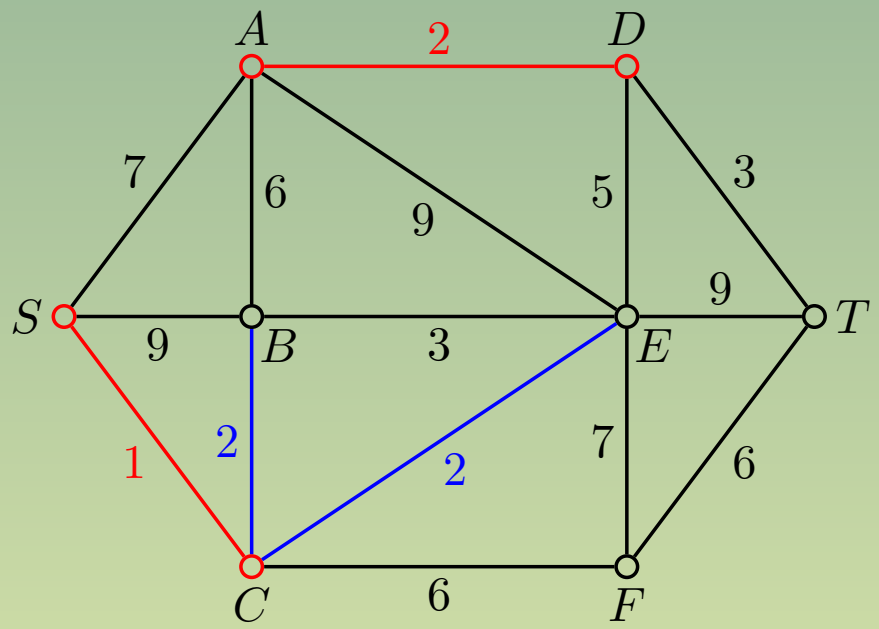
Imamo ukupno tri brida (plavi bridovi) koji su najmanje težine i koji s odabranim bridom (crveni brid) ne tvore ciklus.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



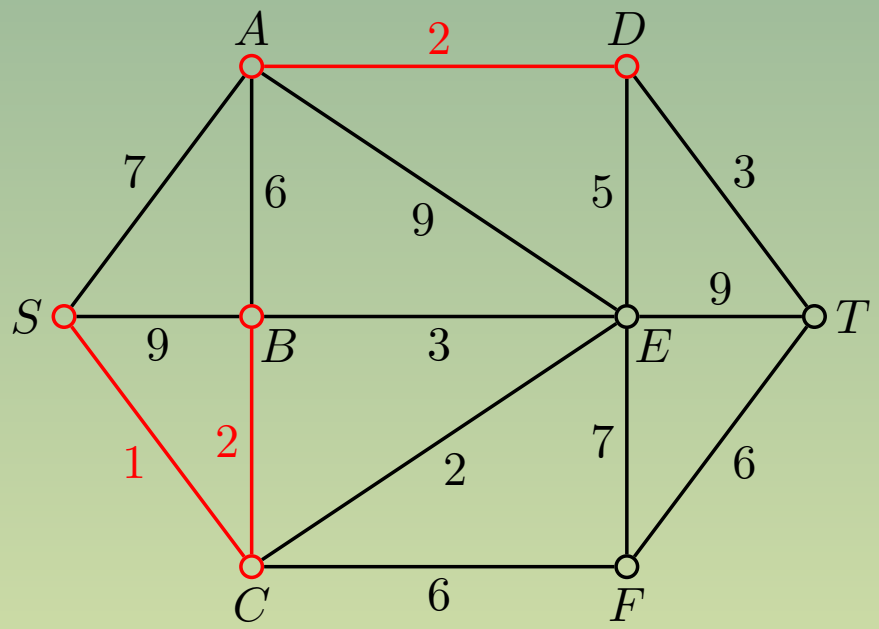
Odaberemo bilo koji od tih bridova, npr. brid AD.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



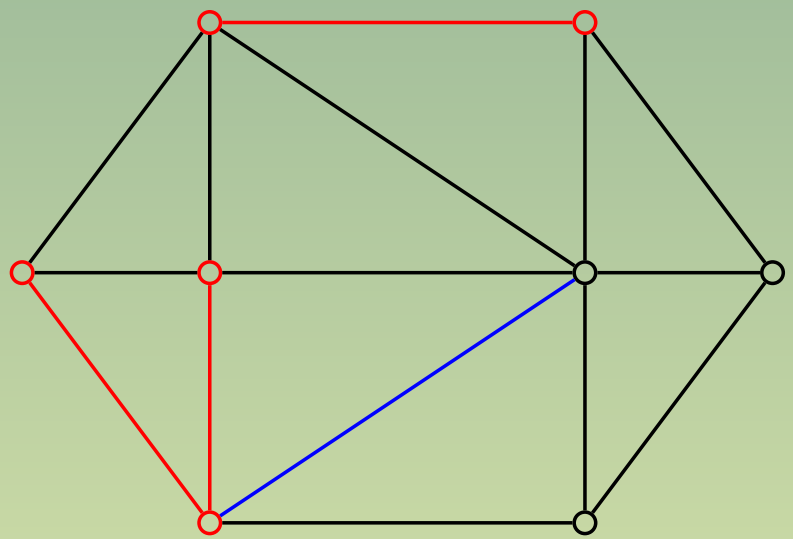
Imamo ukupno dva brida (plavi bridovi) koji su najmanje težine i koji s odabranim bridovima (crveni bridovi) ne tvore ciklus.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



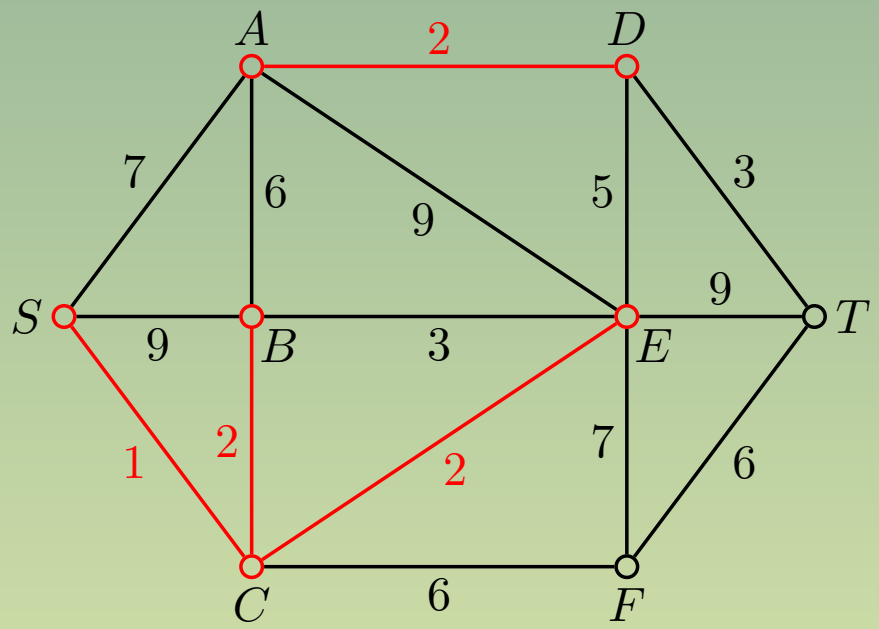
Odaberemo bilo koji od tih bridova, npr. brid BC.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



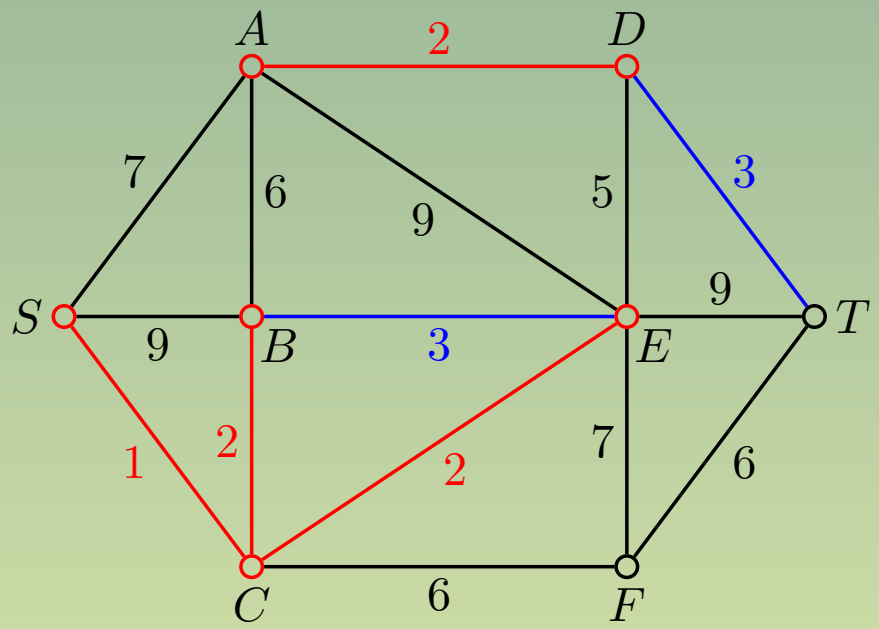
Brid CE je brid najmanje težine koji s odabranim bridovima (crveni bridovi) ne tvori ciklus

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



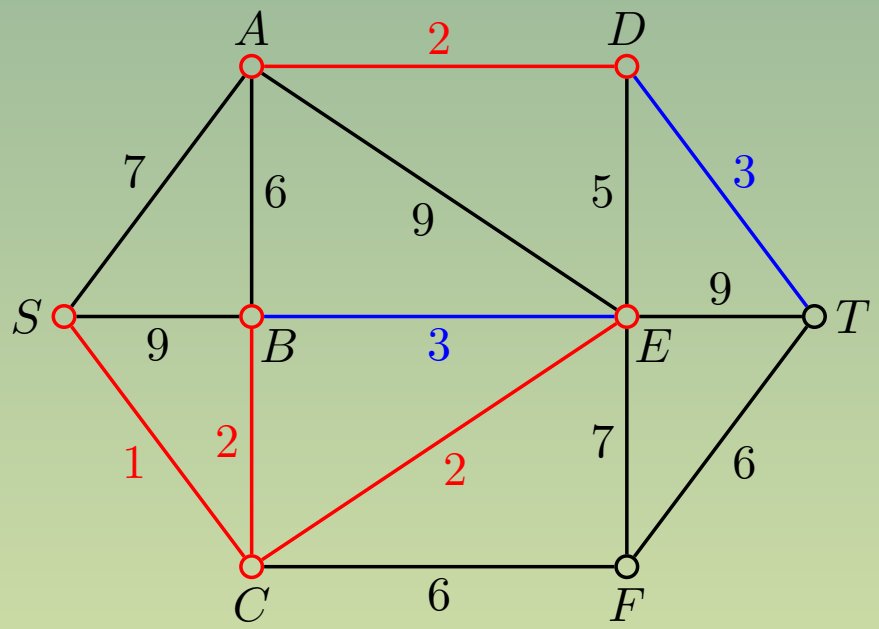
Brid CE je brid najmanje težine koji s odabranim bridovima (crveni bridovi) ne tvori ciklus pa ga dodamo odabranim (crvenim) bridovima.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



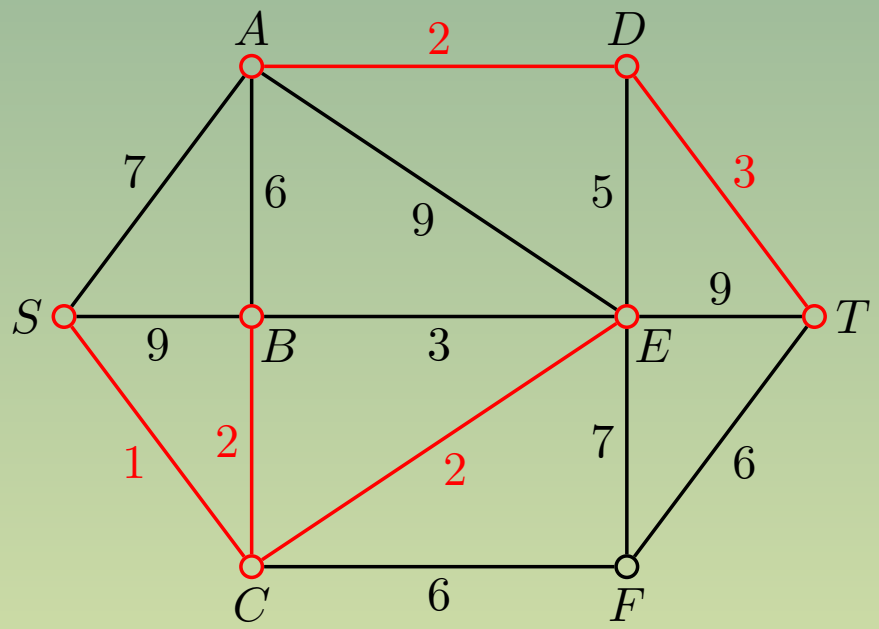
Imamo ukupno dva brida (plavi bridovi) koji su najmanje težine.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



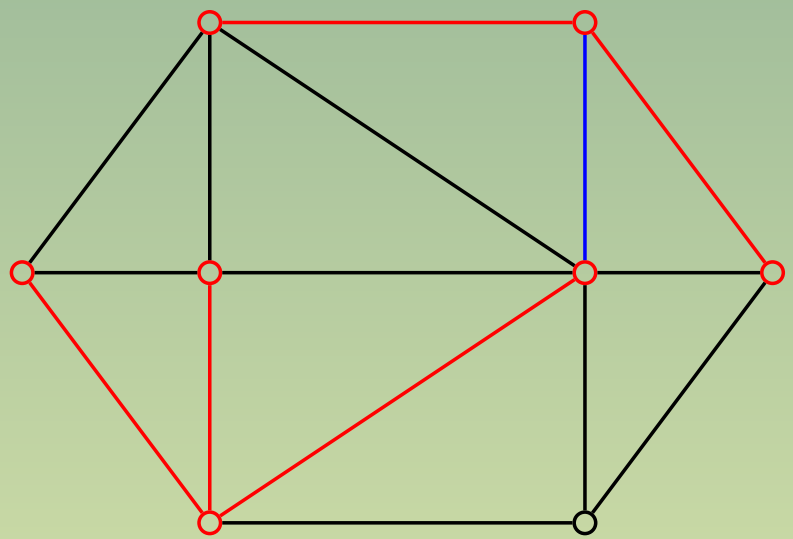
Imamo ukupno dva brida (plavi bridovi) koji su najmanje težine. Međutim, brid BE s odabranim (crvenim) bridovima tvori ciklus (preciznije, ciklus $BCEB$) pa ga ne smijemo dodati već odabranim bridovima.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



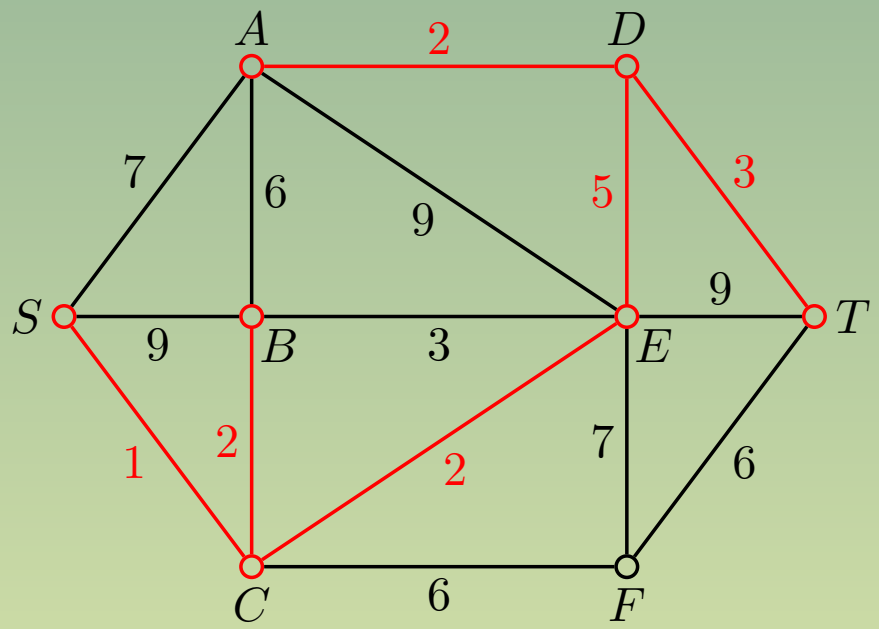
Stoga moramo uzeti brid DT i dodati ga odabranim (crvenim) bridovima.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



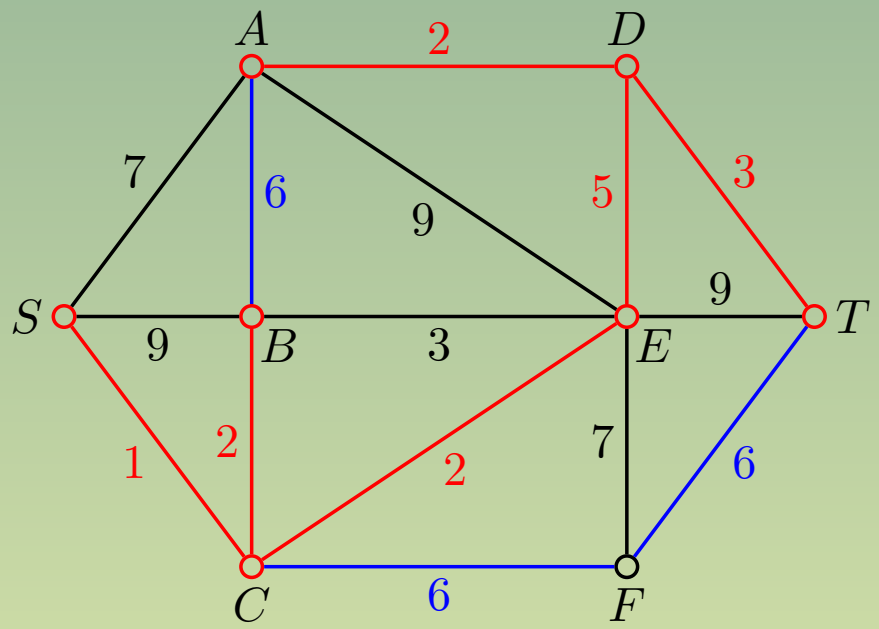
Brid DE je brid najmanje težine koji s odabranim bridovima (crveni bridovi) ne tvori ciklus

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



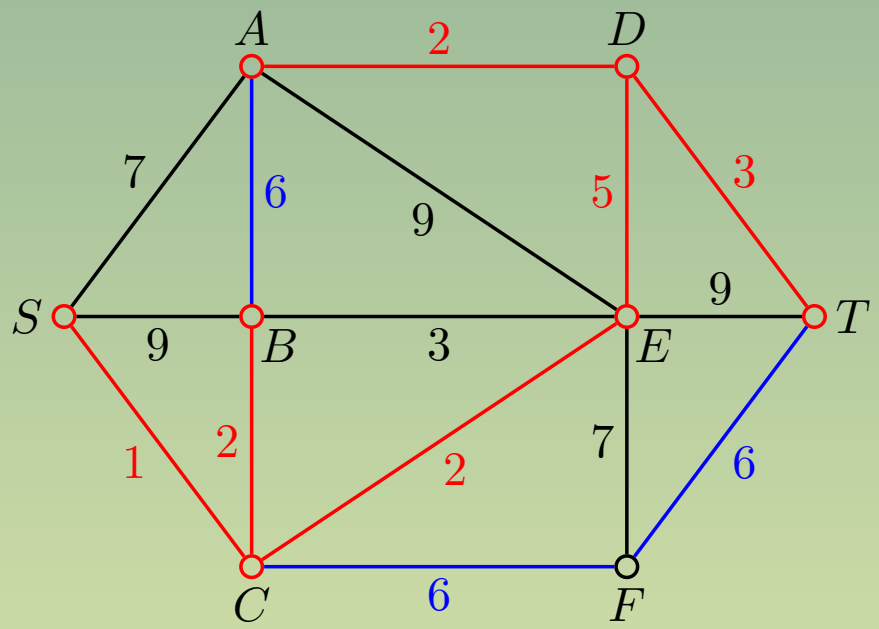
Brid DE je brid najmanje težine koji s odabranim bridovima (crveni bridovi) ne tvori ciklus pa ga dodamo odabranim (crvenim) bridovima.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



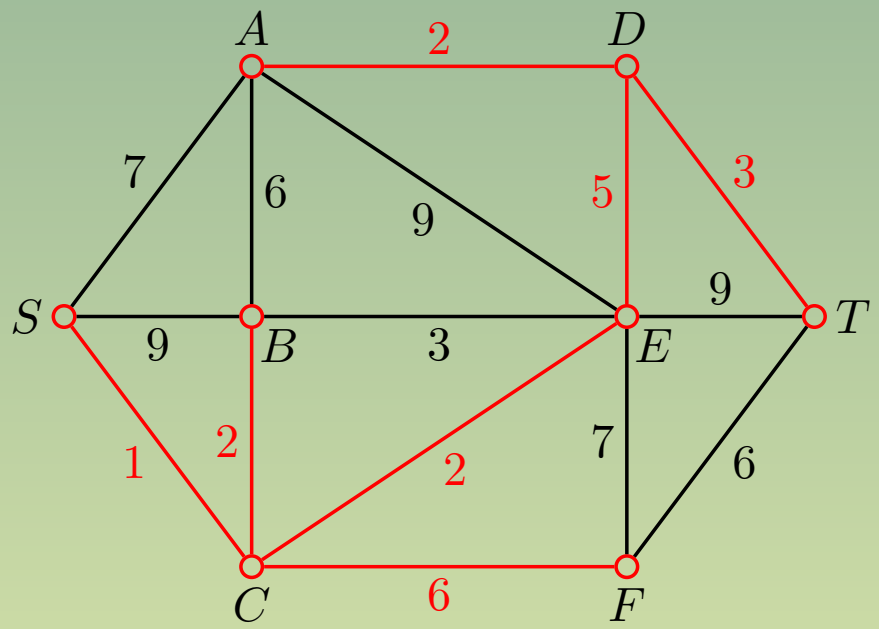
Imamo ukupno tri brida (plavi bridovi) koji su najmanje težine.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



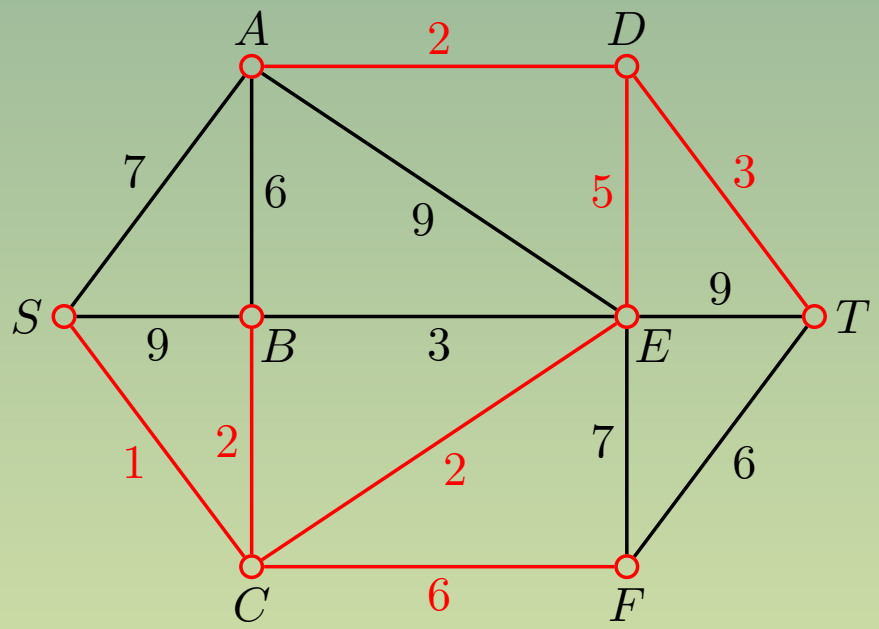
Imamo ukupno tri brida (plavi bridovi) koji su najmanje težine. Međutim, brid AB s odabranim (crvenim) bridovima tvori ciklus (preciznije, ciklus $ABCEDA$) pa ga ne smijemo dodati već odabranim bridovima. Preostaje nam da biramo između dva brida CF i FT.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



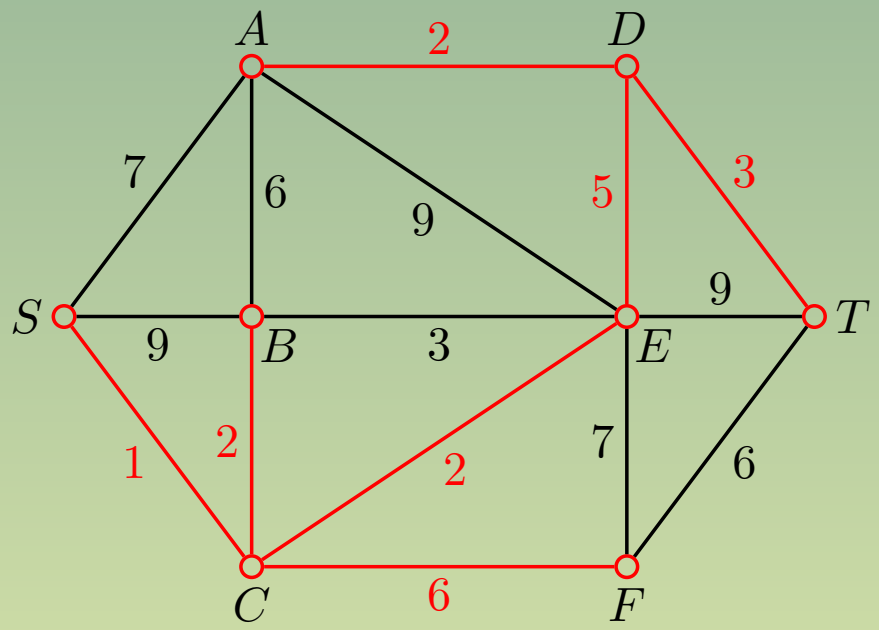
Odaberimo, npr. brid CF i dodajmo ga već odabranim (crvenim) bridovima. Mogli smo odabrati i brid FT umjesto brida CF.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Kako zadani graf ima 8 vrhova, a odabrali smo 7 bridova, odabrani crveni bridovi (zajedno s vrhovima) tvore jedno razapinjuće stablo i ono jest minimalne težine. Minimalna težina je jednaka 21.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Kratko ćemo čitav postupak zapisati u obliku tablice

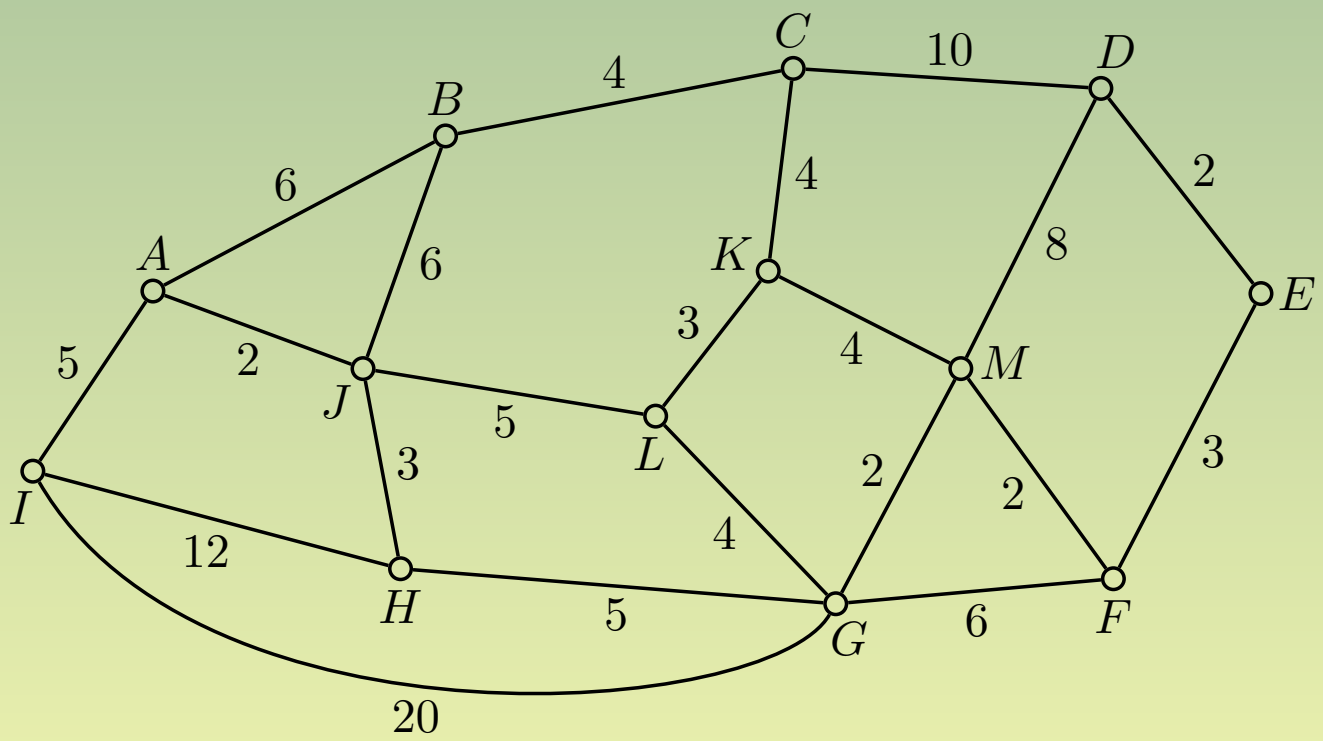
korak	1	2	3	4	5	6	7
brid	SC	AD	BC	CE	DT	DE	CF
težina	1	2	2	2	3	5	6

◂ objasni postupak

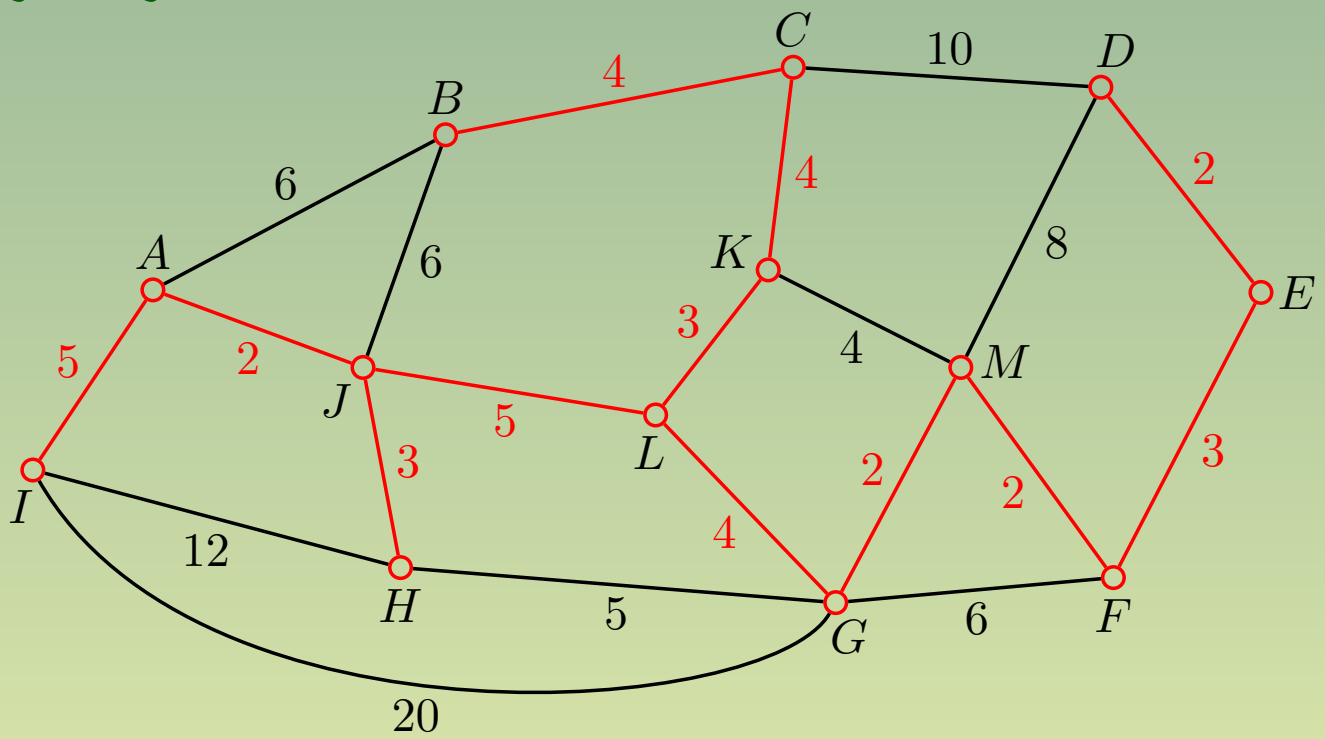
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.70.

Pomoću Kruskalovog algoritma pronađite minimalno razapinjuće stablo u težinskom grafu



Rješenje.



korak	1	2	3	4	5	6
brid	AJ	GM	DE	FM	HJ	KL
težina	2	2	2	2	3	3

korak	7	8	9	10	11	12
brid	EF	BC	CK	GL	JL	AI
težina	3	4	4	4	5	5

Minimalno razapinjuće stablo ima težinu 39.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Implementacija Kruskalovog algoritma

U svakom koraku Kruskalov algoritam bira određeni brid. Na početku imamo nula odabranih bridova i ν vrhova grafa. Drugim riječima, taj podgraf ima ν komponenata povezanosti. Podgraf dobiven na kraju Kruskalovog algoritma ima jednu komponentu povezanosti. Na početku pridružimo vrhovima grafa G oznake $1, 2, \ldots, \nu$. Ako prvi odabrani brid uv je takav da vrh u ima oznaku i, a vrh v oznaku j, te ako je $i < j$, tada promijenimo oznaku vrha v tako da stavimo da ima oznaku i. Podgraf koji se sastoji od tog brida i svih vrhova grafa ima $\nu - 1$ komponenata povezanosti i svi vrhovi iz iste komponente povezanosti imaju istu oznaku. Cilj je to svojstvo sačuvati do kraja samog algoritma jer bismo u tom slučaju lako provjerili da li promatrani brid s već odabranim bridovima zatvara ili ne zatvara neki ciklus.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Naime, u tom slučaju svi neodabrani bridovi koji imaju različite oznake krajeva s već odabranim bridovima neće zatvarati ciklus, a svi oni neodabrani bridovi koji imaju iste oznake krajeva s već odabranim bridovima će zatvarati neki ciklus.

Pretpostavimo da u nekom koraku algoritma vrhovi imaju iste oznake akko pripadaju istoj komponenti povezanosti (koje su stabla) podgrafa čiji su vrhovi svi vrhovi grafa G, a bridovi tog podgrafa su oni bridovi koje je algoritam do tog koraka odabrao.

U sljedećem koraku algoritam mora odabrati brid najmanje težine koji s odabranim bridovima ne zatvara nikakvi ciklus. Neka je to brid $e = xy$. Njegovi krajevi x i y imaju različite oznake. Neka vrh x ima oznaku k, a vrh y oznaku l i neka je $k < l$. Tada svim vrhovima koji imaju oznaku l promijenimo njihovu oznaku u k.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Na taj način i dalje vrhovi u istim komponentama povezanosti imaju iste oznake i sve komponente povezanosti pripadnog podgrafa su stabla. Na kraju algoritma svi vrhovi će imati oznaku 1. Uz ovakav način označavanja vrhova izbjegavamo pojavljivanje ciklusa, što je i najteži dio u implementaciji Kruskalovog algoritma. Nije problem odabrati brid najmanje težine, nego je problem provjeriti da li on s već odabranim bridovima ne zatvara ciklus. Opisani način označavanja vrhova nam omogućuje jednostavno provjeravanje acikličnosti podgrafa koji se sastoji od svih vrhova grafa i trenutno odabranih bridova. Stoga u svakom koraku algoritam mora odabrati brid najmanje težine koji ima različite oznake krajeva. Na taj način osiguravamo da nam se neće pojaviti ciklusi i da ćemo na kraju dobiti minimalno razapinjuće stablo.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Pitamo se kolika je složenost Kruskalovog algoritma u terminima operacije uspoređivanja ako ga implementiramo na opisani način. Naime, najprije sortiramo bridove $f_1, f_2, \ldots, f_\varepsilon$ grafa G uzlazno s obzirom na njihove težine tako da je

$$w(f_1) \leqslant w(f_2) \leqslant \cdots \leqslant w(f_\varepsilon).$$

Koristeći merge sort algoritam, za to nam treba $O(\varepsilon \log \varepsilon)$ uspoređivanja. Nakon toga algoritam bira brid $e_1 = f_1$, uspoređuje oznake njegovih krajeva i mijenja jednu od tih oznaka (veću oznaku promijeni u manju). Nakon toga uzima brid $e_2 = f_2$ i nakon jedne usporedbe mijenja oznaku jednog od krajeva brida e_2. Algoritam dalje nastavlja gledati brid f_3 i uspoređuje oznake njegovih krajeva da provjeri da li ga je moguće odabrati. Postupak se nastavlja sve dok nije odabrano $\nu - 1$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

bridova. Svaki puta kada se ispituje brid potrebno je jedno uspoređivanje oznaka njegovih krajeva. Ovaj dio algoritma zahtijeva najviše ε uspoređivanja. Nadalje, za svaki od $\nu - 1$ odabranih bridova potrebno je provjeriti oznake $\nu - 2$ vrhova da bismo vidjeli kojima od njih treba promijeniti oznake. Za taj dio algoritma potrebno nam je još $(\nu - 1)(\nu - 2)$ uspoređivanja. Stoga je u ovom pristupu složenost Kruskalovog algoritma $O\big(\varepsilon \log \varepsilon + \nu^2\big)$.

Moguće je Kruskalov algoritam implementirati tako da je broj uspoređivanja jednak $O(\varepsilon \log \varepsilon)$ (naravno, u tom će slučaju zato trebati više memorijskih resursa). Opišimo u kratkim crtama i taj način implementacije. Zapravo treba samo malo modificirati prethodno opisani postupak označavanja vrhova. Pretpostavimo da vrh x ima oznaku k, a vrh y oznaku l i da je algoritam odabrao brid xy. Tada usporedimo veličine komponenata kojima

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

vrhovi x i y pripadaju i promijenimo oznake svih vrhova u manjoj od tih komponenata u oznaku koju imaju vrhovi iz veće komponente. Ako komponente imaju jednaku veličinu, tada promijenimo veće oznake vrhova u manje oznake. Na taj način, svaki puta kada vrh mijenja oznaku, komponenta u kojoj se on nalazi sadrži barem dvostruko više vrhova, nego što ih je imala prije. Razmislite o ovom zaključku i provedite opisani postupak na konkretnom primjeru da vam bude jasnije o čemu se radi. Stoga se oznaka svakog vrha mijenja najviše $\log_2 \nu$ puta. Na taj je način ukupni broj promjena oznaka vrhova jednak $O(\nu \log \nu)$. Broj promjena oznaka vrhova je povezan s uspoređivanjem veličina komponenata pa je ukupna složenost jednaka $O(\varepsilon \log \varepsilon + \nu \log \nu)$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Kako promatramo povezani graf, tada on ima barem $\nu - 1$ bridova. Ako G nije stablo, tada je $\nu \leqslant \varepsilon$ pa je $\nu \log \nu \leqslant \varepsilon \log \varepsilon$. U tom slučaju je ukupna složenost $O(\varepsilon \log \varepsilon)$. Ako pak je $\nu = \varepsilon + 1$, tada je

$$\nu \log \nu = (\varepsilon + 1) \log (\varepsilon + 1) \leqslant 2\varepsilon \log \varepsilon^2 = 4\varepsilon \log \varepsilon,$$

iz čega slijedi da je opet ukupna složenost $O(\varepsilon \log \varepsilon)$. Dakle, u svakom slučaju je složenost $O(\varepsilon \log \varepsilon)$, gdje je također uračunato i početno merge sort sortiranje.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.71.

Objasnite kako možemo modificirati Kruskalov algoritam tako da on pronađe razapinjuće stablo maksimalne težine u težinskom grafu.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.71.

Objasnite kako možemo modificirati Kruskalov algoritam tako da on pronađe razapinjuće stablo maksimalne težine u težinskom grafu.

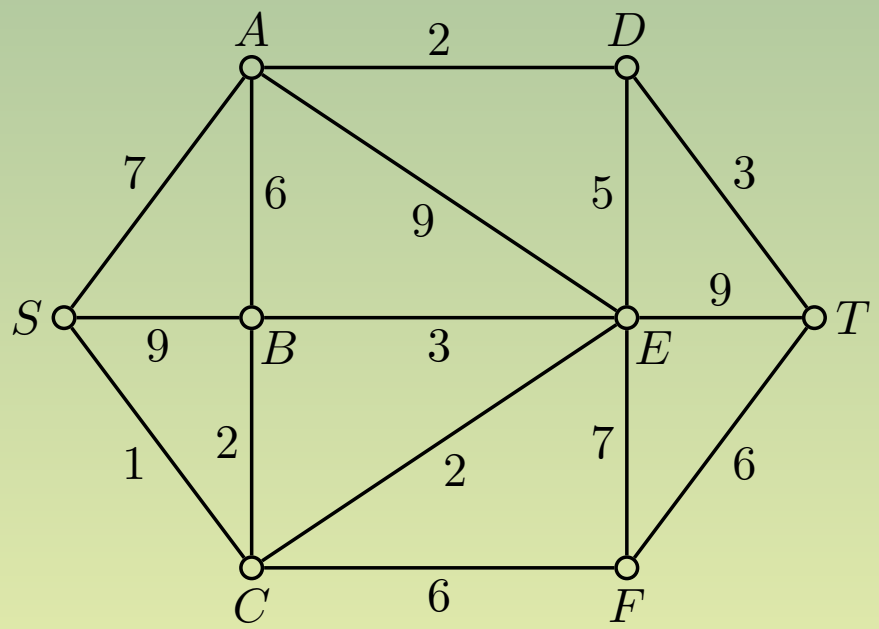
Rješenje.

Na početku odaberemo brid najveće težine (ako ih ima više takvih, odlučimo se za jednog od njih). U svakom koraku, umjesto da biramo brid najmanje težine, biramo brid najveće težine kojeg je moguće dodati trenutno odabranim bridovima tako da s njima ne zatvara nikakve cikluse.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.72.

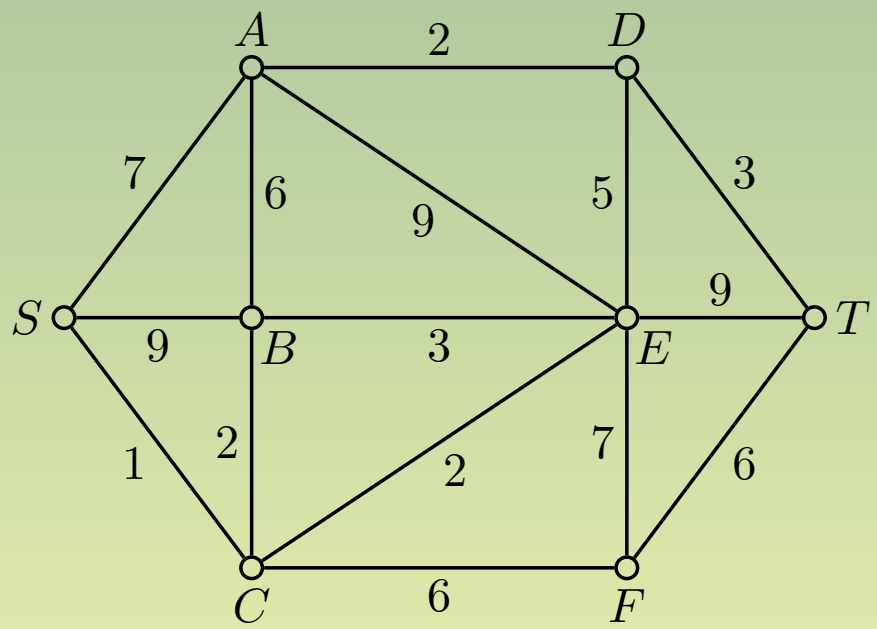
Pomoću Kruskalovog algoritma pronađite maksimalno razapinjuće stablo u težinskom grafu



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.72.

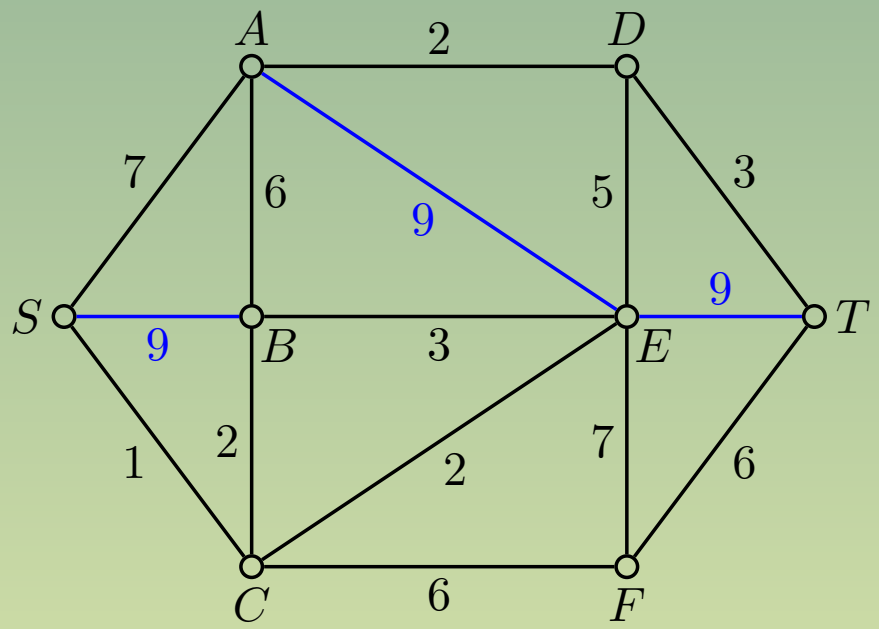
Pomoću Kruskalovog algoritma pronađite maksimalno razapinjuće stablo u težinskom grafu



Rješenje.

Na ovom primjeru ćemo objasniti svaki međukorak. Na ostalim primjerima to nećemo raditi, nego ćemo samo dati konačno rješenje.

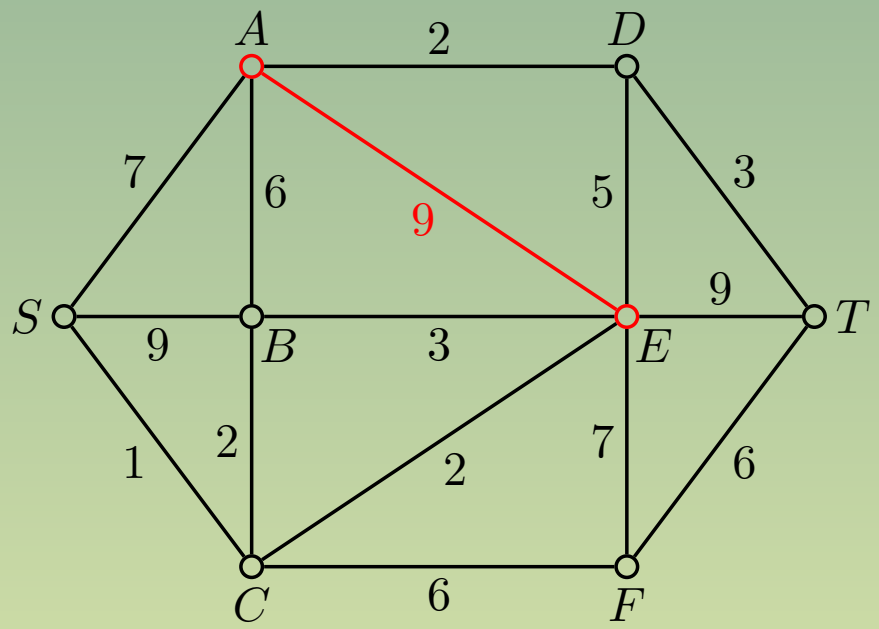
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Imamo ukupno tri brida maksimalne težine. To su bridovi AE, ET i SB.

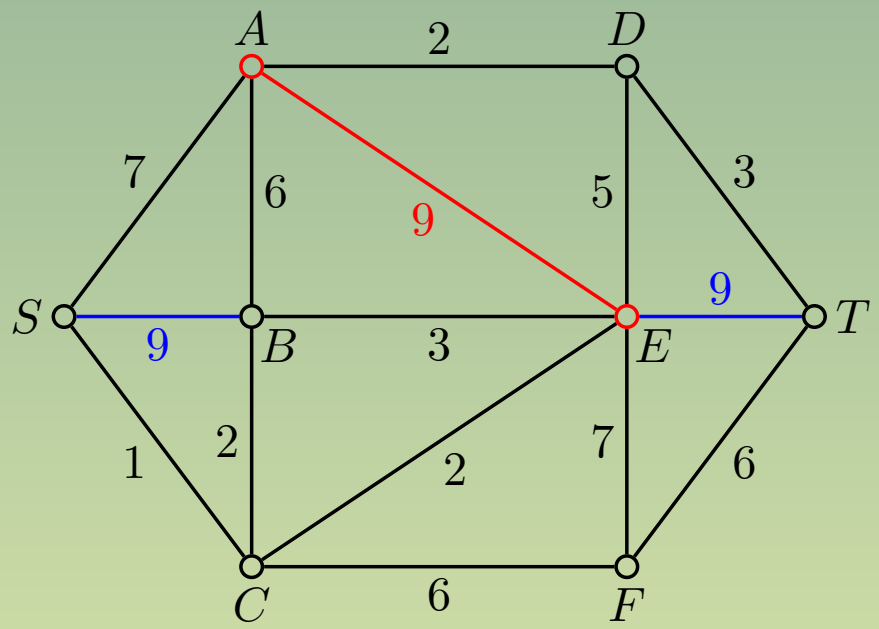
konačno rješenje

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



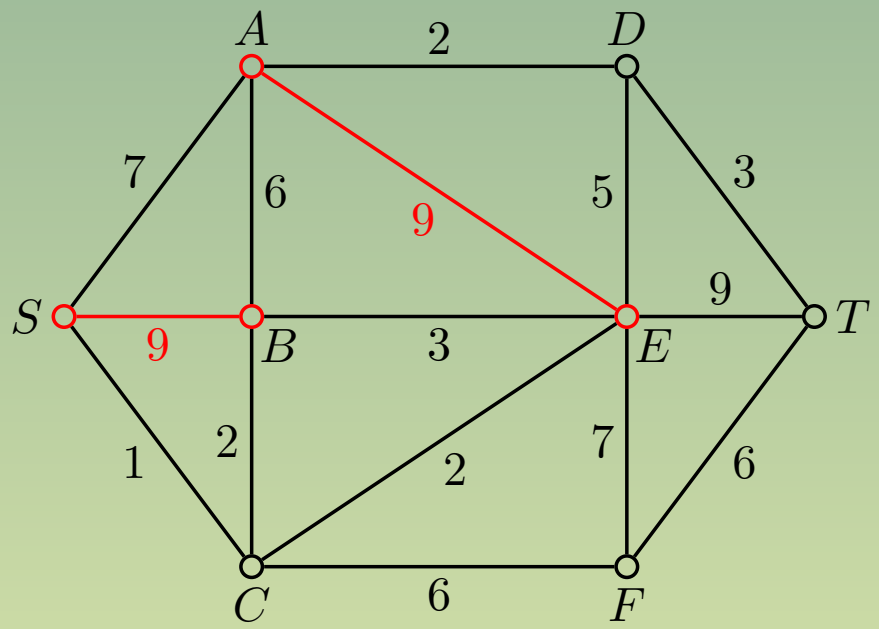
Odaberemo jednog od njih, npr. brid AE.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



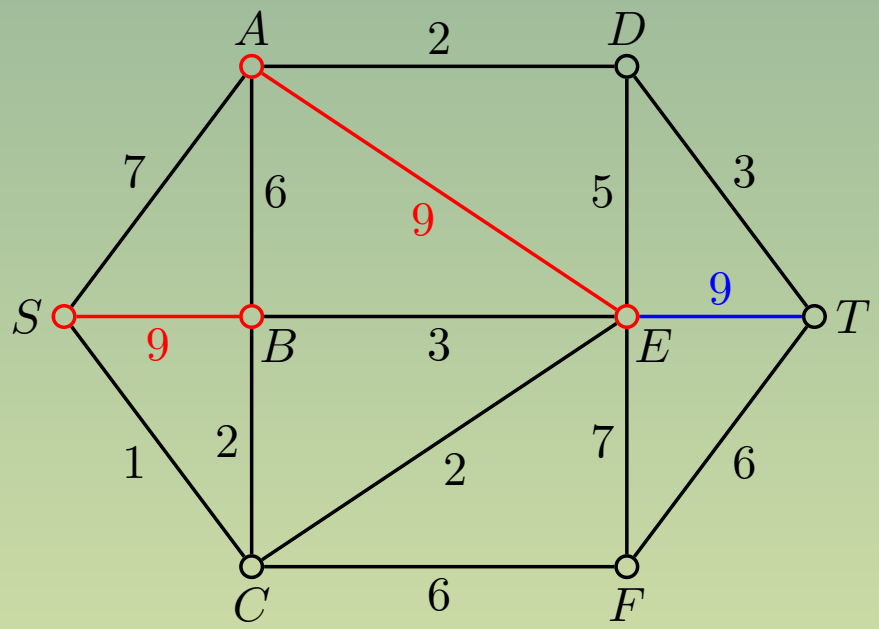
Imamo ukupno dva brida maksimalne težine. To su bridovi ET i SB.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



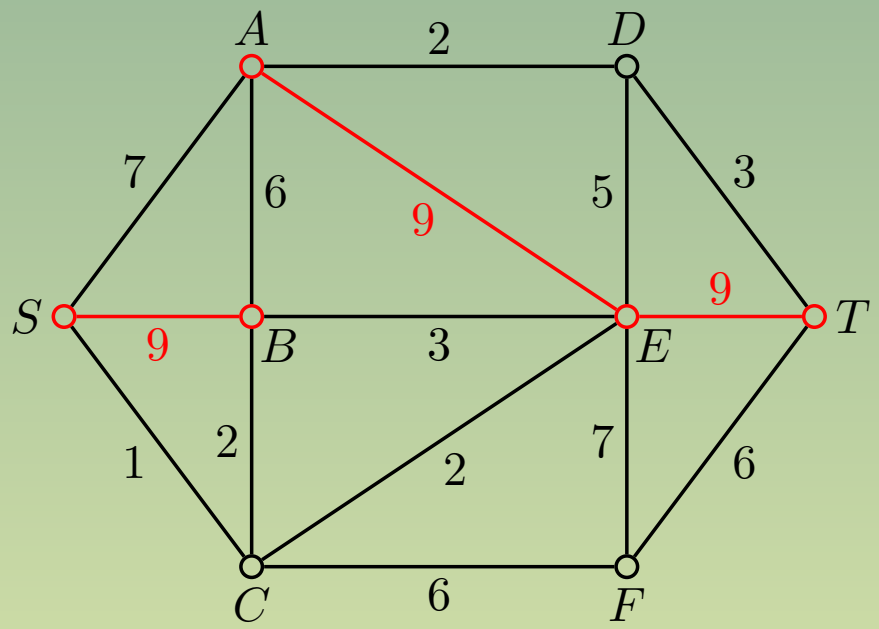
Odaberemo jednog od njih, npr. brid SB.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



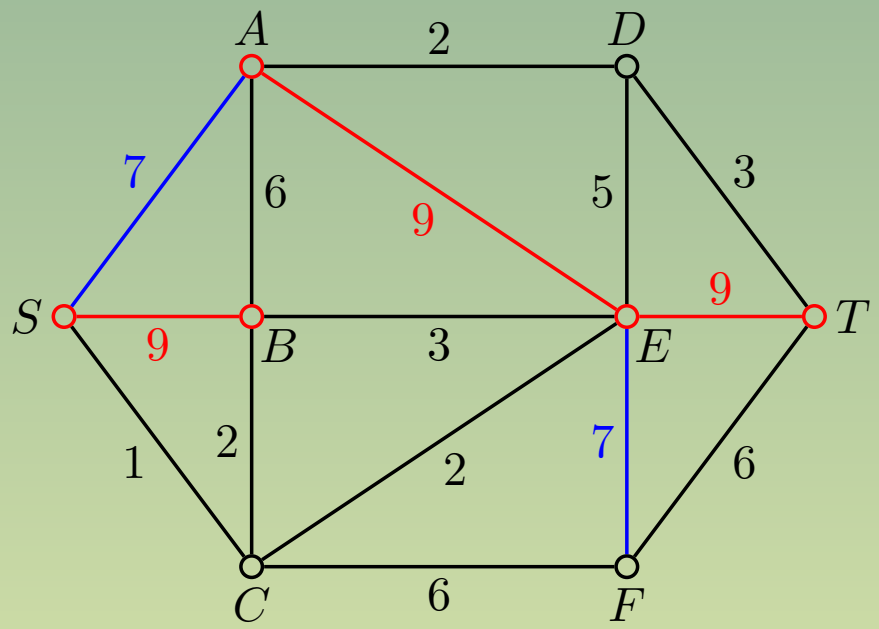
Brid ET je jedini brid maksimalne težine koji s odabranim bridovima (crveni bridovi) ne zatvara ciklus

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



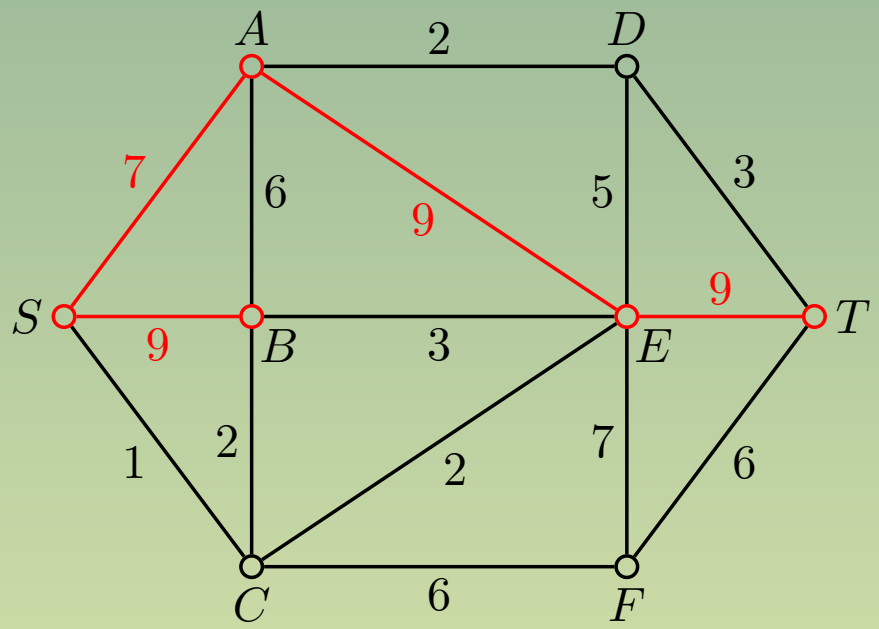
Brid ET je jedini brid maksimalne težine koji s odabranim bridovima (crveni bridovi) ne zatvara ciklus pa ga dodamo odabranim (crvenim) bridovima.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



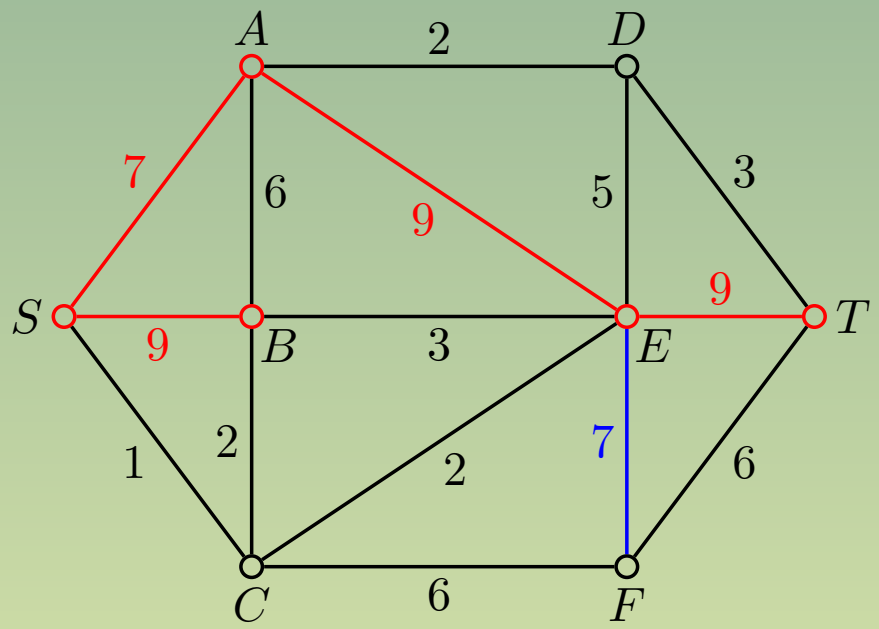
Bridovi AS i EF su bridovi maksimalne težine koji s odabranim (crvenim) bridovima ne zatvaraju cikluse.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



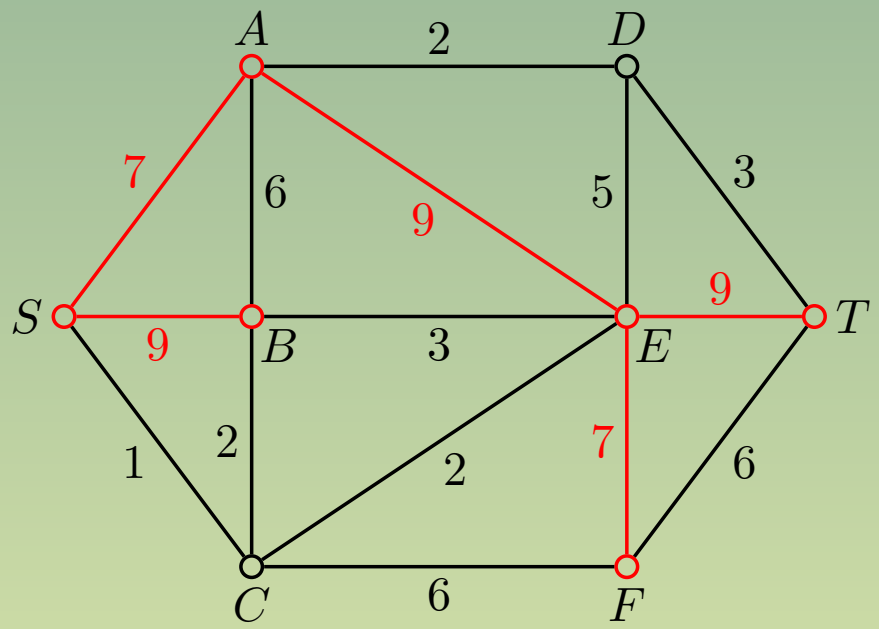
Odaberemo jednog od njih, npr. brid AS.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



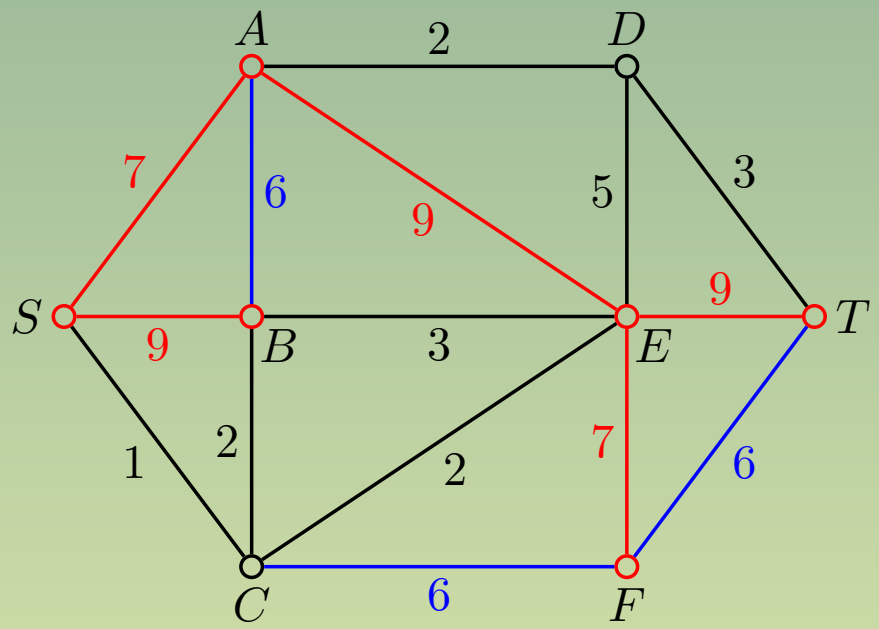
Brid EF je jedini brid maksimalne težine koji s odabranim bridovima (crveni bridovi) ne zatvara ciklus

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



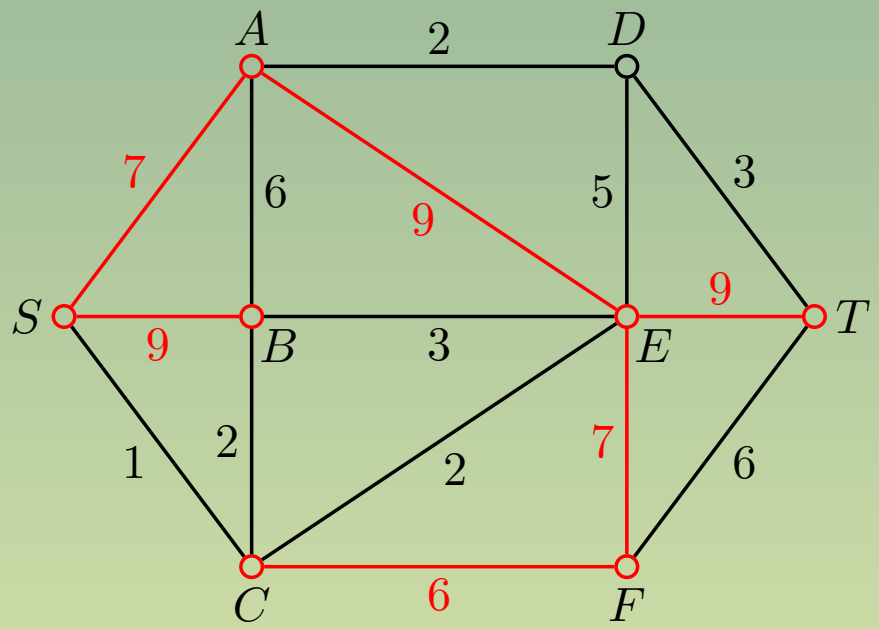
Brid EF je jedini brid maksimalne težine koji s odabranim bridovima (crveni bridovi) ne zatvara ciklus pa ga dodamo odabranim (crvenim) bridovima.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



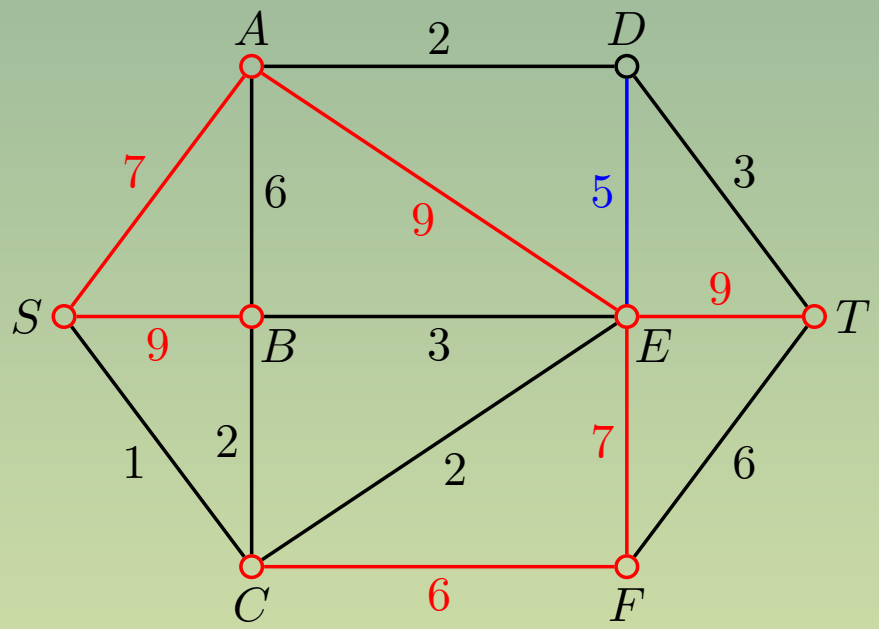
Bridovi AB, CF i FT su najveće težine među neodabranim bridovima. Međutim, brid AB zatvara s odabranim (crvenim) bridovima ciklus $ABSA$, a brid FT zatvara s njima ciklus $EFTE$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



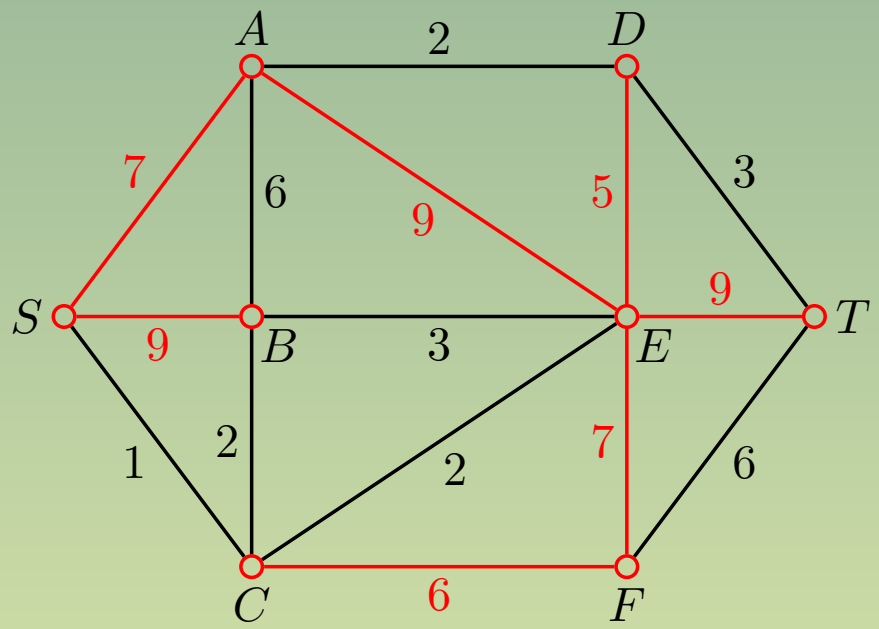
Stoga jedino dolazi u obzir da odaberemo brid CF i dodamo ga već odabranim bridovima.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



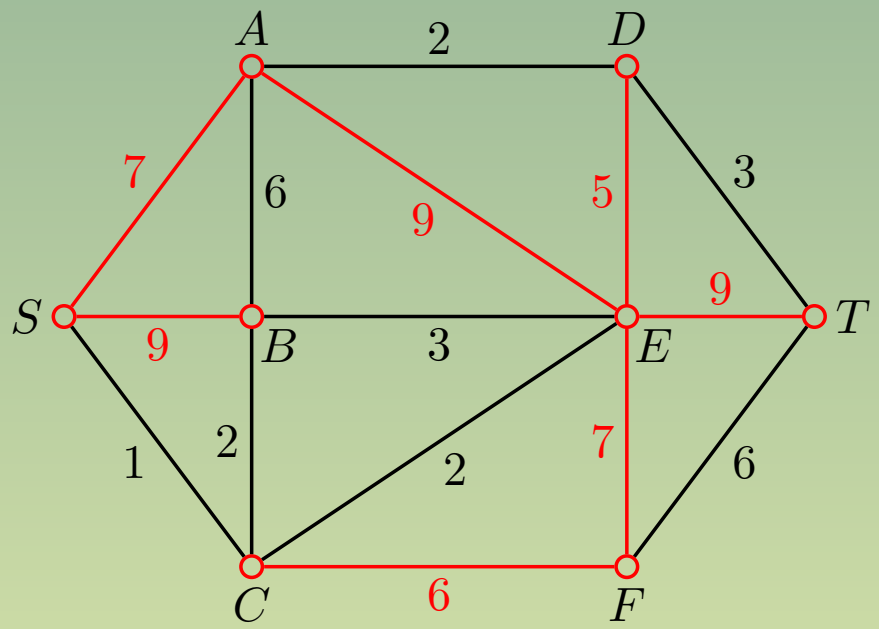
Brid DE je jedini brid maksimalne težine među neodabranim bridovima koji s odabranim (crvenim) bridovima ne zatvara cikluse. Sjetite se da smo već prije eliminirali iz razmatranja bridove AB i FT.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



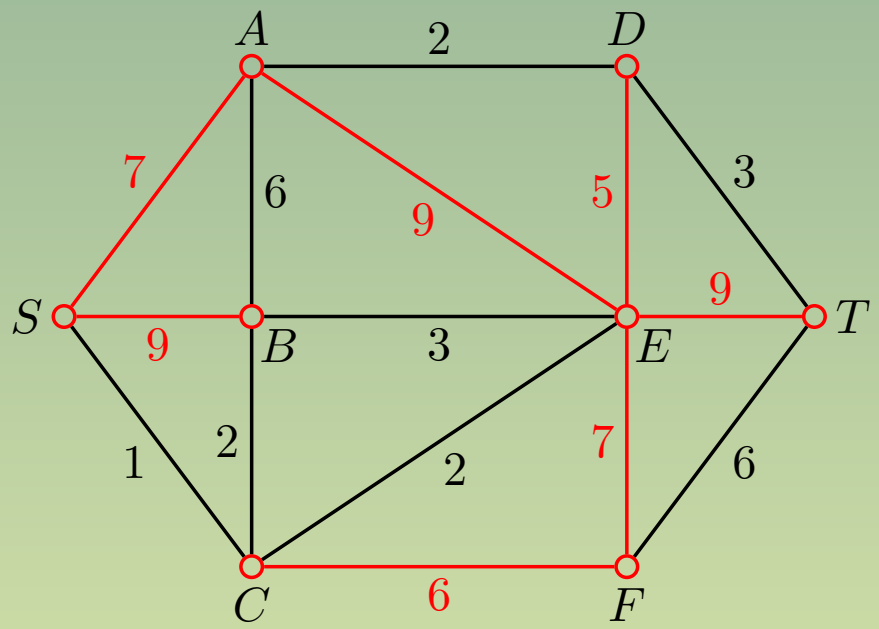
Stoga brid DE dodamo već odabranim (crvenim) bridovima.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Kako zadani graf ima 8 vrhova, a odabrali smo 7 bridova, odabrani crveni bridovi (zajedno s vrhovima) tvore jedno razapinjuće stablo i ono jest maksimalne težine. Maksimalna težina je jednaka 52.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Kratko ćemo čitav postupak zapisati u obliku tablice

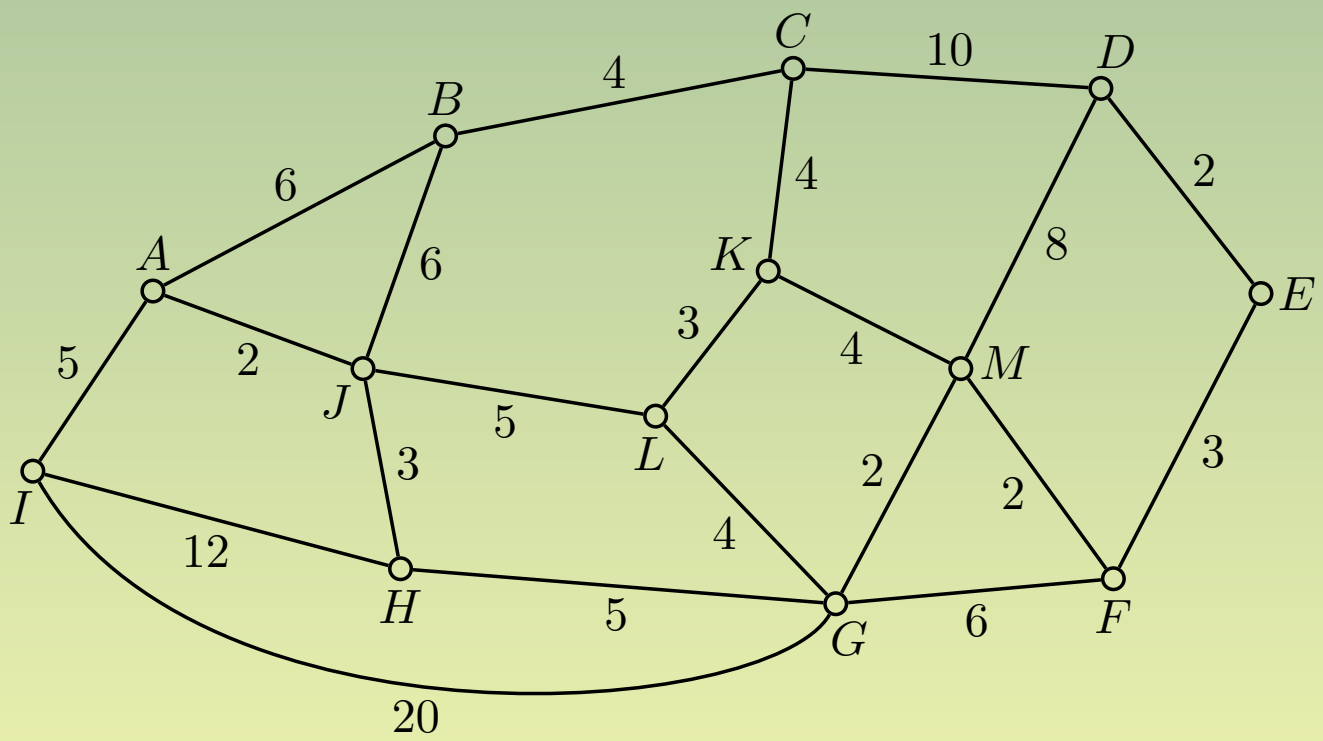
korak	1	2	3	4	5	6	7
brid	AE	SB	ET	AS	EF	CF	DE
težina	9	9	9	7	7	6	5

◂ objasni postupak

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

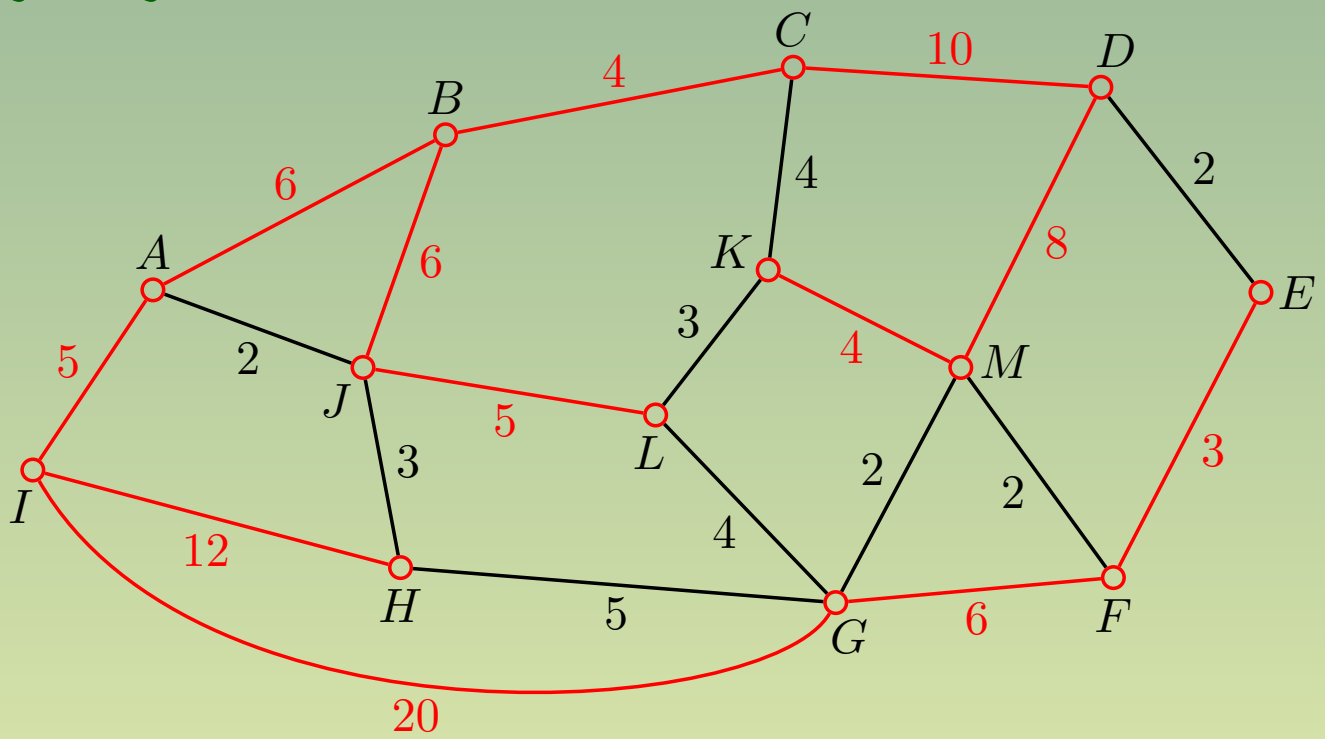
Primjer 8.73.

Pomoću Kruskalovog algoritma pronađite maksimalno razapinjuće stablo u težinskom grafu



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Rješenje.



korak	1	2	3	4	5	6
brid	GI	HI	CD	DM	GF	AB
težina	20	12	10	8	6	6

korak	7	8	9	10	11	12
brid	BJ	AI	JL	BC	KM	EF
težina	6	5	5	4	4	3

Maksimalno razapinjuće stablo ima težinu 89.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.74.

Dokažite da Kruskalov algoritam za svaki vrh u težinskom povezanom grafu uvijek bira brid najmanje težine koji je incidentan s tim vrhom.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.74.

Dokažite da Kruskalov algoritam za svaki vrh u težinskom povezanom grafu uvijek bira brid najmanje težine koji je incidentan s tim vrhom.

Rješenje.

Neka je v proizvoljni vrh i neka je d najmanja težina od svih bridova incidentnih s vrhom v. Prvi puta kada se brid incidentan s vrhom v razmatra za odabir (jer ima najmanju težinu među neodabranim bridovima), niti jedan brid incidentan s v neće dati ciklus s već odabranim bridovima. Kako algoritam uvijek bira brid najmanje težine, morat će odabrati jedan brid težine d.

Primov algoritam

ULAZ: Težinski povezani graf G s $n > 1$ vrhova
IZLAZ: Minimalno razapinjuće stablo od G

1: Odaberi bilo koji vrh v i neka je e_1 brid najmanje težine incidentan s v. Stavi $k = 1$.

2: Dok je $k < n$ radi sljedeće:

Ako postoji vrh koji nije u podgrafu $\mathcal{T}$ čiji bridovi su $e_1, e_2, \ldots, e_k$

a) Neka je e_{k+1} brid najmanje težine među svim bridovima oblika ux, gdje je u vrh od $\mathcal{T}$, a x vrh koji nije u $\mathcal{T}$.

b) Zamijeni k s $k + 1$.

inače, ispiši $e_1, e_2, \ldots, e_k$ i zaustavi se.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Napomena.

Za razliku od Kruskalovog algoritma, gdje se pazi u svakom koraku da nema ciklusa, Primov algoritam zahtijeva da u svakom koraku podgraf koji se sastoji od odabranih bridova bude uvijek stablo. Kod Kruskalovog algoritma je općenito taj podgraf šuma, a tek u zadnjem koraku on postaje stablo.

Primjer 8.75.

Dokažite da je Primov algoritam ispravan.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Napomena.

Za razliku od Kruskalovog algoritma, gdje se pazi u svakom koraku da nema ciklusa, Primov algoritam zahtijeva da u svakom koraku podgraf koji se sastoji od odabranih bridova bude uvijek stablo. Kod Kruskalovog algoritma je općenito taj podgraf šuma, a tek u zadnjem koraku on postaje stablo.

Primjer 8.75.

Dokažite da je Primov algoritam ispravan.

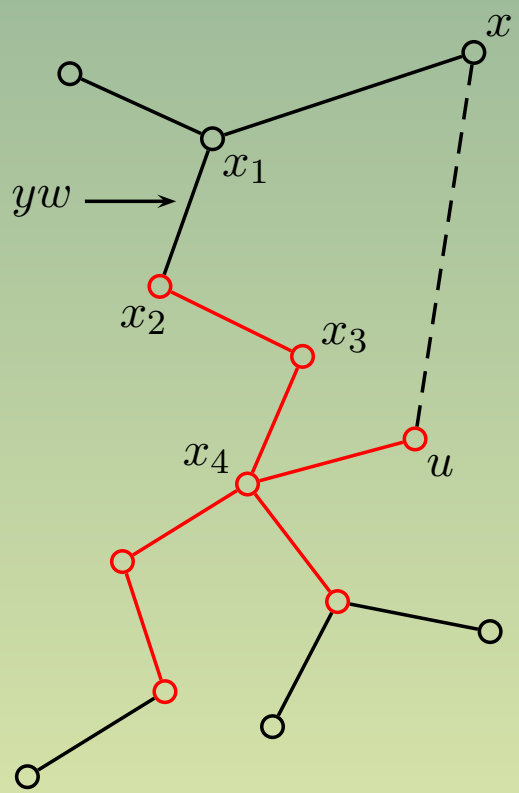
Rješenje.

Pokazat ćemo da u svakom koraku algoritam pronalazi stablo koje je podgraf nekog minimalnog razapinjućeg stabla. Na početku je to očito jer je svaki vrh stablo po definiciji i ono je podgraf svakog stabla pa onda i minimalnog razapinjućeg stabla.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Pretpostavimo da je nakon k koraka algoritam stvorio stablo $\mathcal{T}$ koje je podgraf minimalnog razapinjućeg stabla $\mathcal{T}_m$ promatranog grafa. U sljedećem koraku algoritam formira podgraf $\mathcal{T}_1$ tako da dodaje novi vrh x i brid ux u stablo $\mathcal{T}$, pri čemu je težina brida ux najmanja od svih težina bridova koji spajaju vrhove $x \notin \mathcal{T}$ s vrhovima $u \in \mathcal{T}$. Kako $\mathcal{T}$ ne sadrži cikluse, a dodani vrh x je incidentan samo s jednim bridom u $\mathcal{T}_1$, tada je $\mathcal{T}_1$ također stablo. Tvrdimo da je $\mathcal{T}_1$ sadržan u nekom minimalnom razapinjućem stablu promatranog grafa. Ako je $\mathcal{T}_1$ sadržan u $\mathcal{T}_m$, onda je gotovo. Pretpostavimo da $\mathcal{T}_1$ nije sadržan u $\mathcal{T}_m$. Tada podgraf $\mathcal{T}_m$ s bridom ux zatvara ciklus $uxx_1x_2 \cdots x_ru$. Takav ciklus mora sadržavati brid oblika yw (različit od brida ux), gdje $y \notin \mathcal{T}$ i $w \in \mathcal{T}$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Iz toga zaključujemo da je $w(ux) \leqslant w(yw)$ jer je brid yw također mogao biti odabran s obzirom da se on nalazi u minimalnom razapinjućem stablu $\mathcal{T}_m$, ali je algoritam odabrao brid ux. Stoga, razapinjuće stablo $(\mathcal{T}_m + ux) - yw$ ima težinu koja ne premašuje težinu stabla $\mathcal{T}_m$ pa je $(\mathcal{T}_m + ux) - yw$ također minimalno razapinjuće stablo koje sadrži stablo $\mathcal{T}_1$.

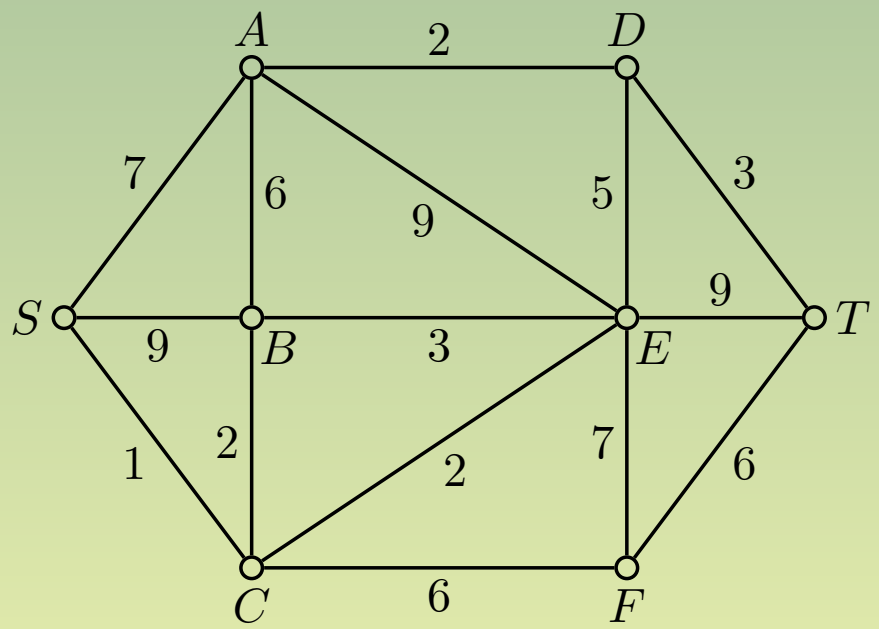
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Prema principu matematičke indukcije slijedi da u svakom koraku Primov algoritam konstruira stablo koje je sadržano u nekom minimalnom razapinjućem stablu. Posebno, u posljednjem koraku zaista dobivamo minimalno razapinjuće stablo.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

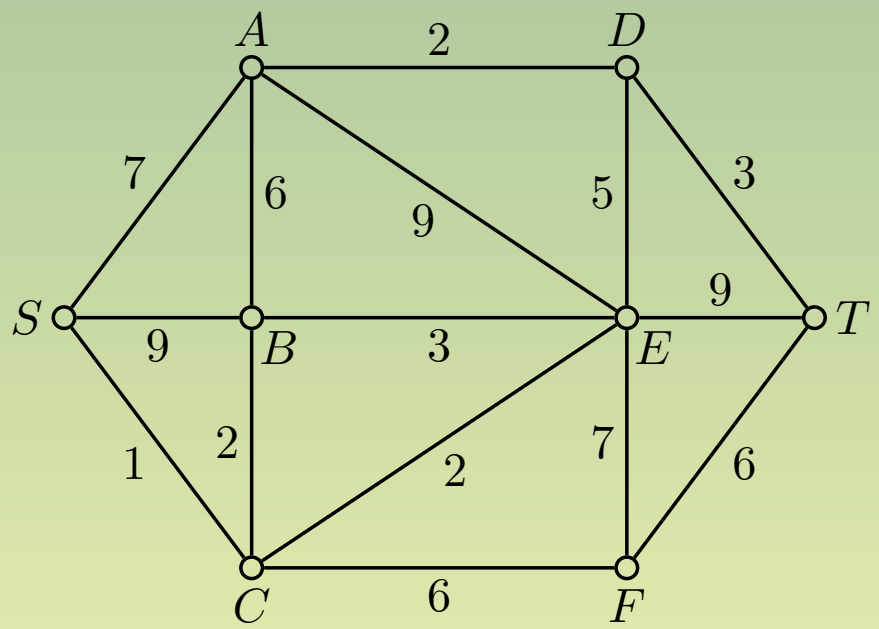
Primjer 8.76.

Pomoću Primovog algoritma pronađite minimalno razapinjuće stablo u težinskom grafu



Primjer 8.76.

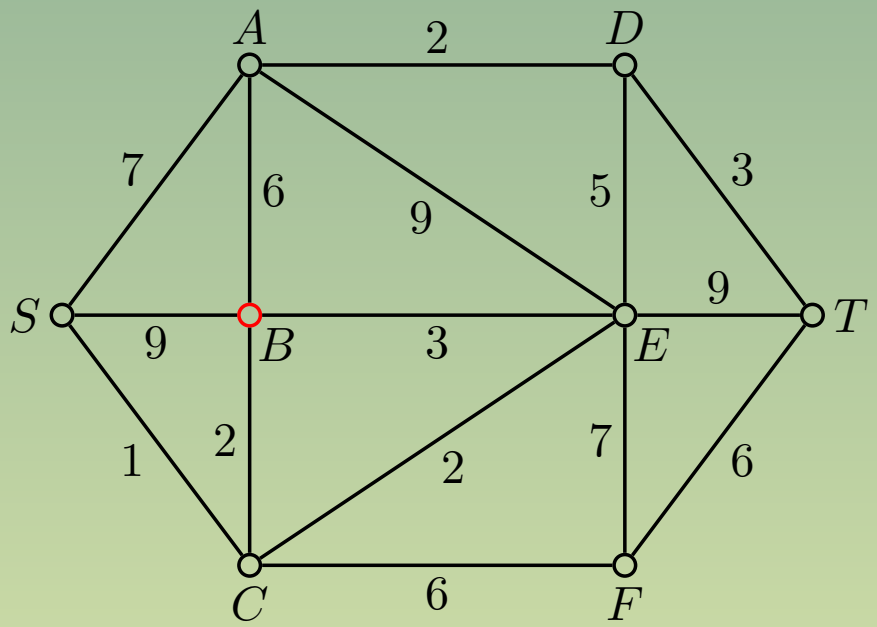
Pomoću Primovog algoritma pronađite minimalno razapinjuće stablo u težinskom grafu



Rješenje.

Na ovom primjeru ćemo objasniti svaki međukorak. Na ostalim primjerima to nećemo raditi, nego ćemo samo dati konačno rješenje.

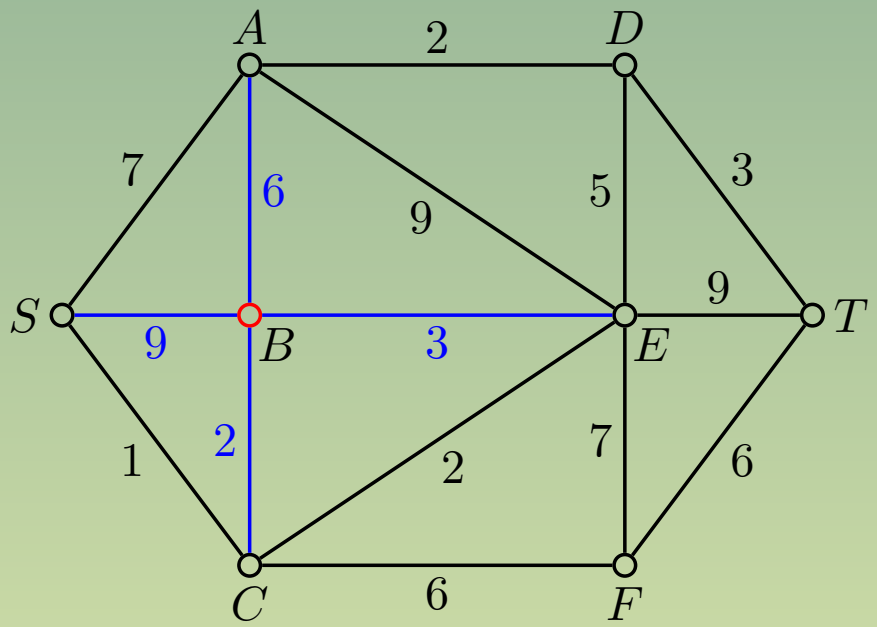
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Najprije odaberemo bilo koji vrh, npr. uzmimo vrh B.

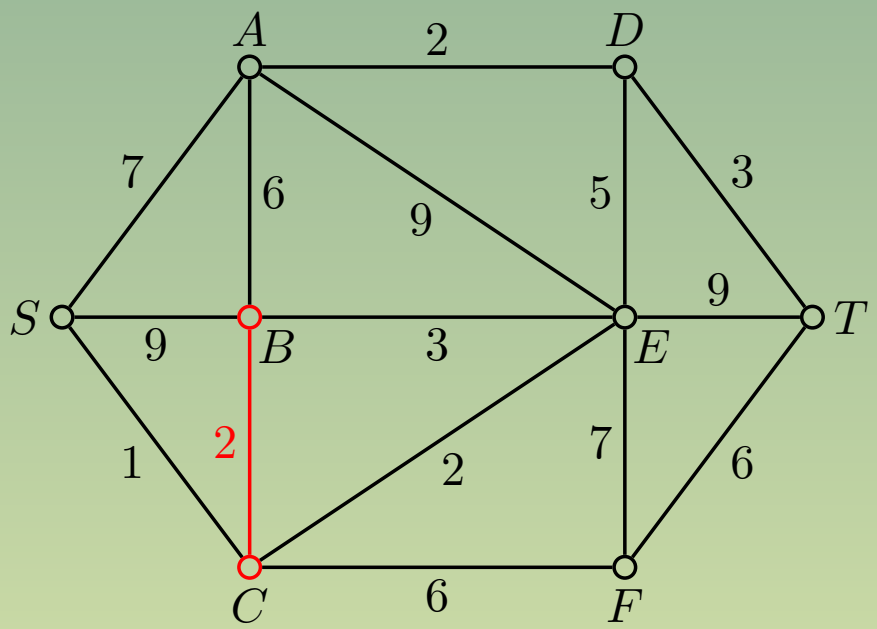
konačno rješenje

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



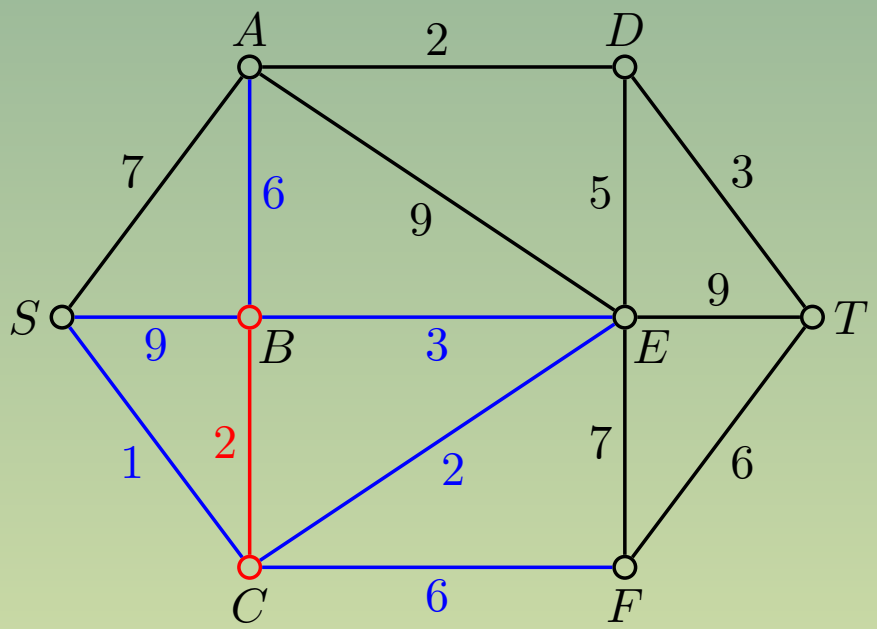
Zatim pogledamo sve bridove susjedne s vrhom B

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



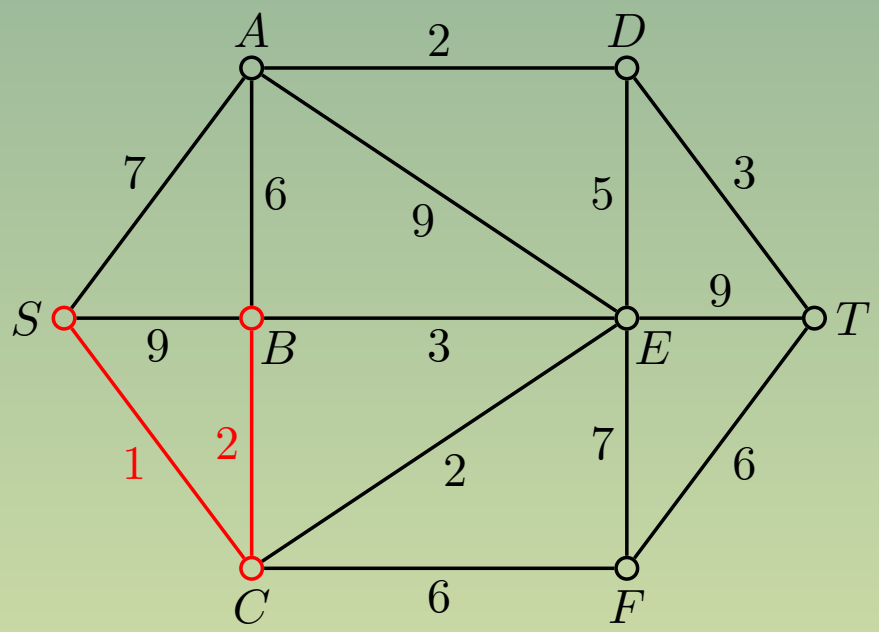
Zatim pogledamo sve bridove susjedne s vrhom B i odaberemo onog koji ima najmanju težinu. U ovom slučaju je to brid BC.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



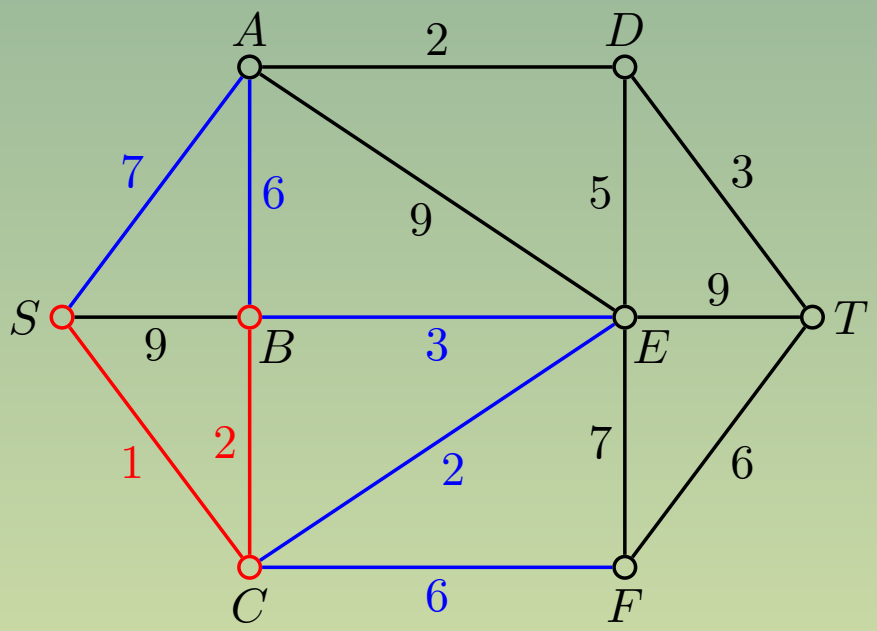
Sada promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh (B ili C), a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh)

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



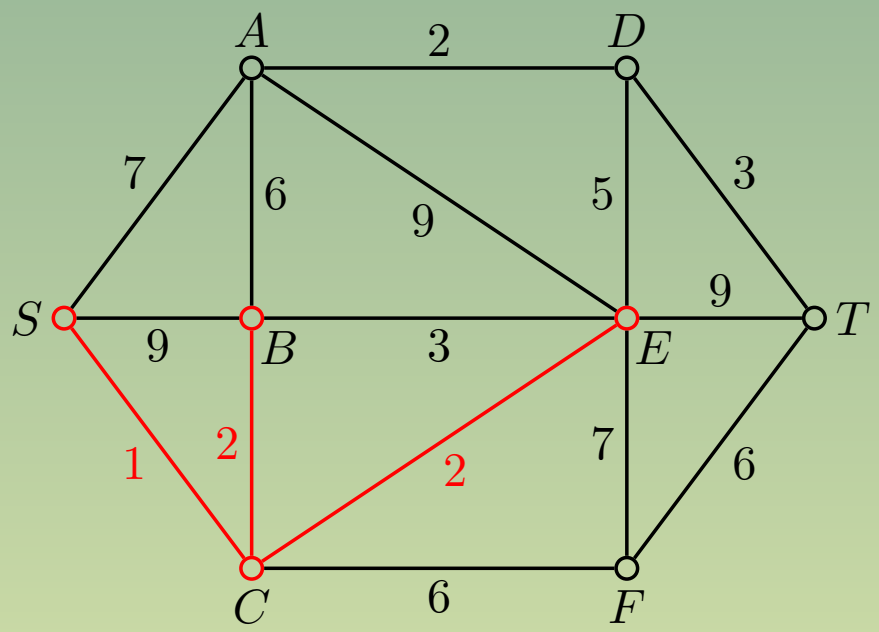
Sada promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh (B ili C), a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh) i odaberemo među njima brid najmanje težine. To je u ovom slučaju brid SC.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



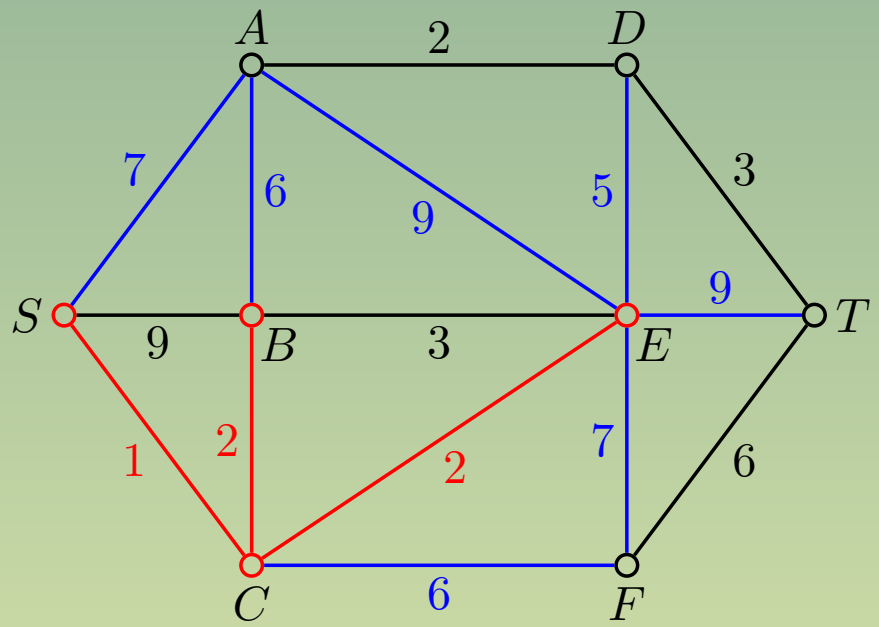
Sada promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh, a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh)

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



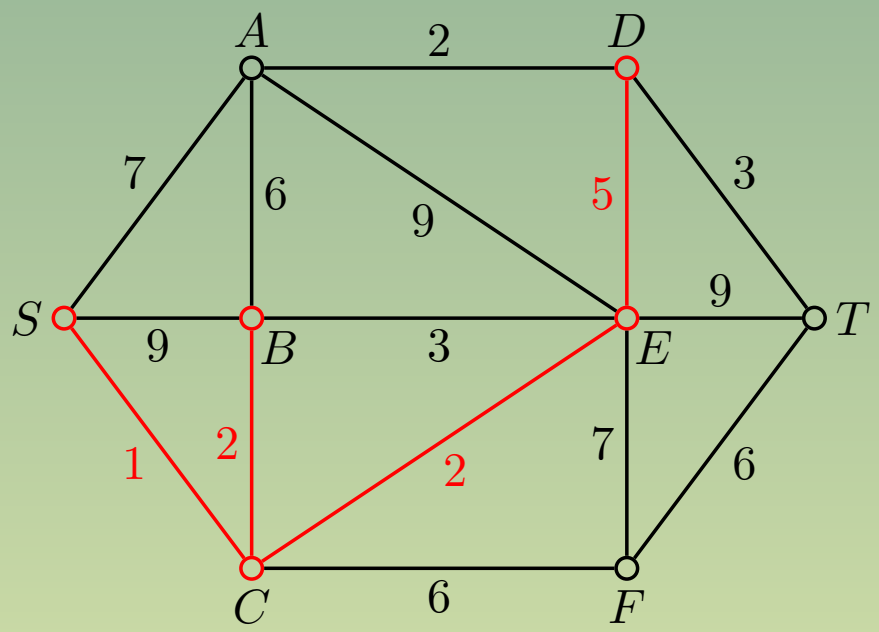
Sada promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh, a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh) i odaberemo među njima brid najmanje težine. To je u ovom slučaju brid CE.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



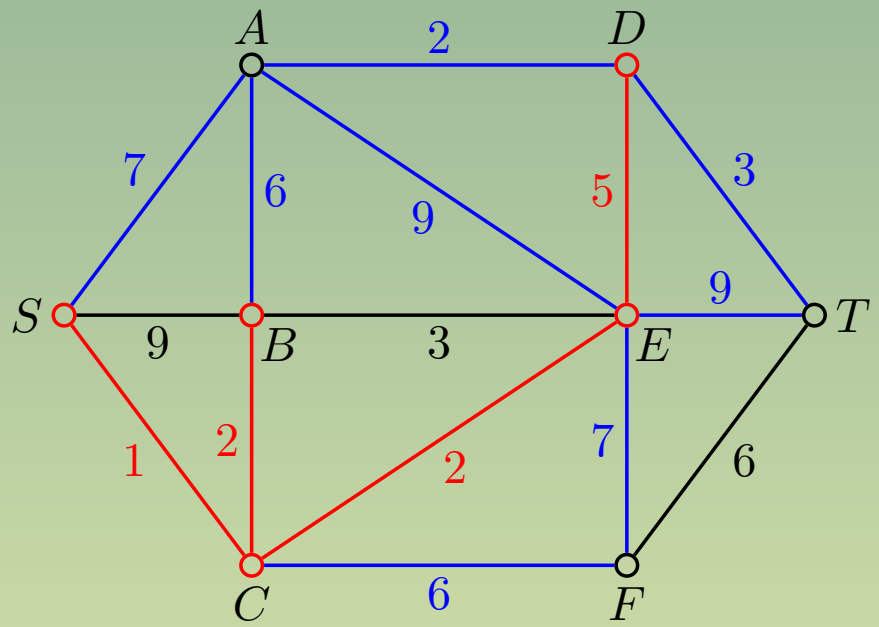
Opet promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh, a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh)

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



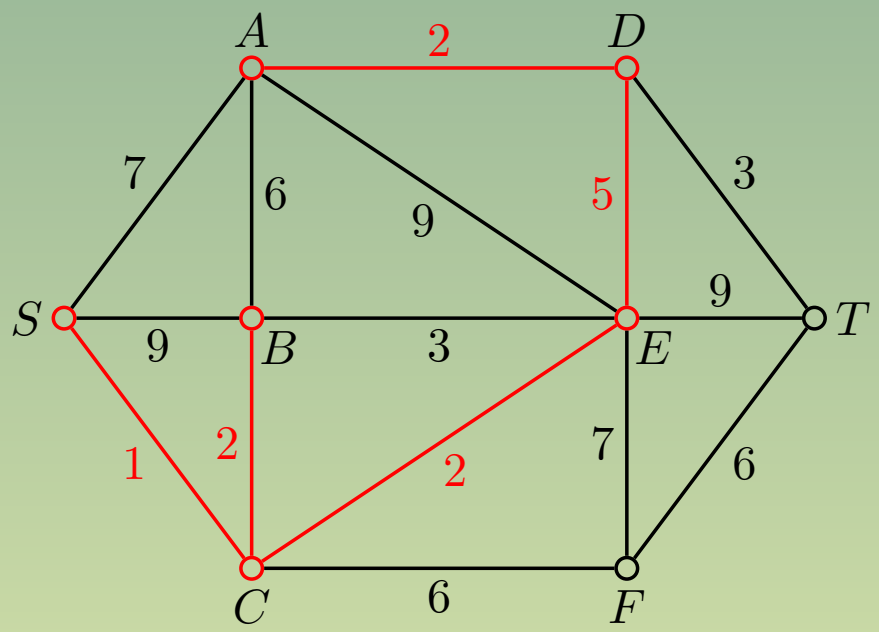
Opet promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh, a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh) i odaberemo među njima brid najmanje težine. To je u ovom slučaju brid DE.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



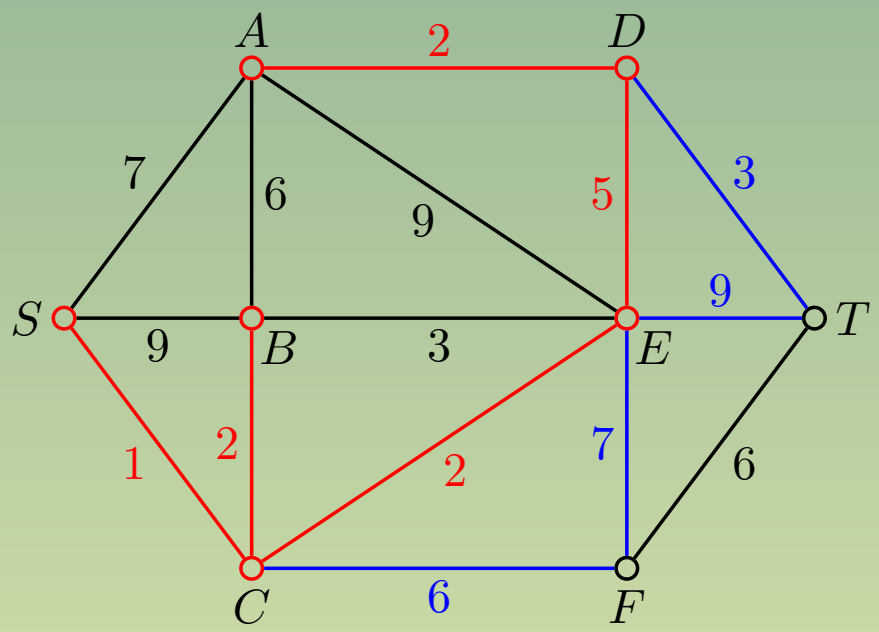
Opet promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh, a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh)

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



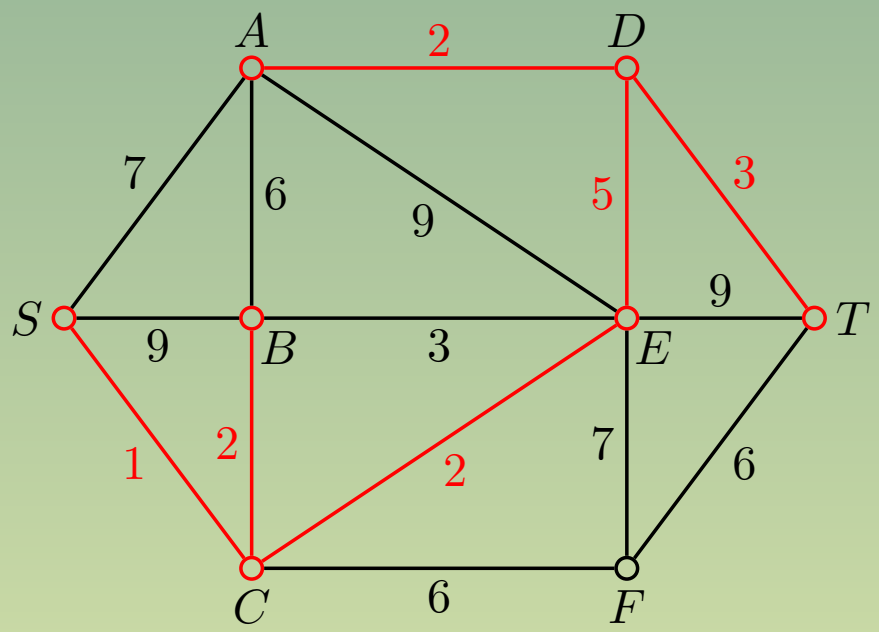
Opet promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh, a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh) i odaberemo među njima brid najmanje težine. To je u ovom slučaju brid AD.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



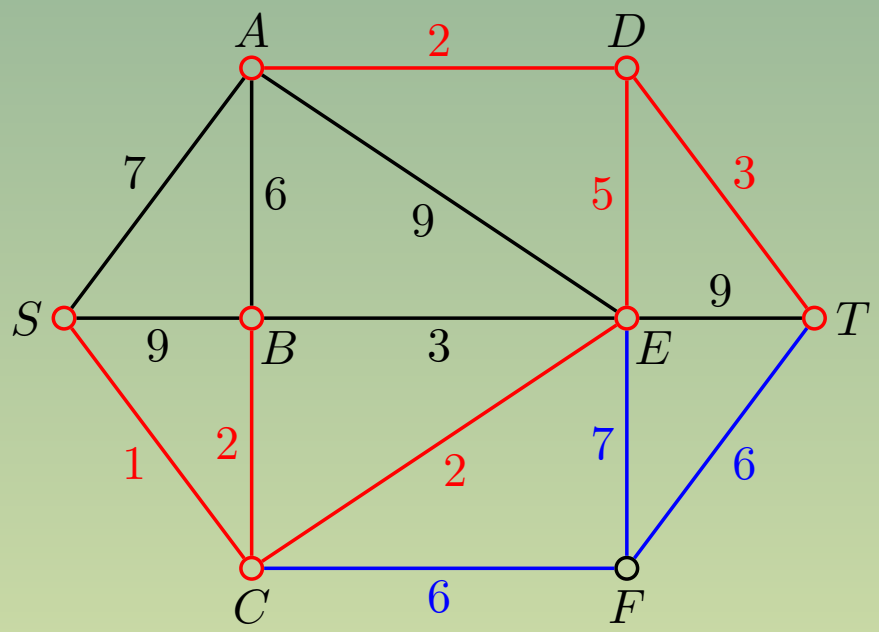
Opet promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh, a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh)

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



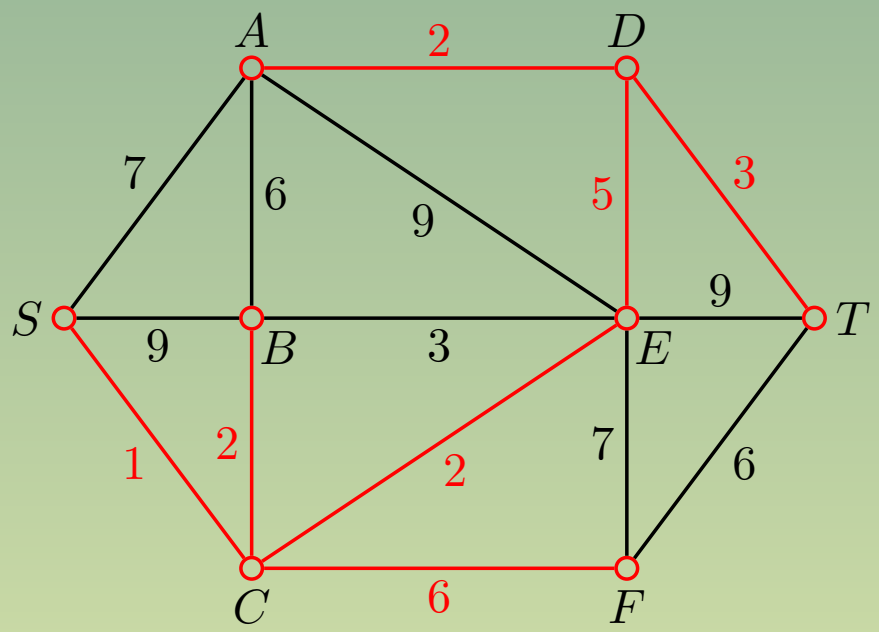
Opet promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh, a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh) i odaberemo među njima brid najmanje težine. To je u ovom slučaju brid DT.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



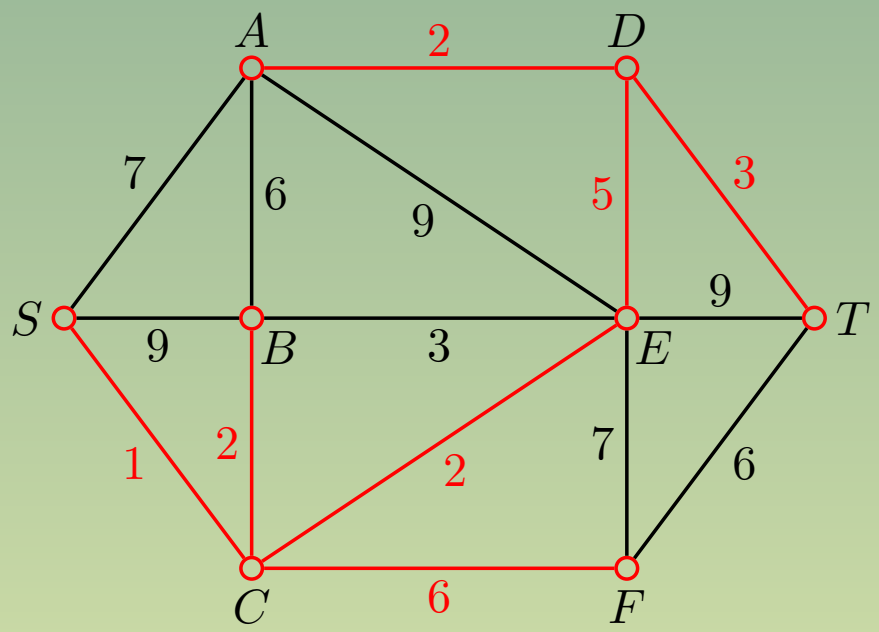
Opet promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh, a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh)

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



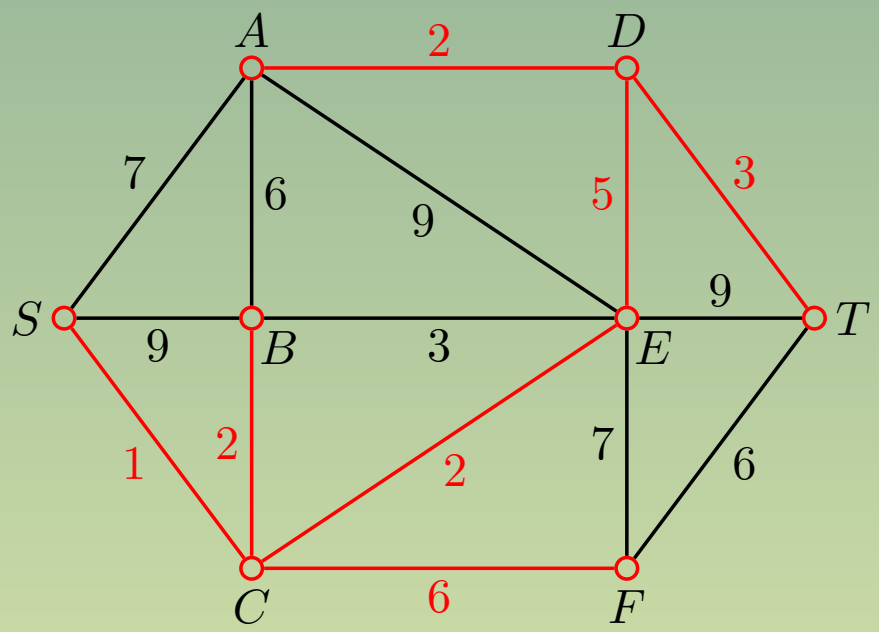
Opet promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh, a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh) i odaberemo među njima brid najmanje težine. U ovom slučaju smo odabrali brid CF, a isto tako smo mogli odabrati i brid FT (jer oba imaju najmanju težinu 6).

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Kako su svi vrhovi odabrani, dobiveno stablo je minimalno razapinjuće stablo i ima težinu 21.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



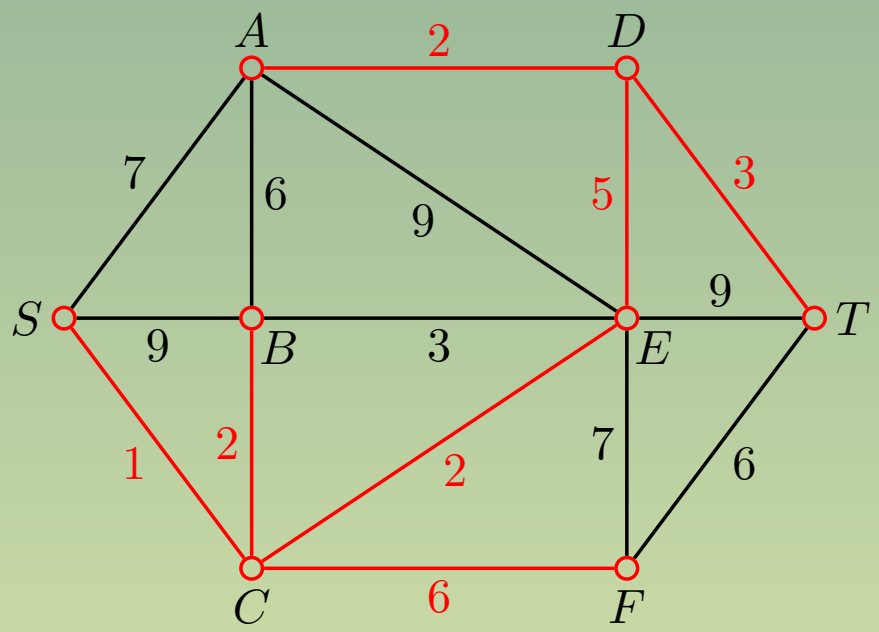
Čitav postupak ćemo zapisati u obliku tablice

objasni postupak

početni vrh: B

korak	1	2	3	4	5	6	7
brid	BC	SC	CE	DE	AD	DT	CF
težina	2	1	2	5	2	3	6

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Mogli smo, umjesto vrha B, odabrati bilo koji drugi vrh za početni vrh. Na primjer, da smo odabrali vrh F za početni vrh, imali bismo

početni vrh: F

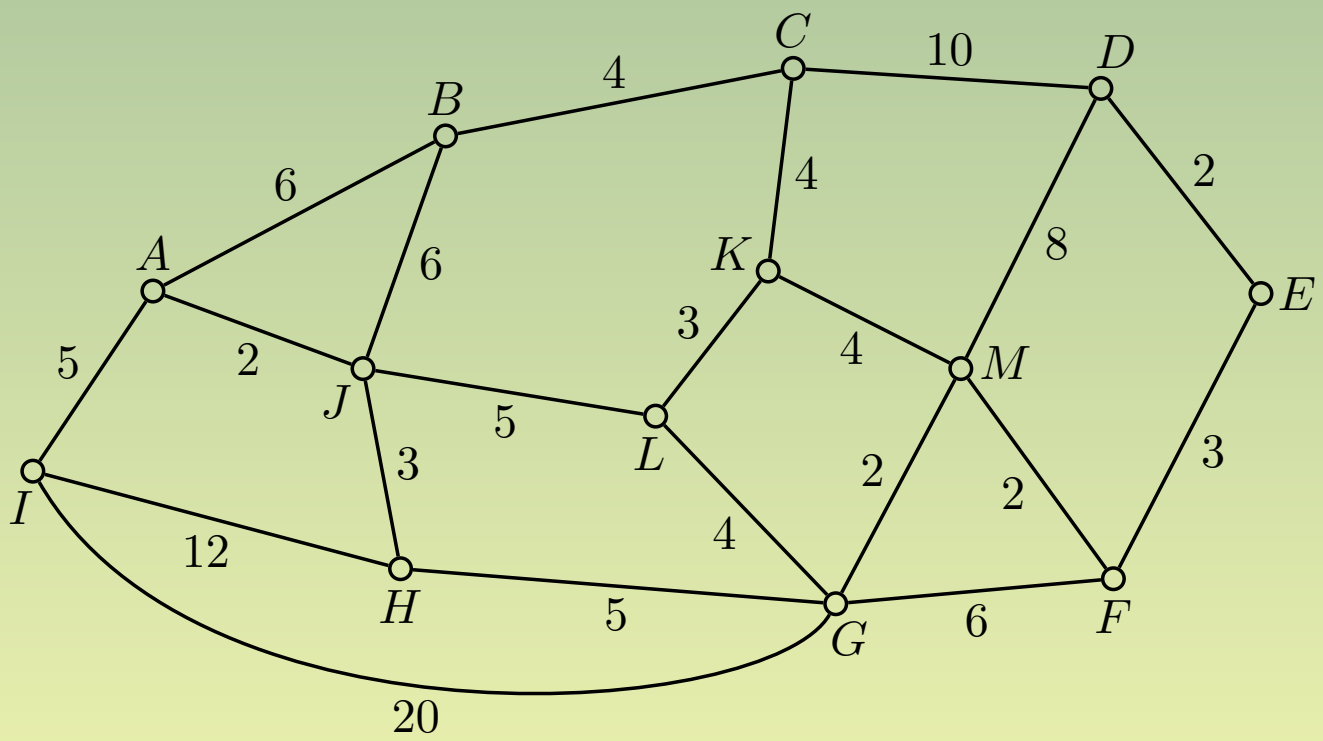
korak	1	2	3	4	5	6	7
brid	CF	SC	BC	CE	DE	AD	DT
težina	6	1	2	2	5	2	3

s time da smo na početku umjesto brida CF isto tako mogli odabrati brid FT.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.77.

Pomoću Primovog algoritma pronađite minimalno razapinjuće stablo u težinskom grafu



Stabla

Def. i karakterizacije

Riješeni primjeri

Korijenska stabla

Bin. stabla i alg. izrazi

Stablo sortiranja

Sortiranje u parcijalno uređenom skupu

Hrpa

Razapinjuća stabla

Rekurzija za raz. stabla

Riješeni primjeri

Matrični teorem o stablima

Teoretski primjeri

DFS i BFS algoritam

DFS algoritam

BFS algoritam

Povezanost grafa

Kruskal i Prim

Kruskalov algoritam

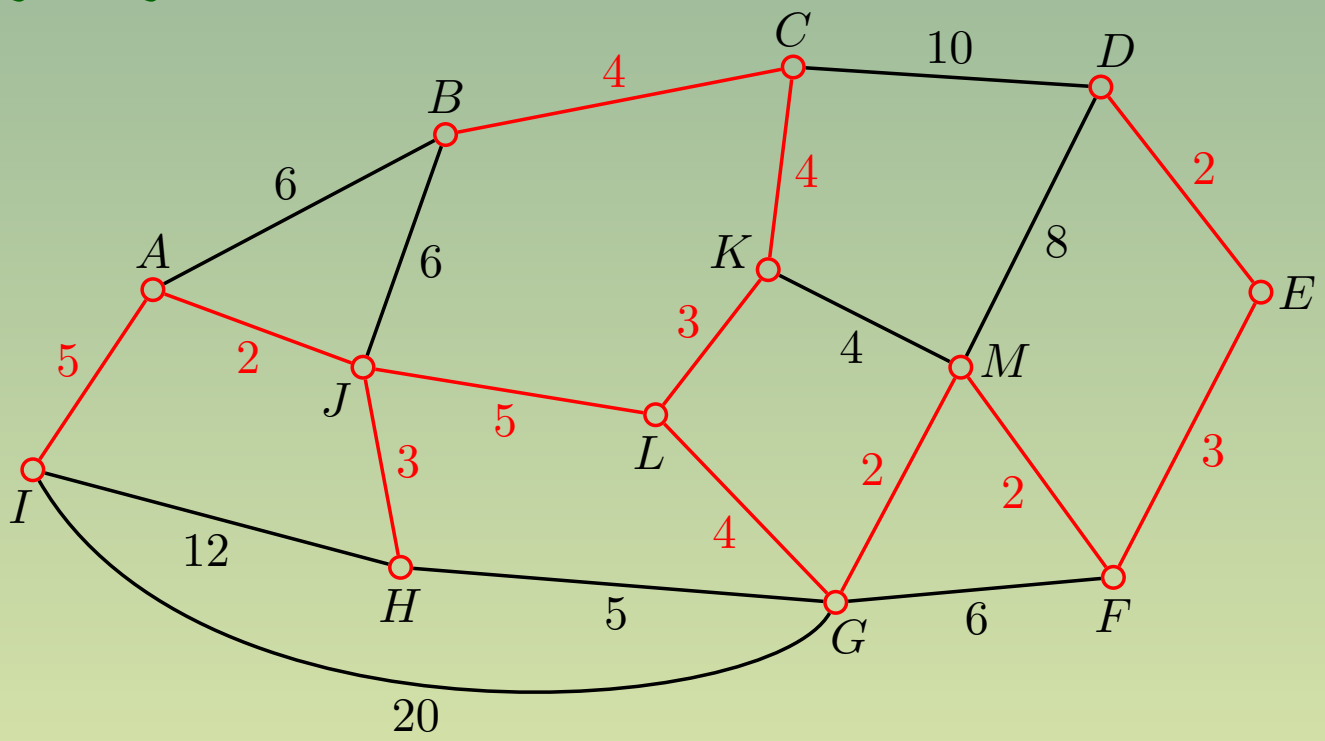
Implementacija Kruskala

Primov algoritam

Implementacija Prima

Još o Ham. ciklusu

Rješenje.



početni vrh: B

korak	1	2	3	4	5	6
brid	BC	CK	KL	LG	GM	MF
težina	4	4	3	4	2	2

korak	7	8	9	10	11	12
brid	EF	DE	JL	AJ	HJ	AI
težina	3	2	5	2	3	5

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Implementacija Primovog algoritma

Neka je G povezani težinski graf. U Primovom algoritmu najprije odaberemo neki vrh v i pronađemo najmanju težinu svih bridova susjednih s vrhom v. U najgorem slučaju $\nu - 1$ bridova je susjedno s vrhom v pa nam je potrebno najviše $\nu - 2$ uspoređivanja. Pretpostavimo da je odabran brid vu. Dalje tražimo brid najmanje težine koji je susjedan s nekim od vrhova u i v (bez brida vu). U najgorem slučaju ćemo imati $2(\nu - 2)$ takvih bridova pa će nam biti potrebno $2(\nu - 2) - 1$ uspoređivanja. Nakon što je odabrano k bridova (i $k + 1$ vrhova), tražimo brid najmanje težine koji je susjedan s točno jednim od već odabranih vrhova. U najgorem slučaju će broj takvih bridova biti $(k + 1)(\nu - k - 1)$ pa će nam trebati $(k + 1)(\nu - k - 1) - 1$ uspoređivanja.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Sve zajedno ćemo imati ukupno

$$\sum_{k=0}^{\nu-2} \big[(k+1)(\nu-k-1)-1\big] = \sum_{k=0}^{\nu-2} \big(\nu k + \nu - k^2 - 2k - 2\big)$$

uspoređivanja. Nadalje, znamo da je

$$\sum_{k=0}^{\nu-2} k = O\big(\nu^2\big), \quad \sum_{k=0}^{\nu-2} k^2 = O\big(\nu^3\big)$$

pa je ukupna složenost Primovog algoritma $O\big(\nu^3\big)$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primov algoritam se može implementirati sa složenošću $O(\nu^2)$. Naime, nije potrebno u svakom koraku tražiti minimum tako puno brojeva kao što je to maloprije opisano. Evo sljedeće bolje alternative. Odaberemo bilo koji vrh v_1 i označimo sve ostale vrhove v s težinom brida vv_1 ako je vv_1 brid, a u protivnom s ∞. Zatim odaberemo brid v_1v_2 takav da v_2 ima najmanju oznaku. Svakom vrhu v susjednom s vrhom v_2 promijenimo oznaku sa težinom brida vv_2 ukoliko je ta težina manja od njegove trenutne oznake. Zatim odaberemo vrh v_3 s najmanjom oznakom i dodamo odgovarajući brid (v_3v_1 ili v_3v_2). Postupak tako nastavimo do kraja. Uočimo da u svakom koraku imamo $O(\nu)$ uspoređivanja pa je sve zajedno ukupna složenost $O(\nu^2)$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Napomena.

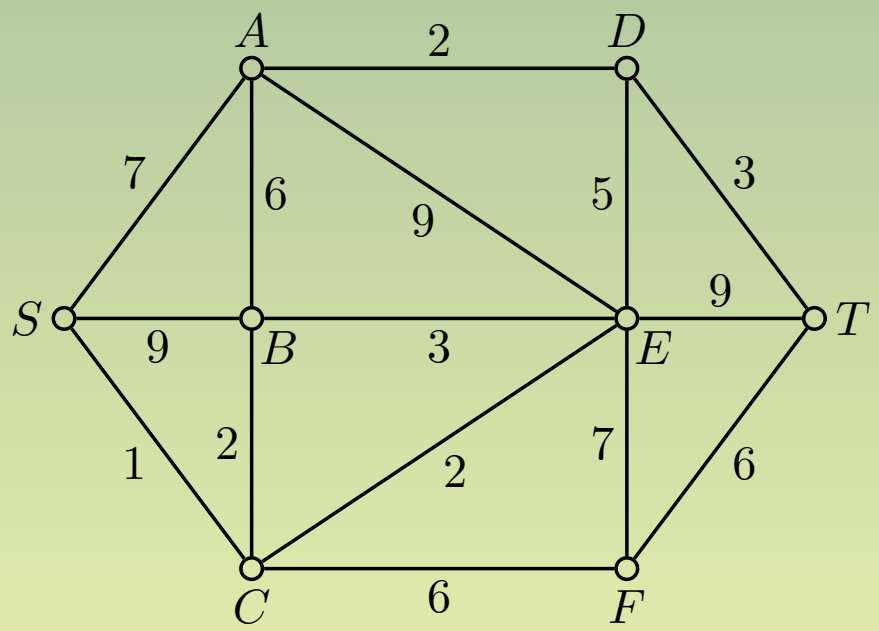
Složenost Kruskalovog algoritma je $O(\varepsilon \log \varepsilon)$, a Primovog $O(\nu^2)$. Za pojedini povezani težinski graf, izbor između ova dva algoritma ovisi o veličinama ν i ε. Ako u grafu broj bridova nije pretjerano veći od broja vrhova, tada je bolje uzeti Kruskalov algoritam, a u protivnom je bolji Primov algoritam.

Kao što smo Kruskalov algoritam modificirali da umjesto minimalnog traži maksimalno razapinjuće stablo, tako i Primov algoritam možemo modificirati da umjesto minimalnog traži maksimalno razapinjuće stablo. Opet je poanta da sam kostur algoritma ostaje isti, jedino što u svakom koraku umjesto da biramo brid najmanje težine, biramo brid najveće težine koji zadovoljava postavljene uvjete.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

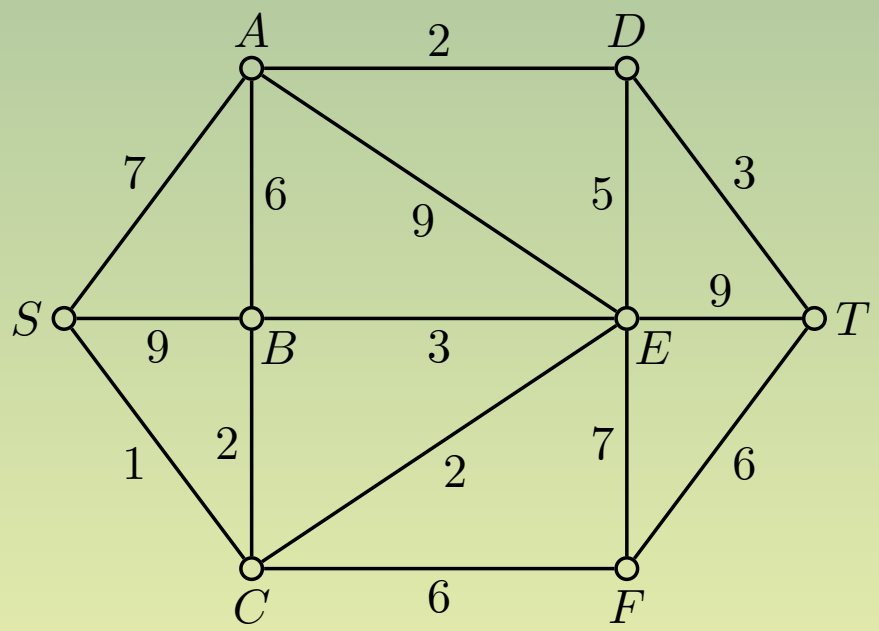
Primjer 8.78.

Pomoću Primovog algoritma pronađite maksimalno razapinjuće stablo u težinskom grafu



Primjer 8.78.

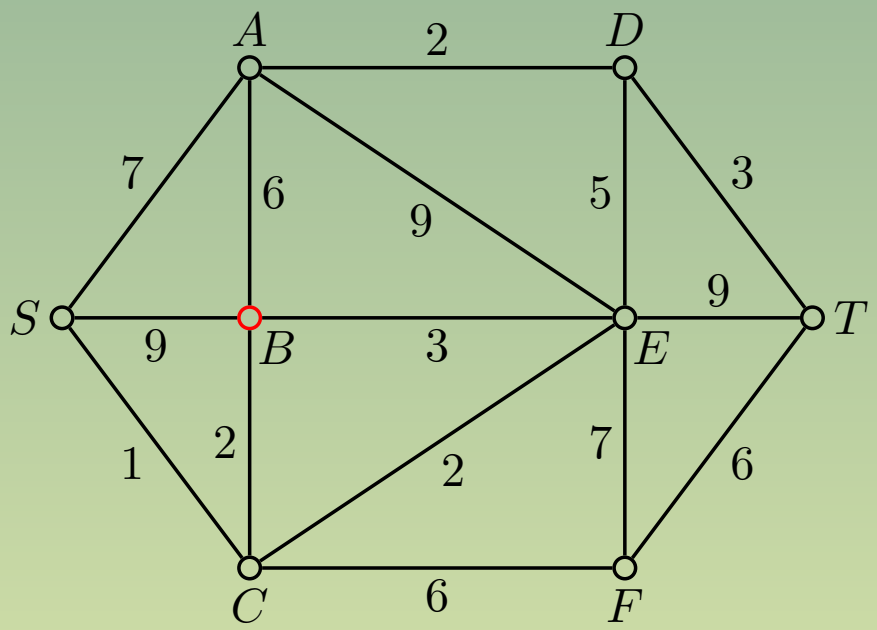
Pomoću Primovog algoritma pronađite maksimalno razapinjuće stablo u težinskom grafu



Rješenje.

Na ovom primjeru ćemo opet objasniti svaki međukorak.

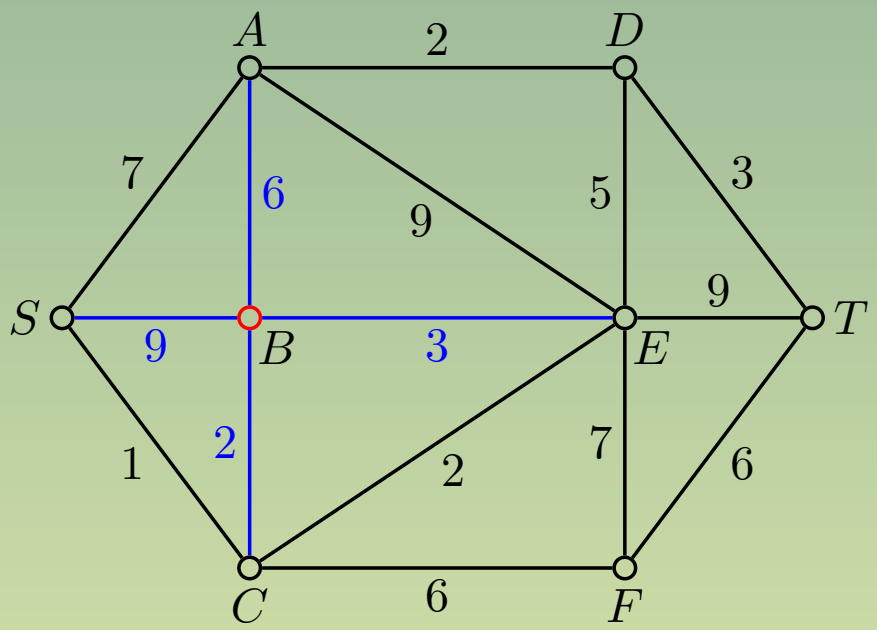
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Najprije odaberemo bilo koji vrh, npr. uzmimo vrh B.

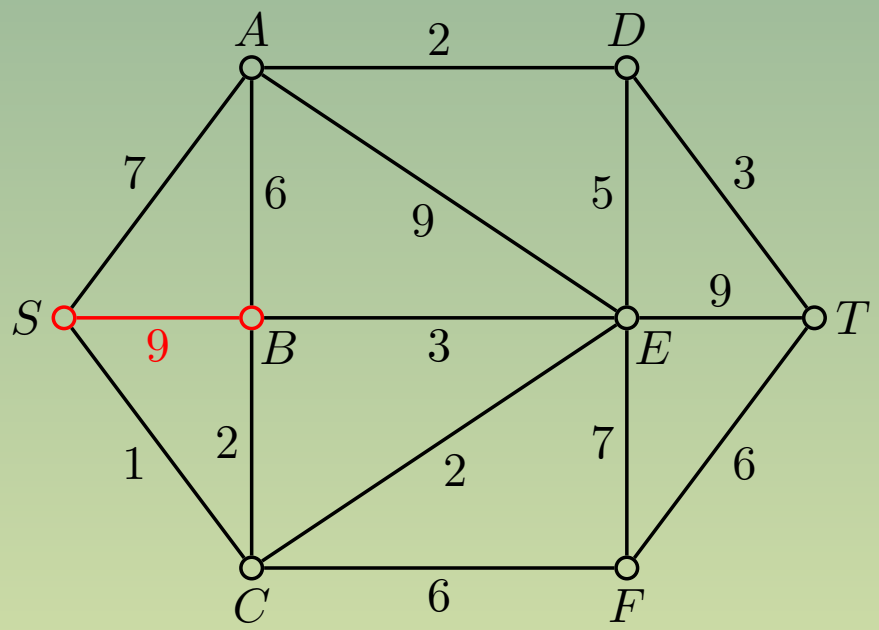
konačno rješenje

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



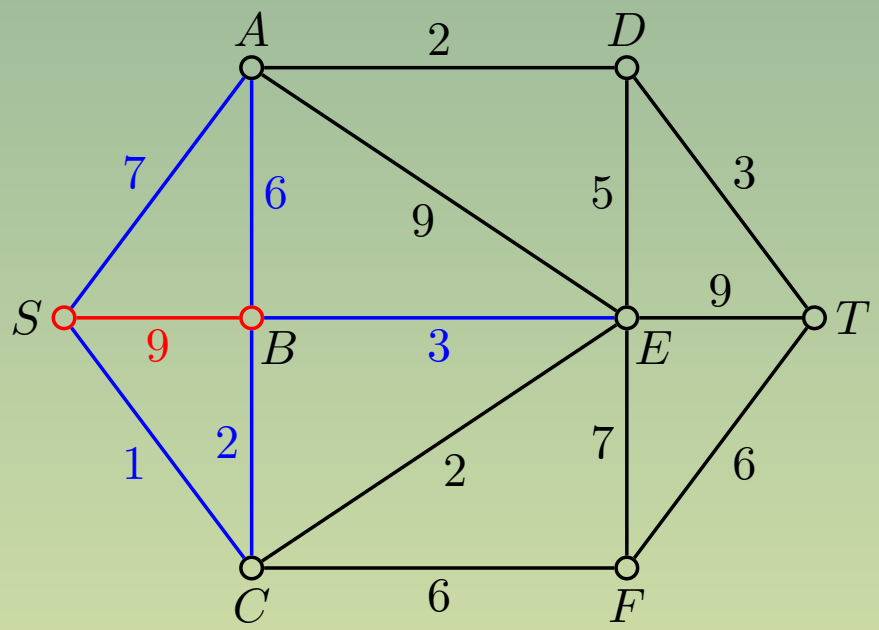
Zatim pogledamo sve bridove susjedne s vrhom B

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



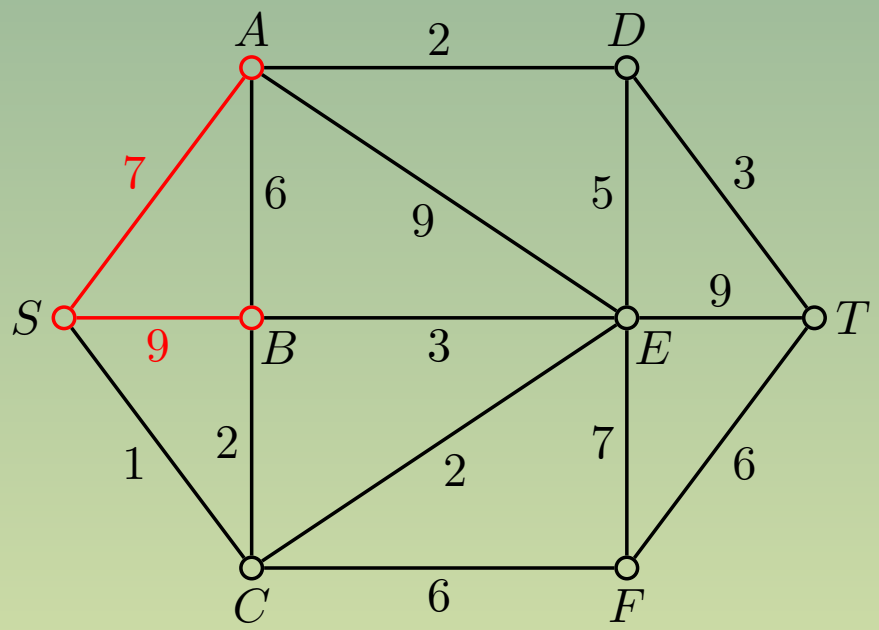
Zatim pogledamo sve bridove susjedne s vrhom B i odaberemo onog koji ima najveću težinu. U ovom slučaju je to brid BS.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



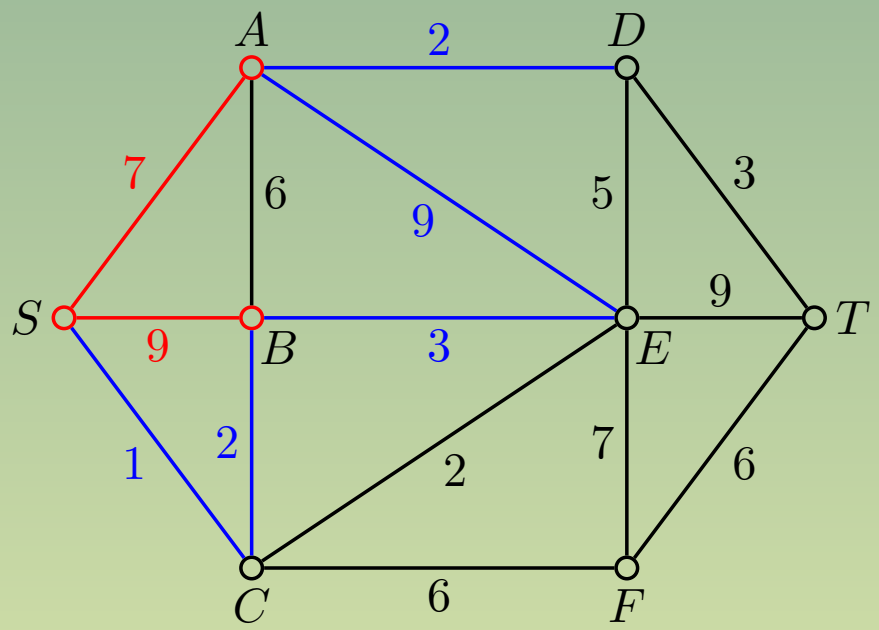
Sada promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh (B ili S), a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh)

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



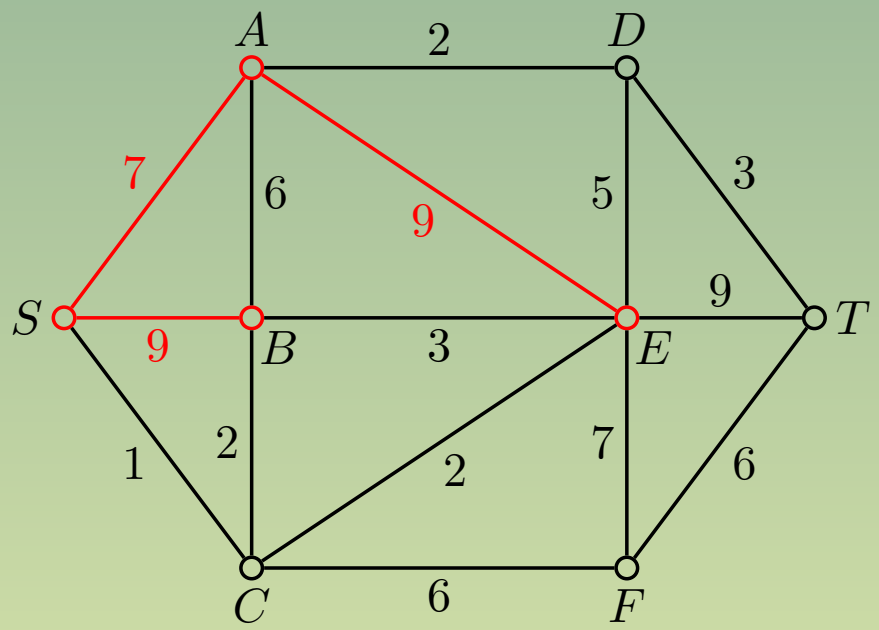
Sada promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh (B ili S), a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh) i odaberemo među njima brid najveće težine. To je u ovom slučaju brid AS.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



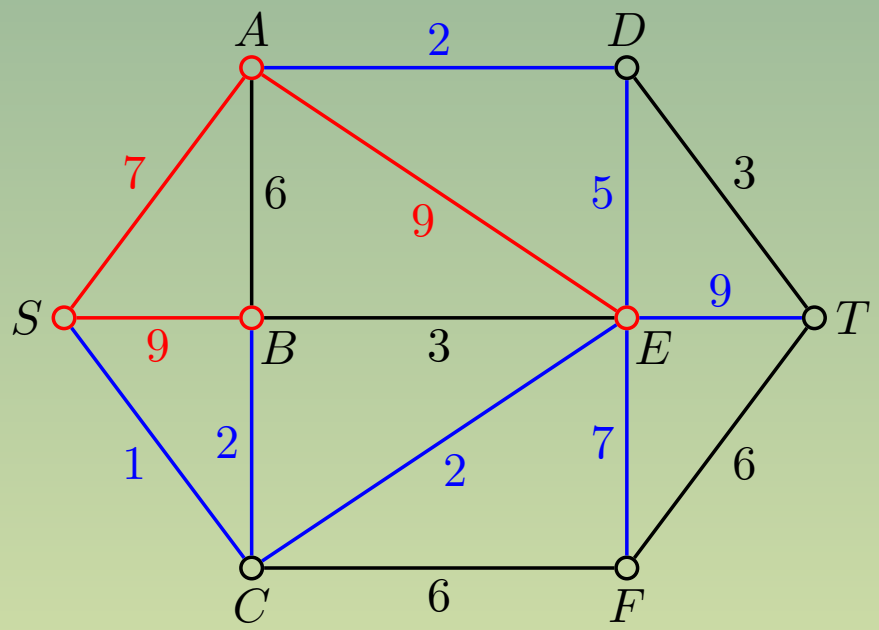
Sada promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh, a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh)

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



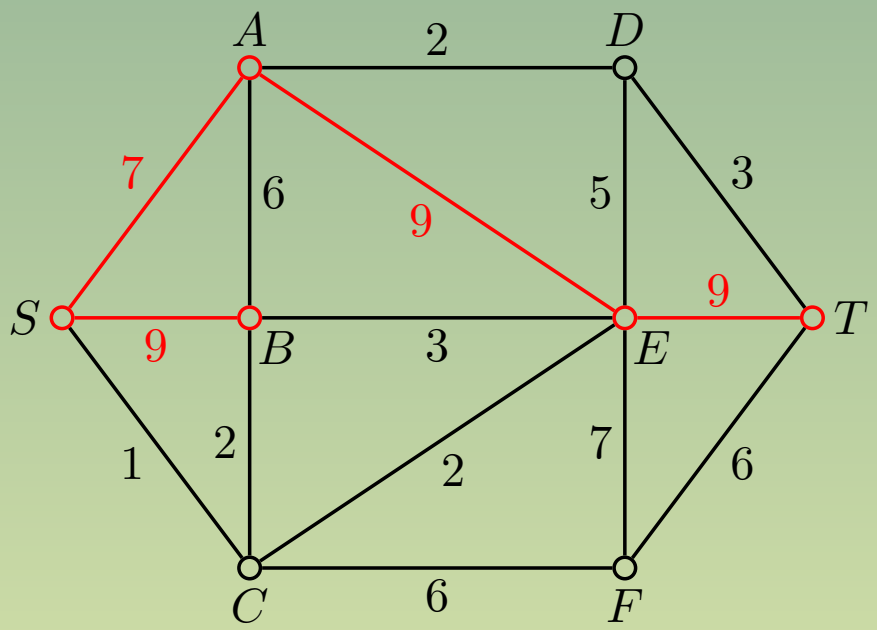
Sada promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh, a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh) i odaberemo među njima brid najveće težine. To je u ovom slučaju brid AE.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



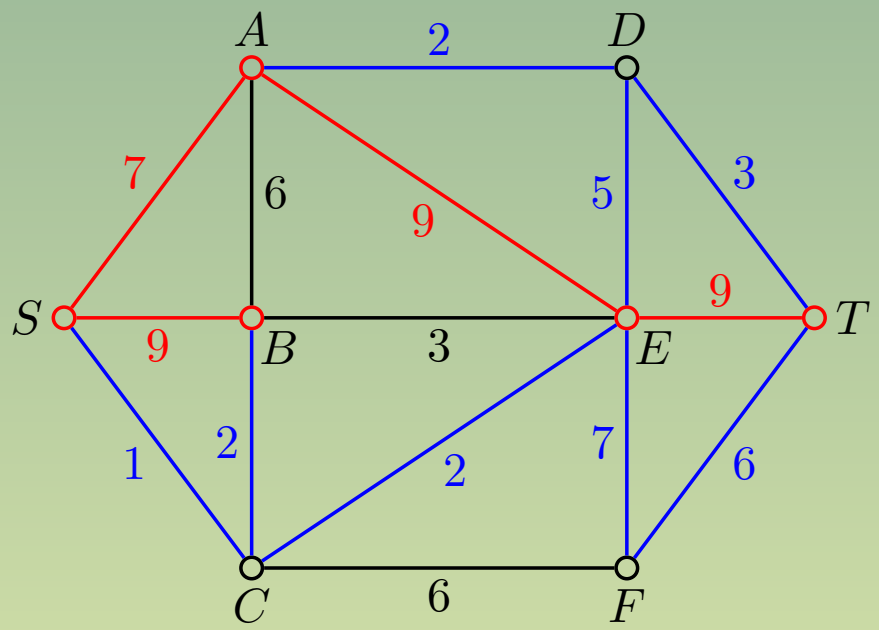
Opet promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh, a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh)

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



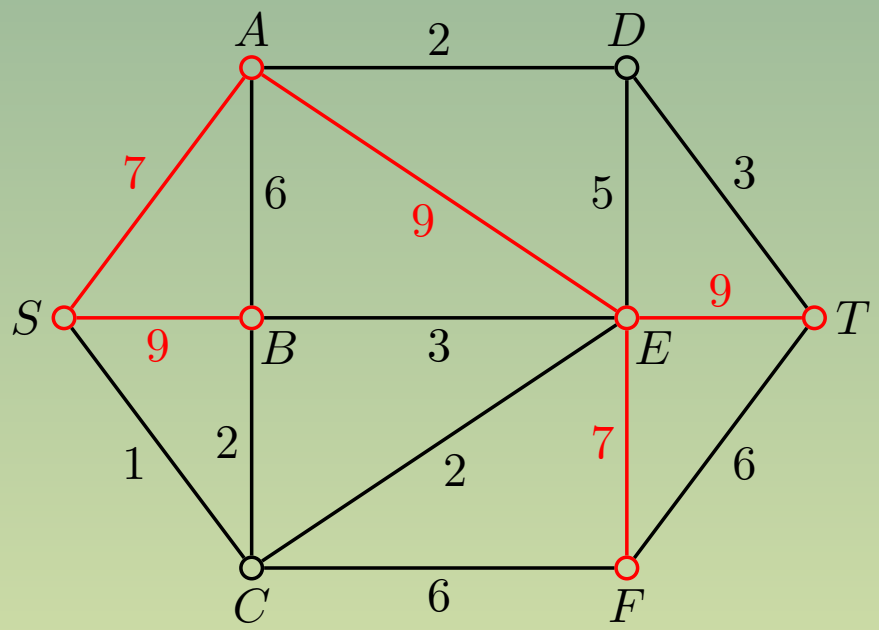
Opet promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh, a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh) i odaberemo među njima brid najveće težine. To je u ovom slučaju brid ET.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



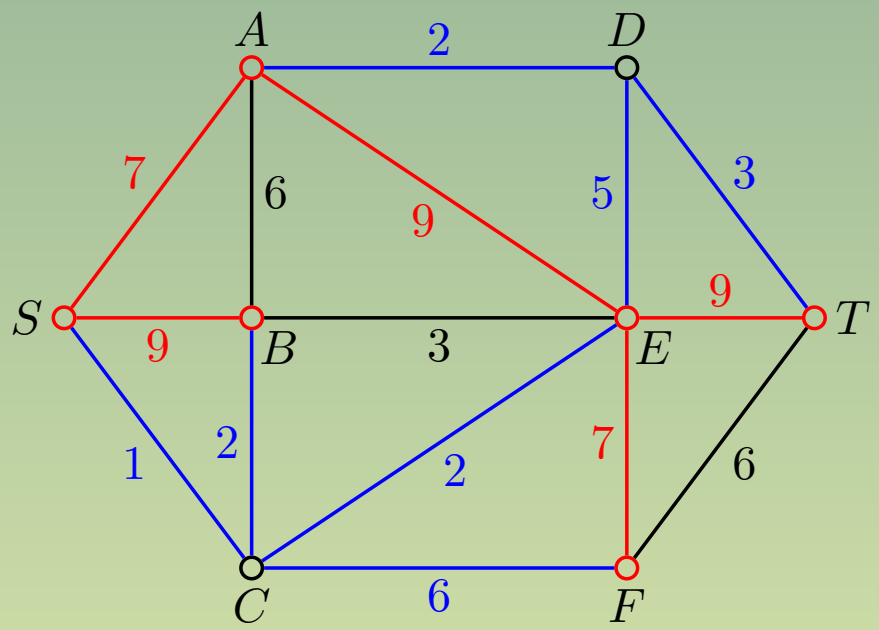
Opet promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh, a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh)

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



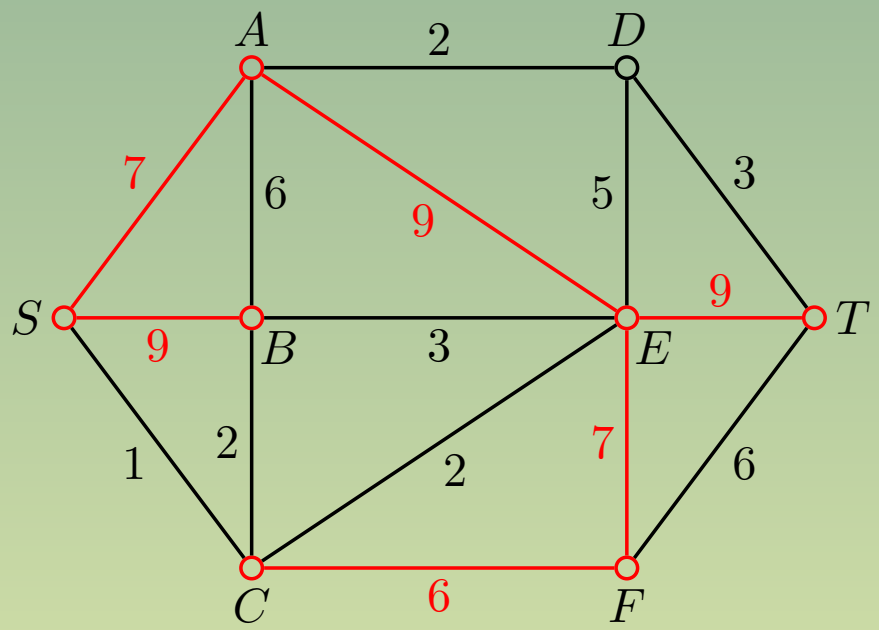
Opet promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh, a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh) i odaberemo među njima brid najveće težine. To je u ovom slučaju brid EF.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



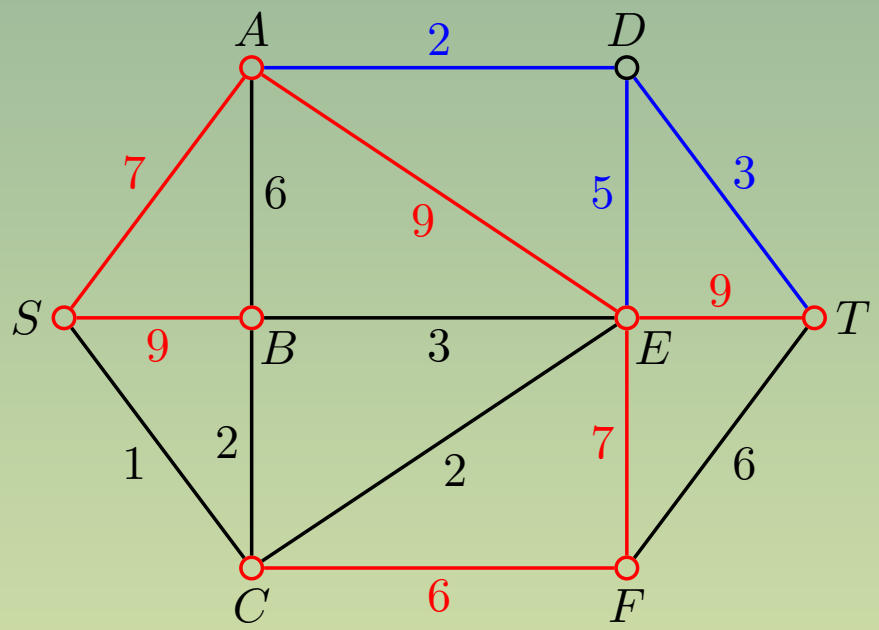
Opet promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh, a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh)

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



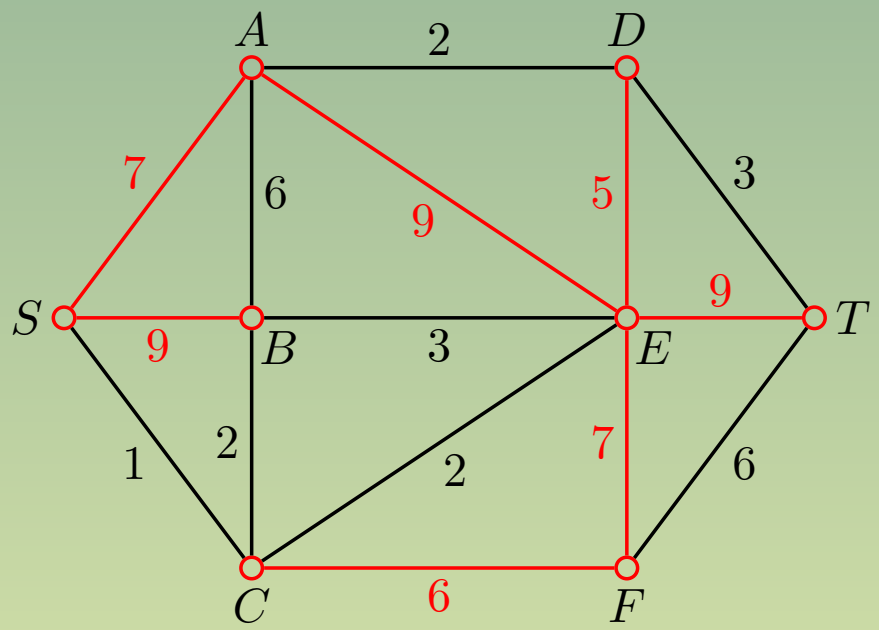
Opet promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh, a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh) i odaberemo među njima brid najveće težine. To je u ovom slučaju brid CF.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



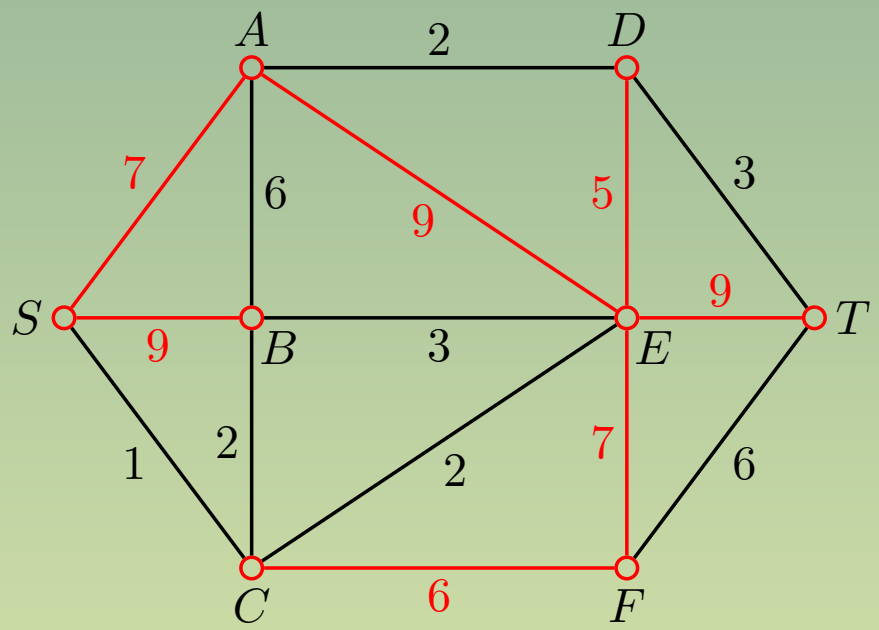
Opet promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh, a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh)

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



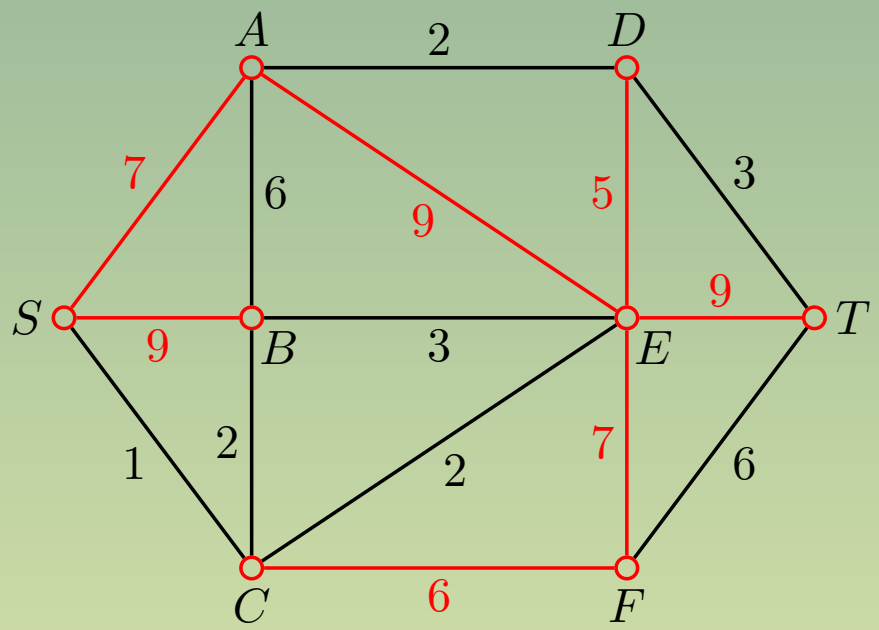
Opet promatramo sve bridove kojima je jedan kraj crveni vrh, a drugi kraj im je crni vrh (još neodabrani vrh) i odaberemo među njima brid najveće težine. To je u ovom slučaju brid DE.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Kako su svi vrhovi odabrani, dobiveno stablo je maksimalno razapinjuće stablo i ima težinu 52.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Čitav postupak ćemo zapisati u obliku tablice

objasni postupak

početni vrh: B

korak	1	2	3	4	5	6	7
brid	BS	AS	AE	ET	EF	CF	DE
težina	9	7	9	9	7	6	5

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.79.

Objasnite kako možemo Kruskalov i Primov algoritam primijeniti na traženje razapinjućeg stabla u povezanom netežinskom grafu.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.79.

Objasnite kako možemo Kruskalov i Primov algoritam primijeniti na traženje razapinjućeg stabla u povezanom netežinskom grafu.

Rješenje.

Svim bridovima pridružimo težine 1 i zatim primijenimo Kruskalov ili Primov algoritam.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.80.

Na koji način možemo primijeniti Kruskalov ili Primov algoritam da bismo pronašli minimalno razapinjuće stablo u povezanom grafu koje sadrži brid e? Diskutirajte težinski i netežinski slučaj.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.80.

Na koji način možemo primijeniti Kruskalov ili Primov algoritam da bismo pronašli minimalno razapinjuće stablo u povezanom grafu koje sadrži brid e? Diskutirajte težinski i netežinski slučaj.

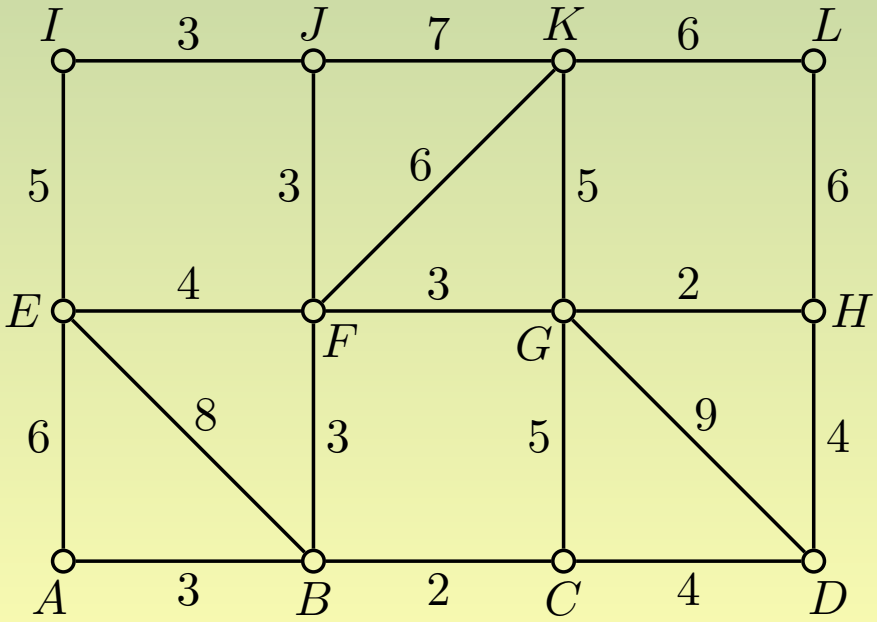
Rješenje.

Ovdje zapravo želimo da unaprijed zadani brid pripada razapinjućem stablu iako možda na kraju to stablo ne mora biti najmanje težine. Ideja je da ako iz nekog razloga želimo da neki brid pripada "minimalnom" razapinjućem stablu, onda ga ubacimo, a nakon toga uzimamo bridove tako da dobijemo na kraju razapinjuće stablo najmanje težine koje sadrži unaprijed zadani brid. Ako je graf netežinski, tada bridu e pridružimo težinu 1, a svim ostalim bridovima težine 2. Ako je graf težinski, najprije osiguramo da brid e ima najmanju težinu, a svi ostali bridovi imaju veće težine. Ukoliko je potrebno, privremeno promijenimo bridovima težine.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.81.

Poduzeće za gradnju cesta ima veliki plan da poveže novim cestama 12 gradova. Neke od tih gradova žele direktno povezati cestom, a neke ne. Na donjem grafu su prikazane pojedine poveznice i njihova cijena izgradnje. Poduzeće želi potrošiti što manje novaca, a s druge strane želi da svaka dva grada budu povezana novom cestom, ako ne direktno, onda barem preko drugih gradova. Stoga od nekih cesta treba odustati. Na koji način povezati gradove da se prođe što jeftinije?

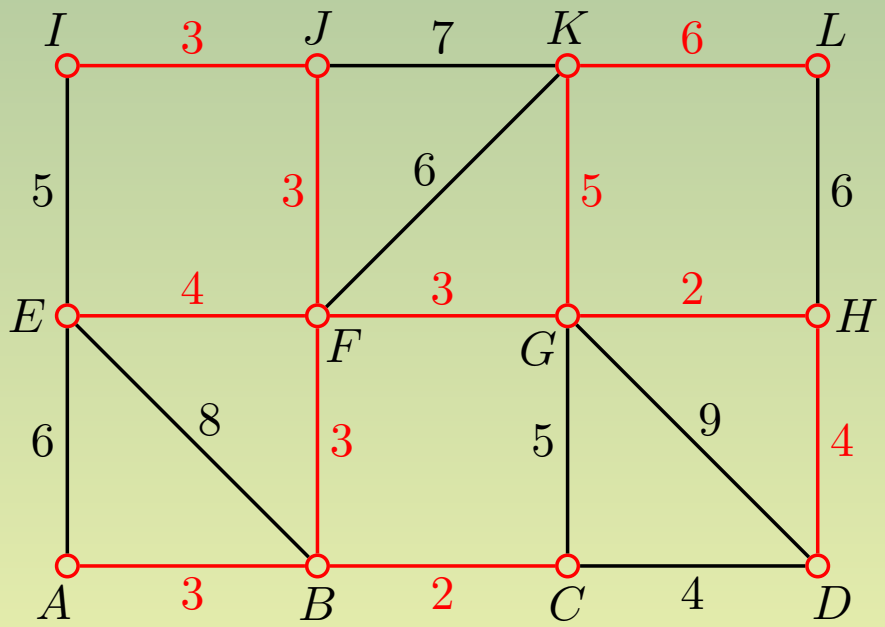


Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Rješenje.

Zapravo treba pronaći jedno minimalno razapinjuće stablo.

Koristit ćemo Kruskalov algoritam.



korak	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
brid	BC	GH	FG	BF	FJ	IJ	AB	EF	HD	GK	KL
težina	2	2	3	3	3	3	3	4	4	5	6

Stabla

Def. i karakterizacije

Riješeni primjeri

Korijenska stabla

Bin. stabla i alg. izrazi

Stablo sortiranja

Sortiranje u parcijalno uređenom skupu

Hrpa

Razapinjuća stabla

Rekurzija za raz. stabla

Riješeni primjeri

Matrični teorem o stablima

Teoretski primjeri

DFS i BFS algoritam

DFS algoritam

BFS algoritam

Povezanost grafa

Kruskal i Prim

Kruskalov algoritam

Implementacija Kruskala

Primov algoritam

Implementacija Prima

Još o Ham. ciklusu

Još o Hamiltonovom ciklusu

Neka je G težinski Hamiltonov graf s Hamiltonovim ciklusom $\mathcal{H}$. Odstranimo li bilo koji vrh v iz G zajedno s njegovim susjednim bridovima, dobivamo podgrafove $G' \subseteq G$ i $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ pri čemu je $\mathcal{H}'$ razapinjuće stablo od G' ($\mathcal{H}'$ je zapravo put kroz sve vrhove iz G osim vrha v). Iz toga slijedi da je težina od $\mathcal{H}$ jednaka težini od $\mathcal{H}'$ uvećanoj za sumu težina dvaju bridova iz $\mathcal{H}$ koji su incidentni s v. Stoga je

$$w(\mathcal{H}) \geqslant w(\text{minimalno razapinjuće stablo od } G') +$$
$$+ \text{ suma težina dvaju bridova incidentnih s } v \text{ minimalnih težina}$$

Za različite odabire vrha v dobivamo različite donje ograde za minimalni Hamiltonov ciklus.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Već smo prije rekli da nije do sada poznat efikasni algoritam za traženje minimalnog Hamiltonovog ciklusa u potpunom težinskom grafu. Na ovom mjestu ćemo spomenuti jedan efikasan algoritam koji daje približni minimalni Hamiltonov ciklus i koji garantira da dobiveni Hamiltonov ciklus ima težinu koja nije veća od dvostruke težine minimalnog Hamiltonovog ciklusa (ovu činjenicu nećemo ovdje dokazivati, nego ćemo se u nju uvjeriti na konkretnim primjerima). Također, taj algoritam zahtijeva da u potpunom težinskom grafu vrijedi **nejednakost trokuta**, tj. da za sve vrhove v_1, v_2, v_3 vrijedi

$$w(v_1v_2) \leqslant w(v_1v_3) + w(v_3v_2).$$

Nearest insertion algoritam

ULAZ: Potpuni težinski graf u kojemu vrijedi nejednakost trokuta

IZLAZ: Približni minimalni Hamiltonov ciklus čija težina nije veća od dvostruke težine minimalnog Hamiltonovog ciklusa

1: Odaberi bilo koji vrh. Odaberi brid e najmanje težine koji je susjedan s odabranim vrhom i neka je $C = ee$. Na C gledamo kao na početni "ciklus".

2: Odaberi brid najmanje težine kojemu jedan kraj leži u C, a drugi kraj je izvan C. Neka je v taj vrh koji nije u C. Moguće je da imamo više izbora za takav brid.

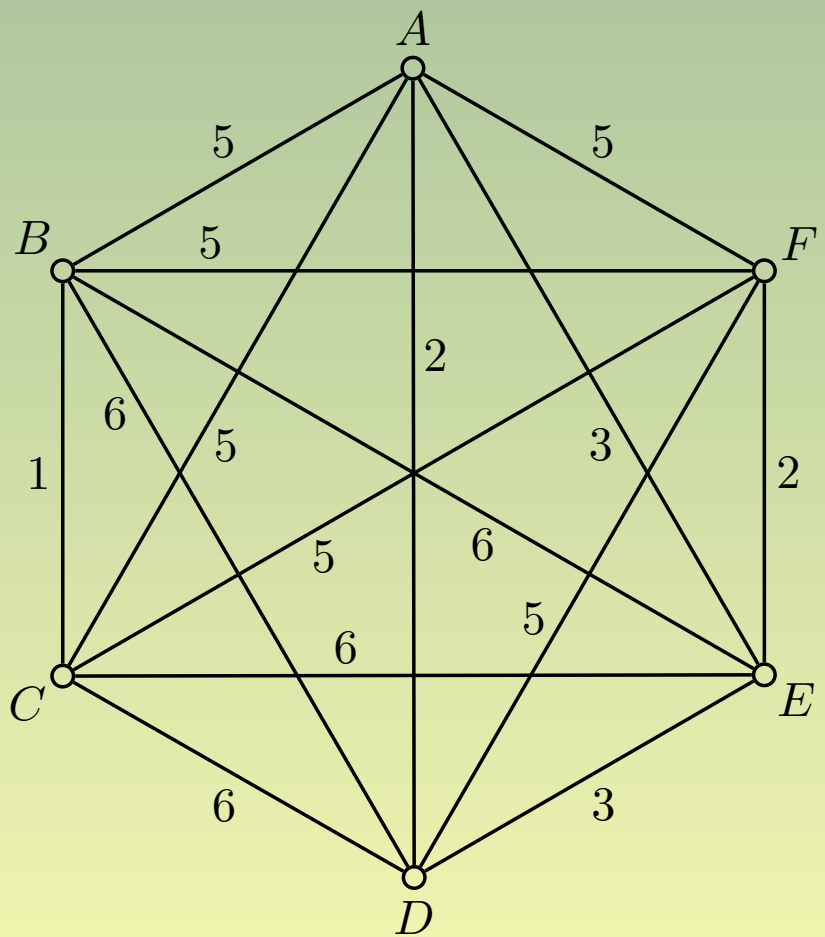
3: Cilj je povećati trenutni ciklus C tako da u njega umetnemo vrh v. Promatramo sve parove u_1 i u_2 susjednih vrhova u C i odaberemo onaj par za koji je vrijednost izraza $I = w(u_1v) + w(vu_2) - w(u_1u_2)$ minimalna. Izraz I pokazuje za koliko se poveća težina ciklusa C kada u njega umetnemo vrh v. Ciklus C proširimo s vrhom v tako da vrh v i bridove u_1v i u_2v dodamo u ciklus C, a iz njega izbacimo brid u_1u_2.

4: Ponavljaj korake 2) i 3) tako dugo dok ciklus C ne sadrži sve vrhove zadanog grafa.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.82.

Zadan je težinski potpuni graf



Stabla

Def. i karakterizacije

Riješeni primjeri

Korijenska stabla

Bin. stabla i alg. izrazi

Stablo sortiranja

Sortiranje u parcijalno uređenom skupu

Hrpa

Razapinjuća stabla

Rekurzija za raz. stabla

Riješeni primjeri

Matrični teorem o stablima

Teoretski primjeri

DFS i BFS algoritam

DFS algoritam

BFS algoritam

Povezanost grafa

Kruskal i Prim

Kruskalov algoritam

Implementacija Kruskala

Primov algoritam

Implementacija Prima

Još o Ham. ciklusu

a. *Brisanjem vrhova pronađite što je moguće bolju donju ogradu za minimalni Hamiltonov ciklus.*

b. *Pronađite minimalni Hamiltonov ciklus. Kolika mu je težina?*

c. *Pomoću nearest insertion algoritma pronađite približni minimalni Hamiltonov ciklus.*

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

a. *Brisanjem vrhova pronađite što je moguće bolju donju ogradu za minimalni Hamiltonov ciklus.*

b. *Pronađite minimalni Hamiltonov ciklus. Kolika mu je težina?*

c. *Pomoću nearest insertion algoritma pronađite približni minimalni Hamiltonov ciklus.*

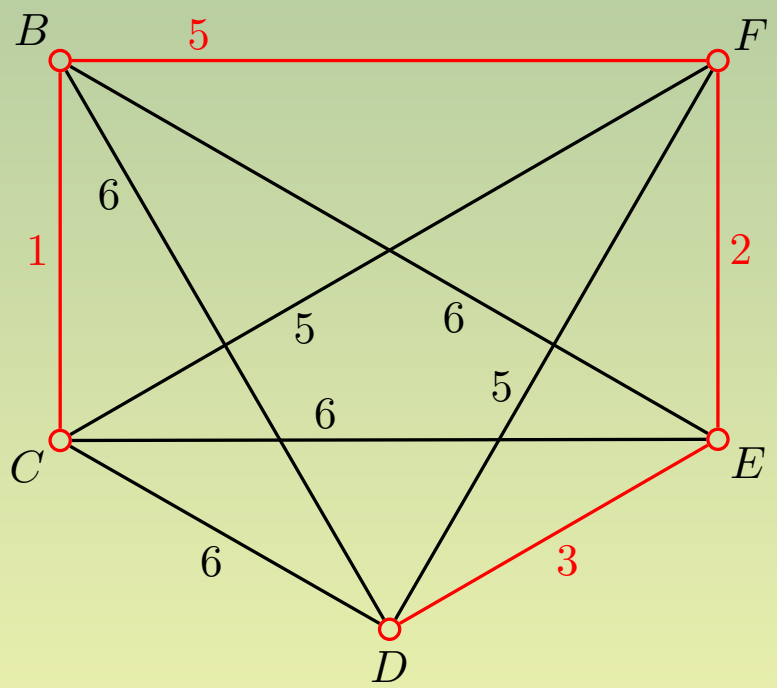
Rješenje.

a. Neka je $\mathcal{H}$ minimalni Hamiltonov ciklus. Za svaki vrh $v \in \{A, B, C, D, E, F\}$ koristit ćemo relaciju

$$w(\mathcal{H}) \geqslant w(\text{minimalno razapinjuće stablo od } G - v) +$$

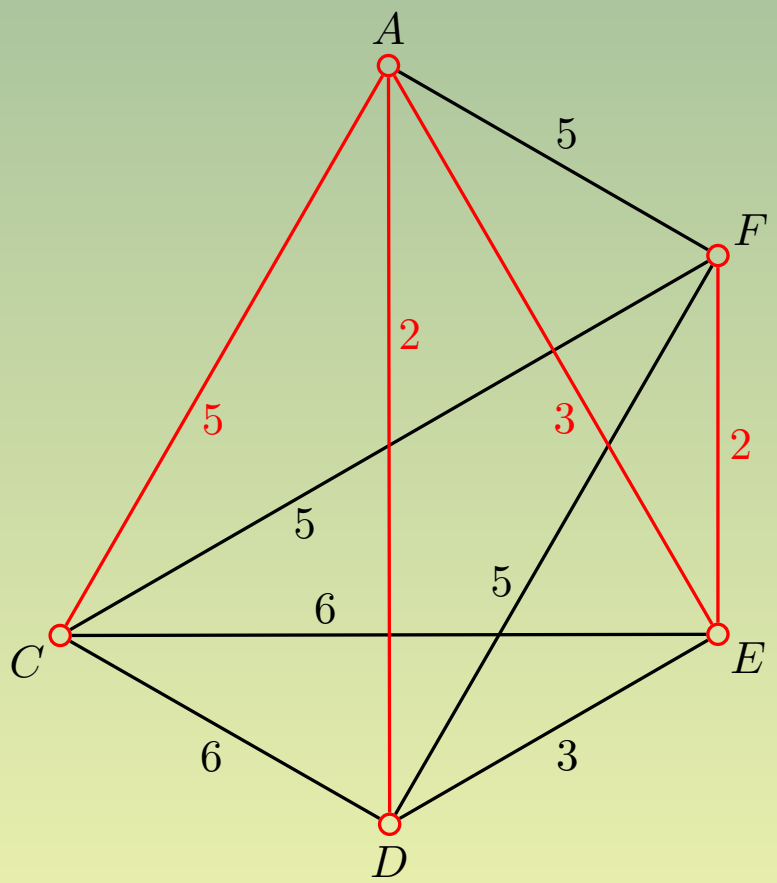
$$+ \text{ suma težina dvaju bridova incidentnih s } v \text{ minimalnih težina}$$

Brisanje vrha A



$$w(\mathcal{H}) \geqslant 11 + w(AD) + w(AE) = 11 + 2 + 3 = 16$$

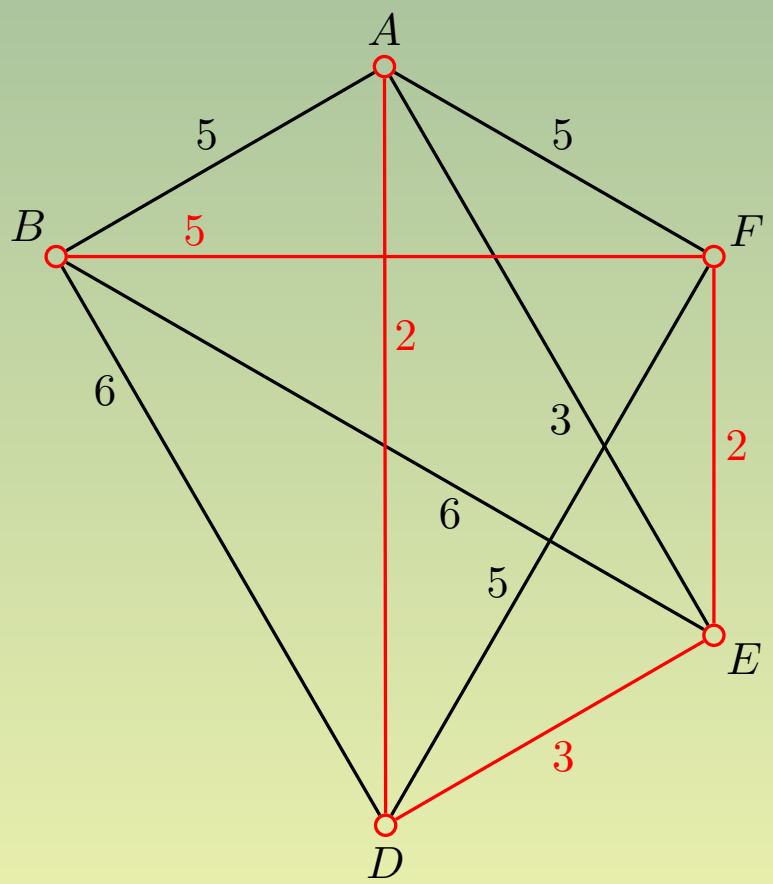
Brisanje vrha B



$$w(\mathcal{H}) \geqslant 12 + w(BC) + w(BA) = 12 + 1 + 5 = 18$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

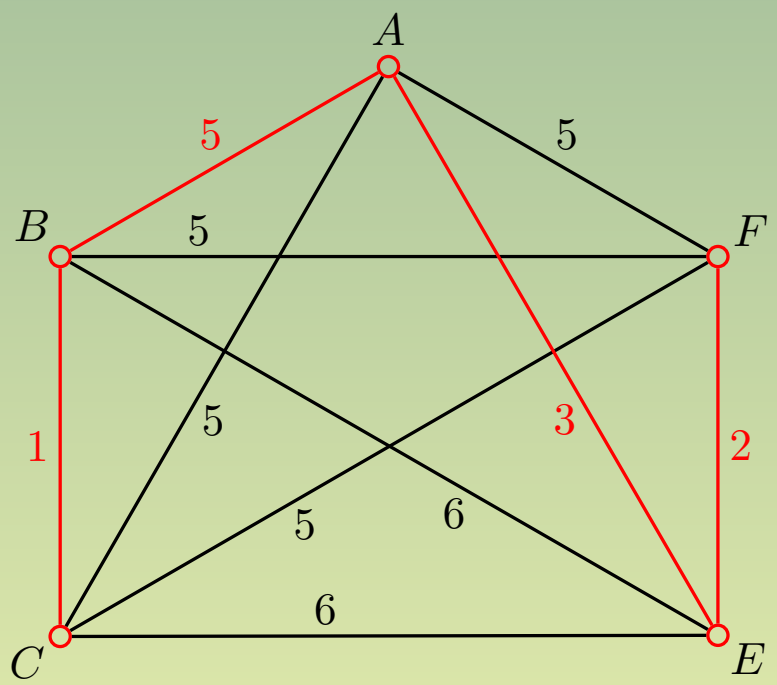
Brisanje vrha C



$$w(\mathcal{H}) \geqslant 12 + w(CB) + w(CA) = 12 + 1 + 5 = 18$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

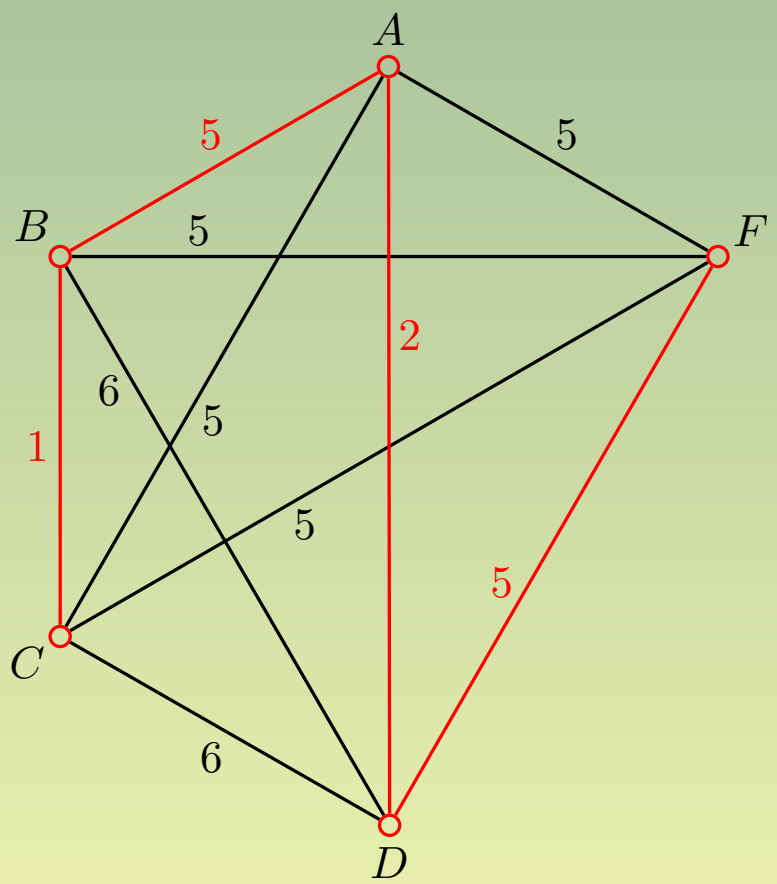
Brisanje vrha D



$$w(\mathcal{H}) \geqslant 11 + w(DA) + w(DE) = 11 + 2 + 3 = 16$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

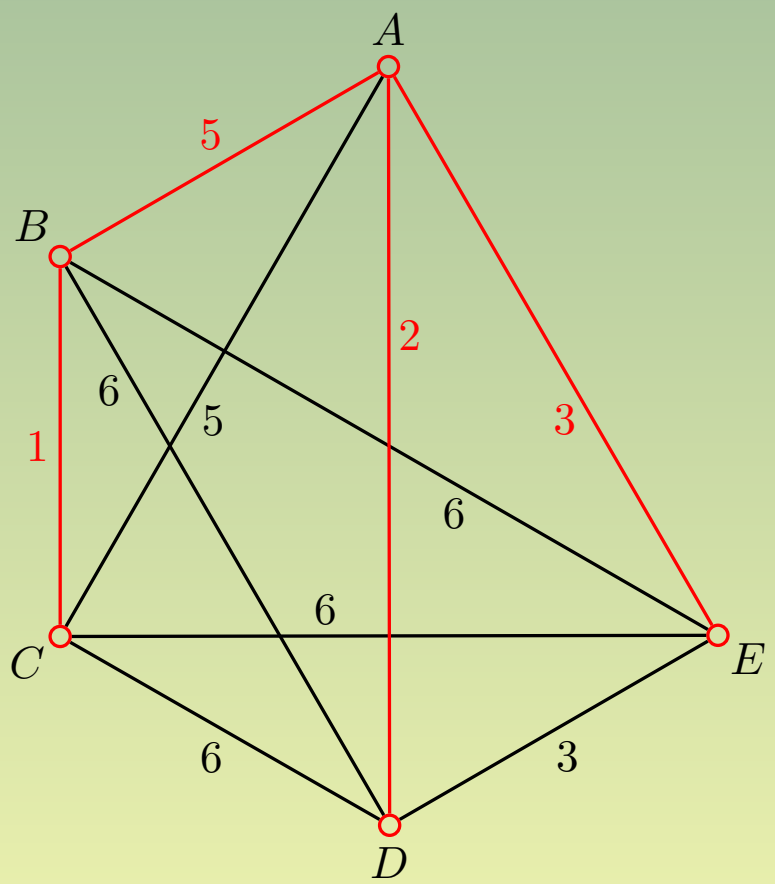
Brisanje vrha E



$$w(\mathcal{H}) \geqslant 13 + w(EF) + w(EA) = 13 + 2 + 3 = 18$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Brisanje vrha F



$$w(\mathcal{H}) \geqslant 11 + w(FE) + w(FA) = 11 + 2 + 5 = 18$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

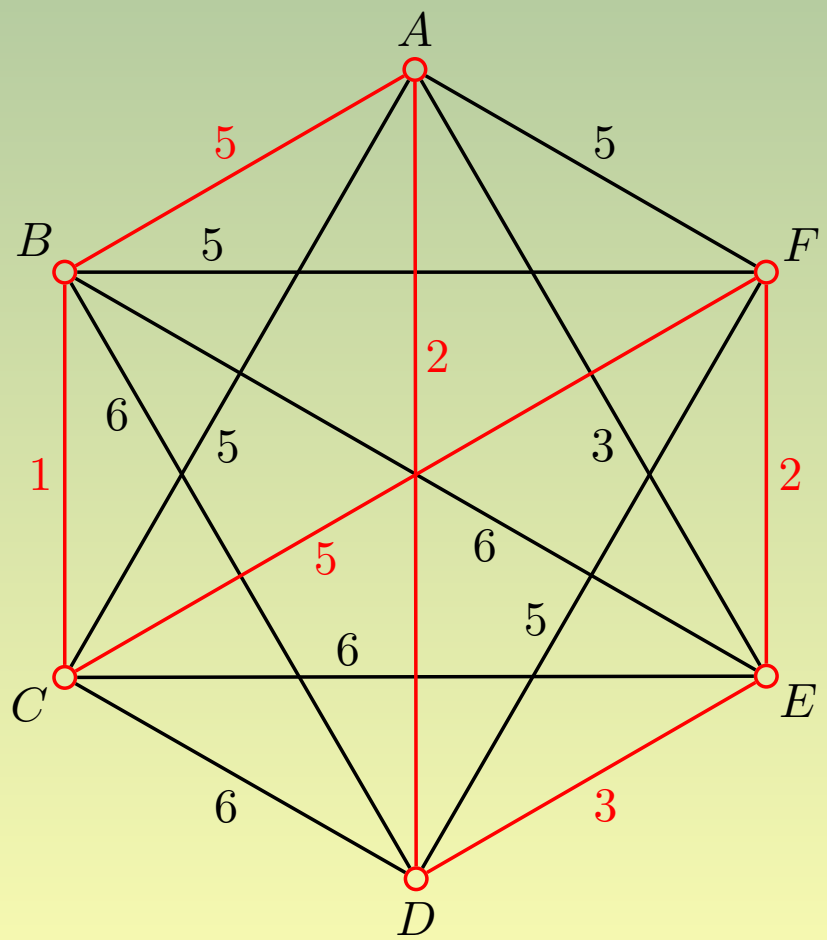
Sada na kraju uzmemo najveću od svih donjih ograda, tj.

$$w(\mathcal{H}) \geqslant \max\{16, 18, 18, 16, 18, 18\} = 18.$$

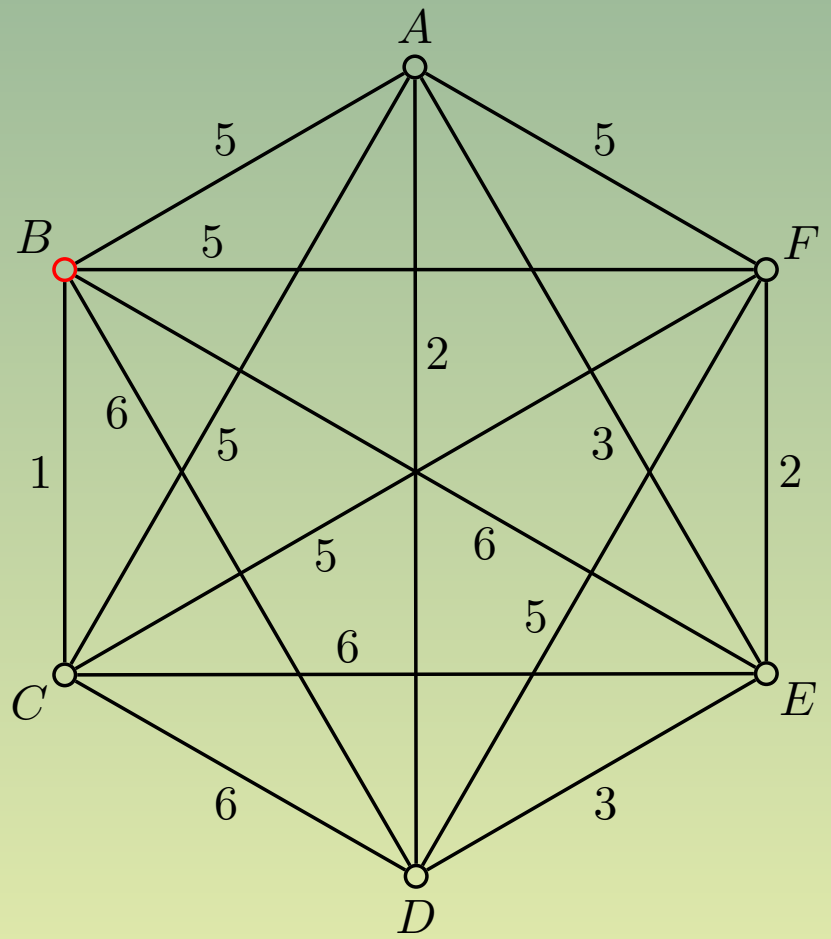
Dakle, na ovaj način dobivamo da minimalni Hamiltonov ciklus u zadanom grafu ima težinu barem 18, a možda i veću od 18.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

- Kako smo dobili da je $w(\mathcal{H}) \geqslant 18$, a na donjoj slici jest jedan Hamiltonov ciklus čija težina je 18, slijedi da je $ABCFEDA$ ujedno minimalni Hamiltonov ciklus.



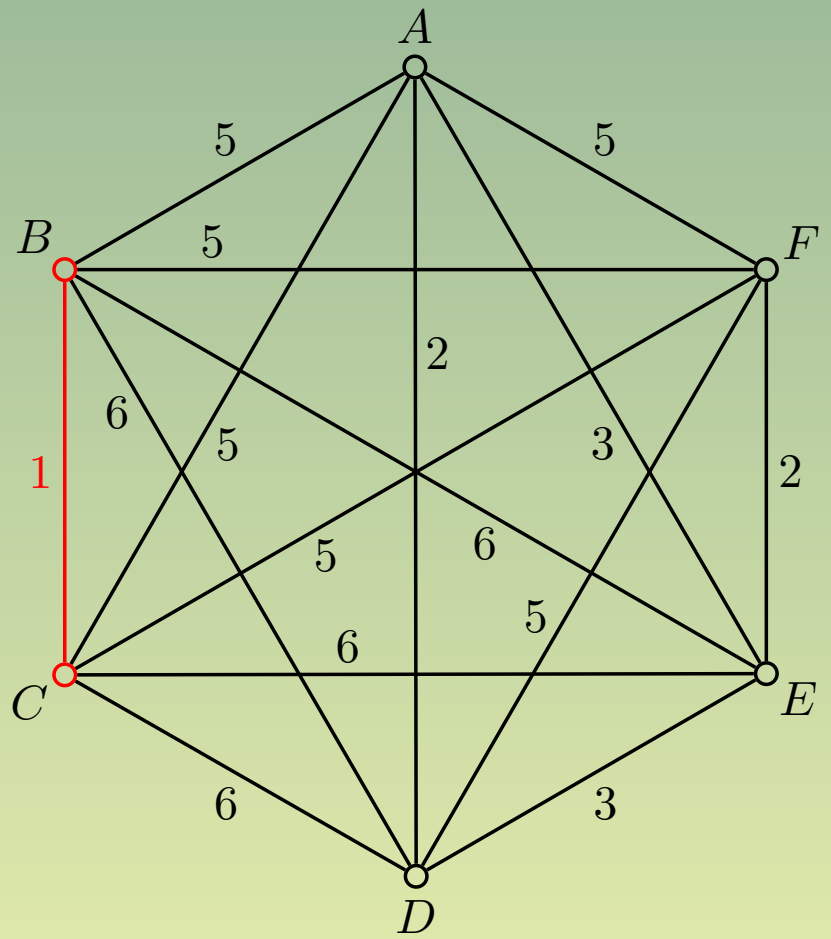
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Odaberemo bilo koji vrh, npr. vrh B.

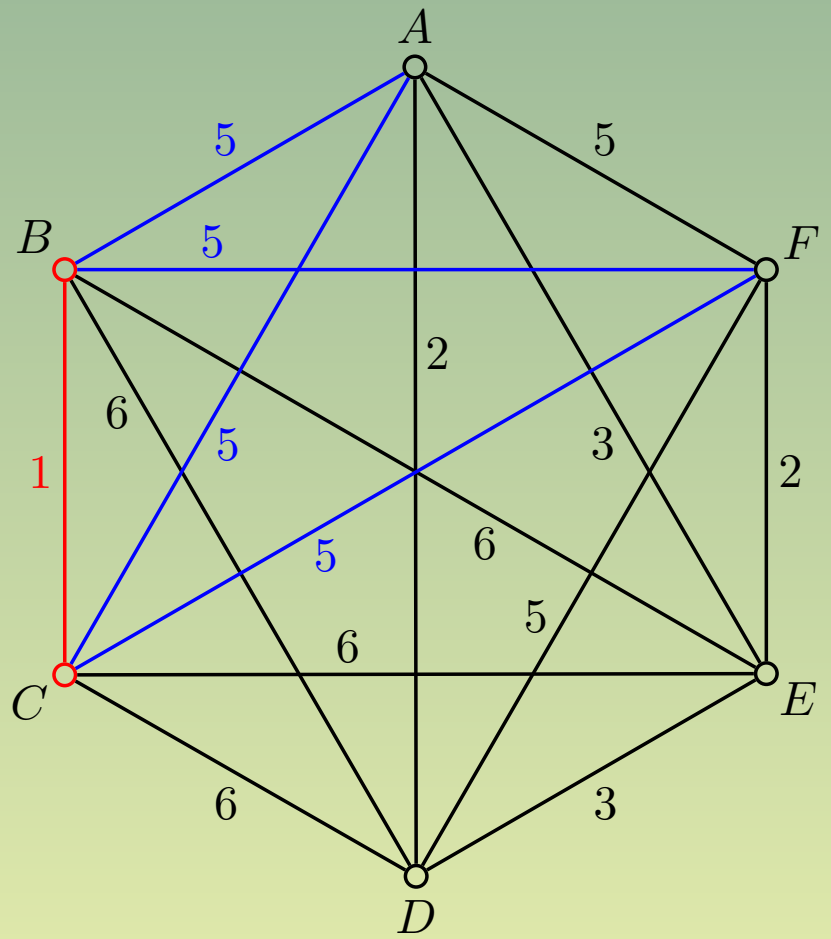
konačno rješenje

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Zatim odaberemo brid najmanje težine susjedan s vrhom B, a to je brid BC. Na taj način dobivamo početni ciklus $\mathcal{C} = BCB$.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Tražimo brid najmanje težine kojemu je jedan kraj u $\mathcal{C}$, a drugi izvan $\mathcal{C}$. Imamo četiri takva brida (plavi bridovi).

Stabla

Def. i karakterizacije

Riješeni primjeri

Korijenska stabla

Bin. stabla i alg. izrazi

Stablo sortiranja

Sortiranje u parcijalno uređenom skupu

Hrpa

Razapinjuća stabla

Rekurzija za raz. stabla

Riješeni primjeri

Matrični teorem o stablima

Teoretski primjeri

DFS i BFS algoritam

DFS algoritam

BFS algoritam

Povezanost grafa

Kruskal i Prim

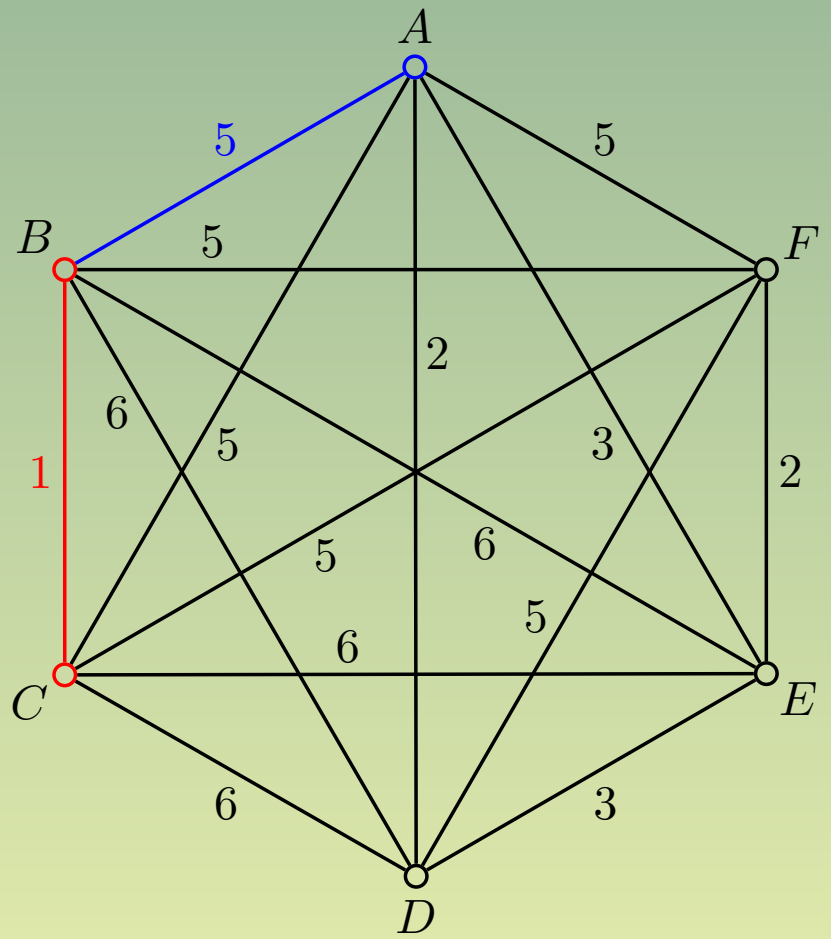
Kruskalov algoritam

Implementacija Kruskala

Primov algoritam

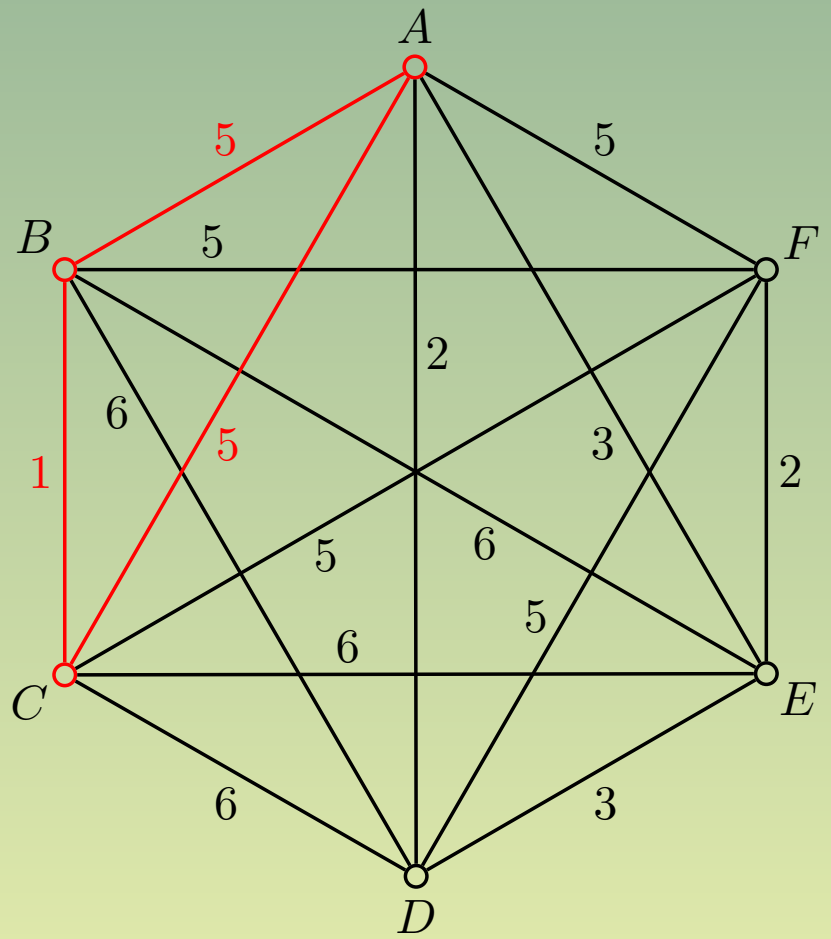
Implementacija Prima

Još o Ham. ciklusu



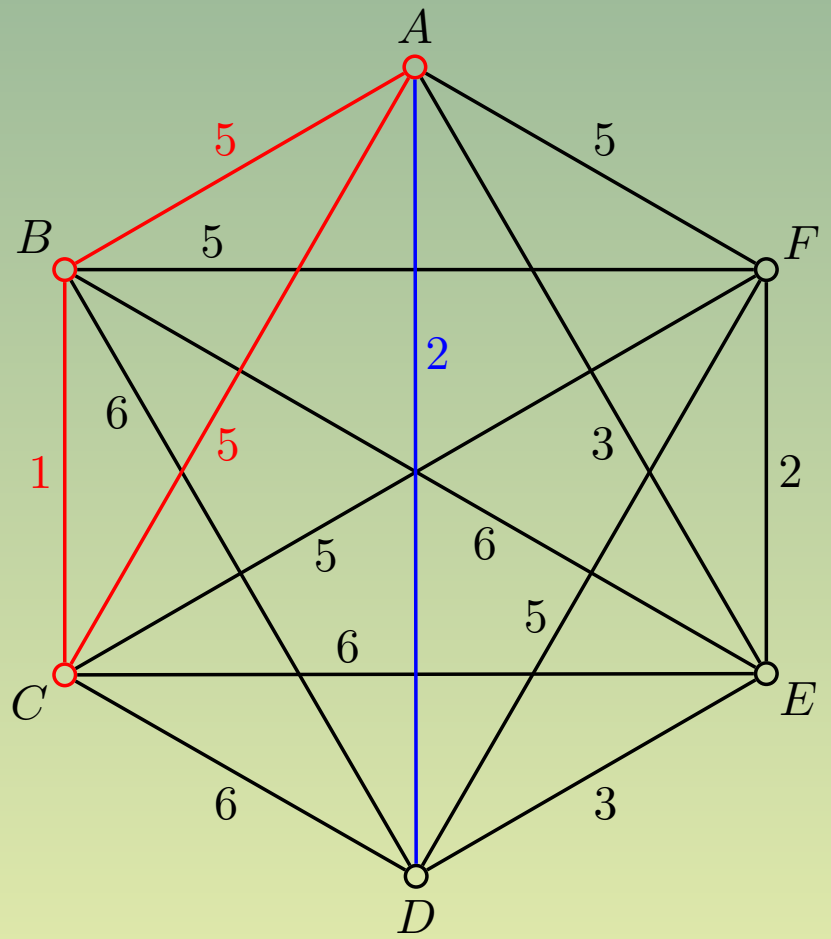
Odaberemo jednog od njih, npr. brid BA. Cilj nam je drugi kraj tog brida, vrh A, umetnuti u trenutni ciklus $\mathcal{C} = BCB$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



To napravimo tako da bridove AB i AC zajedno s vrhom A dodamo u trenutni ciklus i dobivamo novi ciklus $\mathcal{C} = BCAB$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

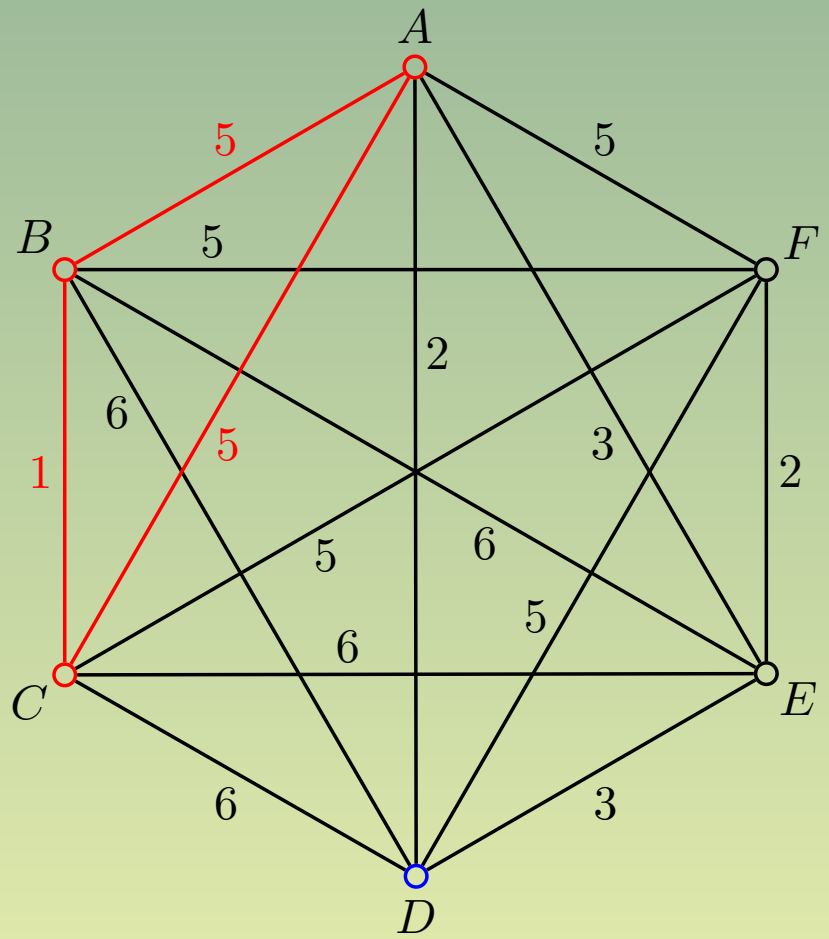


Tražimo brid najmanje težine kojemu je jedan kraj u $\mathcal{C}$, a drugi izvan $\mathcal{C}$. To je ovdje brid DA.

Diskretne strukture s teorijom grafova

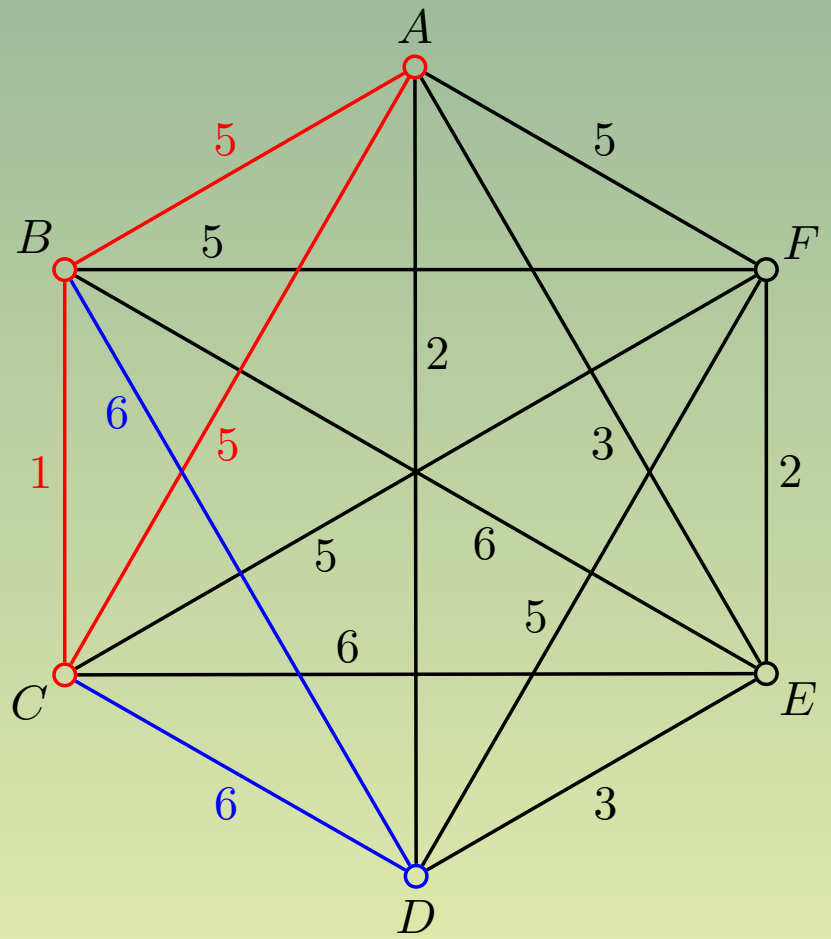
prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



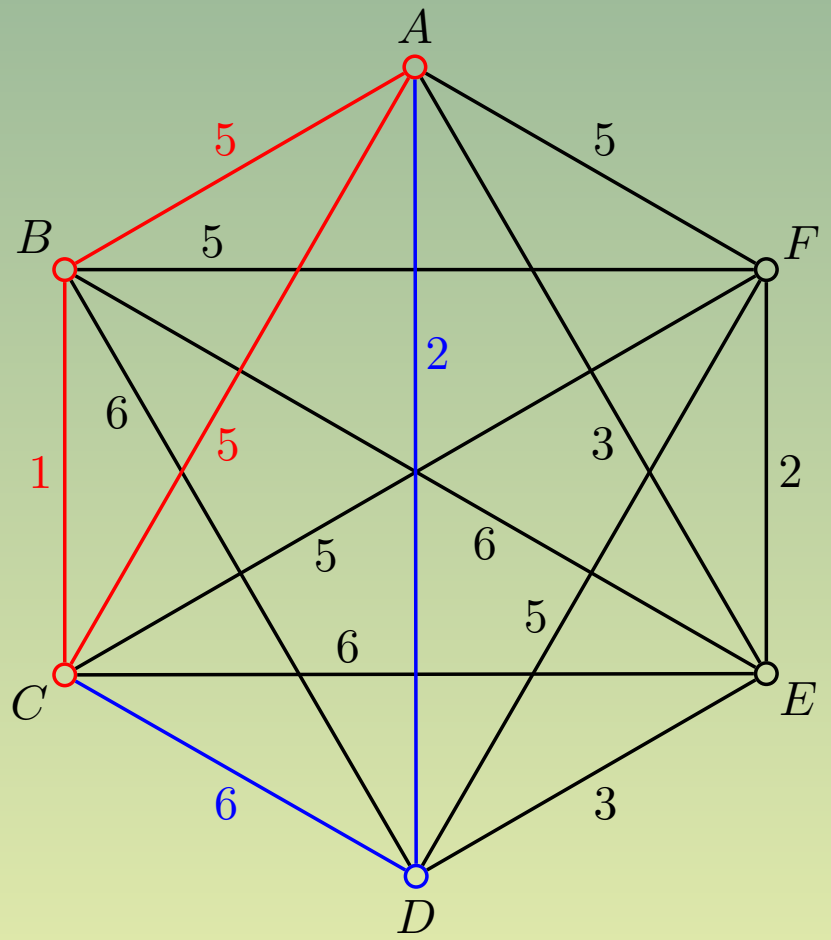
Sada želimo vrh D dodati u trenutni ciklus $\mathcal{C} = BCAB$. Stoga računamo sljedeće izraze.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



$$I_{BC} = 6 + 6 - 1 = 11$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

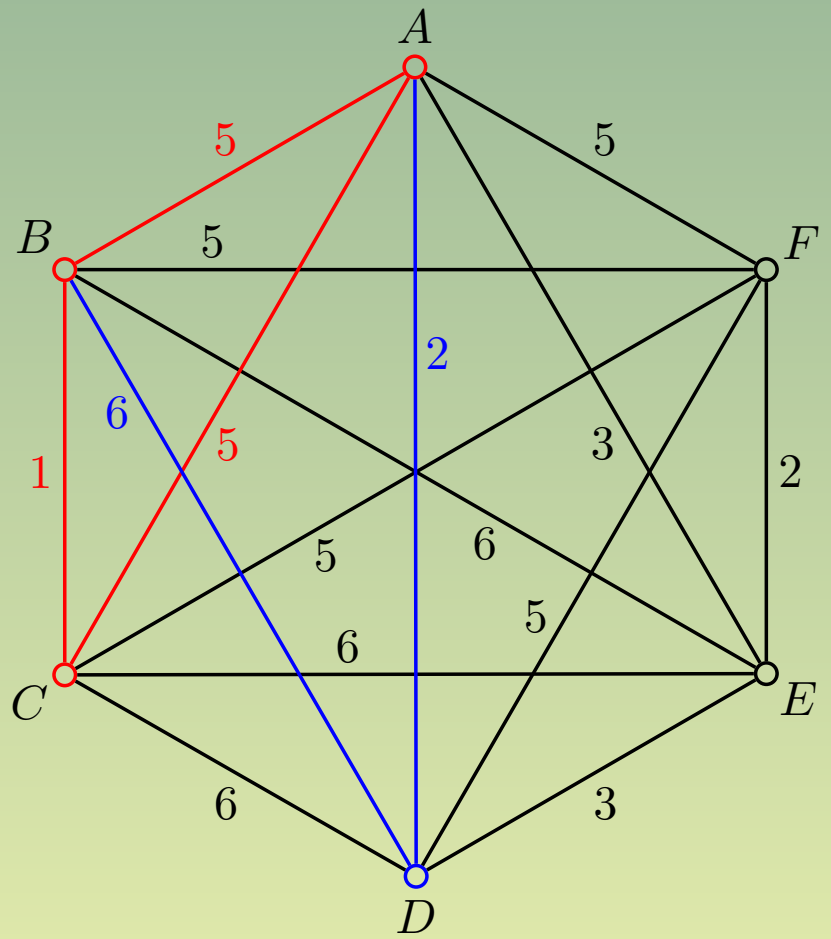


$$I_{BC} = 6 + 6 - 1 = 11, \; I_{CA} = 6 + 2 - 5 = 3$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

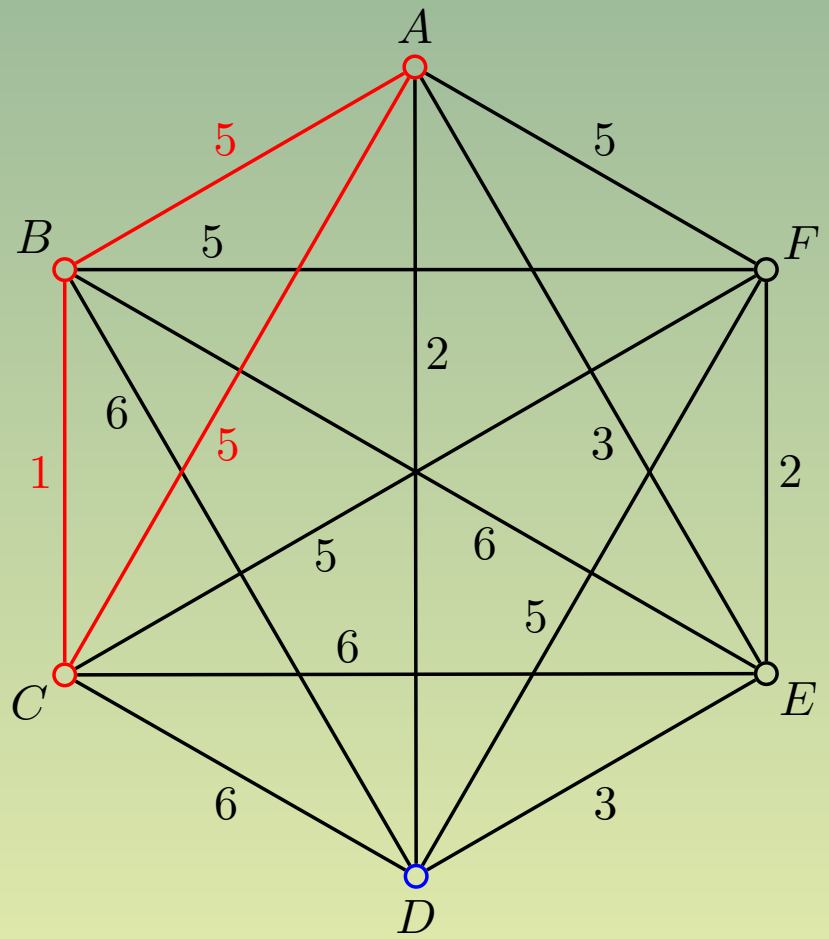
prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



$$I_{BC} = 6 + 6 - 1 = 11,\ I_{CA} = 6 + 2 - 5 = 3,\ I_{AB} = 6 + 2 - 5 = 3$$

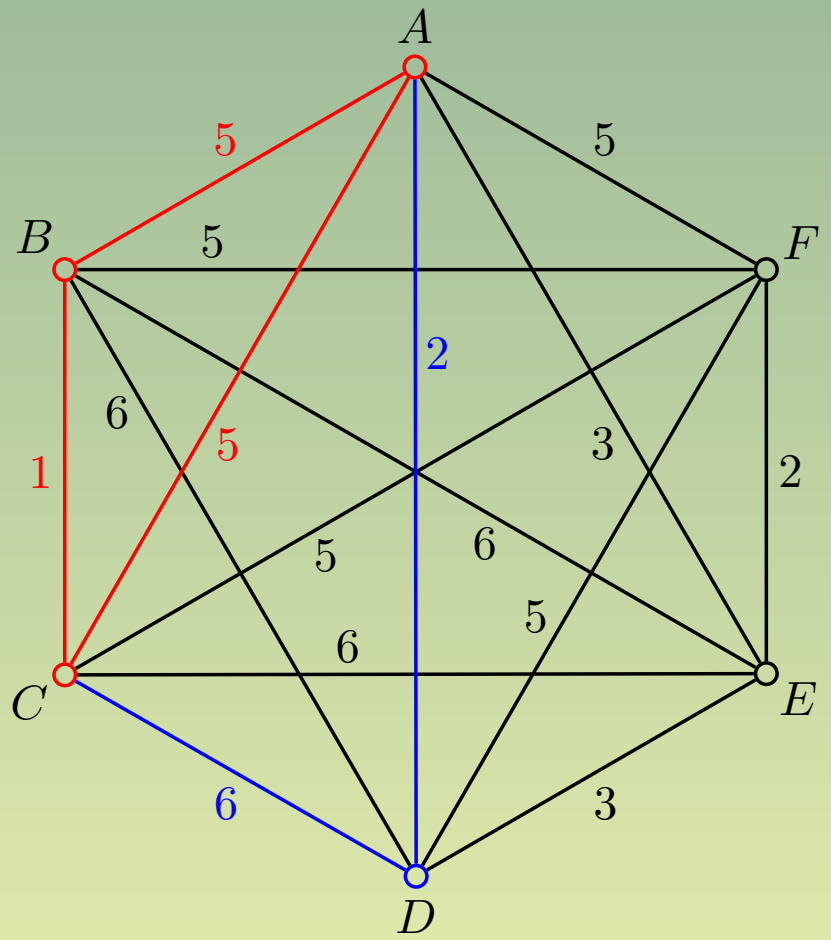
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



$I_{BC} = 6 + 6 - 1 = 11,\ I_{CA} = 6 + 2 - 5 = 3,\ I_{AB} = 6 + 2 - 5 = 3$

Odaberemo onaj izraz koji ima najmanju vrijednost. Ovdje su to dva takva izraza, I_{CA} i I_{AB}.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

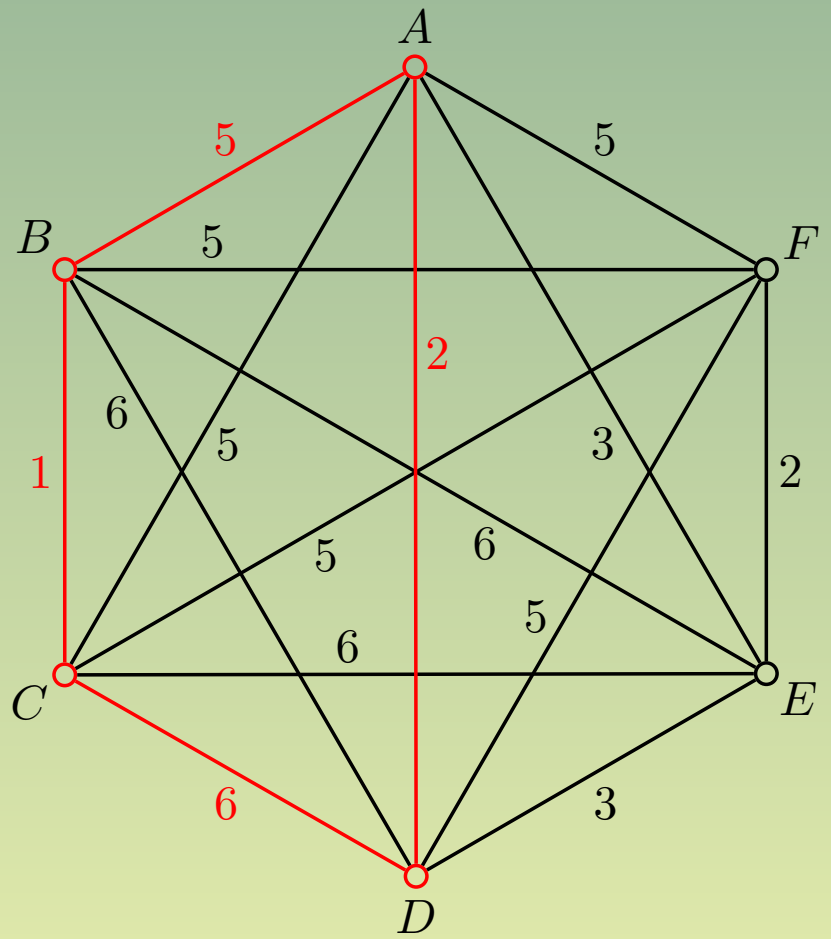


Uzmemo, npr. I_{CA}. Sada ćemo dobiti novi ciklus tako da iz trenutnog ciklusa izbrišemo brid CA, a dodamo bridove DC i DA zajedno s vrhom D.

Diskretne strukture s teorijom grafova

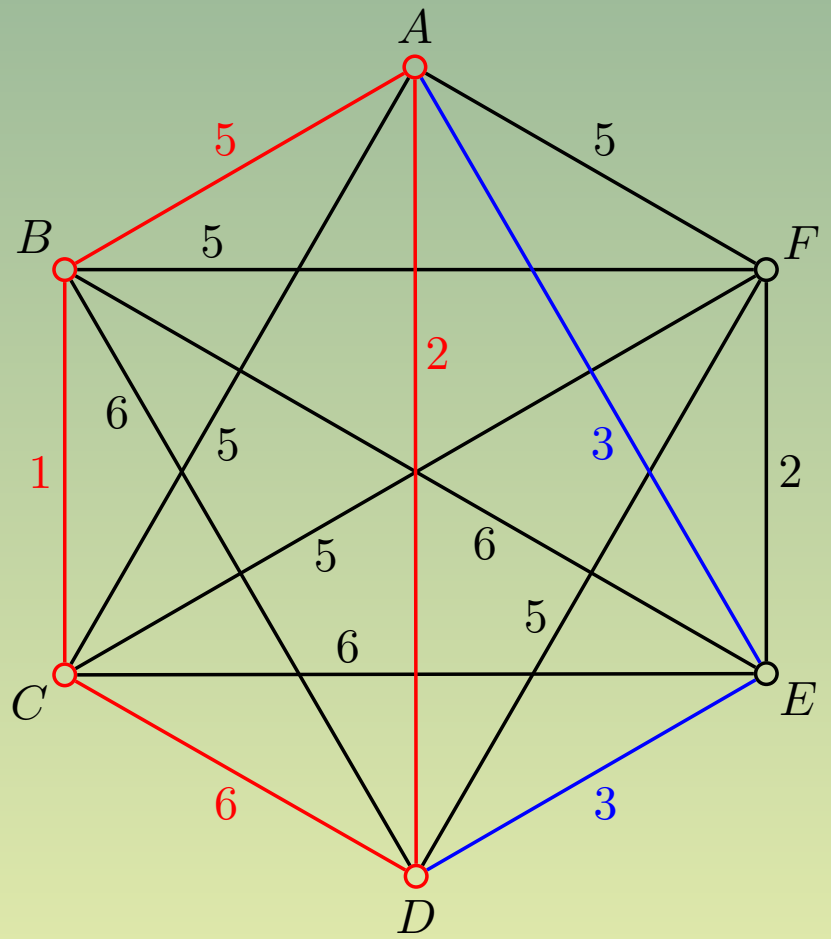
prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



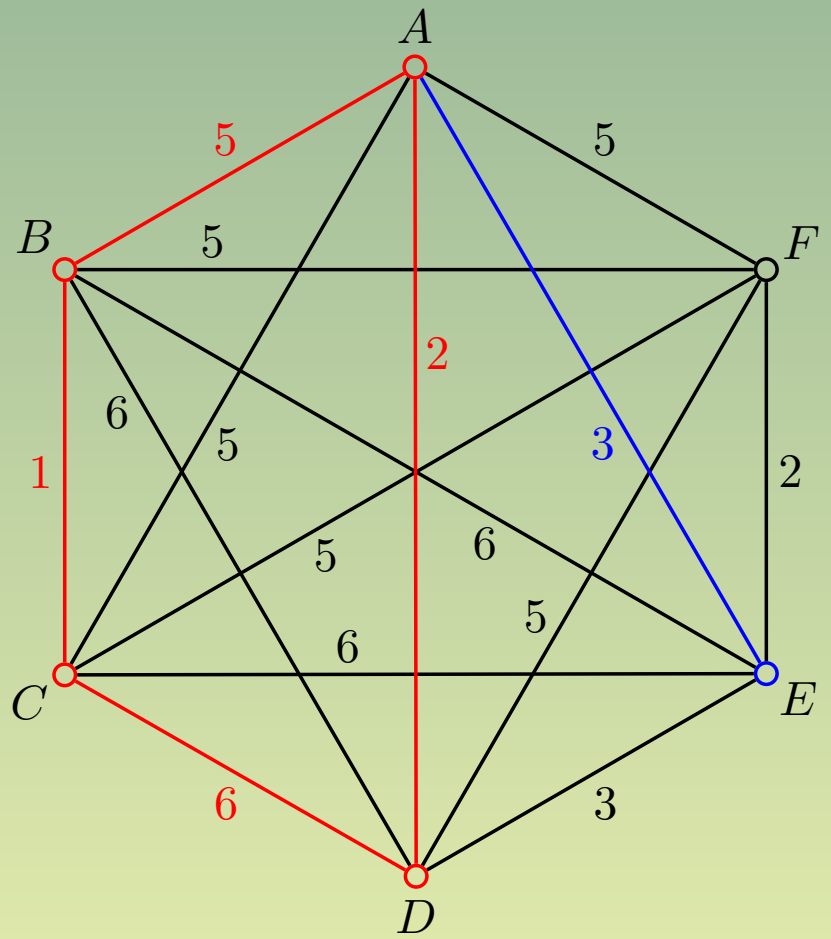
Na taj način dobivamo novi ciklus $\mathcal{C} = BCDAB$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



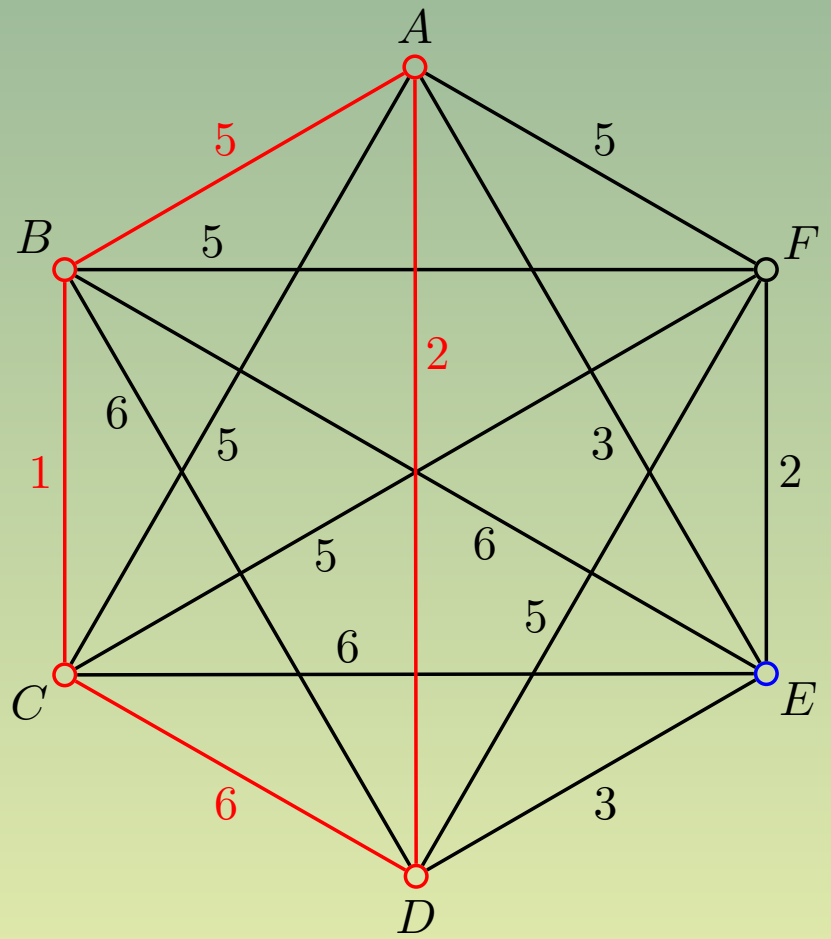
Tražimo brid najmanje težine kojemu je jedan kraj u $\mathcal{C}$, a drugi izvan $\mathcal{C}$. Ovdje imamo dva takva brida, AE i DE.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Odaberemo, npr. brid AE.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



Sada želimo vrh E dodati u trenutni ciklus $\mathcal{C}$ (crveni ciklus).

Stoga računamo sljedeće izraze.

Stabla

Def. i karakterizacije

Riješeni primjeri

Korijenska stabla

Bin. stabla i alg. izrazi

Stablo sortiranja

Sortiranje u parcijalno uređenom skupu

Hrpa

Razapinjuća stabla

Rekurzija za raz. stabla

Riješeni primjeri

Matrični teorem o stablima

Teoretski primjeri

DFS i BFS algoritam

DFS algoritam

BFS algoritam

Povezanost grafa

Kruskal i Prim

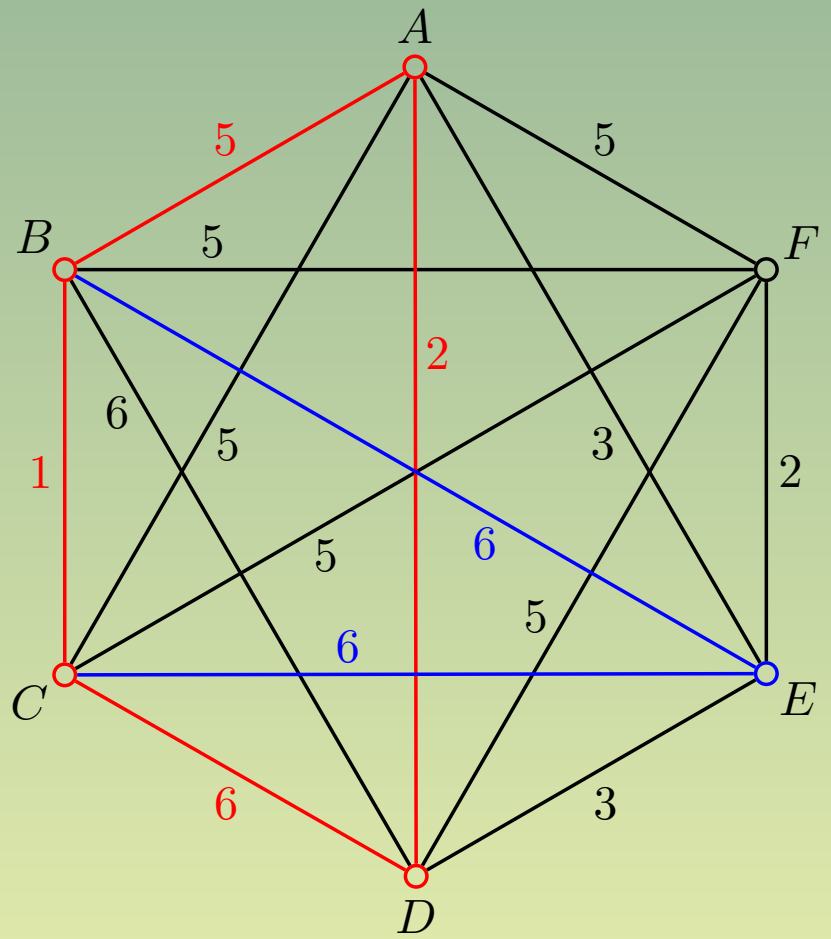
Kruskalov algoritam

Implementacija Kruskala

Primov algoritam

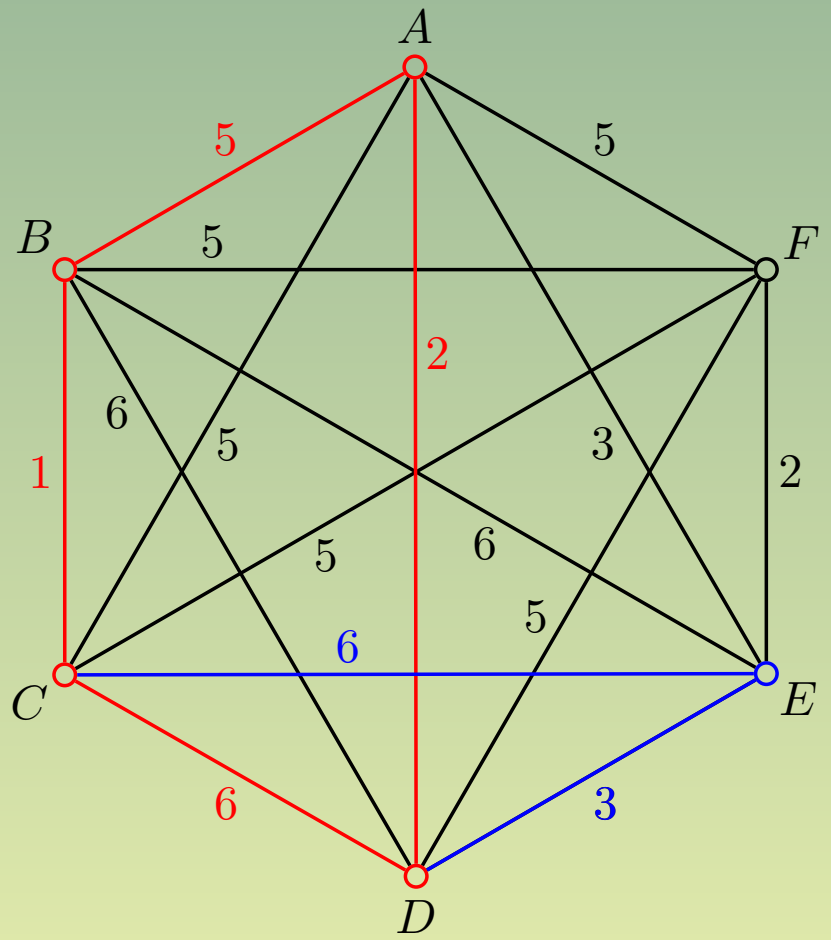
Implementacija Prima

Još o Ham. ciklusu

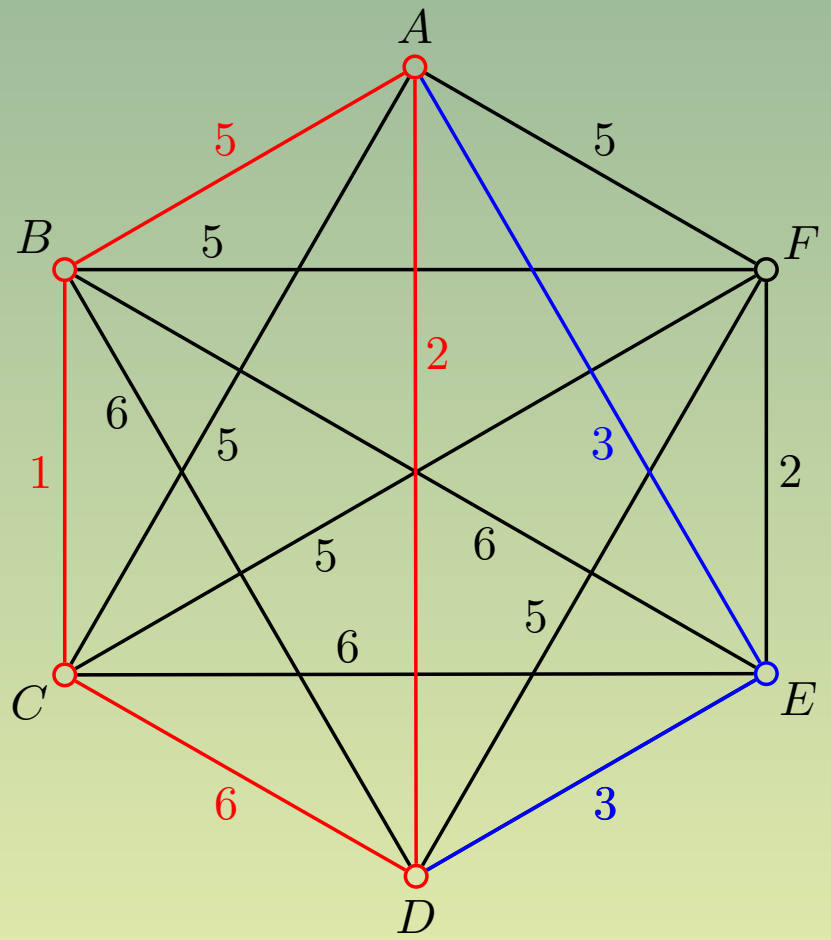


$$I_{BC} = 6 + 6 - 1 = 11$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

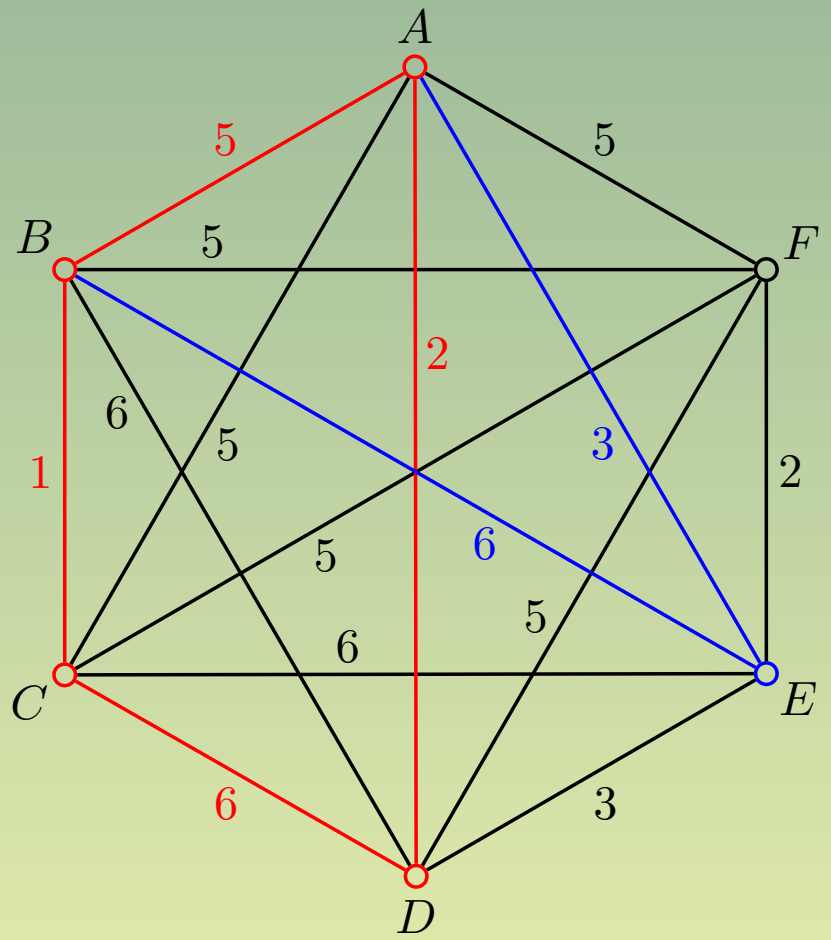


$$I_{BC} = 6 + 6 - 1 = 11, \; I_{CD} = 6 + 3 - 6 = 3$$



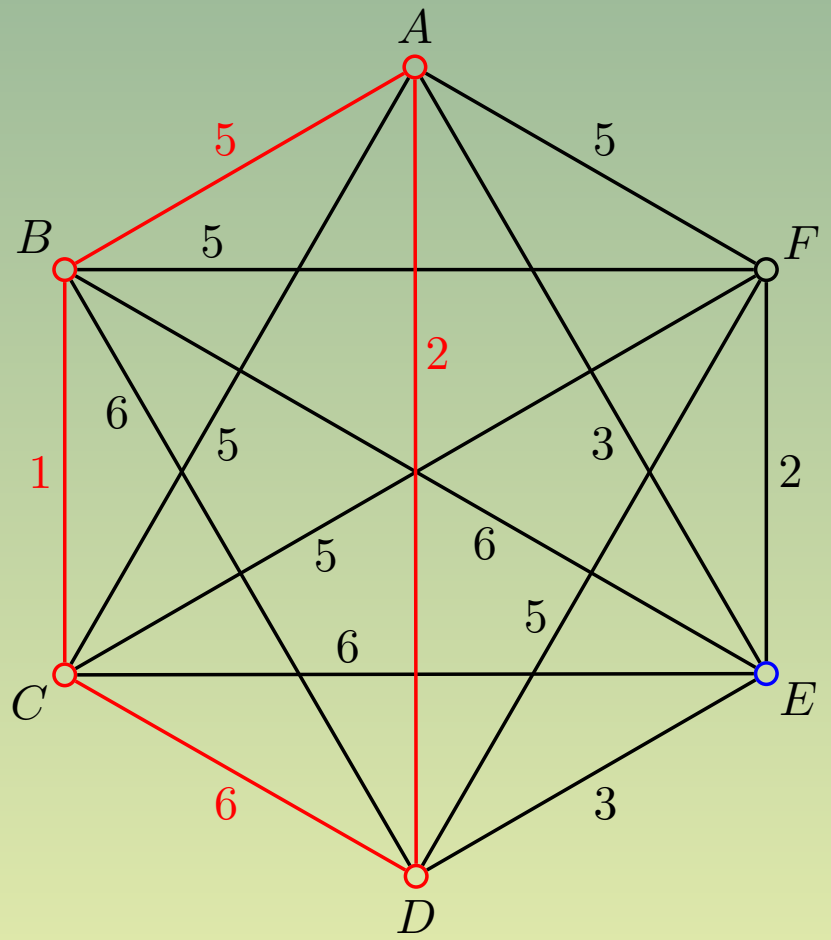
$$I_{BC} = 6 + 6 - 1 = 11,\ I_{CD} = 6 + 3 - 6 = 3,\ I_{DA} = 3 + 3 - 2 = 4$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



$$I_{BC} = 6 + 6 - 1 = 11,\ I_{CD} = 6 + 3 - 6 = 3,\ I_{DA} = 3 + 3 - 2 = 4,$$
$$I_{AB} = 3 + 6 - 5 = 4$$

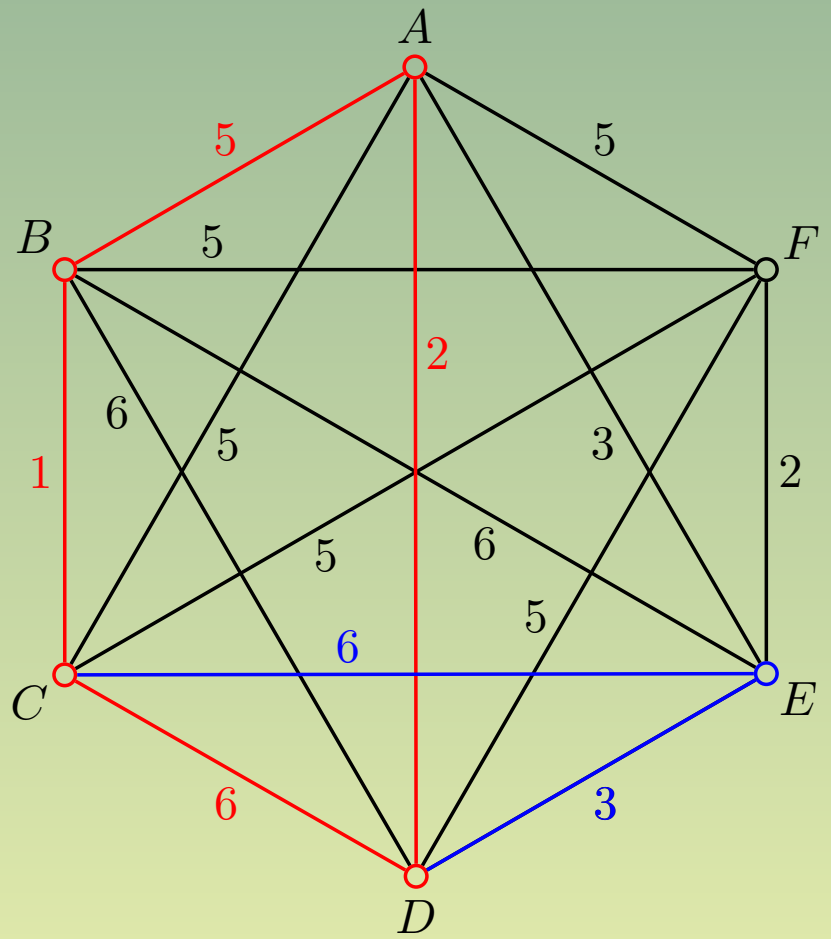
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



$I_{BC} = 6 + 6 - 1 = 11,\ I_{CD} = 6 + 3 - 6 = 3,\ I_{DA} = 3 + 3 - 2 = 4,$
$I_{AB} = 3 + 6 - 5 = 4$

Odaberemo najmanji od tih izraza, a to je ovdje I_{CD}.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

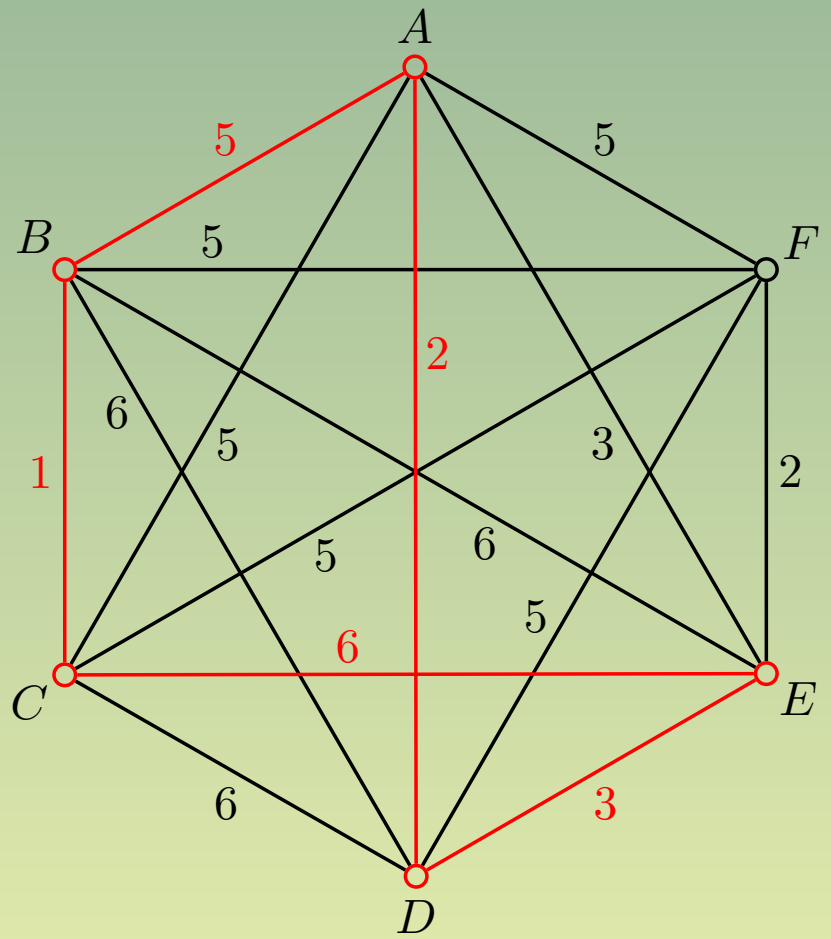


Sada ćemo dobiti novi ciklus tako da iz trenutnog ciklusa izbrišemo brid CD, a dodamo bridove EC i ED zajedno s vrhom E.

Diskretne strukture s teorijom grafova

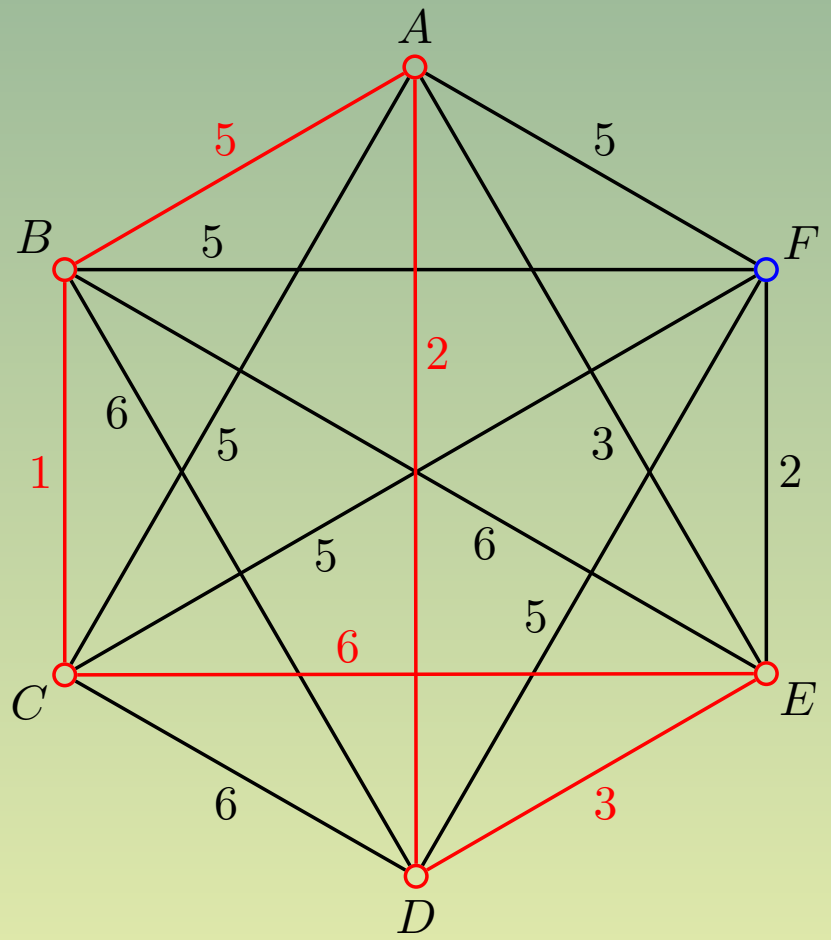
prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



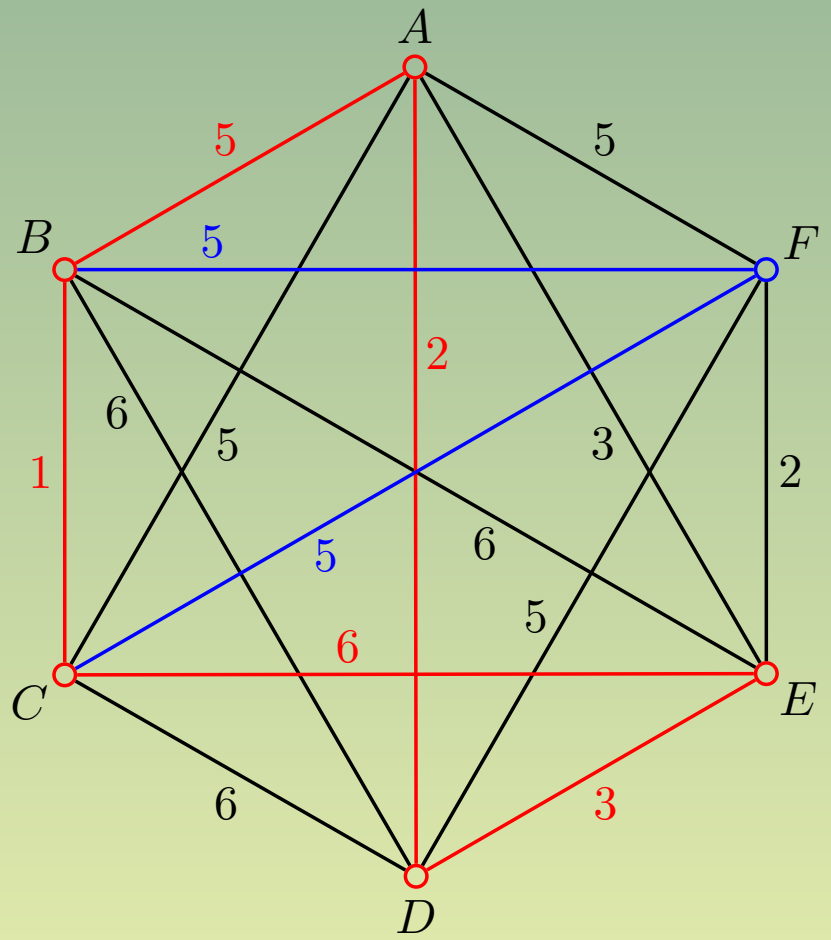
Na taj način dobivamo novi ciklus $\mathcal{C} = BCEDAB$.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



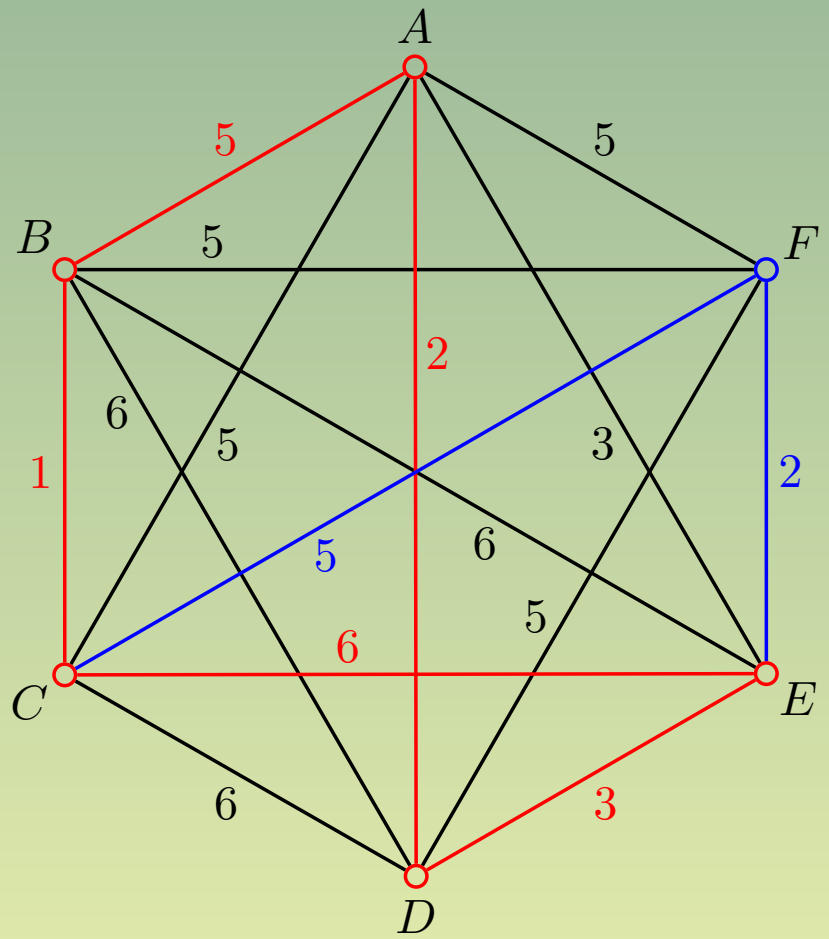
Još samo trebamo dodati vrh F u trenutni ciklus $\mathcal{C}$ (crveni ciklus). Stoga računamo sljedeće izraze.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



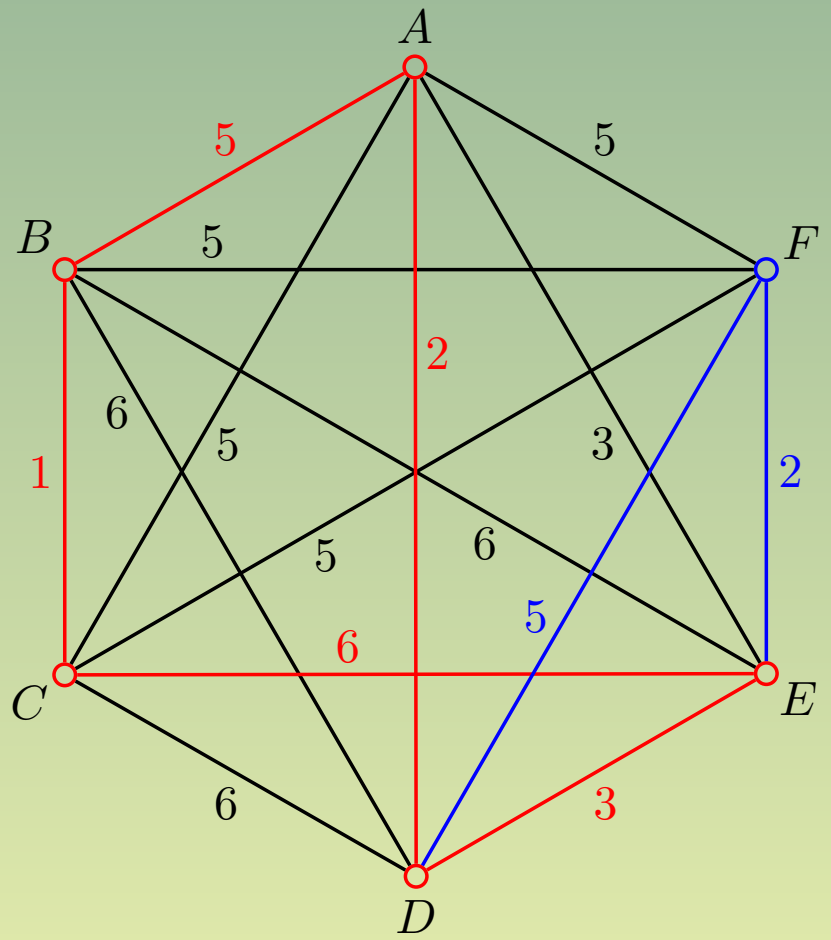
$$I_{BC} = 5 + 5 - 1 = 9$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



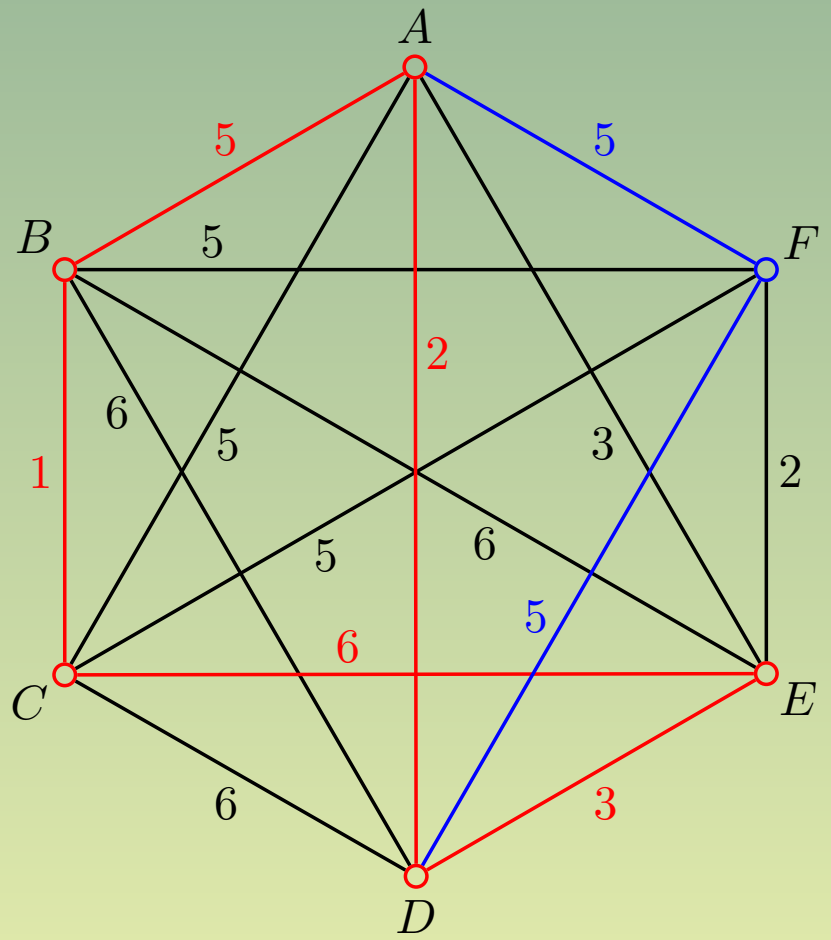
$$I_{BC} = 5 + 5 - 1 = 9, \; I_{CE} = 5 + 2 - 6 = 1$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



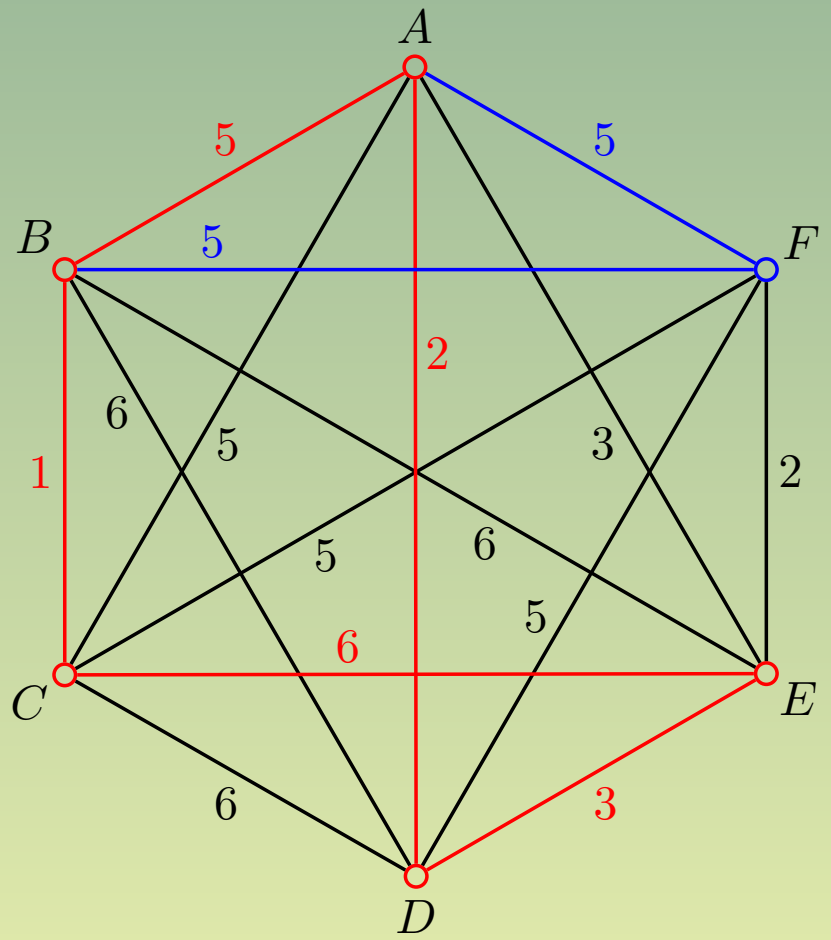
$$I_{BC} = 5 + 5 - 1 = 9,\ I_{CE} = 5 + 2 - 6 = 1,\ I_{DE} = 2 + 5 - 3 = 4$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



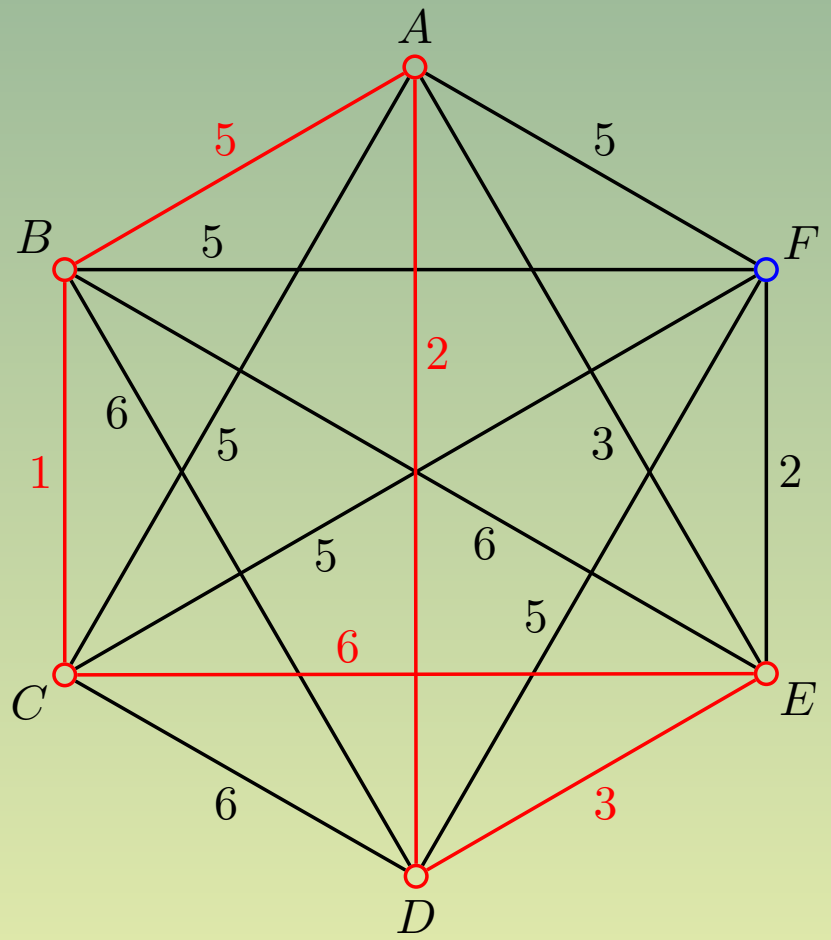
$I_{BC} = 5 + 5 - 1 = 9,\ I_{CE} = 5 + 2 - 6 = 1,\ I_{DE} = 2 + 5 - 3 = 4,$
$I_{DA} = 5 + 5 - 2 = 8$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



$$I_{BC} = 5 + 5 - 1 = 9,\ I_{CE} = 5 + 2 - 6 = 1,\ I_{DE} = 2 + 5 - 3 = 4,$$
$$I_{DA} = 5 + 5 - 2 = 8,\ I_{AB} = 5 + 5 - 5 = 5$$

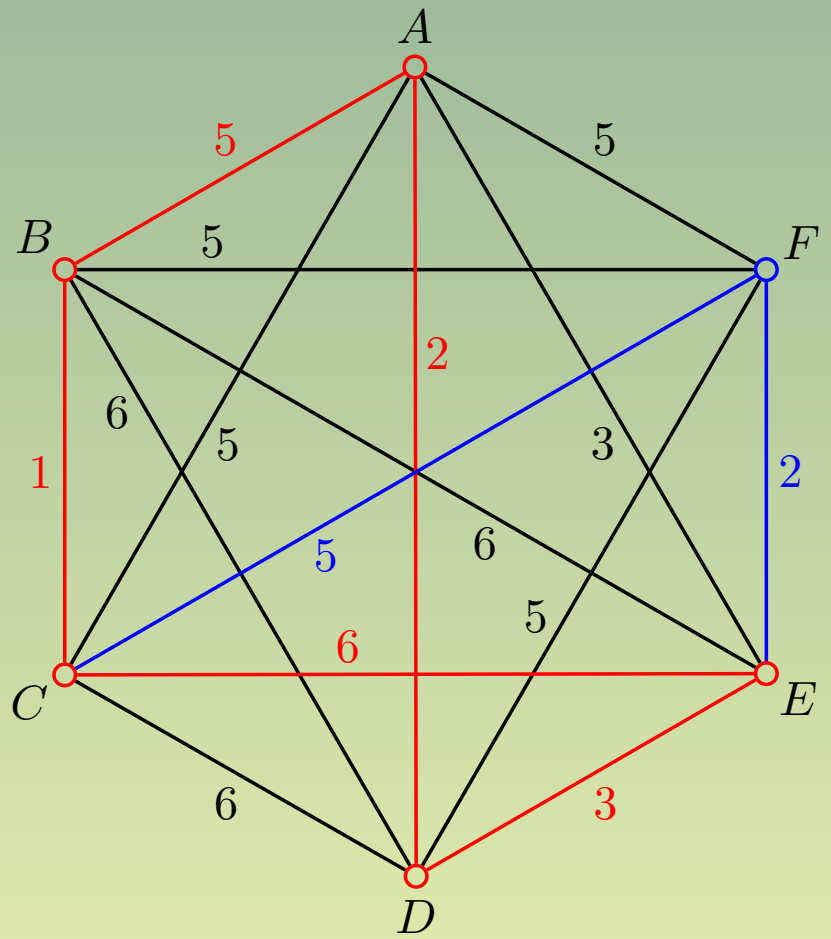
Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



$I_{BC} = 5 + 5 - 1 = 9,\ I_{CE} = 5 + 2 - 6 = 1,\ I_{DE} = 2 + 5 - 3 = 4,$
$I_{DA} = 5 + 5 - 2 = 8,\ I_{AB} = 5 + 5 - 5 = 5$

Sada odaberemo najmanji od tih izraza, a to je ovdje I_{CE}.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

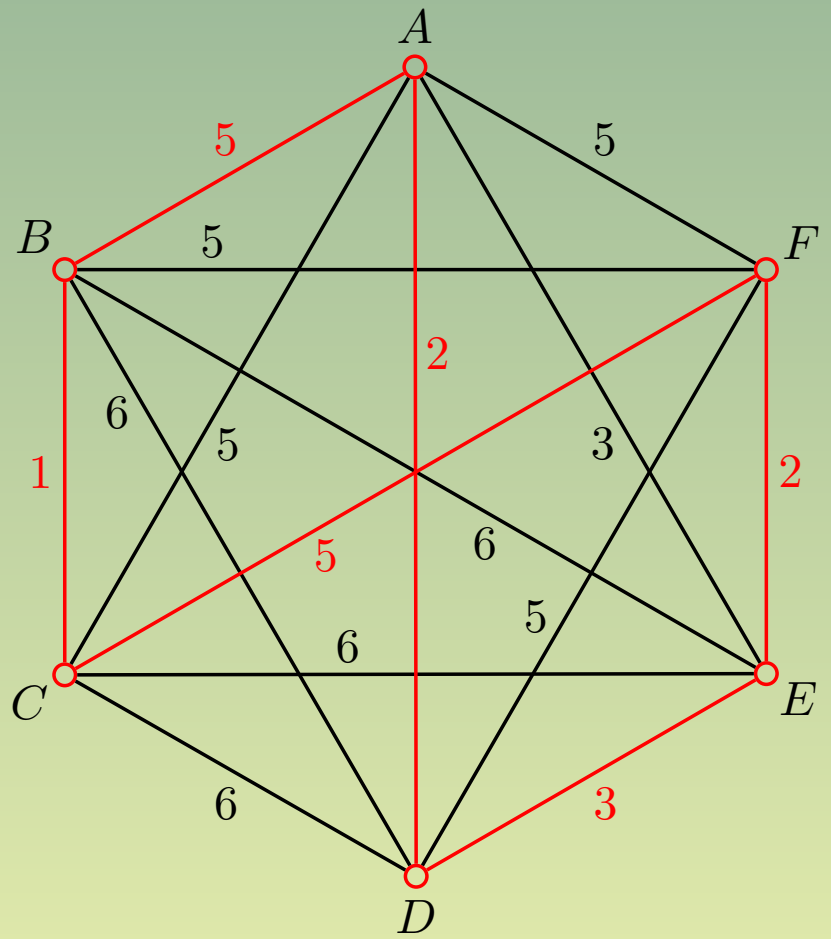


Sada ćemo dobiti novi ciklus tako da iz trenutnog ciklusa izbrišemo brid CE, a dodamo bridove FC i FE zajedno s vrhom F.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



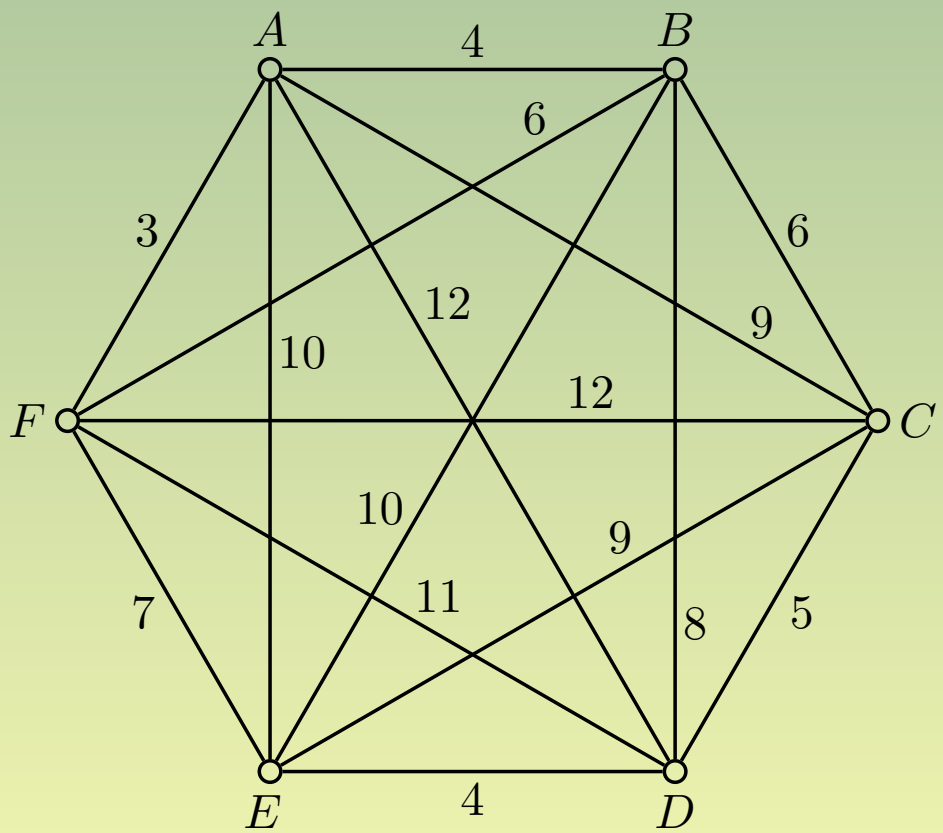
Na taj način dobivamo novi ciklus $\mathcal{C} = BCFEDAB$. Kako su dodani svi vrhovi, algoritam završava. Uočite da je u ovom slučaju nearest insertion algoritam dao minimalni Hamiltonov ciklus, tj. $\mathcal{C} = \mathcal{H}$.

objasni postupak

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.83.

Zadan je težinski potpuni graf



Stabla

Def. i karakterizacije

Riješeni primjeri

Korijenska stabla

Bin. stabla i alg. izrazi

Stablo sortiranja

Sortiranje u parcijalno uređenom skupu

Hrpa

Razapinjuća stabla

Rekurzija za raz. stabla

Riješeni primjeri

Matrični teorem o stablima

Teoretski primjeri

DFS i BFS algoritam

DFS algoritam

BFS algoritam

Povezanost grafa

Kruskal i Prim

Kruskalov algoritam

Implementacija Kruskala

Primov algoritam

Implementacija Prima

Još o Ham. ciklusu

a. *Brisanjem vrhova pronađite što je moguće bolju donju ogradu za minimalni Hamiltonov ciklus.*

b. *Pronađite minimalni Hamiltonov ciklus. Kolika mu je težina?*

c. *Pomoću nearest insertion algoritma pronađite približni minimalni Hamiltonov ciklus.*

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

a. *Brisanjem vrhova pronađite što je moguće bolju donju ogradu za minimalni Hamiltonov ciklus.*

b. *Pronađite minimalni Hamiltonov ciklus. Kolika mu je težina?*

c. *Pomoću nearest insertion algoritma pronađite približni minimalni Hamiltonov ciklus.*

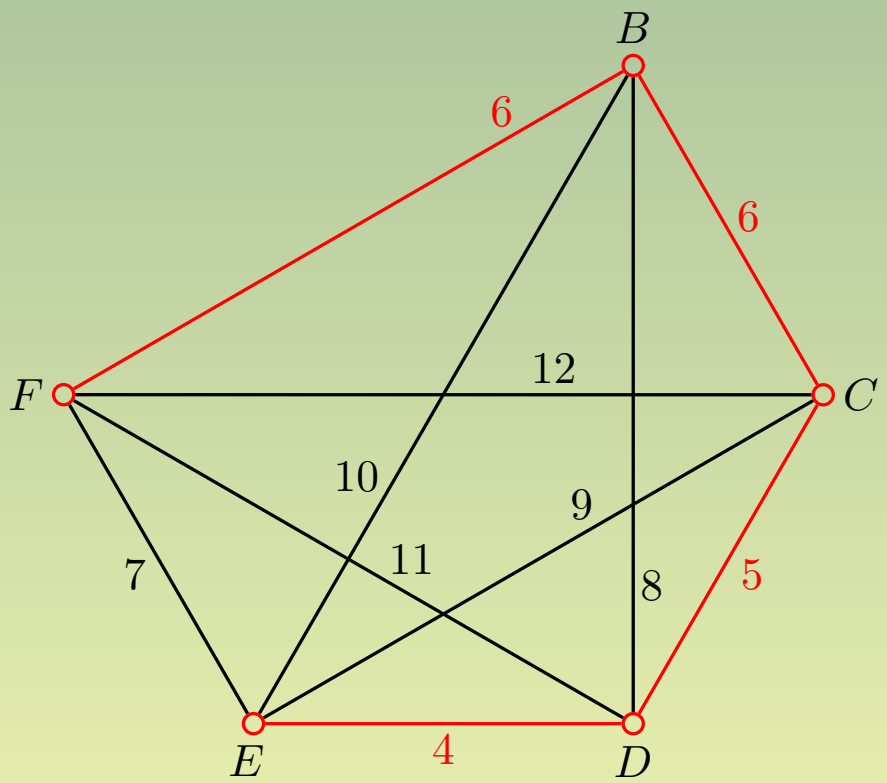
Rješenje.

a. Neka je $\mathcal{H}$ minimalni Hamiltonov ciklus. Za svaki vrh $v \in \{A, B, C, D, E, F\}$ koristit ćemo relaciju

$$w(\mathcal{H}) \geqslant w(\text{minimalno razapinjuće stablo od } G - v) +$$

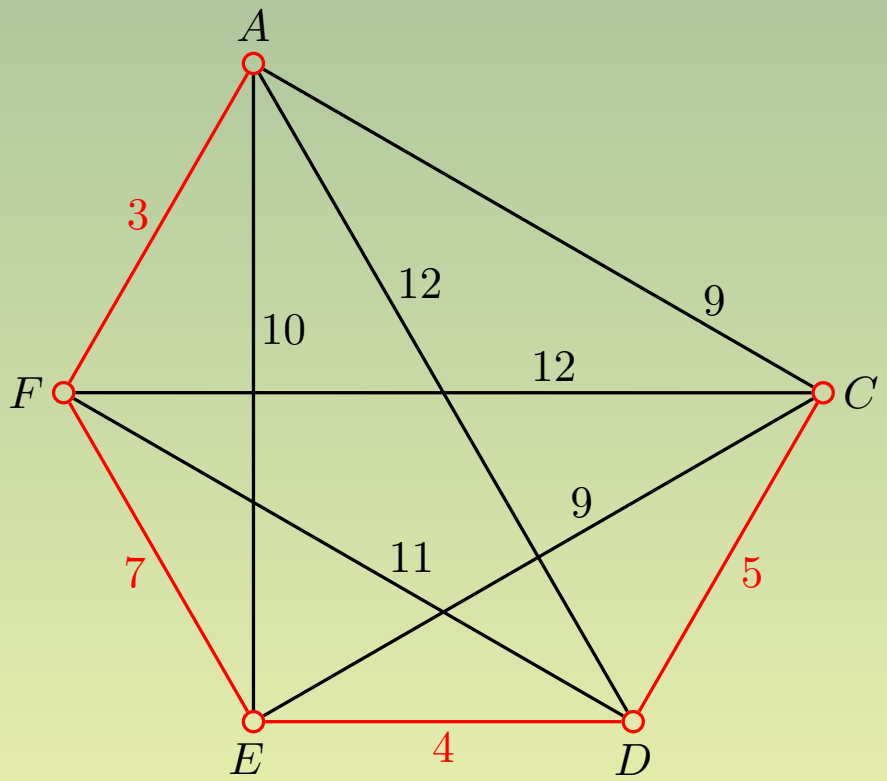
$$+ \text{ suma težina dvaju bridova incidentnih s } v \text{ minimalnih težina}$$

Brisanje vrha A



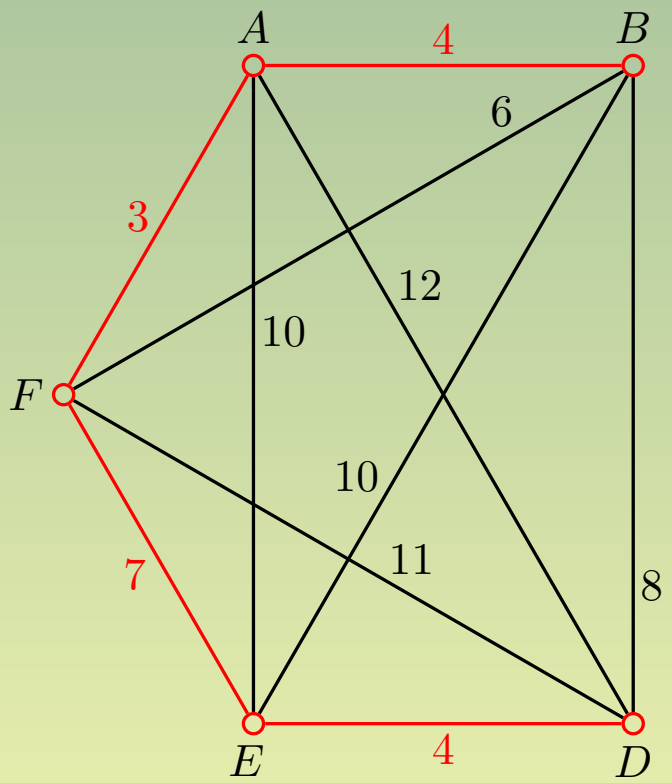
$$w(\mathcal{H}) \geqslant 21 + w(AF) + w(AB) = 21 + 3 + 4 = 28$$

Brisanje vrha B



$$w(\mathcal{H}) \geqslant 19 + w(BA) + w(BC) = 19 + 4 + 6 = 29$$

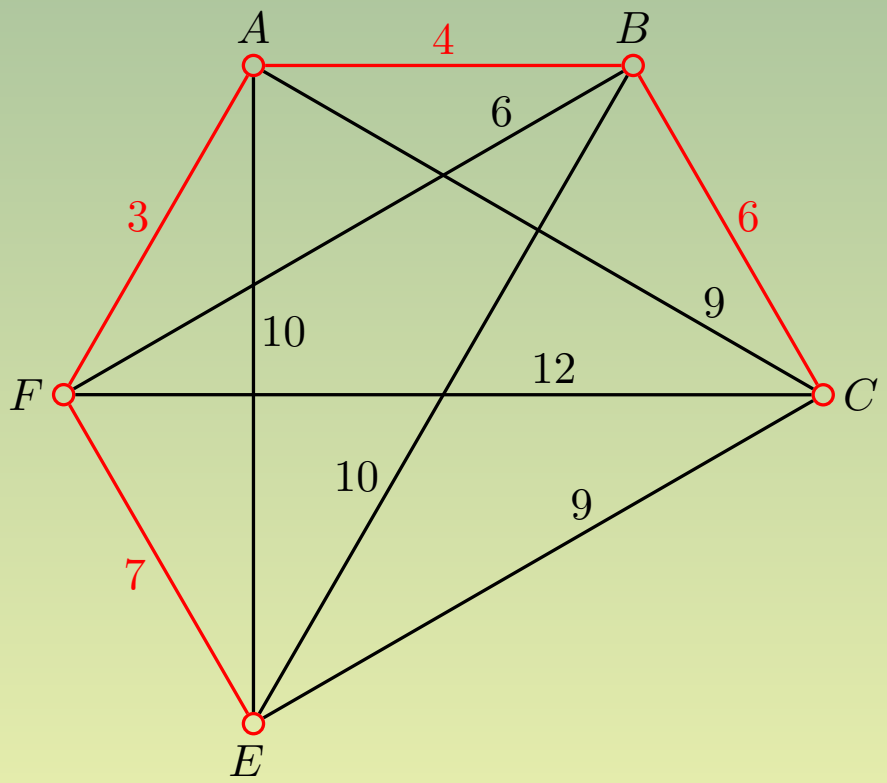
Brisanje vrha C



$$w(\mathcal{H}) \geqslant 18 + w(CD) + w(CB) = 18 + 5 + 6 = 29$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

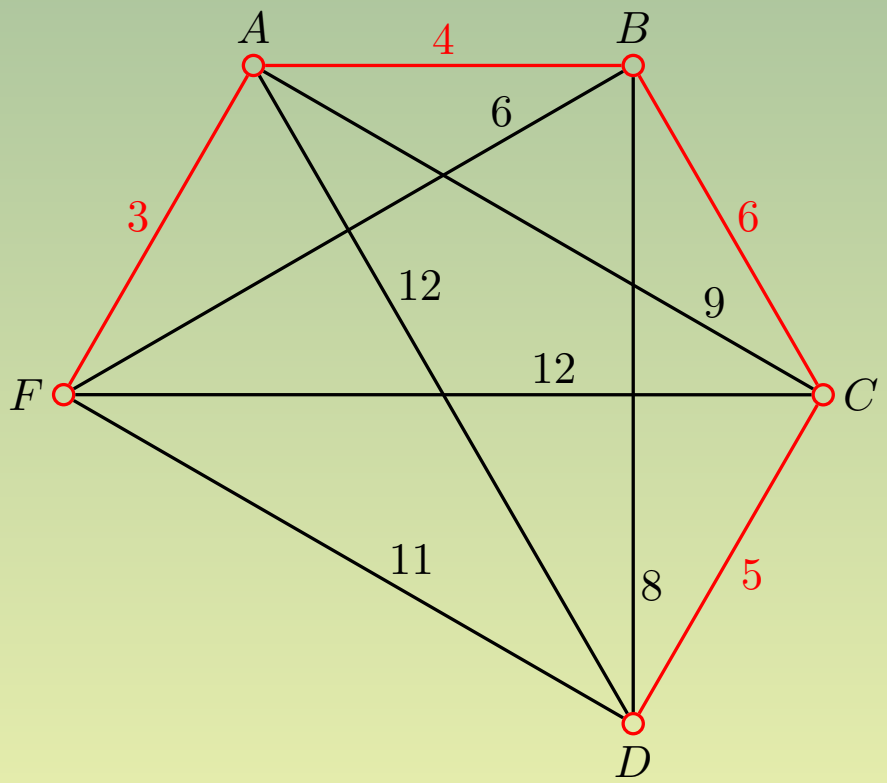
Brisanje vrha D



$$w(\mathcal{H}) \geqslant 20 + w(DE) + w(DC) = 20 + 4 + 5 = 29$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

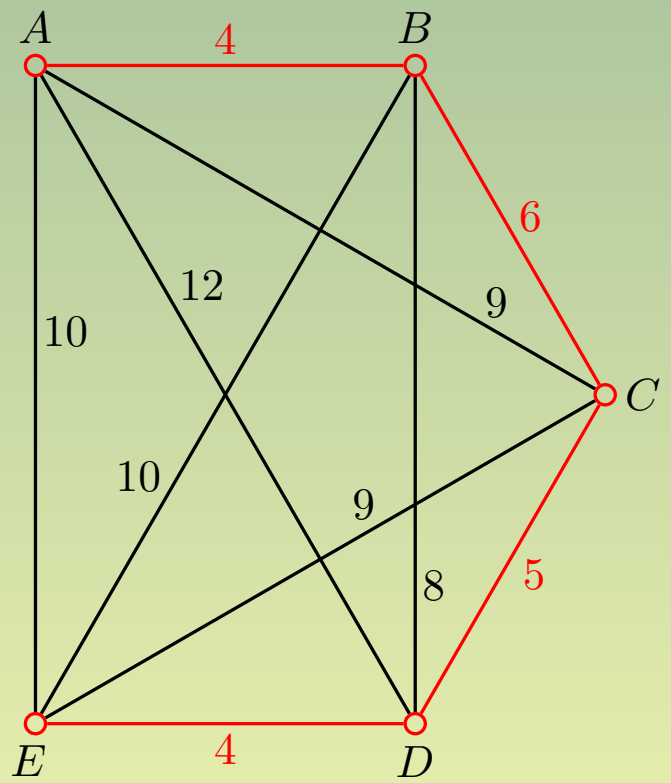
Brisanje vrha E



$$w(\mathcal{H}) \geqslant 18 + w(ED) + w(EF) = 18 + 4 + 7 = 29$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Brisanje vrha F



$$w(\mathcal{H}) \geqslant 19 + w(FA) + w(FB) = 19 + 3 + 6 = 28$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

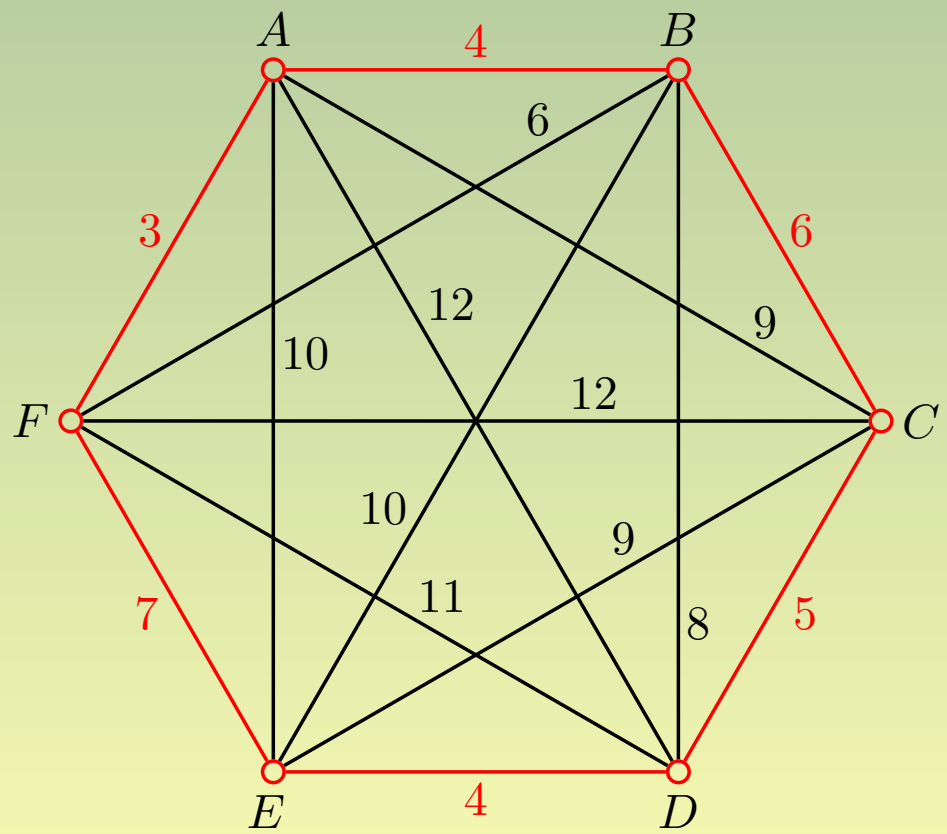
Sada na kraju uzmemo najveću od svih donjih ograda, tj.

$$w(\mathcal{H}) \geqslant \max\{28, 29, 29, 29, 29, 28\} = 29.$$

Dakle, na ovaj način dobivamo da minimalni Hamiltonov ciklus u zadanom grafu ima težinu barem 29, a možda i veću od 29.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

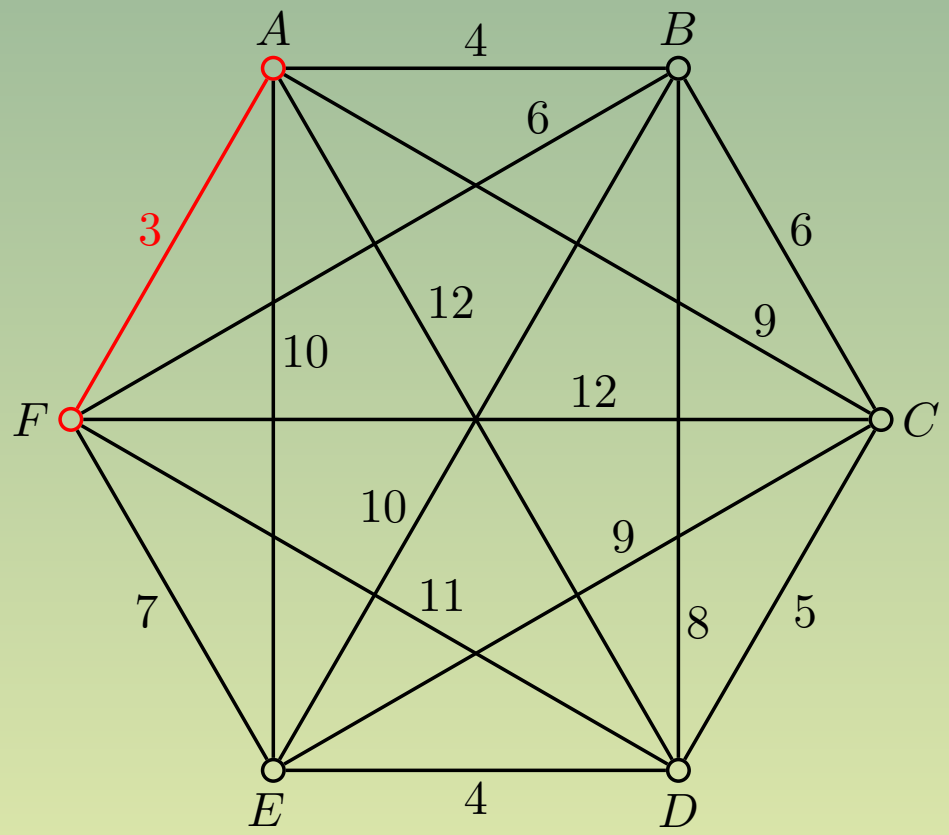
- Kako smo dobili da je $w(\mathcal{H}) \geqslant 29$, a na donjoj slici jest jedan Hamiltonov ciklus čija težina je 29, slijedi da je $ABCDEFA$ ujedno minimalni Hamiltonov ciklus.



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

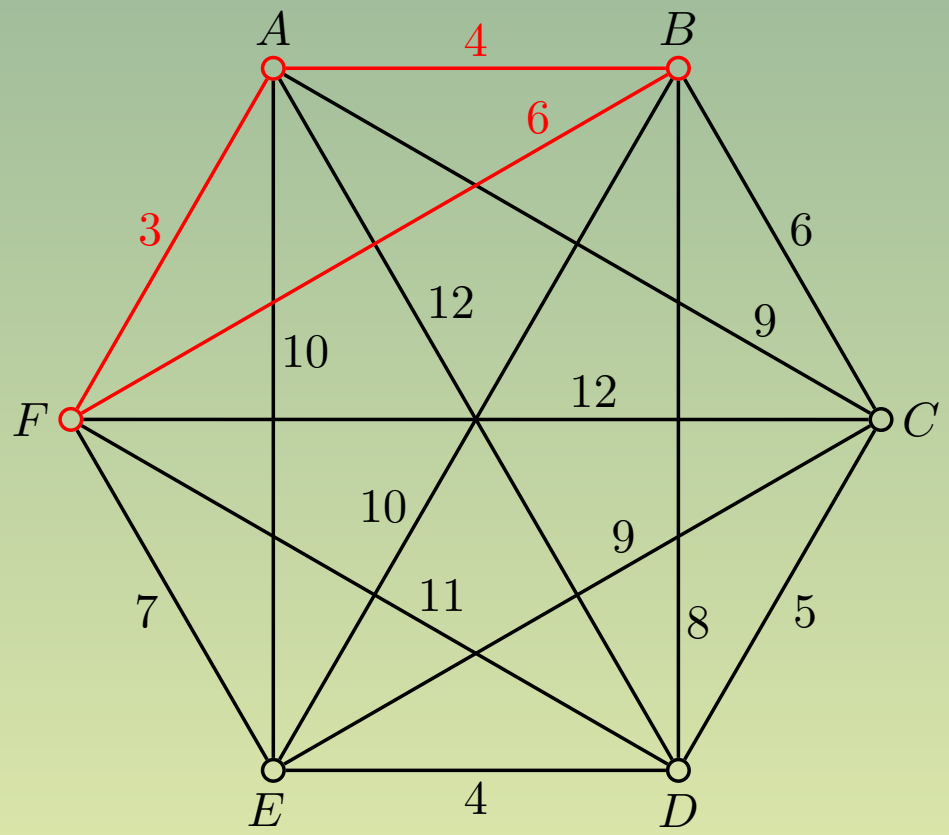
- Nećemo ovdje objašnjavati svaki detalj u nearest insertion algoritmu kao što smo to napravili u prethodnom primjeru. Napisat ćemo što se događa u svakom koraku i kako izgleda trenutni ciklus za svaki korak. Za razliku od prethodnog primjera kada je nearest insertion algoritam dao minimalni Hamiltonov ciklus, u ovom slučaju se to neće dogoditi. Algoritam će na kraju dati približni minimalni Hamiltonov ciklus $\mathcal{C}$ čija težina će biti veća od težine minimalnog Hamiltonovog ciklusa $\mathcal{H}$, ali ta težina neće biti veća od dvostruke težine minimalnog Hamiltonovog ciklusa.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



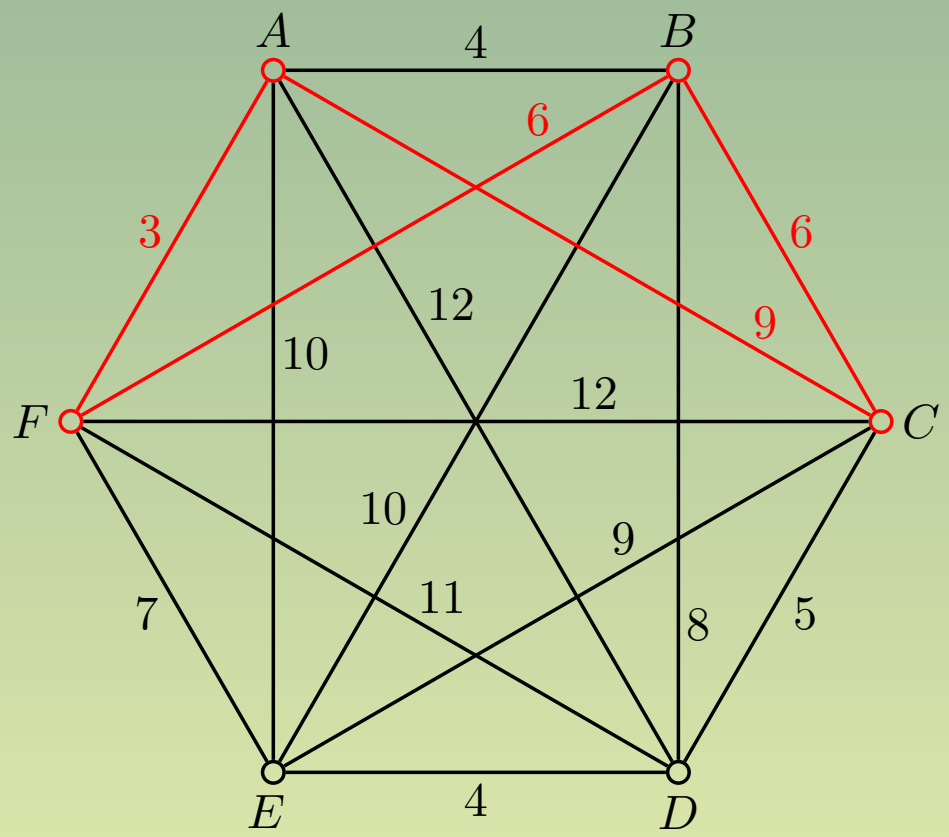
ciklus: $\mathcal{C} = AFA$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



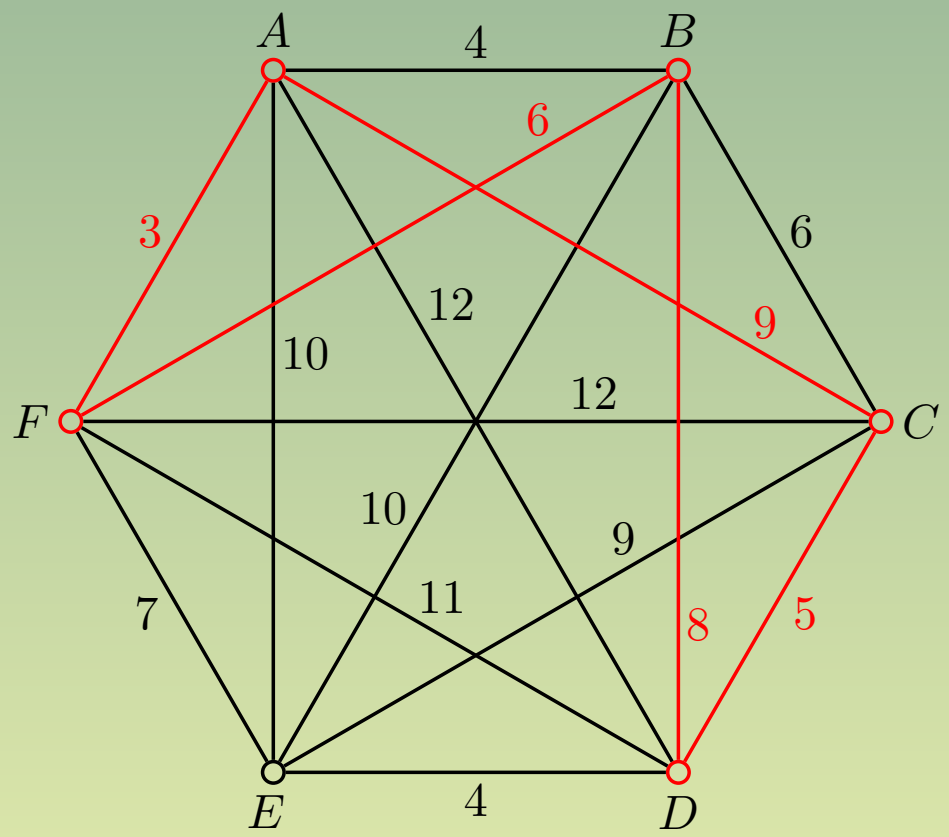
ciklus: $\mathcal{C} = ABFA$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



ciklus: $\mathcal{C} = ACBFA$

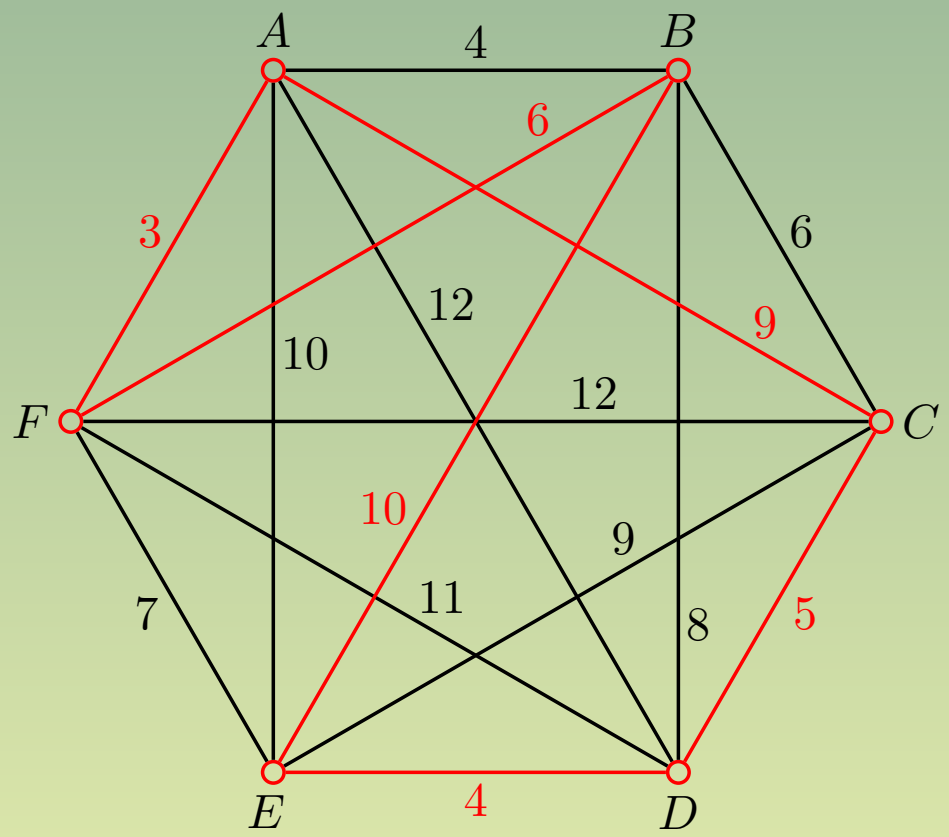
$I_{AB} = 9+6-4 = 11,\ I_{BF} = 6+12-6 = 12,\ I_{FA} = 9+12-3 = 18$



ciklus: $\mathcal{C} = ACDBFA$

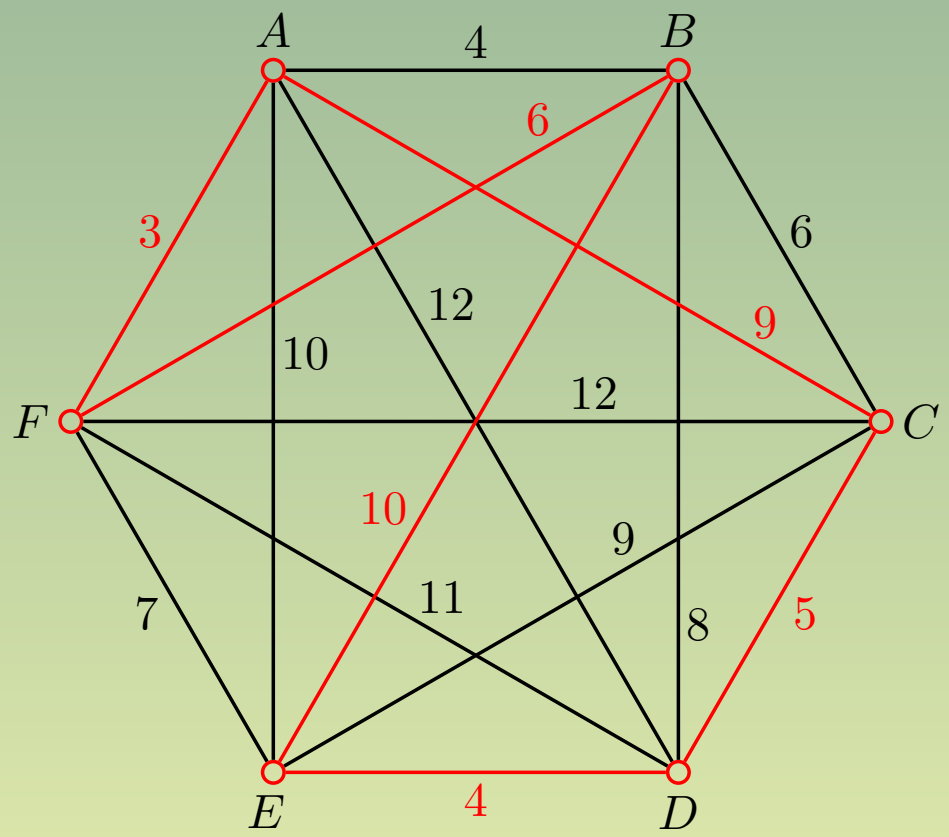
$I_{AC} = 12 + 5 - 9 = 8,\ I_{CB} = 5 + 8 - 6 = 7,\ I_{BF} = 8 + 11 - 6 = 13,$
$I_{FA} = 12 + 11 - 3 = 20$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu



ciklus: $\mathcal{C} = ACDEBFA$

$I_{AC} = 10 + 9 - 9 = 10,\ I_{CD} = 9 + 4 - 5 = 8,\ I_{DB} = 4 + 10 - 8 = 6,$
$I_{BF} = 10 + 7 - 6 = 11,\ I_{FA} = 10 + 7 - 3 = 14$



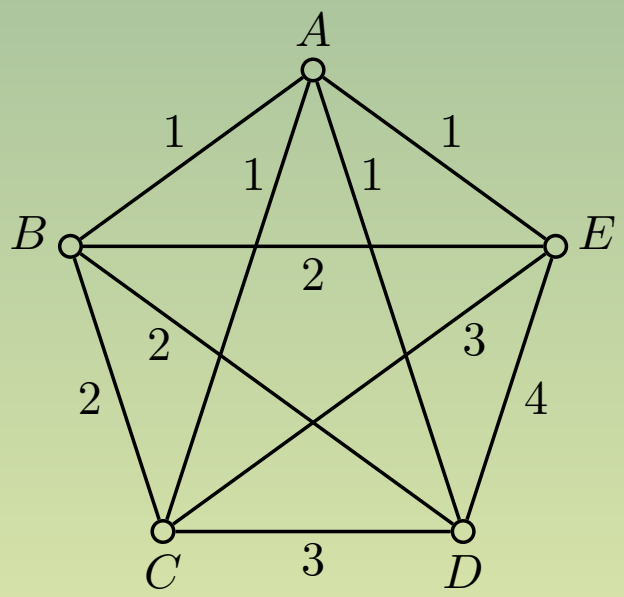
ciklus: $\mathcal{C} = ACDEBFA$

Uočite da je $w(\mathcal{C}) = 37$, a minimalni Hamiltonov ciklus ima težinu 29.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Primjer 8.84.

Zadan je težinski potpuni graf



a. *Brisanjem vrhova pronađite što je moguće bolju donju ogradu za minimalni Hamiltonov ciklus.*

b. *Pronađite minimalni Hamiltonov ciklus. Kolika mu je težina?*

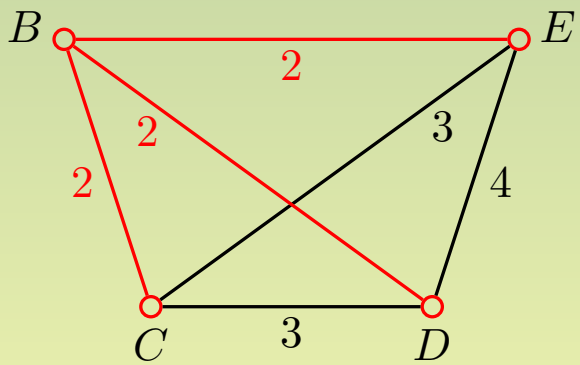
c. *Da li je moguće na zadani graf primijeniti nearest insertion algoritam?*

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Rješenje.

a. Neka je $\mathcal{H}$ minimalni Hamiltonov ciklus.

Brisanje vrha A



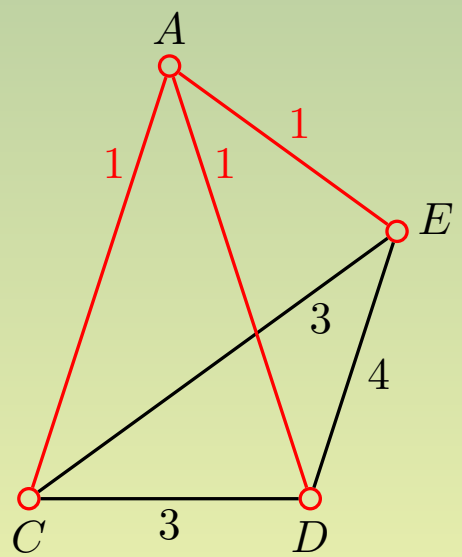
$$w(\mathcal{H}) \geqslant 6 + w(AB) + w(AC) = 6 + 1 + 1 = 8$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Rješenje.

a. Neka je $\mathcal{H}$ minimalni Hamiltonov ciklus.

Brisanje vrha B



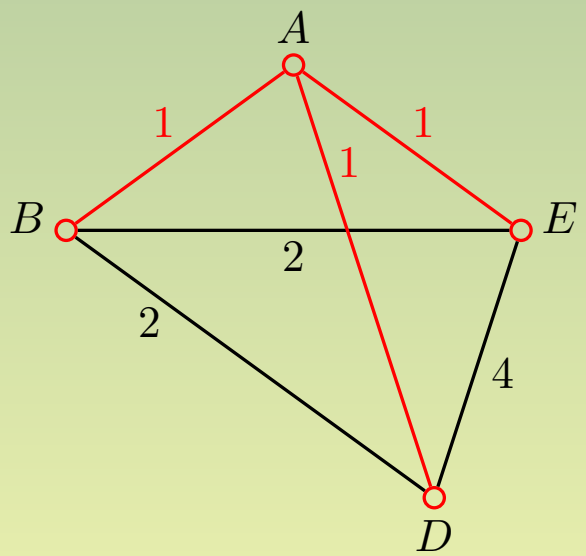
$$w(\mathcal{H}) \geqslant 3 + w(BA) + w(BE) = 3 + 1 + 2 = 6$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Rješenje.

a. Neka je $\mathcal{H}$ minimalni Hamiltonov ciklus.

Brisanje vrha C



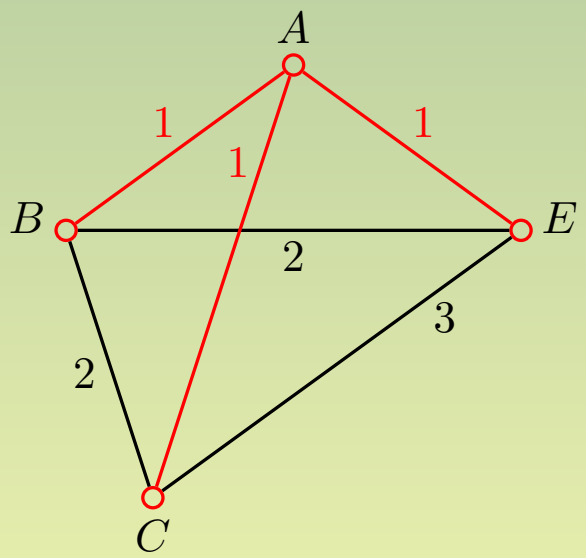
$$w(\mathcal{H}) \geqslant 3 + w(CA) + w(CB) = 3 + 1 + 2 = 6$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Rješenje.

a. Neka je $\mathcal{H}$ minimalni Hamiltonov ciklus.

Brisanje vrha D



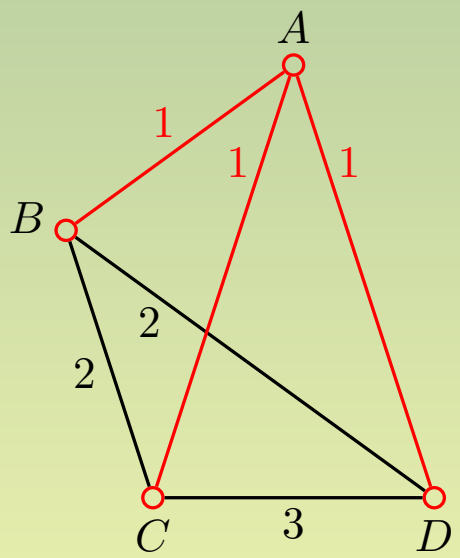
$$w(\mathcal{H}) \geqslant 3 + w(DA) + w(DB) = 3 + 1 + 2 = 6$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Rješenje.

a) Neka je $\mathcal{H}$ minimalni Hamiltonov ciklus.

Brisanje vrha E



$$w(\mathcal{H}) \geqslant 3 + w(EA) + w(EB) = 3 + 1 + 2 = 6$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

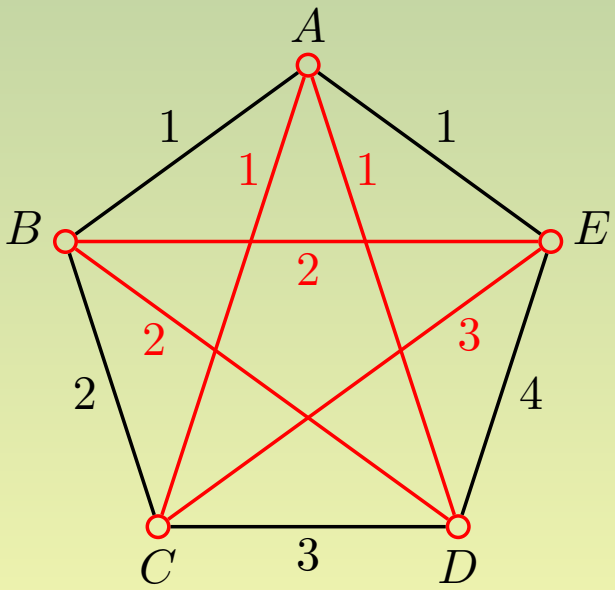
Sada na kraju uzmemo najveću od svih donjih ograda, tj.

$$w(\mathcal{H}) \geqslant \max\{8, 6, 6, 6, 6\} = 8.$$

Dakle, na ovaj način dobivamo da minimalni Hamiltonov ciklus u zadanom grafu ima težinu barem 8, a možda i veću od 8.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

- U ovom slučaju minimalni Hamiltonov ciklus je $\mathcal{H} = ACEBDA$ i njegova težina je 9. Uočite da smo brisanjem vrhova dobili da minimalni Hamiltonov ciklus ima težinu barem 8, ali to ne znači da postoji Hamiltonov ciklus težine 8, samo možemo reći da ne postoji Hamiltonov ciklus težine manje od 8.



Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Naime, brisanjem vrhova dobivamo neku donju ogradu za minimalni Hamiltonov ciklus, ali pitanje je koliko je dobra ta donja ograda. Konkretno ovdje, dobili smo da je $w(\mathcal{H}) \geqslant 8$, što zapravo znači da u zadanom grafu ne postoji Hamiltonov ciklus težine manje od 8. E sad, minimalni Hamiltonov ciklus ima težinu 8 ili veću od 8 (koliko veću od 8, to ne možemo unaprijed na ovaj način saznati). U ovom slučaju ta težina je 9, što nije puno veće od 8 pa smo dobili jako dobru donju ogradu. Kod prethodna dva primjera smo dobili da se ta donja ograda podudarala s težinom minimalnog Hamiltonovog ciklusa, što nam je olakšalo traženje minimalnog Hamiltonovog ciklusa. Dakle, ovaj način nam može pomoći da barem dobijemo neku donju ogradu za minimalni Hamiltonov ciklus, a ako još k tome pronađemo Hamiltonov ciklus čija težina se podudara s tom donjom ogradom, tada je taj Hamiltonov ciklus ujedno i najmanje težine. Jasno, to ne mora uvijek tako biti, što nam pokazuje ovaj primjer.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

- Na ovaj težinski graf ne možemo primijeniti nearest insertion algoritam jer u njemu ne vrijedi nejednakost trokuta. Na primjer,

$$w(EA) + w(AD) \not\geqslant w(ED).$$

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Napomena.

Ukoliko težinski Hamiltonov graf nije potpun, a vrijedi u njemu nejednakost trokuta, također možemo na njega primijeniti nearest insertion algoritam za traženje približnog minimalnog Hamiltonovog ciklusa na sljedeći način. Najprije konstruiramo potpuni težinski graf u kojemu je težina brida između dva vrha jednaka duljini najkraćeg puta između ta dva vrha u originalnom težinskom grafu. Zatim na taj konstruirani potpuni težinski graf primijenimo nearest insertion algoritam. Na kraju dobiveni ciklus u potpunom grafu rekonstruiramo na originalni graf, a za taj postupak nam trebaju najkraći putovi između svaka dva vrha u originalnom grafu koji predstavljaju bridove u pripadnom potpunom težinskom grafu.

Stabla
Def. i karakterizacije
Riješeni primjeri
Korijenska stabla
Bin. stabla i alg. izrazi
Stablo sortiranja
Sortiranje u parcijalno uređenom skupu
Hrpa
Razapinjuća stabla
Rekurzija za raz. stabla
Riješeni primjeri
Matrični teorem o stablima
Teoretski primjeri
DFS i BFS algoritam
DFS algoritam
BFS algoritam
Povezanost grafa
Kruskal i Prim
Kruskalov algoritam
Implementacija Kruskala
Primov algoritam
Implementacija Prima
Još o Ham. ciklusu

Dio IX

Usmjereni grafovi

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Sadržaj

- Usmjereni grafovi
  - Definicija digrafa
  - Izomorfizam digrafova
  - Šetnje u digrafu
  - Matrica susjedstva digrafa
  - Turnir
  - Tranzitivni turnir
  - Dipovezani turnir
  - Rangiranje
  - Bellman-Fordov algoritam
  - Opis Bellman-Fordovog algoritma
  - Bellman-Ford error
  - Aciklički digraf
  - Topološko sortiranje
  - Bellmanov algoritam
  - Problem rasporeda – 1. tip
  - Problem rasporeda – 2. tip
  - Problem jednosmjernih ulica
  - Transportne mreže
  - Ford-Fulkersonov algoritam

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Definicija usmjerenog grafa

Usmjereni graf ili **digraf** D je uređeni par (V, A), pri čemu je V neprazni skup vrhova od D, a svaki element skupa A je uređeni par elemenata iz V, tj. $A \subseteq V \times V$. Elementi skupa A se zovu **lukovi** digrafa D.

Napomena.

Kod grafa je brid uv jednak bridu vu. Kod digrafa, luk uv je različit od luka vu jer je važno koji je vrh početak, a koji je kraj. Digraf crtamo tako da nacrtamo pripadni graf i na svakom bridu se nacrta strelica koja je usmjerena prema drugom vrhu odgovarajućeg luka.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

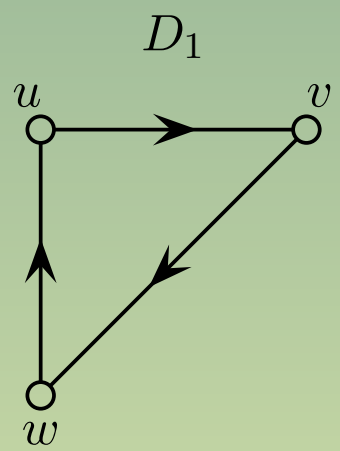
Napomena.

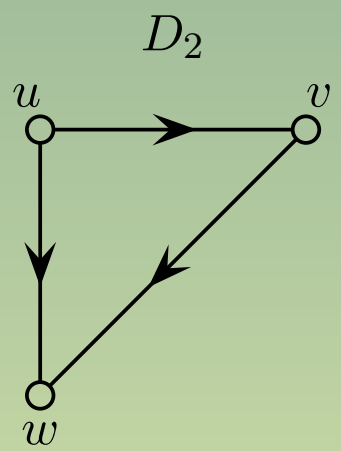
Većina pojmova i oznaka vezanih za grafove se prenose i na digrafove pa ih nećemo posebno definirati. Na primjer, kod digrafova ćemo ukupni broj vrhova digrafa također označavati s ν, a ukupni broj lukova s ε.

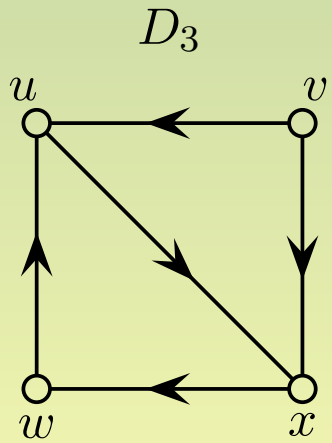
Svakom digrafu D je pridružen pripadni graf s istim skupom vrhova, a luku u D je pridružen brid s istim krajevima. Obratno, svakom grafu G možemo pridružiti digraf specifikacijom poretka vrhova svakog brida. Takav digraf se zove **orijentacija** na G.

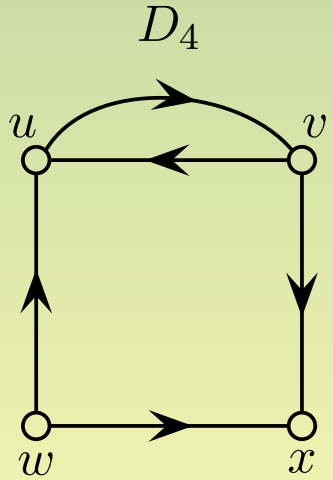
Digraf D je **striktan** ako nema petlji i nikoja dva luka s istim krajevima nemaju istu orijentaciju.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson





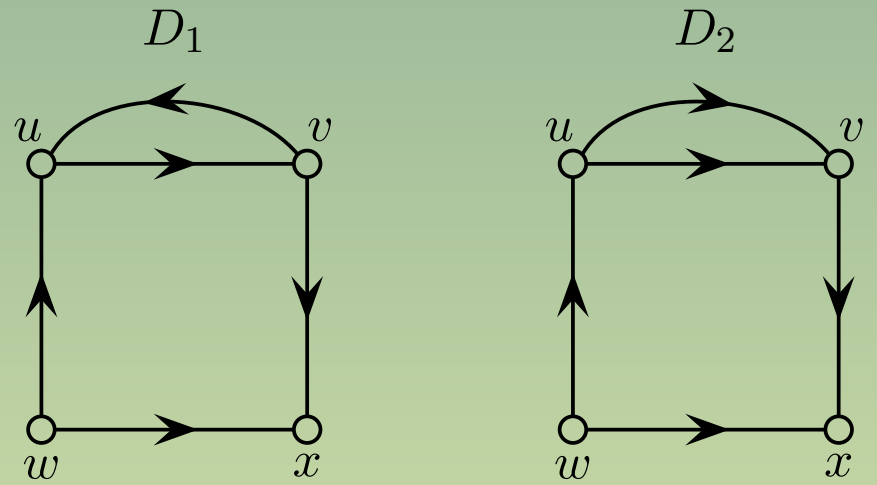




Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Na prethodnoj slici su sva četiri digrafa striktna. Naime, digraf D_4 je striktan jer između vrhova u i v nema dvostrukih lukova jer oni nemaju istu orijentaciju. No, pripadni graf od D_4 nije jednostavan jer ima dvostruki brid između vrhova u i v. Dakle, ne može se svaki striktni digraf dobiti iz jednostavnog grafa.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

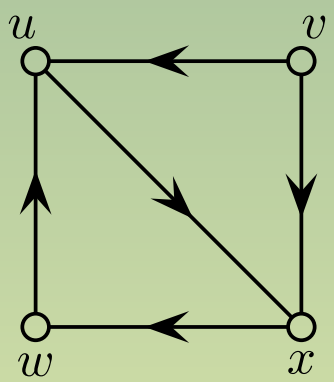


Digraf D_1 je striktni, a digraf D_2 nije striktni. Međutim, oba digrafa imaju isti pripadni graf.

Instupanj i outstupanj

Neka je $D = (V, A)$ digraf. **Instupanj** ili **ulazni stupanj** vrha $v \in V$ je broj $d^-(v)$ lukova u D koji imaju kraj u vrhu v. **Outstupanj** ili **izlazni stupanj** vrha $v \in V$ je broj $d^+(v)$ lukova u D koji imaju početak u vrhu v.

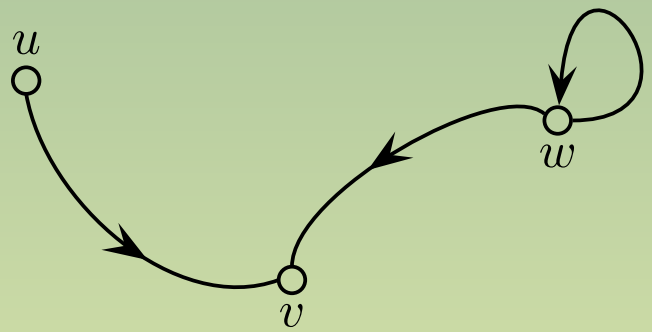
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



$$d^-(u) = 2 \qquad d^+(u) = 1$$
$$d^-(v) = 0 \qquad d^+(v) = 2$$
$$d^-(w) = 1 \qquad d^+(w) = 1$$
$$d^-(x) = 2 \qquad d^+(x) = 1$$

$$d^-(u) + d^-(v) + d^-(w) + d^-(x) = 5$$
$$d^+(u) + d^+(v) + d^+(w) + d^+(x) = 5$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



$$d^-(u) = 0 \qquad d^+(u) = 1$$
$$d^-(v) = 2 \qquad d^+(v) = 0$$
$$d^-(w) = 1 \qquad d^+(w) = 2$$

$$d^-(u) + d^-(v) + d^-(w) = 3$$
$$d^+(u) + d^+(v) + d^+(w) = 3$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Propozicija 9.1.

Neka je $D = (V, A)$ digraf. Tada je

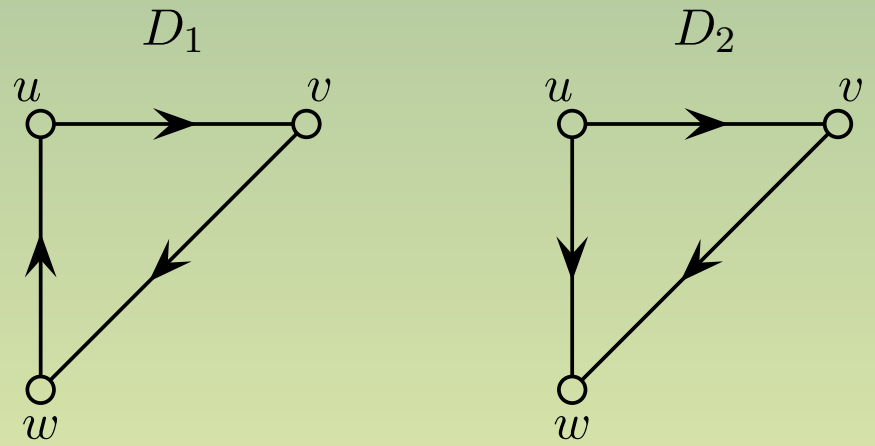
$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = \varepsilon(D).$$

Dokaz.

Svaki luk izlazi iz jednog vrha i ulazi u drugi vrh i na taj način povećava sumu instupnjeva za 1, ali isto tako i sumu outstupnjeva za 1. Iz navedenog slijedi da je suma svih instupnjeva jednaka ukupnom broju lukova i suma svih outstupnjeva je također jednaka ukupnom broju lukova u digrafu. ♡

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Neka su $D_1 = (V_1, A_1)$ i $D_2 = (V_2, A_2)$ digrafovi. Kažemo da su D_1 i D_2 **izomorfni** ako postoji barem jedna bijekcija $\varphi : V_1 \to V_2$ koja čuva susjednost i orijentaciju.



Digrafovi D_1 i D_2 nisu izomorfni jer, npr. digraf D_2 sadrži vrh u koji je outstupnja 2, a digraf D_1 ne sadrži takav vrh pa ne postoji bijekcija vrhova koja bi čuvala orijentaciju. Uočite da su pripadni grafovi izomorfni, tj. susjednost se može očuvati, ali je poanta u tome što se zadani digrafovi bitno razlikuju u svojoj orijentaciji.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Napomena.

Kao i kod grafova, izomorfni digrafovi imaju istu unutrašnju strukturu, a mogu se jedino razlikovati u imenima svojih vrhova i lukova te načinu na koji su nacrtani u ravnini. Kod grafova nam je jedino bilo važno da se očuva susjednost, a kod digrafova moramo još paziti i na orijentaciju, što nam je jasno iz prethodnog primjera u kojemu se mogla očuvati susjednost (kao obični grafovi su imali istu unutrašnju strukturu), ali se nije mogla očuvati orijentacija pa zadani digrafovi nisu imali istu unutrašnju strukturu jer su se bitno razlikovali u orijentacijama svojih lukova.

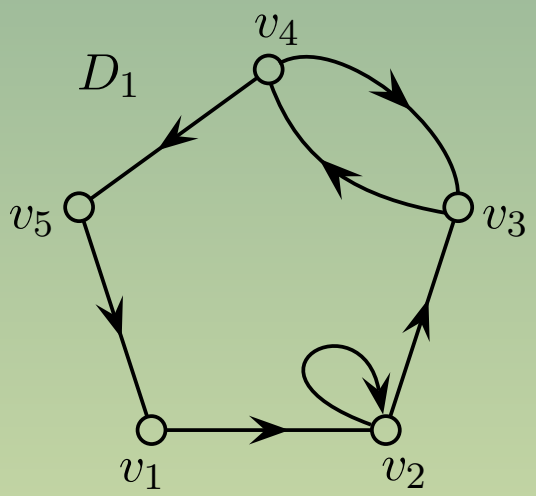
Propozicija 9.2.

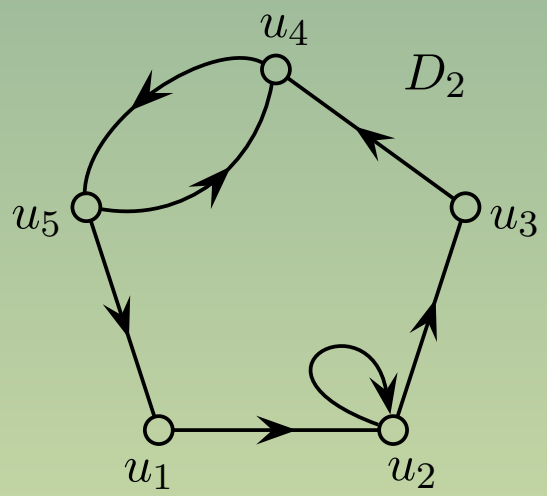
Neka su D_1 i D_2 izomorfni digrafovi. Tada vrijedi:

1. *D_1 i D_2 imaju isti broj vrhova.*
2. *D_1 i D_2 imaju isti broj lukova.*
3. *D_1 i D_2 imaju iste nizove instupnjeva i iste nizove outstupnjeva odgovarajućih vrhova.*

Obrat gornje propozicije ne vrijedi. Dakle, ako dva digrafa imaju isti broj vrhova, isti broj lukova, iste nizove outstupnjeva i iste nizove instupnjeva, tada oni ipak ne moraju biti izomorfni. Evo i protuprimjera.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson





Digrafovi D_1 i D_2 imaju isti broj vrhova, isti broj lukova, jednake nizove instupnjeva i jednake nizove outstupnjeva, ali ipak nisu izomorfni. Naime, pretpostavimo da postoji bijekcija

$$\varphi : V(D_1) \to V(D_2)$$

koja čuva susjednost i orijentaciju. Kako je u digrafu D_1 vrh v_2 jedini vrh kojemu su instupanj i outstupanj jednaki 2, a u digrafu D_2 je jedini takav vrh u_2, tada mora biti $\varphi(v_2) = u_2$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Kako je vrh v_3 susjedan s vrhom v_2 u digrafu D_1, tada $\varphi(v_3)$ mora biti susjedan s $\varphi(v_2) = u_2$ u digrafu D_2. Jedini susjedi od u_2 u digrafu D_2 su vrhovi u_1 i u_3. Stoga mora biti $\varphi(v_3) = u_1$ ili $\varphi(v_3) = u_3$. Međutim, $d^+(v_3) = 1$ i $d^-(v_3) = 2$, a niti jedan od vrhova u_1 i u_3 nemaju outstupanj 1 i instupanj 2. Stoga ne postoji bijekcija $\varphi : V(D_1) \to V(D_2)$ koja bi čuvala susjednost i orijentaciju pa digrafovi D_1 i D_2 nisu izomorfni.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Usmjerena šetnja u digrafu $D = (V, A)$ je netrivijalni konačni niz

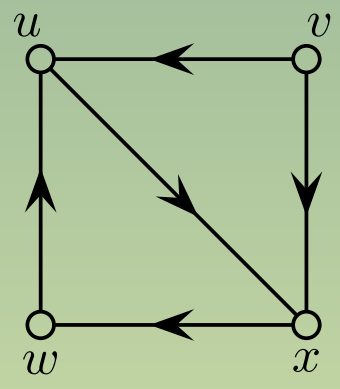
$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_k v_k,$$

gdje su $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ vrhovi (ne nužno različiti), a $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ lukovi u D. Ako je $v_0 = v_k$, tada je W **zatvorena usmjerena šetnja**. Broj k je duljina usmjerene šetnje W.

Ako su u W svi lukovi međusobno različiti, tada W zovemo **usmjerena staza**. Ako su svi vrhovi usmjerene šetnje W međusobno različiti, tada W zovemo **usmjereni put**. **Usmjereni ciklus** je zatvoreni usmjereni put.

Ako postoji usmjereni (u, v)-put u D, tada kažemo da se vrh v može doseći u D iz vrha u. Dva vrha u i v su **dipovezani** ako postoje usmjereni (u, v)-put i usmjereni (v, u)-put.

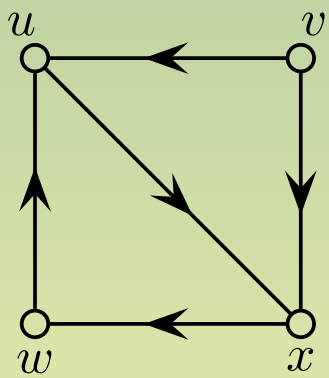
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



- U digrafu ne postoji usmjereni (u, v)-put.
- U digrafu postoji usmjereni (v, u)-put.
- Vrh u se može doseći iz vrha v.
- Vrh v se ne može doseći iz vrha u.
- Vrhovi u i v nisu dipovezani.
- Vrhovi u i x su dipovezani.

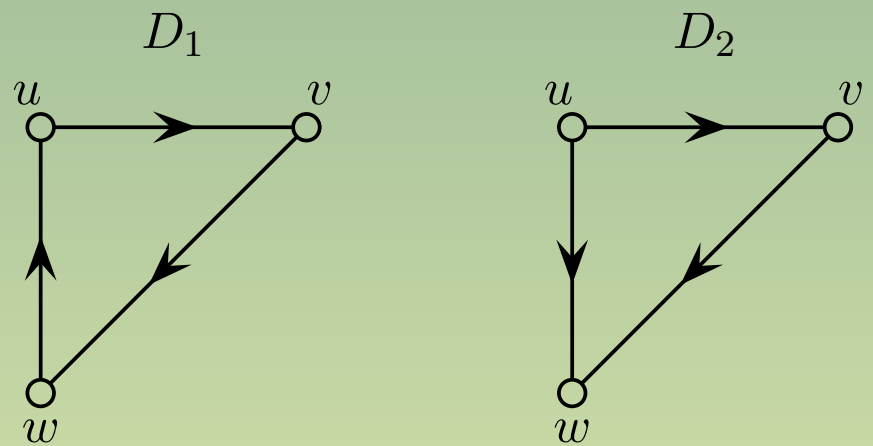
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dipovezanost je relacija ekvivalencije na skupu vrhova digrafa, a klase ekvivalencije se zovu **dikomponente**. Digraf D je **dipovezan** ili **jako povezan** ako ima samo jednu dikomponentu. Drugim riječima, digraf D je dipovezan ako su svaka dva njegova vrha dipovezana. Digraf je povezan ako je pripadni graf povezan.



- Gornji digraf je povezan.
- Gornji digraf nije dipovezan jer ima dvije dikomponente $\{u, x, w\}$ i $\{v\}$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



- Digraf D_1 je povezan i dipovezan.
- Digraf D_2 je povezan, ali nije dipovezan jer ima tri dikomponente $\{u\}$, $\{v\}$ i $\{w\}$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Usmjerena Eulerova staza u digrafu D je usmjerena staza koja prolazi svakim lukom od D. **Usmjerena Eulerova tura** u digrafu D je zatvorena usmjerena Eulerova staza. Digraf D je **Eulerov** ako dopušta usmjerenu Eulerovu turu.

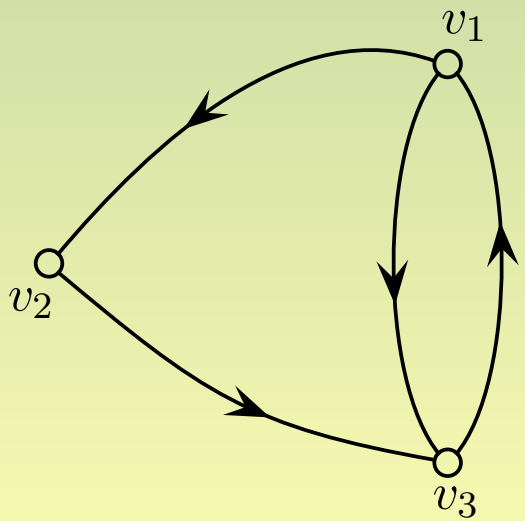
Usmjereni Hamiltonov put u digrafu D je usmjereni put koji sadrži sve vrhove digrafa D. **Usmjereni Hamiltonov ciklus** u digrafu D je zatvoreni usmjereni Hamiltonov put. Digraf D je **Hamiltonov** ako dopušta usmjereni Hamiltonov ciklus.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

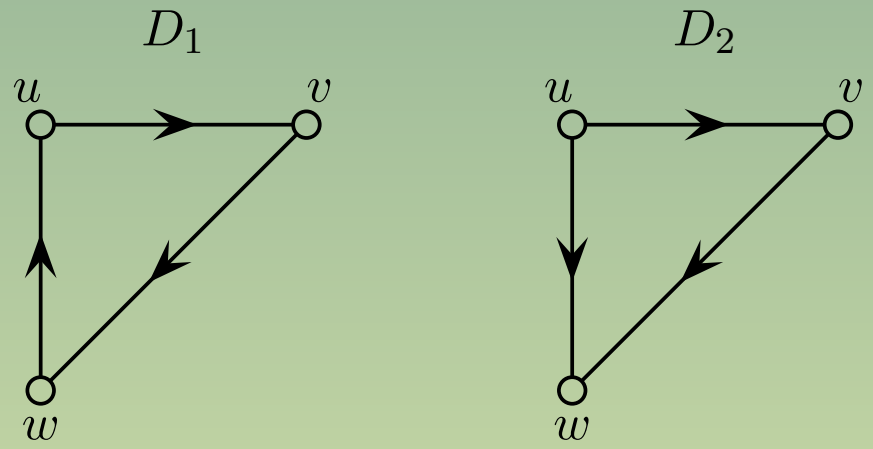
Teorem 9.1 (Karakterizacija Eulerovih digrafa).

Digraf D je Eulerov akko D je povezan i $d^+(v) = d^-(v)$ za svaki $v \in V(D)$.

Svaki Eulerov digraf je dipovezan, ali obrnuto ne mora vrijediti. Dipovezani digraf ne mora biti Eulerov. Digraf na donjoj slici jest dipovezan, ali nije Eulerov.

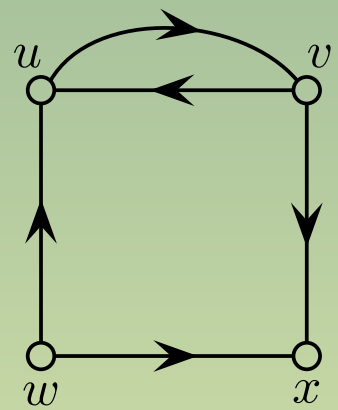


Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



- Digraf D_1 je Eulerov jer je povezan i vrijedi $d^+(w) = d^-(w),\ d^+(u) = d^-(u),\ d^+(v) = d^-(v)$.
- Digraf D_1 je Hamiltonov jer sadrži usmjereni Hamiltonov ciklus $uvwu$.
- Digraf D_2 nije Eulerov jer $d^+(w) \neq d^-(w)$ i $d^+(u) \neq d^-(u)$.
- Digraf D_2 nije Hamiltonov, ali ima usmjereni Hamiltonov put uvw.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



- Digraf nije Eulerov jer je, npr. $d^+(w) \neq d^-(w)$.
- Digraf nije Hamiltonov jer je, npr. $d^+(x) = 0$ pa iz vrha x ne možemo izaći.
- Digraf ima usmjereni Hamiltonov put $wuvx$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Posljedica ◂ teorema 9.1. je sljedeća karakterizacija digrafova koji imaju usmjerenu Eulerovu stazu.

Korolar 9.1.

Digraf D ima usmjerenu Eulerovu stazu akko je povezan i svi vrhovi, osim njih dva, imaju jednaki broj ulaznih i izlaznih lukova. Nadalje, kod ta dva vrha se broj ulaznih i izlaznih lukova razlikuje za jedan.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Neka je $D = (V, A)$ digraf. Definiramo sljedeće brojeve.

$$\delta^- = \delta^-(D) := \min_{v \in V} d^-(v)$$

$$\delta^+ = \delta^+(D) := \min_{v \in V} d^+(v)$$

$$\Delta^- = \Delta^-(D) := \max_{v \in V} d^-(v)$$

$$\Delta^+ = \Delta^+(D) := \max_{v \in V} d^+(v)$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Sljedeći teorem daje dovoljne uvjete da bi neki digraf bio Hamiltonov. Međutim, ti uvjeti nisu i nužni. Teorem je analogan ◂ Diracovom teoremu za Hamiltonove grafove.

Teorem 9.2.

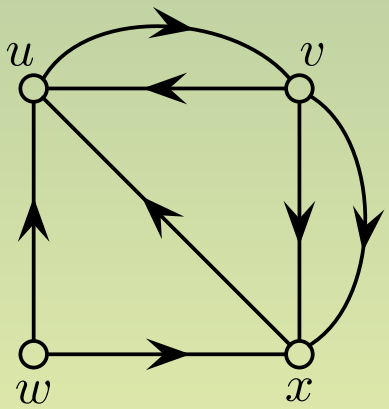
Ako je D striktni digraf i $\min\{\delta^-, \delta^+\} \geqslant \frac{\nu}{2} > 1$, tada je D Hamiltonov digraf.

Zadatak 9.1.

Kako glasi obrat gornjeg teorema? Dokažite da taj obrat ne vrijedi.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Neka je $D = (V, A)$ digraf i $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. **Matrica susjedstva digrafa** D je $n \times n$ matrica $M = [m_{ij}]$, gdje je m_{ij} broj lukova kojima je početak u vrhu v_i, a kraj u vrhu v_j. Matrica M općenito ne mora biti simetrična matrica jer ako postoji luk $v_i v_j$, tada ne mora postojati i luk $v_j v_i$.



$$M = \begin{array}{c} \\ u \\ v \\ w \\ x \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u & v & w & x \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Zadatak 9.2.

Na koji način se može izračunati instupanj i outstupanj nekog vrha u digrafu ako je on zadan svojom matricom susjedstva? Implementirajte svoj algoritam na računalu.

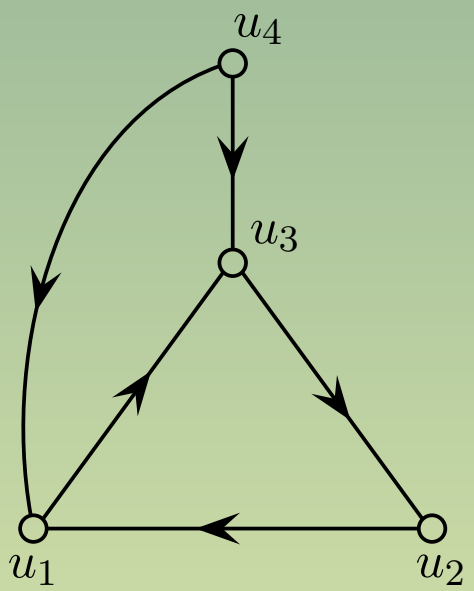
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Kao i kod grafova, tako i kod digrafova vrijedi sljedeća propozicija za računanje ukupnog broja svih usmjerenih šetnji između dva vrha u digrafu.

Propozicija 9.3.

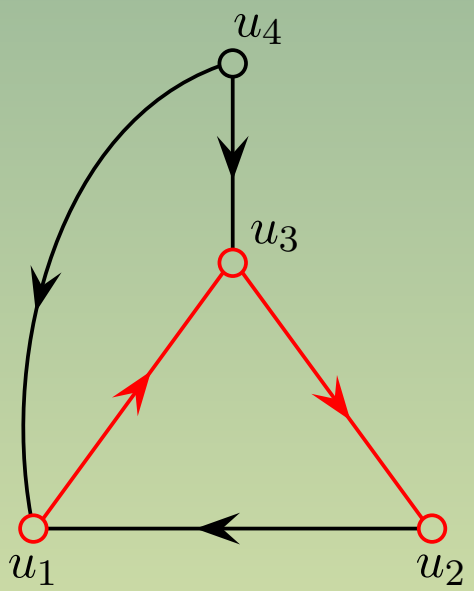
Neka je $M = [m_{ij}]$ matrica susjedstva digrafa D. Neka je $m_{ij}^{(k)}$ element na poziciji (i, j) u matrici M^k. Tada je $m_{ij}^{(k)}$ jednak ukupnom broju svih (v_i, v_j) usmjerenih šetnji duljine k. Stoga je broj svih usmjerenih šetnji duljine k u digrafu D jednak sumi svih elemenata matrice M^k.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

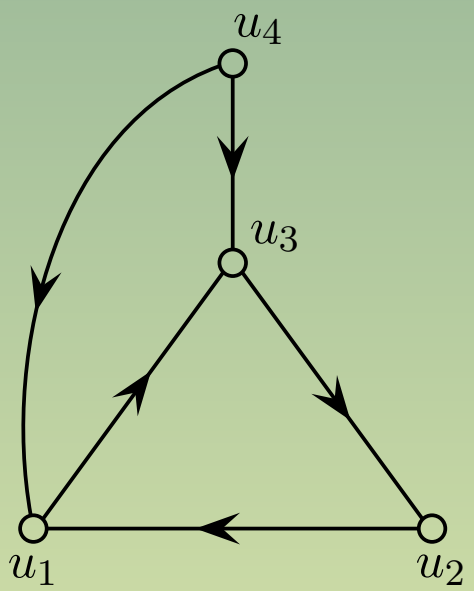


$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kako je $m_{12}^{(2)} = 1$, slijedi da postoji samo jedna usmjerena šetnja duljine dva od vrha u_1 prema vrhu u_2 i to je usmjereni put $u_1u_3u_2$.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

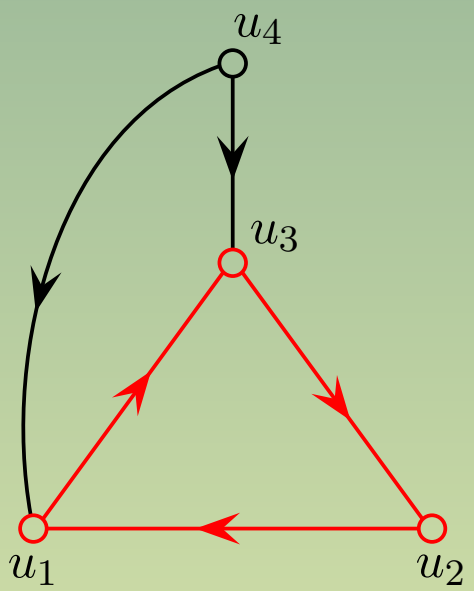


$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kako je $m_{21}^{(2)} = 0$, slijedi da ne postoji niti jedna usmjerena šetnja duljine dva od vrha u_2 prema vrhu u_1.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

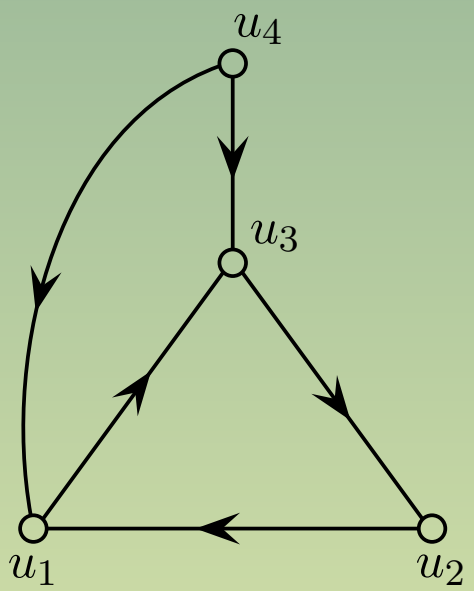


$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kako je $m_{22}^{(3)} = 1$, slijedi da postoji samo jedna usmjerena šetnja duljine tri od vrha u_2 prema vrhu u_2 i to je usmjereni ciklus $u_2u_1u_3u_2$.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

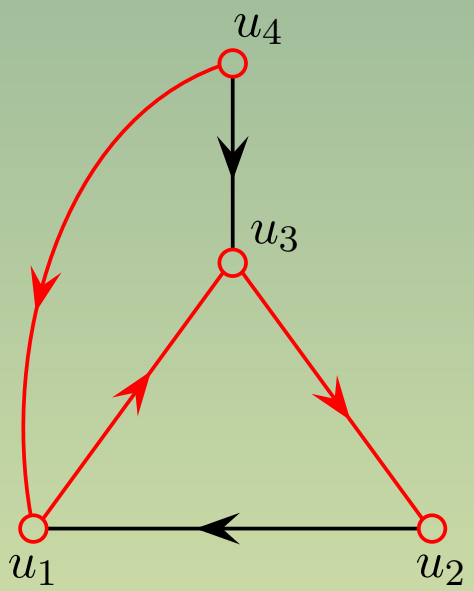


$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kako je $m_{12}^{(3)} = 0$, slijedi da ne postoji niti jedna usmjerena šetnja duljine tri od vrha u_1 prema vrhu u_2.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

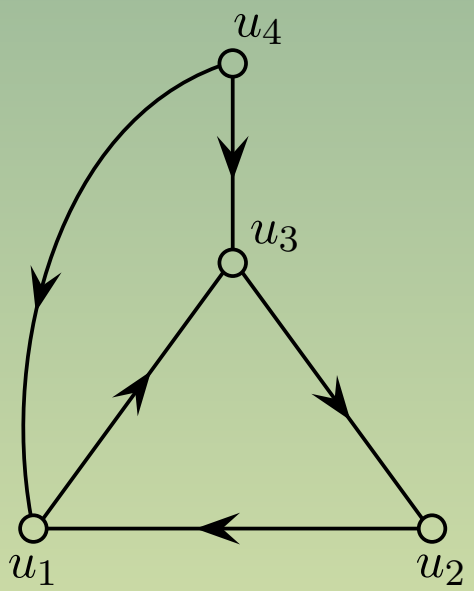


$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kako je $m_{42}^{(3)} = 1$, slijedi da postoji samo jedna usmjerena šetnja duljine tri od vrha u_4 prema vrhu u_2 i to je usmjereni put $u_4u_1u_3u_2$.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

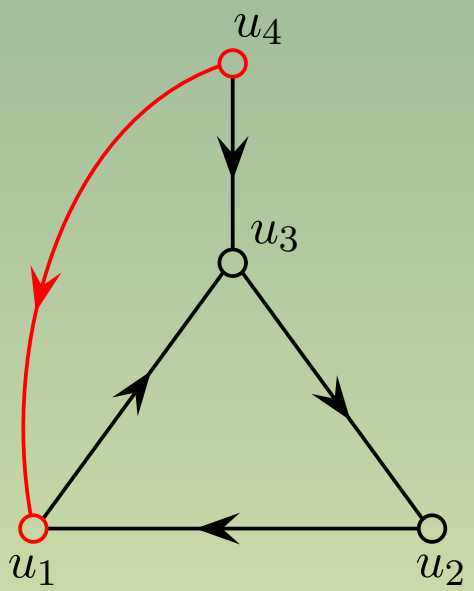


$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kako je $m_{43}^{(5)} = 1$, slijedi da postoji samo jedna usmjerena šetnja duljine pet od vrha u_4 prema vrhu u_3 i to je šetnja

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

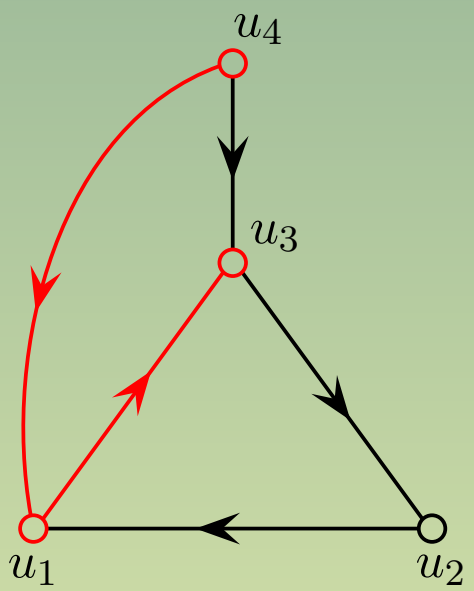


$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kako je $m_{43}^{(5)} = 1$, slijedi da postoji samo jedna usmjerena šetnja duljine pet od vrha u_4 prema vrhu u_3 i to je šetnja u_4u_1

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

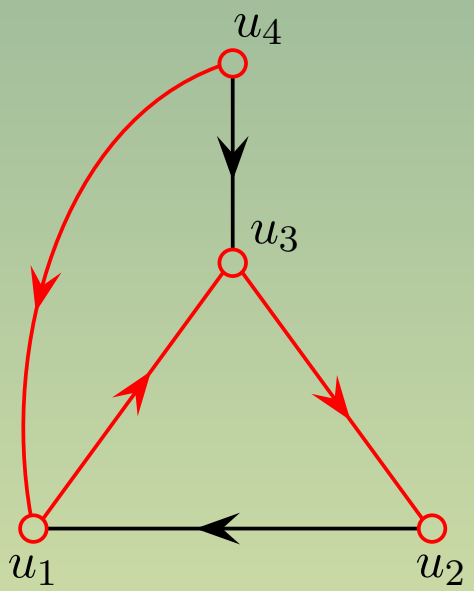


$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kako je $m_{43}^{(5)} = 1$, slijedi da postoji samo jedna usmjerena šetnja duljine pet od vrha u_4 prema vrhu u_3 i to je šetnja $u_4u_1u_3$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

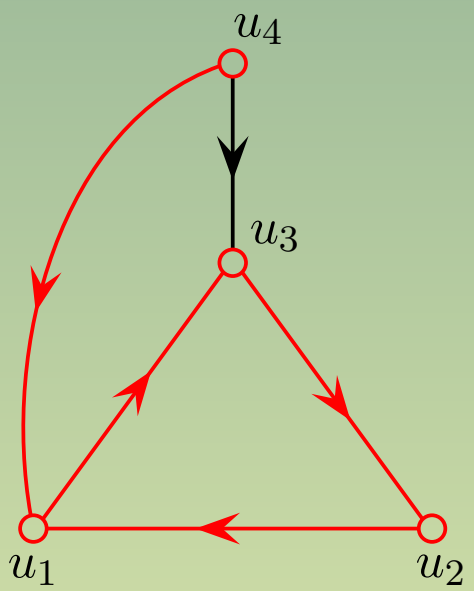


$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kako je $m_{43}^{(5)} = 1$, slijedi da postoji samo jedna usmjerena šetnja duljine pet od vrha u_4 prema vrhu u_3 i to je šetnja $u_4u_1u_3u_2$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

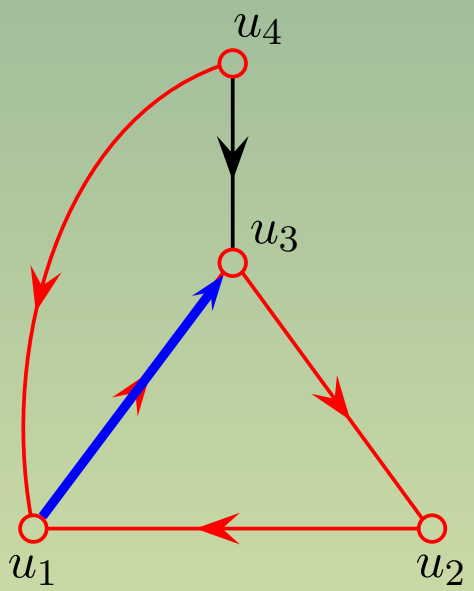


$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kako je $m_{43}^{(5)} = 1$, slijedi da postoji samo jedna usmjerena šetnja duljine pet od vrha u_4 prema vrhu u_3 i to je šetnja $u_4u_1u_3u_2u_1$

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

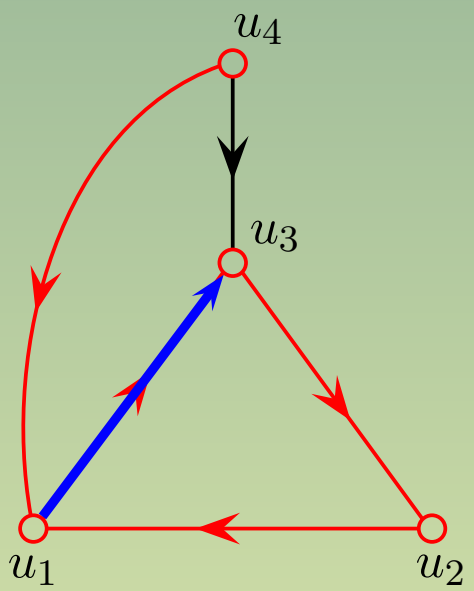


$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kako je $m_{43}^{(5)} = 1$, slijedi da postoji samo jedna usmjerena šetnja duljine pet od vrha u_4 prema vrhu u_3 i to je šetnja $u_4u_1u_3u_2u_1u_3$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Uočite da ova usmjerena šetnja nije, niti usmjerena staza, niti usmjereni put, jer se i neki vrhovi i neki lukovi ponavljaju u toj šetnji.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Kao i kod grafova, tako i kod digrafova vrijede sljedeća dva teorema o izomorfnosti digrafa.

Teorem 9.3.

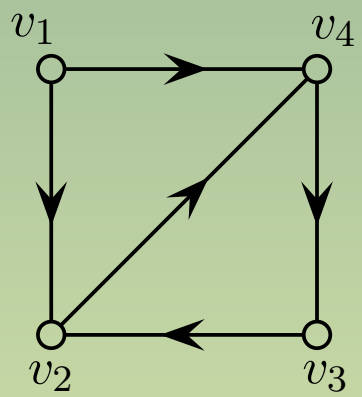
Digrafovi D_1 i D_2 su izomorfni akko se njihovi vrhovi mogu označiti tako da su im matrice susjedstva jednake.

Teorem 9.4.

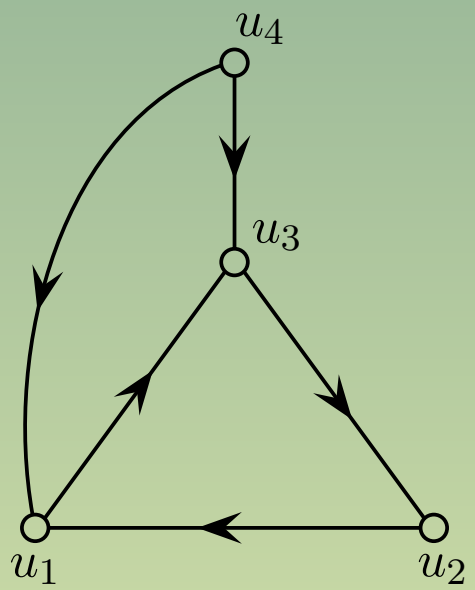
Dva digrafa s pripadnim matricama susjedstva A_1 i A_2 su izomorfni akko postoji matrica permutacije P takva da je $A_2 = PA_1P^T$.

Matricu permutacije P pronađemo na isti način kako smo to objasnili kod grafova.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



D_1



D_2

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Izomorfizam $\varphi : V(D_1) \to V(D_2)$ digrafova D_1 i D_2 je

$$\varphi(v_1) = u_4,\ \varphi(v_2) = u_1,\ \varphi(v_3) = u_2,\ \varphi(v_4) = u_3.$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dokažite da je φ zaista izomorfizam digrafova D_1 i D_2. Nadalje

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ u_4 & u_1 & u_2 & u_3 \end{array}$$

1. redak od $A_1 \to$ 4. redak od A_2
2. redak od $A_1 \to$ 1. redak od A_2
3. redak od $A_1 \to$ 2. redak od A_2
4. redak od $A_1 \to$ 3. redak od A_2

1. stupac $A_1 \to$ 4. stupac od A_2
2. stupac $A_1 \to$ 1. stupac od A_2
3. stupac $A_1 \to$ 2. stupac od A_2
4. stupac $A_1 \to$ 3. stupac od A_2

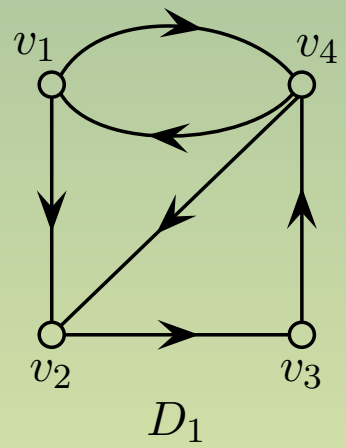
pa je matrica permutacije P za koju je $A_2 = PA_1P^T$ jednaka

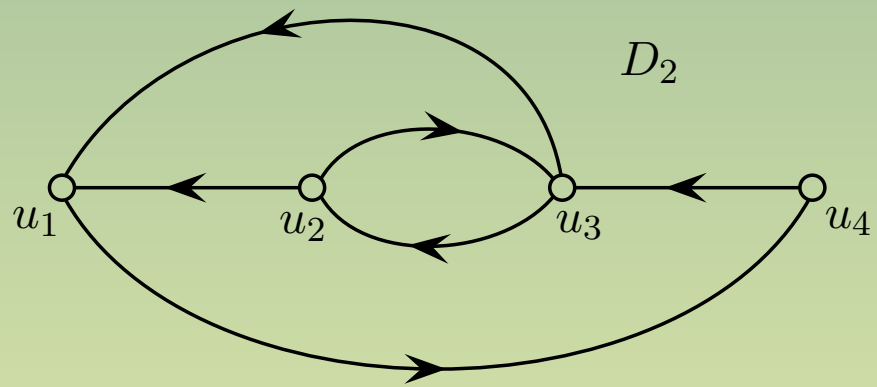
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.1.

Zadani su digrafovi





a. *Pronađite matrice susjedstva A_1 i A_2 zadanih digrafova.*

b. *Dokažite da su digrafovi D_1 i D_2 izomorfni.*

c. *Pronađite matricu permutacije P za koju je $A_2 = PA_1P^T$.*

d. *Jesu li zadani digrafovi dipovezani?*

e. *Jesu li zadani digrafovi Eulerovi?*

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.

a) Matrice susjedstva digrafova D_1 i D_2 su redom

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Kako je v_4 jedini vrh u digrafu D_1 kojemu je instupanj i outstupanj jednak 2, a u_3 je jedini takav vrh u digrafu D_2 pa mora biti $\varphi(v_4) = u_3$. Isto tako, v_3 je jedini vrh u digrafu D_1 kojemu su instupanj i outstupanj jednaki 1, a u_4 je jedini takav vrh u digrafu D_2 pa mora biti $\varphi(v_3) = u_4$. Iz sličnih razloga mora biti $\varphi(v_1) = u_2$ i $\varphi(v_2) = u_1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dakle, dobili smo da nužno mora biti

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ u_2 & u_1 & u_4 & u_3 \end{array}$$

Da bismo provjerili da je φ zaista izomorfizam, dovoljno je pogledati matricu susjedstva $\tilde{A}_2$ digrafa D_2 u kojoj prvi redak (stupac) odgovara vrhu u_2, drugi redak (stupac) odgovara vrhu u_1, treći redak (stupac) odgovara vrhu u_4, a četvrti redak (stupac) odgovara vrhu u_3. Dobivamo da je

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uočavamo da je $\tilde{A}_2 = A_1$ pa prema ◂ teoremu 9.3. slijedi da je φ izomorfizam.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

- Iz dobivenog izomorfizma

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ u_2 & u_1 & u_4 & u_3 \end{array}$$

1. redak od $A_1 \to$ 2. redak od A_2
2. redak od $A_1 \to$ 1. redak od A_2
3. redak od $A_1 \to$ 4. redak od A_2
4. redak od $A_1 \to$ 3. redak od A_2

1. stupac $A_1 \to$ 2. stupac od A_2
2. stupac $A_1 \to$ 1. stupac od A_2
3. stupac $A_1 \to$ 4. stupac od A_2
4. stupac $A_1 \to$ 3. stupac od A_2

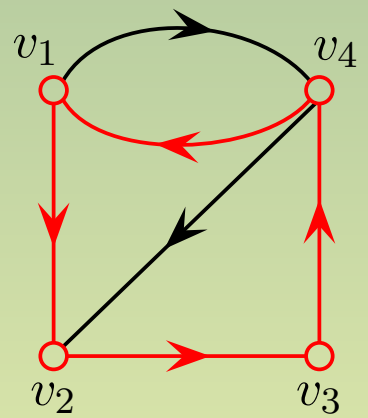
slijedi da je matrica permutacije P za koju je $A_2 = PA_1P^T$ jednaka

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

d) $v_1v_2v_3v_4v_1$ je usmjereni Hamiltonov ciklus u D_1 pa je D_1 dipovezan digraf. Kako su D_1 i D_2 izomorfni digrafovi, tada je i digraf D_2 također dipovezan.



e) Kako je $d^+(v_2) \neq d^-(v_2)$, slijedi da digraf D_1 nije Eulerov. Zbog izomorfnosti digrafova D_1 i D_2 slijedi da digraf D_2 također nije Eulerov. Uočite da su oba digrafa D_1 i D_2 Hamiltonovi digrafi.

Primjer 9.2.

Mora li dipovezani digraf biti Hamiltonov digraf?

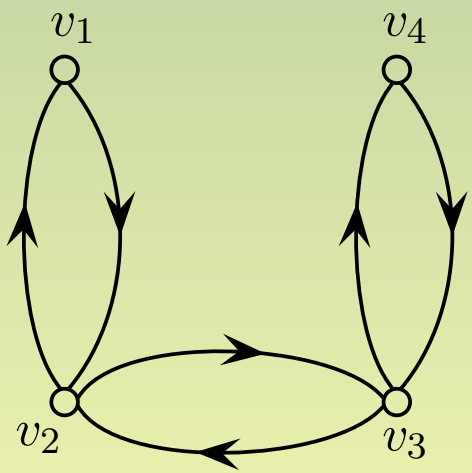
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.2.

Mora li dipovezani digraf biti Hamiltonov digraf?

Rješenje.

Dipovezani digraf ne mora biti ujedno i Hamiltonov digraf. Na donjoj slici je dan jedan primjer digrafa koji je dipovezan, ali nije Hamiltonov. Navedite sami još nekoliko primjera takvih digrafa.



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.3.

Neka je G povezani graf u kojemu su svi vrhovi parnog stupnja. Mogu li se bridovi od G orijentirati tako da dobiveni digraf bude Eulerov?

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.3.

Neka je G povezani graf u kojemu su svi vrhovi parnog stupnja. Mogu li se bridovi od G orijentirati tako da dobiveni digraf bude Eulerov?

Rješenje.

Kako su u G svi vrhovi parnog stupnja, G je Eulerov graf. Orijentiramo li bridove od G u smjeru obilaska neke Eulerove ture u G, dobit ćemo usmjerenu Eulerovu turu pa će dobiveni digraf biti Eulerov.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.4.

Neka je G povezani graf. Stavimo li orijentaciju na svaki brid, mora li dobiveni digraf biti dipovezan?

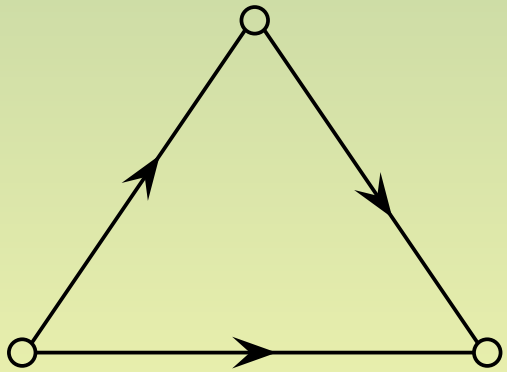
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.4.

Neka je G povezani graf. Stavimo li orijentaciju na svaki brid, mora li dobiveni digraf biti dipovezan?

Rješenje.

Dobiveni digraf ne mora biti nužno dipovezan. Na primjer, K_3 je povezan graf, ali



nije dipovezani digraf.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.5.

Navedite primjer digrafa za kojeg vrijedi $\delta^- = \delta^+ = \Delta^- = \Delta^+$.

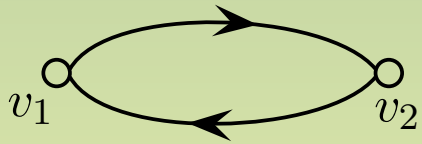
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.5.

Navedite primjer digrafa za kojeg vrijedi $\delta^- = \delta^+ = \Delta^- = \Delta^+$.

Rješenje.

Na primjer,



Kako je $d^+(v_1) = d^+(v_2) = 1$, slijedi da je $\delta^+ = \Delta^+ = 1$.
Kako je $d^-(v_1) = d^-(v_2) = 1$, slijedi da je $\delta^- = \Delta^- = 1$.
Iz svega slijedi da za dani digraf vrijedi $\delta^- = \delta^+ = \Delta^- = \Delta^+$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Turnir

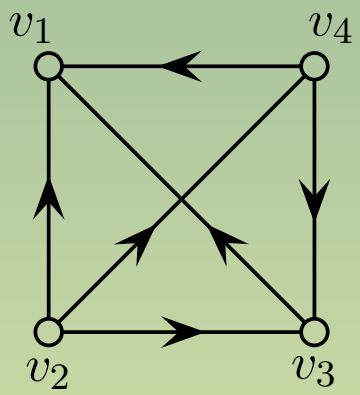
Turnir je orijentirani potpuni graf. U svakom turniru za svaka dva različita vrha u i v, ili je (u, v) luk, ili je (v, u) luk, ali nisu oboje istovremeno lukovi. Stoga u turniru sigurno nema usmjerenih ciklusa duljine $\leqslant 2$.

Uspjeh (score) vrha v u turniru T je outstupanj vrha v u T. Uspjeh vrha v označavamo sa $s(v)$.

Niz uspjeha turnira je lista outstupnjeva svih vrhova u padajućem poretku. Ukoliko ta lista nije sortirana, tada govorimo o **vektoru uspjeha** turnira.

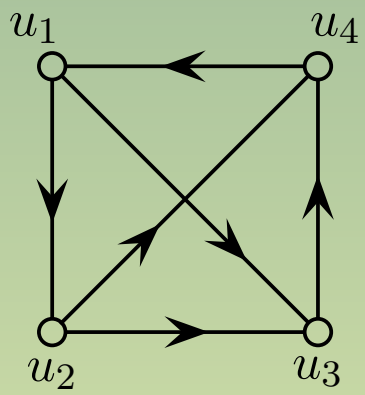
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



niz uspjeha

$(3, 2, 1, 0)$



niz uspjeha

$(2, 2, 1, 1)$

$$s(v_1) = 0,\ s(v_2) = 3,\ s(v_3) = 1,\ s(v_4) = 2$$

$$s(u_1) = 2,\ s(u_2) = 2,\ s(u_3) = 1,\ s(u_4) = 1$$

Primjer 9.6.

Neka je T turnir s n vrhova u kojemu svaki vrh ima različiti uspjeh od preostalih vrhova. Kako glasi niz uspjeha turnira T?

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.6.

Neka je T turnir s n vrhova u kojemu svaki vrh ima različiti uspjeh od preostalih vrhova. Kako glasi niz uspjeha turnira T?

Rješenje.

Svaki vrh može imati najviše uspjeh $n-1$. Kako je uspjeh svakog vrha $\geqslant 0$, slijedi da je uspjeh svakog vrha element skupa $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Kako svaki vrh ima različiti uspjeh od preostalih vrhova, slijedi da je niz uspjeha turnira T jednak $(n-1, n-2, \ldots, 2, 1, 0)$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.6.

Neka je T turnir s n vrhova u kojemu svaki vrh ima različiti uspjeh od preostalih vrhova. Kako glasi niz uspjeha turnira T?

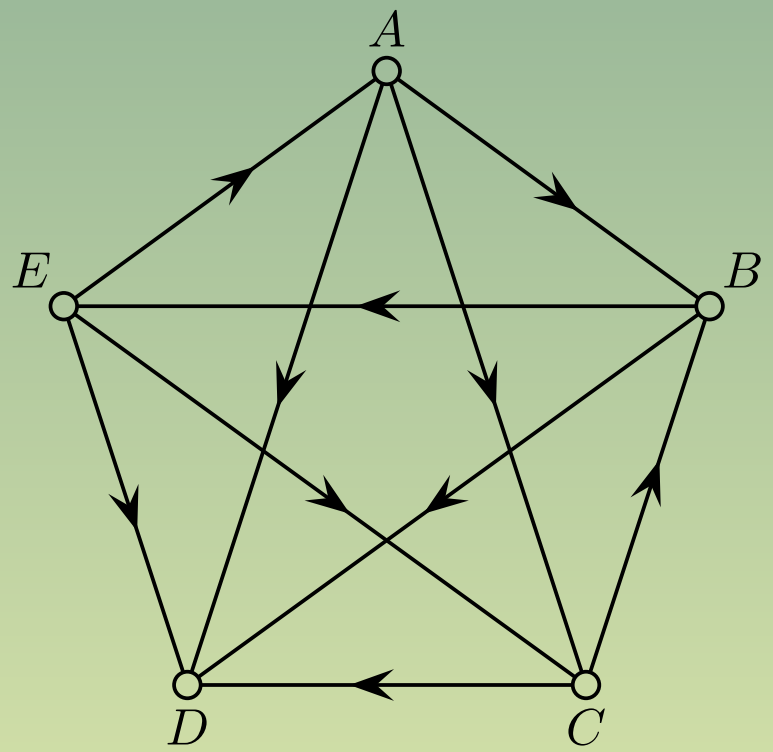
Rješenje.

Svaki vrh može imati najviše uspjeh $n-1$. Kako je uspjeh svakog vrha $\geqslant 0$, slijedi da je uspjeh svakog vrha element skupa $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Kako svaki vrh ima različiti uspjeh od preostalih vrhova, slijedi da je niz uspjeha turnira T jednak $(n-1, n-2, \ldots, 2, 1, 0)$.

Napomena.

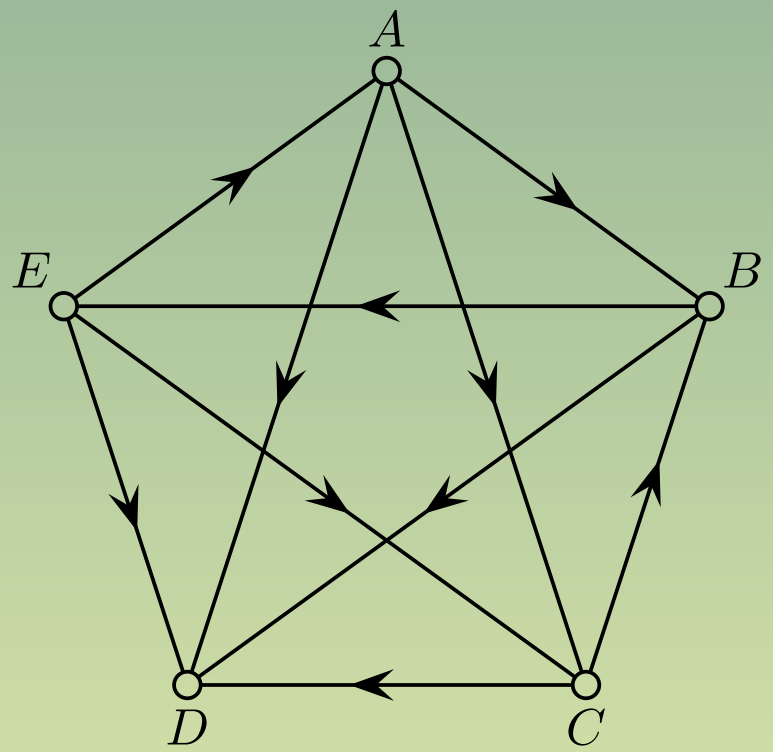
Promatramo li natjecanje od n igrača u kojemu svaki igrač igra protiv svakog igrača, tada to natjecanje možemo reprezentirati pomoću turnira. Vrhovi tog turnira su igrači, a ako igrač u pobijedi igrača v, tada u turniru imamo luk (u, v).

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Igrač A je pobijedio igrače B, C i D, a izgubio je od igrača E.
Igrač B je pobijedio igrače D i E, a izgubio je od igrača A i C.
Igrač C je pobijedio igrače B i D, a izgubio je od igrača A i E.
Igrač D je izgubio od svih ostalih igrača.
Igrač E je pobijedio igrače A, C i D, a izgubio je od igrača B.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Uspjeh igrača A je 3 jer ima tri pobjede.

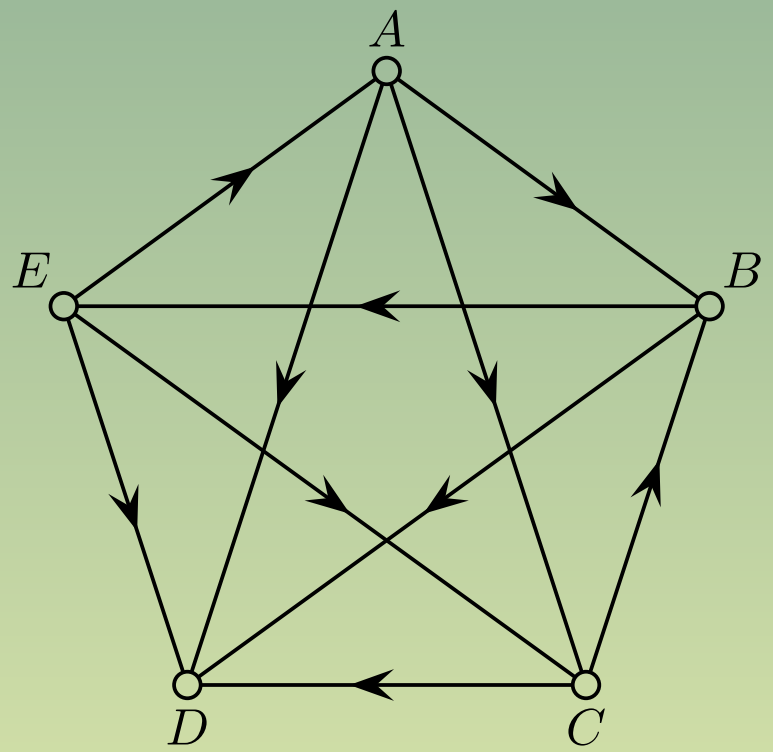
Uspjeh igrača B je 2 jer ima dvije pobjede.

Uspjeh igrača C je 2 jer ima dvije pobjede.

Uspjeh igrača D je 0 jer ima nula pobjeda.

Uspjeh igrača E je 3 jer ima tri pobjede.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

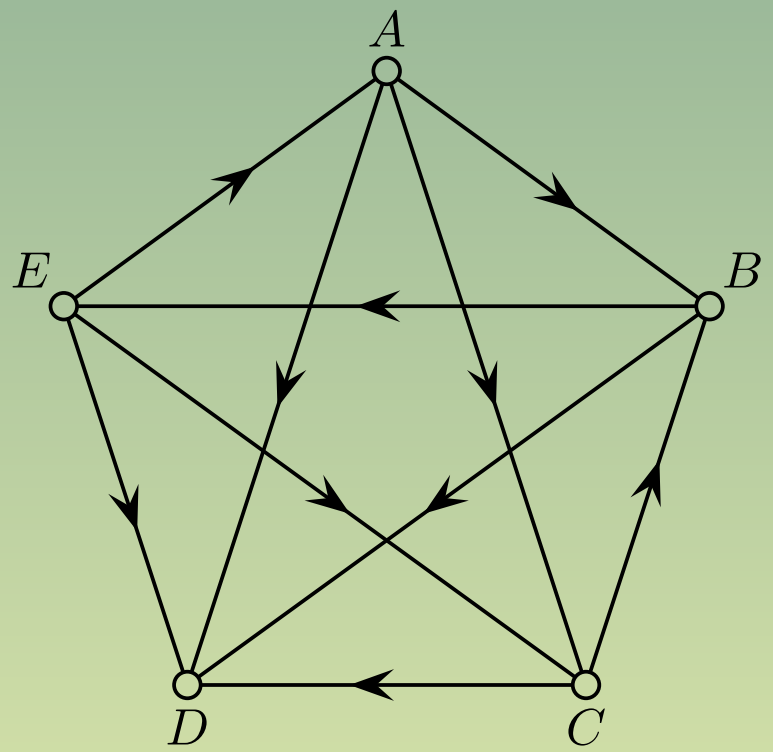


Niz uspjeha promatranog turnira je $(3, 3, 2, 2, 0)$. Želimo li rangirati igrače, pogledamo vektor uspjeha

$$\big(s(A), s(B), s(C), s(D), s(E)\big) = (3, 2, 2, 0, 3)$$

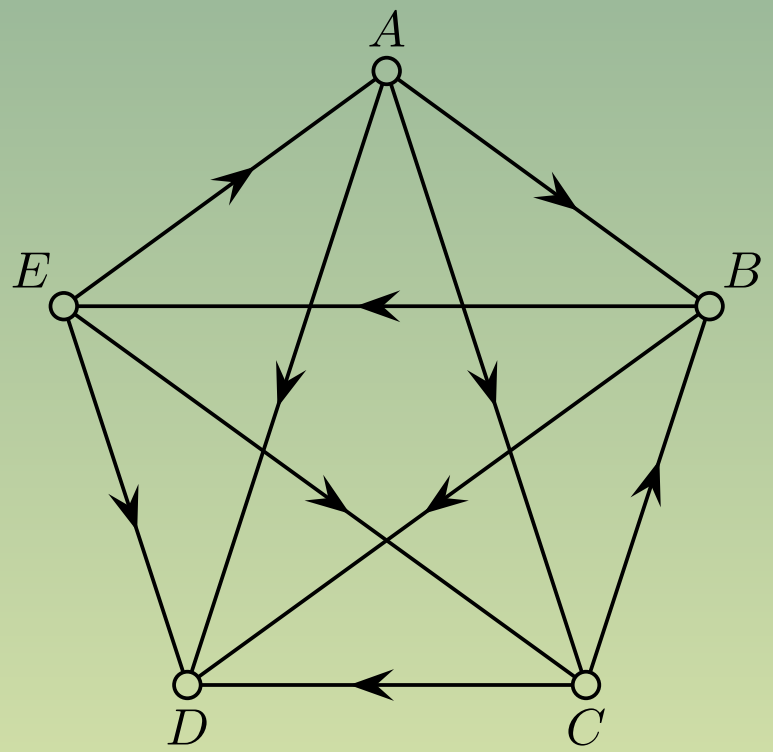
iz kojeg vidimo da igrači A i E moraju biti na vrhu rang liste jer imaju najviše pobjeda.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Međutim, postavlja se pitanje koji je od igrača A i E prvi, a koji je drugi. Kako je igrač E pobijedio igrača A, tada je igrač E prvi, a igrač A drugi na rang listi. Problem je što to iz vektora uspjeha ne možemo saznati jer on sadrži samo broj pobjeda pojedinih igrača, ali ne i informacije tko je koga pobijedio.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Isto tako, igrači B i C imaju isti broj pobjeda, ali kako je igrač C pobijedio igrača B, igrač C će biti prije igrača B na rang listi. Konačna rang lista promatranog turnira je

$$E, A, C, B, D.$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Teorem 9.5.

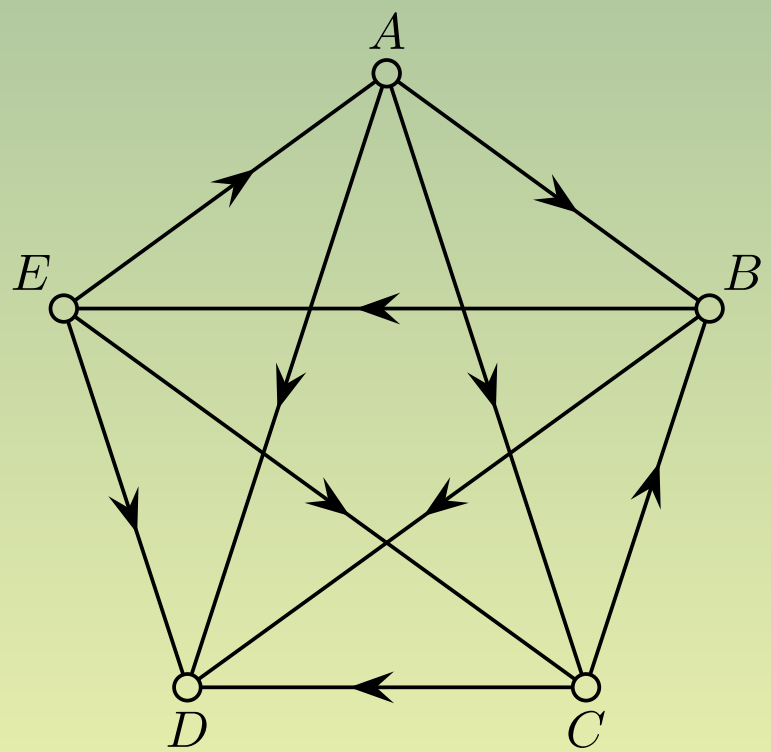
Svaki turnir ima usmjereni Hamiltonov put.

Dokaz.

Neka su v_1 i v_2 dva vrha u turniru takvi da je (v_1, v_2) luk. Taj put ćemo induktivno nadopunjavati tako dugo dok ne dobijemo usmjereni Hamiltonov put (usmjereni put koji sadrži sve vrhove turnira). Pretpostavimo da smo induktivno došli do usmjerenog puta $v_1 v_2 \dots v_k$, gdje je $k \geqslant 2$. Neka je x bilo koji vrh koji nije na usmjerenom putu $v_1 v_2 \dots v_k$. Ako je (x, v_1) luk, tada vrh x stavljamo na početak puta $v_1 v_2 \dots v_k$. Ako (x, v_1) nije luk, tada je (v_1, x) luk jer se radi o turniru. Neka je m najveći prirodni broj takav da su svi $(v_1, x), (v_2, x), \dots, (v_m, x)$ lukovi u turniru. Ako je $m = k$, tada imamo luk (v_k, x) pa x stavljamo na kraj puta $v_1 v_2 \dots v_k$. Ako je $m < k$, tada su (v_m, x) i (x, v_{m+1}) lukovi pa x stavljamo između v_m i v_{m+1}. Na opisani način ćemo doći do usmjerenog Hamiltonovog puta. ♡

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Nažalost, usmjereni Hamiltonov put u turniru ne mora biti jedinstven pa se on ne može primijeniti na rangiranje igrača. Naime, pogledamo li prethodno promatrani turnir

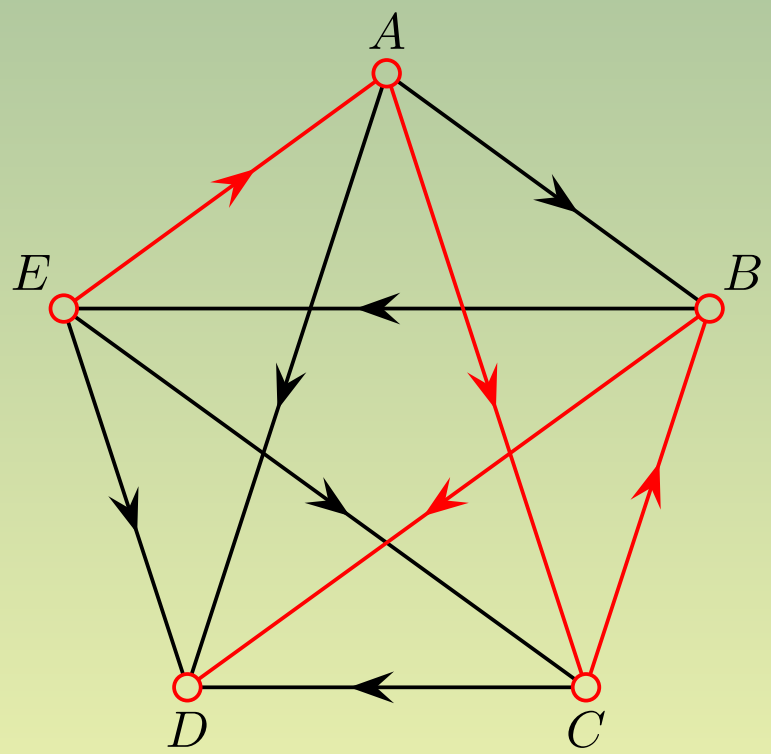


kod kojeg je vektor uspjeha

$$\big(s(A), s(B), s(C), s(D), s(E)\big) = (3, 2, 2, 0, 3)$$

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

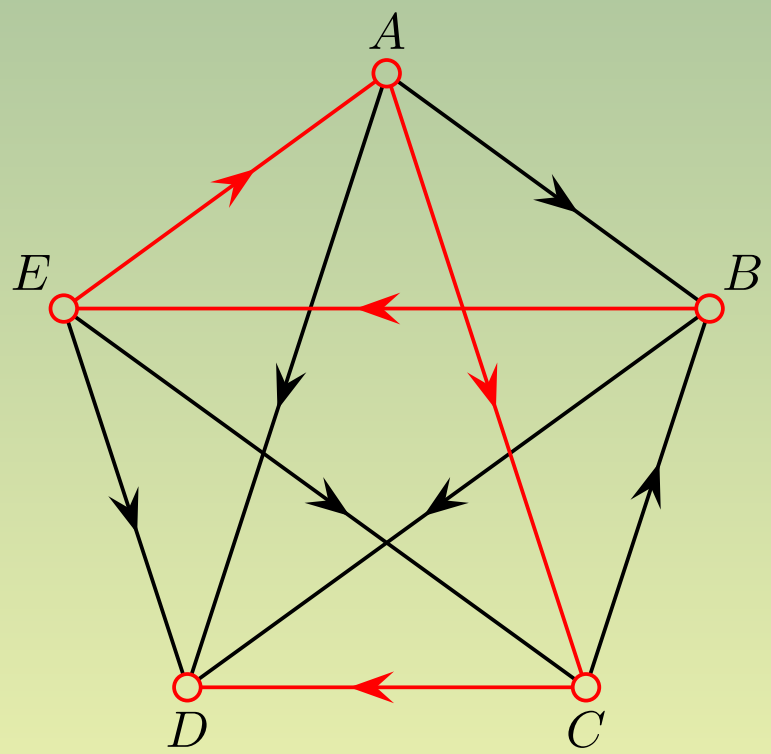
Nažalost, usmjereni Hamiltonov put u turniru ne mora biti jedinstven pa se on ne može primijeniti na rangiranje igrača. Naime, pogledamo li prethodno promatrani turnir



uočavamo u njemu usmjereni Hamiltonov put $EACBD$ koji daje dobru rang listu E, A, C, B, D.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Nažalost, usmjereni Hamiltonov put u turniru ne mora biti jedinstven pa se on ne može primijeniti na rangiranje igrača. Naime, pogledamo li prethodno promatrani turnir



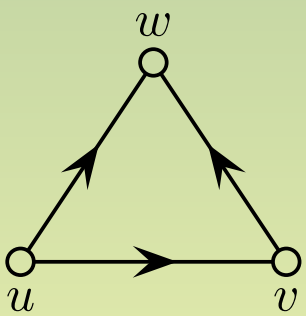
Međutim, $BEACD$ je također usmjereni Hamiltonov put koji daje rang listu B, E, A, C, D koja očito ne valja, tj. igrači nisu pomoću ovog usmjerenog Hamiltonovog puta dobro rangirani.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

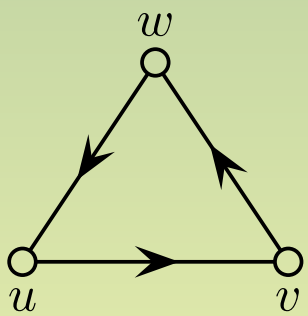
Turnir je **tranzitivan** ako i samo ako po definiciji vrijedi

$$(u, v) \text{ je luk, } (v, w) \text{ je luk } \Rightarrow (u, w) \text{ je luk}$$

za svaka tri vrha u turniru. Drugim riječima, turnir je tranzitivan ako i samo ako ne sadrži usmjerene 3-cikluse.



pojavljuje se u tranzitivnom turniru



ne pojavljuje se u tranzitivnom turniru

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Teorem 9.6 (Karakterizacija tranzitivnih turnira).

Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

i. *Turnir T ima jedinstveni usmjereni Hamiltonov put.*
ii. *Turnir T je tranzitivan.*
iii. *Svaki vrh u T ima drukčiji uspjeh od preostalih vrhova.*

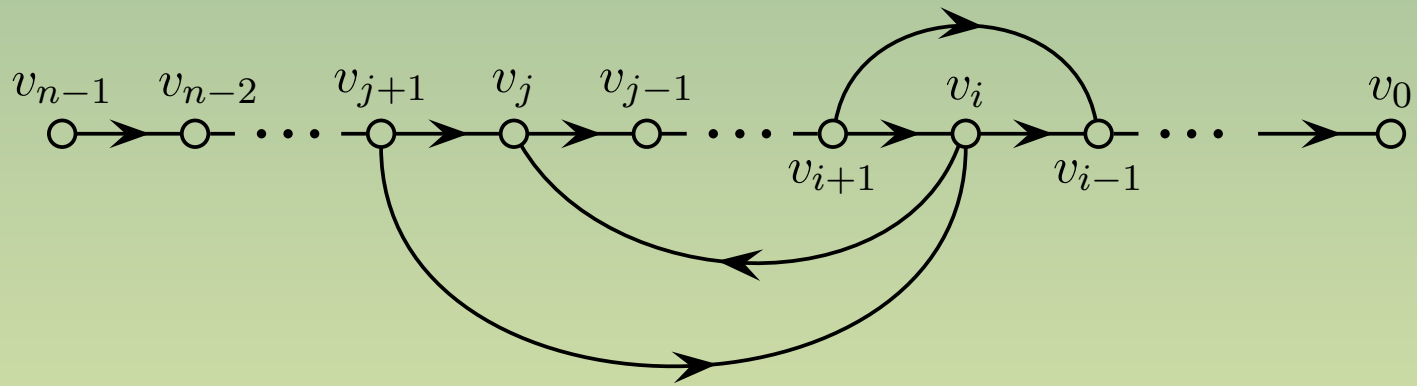
Dokaz.

$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$

Neka je T turnir koji ima jedinstveni usmjereni Hamiltonov put $v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_1v_0$. Dovoljno je dokazati da je (v_j, v_i) luk kada god je $j > i$. Iz toga će slijediti da T nema usmjerenih 3-ciklusa, odnosno da je T tranzitivni turnir. Pretpostavimo suprotno, tj. da (v_j, v_i) nije luk u T za neke $j > i$. Tada je (v_i, v_j) luk jer je T turnir.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Neka je i najmanji takav broj, a j najveći takav broj takvi da postoji luk (v_i, v_j). Ako je $j \neq n-1$ i $i \neq 0$ (kao na slici), tada



je $v_{n-1} \cdots v_{j+1} v_i v_j v_{j-1} \cdots v_{i+1} v_{i-1} \cdots v_0$ drugi usmjereni Hamiltonov put, što je kontradikcija s pretpostavkom. Ako je $i = 0$ i $j \neq n-1$, tada je $v_{n-1} \cdots v_{j+1} v_0 v_j v_{j-1} \cdots v_1$ drugi usmjereni Hamiltonov put, što je nemoguće zbog pretpostavke. Ako je $j = n-1$ i $i \neq 0$, tada je $v_i v_{n-1} v_{n-2} \cdots v_{i+1} v_{i-1} \cdots v_0$ drugi usmjereni Hamiltonov put. Konačno, ako je $j = n-1$ i $i = 0$, tada je $v_0 v_{n-1} v_{n-2} \cdots v_1$ drugi usmjereni Hamiltonov put.

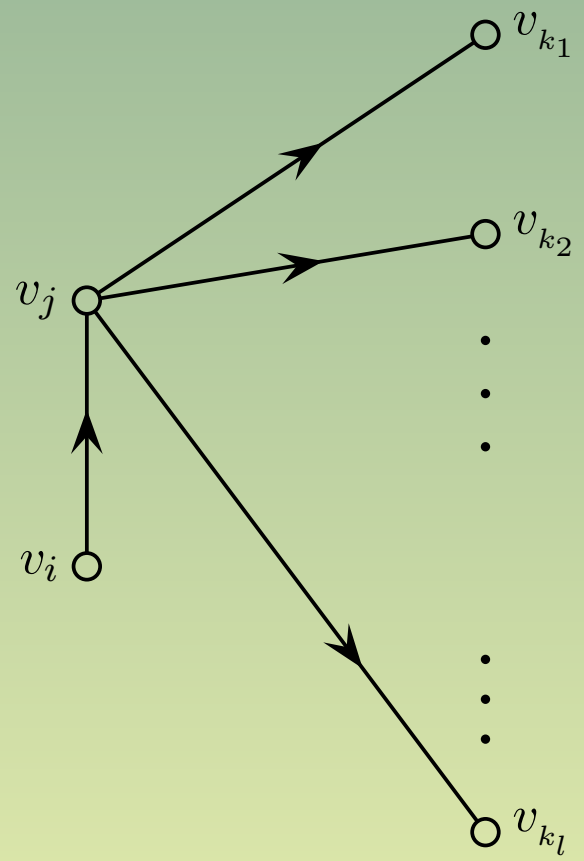
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

U svakom slučaju dobivamo kontradikciju s jedinstvenošću Hamiltonovog usmjerenog puta. Dakle, T je tranzitivni turnir.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$

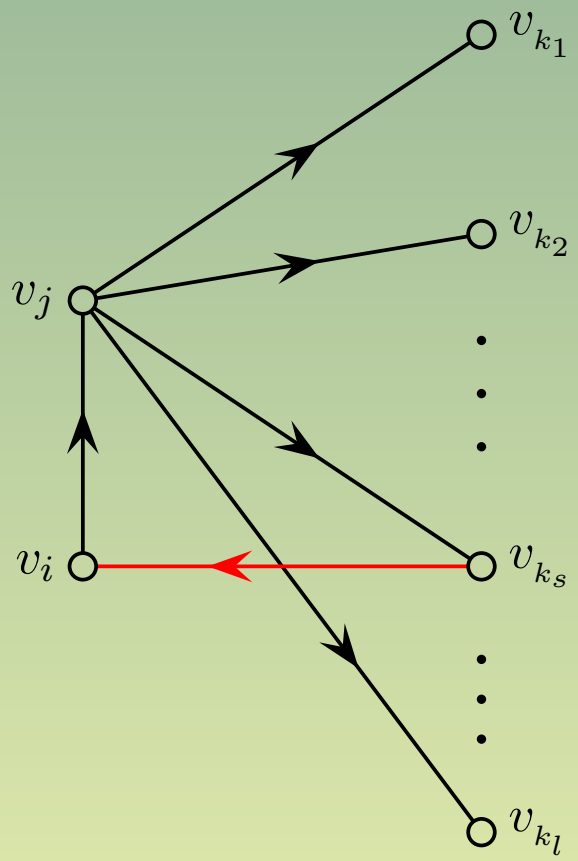
Neka je T tranzitivni turnir. Pretpostavimo da ipak postoje dva vrha u T koji imaju isti uspjeh. Neka su to vrhovi v_i i v_j. Tada je $d^+(v_i) = d^+(v_j) = l \geqslant 1$ ako T ima barem dva vrha. Kako je T turnir, tada mora biti, ili (v_i, v_j) luk, ili (v_j, v_i) luk. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je (v_i, v_j) luk. Neka su $v_{k_1}, v_{k_2}, \ldots, v_{k_l}$ svi vrhovi prema kojima idu lukovi iz vrha v_j. Kako je T turnir, tada vrh v_i mora biti spojen sa svakim od vrhova $v_{k_1}, v_{k_2}, \ldots, v_{k_l}$ lukom (bilo da taj luk ima početak u v_i, a kraj u nekom od tih vrhova ili obrnuto).

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



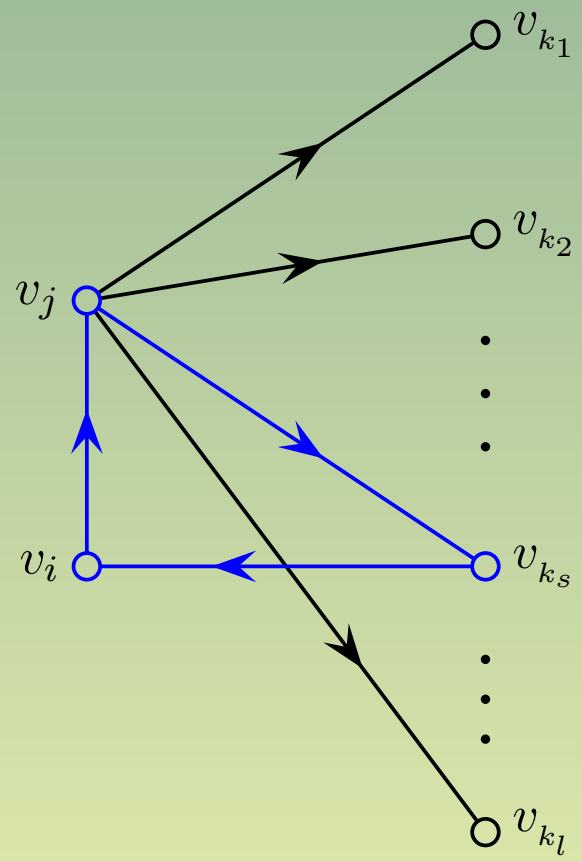
Kako je v_iv_j luk i kako je $d^+(v_i) = l$, slijedi da ne mogu svi lukovi imati početak u v_i, a završetak u vrhovima $v_{k_1}, v_{k_2}, \ldots, v_{k_l}$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



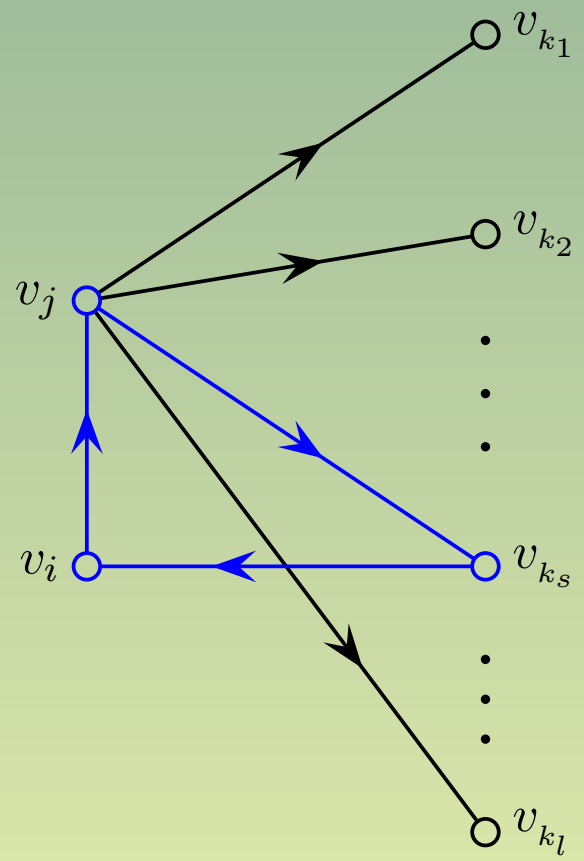
Stoga postoji vrh v_{k_s} za neko $s \in \{1, 2, \ldots, l\}$ takav da je $v_{k_s} v_i$ luk.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Stoga postoji vrh v_{k_s} za neko $s \in \{1, 2, \ldots, l\}$ takav da je $v_{k_s} v_i$ luk. No, tada je $v_i v_j v_{k_s} v_i$ usmjereni 3-ciklus, što je nemoguće jer je po pretpostavci T tranzitivni turnir.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Stoga postoji vrh v_{k_s} za neko $s \in \{1, 2, \ldots, l\}$ takav da je $v_{k_s} v_i$ luk. No, tada je $v_i v_j v_{k_s} v_i$ usmjereni 3-ciklus, što je nemoguće jer je po pretpostavci T tranzitivni turnir. Dakle, svaki vrh ima različiti uspjeh od preostalih vrhova.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

$\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$

Pretpostavimo da svaki vrh u turniru T ima drugačiji uspjeh od preostalih vrhova. Tvrdimo da tada turnir T ima jedinstveni Hamiltonov put. Kako imamo n vrhova, tada uspjesi mogu biti $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Neka su $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ vrhovi turnira takvi da je $d^+(v_i) = i$. U tom slučaju vrh v_{n-1} ima uspjeh $n-1$ pa od njega moramo početi put jer u njega ne možemo ući zbog $d^-(v_{n-1}) = 0$. Iz vrha v_{n-1} imamo lukove prema svim ostalim vrhovima, specijalno i prema vrhu v_{n-2}. Iz vrha v_{n-2} imamo lukove prema svi ostalim vrhovima, osim prema vrhu v_{n-1}. Općenito, iz vrha v_i imamo lukove prema svim vrhovima v_j za $j \in \{0, 1, \ldots, i-1\}$, a prema ostalim vrhovima nema lukova iz vrha v_i. Stoga je jasno da je $v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_2v_1v_0$ jedini Hamiltonov put u turniru T jer ne postoji luk iz vrha s manjim indeksom prema vrhu s većim indeksom. ♡

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Napomena.

Prethodni teorem nam zapravo govori da rangiranje u turniru preko Hamiltonovog puta nema neke koristi jer je to moguće samo ako je turnir tranzitivan, a to je jedino kada su svi uspjesi različiti. No, u tom slučaju nije problem napraviti rang listu, za to nam onda ne trebaju grafovi.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.7.

Neka je A matrica susjedstva turnira. Čemu je jednako $A + A^T$?

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.7.

Neka je A matrica susjedstva turnira. Čemu je jednako $A + A^T$?

Rješenje.

Za svaki par različitih vrhova v_i i v_j točno jedan od v_iv_j i v_jv_i je luk u turniru. Iz toga slijedi da je u matrici susjedstva $A = [a_{ij}]$ točno jedan od a_{ij} i a_{ji} jednak 1, a drugi je jednak 0. Nadalje, $a_{ii} = 0$ jer u turniru nema petlji. Stoga je $A + A^T = J - I$, gdje je I jedinična matrica, a J je matrica čiji su svi elementi jednaki 1. Drugim riječima, $A + A^T$ je kvadratna matrica koja na glavnoj dijagonali ima nule, a izvan glavne dijagonale jedinice.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.8.

Neka je T turnir i neka je v vrh s najvećim uspjehom. Dokažite da se svaki vrh u turniru T može doseći iz vrha v usmjerenim putom duljine najviše 2.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

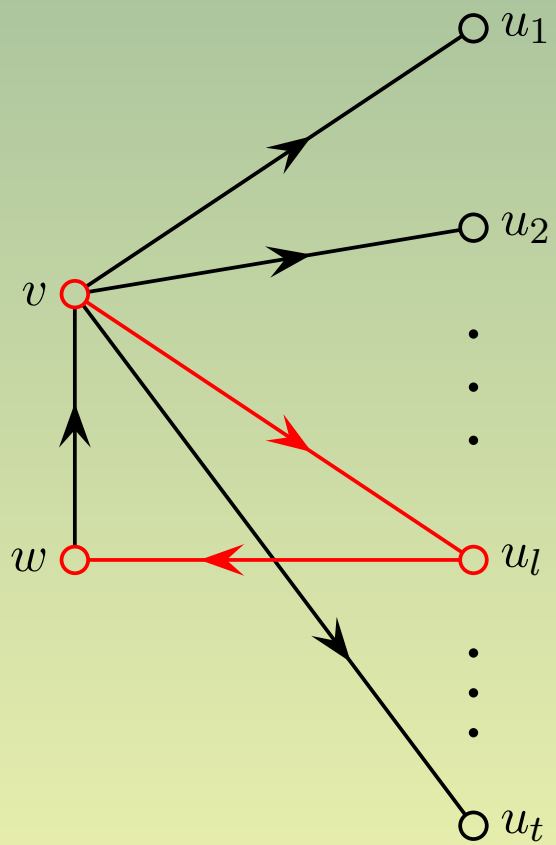
Primjer 9.8.

Neka je T turnir i neka je v vrh s najvećim uspjehom. Dokažite da se svaki vrh u turniru T može doseći iz vrha v usmjerenim putom duljine najviše 2.

Rješenje.

Neka je w bilo koji drugi vrh u T različit od v. Ako je (v, w) luk u T, tada se w može doseći iz v usmjerenim putom duljine 1. Pretpostavimo stoga da je (w, v) luk u turniru T. Neka je $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_t\}$ skup vrhova koje je v pobijedio. Tada u skupu S mora postojati vrh u_l za neko $l \in \{1, 2, \ldots, t\}$ koji je pobijedio vrh w jer bi u protivnom bilo $s(w) \geqslant s(v) + 1$, što bi bilo u kontradikciji s pretpostavkom da vrh v ima najveći uspjeh. No, tada je vu_lw usmjereni put duljine 2 od v do w. Dakle, svaki vrh u T se može doseći iz vrha v usmjerenim putom duljine najviše 2.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.9.

Čemu je jednaka suma svih uspjeha u turniru s n vrhova?

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.9.

Čemu je jednaka suma svih uspjeha u turniru s n vrhova?

Rješenje.

Neka je T turnir s n vrhova $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Iz ◂ propozicije 9.1 slijedi

$$\sum_{i=1}^{n} s(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^+(v_i) = \varepsilon(T) = \binom{n}{2}.$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.10.

a. *Može li* $3, 2, 1, 1$ *biti niz uspjeha turnira?*

b. *Može li* $6, 6, 6, 6, 1, 1, 1, 1$ *biti niz uspjeha turnira?*

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.10.

a. *Može li* $3, 2, 1, 1$ *biti niz uspjeha turnira?*

b. *Može li* $6, 6, 6, 6, 1, 1, 1, 1$ *biti niz uspjeha turnira?*

Rješenje.

a. Prema prethodnom zadatku mora biti $\sum s(v) = \binom{4}{2} = 6$. Međutim, $3 + 2 + 1 + 1 \neq 6$ pa $3, 2, 1, 1$ ne može biti niz uspjeha turnira.

b. Prema prethodnom zadatku mora biti $\sum s(v) = \binom{8}{2} = 28$. U ovom slučaju to i vrijedi jer je

$$6 + 6 + 6 + 6 + 1 + 1 + 1 + 1 = 28.$$

Međutim, ipak $6, 6, 6, 6, 1, 1, 1, 1$ nije niz uspjeha niti jednog turnira. Stoga je uvjet iz prethodnog zadatka samo nužan uvjet, ali ne i dovoljan.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Pogledajmo zašto $6, 6, 6, 6, 1, 1, 1, 1$ nije niz uspjeha niti jednog turnira. Jasno, u ovom slučaju se radi o turnirima s osam vrhova. Naime, treba vidjeti da ne postoji turnir s osam vrhovima koji bi imao 4 vrha outstupnja 6. Pogledajmo dva vrha v_1 i v_2 sa šest pobjeda. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je (v_2, v_1) luk, tj. v_2 je pobijedio v_1. Kako v_1 ima 6 pobjeda, tada iz v_1 prema svim preostalim vrhovima $\{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ idu lukovi. Kako i vrh v_2 ima 6 pobjeda, tada iz v_2 mora ići još pet lukova prema nekim od vrhova iz skupa $\{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ jer je već jedna pobjeda uračunata nad vrhom v_1. Iz toga slijedi da 5 vrhova iz skupa $\{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ ima instupanj barem 2, što znači da pet vrhova od njih osam može imati u ovom trenutku najviše 5 pobjeda. Slijedi da u turniru od osam igrača sigurno ne mogu 4 igrača ostvariti 6 pobjeda. Uočite da iz navedenog možemo zaključiti da u turniru od 8 igrača najviše 3 igrača mogu ostvariti po 6 pobjeda.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Teorem 9.7 (Karakterizacija dipovezanog turnira).

Turnir je dipovezan akko sadrži usmjereni Hamiltonov ciklus.

Dokaz.

$\Leftarrow$

Ako turnir sadrži usmjereni Hamiltonov ciklus, onda je jasno da je turnir dipovezan jer se iz svakog vrha mogu doseći svi preostali vrhovi preko usmjerenog Hamiltonovog ciklusa.

$\Rightarrow$

Neka je T dipovezani turnir, a $\mathcal{C} = v_1 \cdots v_k v_1$ maksimalni usmjereni ciklus u T. Takav ciklus postoji jer aciklički turnir nije dipovezan. Pretpostavimo da $\mathcal{C}$ nije Hamiltonov. Tada postoji

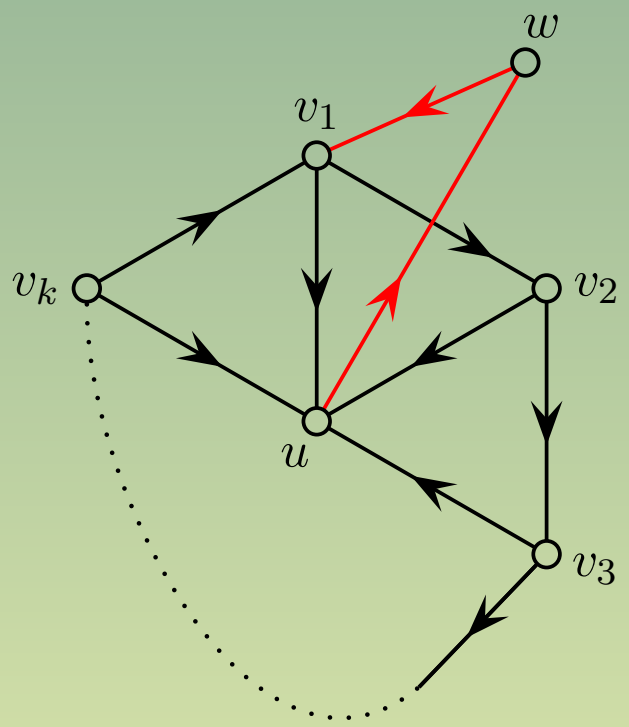
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

vrh u koji nije u $\mathcal{C}$. Kako se radi o turniru, mora biti (v_1, u) luk ili (u, v_1) luk. Uzmimo da je (v_1, u) luk (dokaz ide analogno ako je (u, v_1) luk). Ako je tada (u, v_2) luk, onda je $v_1 u v_2 \cdots v_k v_1$ dulji usmjereni ciklus od $\mathcal{C}$, što je nemoguće jer je po pretpostavci $\mathcal{C}$ najdulji usmjereni ciklus u T. Stoga mora biti (v_2, u) luk. Iz istih razloga mora biti (v_i, u) luk za svaki $i = 1, 2, \ldots, k$. Neka je

$$U = \{u \in V(T) : (v_1, u) \text{ je luk}\}.$$

Iz gornjih razmatranja slijedi da tada mora biti (v_i, u) luk za svaki $u \in U$ i za svaki $i = 1, 2, \ldots, k$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Neka je (u, w) luk za koji je $u \in U$ i $w \notin U$. Takav luk postoji jer je $d^+(v_1) < n - 1$ zbog pretpostavke da je T dipovezan. Tada $w \notin \mathcal{C}$ jer iz svih vrhova iz $\mathcal{C}$ idu lukovi prema vrhu u. Kako $w \notin U$, slijedi da je (w, v_1) luk. U tom slučaju je $uwv_1 \cdots v_k u$ usmjereni ciklus u T koji je dulji od $\mathcal{C}$, što je nemoguće. Stoga je $\mathcal{C}$ usmjereni ciklus koji sadrži sve vrhove iz T, tj. turnir T sadrži usmjereni Hamiltonov ciklus. ♡

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.11.

Ako turnir nije dipovezan, tada se promjenom orijentacije samo jednog brida može postići da dobijemo dipovezani turnir. Dokažite!

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.11.

Ako turnir nije dipovezan, tada se promjenom orijentacije samo jednog brida može postići da dobijemo dipovezani turnir. Dokažite!

Rješenje.

Neka je T turnir s n vrhova. Svaki turnir sadrži usmjereni Hamiltonov put. ◂ teorem 9.5. Neka je $v_1v_2\cdots v_n$ taj put. Ako je (v_n, v_1) luk u T, tada je turnir T već dipovezan jer sadrži usmjereni Hamiltonov ciklus $v_1v_2\cdots v_nv_1$. Ako (v_n, v_1) nije luk u T, tada mu promijenimo orijentaciju tako da (v_n, v_1) postane luk pa ćemo dobiti dipovezani turnir.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.12.

Turnir je zadan pomoću sljedeće tablice. Pritom, uređeni par (x, y) predstavlja luk ako se y nalazi u stupcu nazvanom sa x.

a	b	c	d	e	f
c	a	f	b	a	a
d	c		c	c	b
	e			d	d
				f	

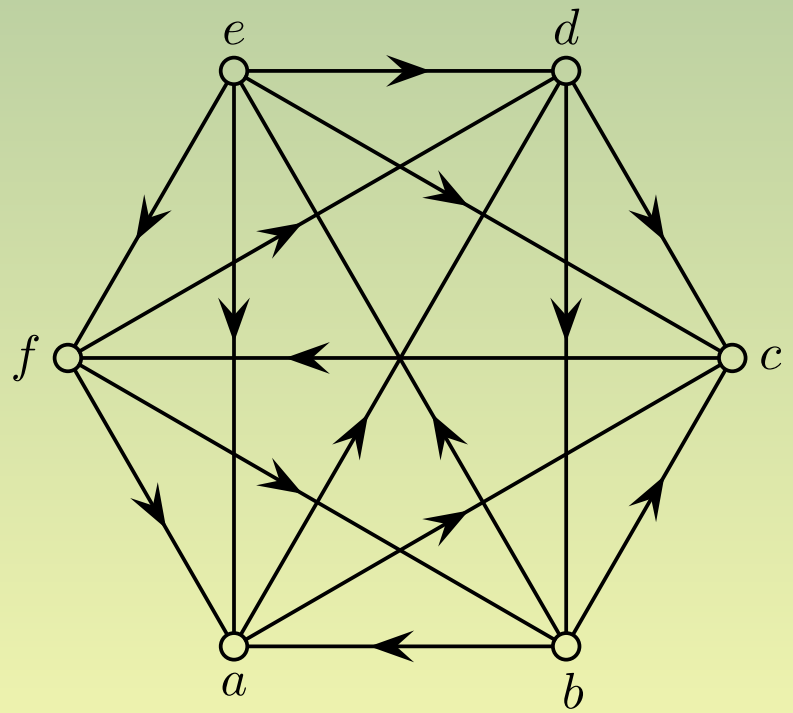
a. *Nađite usmjereni put od vrha a do vrha d.*

b. *Nađite barem tri usmjerena ciklusa u turniru.*

c. *Nađite usmjereni Hamiltonov put. Da li je turnir tranzitivan? Da li je turnir dipovezan? Objasnite!*

Rješenje.

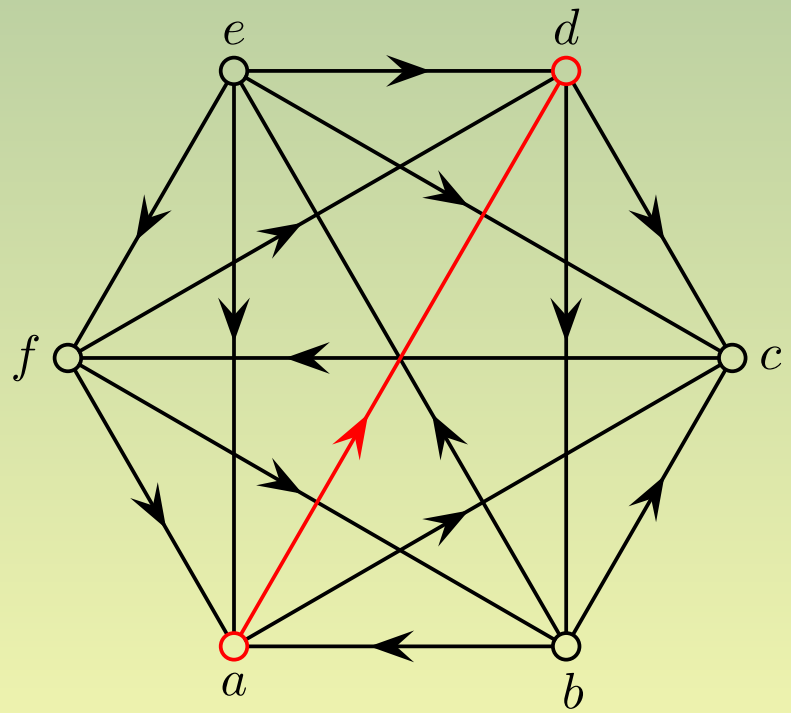
- Na donjoj slici je grafički prikaz promatranog turnira.



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.

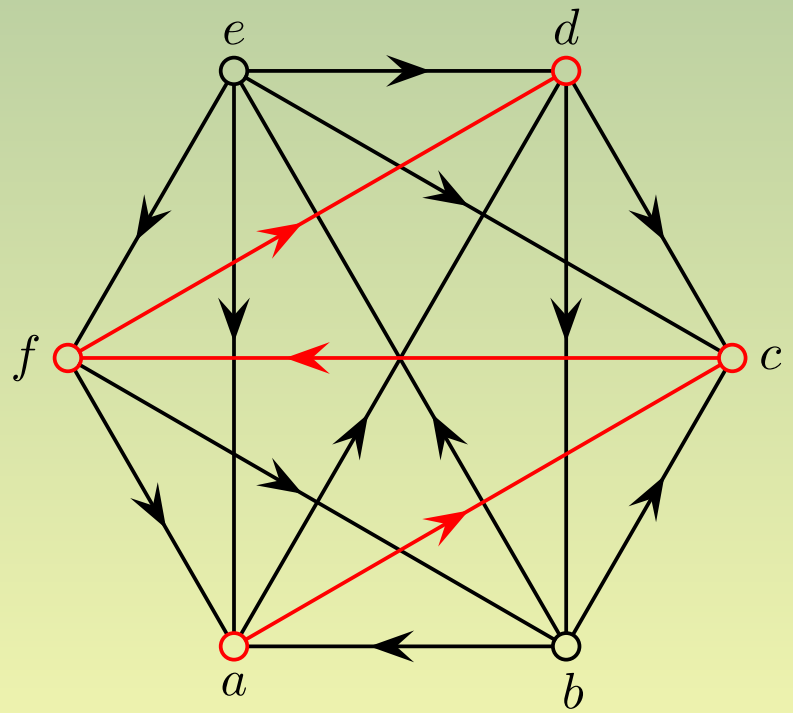
- Usmjereni put od a do d je ad



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.

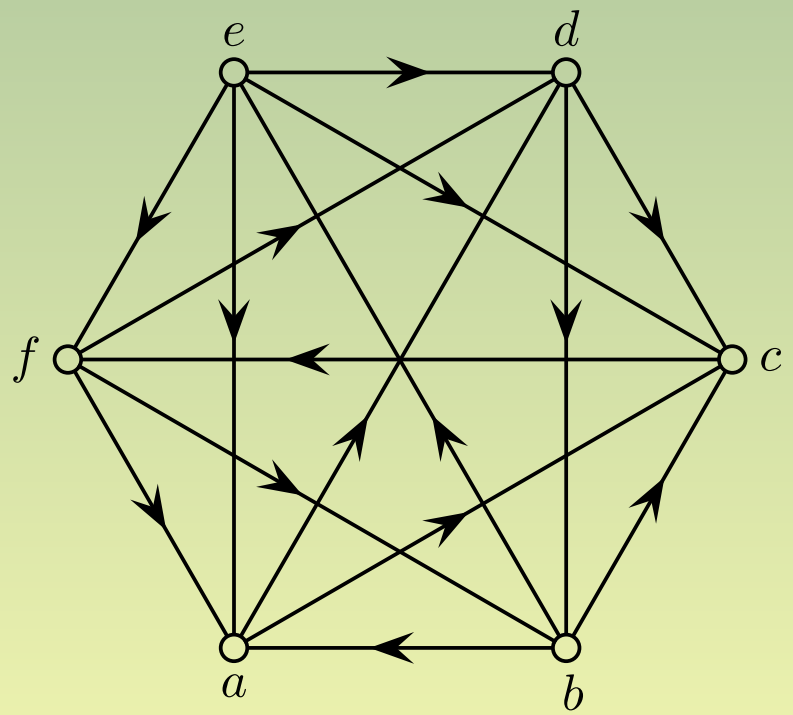
a) Usmjereni put od a do d je ad ili pak $acfd$.



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

- Neki usmjereni ciklusi u promatranom turniru su:

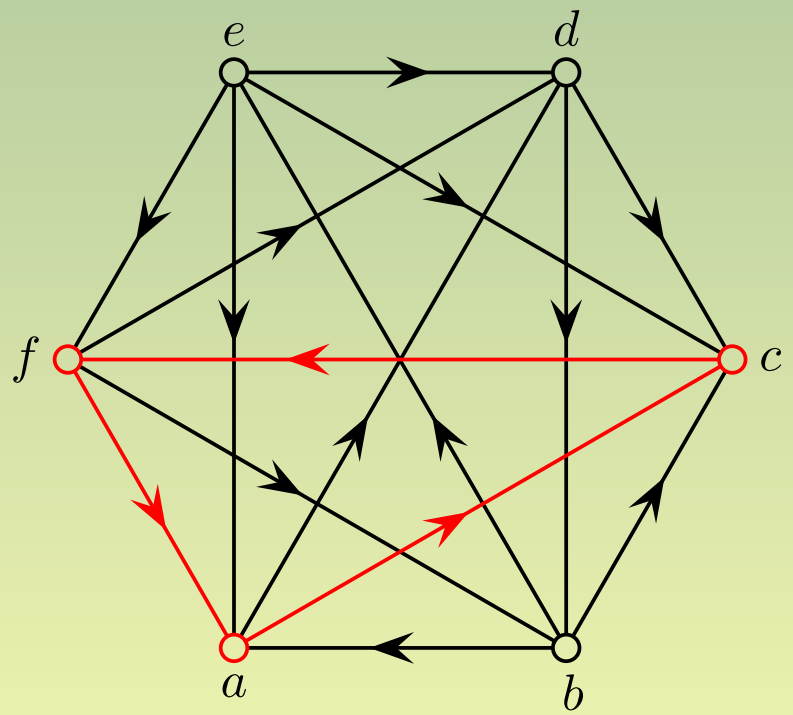
$$acfa, \quad acfba, \quad acfbea, \quad acfdba, \quad bcfb$$



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

- Neki usmjereni ciklusi u promatranom turniru su:

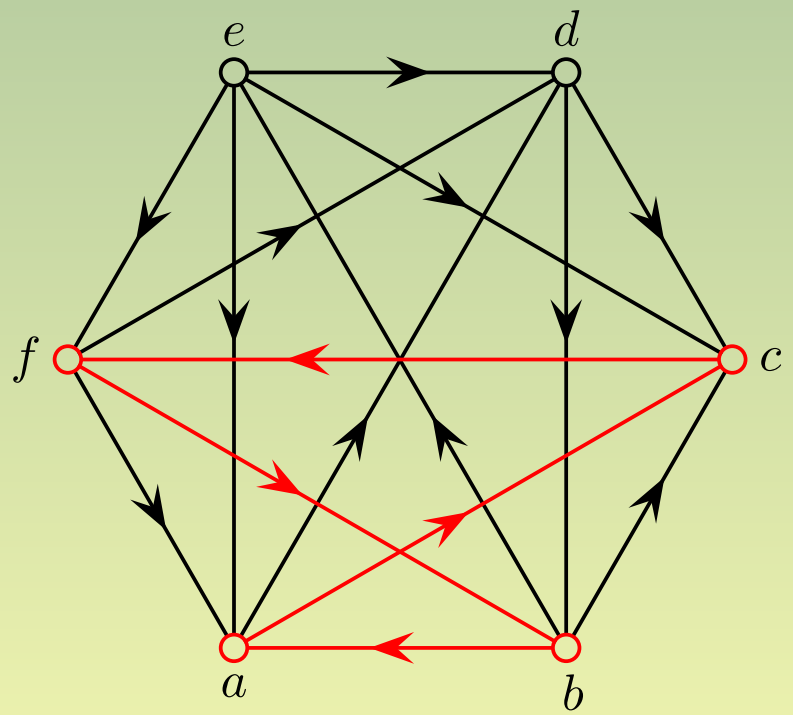
$$acfa, \quad acfba, \quad acfbea, \quad acfdba, \quad bcfb$$



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

- Neki usmjereni ciklusi u promatranom turniru su:

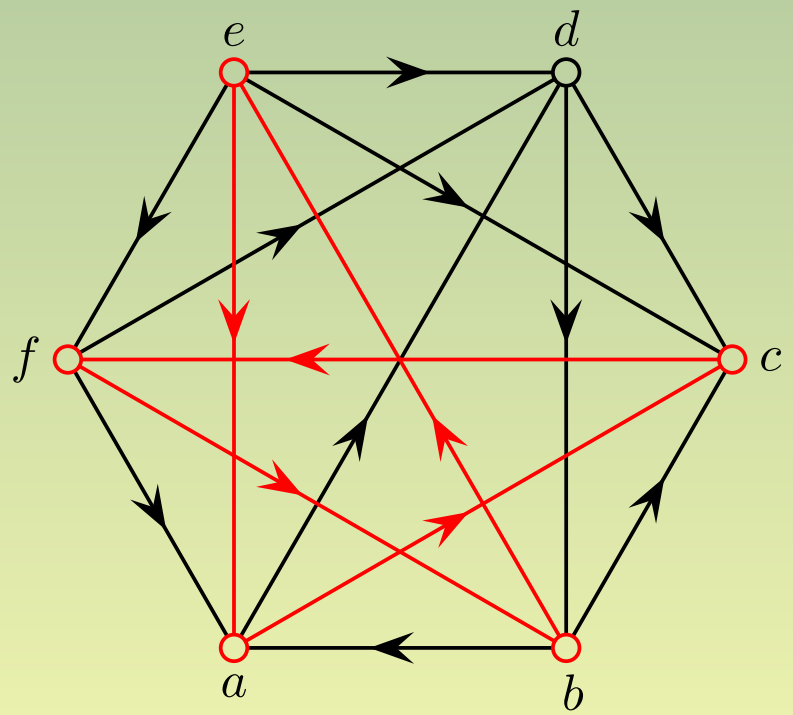
$$acfa, \quad acfba, \quad acfbea, \quad acfdba, \quad bcfb$$



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

- Neki usmjereni ciklusi u promatranom turniru su:

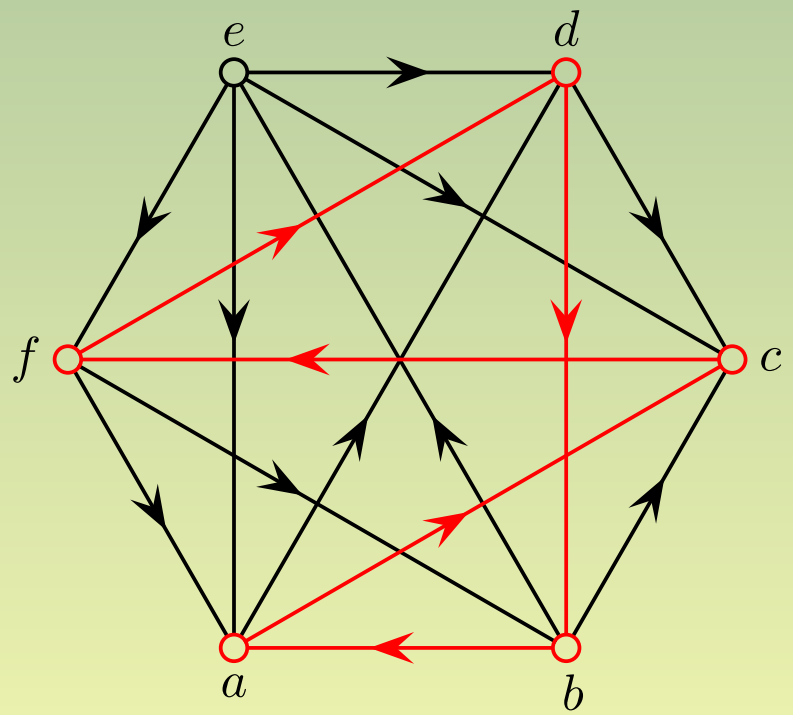
$$acfa, \quad acfba, \quad acfbea, \quad acfdba, \quad bcfb$$



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

- Neki usmjereni ciklusi u promatranom turniru su:

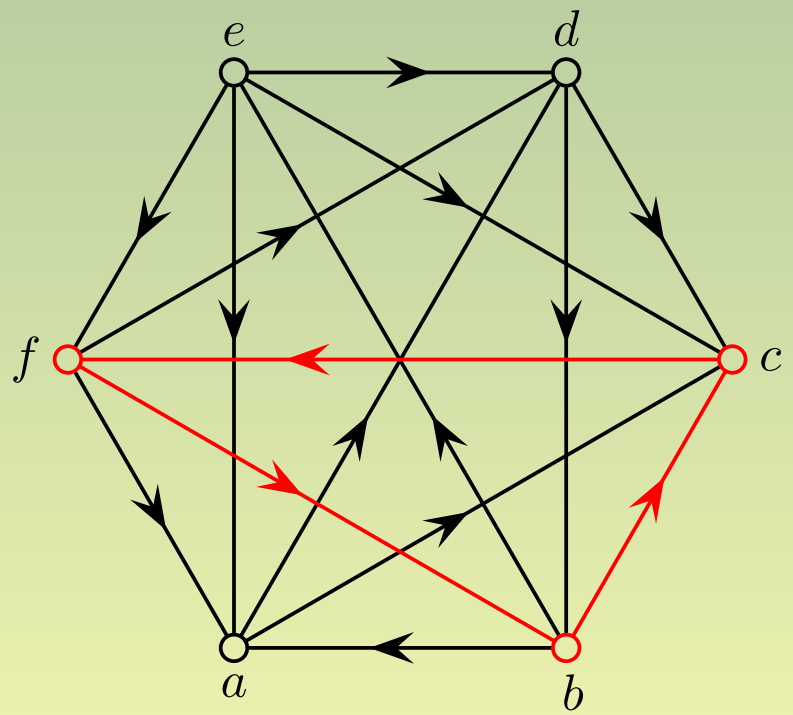
$$acfa, \quad acfba, \quad acfbea, \quad acfdba, \quad bcfb$$



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

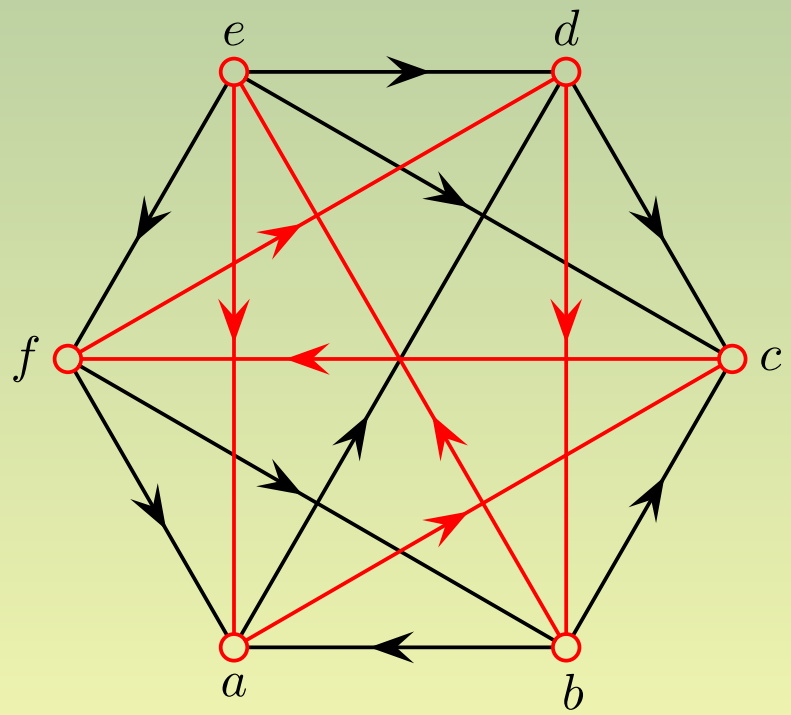
- Neki usmjereni ciklusi u promatranom turniru su:

$$acfa, \quad acfba, \quad acfbea, \quad acfdba, \quad bcfb$$



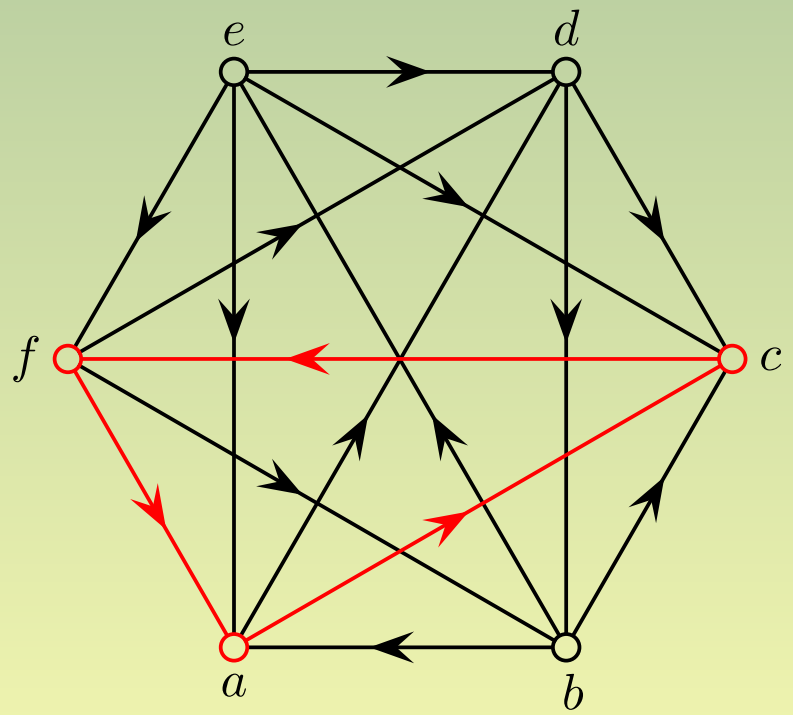
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

- Turnir sadrži usmjereni Hamiltonov ciklus $acfdbea$ pa je prema teoremu 9.7. promatrani turnir dipovezan.



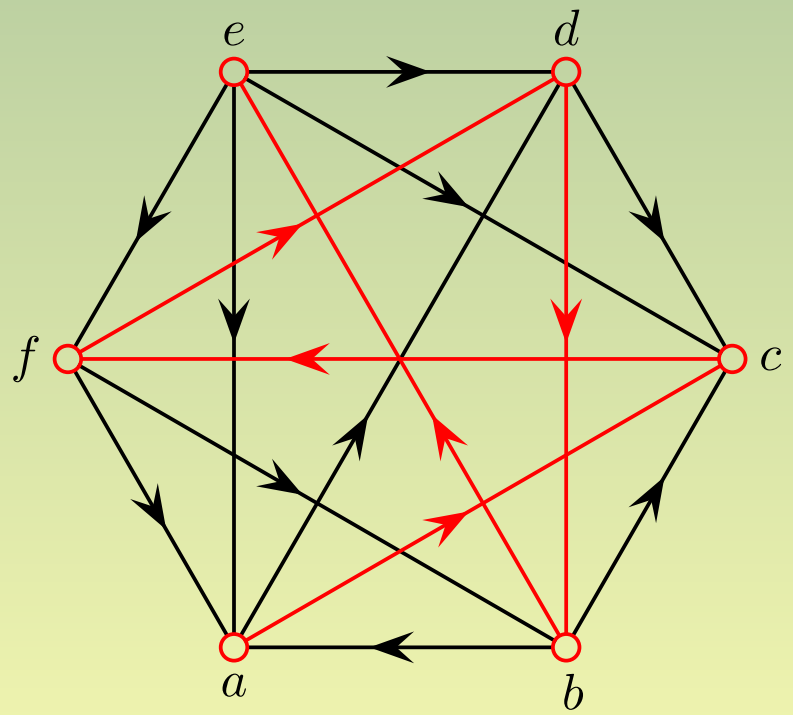
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

- Turnir sadrži usmjerene 3-cikluse, npr. $acfa$, pa onda nije tranzitivan.



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

- Usmjereni Hamiltonov put je $acfdbe$. Kako turnir nije tranzitivan, tada prema teoremu 9.6. ima još Hamiltonovih putova. Pronađite još neke usmjerene Hamiltonove putove.



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Navodimo bez dokaza jedan koristan teorem koji govori o broju usmjerenih Hamiltonovih putova u turniru.

Teorem 9.8 (Rédei, 1934.).

Svaki turnir sadrži neparni broj usmjerenih Hamiltonovih putova.

Primjer 9.13.

Kako pronaći vrh u turniru s najvećim uspjehom ako je turnir zadan matricom susjedstva A?

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Navodimo bez dokaza jedan koristan teorem koji govori o broju usmjerenih Hamiltonovih putova u turniru.

Teorem 9.8 (Rédei, 1934.).

Svaki turnir sadrži neparni broj usmjerenih Hamiltonovih putova.

Primjer 9.13.

Kako pronaći vrh u turniru s najvećim uspjehom ako je turnir zadan matricom susjedstva A?

Rješenje.

Iz vrha s najvećim uspjehom prema primjeru 9.8. postoji usmjereni put duljine najviše 2 prema svim preostalim vrhovima turnira.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Suma svih elemenata i-tog retka matrice A je ukupni broj usmjerenih 1-šetnji od vrha v_i prema svim ostalim vrhovima, a suma svih elemenata i-tog retka matrice A^2 je ukupni broj usmjerenih 2-šetnji od vrha v_i prema svim ostalim vrhovima. Stoga je suma elemenata i-tog retka matrice $A + A^2$ jednaka ukupnom broju svih usmjerenih šetnji duljine najviše 2 od vrha v_i prema svim ostalim vrhovima. Stoga redak od $A + A^2$ s najvećom sumom predstavlja vrh s najvećim uspjehom.

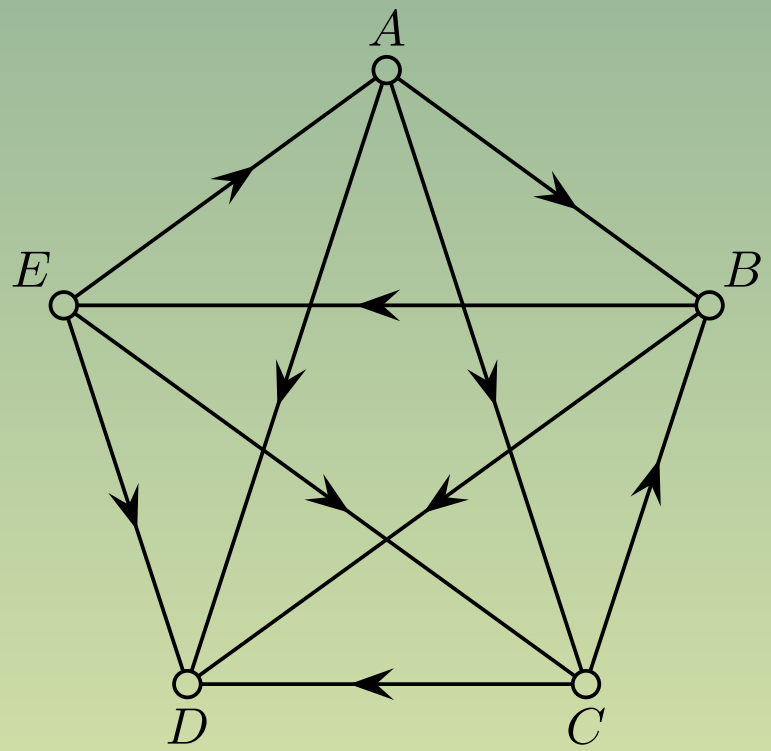
Druga ideja, ne tako dobra kao prethodna (uvjerit ćemo se u to na primjerima), slijedi iz definicije uspjeha vrha. Znamo da je uspjeh vrha u turniru po definiciji jednak outstupnju tog vrha. Da bismo izračunali outstupanj vrha v_i, trebamo zbrojiti elemente i-tog retka u matrici susjedstva A. Vrh s najvećim outstupnjem predstavlja vrh s najvećim uspjehom.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

No, što ako imamo više vrhova s istim najvećim outstupnjem? Koji je od njih uspješniji? Vidjet ćemo da ih pomoću matrice $A + A^2$ ipak u nekim slučajevima možemo razlikovati po uspješnosti, iako imaju isti najveći broj pobjeda. U tom smislu, pomoću matrice $A + A^2$ možemo napraviti bolju rang listu, nego pomoću matrice A. U to ćemo se uvjeriti na sljedećim primjerima.

Snaga vrha u turniru je ukupni broj usmjerenih 1-šetnji i 2-šetnji od tog vrha prema svim ostalim vrhovima turnira. Snaga vrha v_i jednaka je sumi elemenata i-tog retka matrice $A + A^2$, gdje je A matrica susjedstva turnira. Na taj način pomoću snaga vrhova možemo rangirati vrhove turnira.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Matrica susjedstva turnira je

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

pri čemu prvom retku odgovara vrh A, drugom retku vrh B, trećem retku vrh C, četvrtom retku vrh D i petom retku vrh E. Pomoću matrice susjedstva M možemo izračunati uspjehe pojedinih vrhova tako da zbrojimo elemente u odgovarajućem retku. Dobivamo da je

$$s(A) = 3, \quad s(B) = 2, \quad s(C) = 2, \quad s(D) = 0, \quad s(E) = 3.$$

Kako vrhovi A i C imaju maksimalne uspjehe, oni se nalaze na vrhu rang liste. Međutim, koji je od njih dvoje uspješniji? Jasno, pogledamo li turnir, vidjet ćemo da je E pobijedio vrh A pa je zbog toga vrh E prvi, a vrh A drugi na rang listi. Međutim, tu informaciju nismo mogli dobiti samo iz uspjeha pojedinih vrhova, nego smo ipak morali još jednom ići gledati matricu susjedstva M. Samo na temelju uspjeha vrhova nismo u mogućnosti u ovom slučaju napraviti rang listu.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Samo na temelju uspjeha vrhova mogli bismo reći da vrhovi A i E dijele prvo mjesto, vrhovi B i C dijele drugo mjesto i vrh D je na trećem mjestu. Pogledajmo što će nam dati snage pojedinih vrhova. Za to nam treba matrica $M + M^2$. Računanjem dobivamo da je

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad M + M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Pomoću matrice $M + M^2$ možemo izračunati snage pojedinih vrhova tako da zbrojimo elemente u odgovarajućem retku.

$$\text{snaga}(A) = 7, \quad \text{snaga}(B) = 5, \quad \text{snaga}(C) = 4,$$
$$\text{snaga}(D) = 0, \quad \text{snaga}(E) = 8$$

Sada samo na temelju snaga vrhova nije problem napraviti rang listu koja glasi

$$E,\ A,\ B,\ C,\ D.$$

Na sljedećem slajdu su stavljene sve bitne informacije koje vode do dobivene rang liste kao biste lakše mogli vidjeti što se sve zapravo dogodilo.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M + M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

uspjesi vrhova:

$$s(A) = 3, \quad s(B) = 2, \quad s(C) = 2, \quad s(D) = 0, \quad s(E) = 3.$$

snage vrhova:

$$\text{snaga}(A) = 7, \quad \text{snaga}(B) = 5, \quad \text{snaga}(C) = 4,$$
$$\text{snaga}(D) = 0, \quad \text{snaga}(E) = 8$$

rang lista:

$$E,\ A,\ B,\ C,\ D.$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Prokomentirajmo na kraju dobivene rezultate. Kao što smo vidjeli, igrač E i igrač A imaju po tri pobjede i na temelju njihovih broja pobjeda (uspjeha) nismo mogli zaključiti koji je od njih prije na rang listi. Međutim, pomoću njihovih snaga smo to mogli napraviti. Naime, igrač A ima manju snagu od igrača E, a to je zapravo zbog toga što je igrač E pobijedio igrača A pa to daje pravo igraču E da bude prvi na rang listi. Isto tako, igrači B i C imaju isti broj pobjeda pa opet na temelju njihovih uspjeha ne možemo reći koji je od njih bolje rangiran. No, na temelju njihovih snaga smo to mogli napraviti i dobili smo da je igrač B bolje rangiran. Ako pažljivije pogledamo, uočavamo da je igrač B izgubio od igrača C pa onda možemo pomalo sumnjati u dobivenu rang listu jer postavljamo si prirodno pitanje: "Kako to da je igrač B bolje rangiran od igrača C usprkos tome što oboje imaju isti broj pobjeda i još k tome je igrač B izgubio od igrača C? Pa zar ne bi trebalo biti obrnuto?".

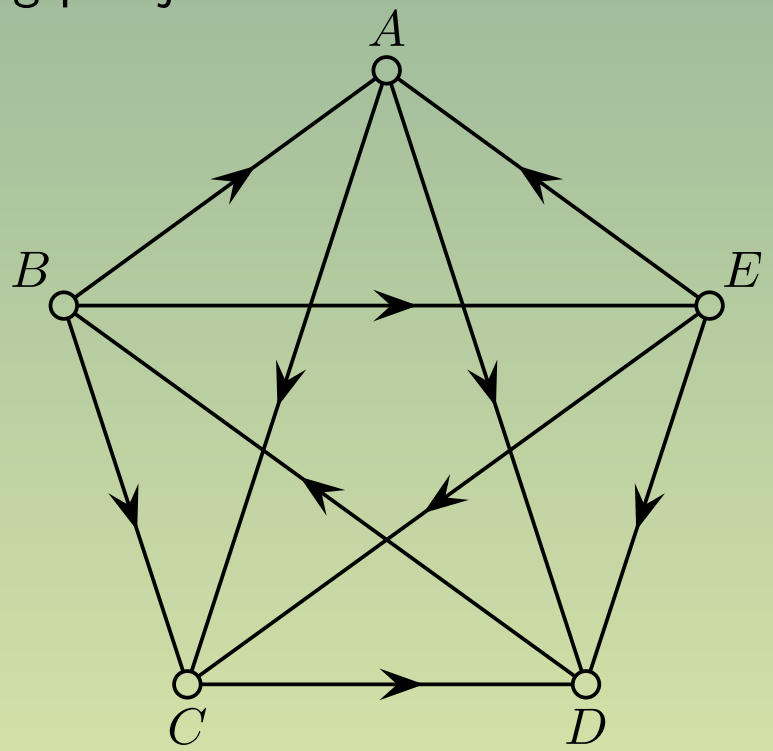
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Za ovu situaciju imamo također razumno objašnjenje. Naime, oba igrača B i C su pobijedili najslabije rangiranog igrača D pa su po tome još uvijek "isti". No, igrač B je još k tome pobijedio najbolje rangiranog igrača E pa mu to ipak daje neko pravo da bude prije na rang listi od igrača C, iako je od njega izgubio. Uočite da smo sve to dobili iz matrice $M + M^2$ i da nismo uopće morali još dodatno gledati matricu susjedstva da bismo vidjeli tko je koga pobijedio. Matrica $M + M^2$ je zapravo pojedinim pobjedama dala određenu težinu u smislu da nije svejedno da li ste pobijedili najboljeg ili najslabijeg igrača, što se lijepo vidi iz prethodnih komentara. Nije li to divno? Slobodno se nasmiješite jer imamo razloga za veselje.



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Evo još jednog primjera.



Matrica susjedstva turnira je

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M + M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

uspjesi vrhova:

$$s(A) = 2, \quad s(B) = 3, \quad s(C) = 1, \quad s(D) = 1, \quad s(E) = 3.$$

snage vrhova:

$$\text{snaga}(A) = 4, \quad \text{snaga}(B) = 9, \quad \text{snaga}(C) = 2,$$
$$\text{snaga}(D) = 4, \quad \text{snaga}(E) = 7$$

rang lista:

$$B,\ E,\ A \text{ i } D,\ C.$$

- vrhovi A i D dijele treće mjesto

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

U ovom slučaju izgleda još čudnije kako A i D dijele treće mjesto s obzirom da vidimo da igrač A ima dvije pobjede, a igrač D samo jednu pobjedu. I za ovaj slučaj imamo također razumno objašnjenje. Istina je da igrač A ima dvije pobjede, ali ako malo bolje pogledamo on je pobijedio dva najslabije rangirana igrača C i D. Nasuprot tome, igrač D ima samo jednu pobjedu, ali on je pobijedio najbolje rangiranog igrača B pa mu ta pobjeda na neki način ima istu težinu kao i dvije pobjede igrača A nad slabijim igračima.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Napomena.

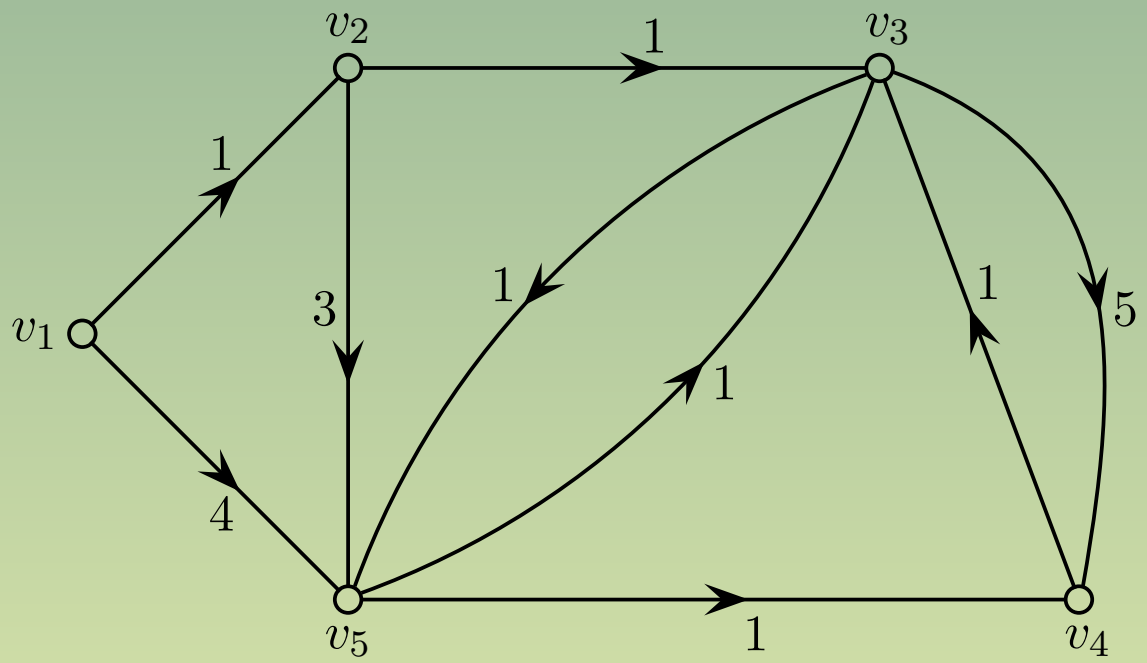
Kod rangiranja moramo definirati pravila po kojima će se vršiti rangiranje. Kao što smo vidjeli, metoda snaga vrhova daje neka takva pravila po kojima se rangira, a koja smo naveli u komentarima. Jasno, ako nama takav način rangiranja ne odgovara (htjeli bismo da se neke druge činjenice uzimaju u obzir više, a neke manje), tada nećemo koristiti tu metodu. U praksi se koriste razne druge naprednije metode rangiranja.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellman-Fordov algoritam

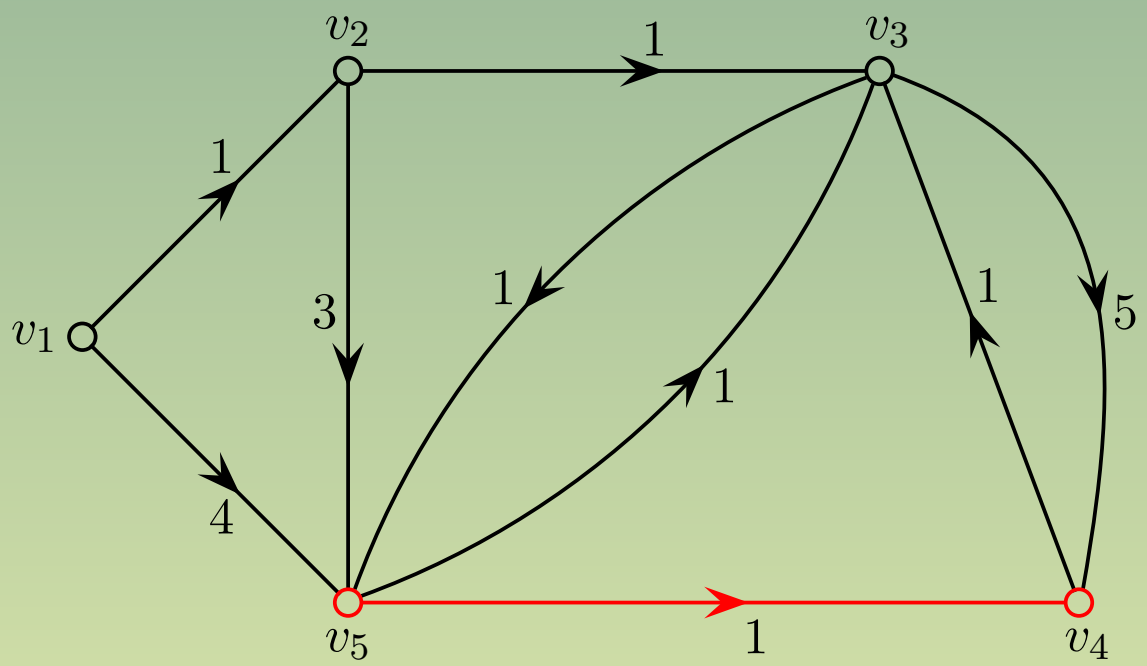
Dijkstrin algoritam također možemo primijeniti i na težinske digrafove u kojima svi lukovi imaju pozitivne težine. U tom slučaju pod susjednim vrhom nekog vrha v_0 podrazumijevamo svaki onaj vrh v_1 za koji postoji luk v_0v_1. Ako je v_1 susjedni vrh od v_0, tada v_0 ne mora biti susjedni vrh od v_1 jer ako postoji luk v_0v_1, tada ne mora općenito postojati i luk v_1v_0. Naime, poanta je u tome da u težinskom digrafu tražimo najkraće usmjerene putove od nekog vrha prema svim preostalim vrhovima digrafa pa moramo usput paziti i na orijentaciju, tj. moramo poštivati "strelice". Ako ne postoji luk v_0v_1, tada ne možemo direktno iz vrha v_0 doći u vrh v_1 usprkos tome ako i postoji luk v_1v_0. Kod grafova je ta susjednost bila obostrana, tj. ako je v_0 bio susjed od v_1, tada je i v_1 bio susjed od v_0 jer nismo imali orijentacije.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



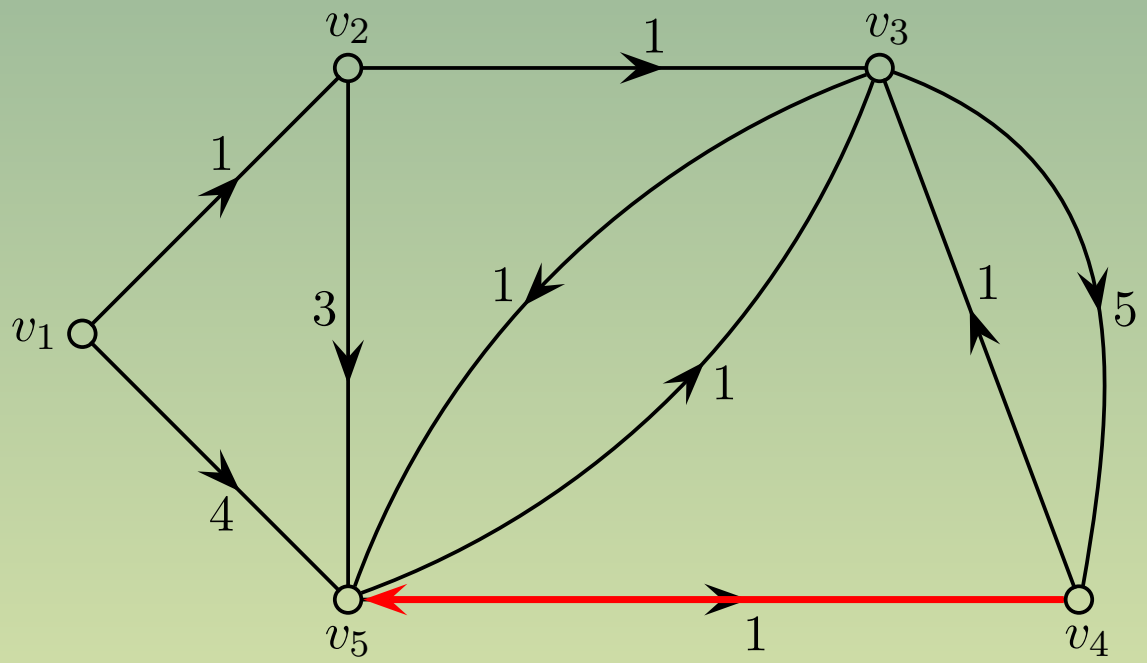
Pogledajmo vrhove v_4 i v_5.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



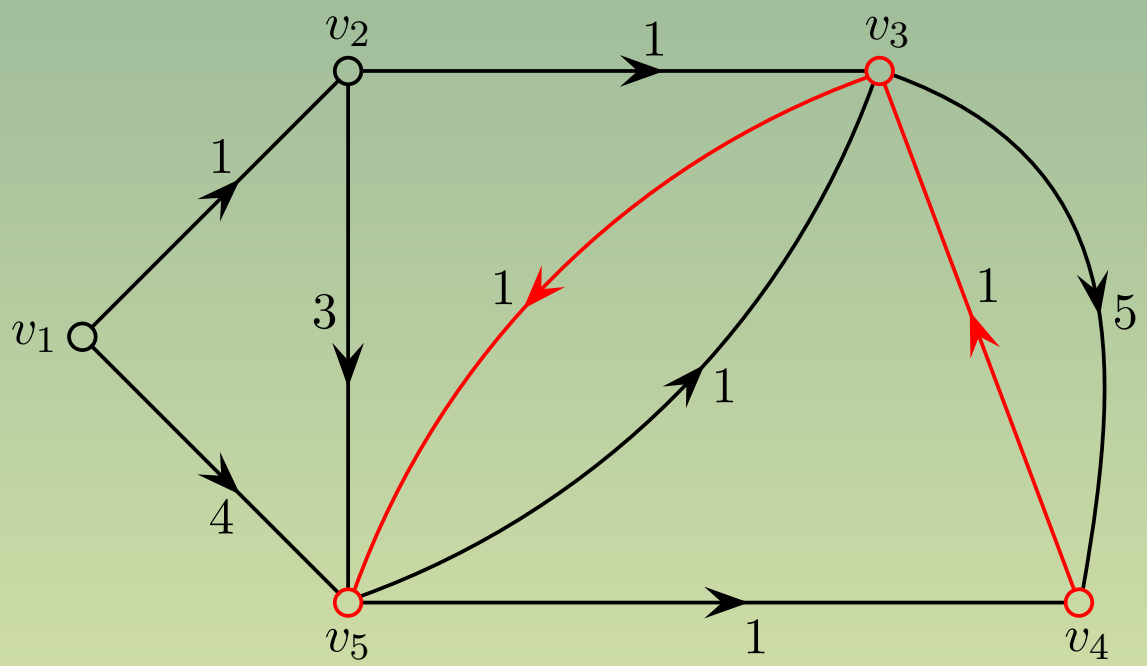
Pogledajmo vrhove v_4 i v_5. Vidimo da je vrh v_5 susjedan s vrhom v_4, tj. vrh v_4 je susjed od vrha v_5 jer postoji luk v_5v_4. Najkraći usmjereni put od vrha v_5 do vrha v_4 je v_5v_4 i njegova težina je 1.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



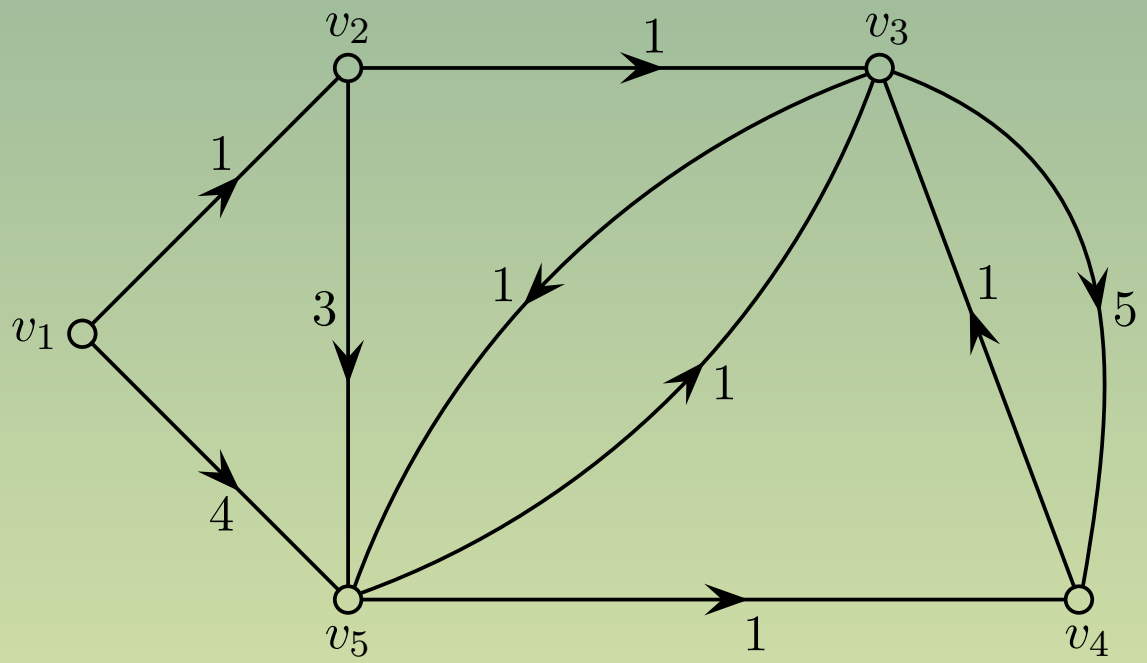
Međutim, najkraći put od vrha v_4 do vrha v_5 nema težinu 1 jer ne možemo iz v_4 doći do v_5 preko luka v_5v_4 jer na taj način ne bismo poštovali orijentaciju, kretali bismo se u smjeru suprotnom od strelice.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



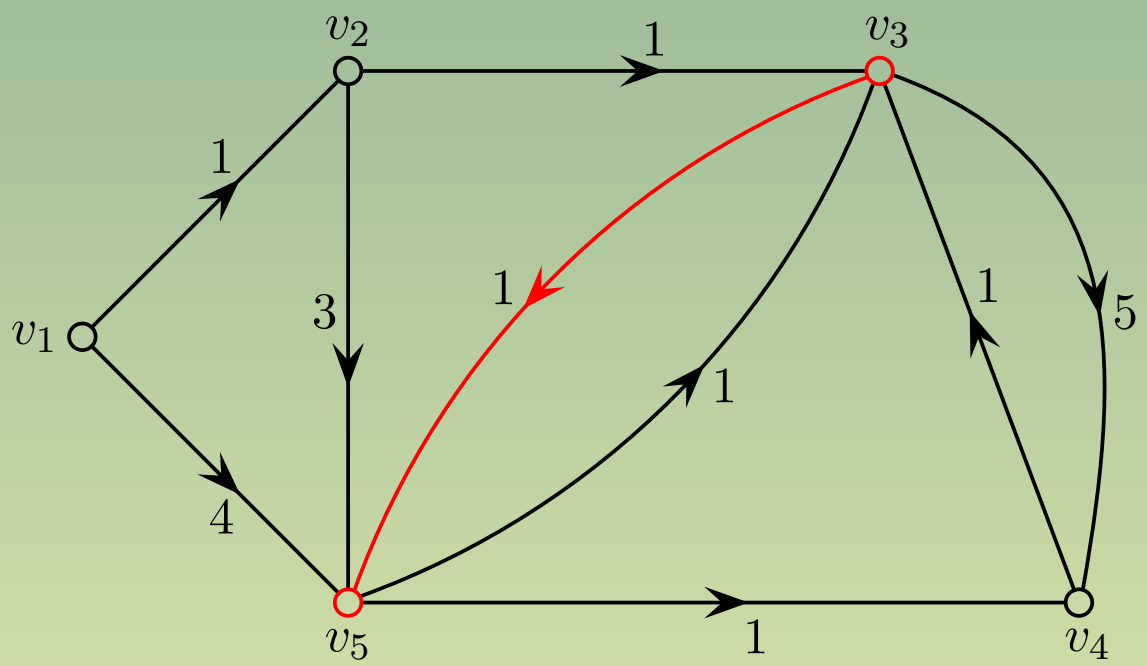
Međutim, najkraći put od vrha v_4 do vrha v_5 nema težinu 1 jer ne možemo iz v_5 doći do v_4 preko luka v_5v_4 jer na taj način ne bismo poštovali orijentaciju, kretali bismo se u smjeru suprotnom od strelice. Najkraći put od vrha v_4 do vrha v_5 je put $v_4v_3v_5$ i on ima težinu 2.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



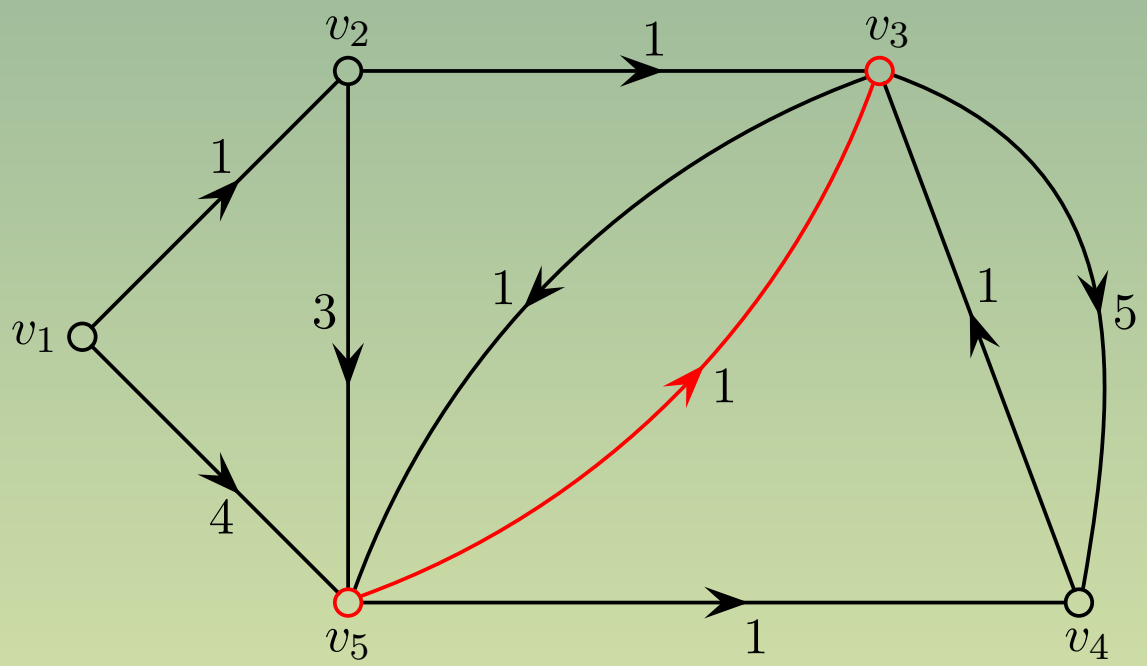
Pogledajmo vrhove v_3 i v_5.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



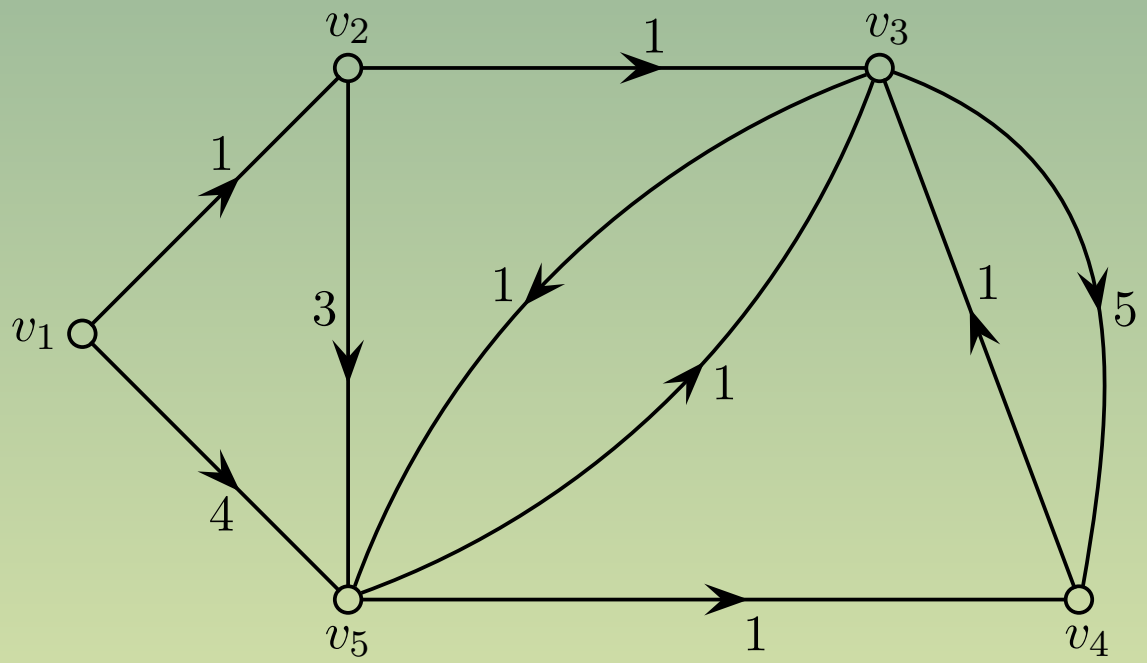
Pogledajmo vrhove v_3 i v_5. Vidimo da je vrh v_3 susjedan s vrhom v_5, tj. vrh v_5 je susjed od vrha v_3 jer postoji luk v_3v_5. Najkraći usmjereni put od vrha v_3 do vrha v_5 je v_3v_5 i njegova težina je 1.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



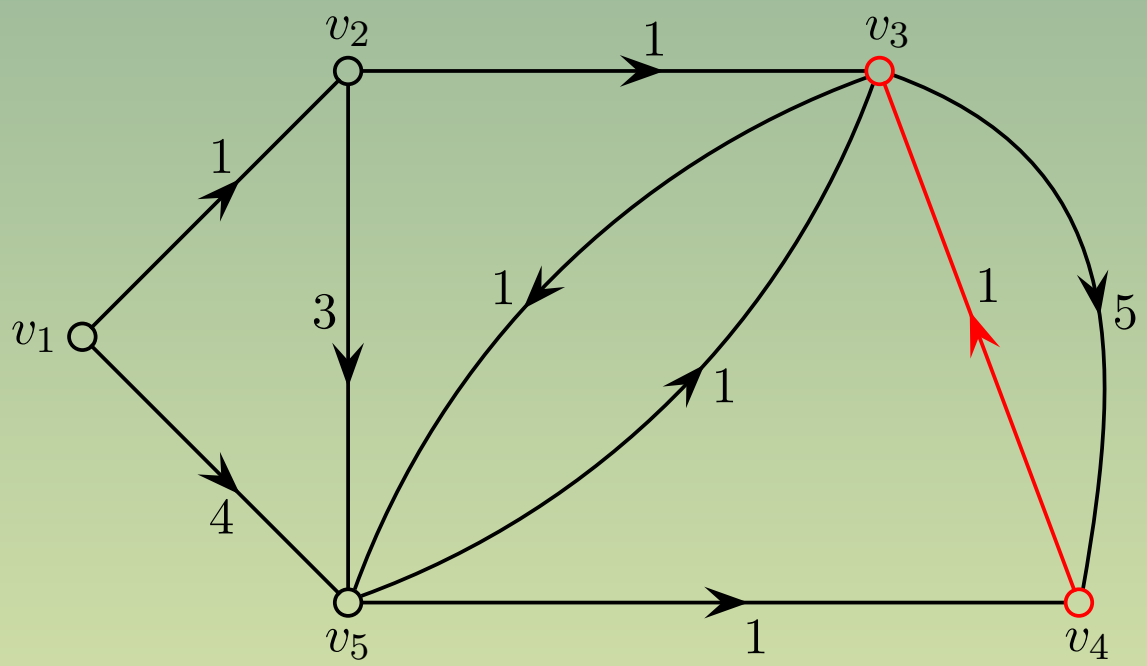
Isto tako, vrh v_5 je susjedan s vrhom v_3, tj. vrh v_3 je susjed od vrha v_5 jer postoji luk v_5v_3. Najkraći usmjereni put od vrha v_5 do vrha v_3 je v_5v_3 i njegova težina je 1.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



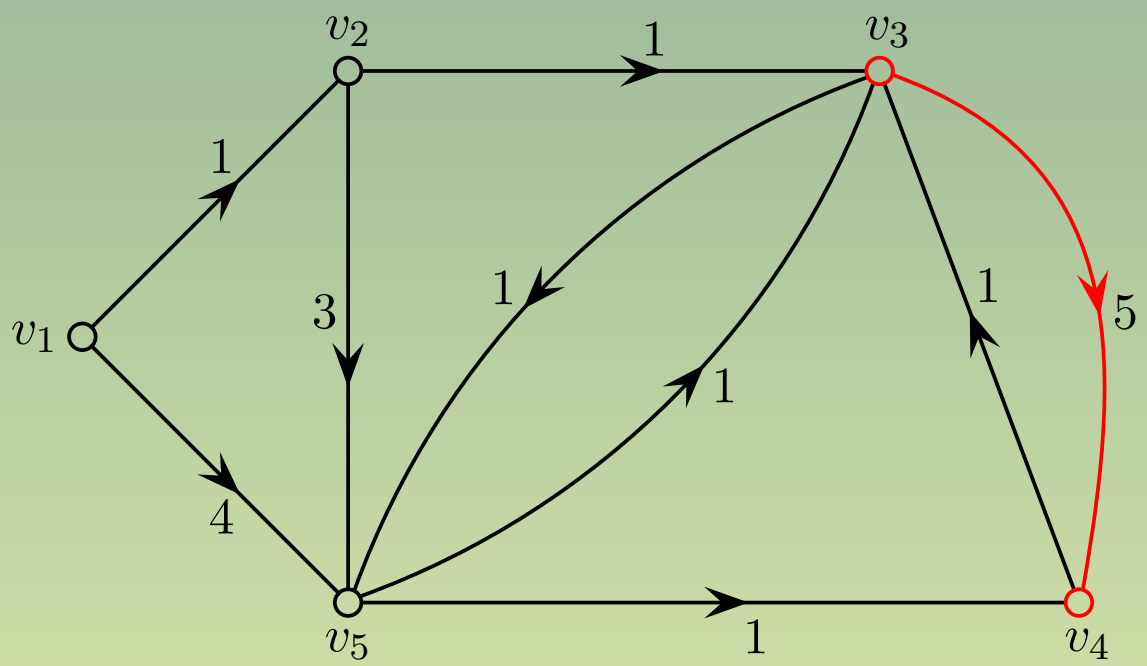
Pogledajmo vrhove v_3 i v_4.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



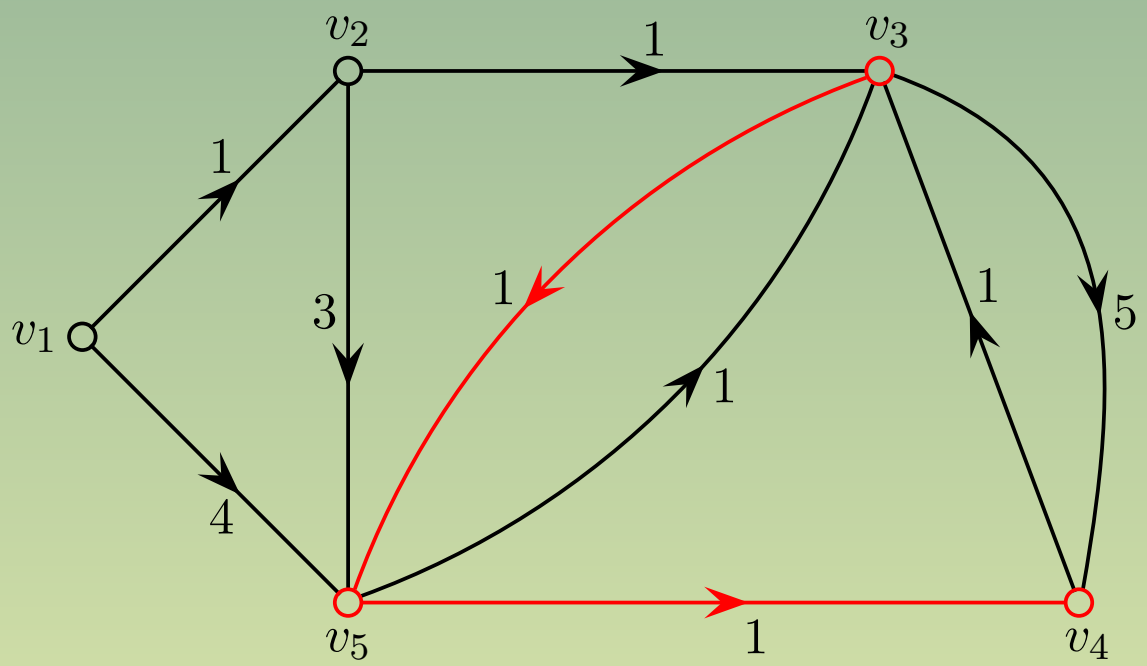
Pogledajmo vrhove v_3 i v_4. Vidimo da je vrh v_4 susjedan s vrhom v_3, tj. vrh v_3 je susjed od vrha v_4 jer postoji luk v_4v_3. Najkraći usmjereni put od vrha v_4 do vrha v_3 je v_4v_3 i njegova težina je 1.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



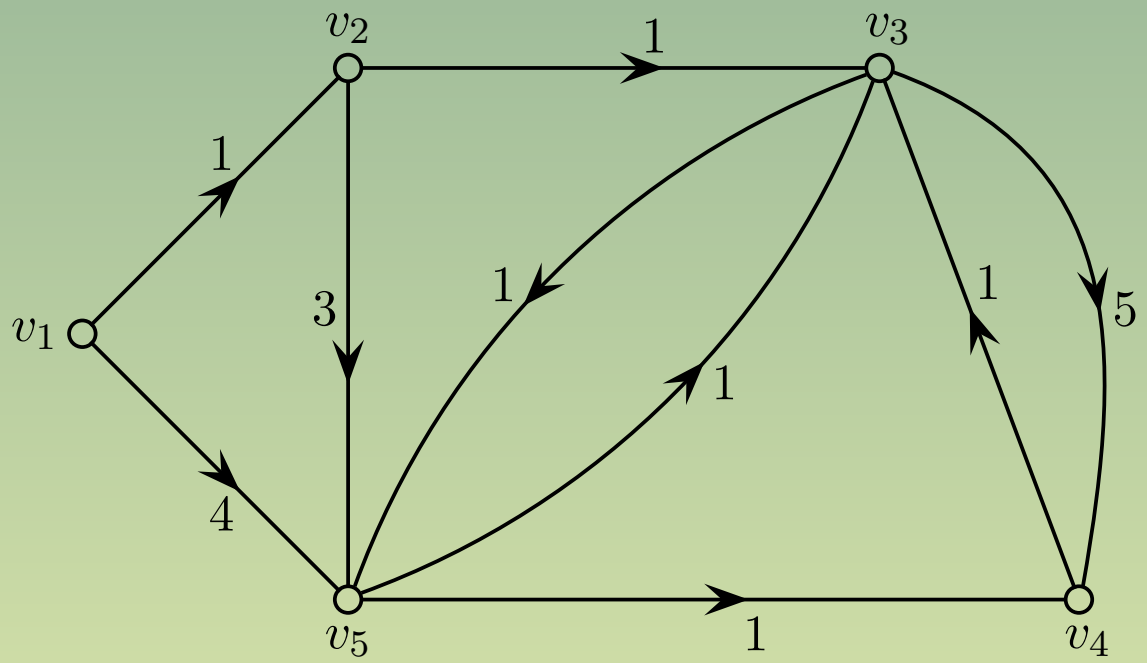
Isto tako, vrh v_3 je susjedan s vrhom v_4 jer postoji luk v_3v_4.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



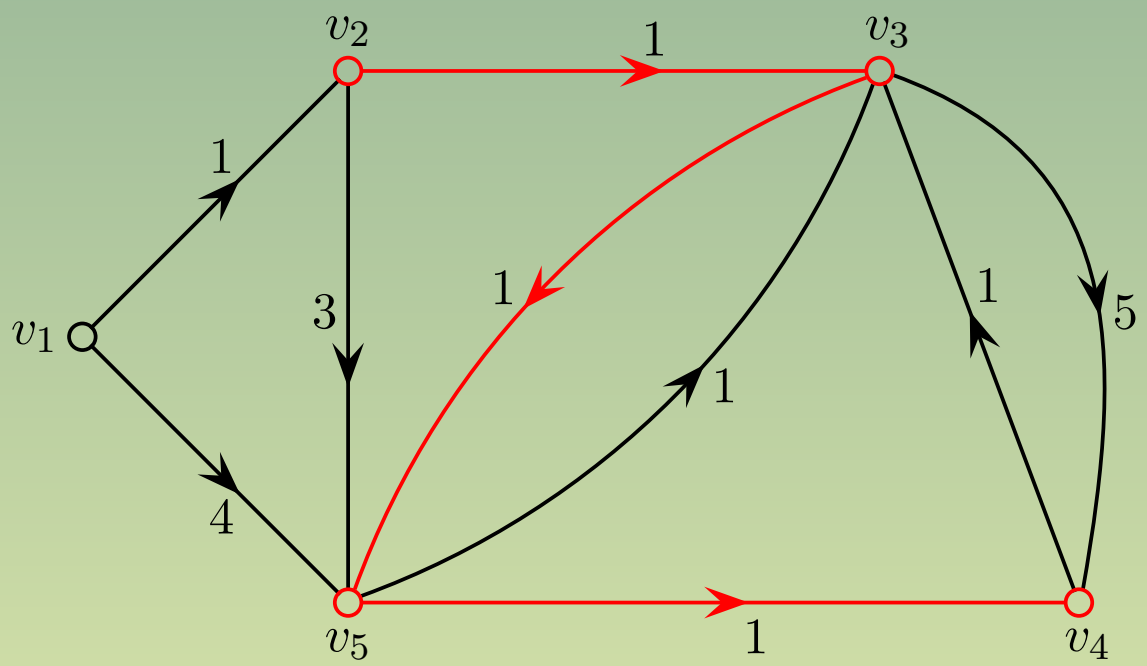
Isto tako, vrh v_3 je susjedan s vrhom v_4 jer postoji luk v_3v_4. Međutim, najkraći put od vrha v_3 do vrha v_4 je $v_3v_5v_4$ čija težina je 2, a to je manje od težine luka v_3v_4.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Pogledajmo vrhove v_2 i v_4.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

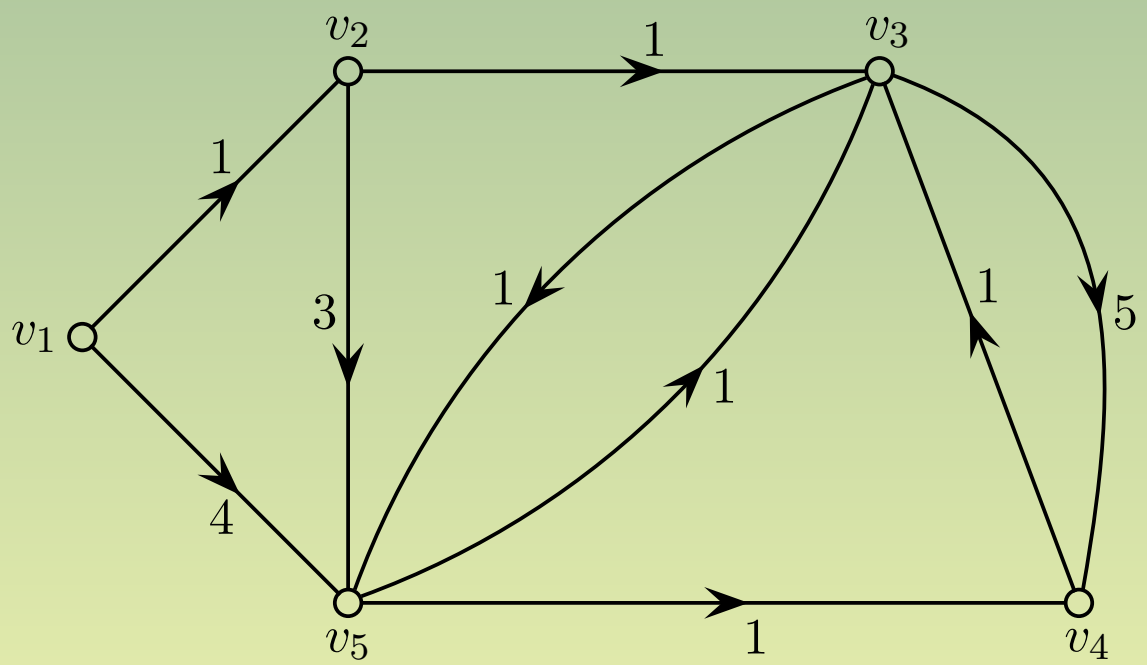


Pogledajmo vrhove v_2 i v_4. Najkraći put od vrha v_2 do vrha v_4 je $v_2v_3v_5v_4$ čija težina je 3. Uočite da ne postoji usmjereni put od vrha v_4 do vrha v_2, tj. vrh v_2 se ne može doseći iz vrha v_4. Dakle, udaljenost od vrha v_2 do vrha v_4 je 3, a udaljenost od vrha v_4 do vrha v_2 je ∞.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.14.

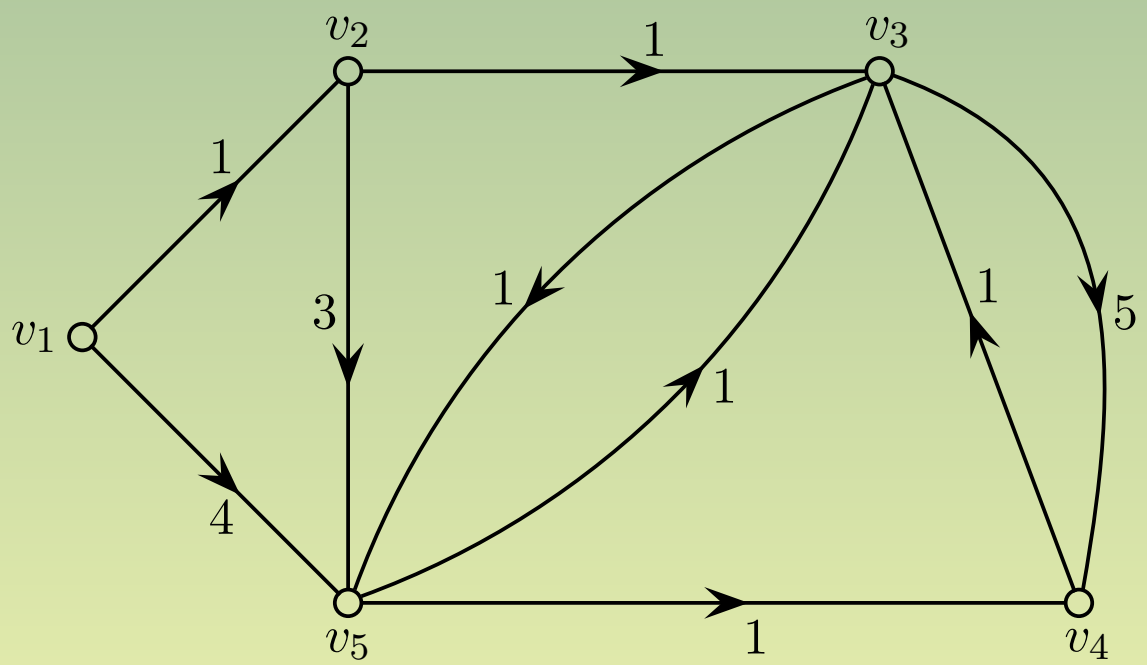
Pomoću obje verzije Dijkstrinog algoritma pronađite najkraće putove od vrha v_1 do svih preostalih vrhova u digrafu



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.14.

Pomoću obje verzije Dijkstrinog algoritma pronađite najkraće putove od vrha v_1 do svih preostalih vrhova u digrafu

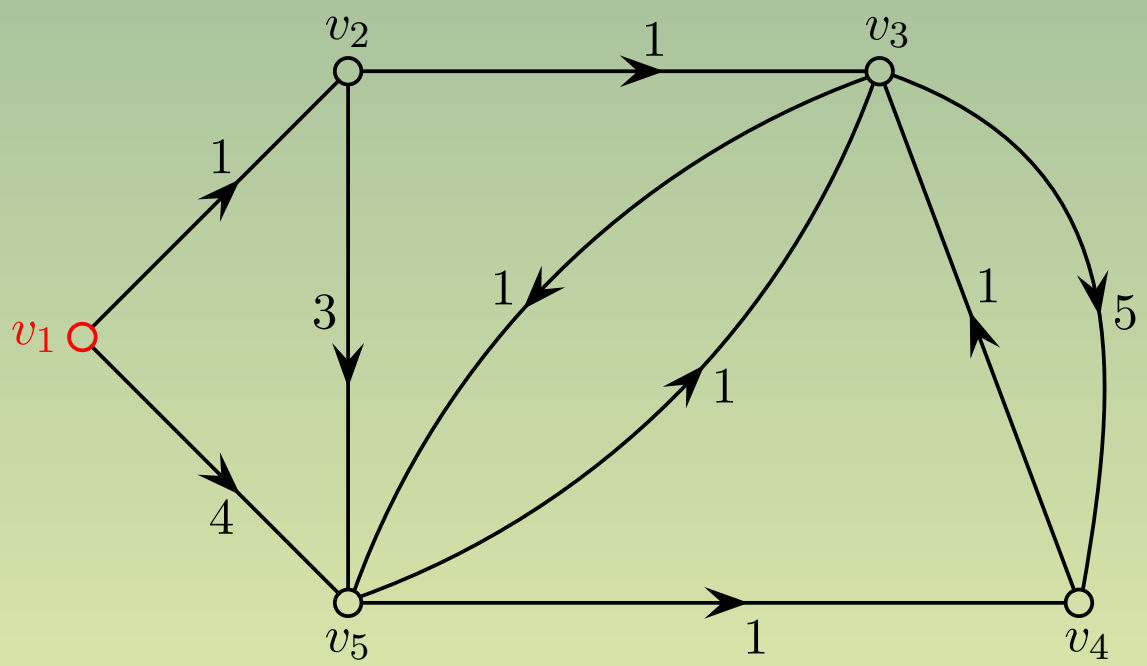


Rješenje.

Detaljno ćemo opisati svaki korak za obje verzije, iako smo Dijkstru već ranije detaljno objasnili.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)



$v_1(-, 0)$

konačno rješenje

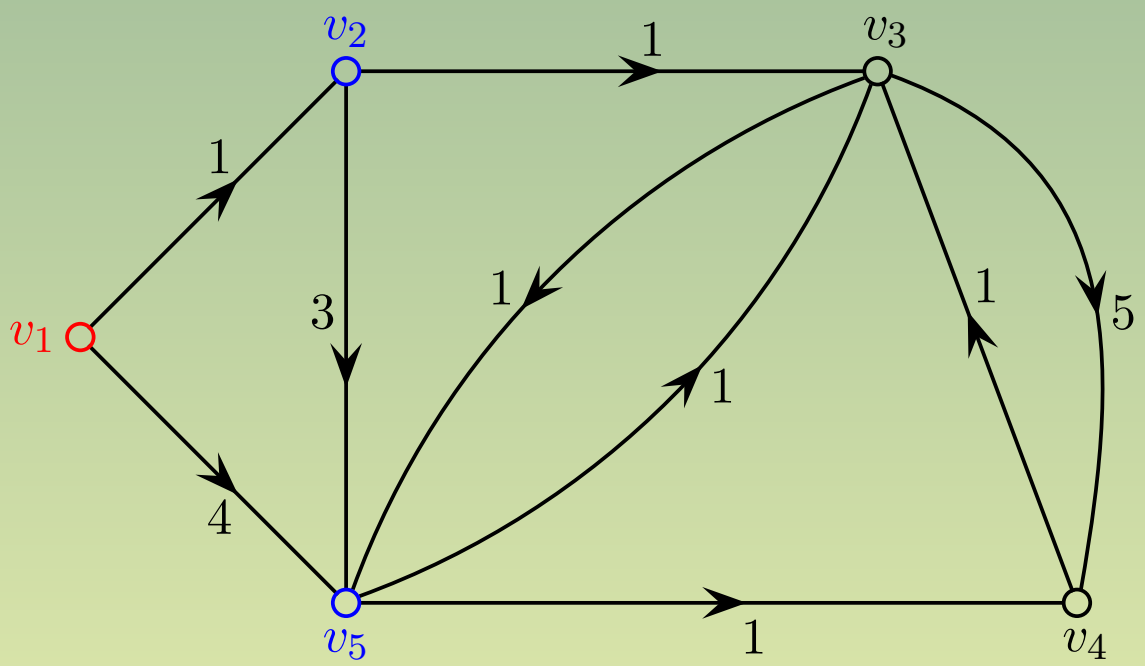
Na početku vrhu v_1 pridružimo oznaku $(-, 0)$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)



$v_1(-, 0)$

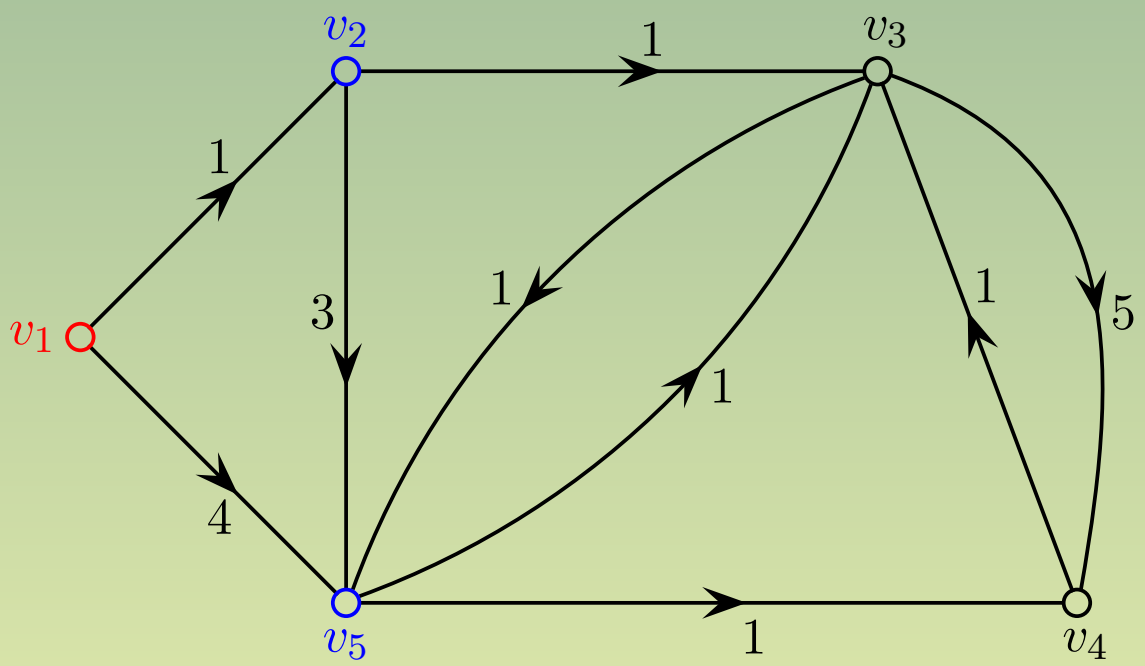
Zatim pogledamo susjedne neoznačene vrhove vrha v_1. To su oni vrhovi prema kojima idu lukovi iz vrha v_1. U ovom slučaju su to vrhovi v_2 i v_5.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)



$v_1(-, 0)$

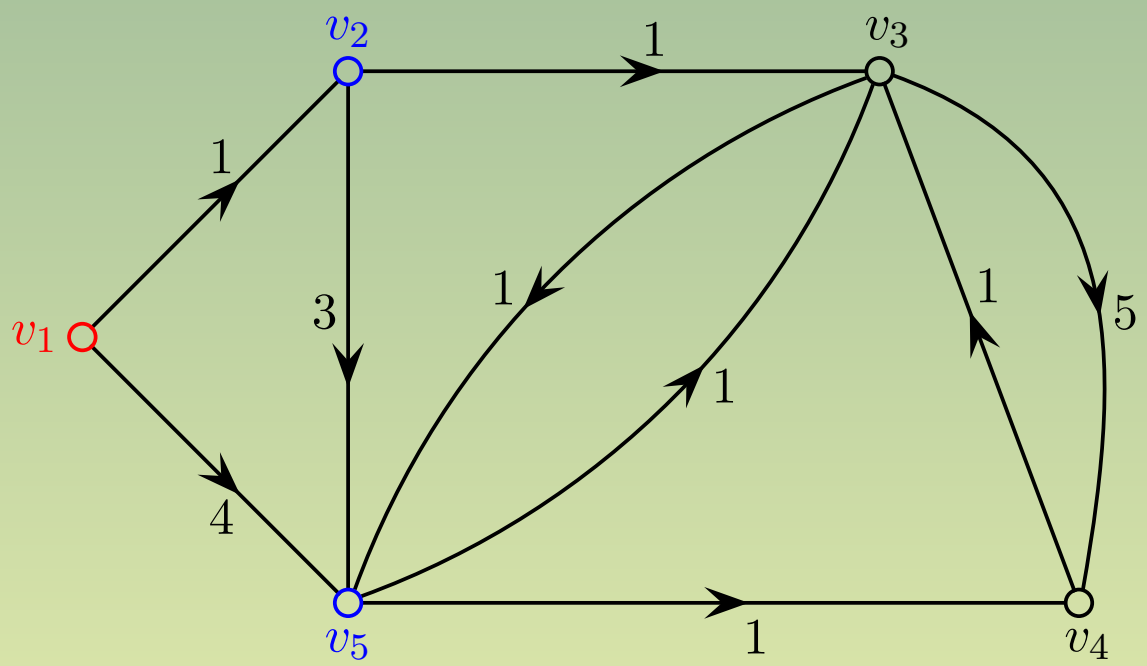
Vrh v_2 dobiva trenutnu oznaku $(v_1, 1)$. Prva koordinata je vrh iz kojeg smo došli u vrh v_2 (to je vrh v_1), a druga koordinata je jednaka sumi druge koordinate od v_1 i težine luka v_1v_2, dakle $0 + 1 = 1$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)



$v_1(-, 0)$

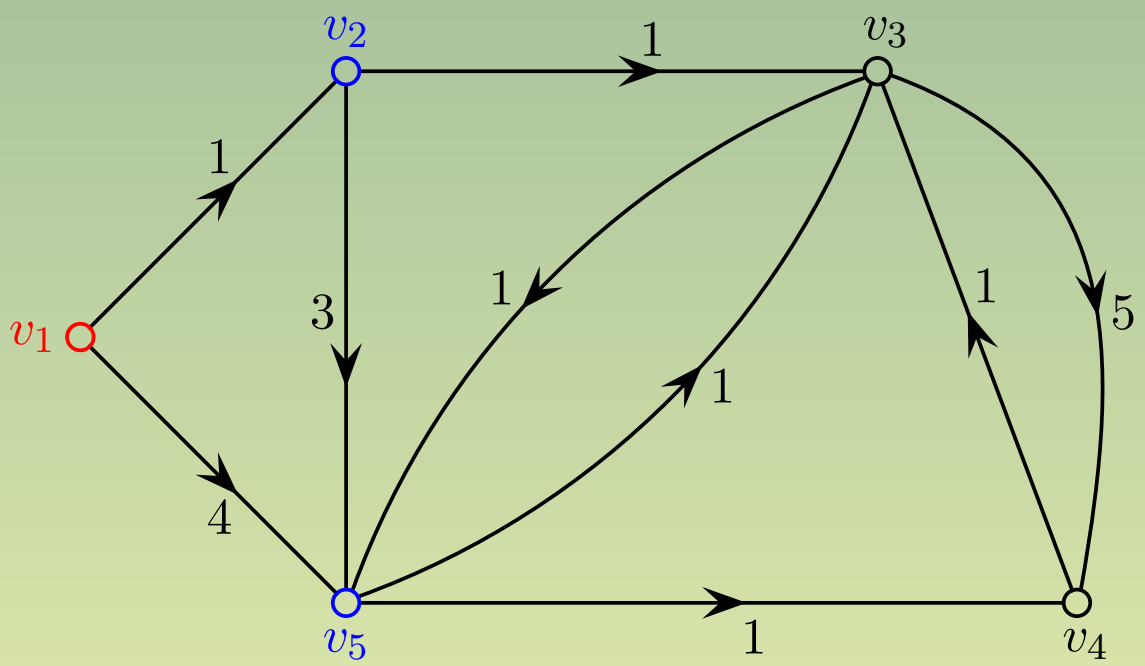
Vrh v_5 dobiva trenutnu oznaku $(v_1, 4)$. Prva koordinata je vrh iz kojeg smo došli u vrh v_5 (to je vrh v_1), a druga koordinata je jednaka sumi druge koordinate od v_1 i težine luka v_1v_5, dakle $0 + 4 = 4$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)

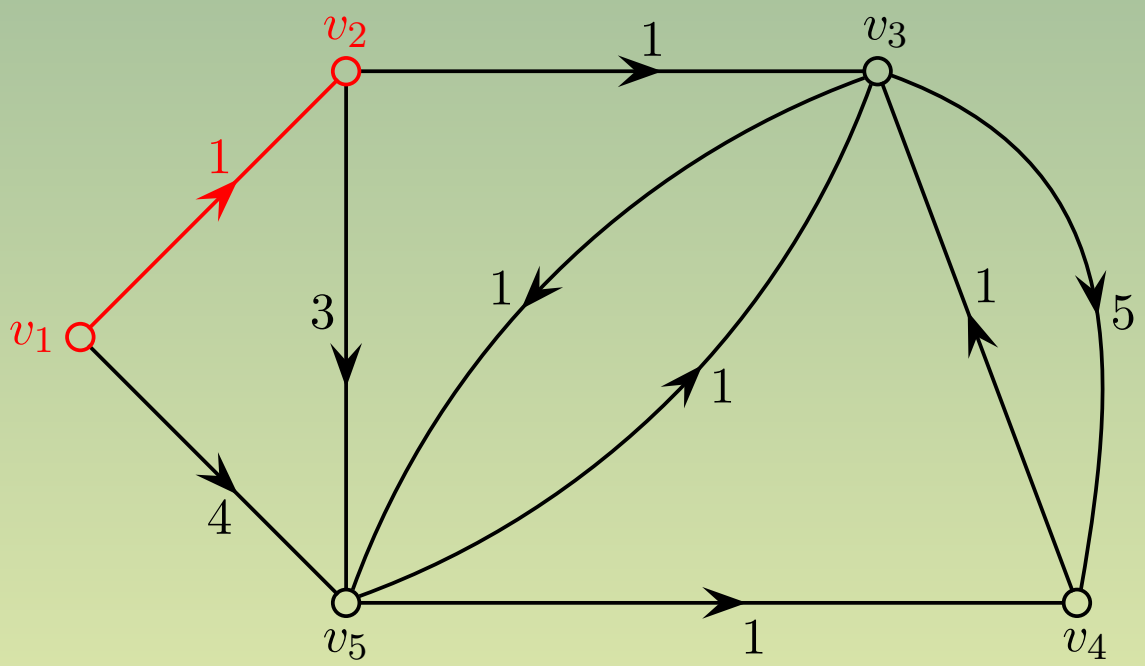


$v_1(-, 0)$

Sada među trenutnim oznakama $v_2(v_1, 1)$ i $v_5(v_1, 4)$ odaberemo onu s najmanjom drugom koordinatom.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)



$v_1(-, 0)$, $v_2(v_1, 1)$

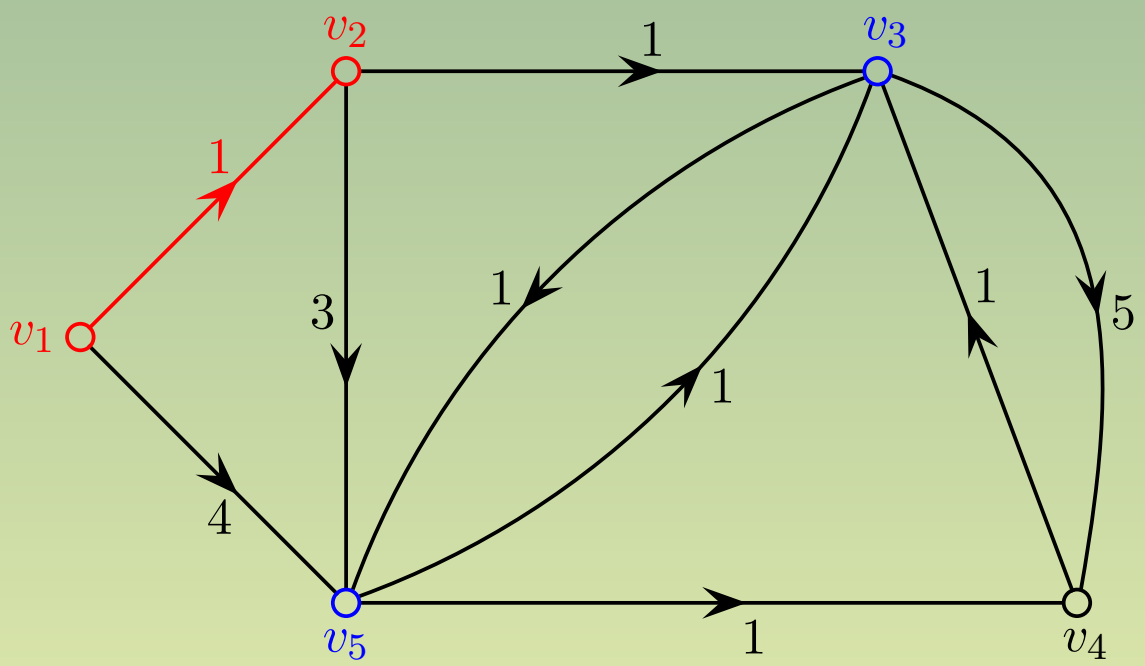
Sada među trenutnim oznakama $v_2(v_1, 1)$ i $v_5(v_1, 4)$ odaberemo onu s najmanjom drugom koordinatom. To je ovdje $v_2(v_1, 1)$ i vrh v_2 na taj način postaje označeni vrh, a put v_1v_2 je najkraći put od v_1 do v_2 i duljine je 1.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)

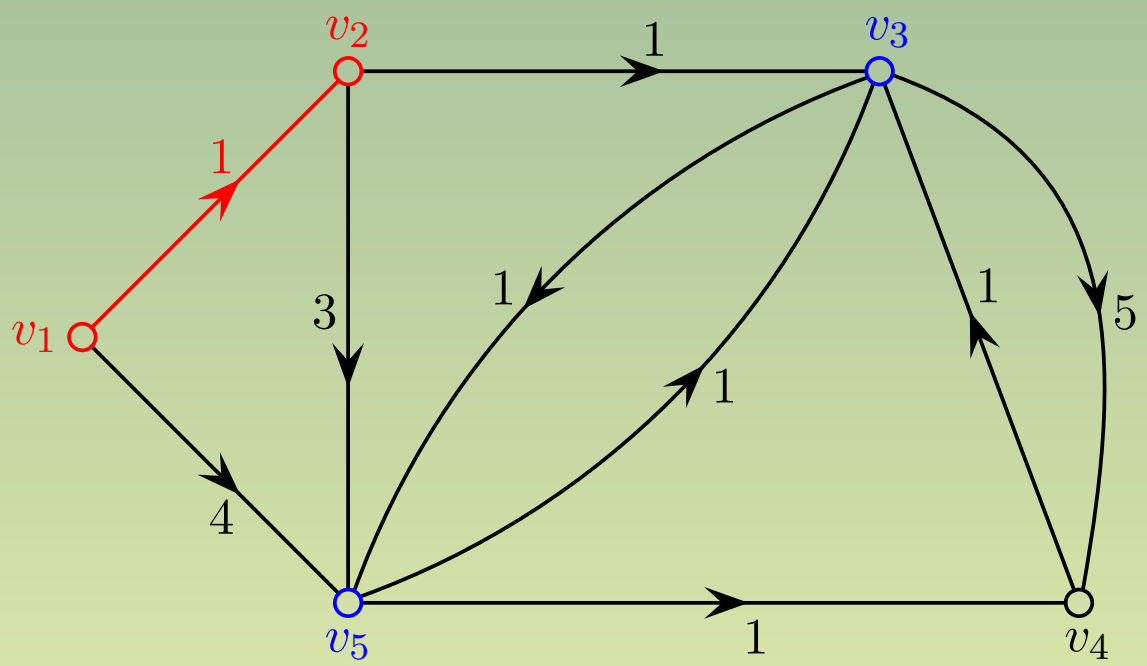


$v_1(-, 0)$, $v_2(v_1, 1)$

Pogledamo susjedne neoznačene vrhove označenih vrhova v_1 i v_2. To su u ovom trenutku vrhovi v_3 i v_5.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)



$v_1(-, 0)$, $v_2(v_1, 1)$

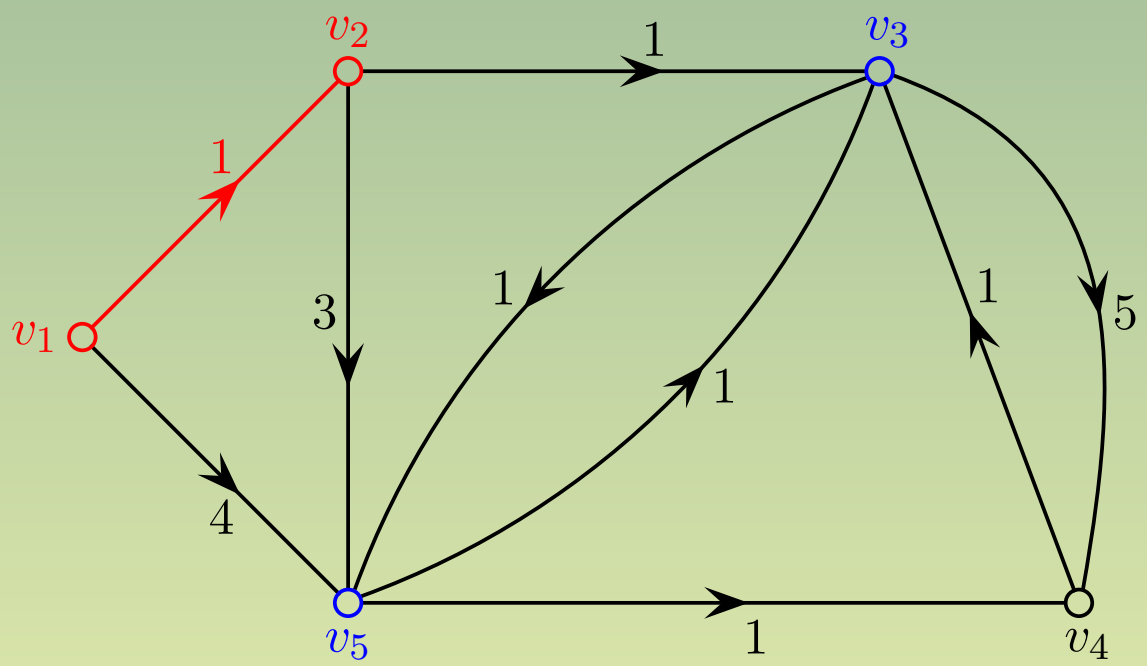
Vrh v_3 je susjed vrha v_2 pa mu je prva koordinata oznake jednaka v_2. Druga koordinata oznake vrha v_3 jednaka je sumi druge koordinate oznake vrha v_2 i težine luka v_2v_3, dakle $1 + 1 = 2$. Stoga je $v_3(v_2, 2)$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)

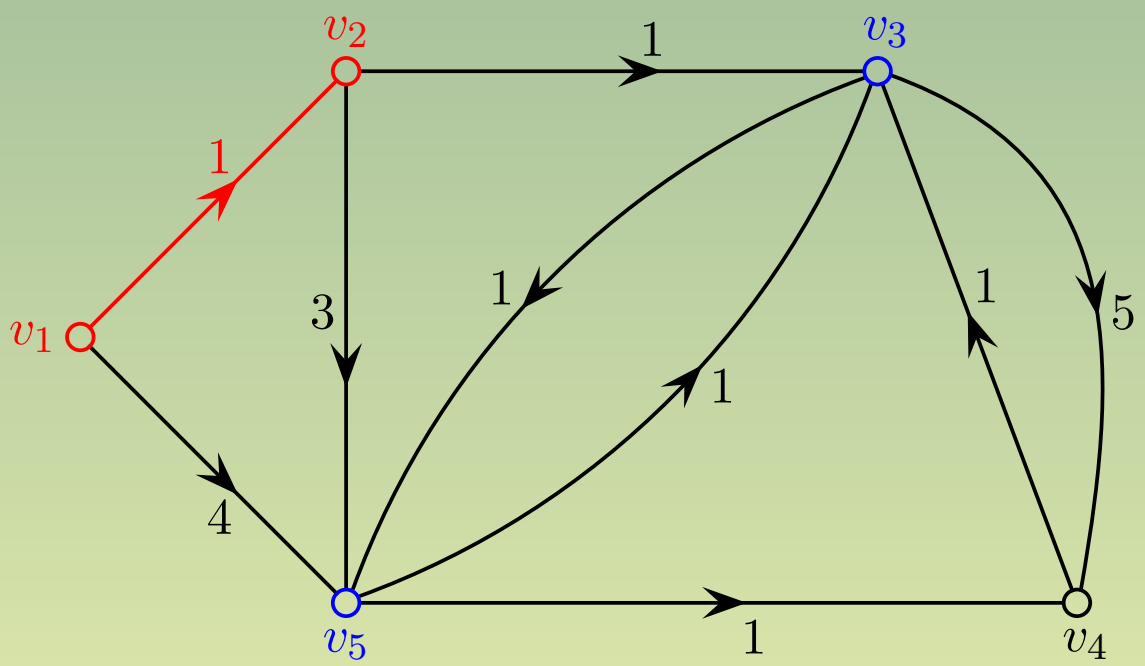


$v_1(-, 0)$, $v_2(v_1, 1)$

Vrh v_5 je susjed oba označena vrha v_1 i v_2. Gledano preko vrha v_1, prva koordinata oznake vrha v_5 je jednaka v_1. Druga koordinata oznake vrha v_5 jednaka je sumi druge koordinate oznake vrha v_1 i težine luka v_1v_5, dakle $0 + 4 = 4$. Stoga je $v_5(v_1, 4)$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)

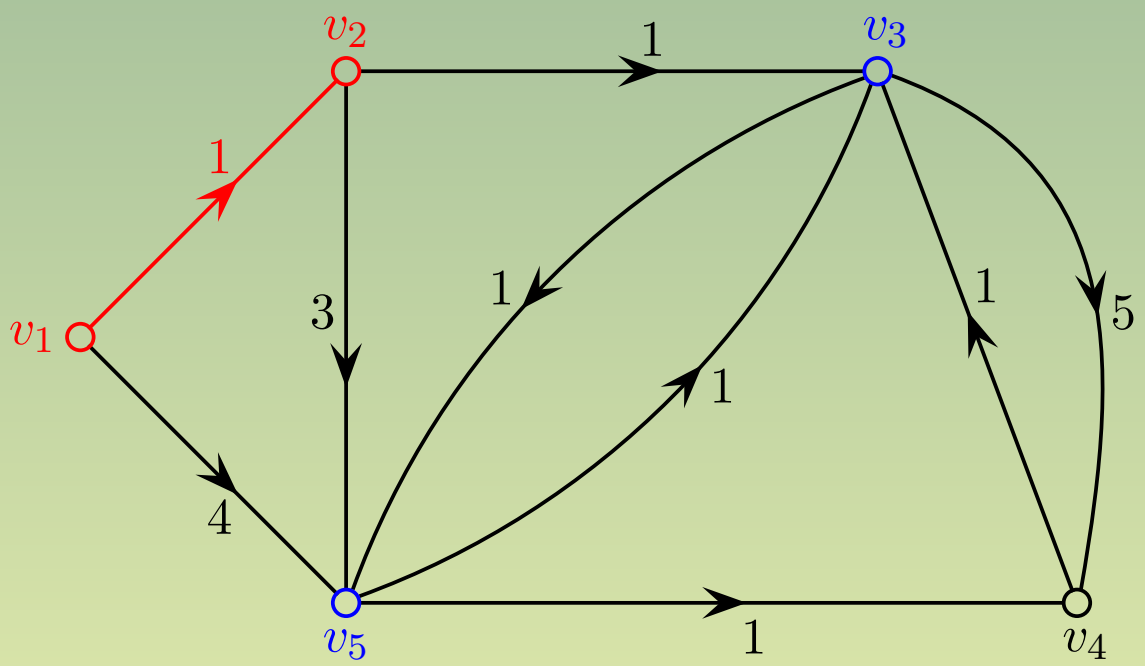


$v_1(-, 0)$, $v_2(v_1, 1)$

Gledano preko vrha v_2, prva koordinata oznake vrha v_5 je jednaka v_2. Druga koordinata oznake vrha v_5 jednaka je sumi druge koordinate oznake vrha v_2 i težine luka v_2v_5, dakle $1 + 3 = 4$. Stoga je $v_5(v_2, 4)$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)



$v_1(-, 0)$, $v_2(v_1, 1)$

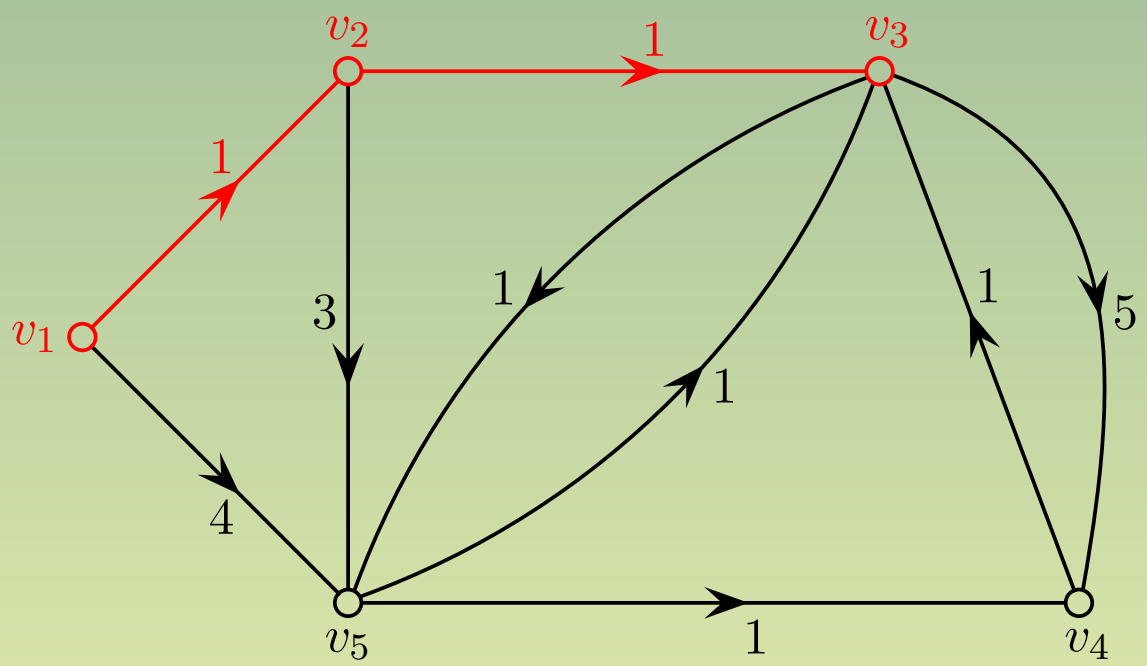
Sada među trenutnim oznakama $v_3(v_2, 2)$, $v_5(v_1, 4)$ i $v_5(v_2, 4)$ odaberemo onu s najmanjom drugom koordinatom.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)



$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$

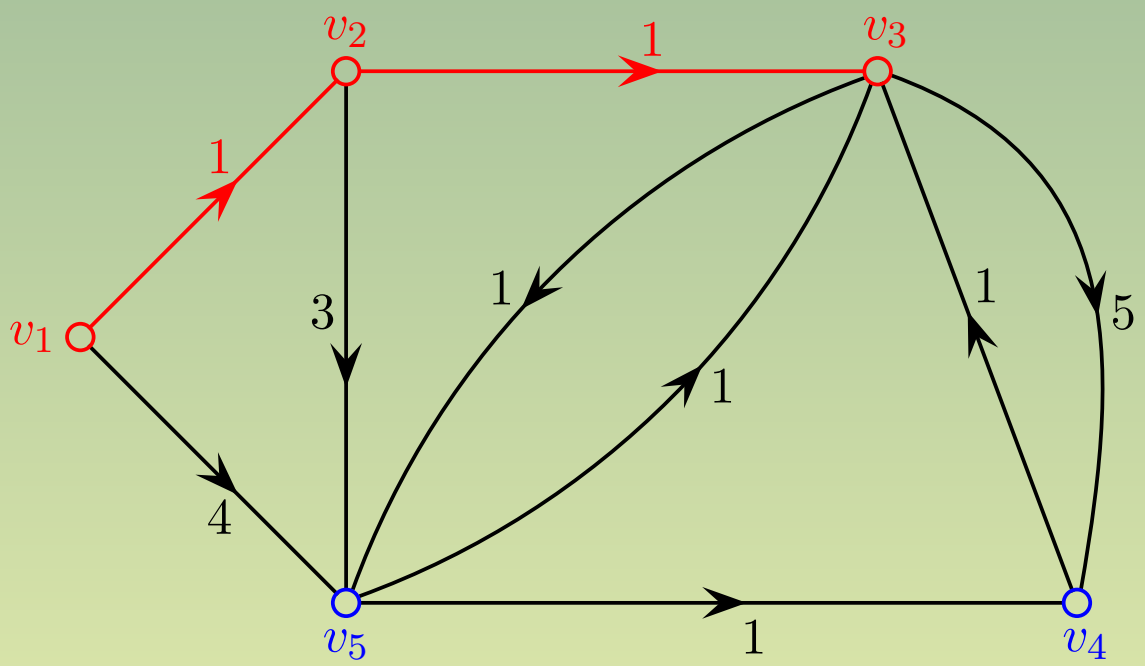
Sada među trenutnim oznakama $v_3(v_2,2)$, $v_5(v_1,4)$ i $v_5(v_2,4)$ odaberemo onu s najmanjom drugom koordinatom. To je ovdje $v_3(v_2,2)$ i vrh v_3 na taj način postaje označeni vrh, a put $v_1v_2v_3$ je najkraći put od v_1 do v_3 i duljine je 2.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)



$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$

Pogledamo susjedne neoznačene vrhove označenih vrhova v_1, v_2 i v_3.

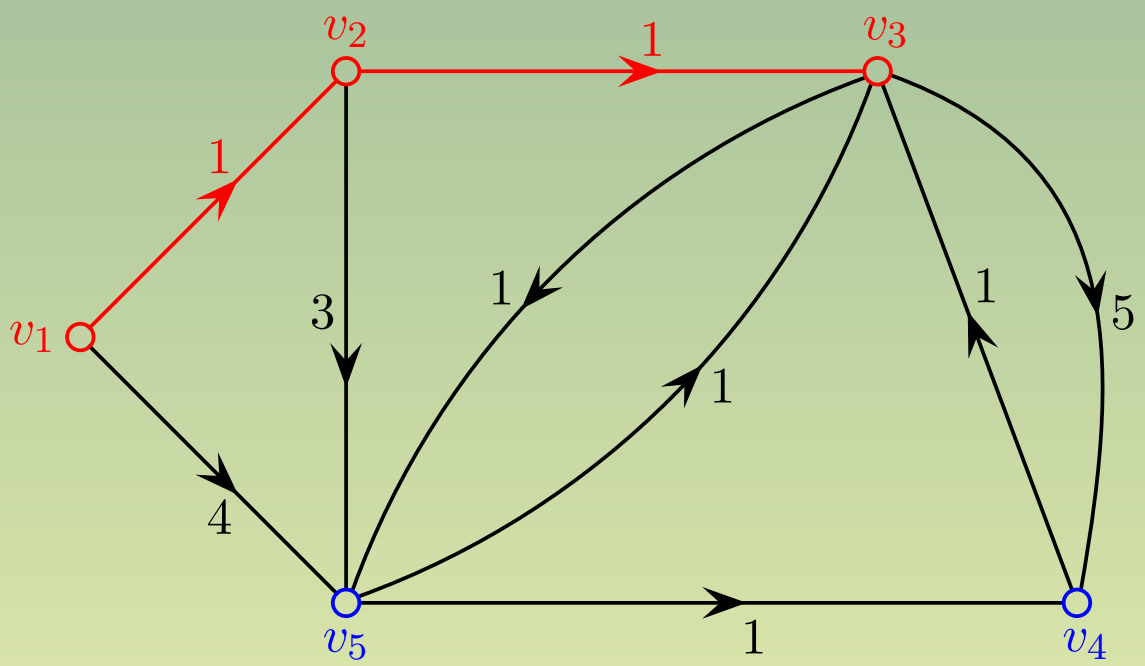
To su u ovom trenutku vrhovi v_4 i v_5.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)



$v_1(-, 0)$, $v_2(v_1, 1)$, $v_3(v_2, 2)$

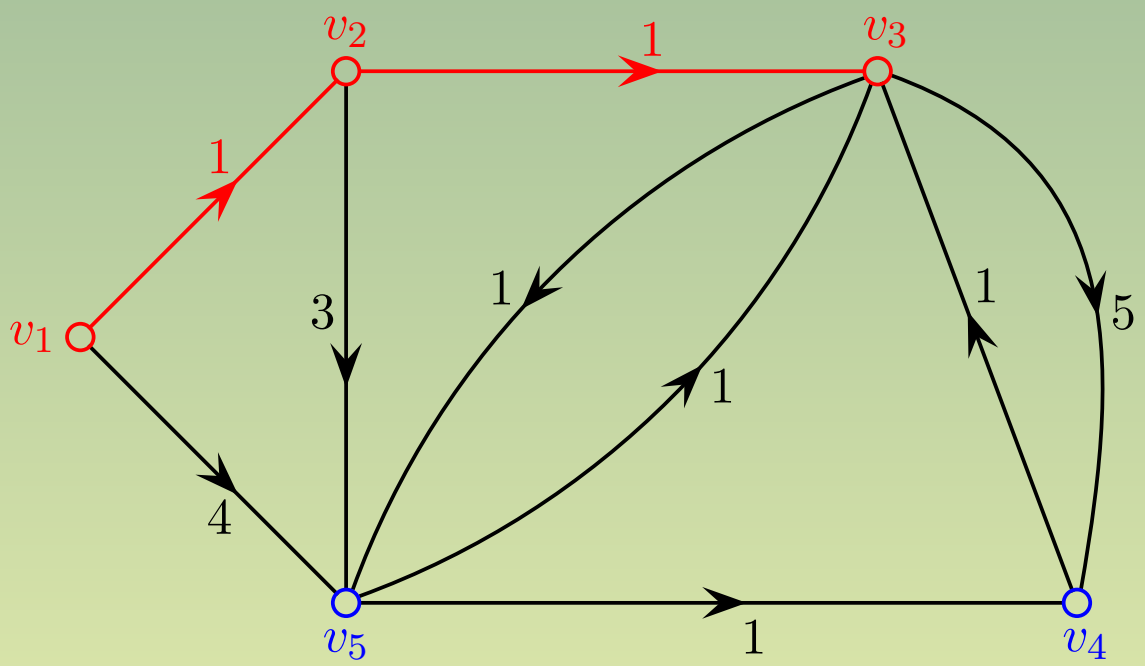
Vrh v_4 je susjed vrha v_3 pa mu je prva koordinata oznake jednaka v_3. Druga koordinata oznake vrha v_4 jednaka je sumi druge koordinate oznake vrha v_3 i težine luka v_3v_4, dakle $2 + 5 = 7$. Stoga je $v_4(v_3, 7)$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)



$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$

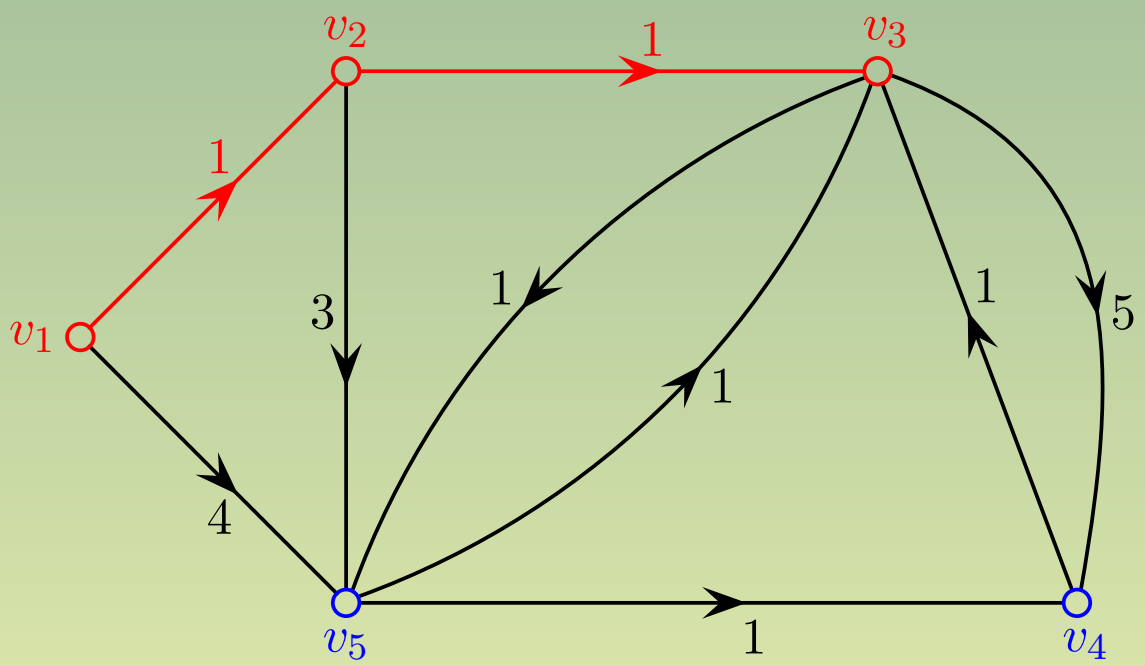
Vrh v_5 je susjed svih označenih vrhova v_1, v_2 i v_3. Gledano preko vrha v_1, prva koordinata oznake vrha v_5 je jednaka v_1. Druga koordinata oznake vrha v_5 jednaka je sumi druge koordinate oznake vrha v_1 i težine luka v_1v_5, dakle $0+4=4$. Stoga je $v_5(v_1,4)$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)

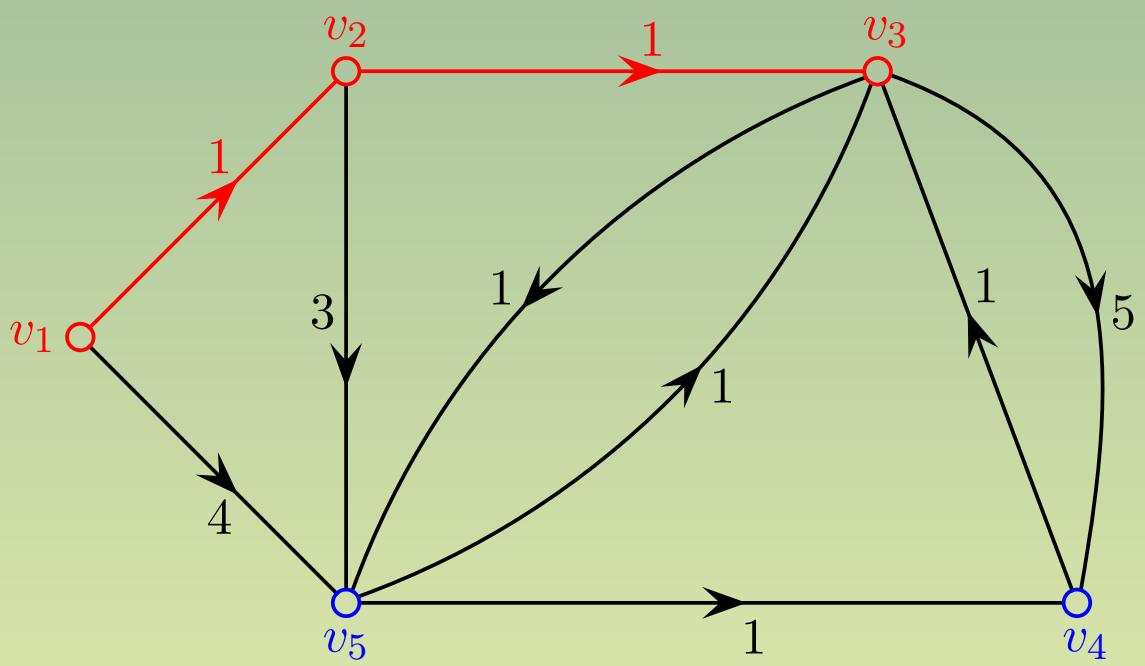


$v_1(-, 0)$, $v_2(v_1, 1)$, $v_3(v_2, 2)$

Gledano preko vrha v_2, prva koordinata oznake vrha v_5 je jednaka v_2. Druga koordinata oznake vrha v_5 jednaka je sumi druge koordinate oznake vrha v_2 i težine luka v_2v_5, dakle $1 + 3 = 4$. Stoga je $v_5(v_2, 4)$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)

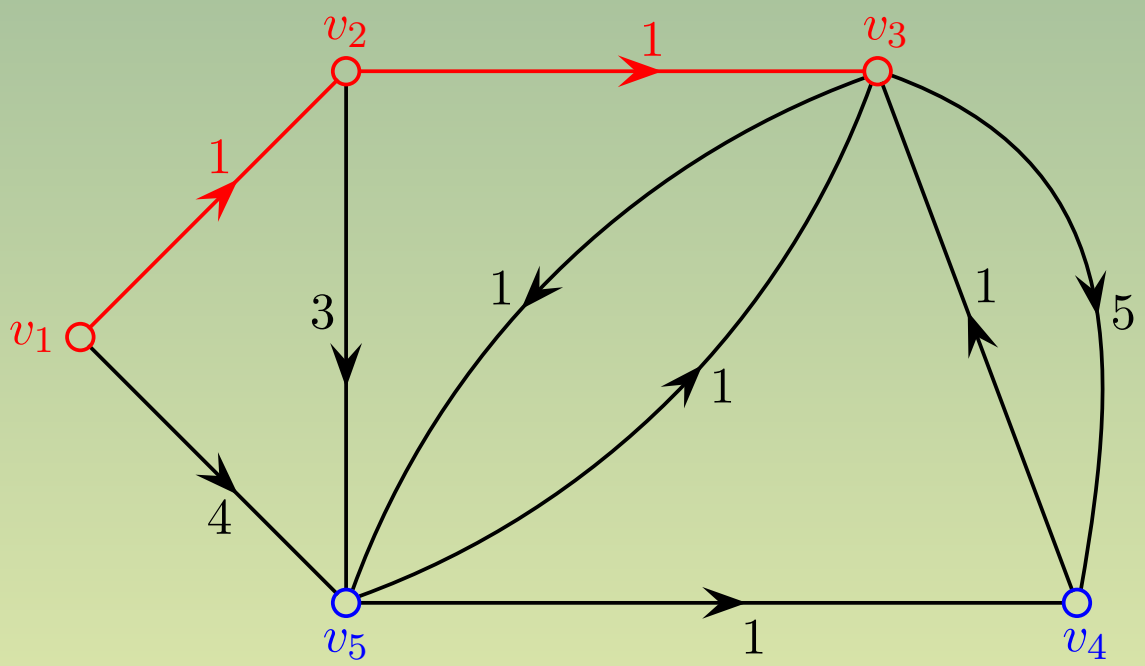


$v_1(-, 0)$, $v_2(v_1, 1)$, $v_3(v_2, 2)$

Gledano preko vrha v_3, prva koordinata oznake vrha v_5 je jednaka v_3. Druga koordinata oznake vrha v_5 jednaka je sumi druge koordinate oznake vrha v_3 i težine luka v_3v_5, dakle $2 + 1 = 3$. Stoga je $v_5(v_3, 3)$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)



$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$

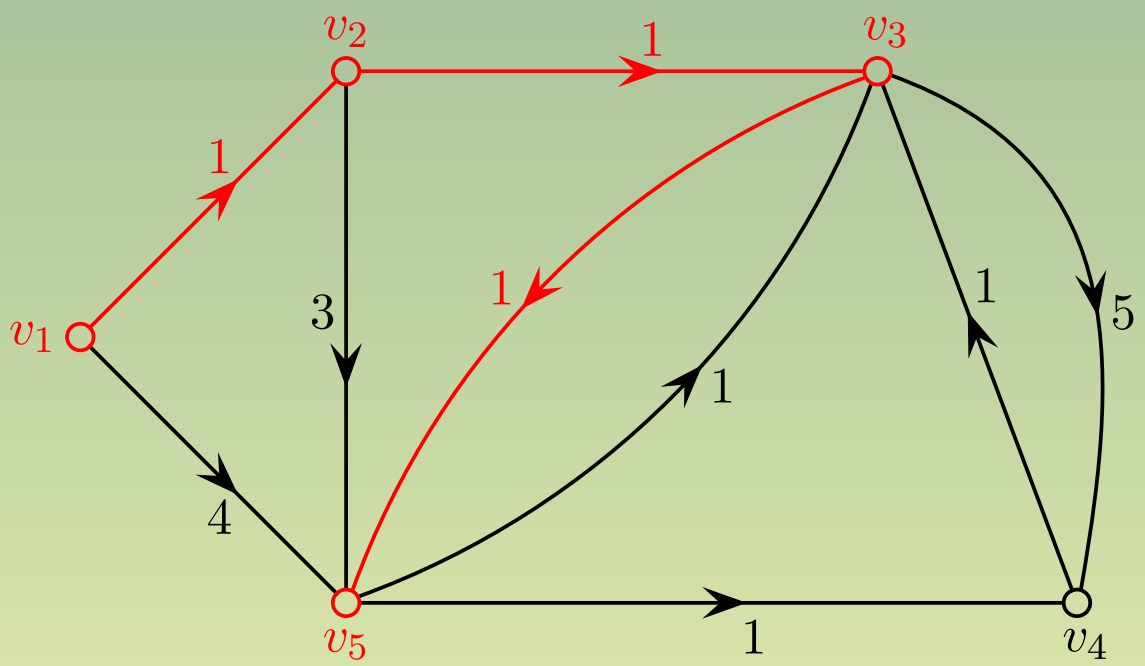
Sada među trenutnim oznakama $v_4(v_3,7)$, $v_5(v_1,4)$, $v_5(v_2,4)$ i $v_5(v_3,3)$ odaberemo onu s najmanjom drugom koordinatom.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)

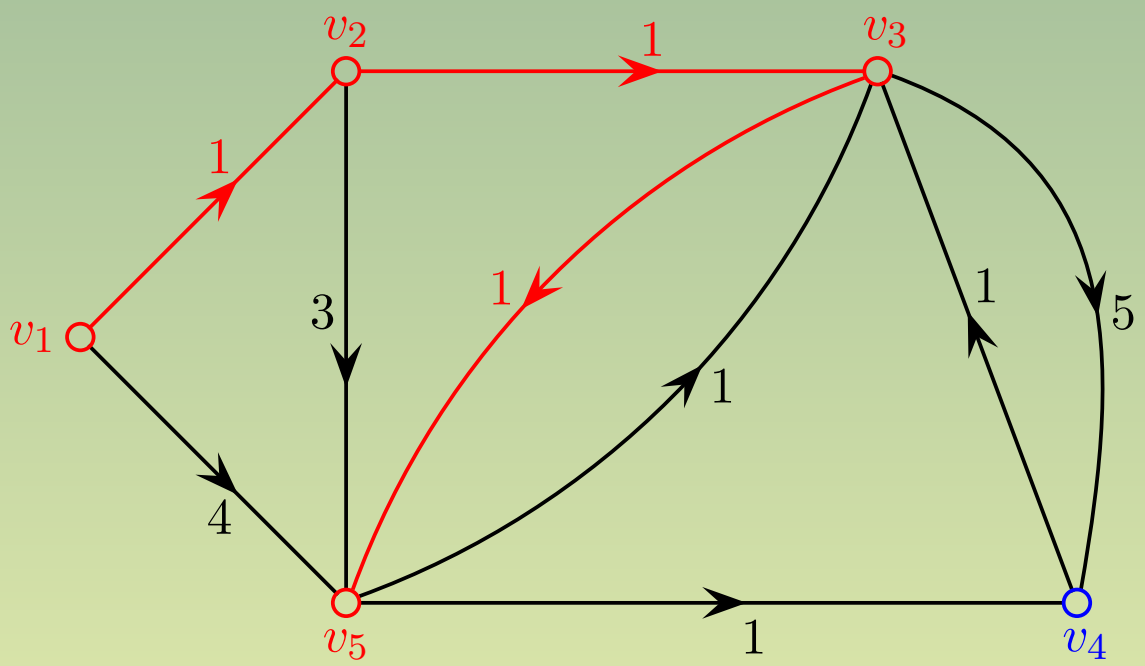


$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_5(v_3,3)$

Sada među trenutnim oznakama $v_4(v_3,7)$, $v_5(v_1,4)$, $v_5(v_2,4)$ i $v_5(v_3,3)$ odaberemo onu s najmanjom drugom koordinatom. To je ovdje $v_5(v_3,3)$ i vrh v_5 na taj način postaje označeni vrh, a put $v_1v_2v_3v_5$ je najkraći put od v_1 do v_5 i duljine je 3.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)



$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_5(v_3,3)$

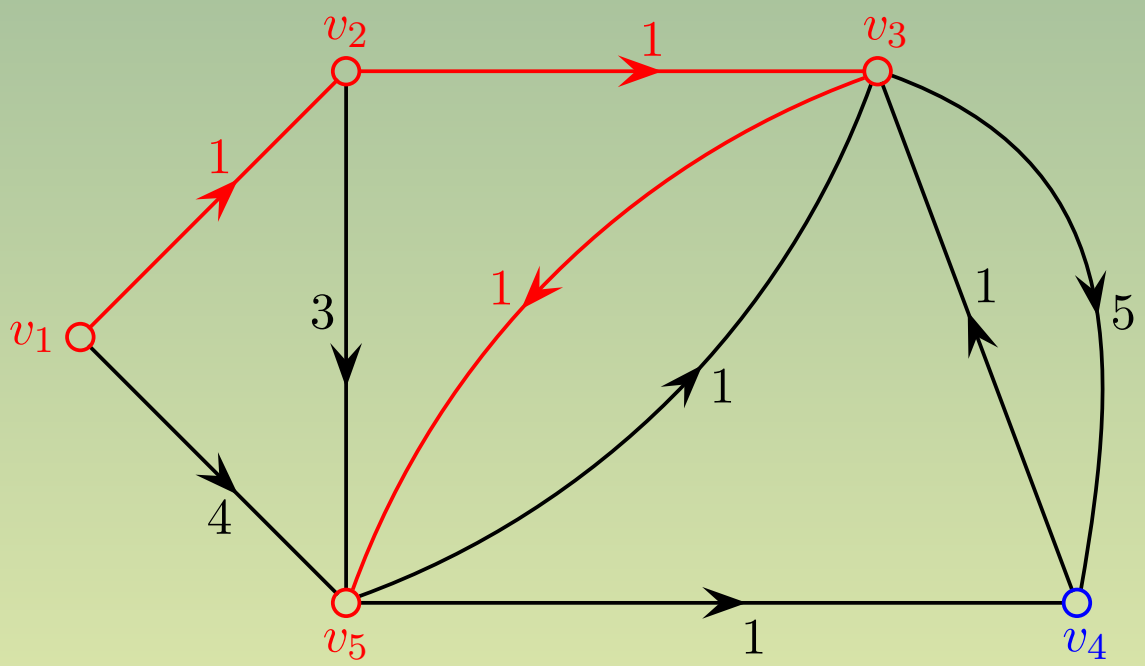
Pogledamo susjedne neoznačene vrhove označenih vrhova v_1, v_2, v_3 i v_5. To je jedino još vrh v_4.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)

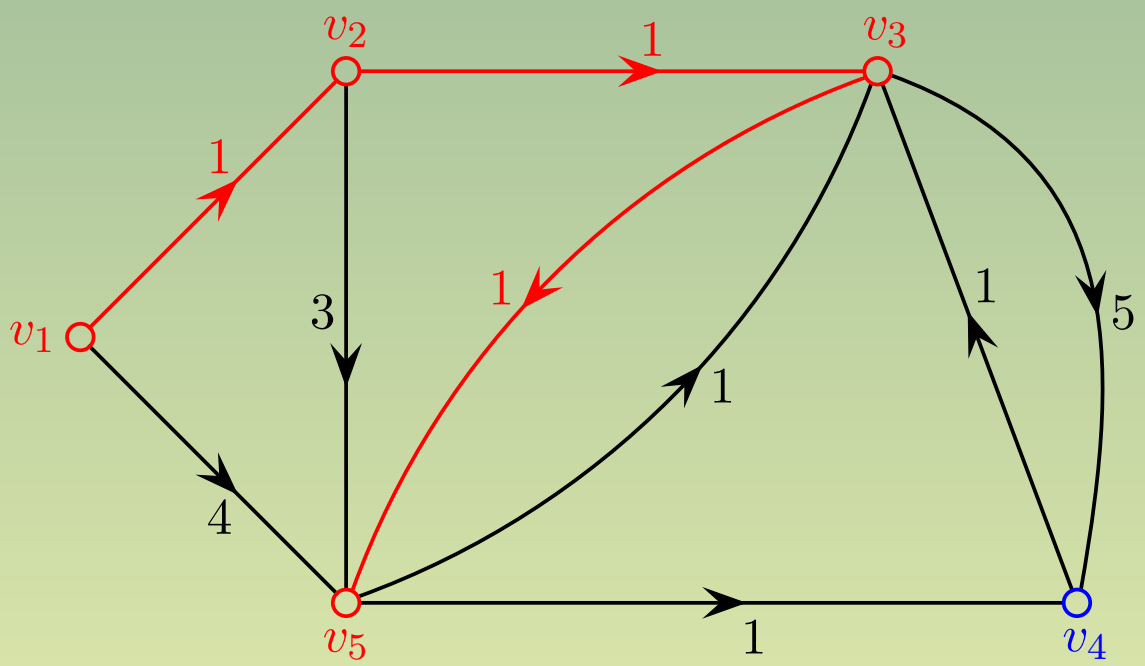


$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_5(v_3,3)$

Vrh v_4 je susjed jedino od vrhova v_3 i v_5. Gledano preko vrha v_3, prva koordinata oznake vrha v_4 je jednaka v_3. Druga koordinata oznake vrha v_4 jednaka je sumi druge koordinate oznake vrha v_3 i težine luka v_3v_4, dakle $2+5=7$. Stoga je $v_4(v_3,7)$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)



$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_5(v_3,3)$

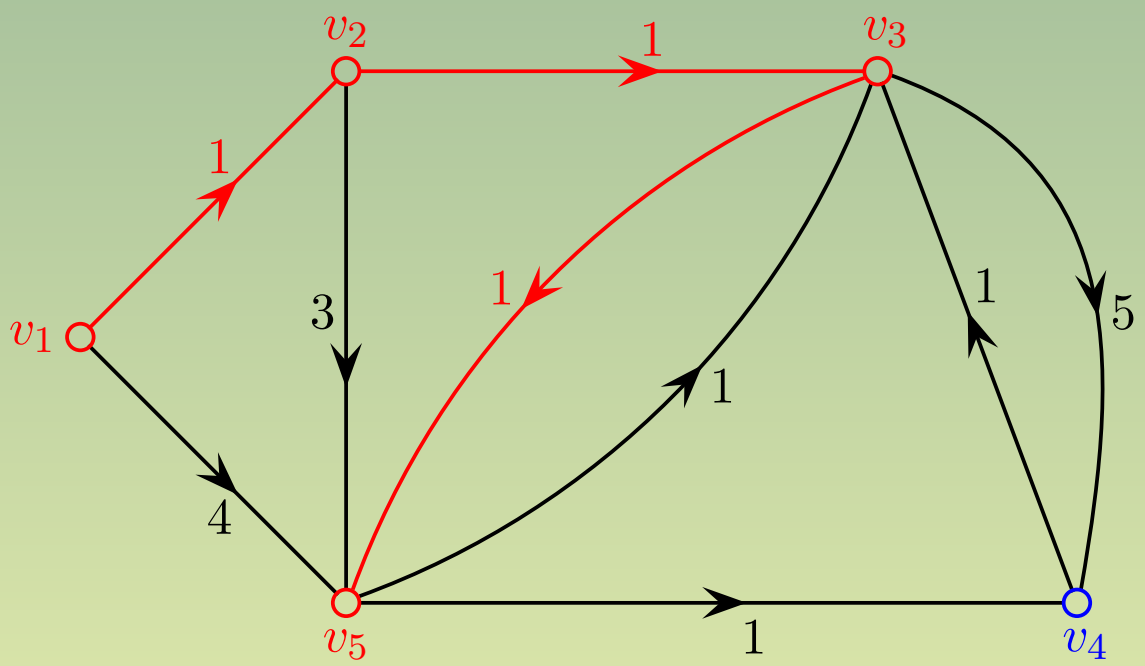
Gledano preko vrha v_5, prva koordinata oznake vrha v_4 je jednaka v_5. Druga koordinata oznake vrha v_4 jednaka je sumi druge koordinate oznake vrha v_5 i težine luka v_5v_4, dakle $3+1=4$. Stoga je $v_4(v_5,4)$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)

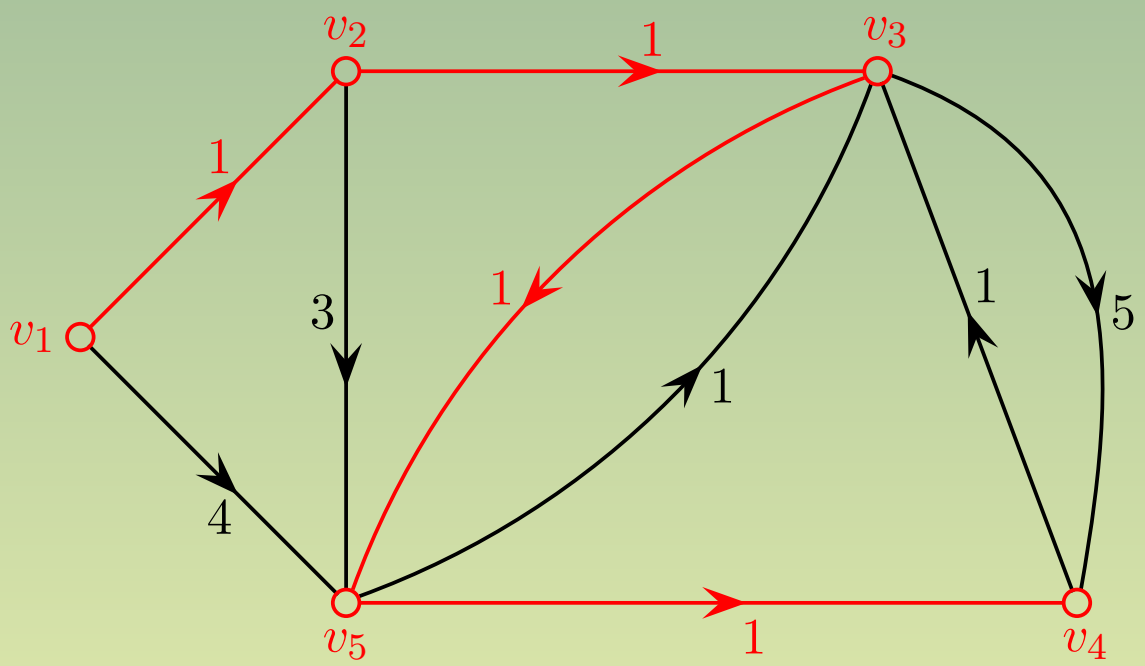


$v_1(-,0),\ v_2(v_1,1),\ v_3(v_2,2),\ v_5(v_3,3)$

Sada među trenutnim oznakama $v_4(v_3,7)$ i $v_4(v_5,4)$ odaberemo onu s najmanjom drugom koordinatom.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)

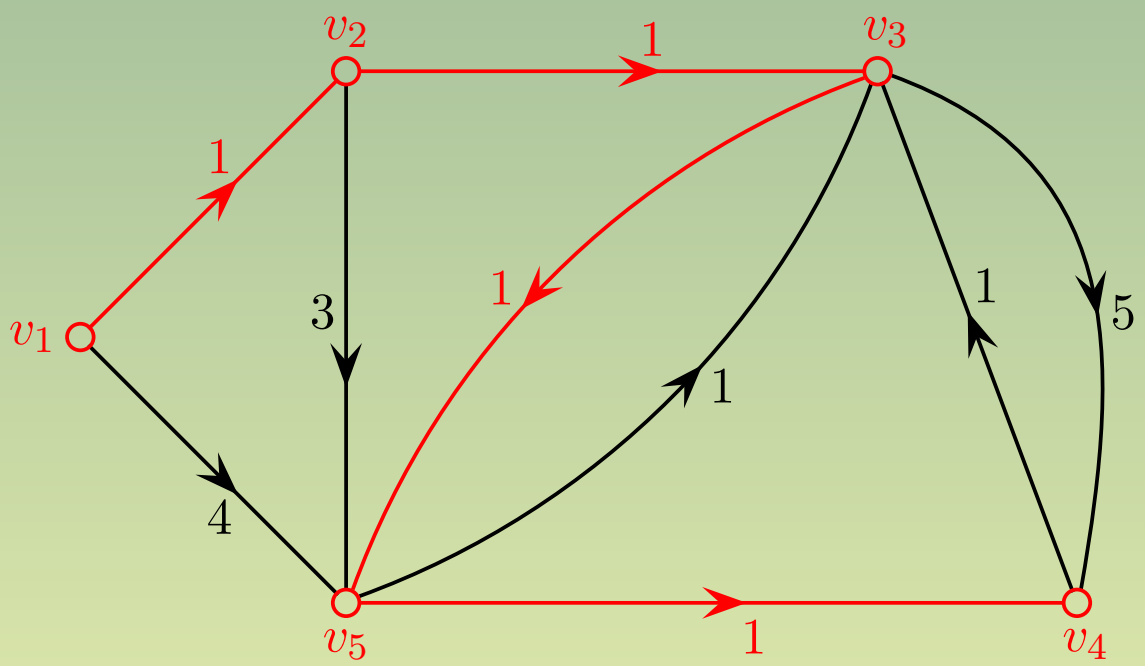


$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_5(v_3,3)$, $v_4(v_5,4)$

Sada među trenutnim oznakama $v_4(v_3,7)$ i $v_4(v_5,4)$ odaberemo onu s najmanjom drugom koordinatom. To je ovdje $v_4(v_5,4)$ i vrh v_4 na taj način postaje označeni vrh, a put $v_1v_2v_3v_5v_4$ je najkraći put od v_1 do v_4 i duljine je 4.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)

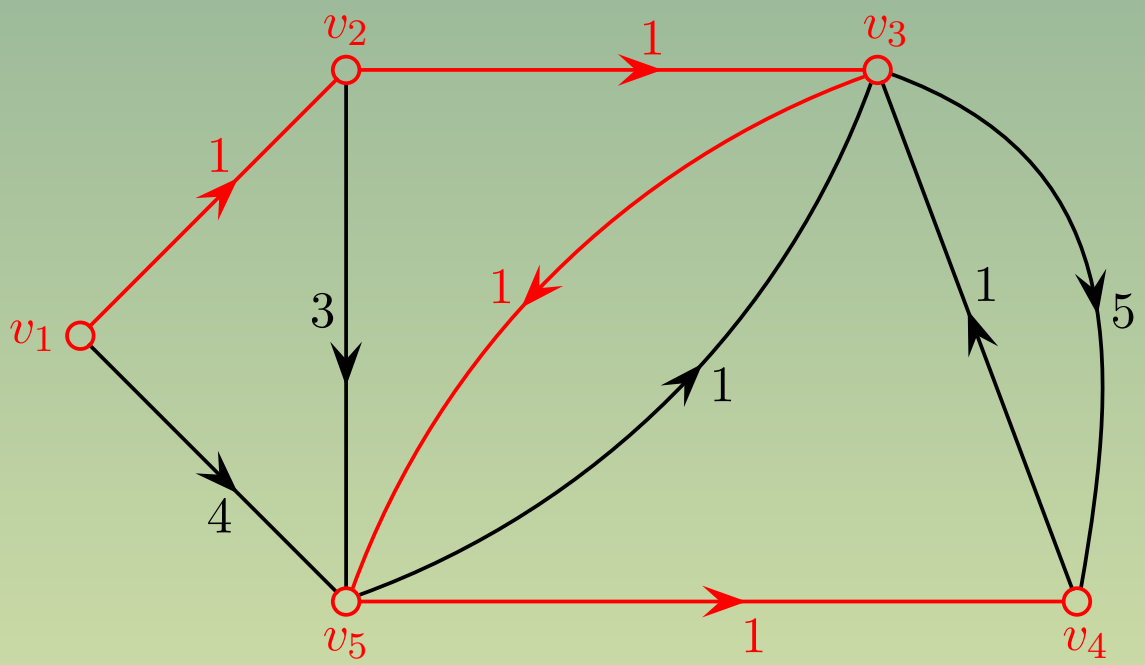


$v_1(-,0),\ v_2(v_1,1),\ v_3(v_2,2),\ v_5(v_3,3),\ v_4(v_5,4)$

objasni postupak

Kako su svi vrhovi označeni, algoritam je završio i dobili smo najkraće putove i njihove duljine od vrha v_1 do svih preostalih vrhova u promatranom digrafu.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Čitav postupak objašnjavanja ćemo kratko zapisivati kao i prije u obliku

$0:$ $\boxed{v_1(-,0)}$

$1:$ $\boxed{v_2(v_1,1)}$, $v_5(v_1,4)$

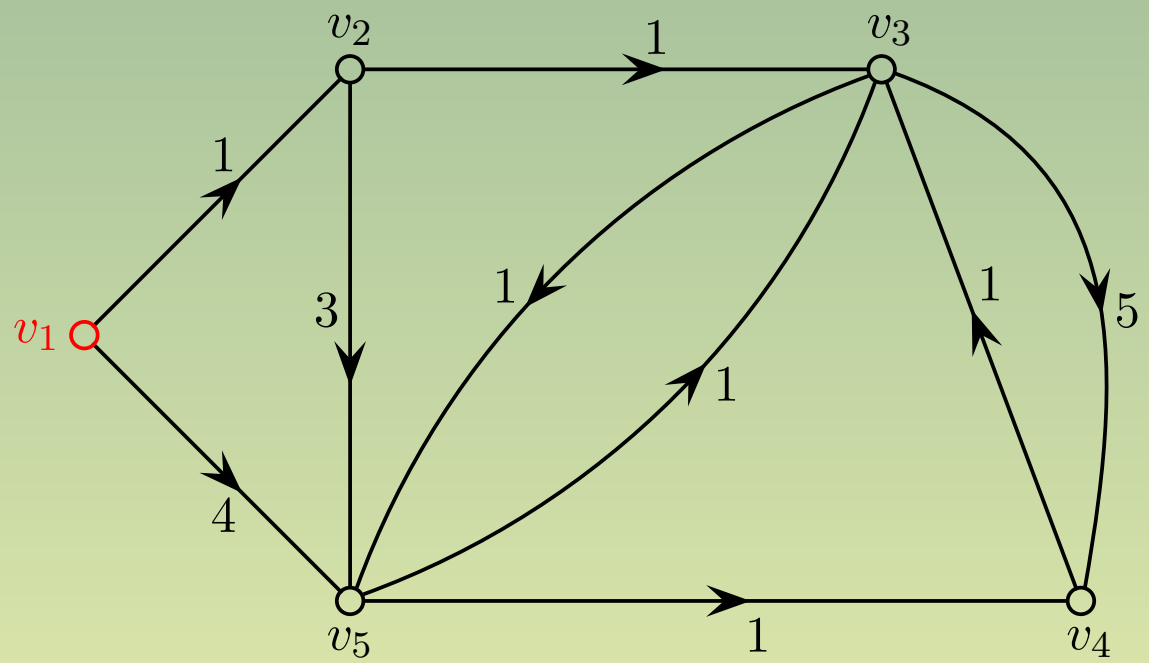
$2:$ $v_5(v_1,4)$, $v_5(v_2,4)$, $\boxed{v_3(v_2,2)}$

$3:$ $v_5(v_1,4)$, $v_5(v_2,4)$, $\boxed{v_5(v_3,3)}$, $v_4(v_3,7)$

$4:$ $v_4(v_3,7)$, $\boxed{v_4(v_5,4)}$

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

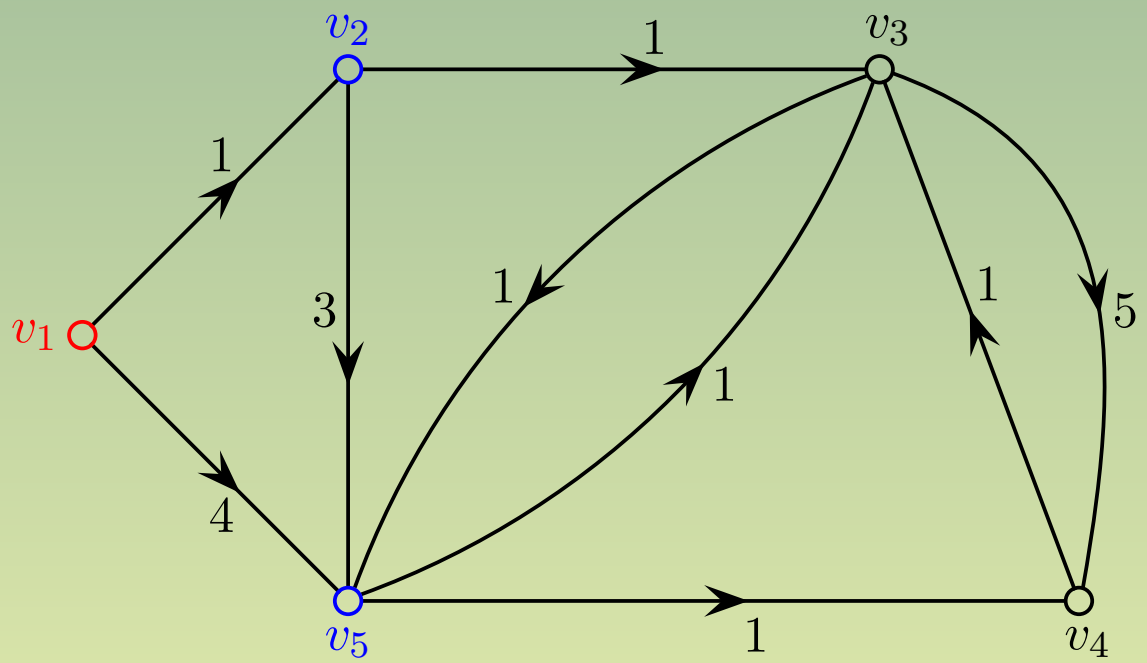


$v_1(-,0)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$ ▸ konačno rješenje

Na početku vrhu v_1 pridružimo trajnu oznaku $(-,0)$, a svim ostalim vrhovima privremene oznake $(-,\infty)$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-,0)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$

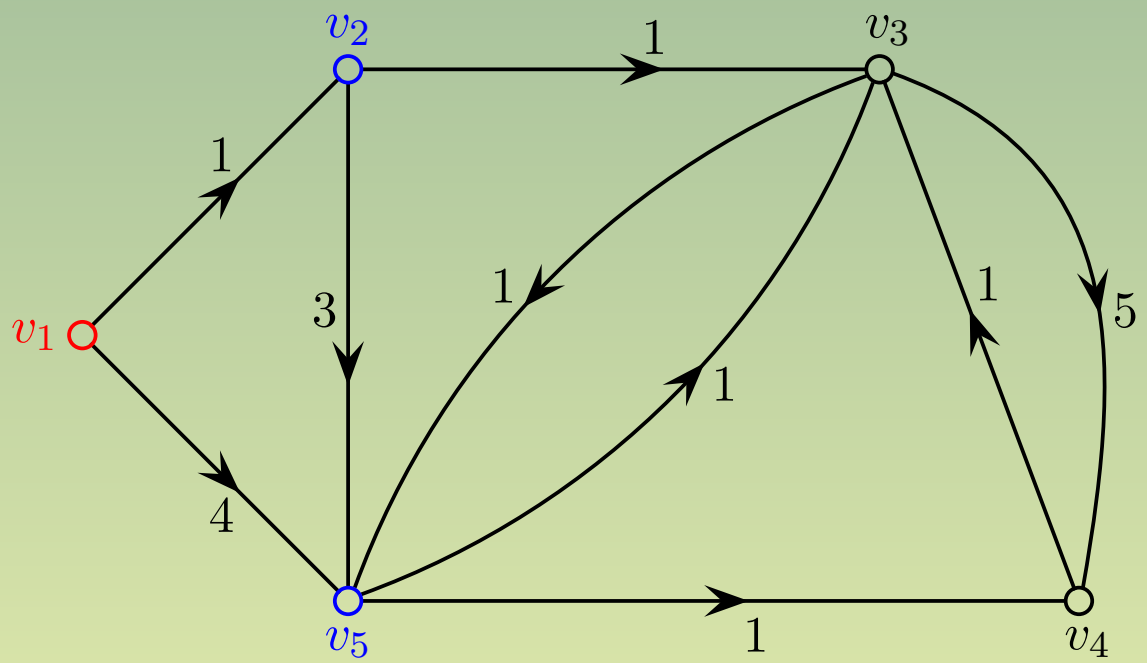
Pogledamo susjedne vrhove vrha v_1 (v_1 je posljednji dobio trajnu oznaku) koji još uvijek imaju privremene oznake. To su vrhovi v_2 i v_5.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

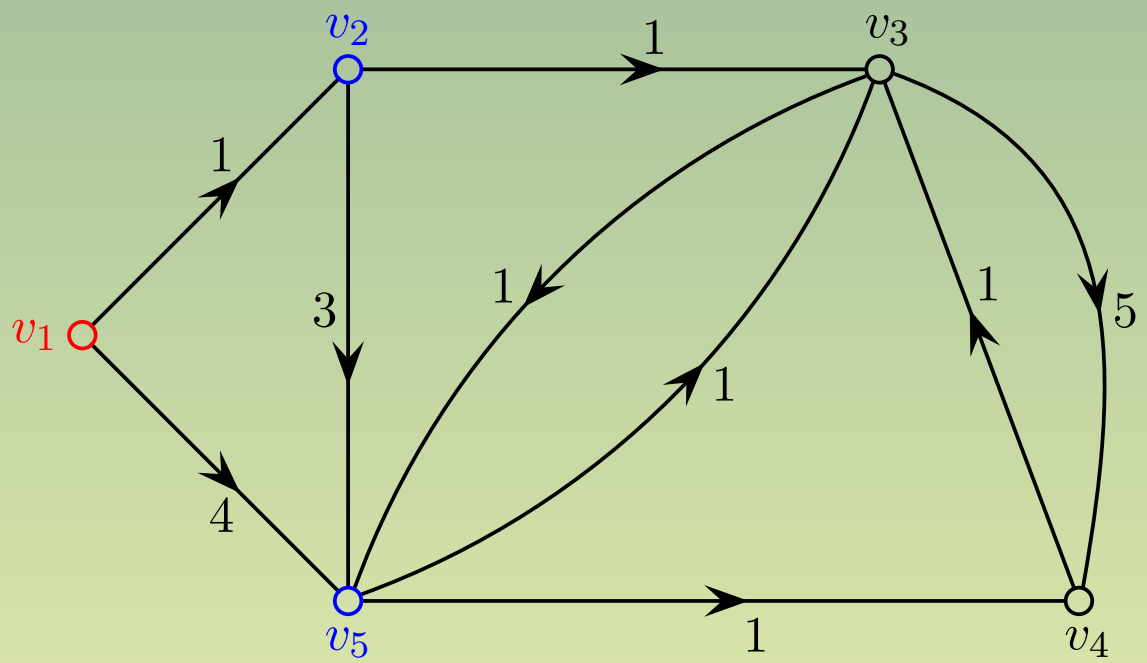


$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$

Kako je privremena oznaka (druga koordinata) vrha v_2 veća od sume druge koordinate vrha v_1 i težine luka v_1v_2, vrh v_2 dobiva novu privremenu oznaku $v_2(v_1,1)$, gdje je druga koordinata od v_2 jednaka sumi druge koordinate vrha v_1 i težine luka v_1v_2, tj. $1 = 0 + 1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

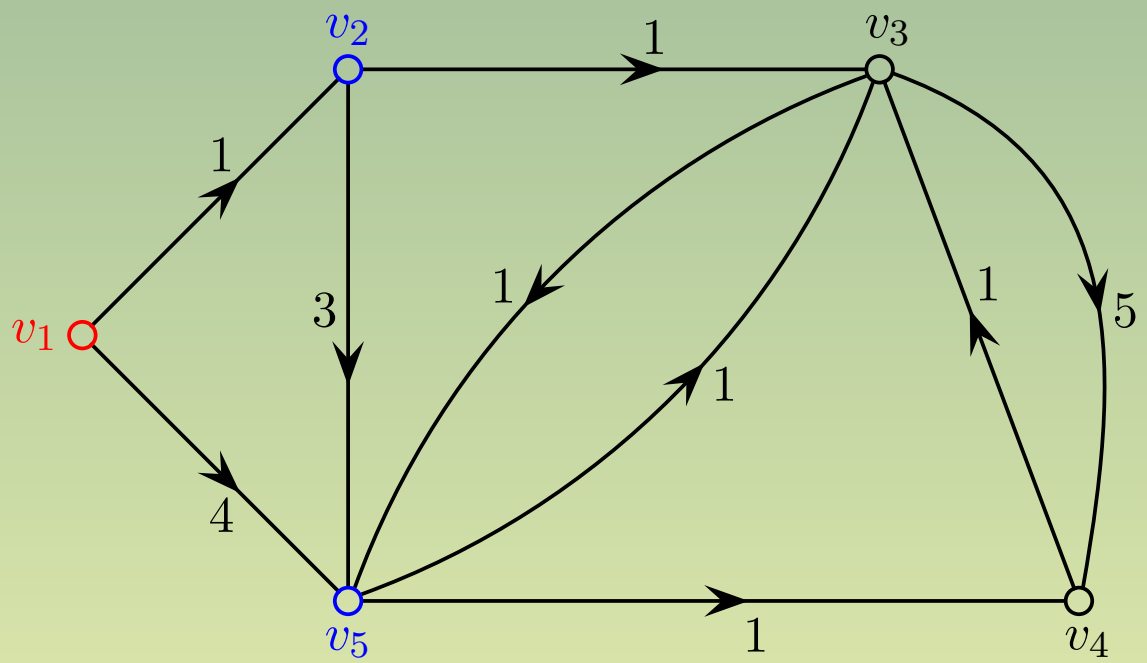
Kako je privremena oznaka (druga koordinata) vrha v_5 veća od sume druge koordinate vrha v_1 i težine luka v_1v_5, vrh v_5 dobiva novu privremenu oznaku $v_5(v_1,4)$, gdje je druga koordinata od v_5 jednaka sumi druge koordinate vrha v_1 i težine luka v_1v_5, tj. $4 = 0 + 4$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

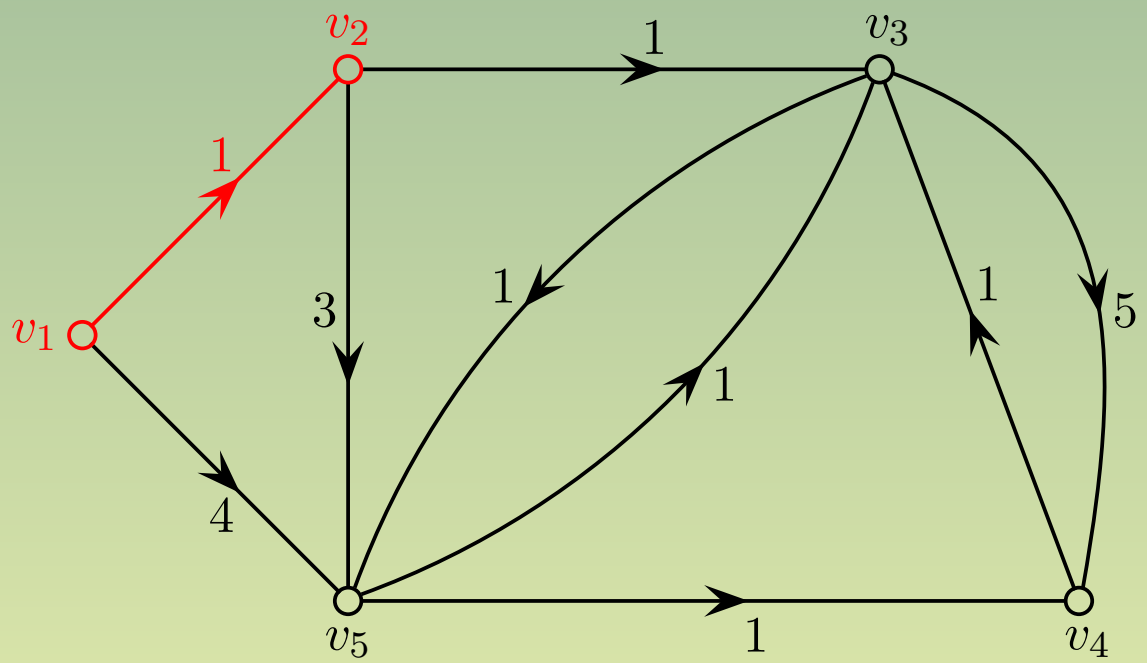


$v_1(-, 0)$, $v_2(v_1, 1)$, $v_3(-, \infty)$, $v_4(-, \infty)$, $v_5(v_1, 4)$

Sada tražimo vrh s najmanjom privremenom oznakom, tj. drugom koordinatom.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

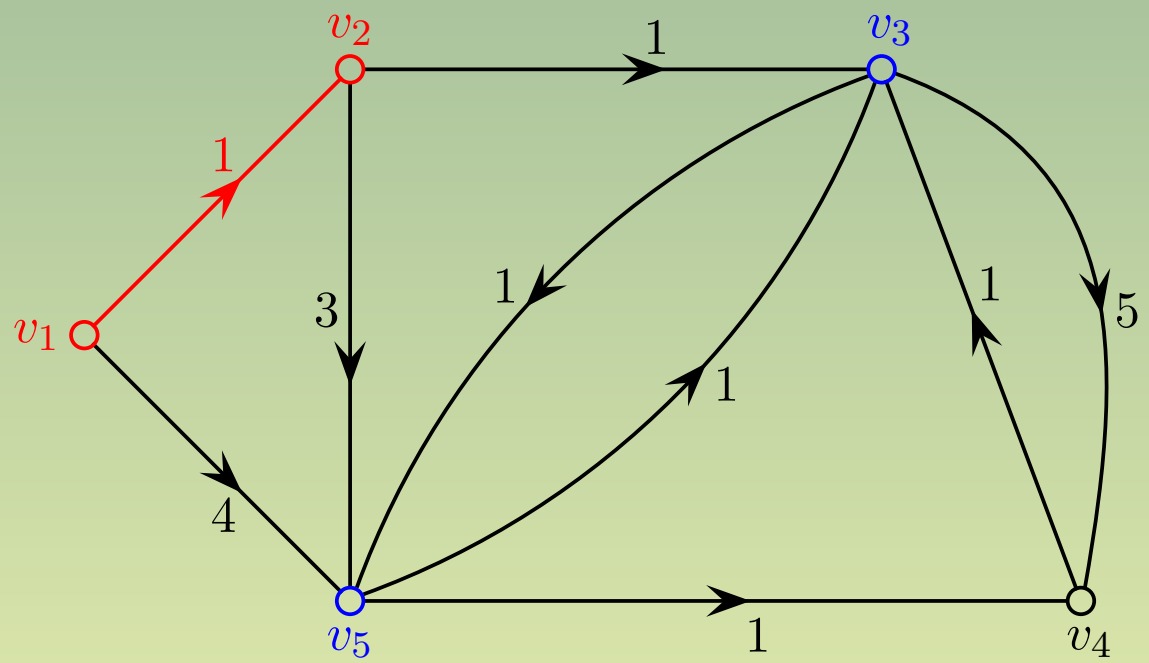


$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

Sada tražimo vrh s najmanjom privremenom oznakom, tj. drugom koordinatom. To je ovdje vrh v_2 i stavimo da je njegova oznaka trajna. Nadalje, najkraći put od v_1 do v_2 je v_1v_2 i duljine je 1.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

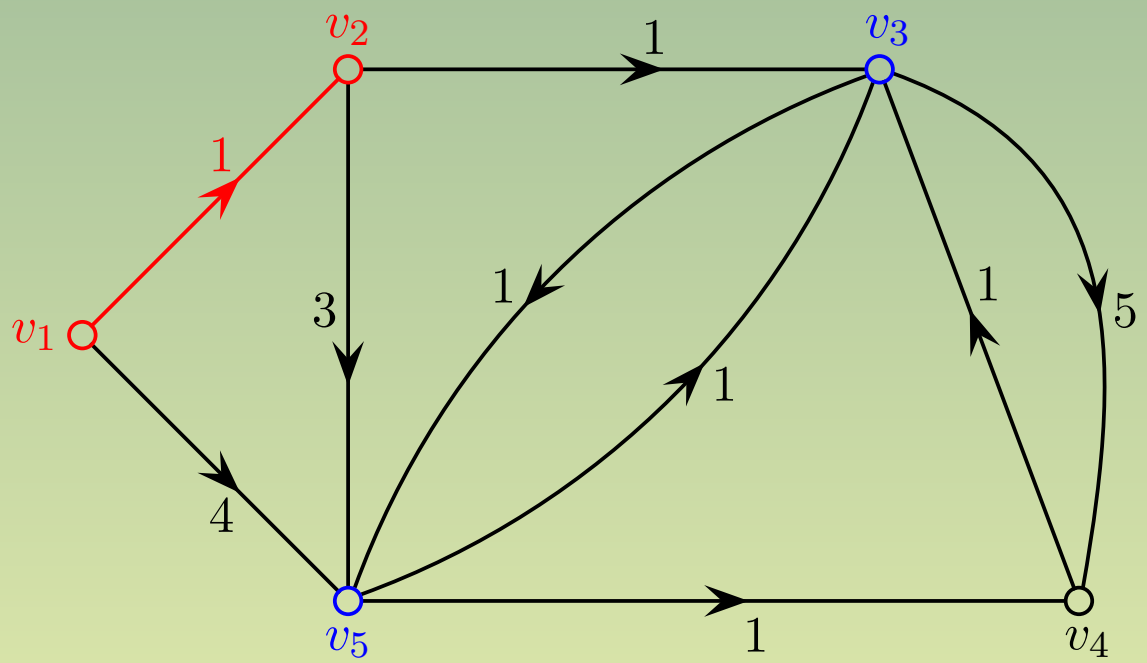
Pogledamo susjedne vrhove vrha v_2 (v_2 je posljednji dobio trajnu oznaku) koji još uvijek imaju privremene oznake. To su vrhovi v_3 i v_5.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

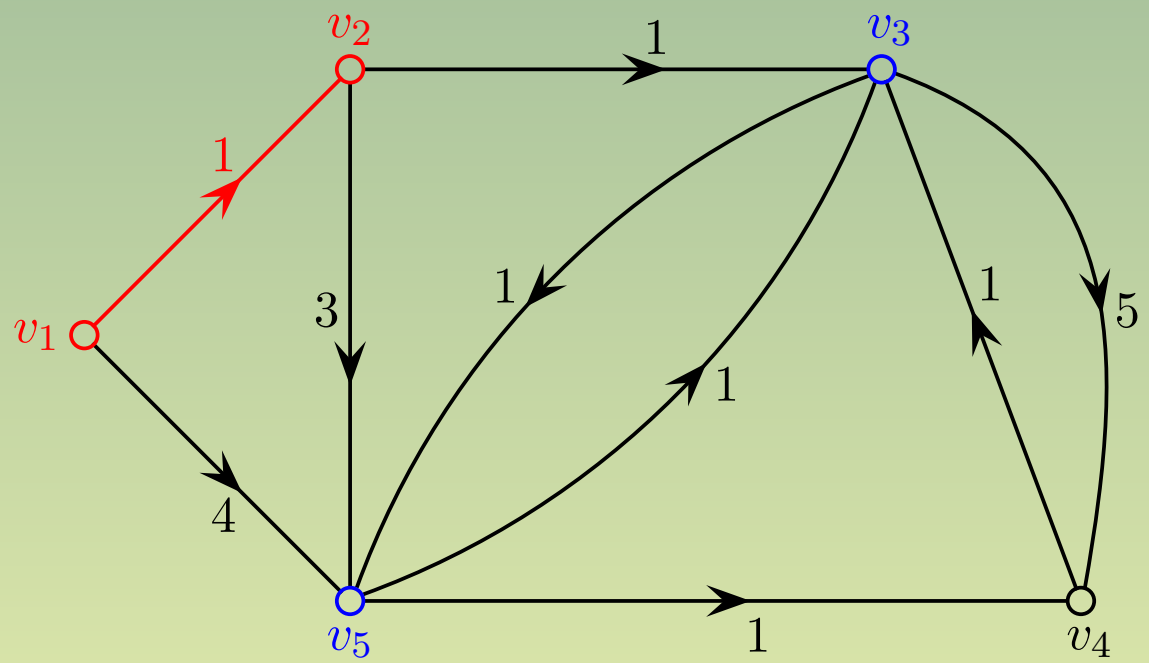


$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

Kako je privremena oznaka (druga koordinata) vrha v_3 veća od sume druge koordinate vrha v_2 i težine luka v_2v_3, vrh v_3 dobiva novu privremenu oznaku $v_3(v_2,2)$, gdje je druga koordinata od v_3 jednaka sumi druge koordinate vrha v_2 i težine luka v_2v_3, tj. $2 = 1 + 1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

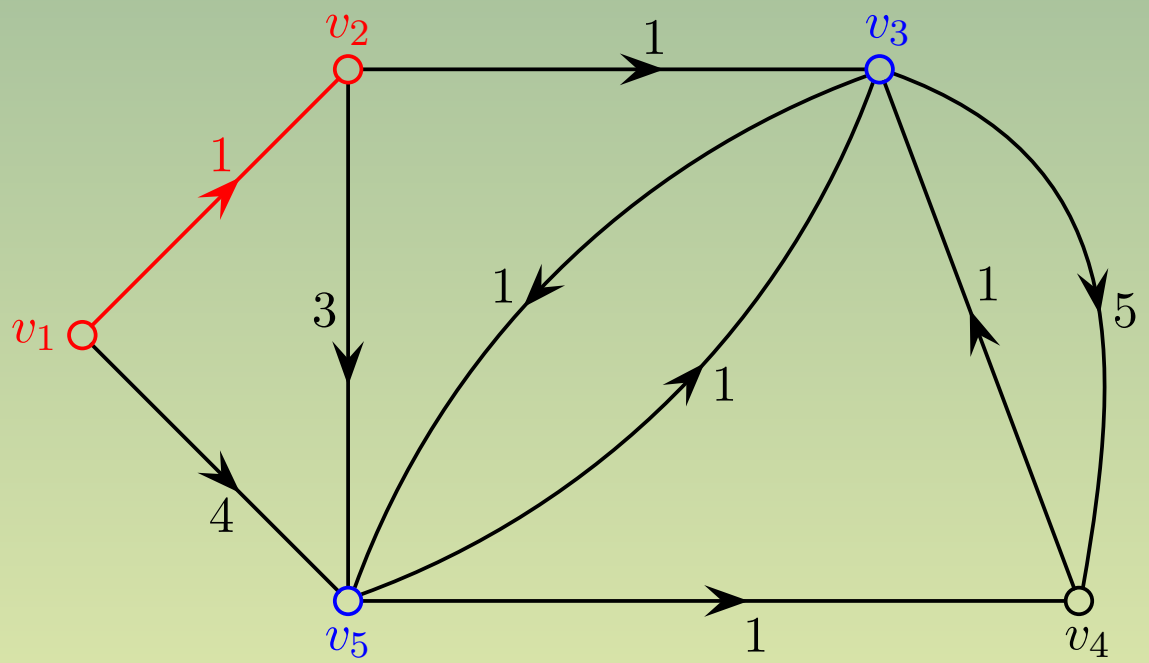


$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

Kako privremena oznaka (druga koordinata) vrha v_5 nije veća od sume druge koordinate vrha v_2 i težine luka v_2v_5, vrh v_5 ne mijenja svoju privremenu oznaku.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

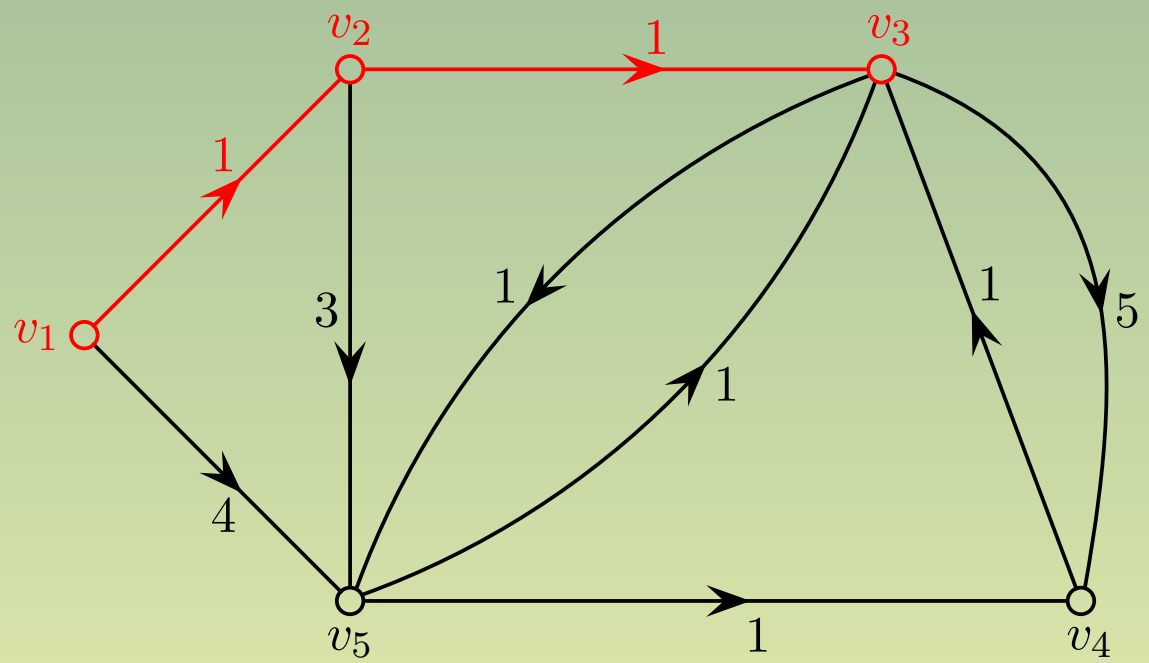


$v_1(-, 0)$, $v_2(v_1, 1)$, $v_3(v_2, 2)$, $v_4(-, \infty)$, $v_5(v_1, 4)$

Sada tražimo vrh s najmanjom privremenom oznakom, tj. drugom koordinatom.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

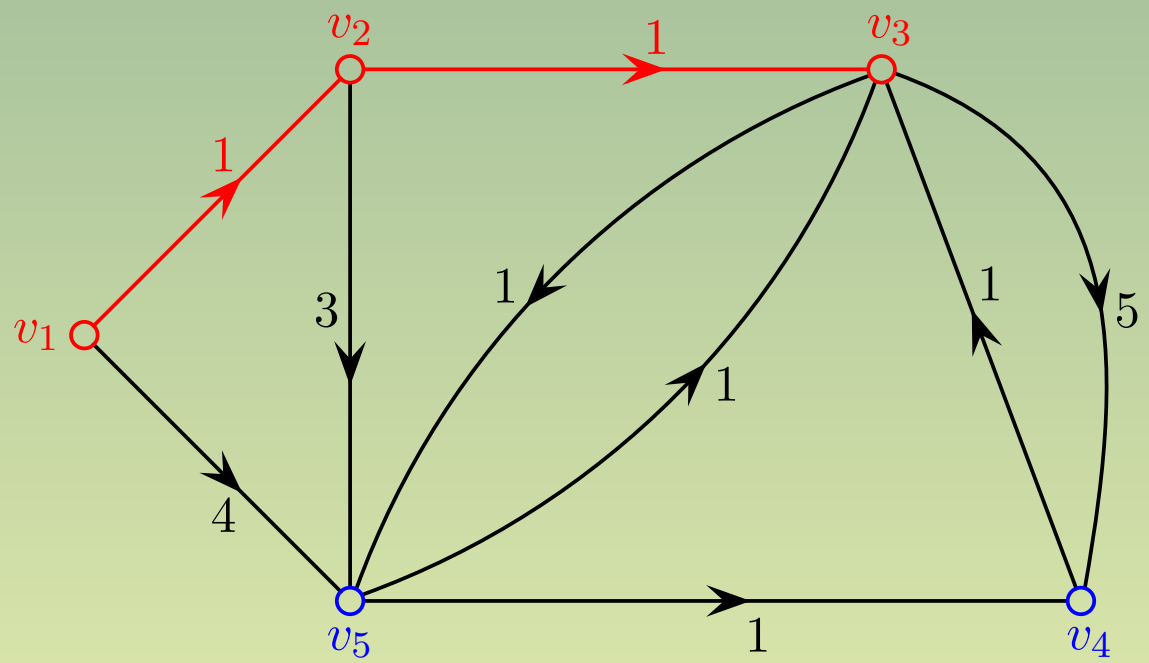
Sada tražimo vrh s najmanjom privremenom oznakom, tj. drugom koordinatom. To je ovdje vrh v_3 i stavimo da je njegova oznaka trajna. Nadalje, najkraći put od v_1 do v_3 je $v_1v_2v_3$ i duljine je 2.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-, 0)$, $v_2(v_1, 1)$, $v_3(v_2, 2)$, $v_4(-, \infty)$, $v_5(v_1, 4)$

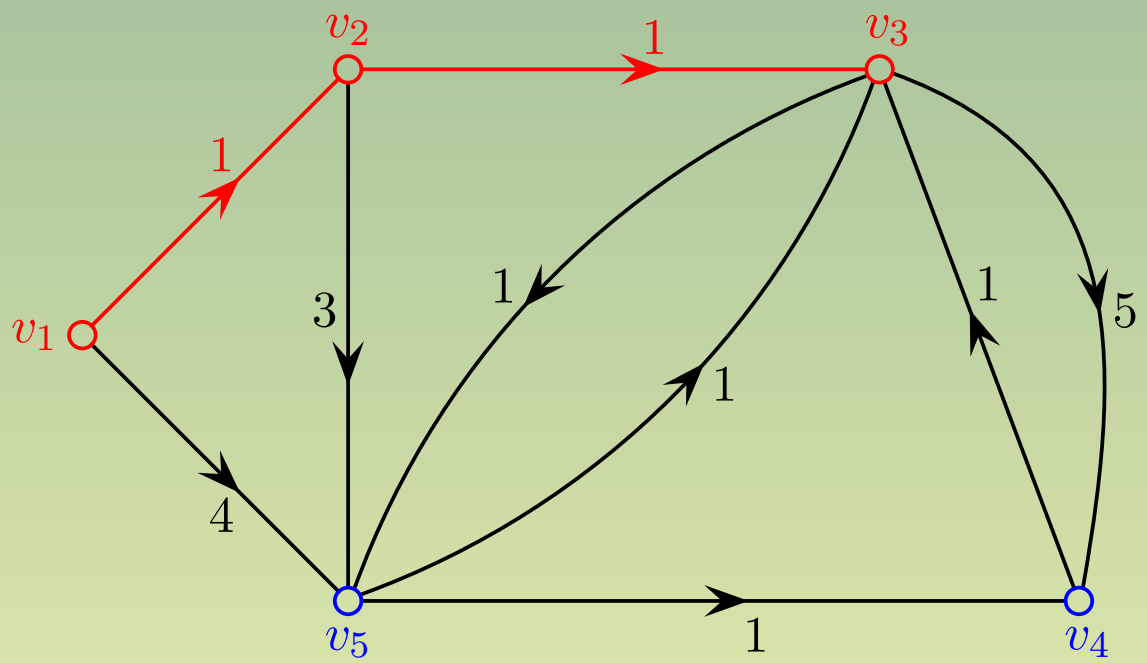
Pogledamo susjedne vrhove vrha v_3 (v_3 je posljednji dobio trajnu oznaku) koji još uvijek imaju privremene oznake. To su vrhovi v_4 i v_5.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

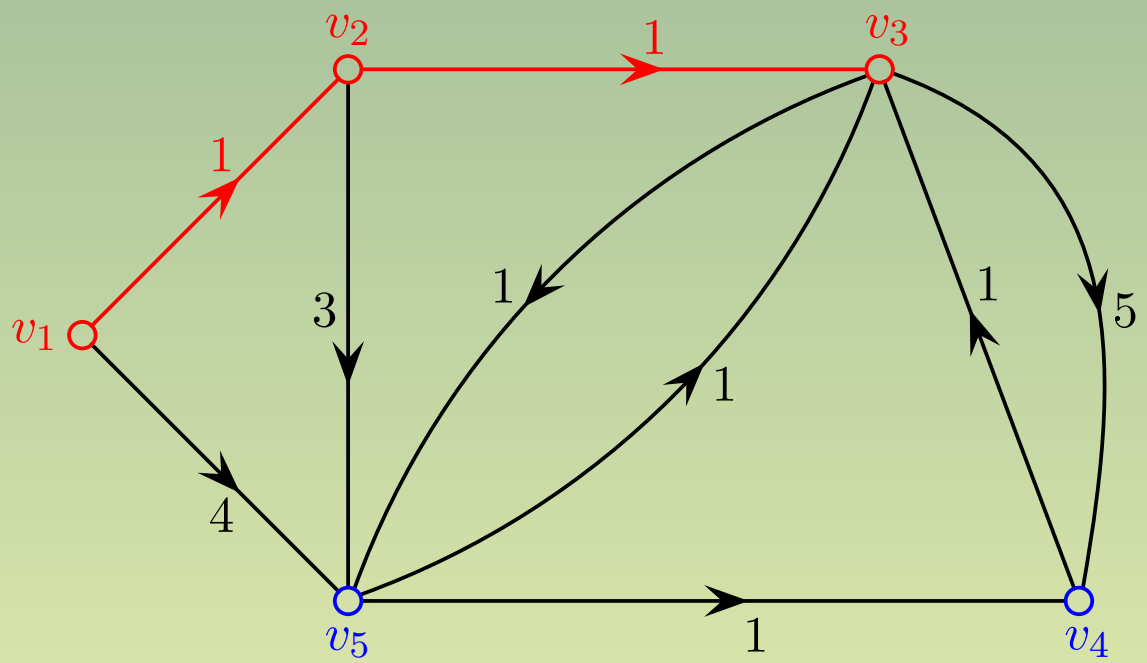


$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_3,7)$, $v_5(v_1,4)$

Kako je privremena oznaka (druga koordinata) vrha v_4 veća od sume druge koordinate vrha v_3 i težine luka v_3v_4, vrh v_4 dobiva novu privremenu oznaku $v_4(v_3,7)$, gdje je druga koordinata od v_4 jednaka sumi druge koordinate vrha v_3 i težine luka v_3v_4, tj. $7 = 2 + 5$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

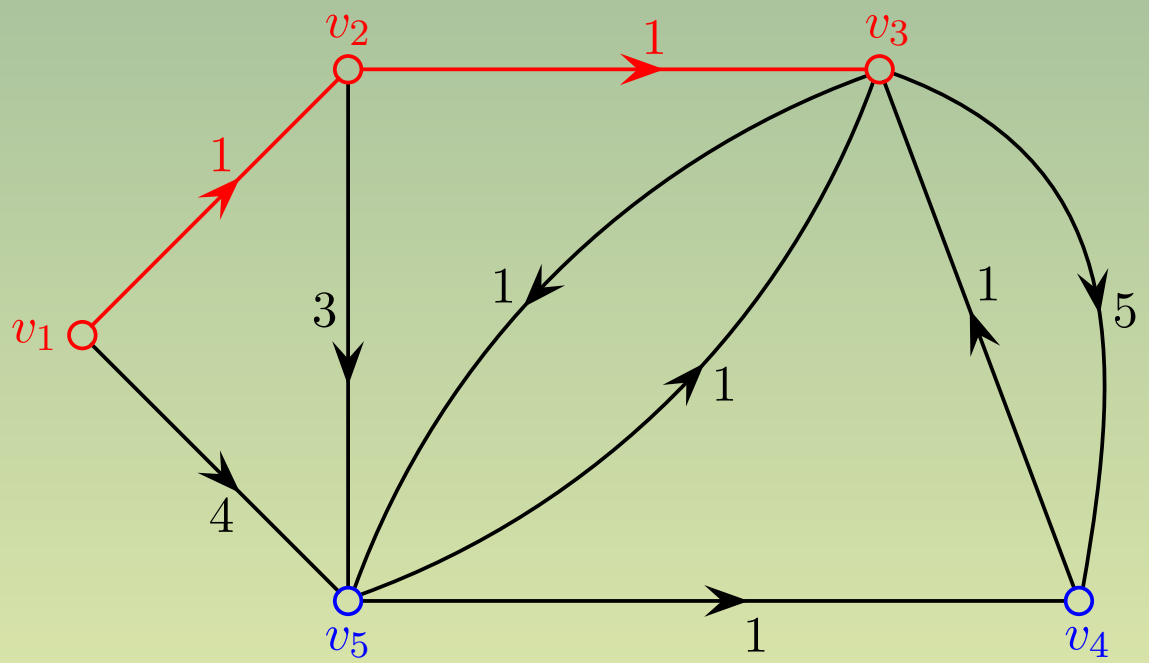


$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_3,7)$, $v_5(v_3,3)$

Kako je privremena oznaka (druga koordinata) vrha v_5 veća od sume druge koordinate vrha v_3 i težine luka v_3v_5, vrh v_5 dobiva novu privremenu oznaku $v_5(v_3,3)$, gdje je druga koordinata od v_5 jednaka sumi druge koordinate vrha v_3 i težine luka v_3v_5, tj. $3 = 2 + 1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_3,7)$, $v_5(v_3,3)$

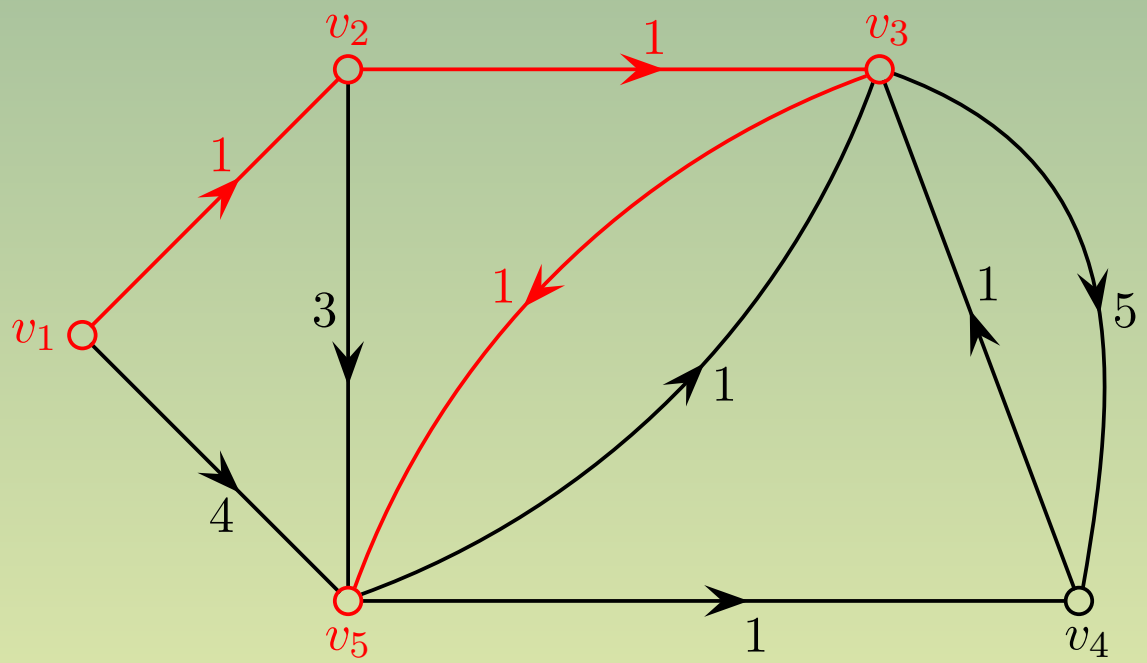
Sada tražimo vrh s najmanjom privremenom oznakom, tj. drugom koordinatom.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_3,7)$, $v_5(v_3,3)$

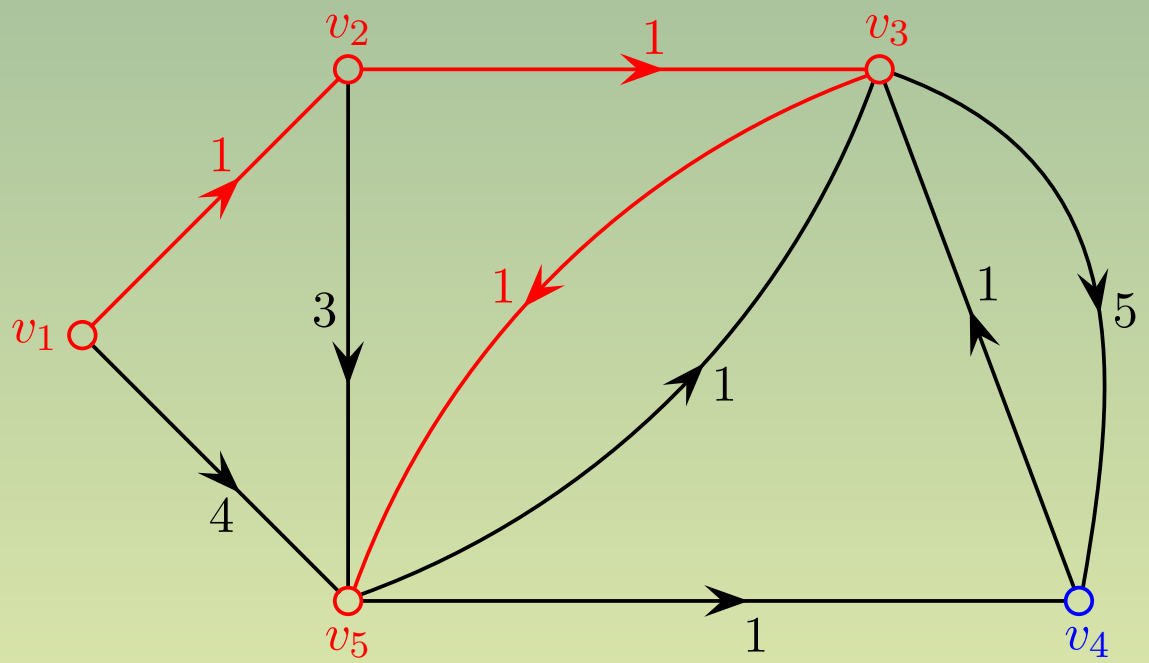
Sada tražimo vrh s najmanjom privremenom oznakom, tj. drugom koordinatom. To je ovdje vrh v_5 i stavimo da je njegova oznaka trajna. Nadalje, najkraći put od v_1 do v_5 je $v_1v_2v_3v_5$ i duljine je 3.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_3,7)$, $v_5(v_3,3)$

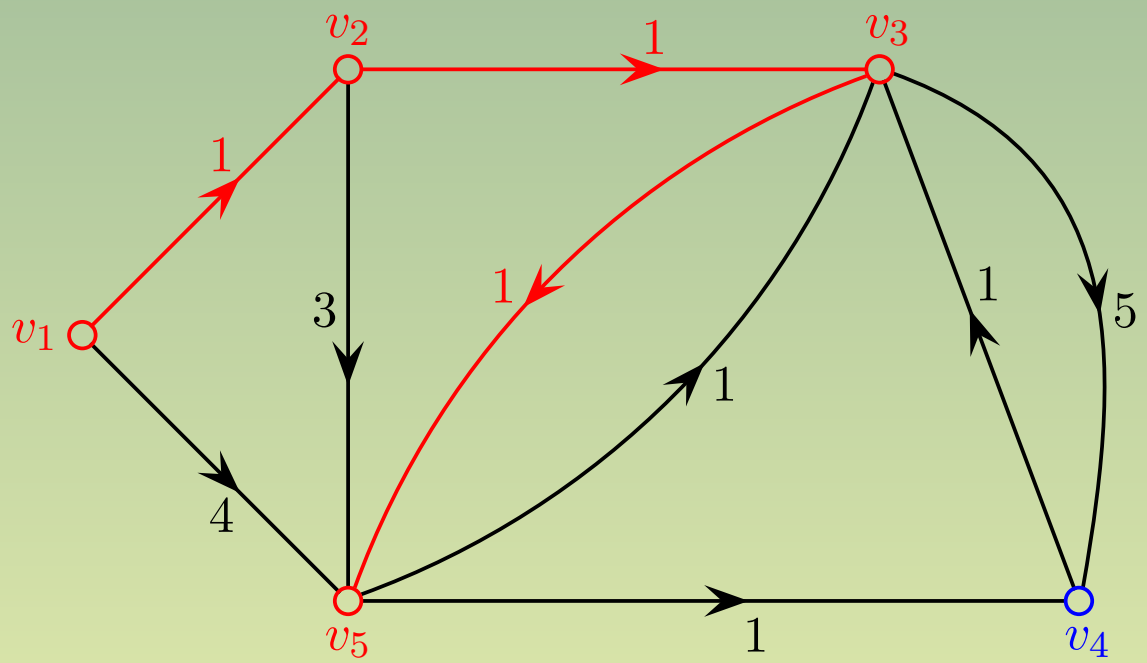
Pogledamo susjedne vrhove vrha v_5 (v_5 je posljednji dobio trajnu oznaku) koji još uvijek imaju privremene oznake. To je još jedino vrh v_4.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

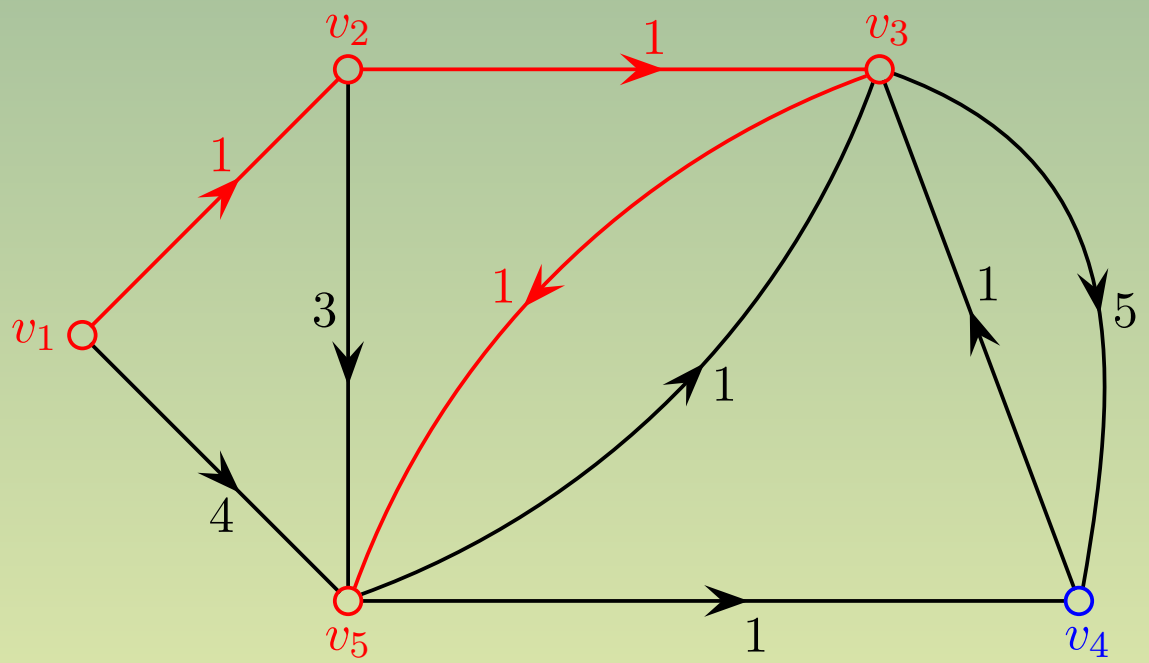


$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$, $v_5(v_3,3)$

Kako je privremena oznaka (druga koordinata) vrha v_4 veća od sume druge koordinate vrha v_5 i težine luka v_5v_4, vrh v_4 dobiva novu privremenu oznaku $v_4(v_5,4)$, gdje je druga koordinata od v_4 jednaka sumi druge koordinate vrha v_5 i težine luka v_5v_4, tj. $4 = 3 + 1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$, $v_5(v_3,3)$

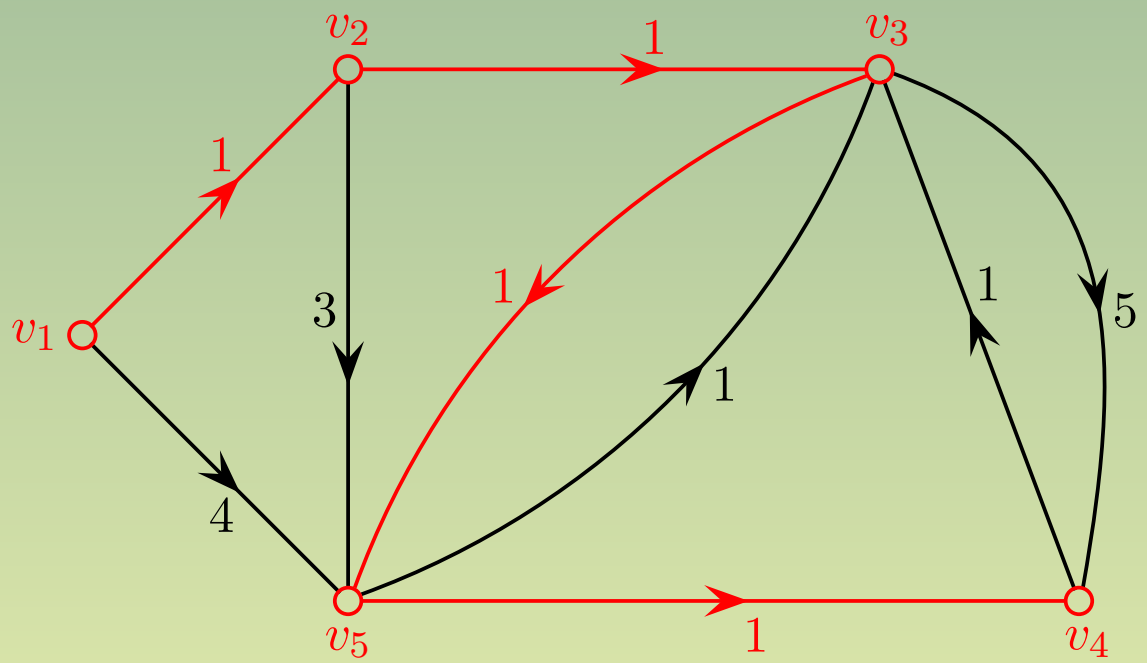
Sada tražimo vrh s najmanjom privremenom oznakom, tj. drugom koordinatom.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$, $v_5(v_3,3)$

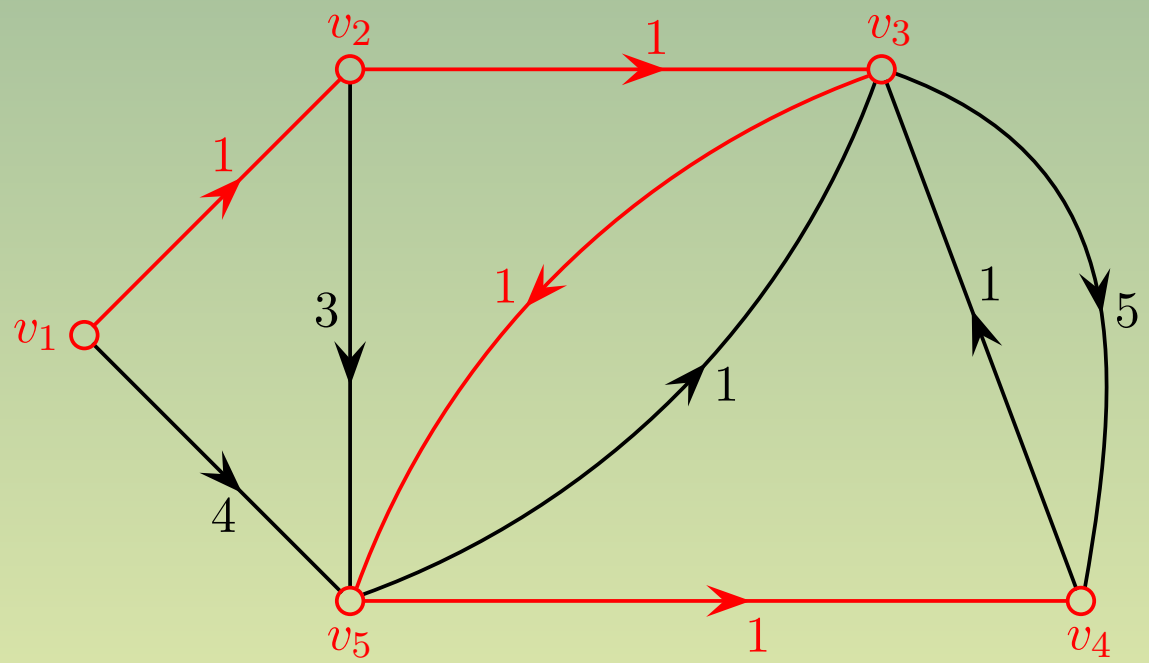
Sada tražimo vrh s najmanjom privremenom oznakom, tj. drugom koordinatom. To je ovdje vrh v_4 i stavimo da je njegova oznaka trajna. Nadalje, najkraći put od v_1 do v_4 je $v_1v_2v_3v_5v_4$ i duljine je 4.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$, $v_5(v_3,3)$

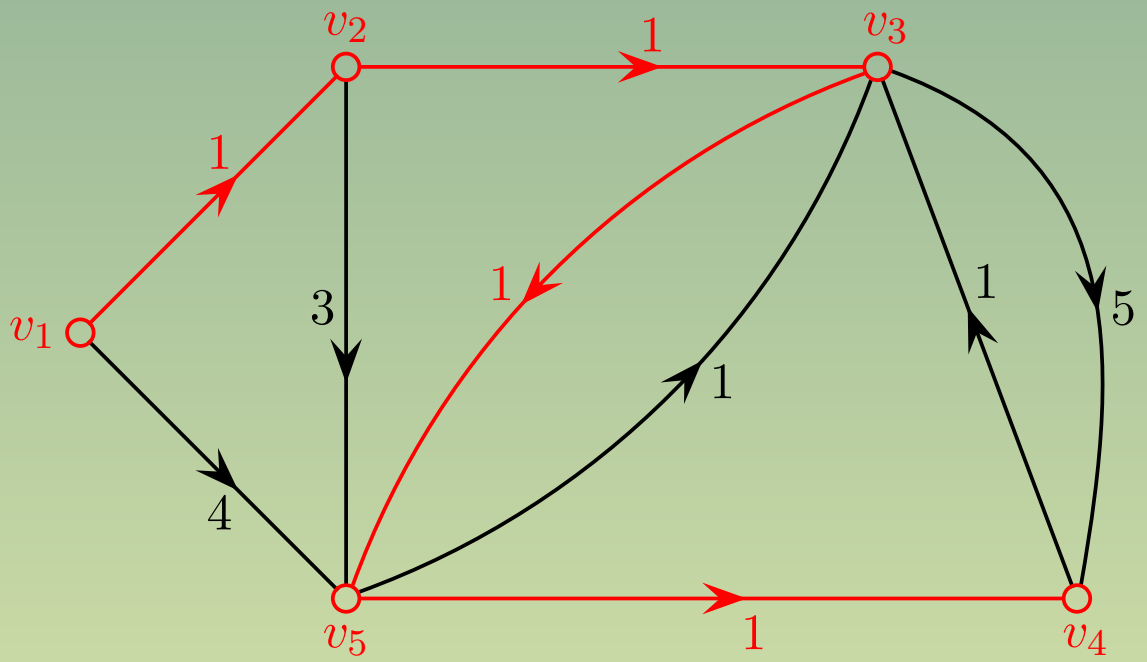
◂ objasni postupak

Kako svi vrhovi imaju trajne oznake, algoritam završava i dobili smo najkraće putove i njihove duljine od vrha v_1 do svih ostalih vrhova u promatranom digrafu.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



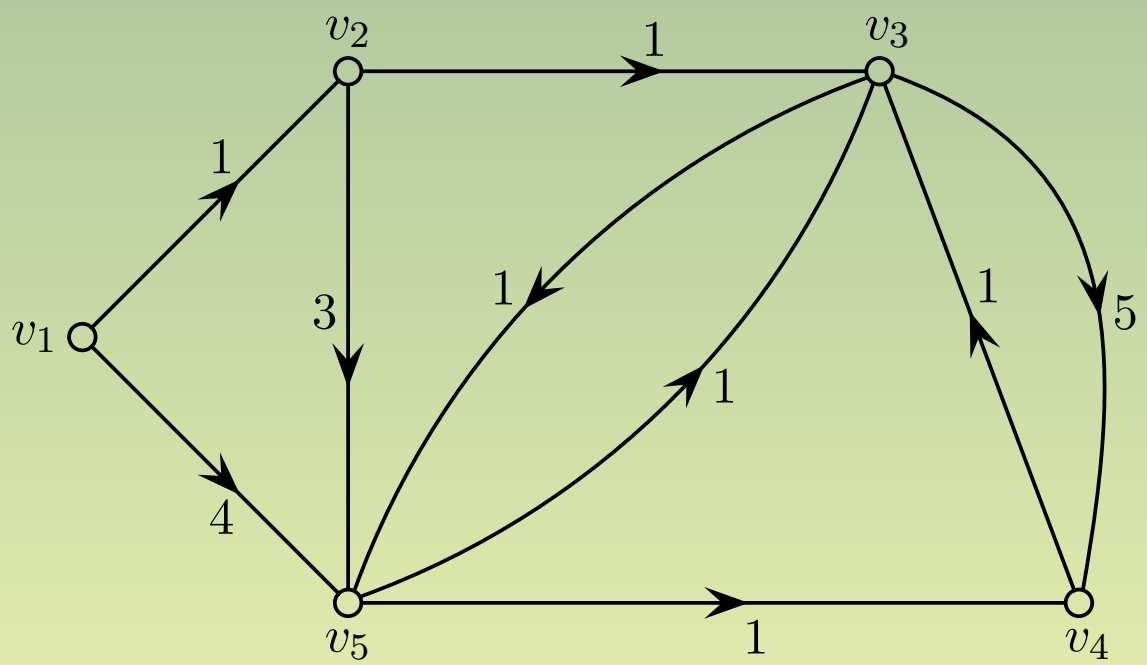
Čitav postupak objašnjavanja ćemo kratko zapisivati kao i prije u obliku tablice

	0	1	2	3	4
v_1	$-, 0$	■	■	■	■
v_2	∞	$v_1, 1$	■	■	■
v_3	∞	∞	$v_2, 2$	■	■
v_4	∞	∞	∞	$v_3, 7$	$v_5, 4$
v_5	∞	$v_1, 4$	$v_1, 4$	$v_3, 3$	■

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.15.

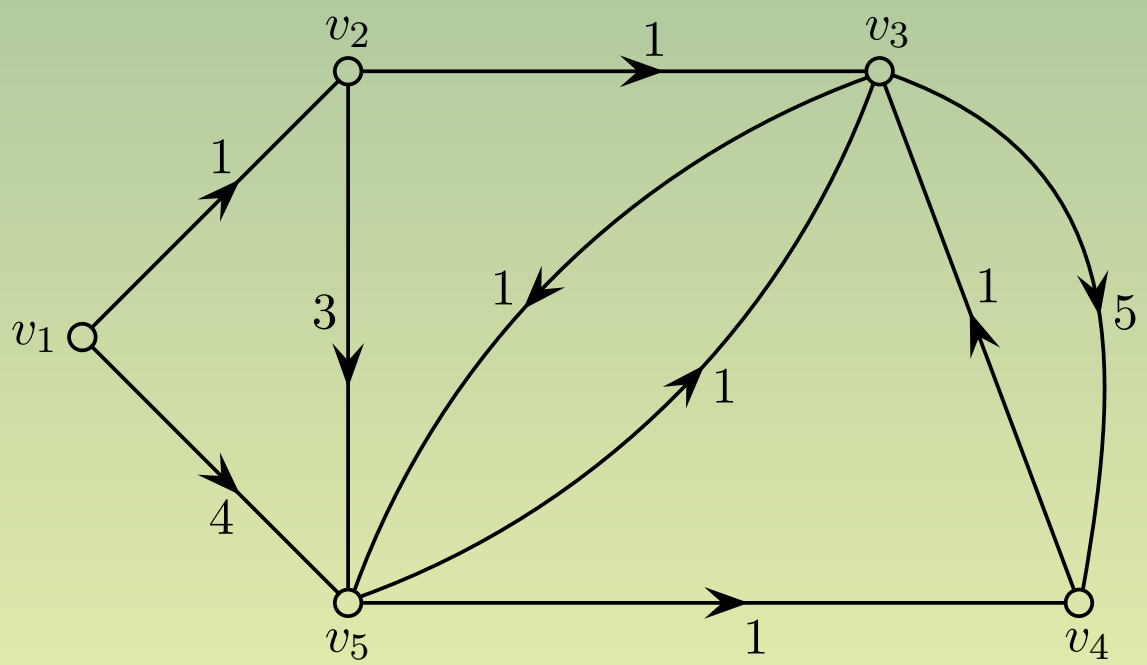
Pomoću obje verzije Dijkstrinog algoritma pronađite najkraće putove od vrha v_4 do svih preostalih vrhova u digrafu



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.15.

Pomoću obje verzije Dijkstrinog algoritma pronađite najkraće putove od vrha v_4 do svih preostalih vrhova u digrafu

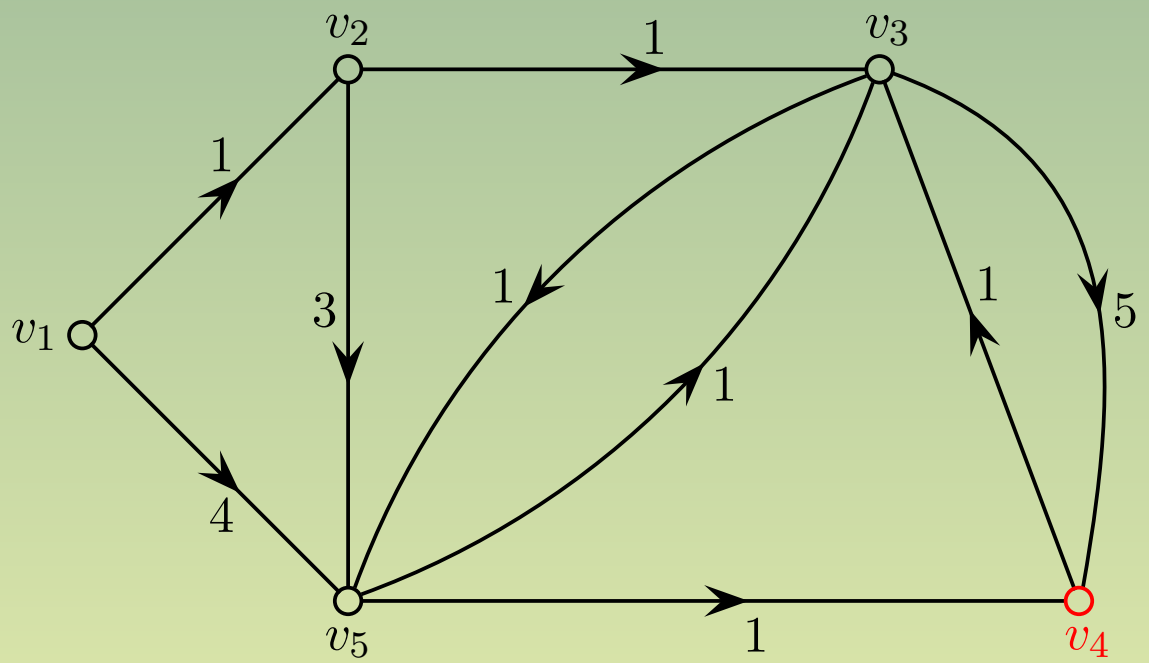


Rješenje.

Detaljno ćemo opisati i na ovom primjeru svaki korak za obje verzije.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)



$v_4(-, 0)$

konačno rješenje

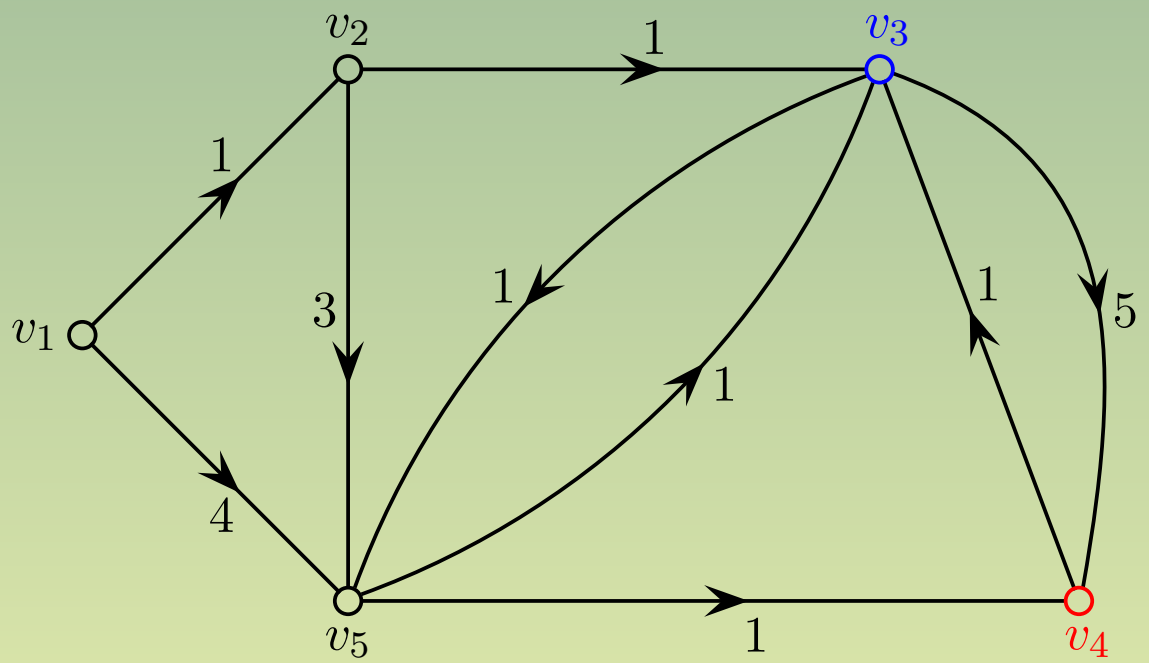
Na početku vrhu v_4 pridružimo oznaku $(-, 0)$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)



$v_4(-, 0)$

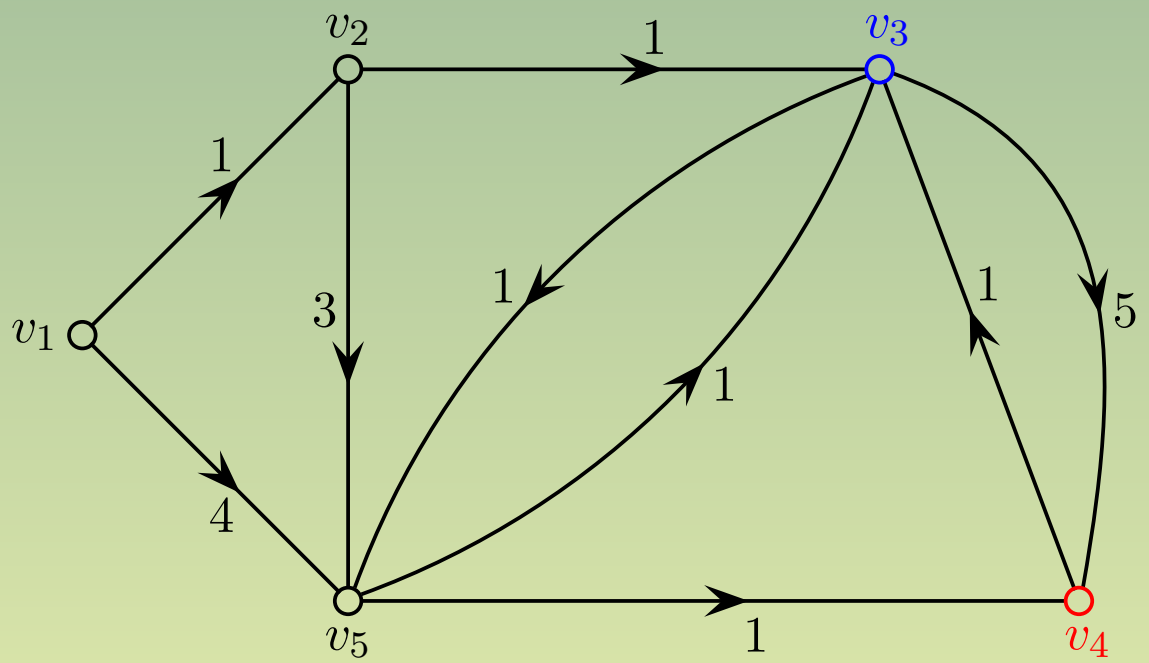
Zatim pogledamo susjedne neoznačene vrhove vrha v_4. To su oni vrhovi prema kojima idu lukovi iz vrha v_4. U ovom slučaju je to samo vrh v_3.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)

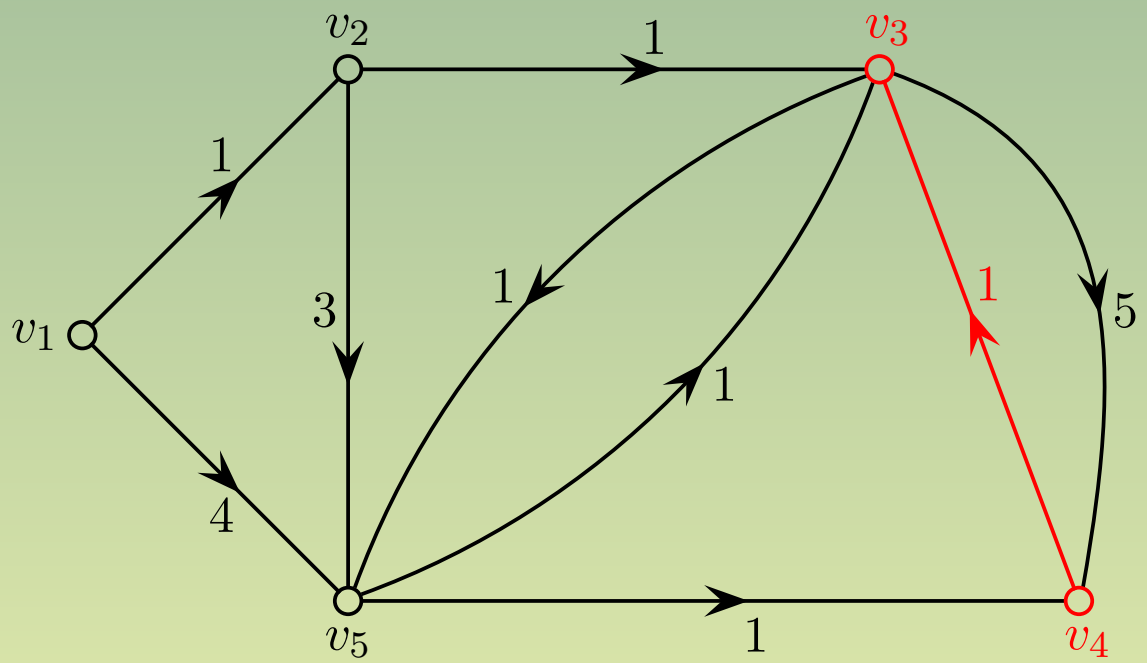


$v_4(-, 0)$

Vrh v_3 dobiva trenutnu oznaku $(v_4, 1)$. Prva koordinata je vrh iz kojeg smo došli u vrh v_3 (to je vrh v_4), a druga koordinata je jednaka sumi druge koordinate od v_4 i težine luka v_4v_3, dakle $0 + 1 = 1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)



$v_4(-, 0)$, $v_3(v_4, 1)$

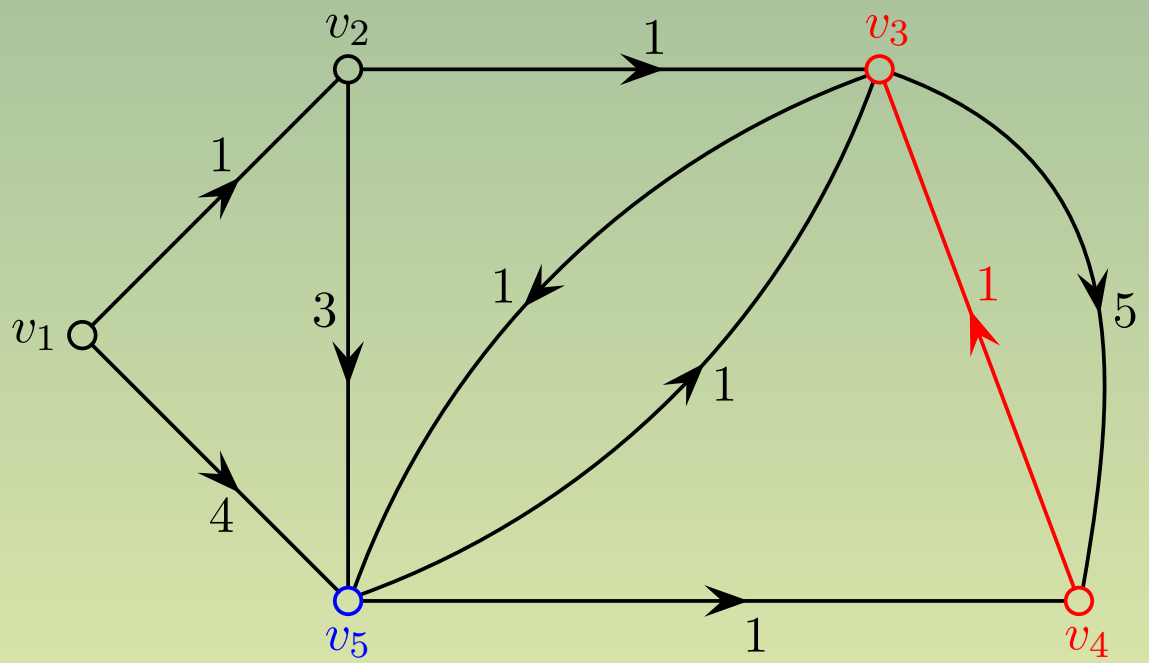
Kako imamo samo jednu trenutnu oznaku $v_3(v_4, 1)$, ta je ujedno i najmanja (ima najmanju drugu koordinatu) pa vrh v_3 postaje označeni vrh. Najkraći put od v_4 do v_3 je v_4v_3 i duljine je 1.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)



$v_4(-, 0)$, $v_3(v_4, 1)$

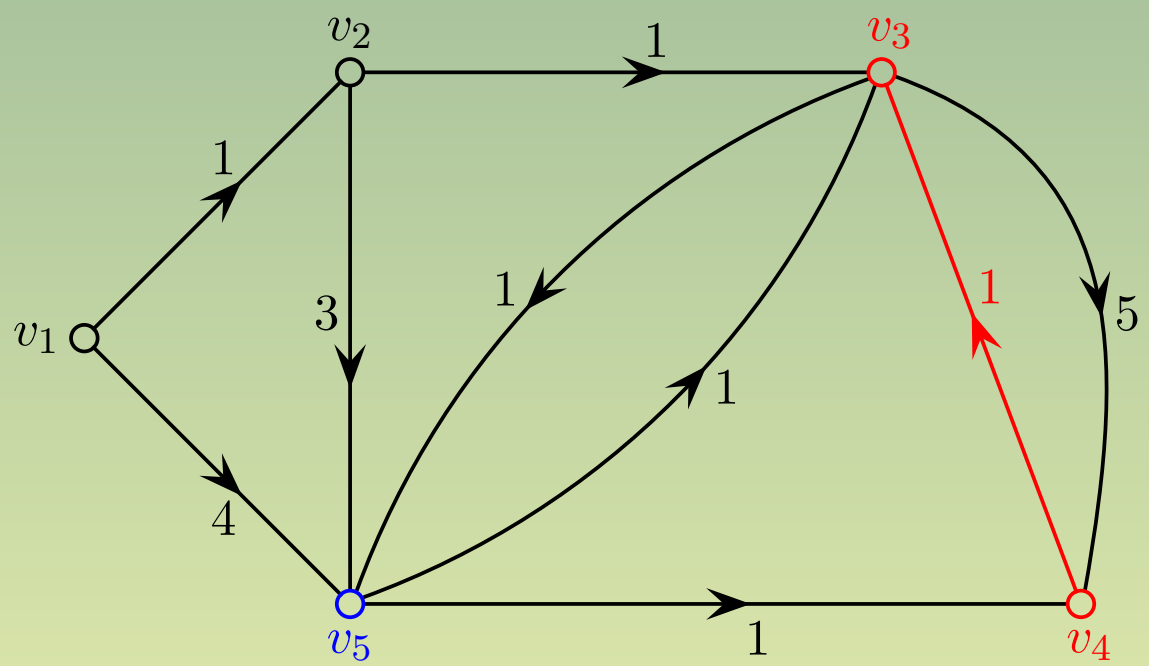
Pogledamo susjedne neoznačene vrhove označenih vrhova v_4 i v_3. To je jedino vrh v_5.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)



$v_4(-, 0)$, $v_3(v_4, 1)$

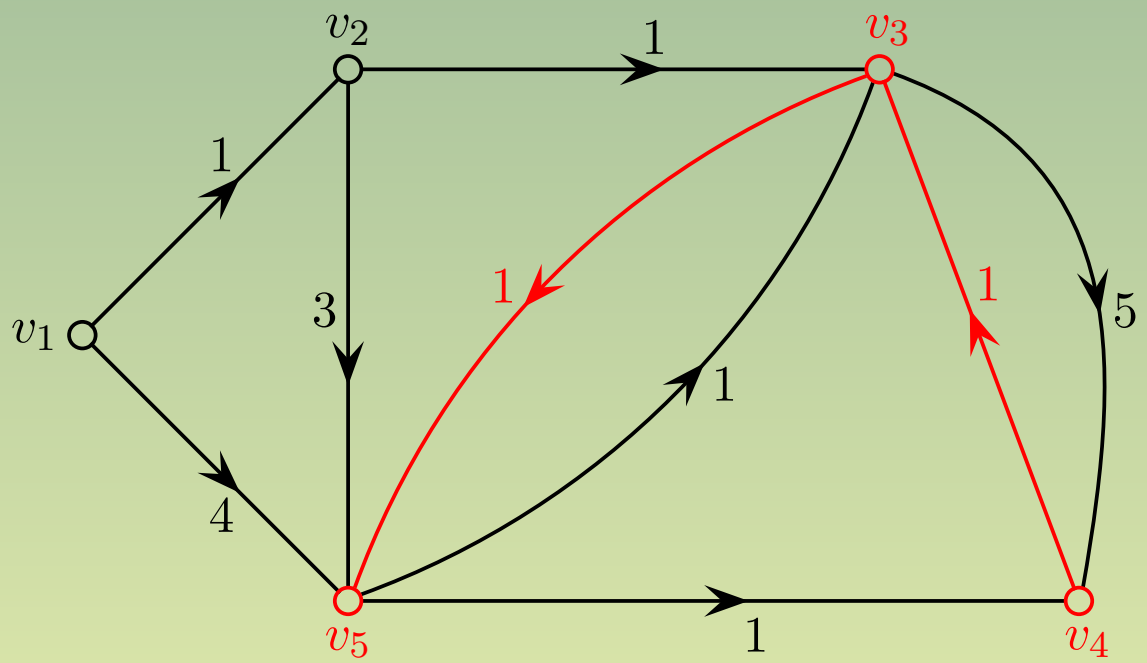
Vrh v_5 je susjed vrha v_3 pa mu je prva koordinata oznake jednaka v_3. Druga koordinata oznake vrha v_5 jednaka je sumi druge koordinate oznake vrha v_3 i težine luka v_3v_5, dakle $1 + 1 = 2$. Stoga je $v_5(v_3, 2)$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)



$v_4(-, 0)$, $v_3(v_4, 1)$, $v_5(v_3, 2)$

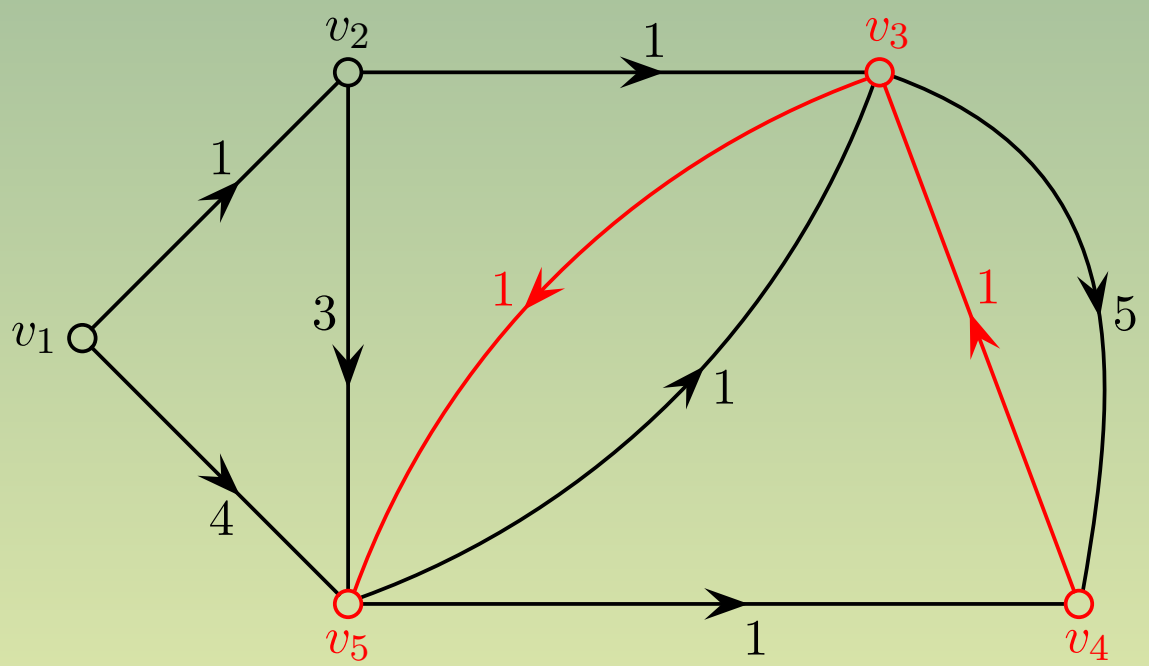
Kako imamo samo jednu trenutnu oznaku $v_5(v_3, 2)$, ta je ujedno i najmanja (ima najmanju drugu koordinatu) pa vrh v_5 postaje označeni vrh. Najkraći put od v_4 do v_5 je $v_4v_3v_5$ i duljine je 2.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)

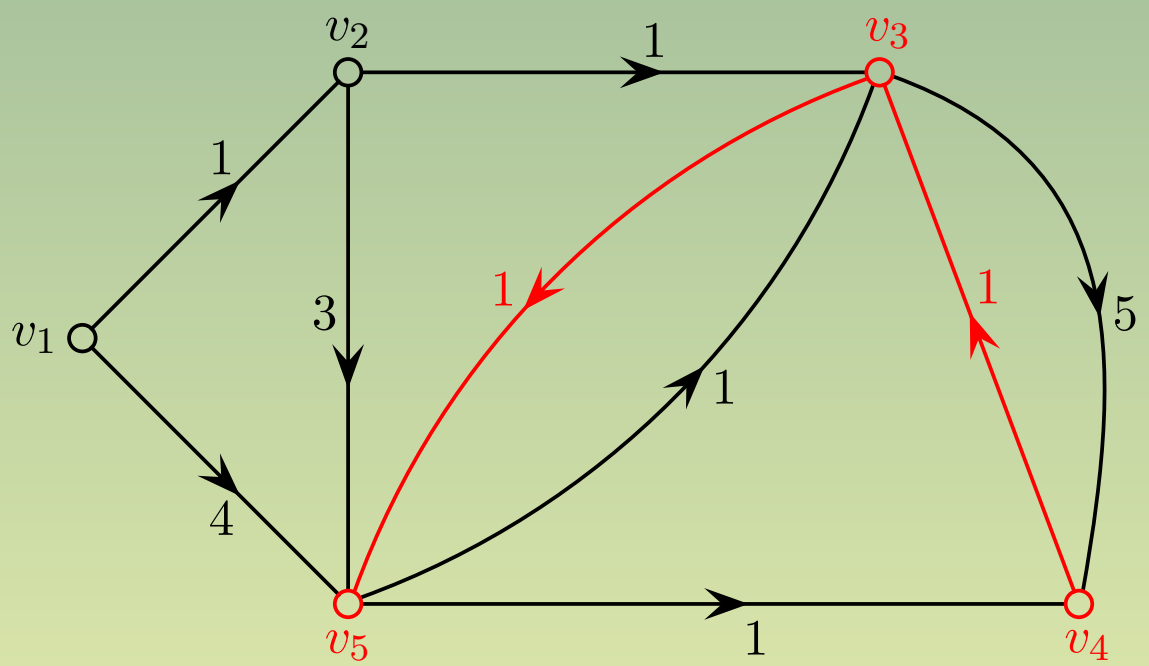


$v_4(-, 0)$, $v_3(v_4, 1)$, $v_5(v_3, 2)$

Pogledamo susjedne neoznačene vrhove označenih vrhova v_4, v_3 i v_5. Međutim, takvih vrhova više nema pa algoritam završava. Pazite, v_1 i v_2 nisu susjedi niti jednog od označenih vrhova v_4, v_3 i v_5 jer ne postoje lukovi iz tih vrhova prema vrhovima v_1 i v_2.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (prva verzija)



$v_4(-, 0)$, $v_3(v_4, 1)$, $v_5(v_3, 2)$

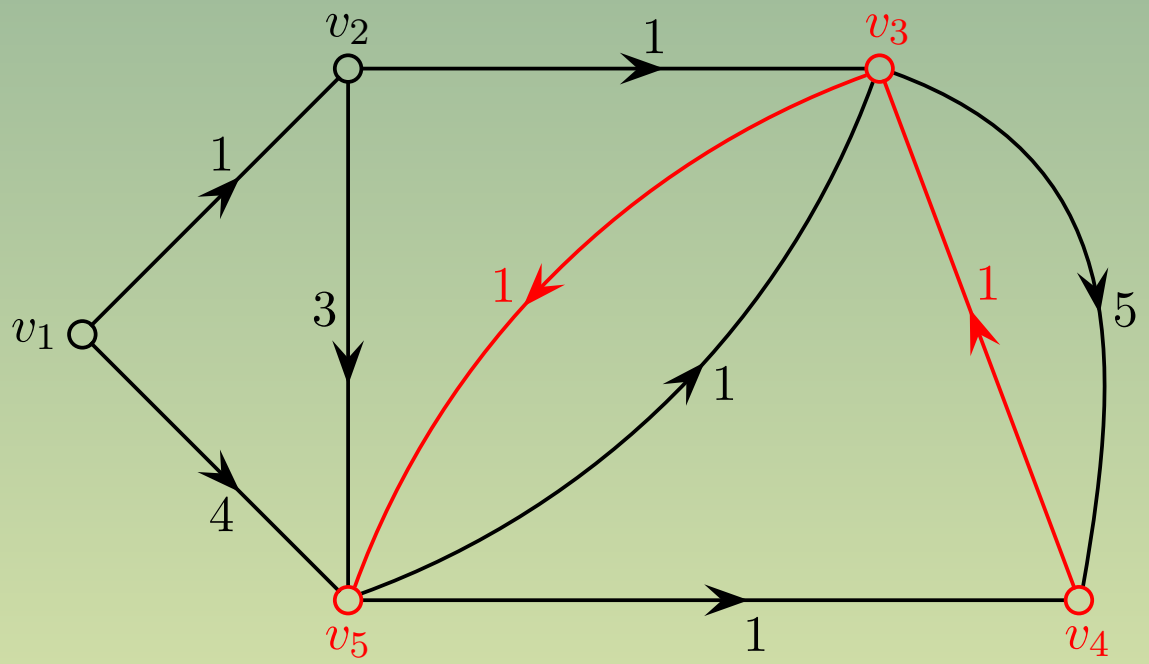
objasni postupak

Kako su vrhovi v_1 i v_2 ostali neoznačeni, to znači da ne postoje usmjereni putovi od vrha v_4 prema vrhovima v_1 i v_2. Drugim riječima, vrhovi v_1 i v_2 se ne mogu doseći iz vrha v_4 pa promatrani digraf nije dipovezan.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Čitav postupak objašnjavanja ćemo kratko zapisivati kao i prije u obliku

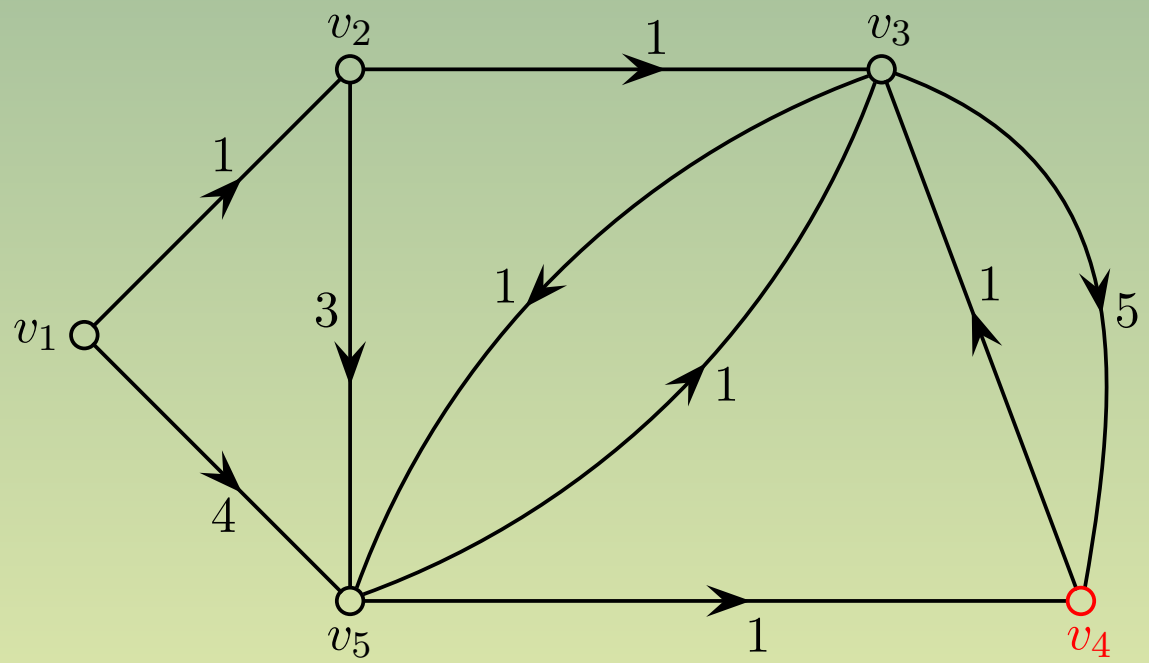
$0:$ $\boxed{v_4(-,0)}$

$1:$ $\boxed{v_3(v_4,1)}$

$2:$ $\boxed{v_5(v_3,2)}$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

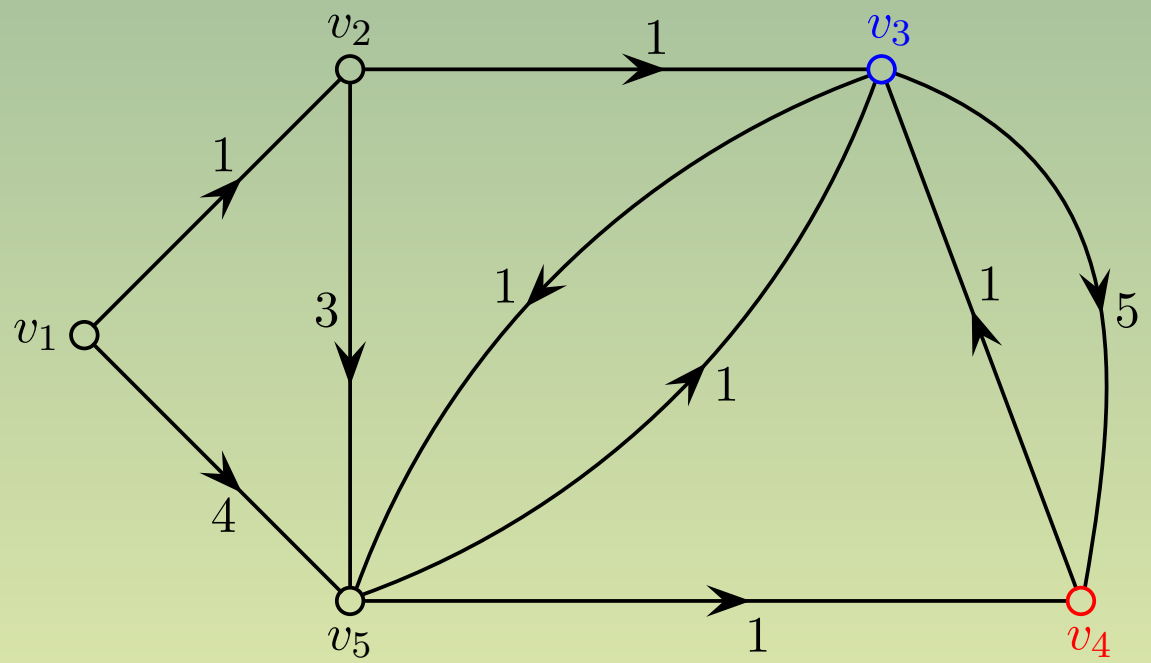


$v_1(-,\infty)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,0)$, $v_5(-,\infty)$ ▸ konačno rješenje

Na početku vrhu v_4 pridružimo trajnu oznaku $(-,0)$, a svim ostalim vrhovima privremene oznake $(-,\infty)$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-,\infty)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,0)$, $v_5(-,\infty)$

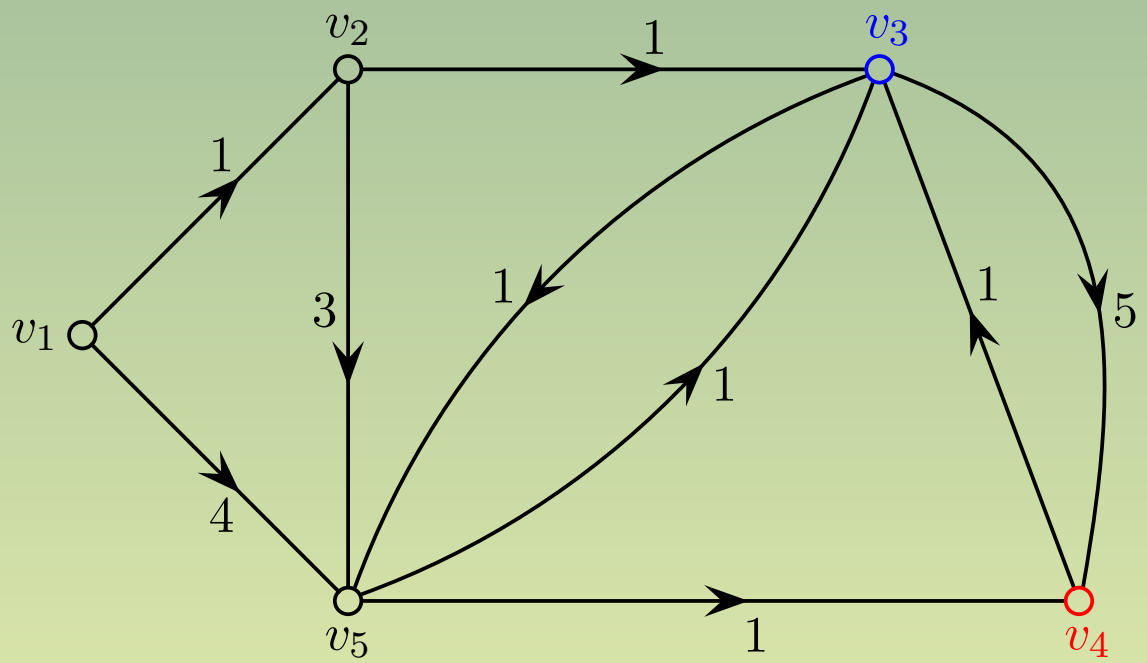
Pogledamo susjedne vrhove vrha v_4 (v_4 je posljednji dobio trajnu oznaku) koji još uvijek imaju privremene oznake. To je jedino ovdje vrh v_3.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

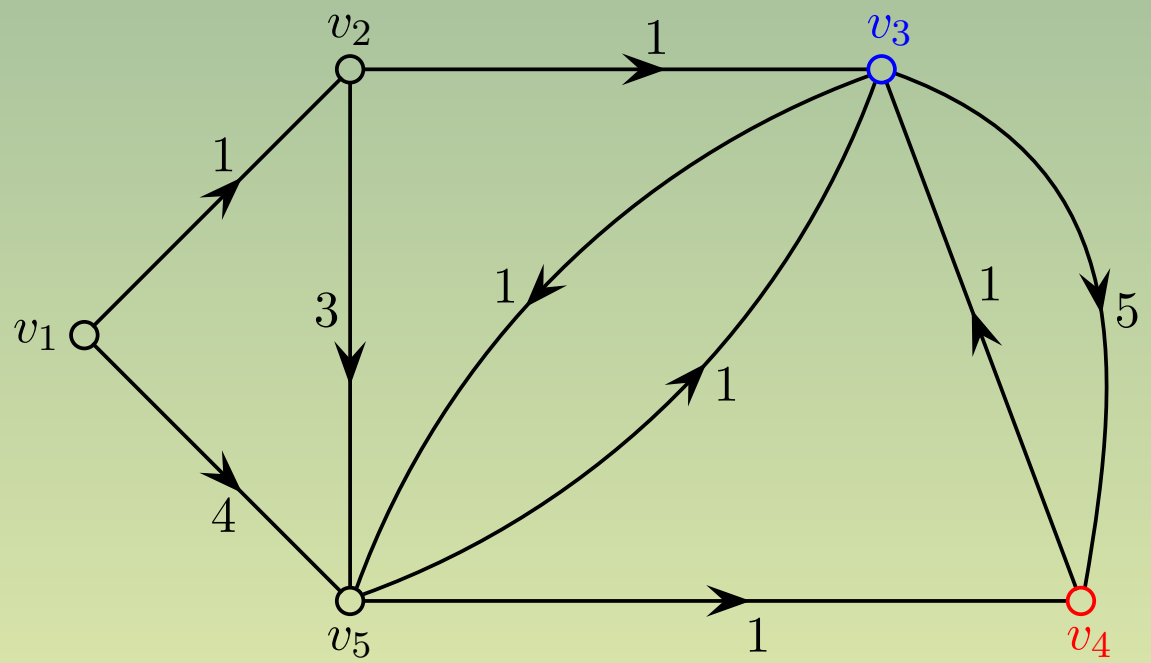


$v_1(-,\infty)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(v_4,1)$, $v_4(-,0)$, $v_5(-,\infty)$

Kako je privremena oznaka (druga koordinata) vrha v_3 veća od sume druge koordinate vrha v_4 i težine luka v_4v_3, vrh v_3 dobiva novu privremenu oznaku $v_3(v_4,1)$, gdje je druga koordinata od v_3 jednaka sumi druge koordinate vrha v_4 i težine luka v_4v_3, tj. $1 = 0 + 1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-,\infty)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(v_4,1)$, $v_4(-,0)$, $v_5(-,\infty)$

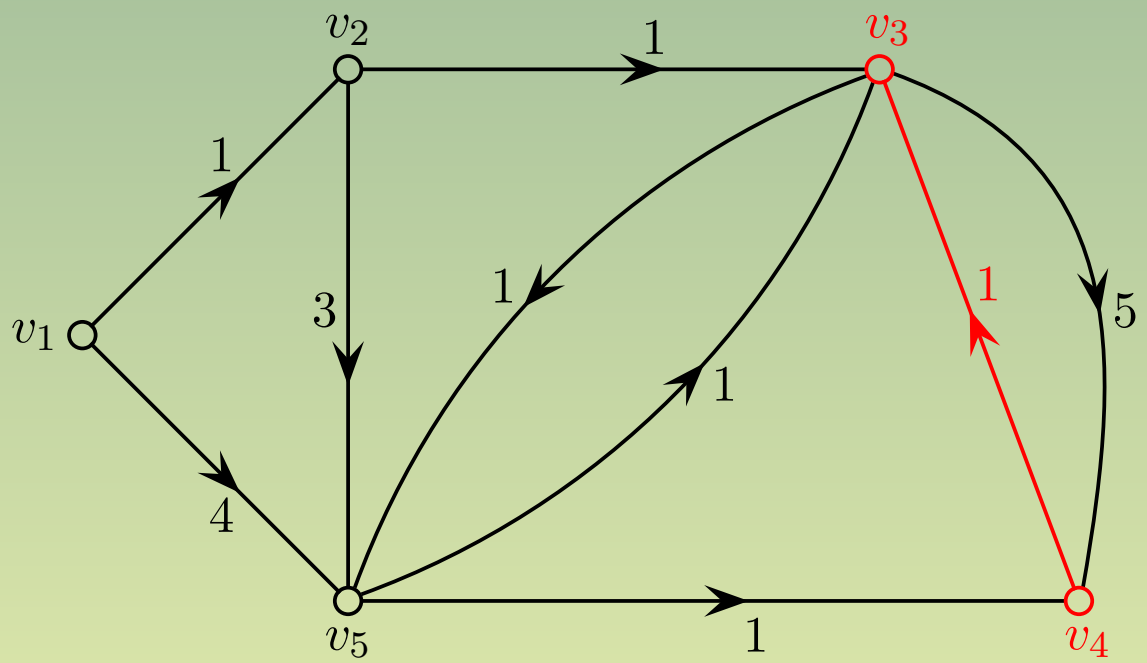
Sada tražimo vrh s najmanjom privremenom oznakom, tj. drugom koordinatom.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-,\infty)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(v_4,1)$, $v_4(-,0)$, $v_5(-,\infty)$

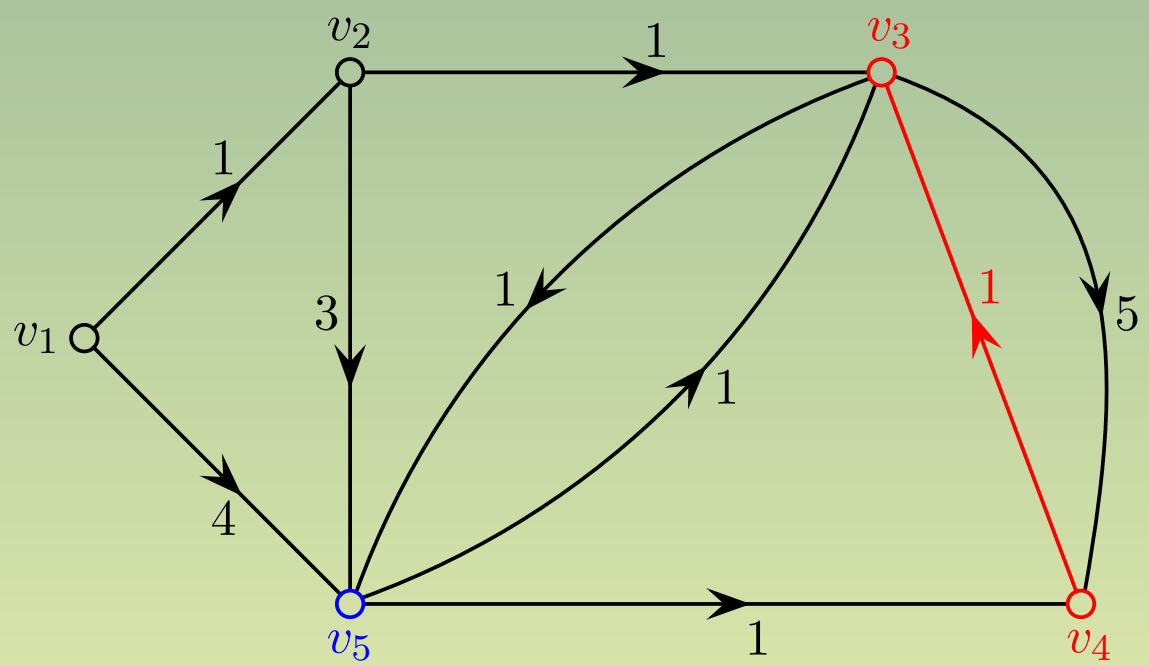
Sada tražimo vrh s najmanjom privremenom oznakom, tj. drugom koordinatom. To je ovdje vrh v_3 i stavimo da je njegova oznaka trajna. Nadalje, najkraći put od v_4 do v_3 je v_4v_3 i duljine je 1.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-,\infty)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(v_4,1)$, $v_4(-,0)$, $v_5(-,\infty)$

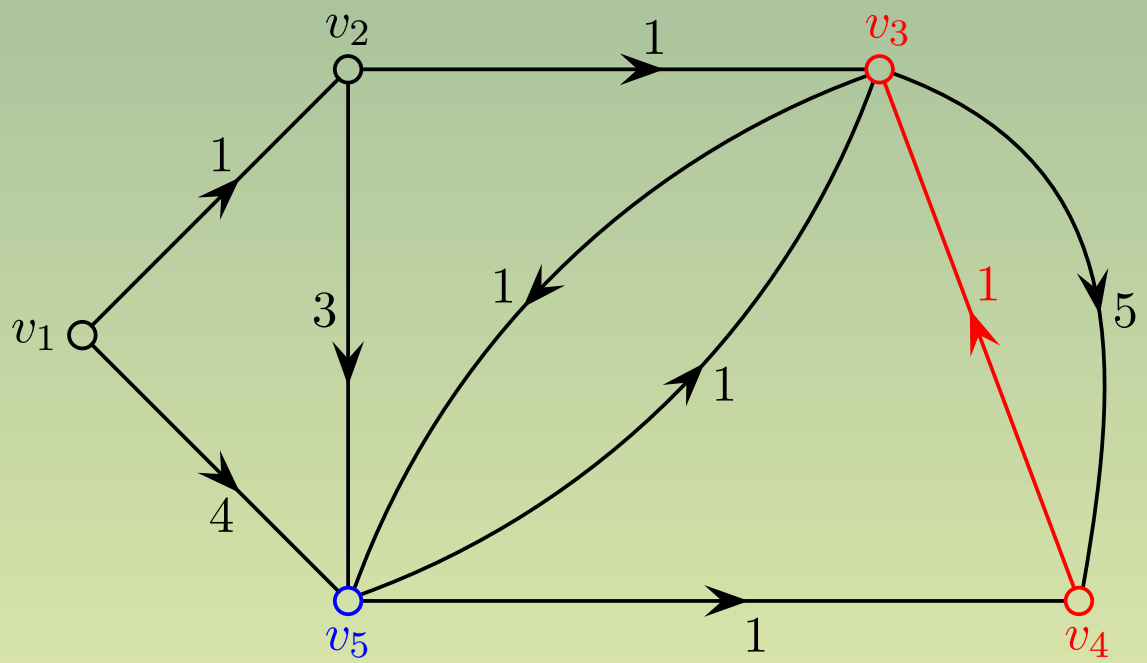
Pogledamo susjedne vrhove vrha v_3 (v_3 je posljednji dobio trajnu oznaku) koji još uvijek imaju privremene oznake. Jedini takav vrh ovdje je v_5.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

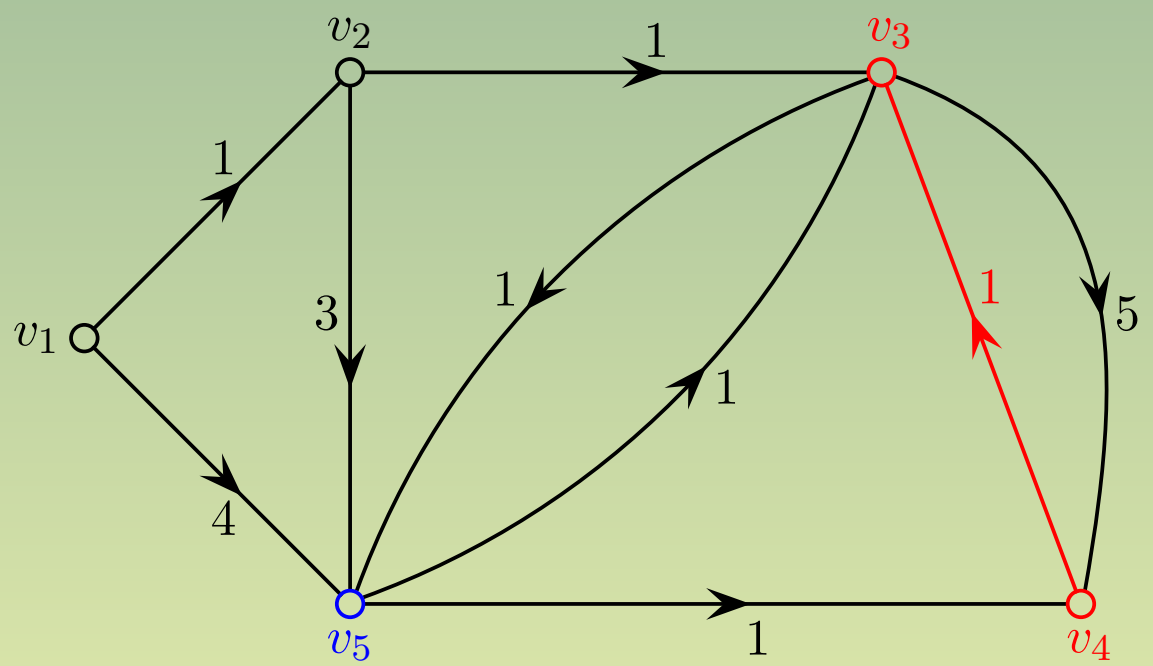


$v_1(-,\infty)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(v_4,1)$, $v_4(-,0)$, $v_5(v_3,2)$

Kako je privremena oznaka (druga koordinata) vrha v_5 veća od sume druge koordinate vrha v_3 i težine luka v_3v_5, vrh v_5 dobiva novu privremenu oznaku $v_5(v_3,2)$, gdje je druga koordinata od v_5 jednaka sumi druge koordinate vrha v_3 i težine luka v_3v_5, tj. $2 = 1 + 1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-,\infty)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(v_4,1)$, $v_4(-,0)$, $v_5(v_3,2)$

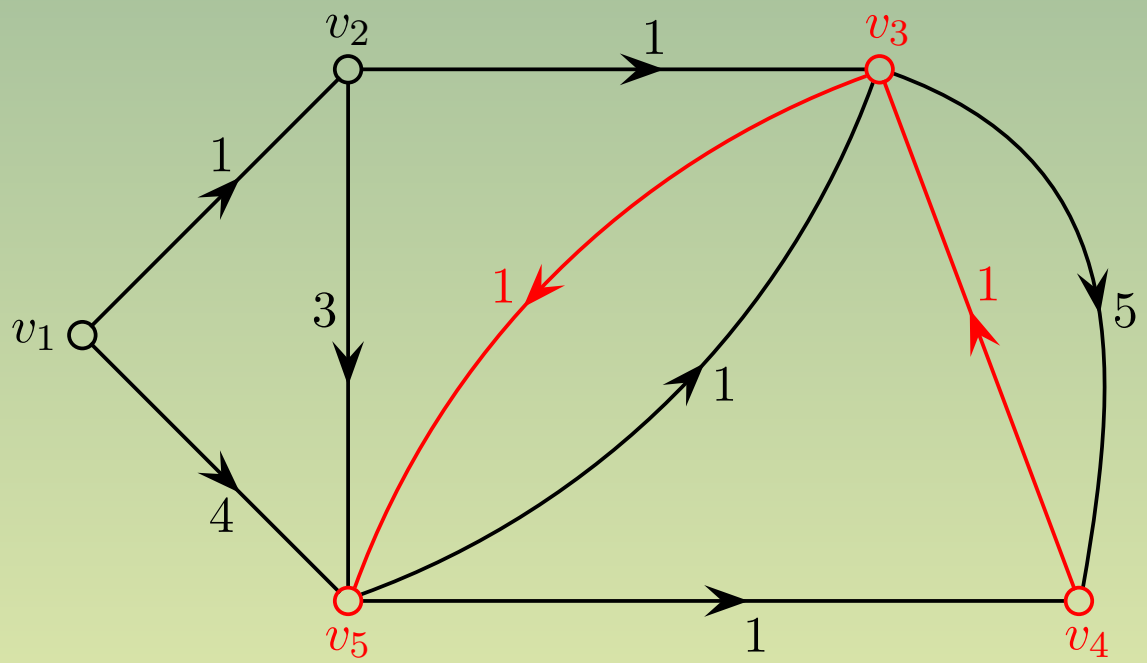
Sada tražimo vrh s najmanjom privremenom oznakom, tj. drugom koordinatom.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-,\infty)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(v_4,1)$, $v_4(-,0)$, $v_5(v_3,2)$

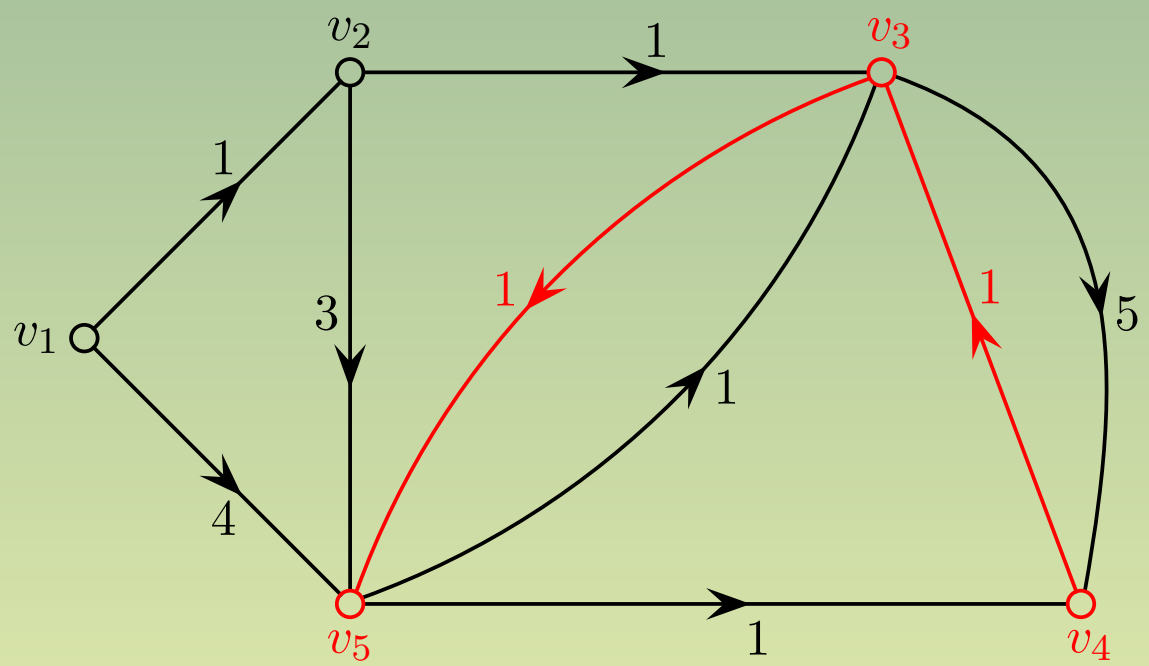
Sada tražimo vrh s najmanjom privremenom oznakom, tj. drugom koordinatom. To je ovdje vrh v_5 i stavimo da je njegova oznaka trajna. Nadalje, najkraći put od v_4 do v_5 je $v_4v_3v_5$ i duljine je 2.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

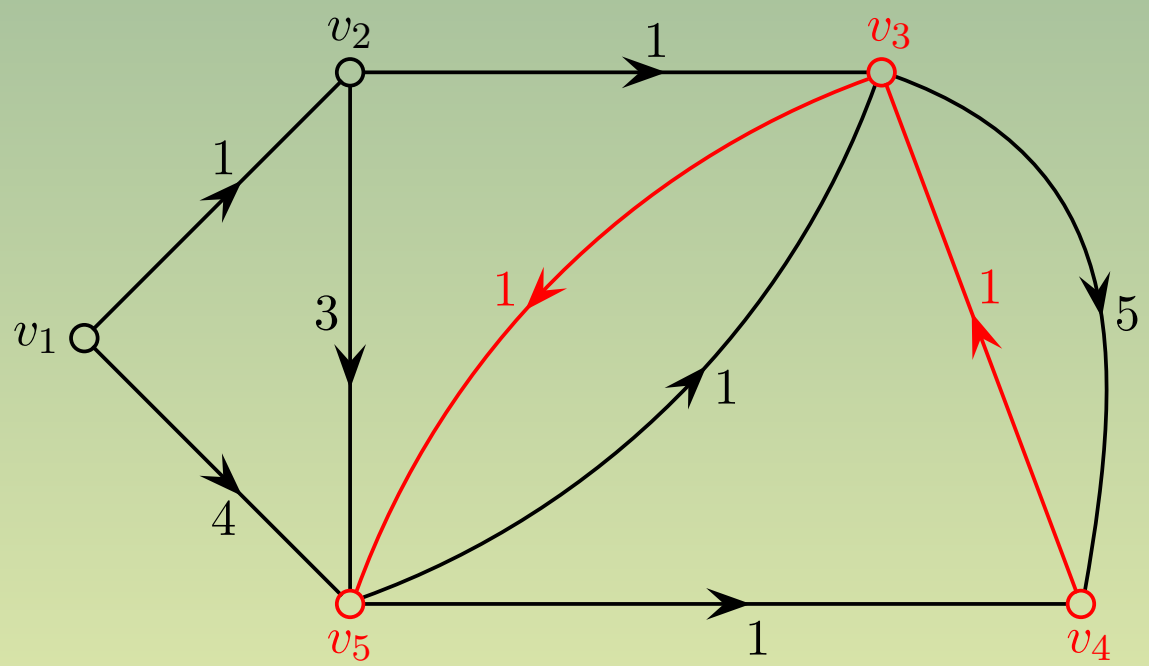


$v_1(-,\infty)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(v_4,1)$, $v_4(-,0)$, $v_5(v_3,2)$

Pogledamo susjedne vrhove vrha v_5 (v_5 je posljednji dobio trajnu oznaku) koji još uvijek imaju privremene oznake. Međutim, takvih vrhova više nema pa algoritam završava. Pazite, v_1 i v_2 nisu susjedi od vrha v_5 jer ne postoje lukovi v_5v_1, niti v_5v_2.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



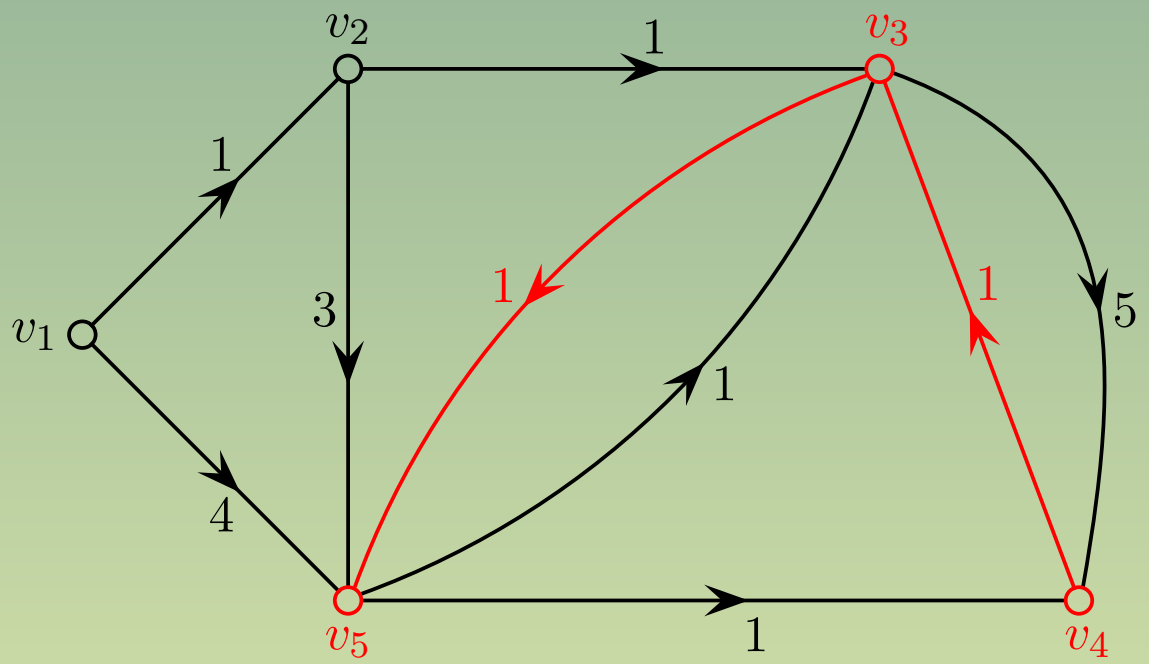
$v_1(-,\infty)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(v_4,1)$, $v_4(-,0)$, $v_5(v_3,2)$ ◂ objasni postupak

Kako vrhovi v_1 i v_2 nakon završetka algoritma imaju još uvijek privremene oznake, to znači da ne postoje usmjereni putovi od vrha v_4 prema vrhovima v_1 i v_2.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

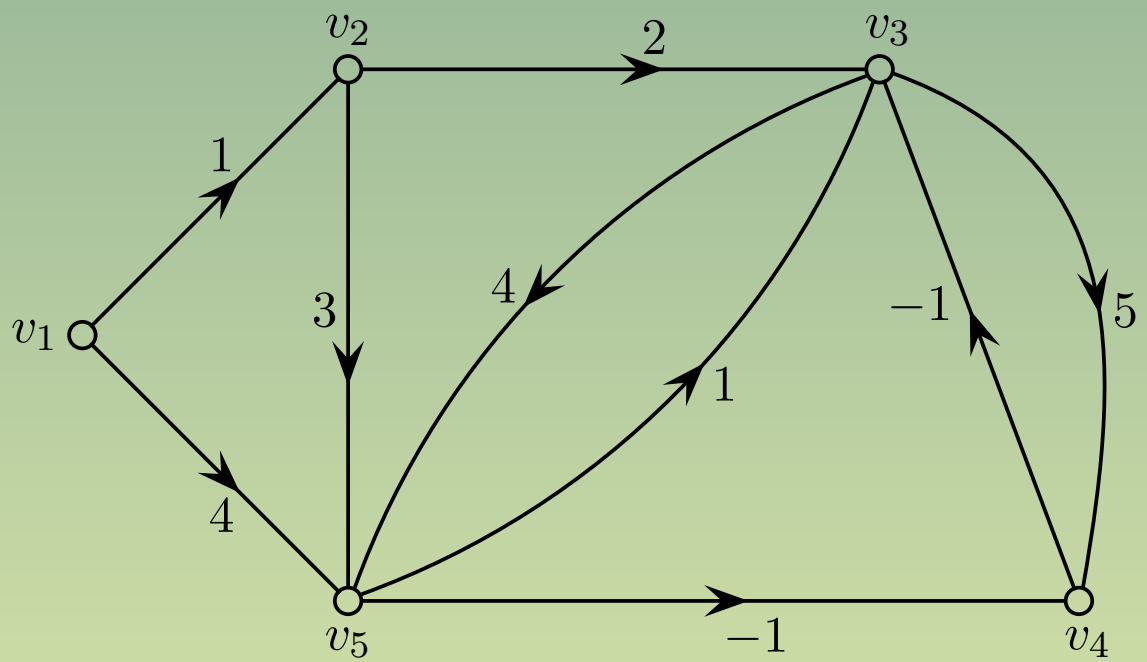
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Čitav postupak objašnjavanja ćemo kratko zapisivati kao i prije u obliku tablice

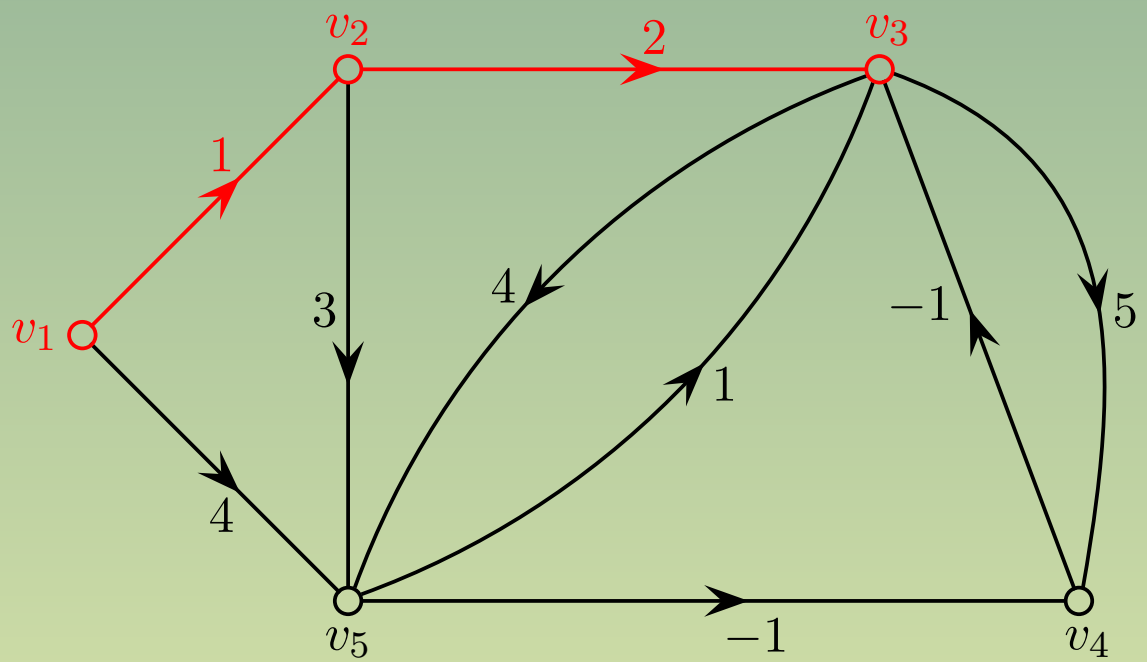
	0	1	2
v_1	∞	∞	∞
v_2	∞	∞	∞
v_3	∞	$v_4, 1$	■
v_4	$-, 0$	■	■
v_5	∞	∞	$v_3, 2$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



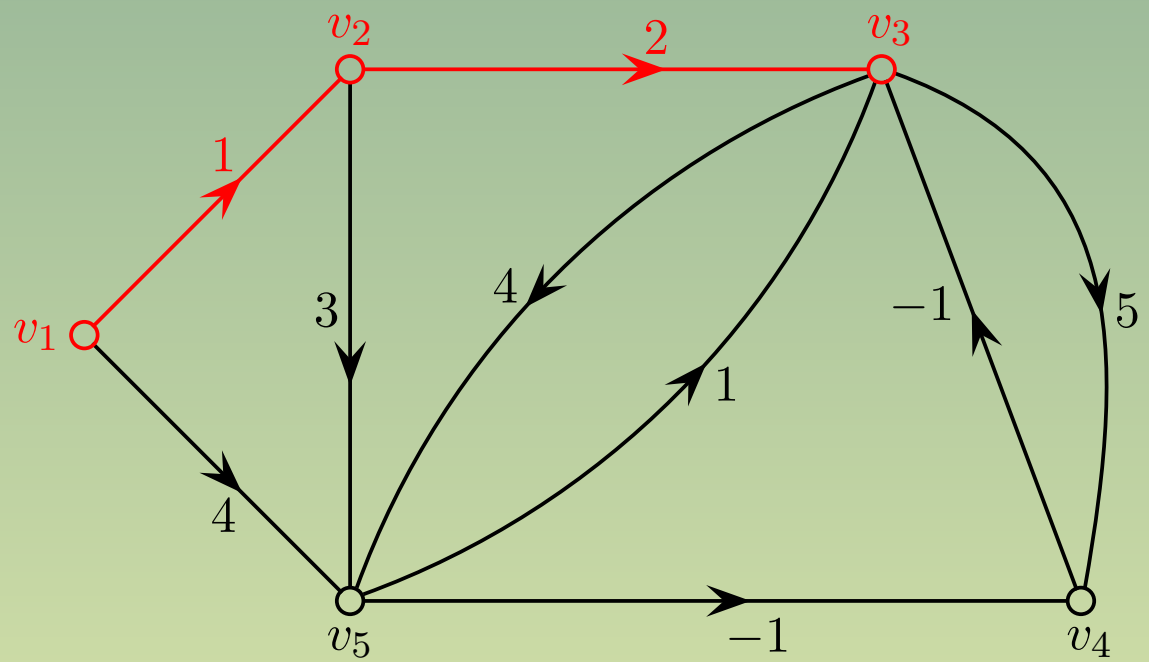
U zadanom težinskom digrafu postoje lukovi koji imaju negativne težine. To su lukovi v_5v_4 i v_4v_3.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



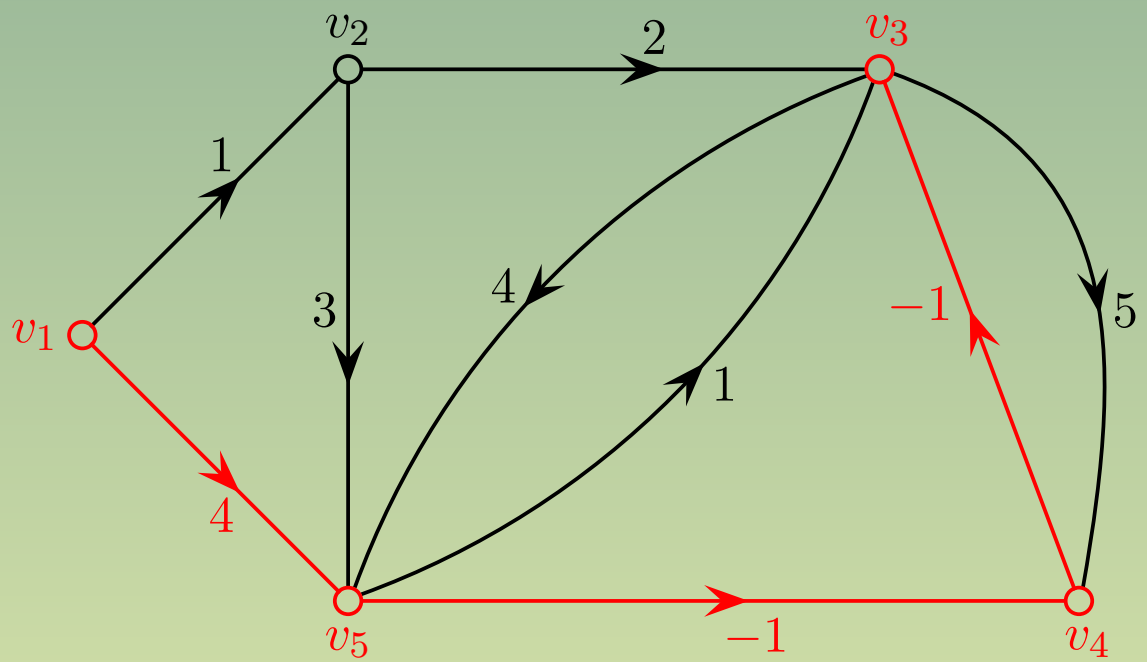
$v_1v_2v_3$ je jedan usmjereni put od vrha v_1 do vrha v_3 koji ima težinu 3.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



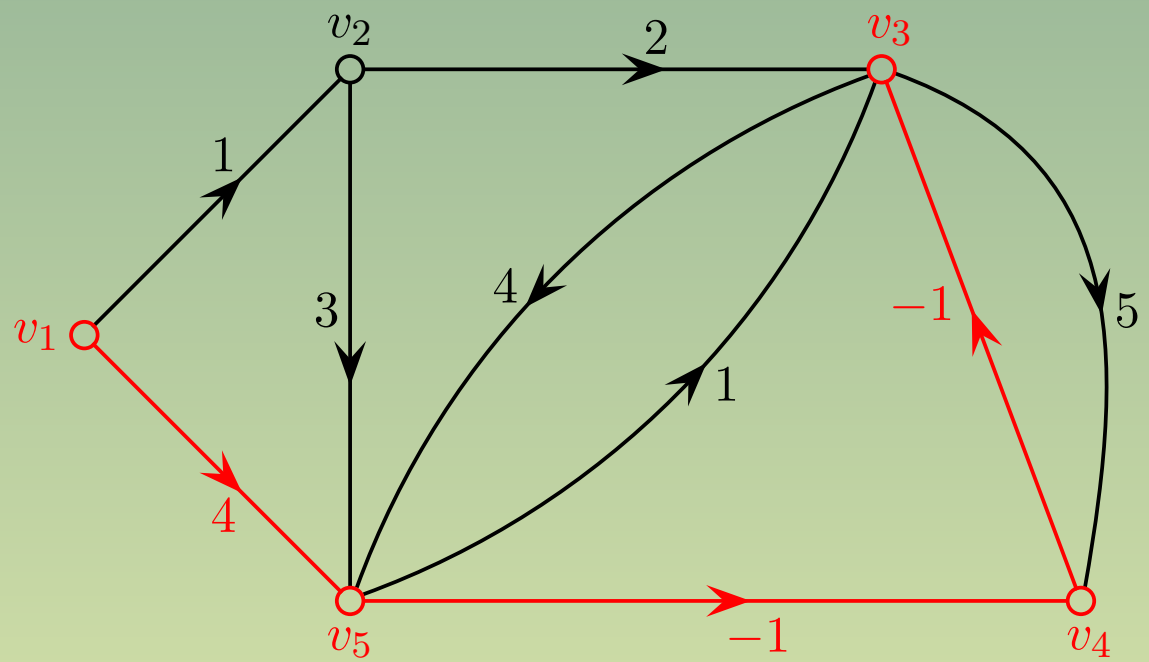
$v_1v_2v_3$ je jedan usmjereni put od vrha v_1 do vrha v_3 koji ima težinu 3. Međutim, to nije najkraći put od vrha v_1 do vrha v_3.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



$v_1v_2v_3$ je jedan usmjereni put od vrha v_1 do vrha v_3 koji ima težinu 3. Međutim, to nije najkraći put od vrha v_1 do vrha v_3. Naime, $v_1v_5v_4v_3$ je najkraći put od v_1 do v_3 čija težina je jednaka $4 + (-1) + (-1) = 2$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

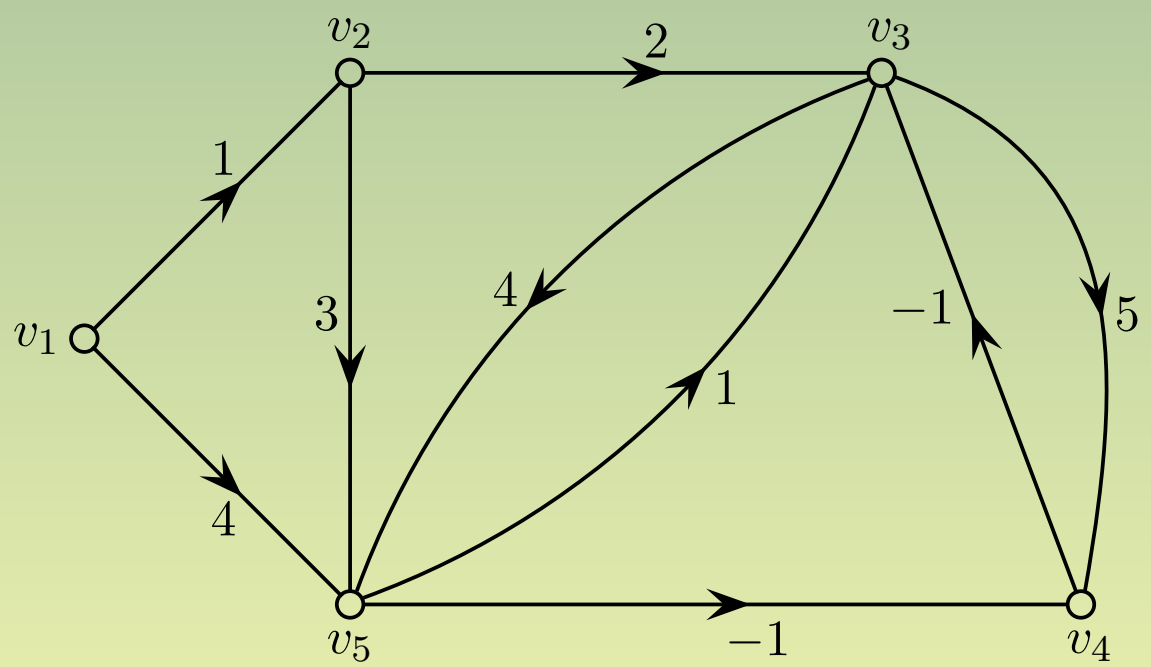


$v_1v_2v_3$ je jedan usmjereni put od vrha v_1 do vrha v_3 koji ima težinu 3. Međutim, to nije najkraći put od vrha v_1 do vrha v_3. Naime, $v_1v_5v_4v_3$ je najkraći put od v_1 do v_3 čija težina je jednaka $4 + (-1) + (-1) = 2$. Sljedeći primjer pokazuje kako će Dijkstrin algoritam propasti na ovakvom digrafu, tj. neće dati točan najkraći put od vrha v_1 do vrha v_3.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.16.

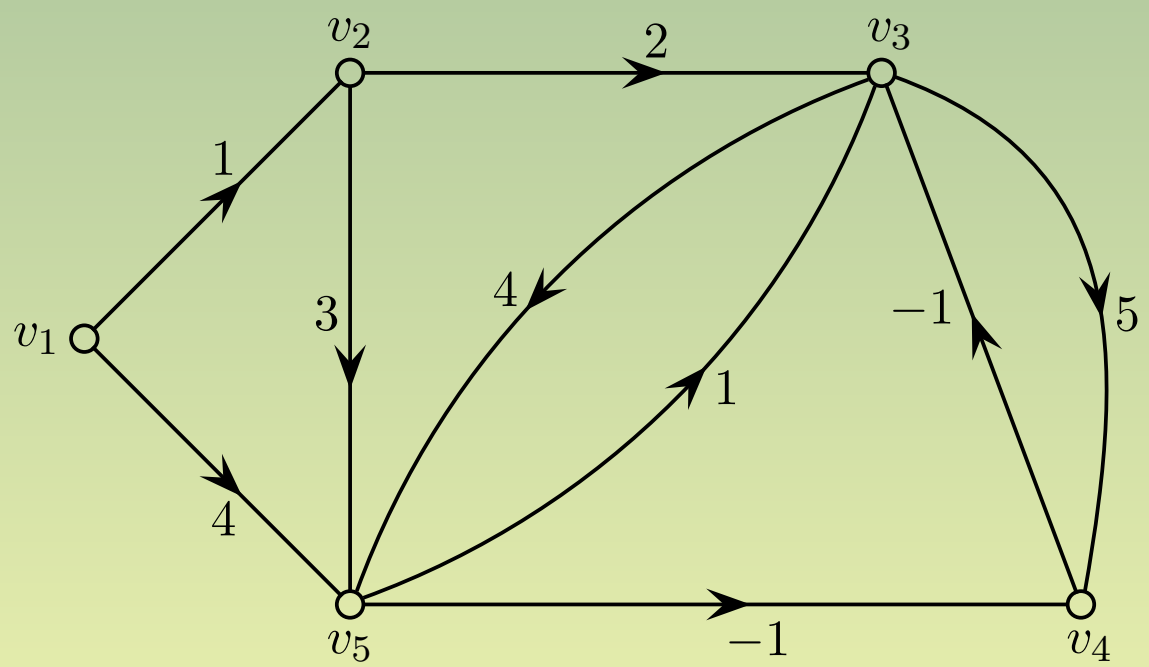
Pomoću Dijkstrinog algoritma pronađite najkraće putove od vrha v_1 do svih preostalih vrhova u zadanom digrafu. Uvjerite se da algoritam nije ispravan, tj. ne daje uvijek najkraće putove.



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.16.

Pomoću Dijkstrinog algoritma pronađite najkraće putove od vrha v_1 do svih preostalih vrhova u zadanom digrafu. Uvjerite se da algoritam nije ispravan, tj. ne daje uvijek najkraće putove.

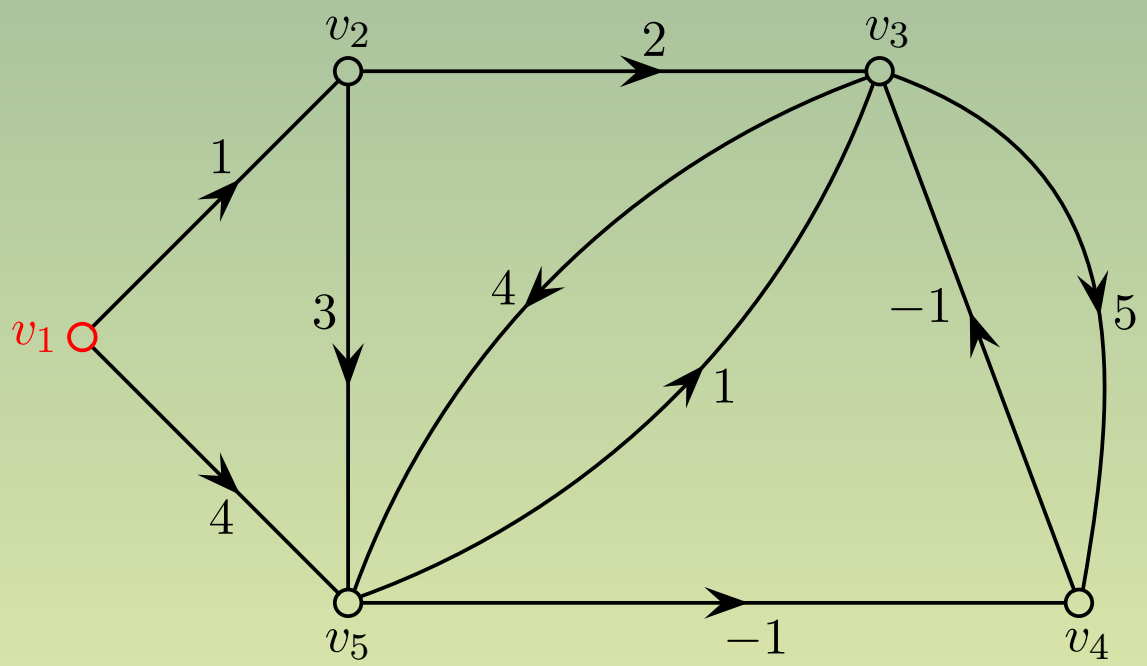


Rješenje.

Pogledat ćemo poboljšanu verziju Dijkstrinog algoritma i vidjeti da ona ne radi korektno jer neće dati dobar najkraći put od vrha v_1 do vrha v_3.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

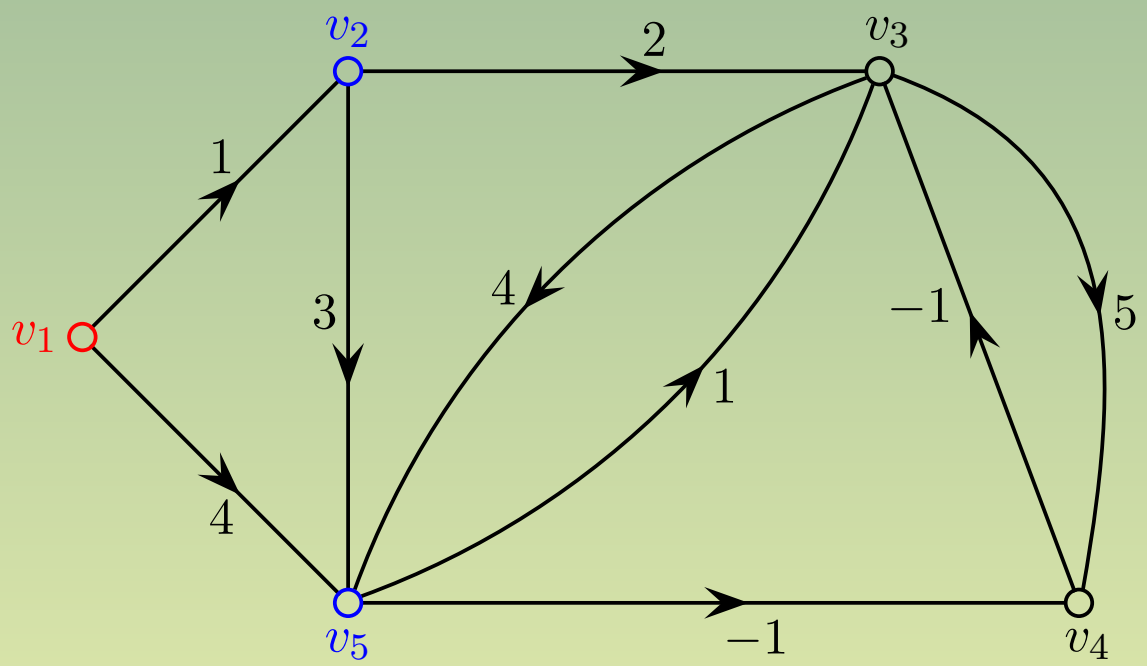


$v_1(-,0)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$ ▸ konačno rješenje

Na početku vrhu v_1 pridružimo trajnu oznaku $(-,0)$, a svim ostalim vrhovima privremene oznake $(-,\infty)$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-,0)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$

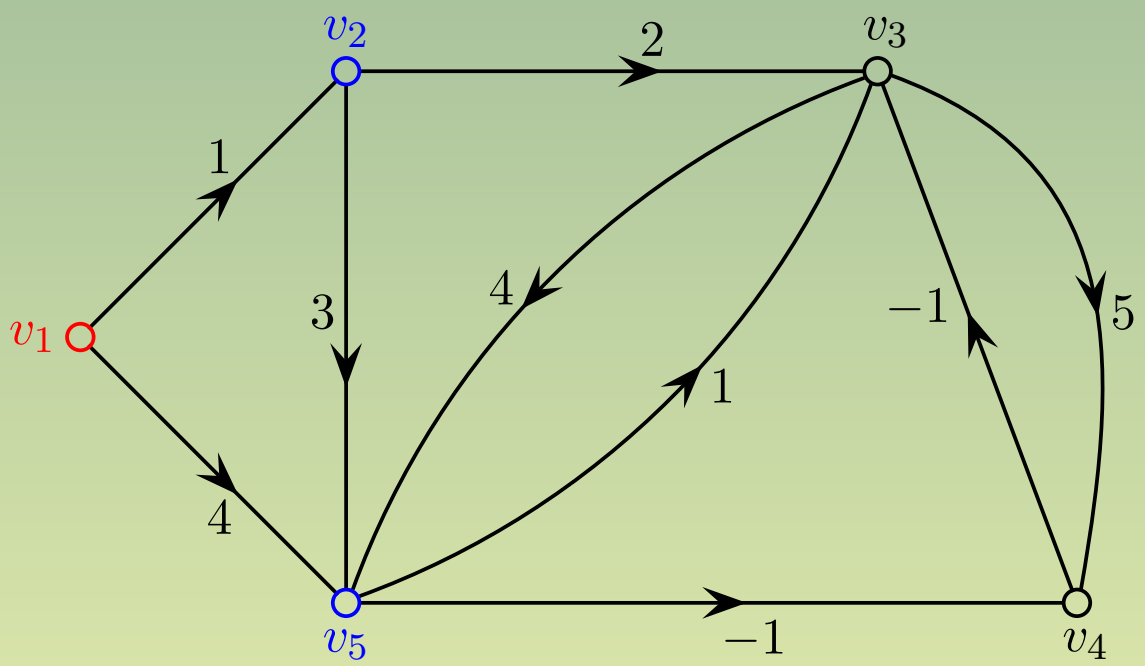
Pogledamo susjedne vrhove vrha v_1 (v_1 je posljednji dobio trajnu oznaku) koji još uvijek imaju privremene oznake. To su vrhovi v_2 i v_5.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$

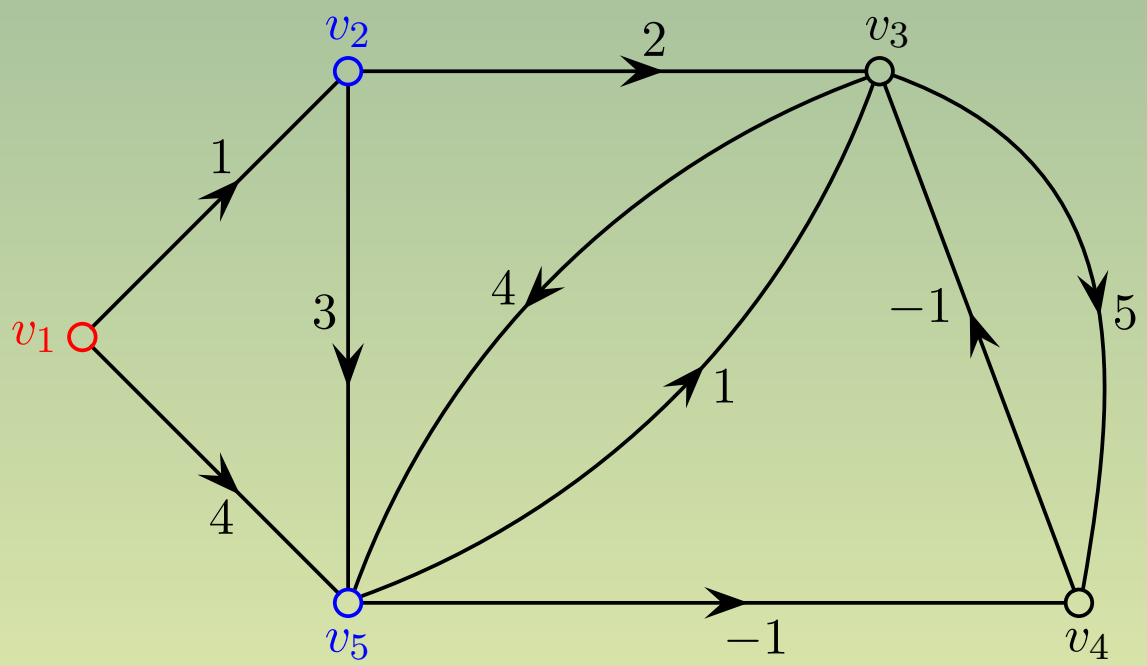
Kako je privremena oznaka (druga koordinata) vrha v_2 veća od sume druge koordinate vrha v_1 i težine luka v_1v_2, vrh v_2 dobiva novu privremenu oznaku $v_2(v_1,1)$, gdje je druga koordinata od v_2 jednaka sumi druge koordinate vrha v_1 i težine luka v_1v_2, tj. $1 = 0 + 1$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

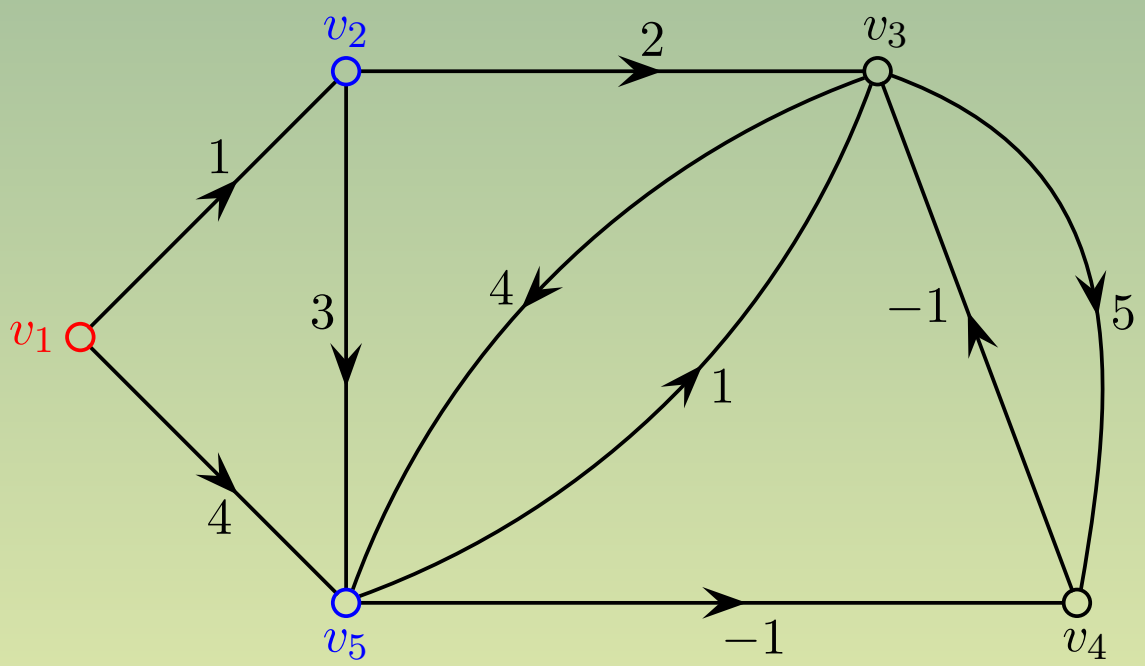


$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

Kako je privremena oznaka (druga koordinata) vrha v_5 veća od sume druge koordinate vrha v_1 i težine luka v_1v_5, vrh v_5 dobiva novu privremenu oznaku $v_5(v_1,4)$, gdje je druga koordinata od v_5 jednaka sumi druge koordinate vrha v_1 i težine luka v_1v_5, tj. $4 = 0 + 4$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

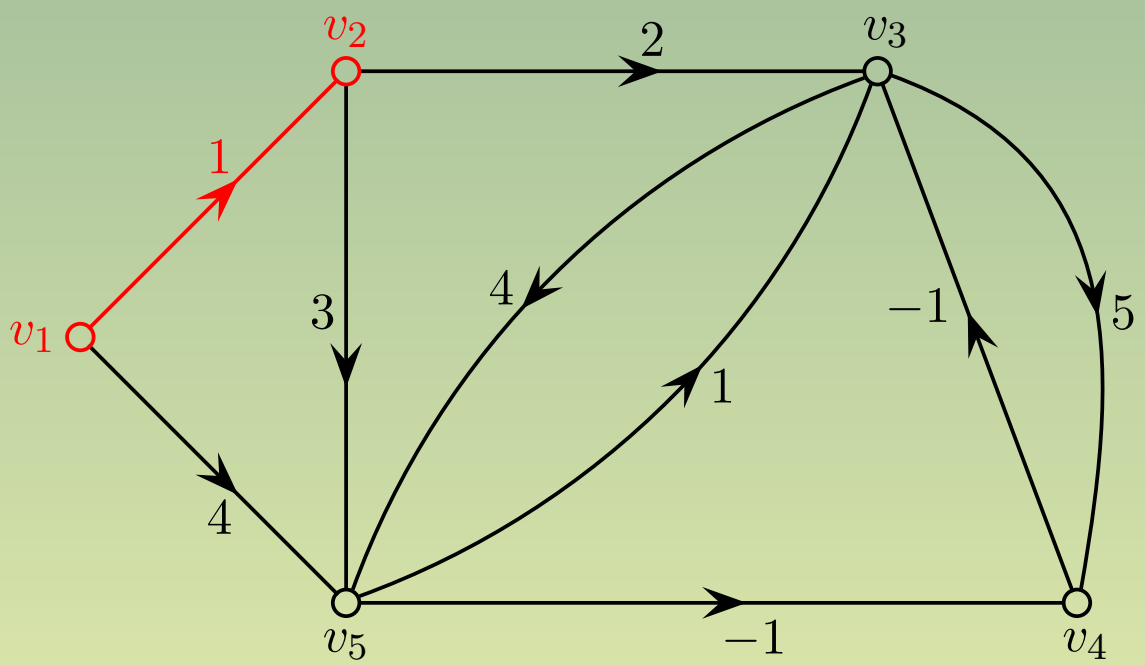


$v_1(-, 0)$, $v_2(v_1, 1)$, $v_3(-, \infty)$, $v_4(-, \infty)$, $v_5(v_1, 4)$

Sada tražimo vrh s najmanjom privremenom oznakom, tj. drugom koordinatom.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

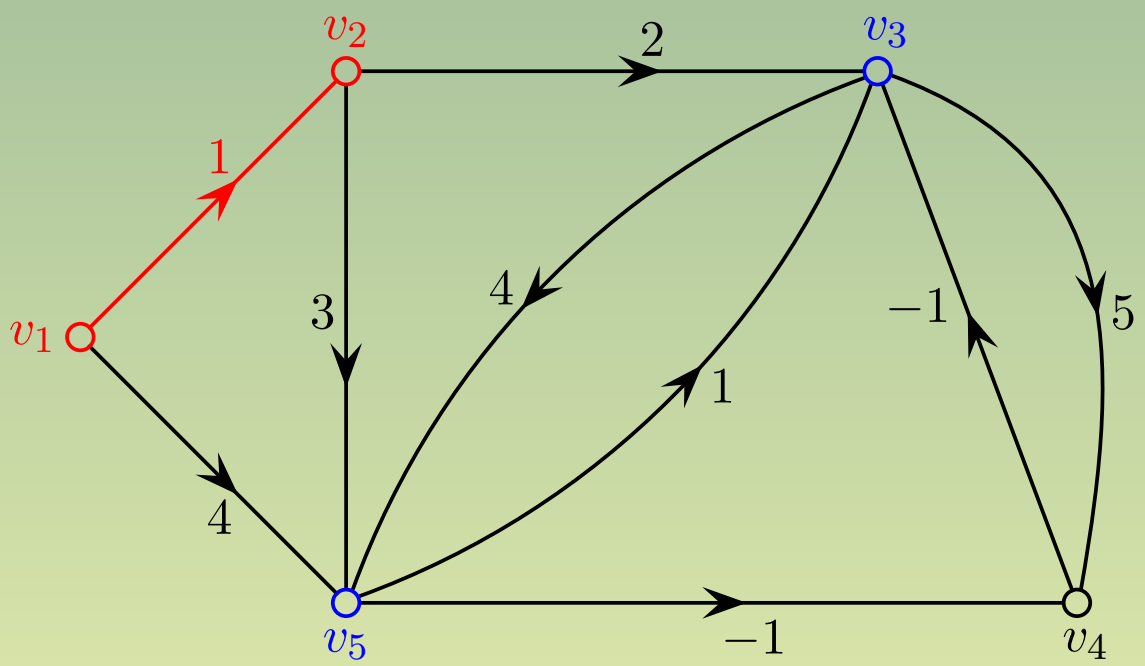


$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

Sada tražimo vrh s najmanjom privremenom oznakom, tj. drugom koordinatom. To je ovdje vrh v_2 i stavimo da je njegova oznaka trajna. Nadalje, najkraći put od v_1 do v_2 je v_1v_2 i duljine je 1.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

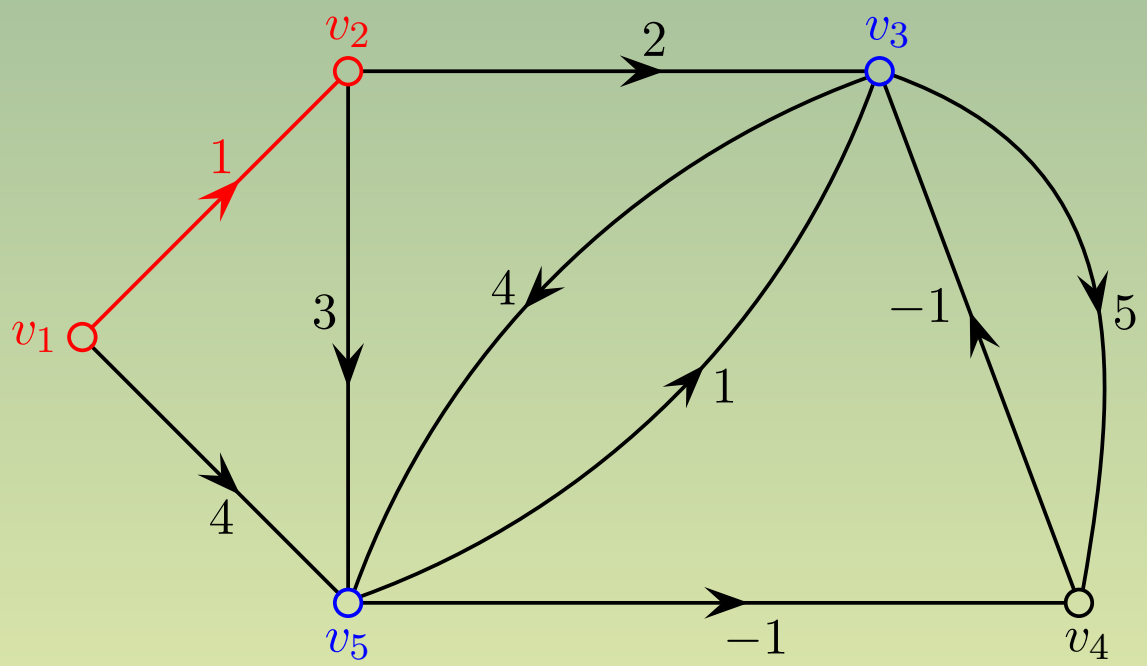
Pogledamo susjedne vrhove vrha v_2 (v_2 je posljednji dobio trajnu oznaku) koji još uvijek imaju privremene oznake. To su vrhovi v_3 i v_5.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

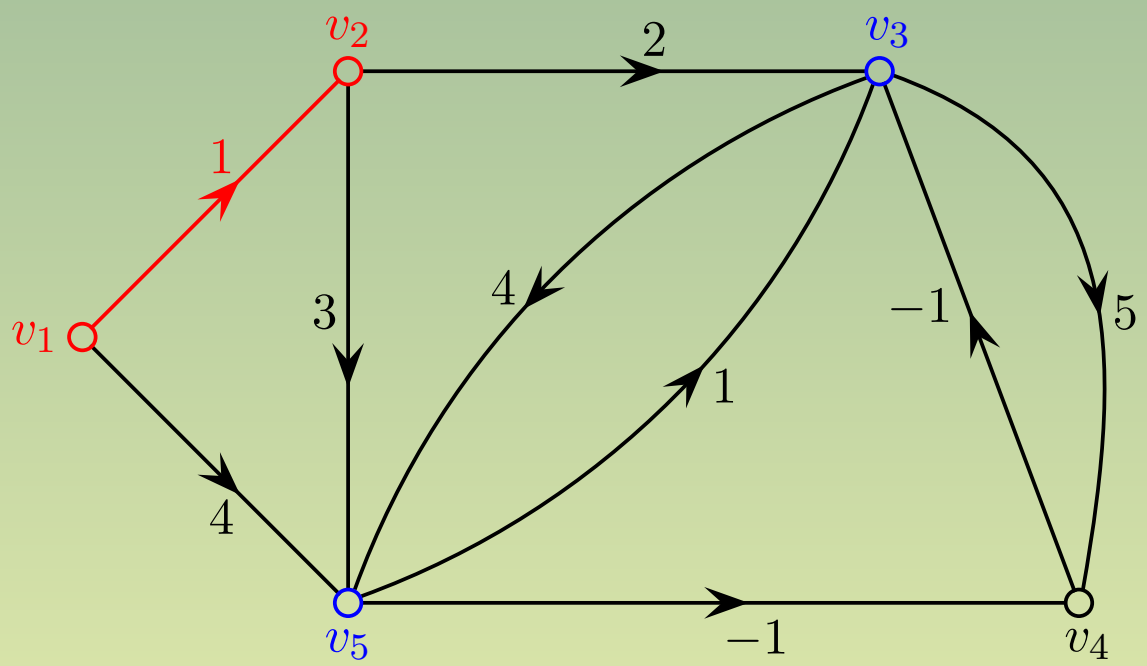


$v_1(-, 0)$, $v_2(v_1, 1)$, $v_3(v_2, 3)$, $v_4(-, \infty)$, $v_5(v_1, 4)$

Kako je privremena oznaka (druga koordinata) vrha v_3 veća od sume druge koordinate vrha v_2 i težine luka v_2v_3, vrh v_3 dobiva novu privremenu oznaku $v_3(v_2, 3)$, gdje je druga koordinata od v_3 jednaka sumi druge koordinate vrha v_2 i težine luka v_2v_3, tj. $3 = 1 + 2$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-, 0)$, $v_2(v_1, 1)$, $v_3(v_2, 3)$, $v_4(-, \infty)$, $v_5(v_1, 4)$

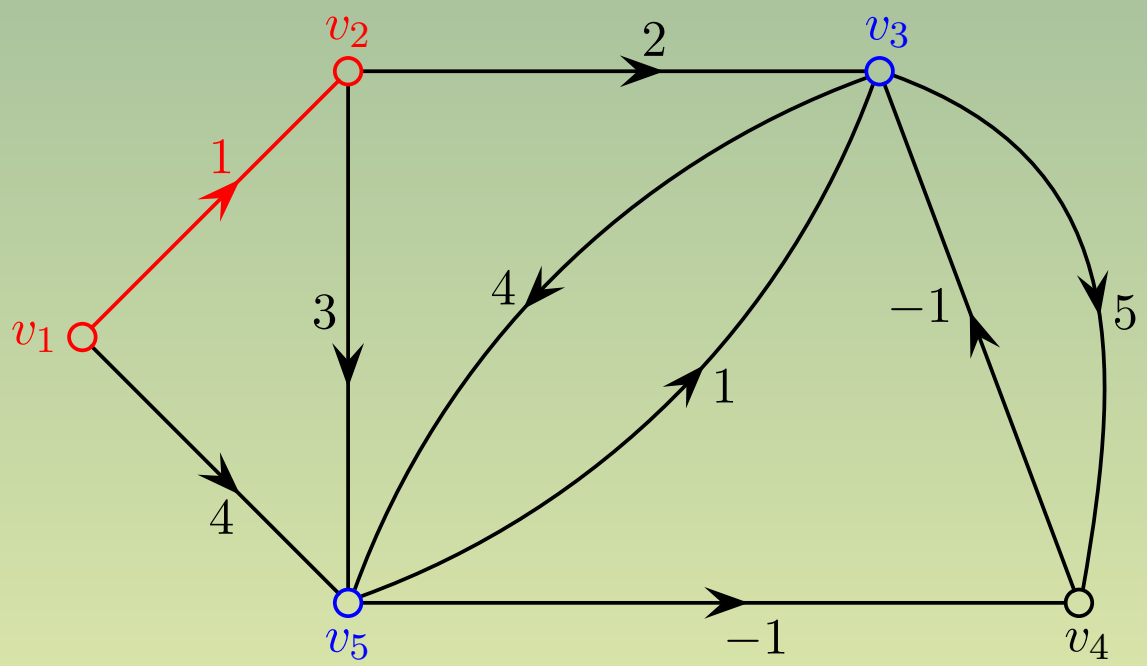
Kako privremena oznaka (druga koordinata) vrha v_5 nije veća od sume druge koordinate vrha v_2 i težine luka v_2v_5, vrh v_5 ne mijenja svoju privremenu oznaku.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

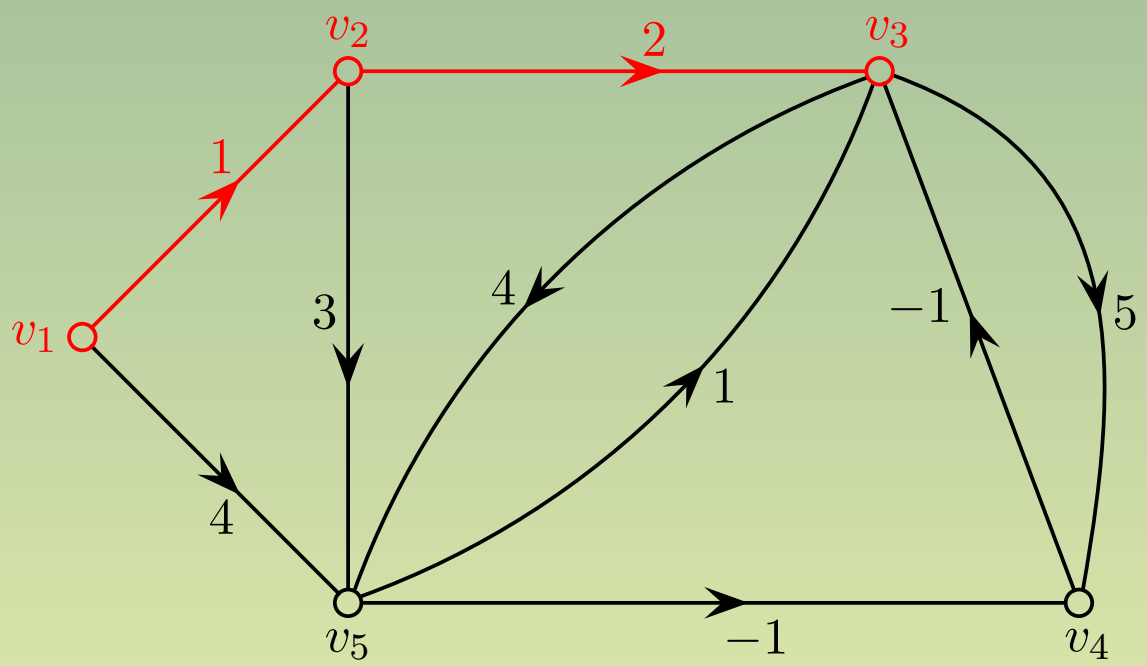


$v_1(-, 0)$, $v_2(v_1, 1)$, $v_3(v_2, 3)$, $v_4(-, \infty)$, $v_5(v_1, 4)$

Sada tražimo vrh s najmanjom privremenom oznakom, tj. drugom koordinatom.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

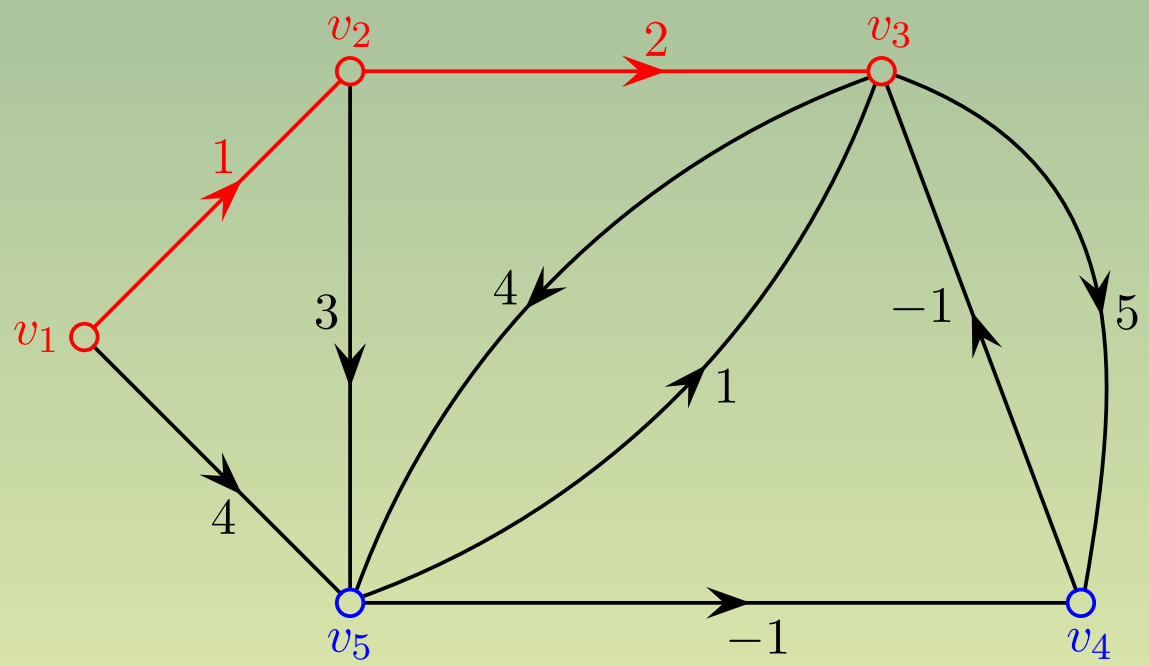


$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,3)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

Sada tražimo vrh s najmanjom privremenom oznakom, tj. drugom koordinatom. To je ovdje vrh v_3 i stavimo da je njegova oznaka trajna. Nadalje, najkraći put od v_1 do v_3 je $v_1v_2v_3$ i duljine je 3.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

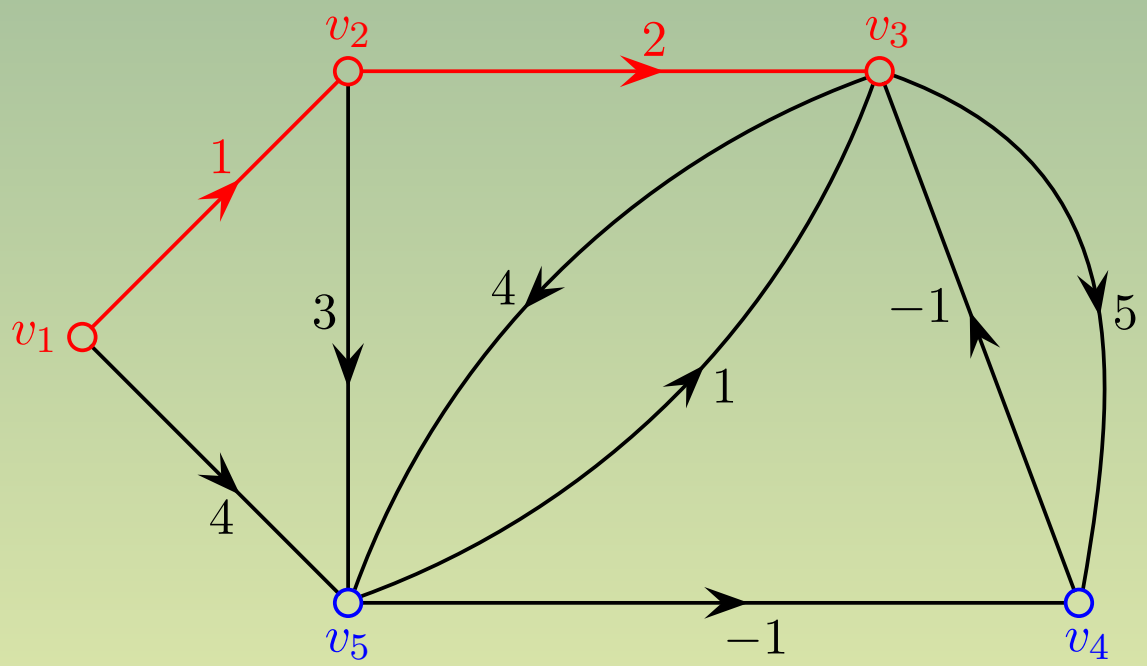


$v_1(-, 0)$, $v_2(v_1, 1)$, $v_3(v_2, 3)$, $v_4(-, \infty)$, $v_5(v_1, 4)$

Pogledamo susjedne vrhove vrha v_3 (v_3 je posljednji dobio trajnu oznaku) koji još uvijek imaju privremene oznake. To su vrhovi v_4 i v_5.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

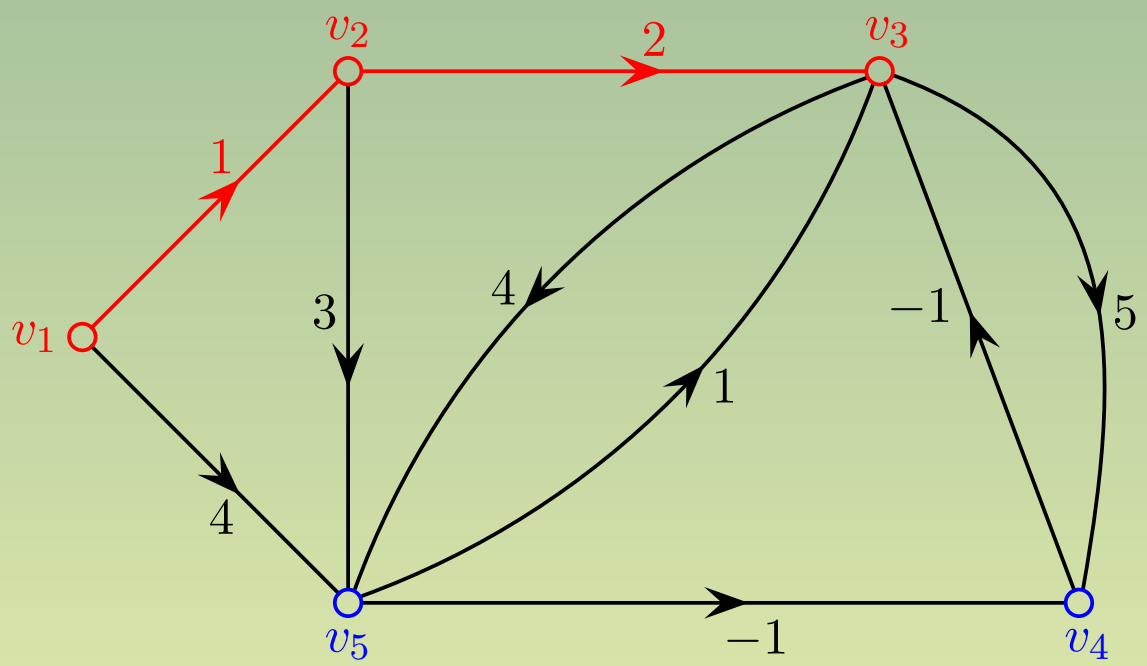


$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,3)$, $v_4(v_3,8)$, $v_5(v_1,4)$

Kako je privremena oznaka (druga koordinata) vrha v_4 veća od sume druge koordinate vrha v_3 i težine luka v_3v_4, vrh v_4 dobiva novu privremenu oznaku $v_4(v_3,8)$, gdje je druga koordinata od v_4 jednaka sumi druge koordinate vrha v_3 i težine luka v_3v_4, tj. $8 = 3 + 5$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

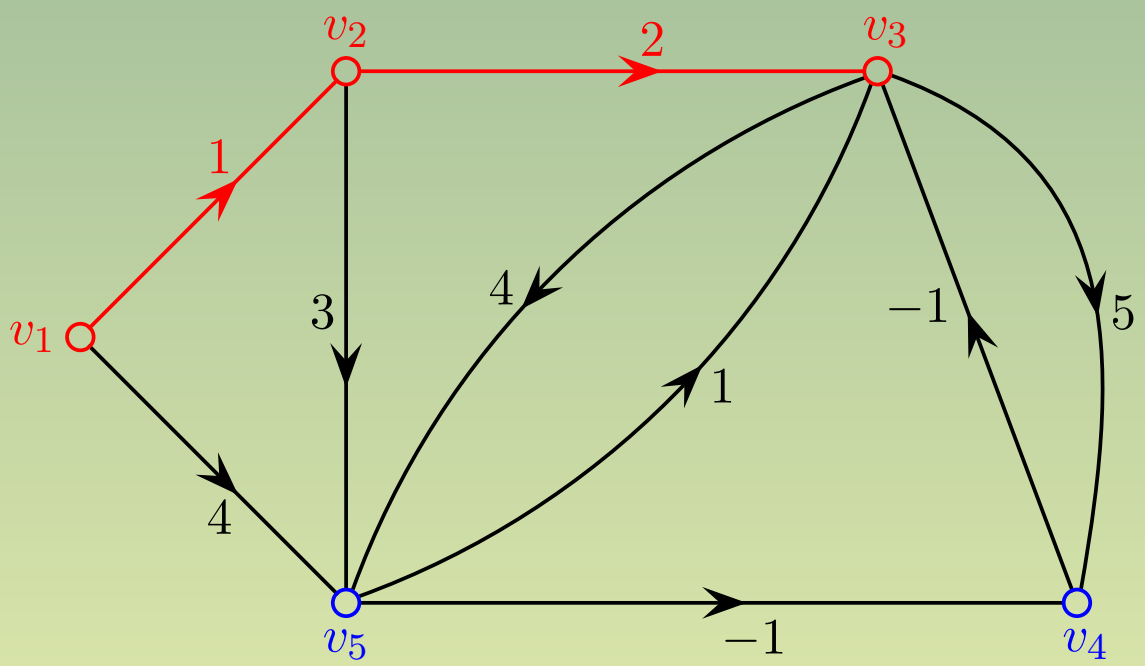


$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,3)$, $v_4(v_3,8)$, $v_5(v_1,4)$

Kako privremena oznaka (druga koordinata) vrha v_5 nije veća od sume druge koordinate vrha v_3 i težine luka v_3v_5, vrh v_5 ne mijenja svoju privremenu oznaku.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

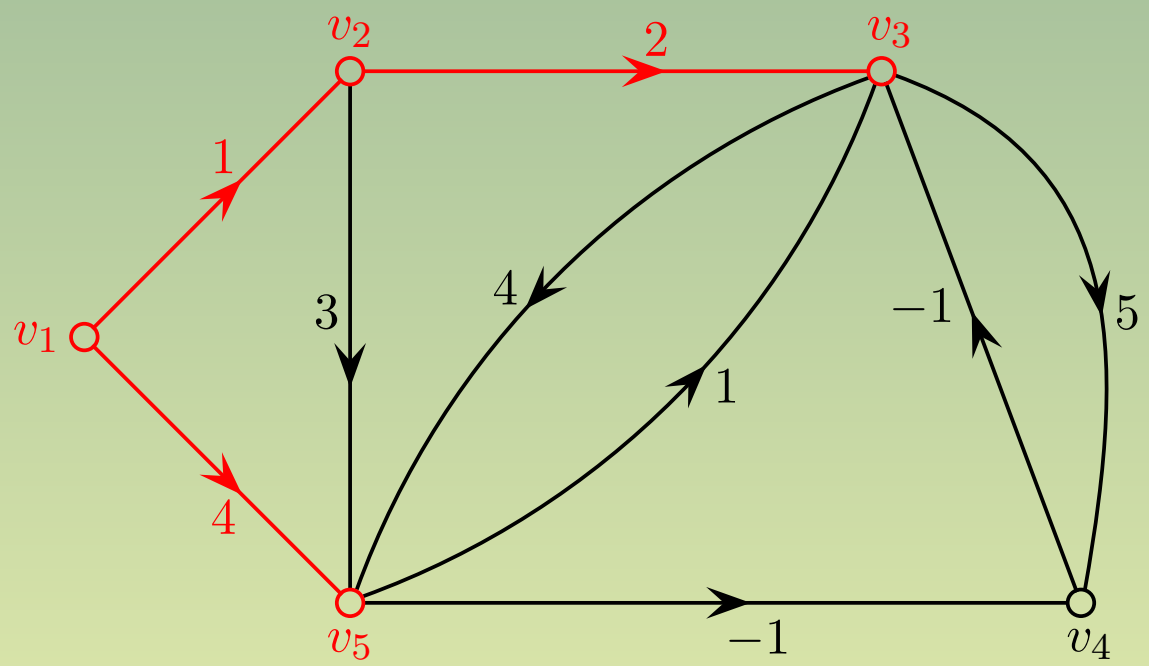


$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,3)$, $v_4(v_3,8)$, $v_5(v_1,4)$

Sada tražimo vrh s najmanjom privremenom oznakom, tj. drugom koordinatom.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

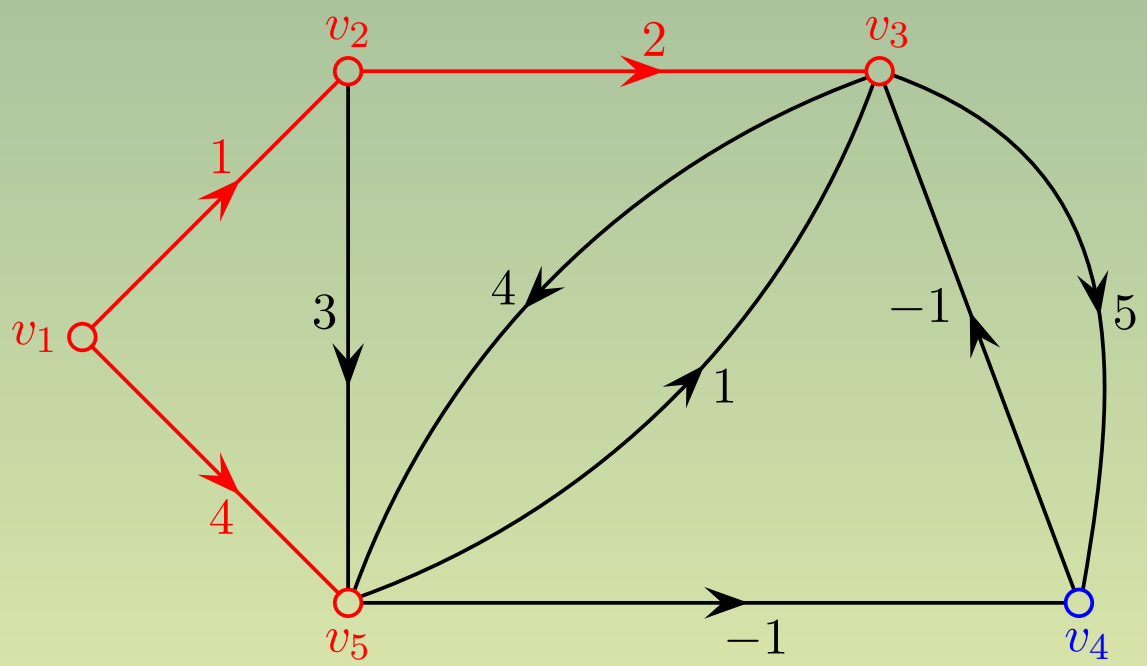


$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,3)$, $v_4(v_3,8)$, $v_5(v_1,4)$

Sada tražimo vrh s najmanjom privremenom oznakom, tj. drugom koordinatom. To je ovdje vrh v_5 i stavimo da je njegova oznaka trajna. Nadalje, najkraći put od v_1 do v_5 je v_1v_5 i duljine je 4.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,3)$, $v_4(v_3,8)$, $v_5(v_1,4)$

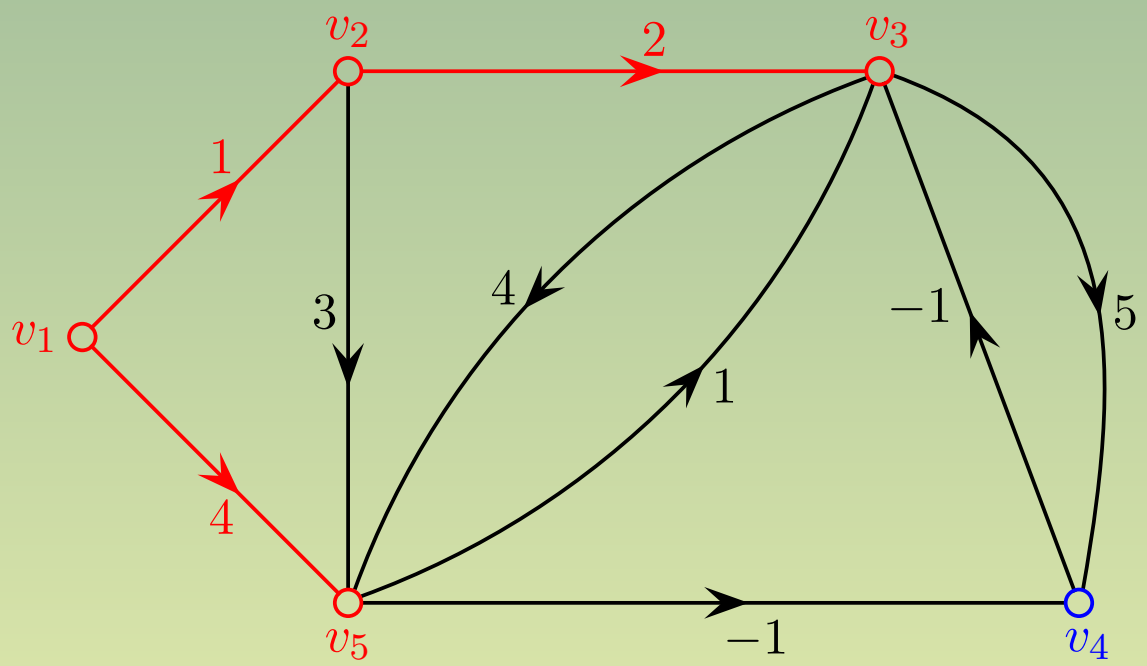
Pogledamo susjedne vrhove vrha v_5 (v_5 je posljednji dobio trajnu oznaku) koji još uvijek imaju privremene oznake. To je još jedino vrh v_4.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

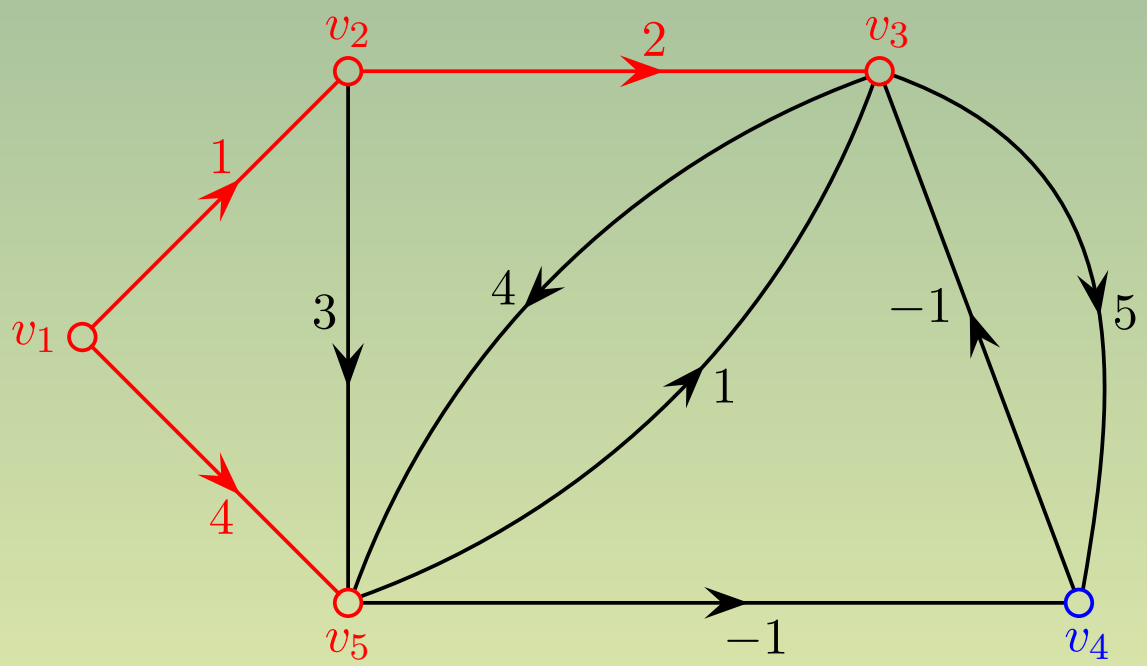


$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,3)$, $v_4(v_5,3)$, $v_5(v_1,4)$

Kako je privremena oznaka (druga koordinata) vrha v_4 veća od sume druge koordinate vrha v_5 i težine luka v_5v_4, vrh v_4 dobiva novu privremenu oznaku $v_4(v_5,3)$, gdje je druga koordinata od v_4 jednaka sumi druge koordinate vrha v_5 i težine luka v_5v_4, tj. $3 = 4 + (-1)$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

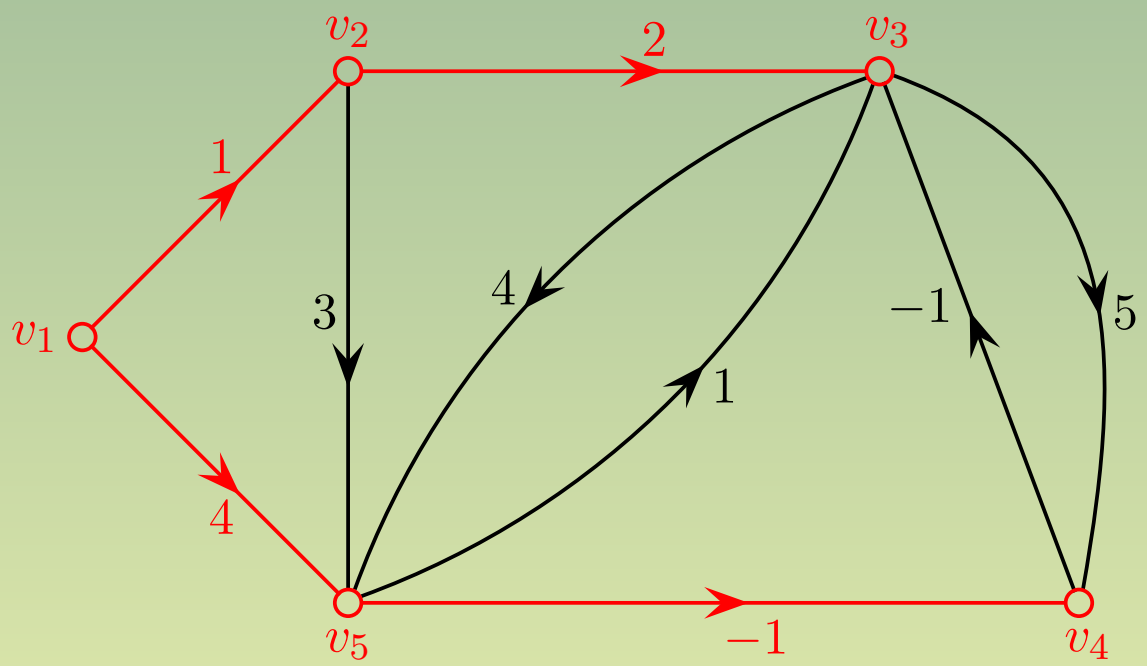


$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,3)$, $v_4(v_5,3)$, $v_5(v_1,4)$

Sada tražimo vrh s najmanjom privremenom oznakom, tj. drugom koordinatom.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)

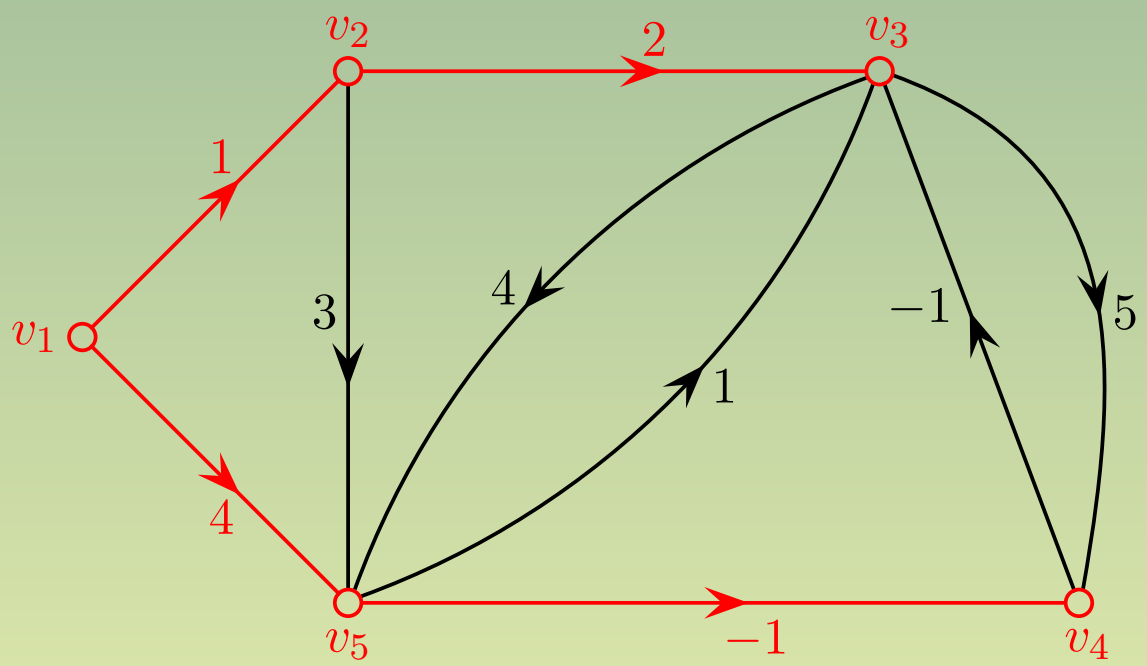


$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,3)$, $v_4(v_5,3)$, $v_5(v_1,4)$

Sada tražimo vrh s najmanjom privremenom oznakom, tj. drugom koordinatom. To je ovdje vrh v_4 i stavimo da je njegova oznaka trajna. Nadalje, najkraći put od v_1 do v_4 je $v_1v_5v_4$ i duljine je 3.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



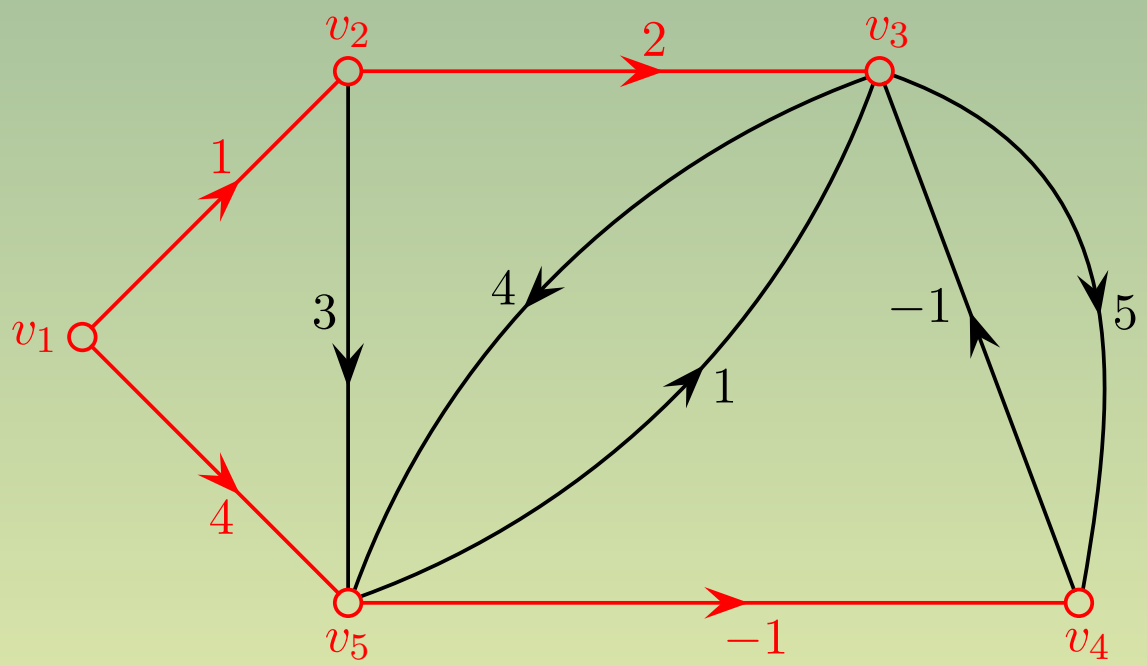
$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,3)$, $v_4(v_5,3)$, $v_5(v_1,4)$

objasni postupak

Kako svi vrhovi imaju trajne oznake, algoritam završava i dobili smo najkraće putove i njihove duljine od vrha v_1 do svih ostalih vrhova u promatranom digrafu. Međutim, uočamo da smo dobili pogrešni najkraći put od vrha v_1 do vrha v_3.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dijkstra (poboljšana verzija)



$v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,3)$, $v_4(v_5,3)$, $v_5(v_1,4)$

Naime, već smo ranije uočili da je najkraći put od v_1 do v_3 put $v_1v_5v_4v_3$, a ne put $v_1v_2v_3$ kojeg je Dijkstrin algoritam dao. Zaključujemo stoga da Dijkstrin algoritam ne radi ispravno na digrafovima u kojima neki lukovi imaju negativne težine.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Napomena.

Ako u težinskom digrafu postoje lukovi negativnih težina, Dijkstrin algoritam ne radi ispravno. Problem je u tome što niti jedna verzija Dijkstrinog algoritma više ne provjerava vrh nakon što on dobije trajnu oznaku. Taj postupak funkcionira s pozitivnim težinama, ali s negativnim težinama ne funkcionira, a u to smo se uvjerili na prethodnom primjeru. Naime, u tom primjeru je vrh v_3 prerano dobio trajnu oznaku tako da više nije bilo mogućnosti da u igru uđe i stvarni najkraći put $v_1v_5v_4v_3$ koji bi onda izbacio iz igre put $v_1v_2v_3$. Zbog toga je za takve slučajeve od iznimne važnosti Bellman-Fordov algoritam koji, za razliku od Dijkstrinog algoritma, u svakom koraku ponovno provjerava svaki vrh i na taj način onda ispravno radi i s negativnim težinama, što ćemo vidjeti na primjerima. Također, vidjet ćemo da ne smijemo pretjerati s negativnim težinama jer u tim situacijama je i Bellman-Fordov algoritam neispravan.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Za digraf s vrhovima $v_1, v_2, \ldots, v_n$ Bellman-Fordov algoritam računa sukcesivno duljine $d_i(j)$ najkraćih putova od v_1 do v_j preko najviše i lukova. Kako svaki usmjereni put u tom digrafu nema više od $n-1$ lukova, konačne vrijednosti od $d_{n-1}(j)$, $j = 2, \ldots, n$ su duljine najkraćih usmjerenih putova od v_1 do svih preostalih vrhova ukoliko u digrafu nema usmjerenih ciklusa negativnih težina. Vidjet ćemo na primjerima zašto su problematični usmjereni ciklusi negativnih težina za Bellman-Fordov algoritam. Nadalje, $p(j)$ pamti vrh preko kojeg je vrh v_j dobio oznaku kako bismo na kraju, osim duljina najkraćih putova, mogli rekonstruirati i same najkraće putove.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellman-Fordov algoritam

ULAZ: Težinski digraf s vrhovima $v_1, v_2, \ldots, v_n$

IZLAZ: Duljine najkraćih putova od v_1 prema svim ostalim vrhovima

1: Za $i, j = 1, 2, \ldots, n$

   a) Ako je $i = j$, stavi $w(i, i) = 0$. Ako je $i \neq j$ i $v_i v_j$ je luk, stavi $w(i, j) = w(v_i v_j)$, a u protivnom stavi $w(i, j) = \infty$.

   b) Stavi $d_0(1) = 0$, $d_0(j) = \infty$ za $j = 2, 3, \ldots, n$.

   c) $p(i) = 1$ za $i = 2, \ldots, n$.

2: Za $i, j = 1, \ldots, n$

   a) Pronađi $min = \min_k \left(d_{i-1}(k) + w(v_k v_j)\right)$.

   b) Ako je $min < d_{i-1}(j)$, stavi $d_i(j) = min$ i $p(j) = v_k$, a u protivnom stavi $d_i(j) = d_{i-1}(j)$.

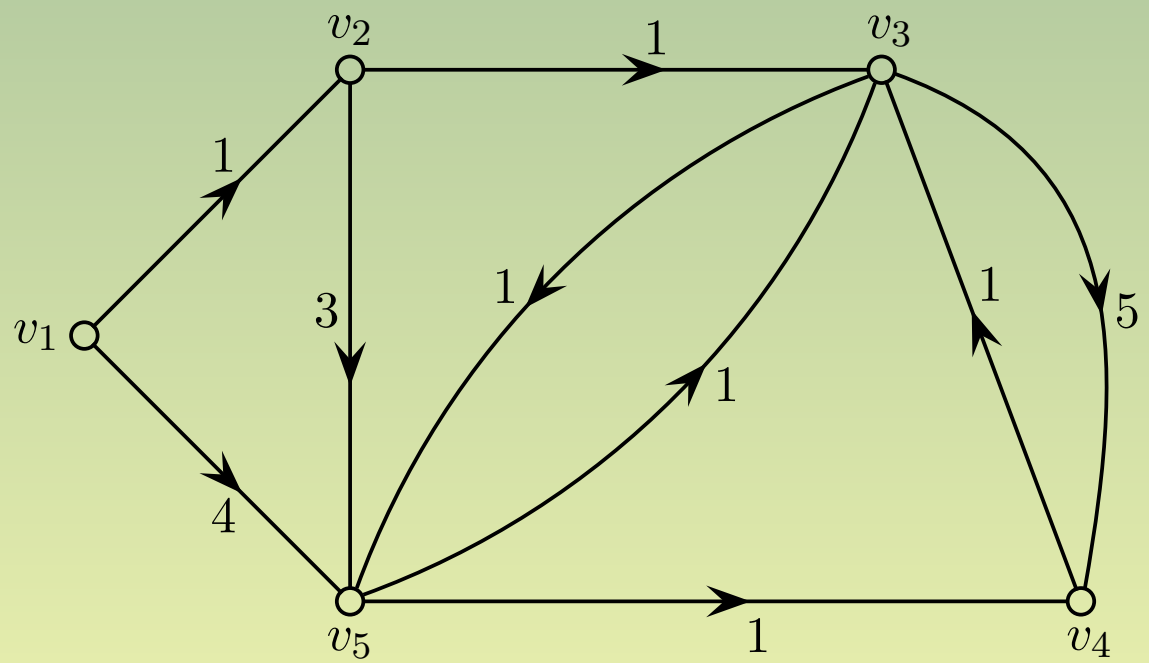
3: Ako je $d_n(j) = d_{n-1}(j)$ za svaki $j = 1, 2, \ldots, n$, tada vrati $d_n(j)$ za $j = 1, 2, \ldots, n$.

U protivnom vrati "error: postoji usmjereni ciklus negativne težine".

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.17.

Pomoću Bellman-Fordovog algoritma pronađite najkraće putove od vrha v_1 do svih preostalih vrhova u digrafu



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

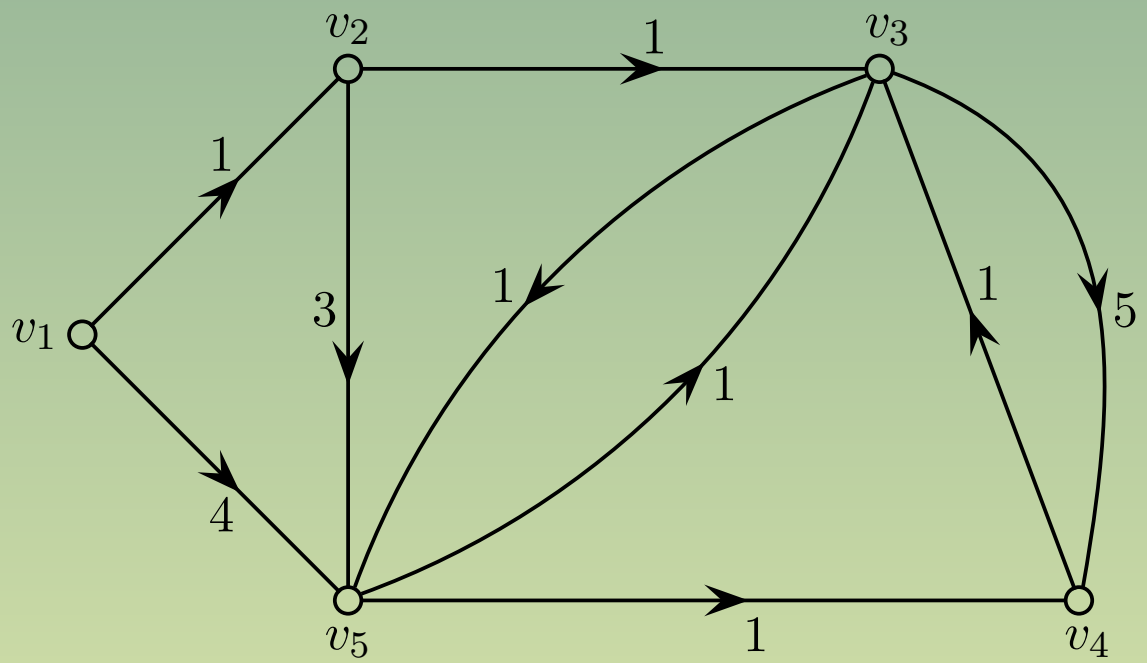
Rješenje.

Ovaj smo zadatak već prije rješavali pomoću obje verzije Dijkstrinog algoritma, a sada ćemo vidjeti kako se on rješava pomoću Bellman-Fordovog algoritma. Pritom se nećemo strogo držati oznaka iz opisa algoritma jer svima nam je jasno da se ručno provođenje algoritma bitno razlikuje od implementiranog algoritma koje će izvoditi računalo. Mi neke stvari "vidimo" pa neke od tih stvari ne moramo nepotrebno provoditi, dok ih računalo ne može vidjeti pa je takve stvari onda potrebno provoditi ili ih spremati u neke varijable. Zapravo ćemo slično raditi kao i kod Dijkstrinog algoritma. Tamo smo vrhovima pridruživali oznake, a to zapravo implicitno radimo i u Bellman-Fordovom algoritmu.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Naime, varijabla $p(j)$ odgovara prvoj koordinati iz oznake vrha (ta nam koordinata govori preko kojeg je vrha vrh v_j dobio oznaku), dok nam varijabla $d_i(j)$ govori kako izgleda druga koordinata (trenutna "udaljenost") vrha v_j od vrha v_1 u i-tom koraku. Uočite da je u samom kosturu Bellman-Fordov algoritam sličan Dijkstrinom algoritmu, a jedina bitna razlika je što u Bellman-Fordovom algoritmu vrhovi ne dobivaju trajne oznake, nego se sa svakim vrhom radi do samoga kraja, tj. oznake svih vrhova se do samog kraja mogu općenito mijenjati. Sjetite se, u svakom koraku Dijkstrinog algoritma je neki vrh dobio trajnu oznaku koja se više nije mijenjala do kraja izvođenja algoritma.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



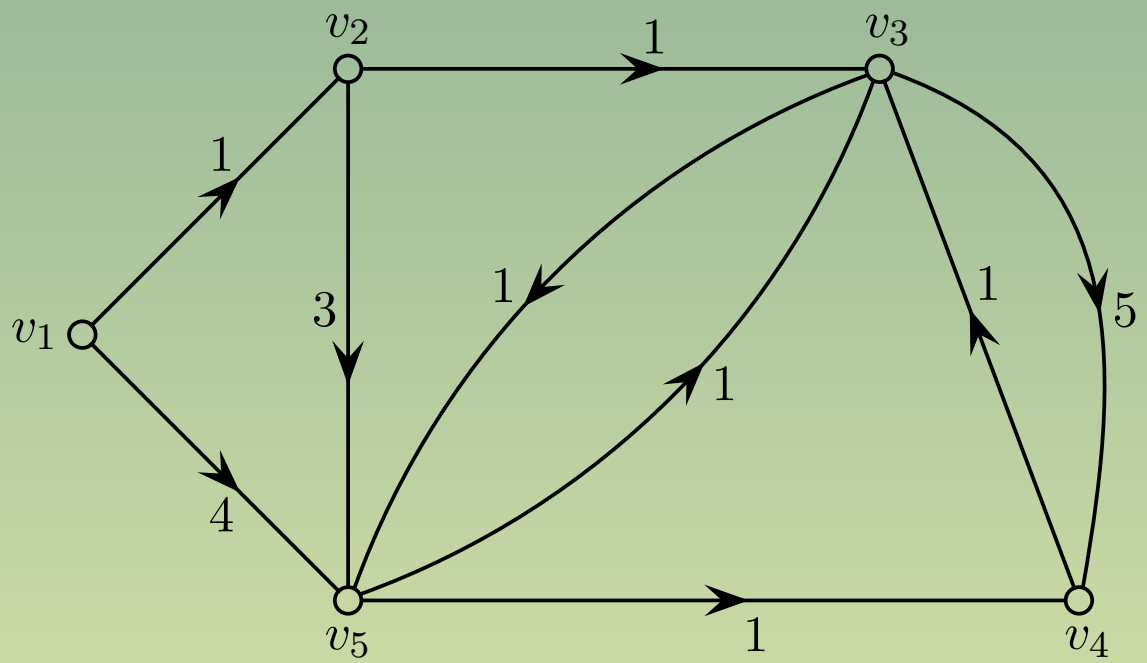
korak: 0

$v_1(-,0)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$

Na početku vrhu v_1 (od kojeg tražimo najkraće udaljenosti) pridružimo oznaku $(-,0)$ i ona se neće više mijenjati do kraja algoritma, a ostalim vrhovima pridružimo oznake $(-,\infty)$.

▸ konačno rješenje

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



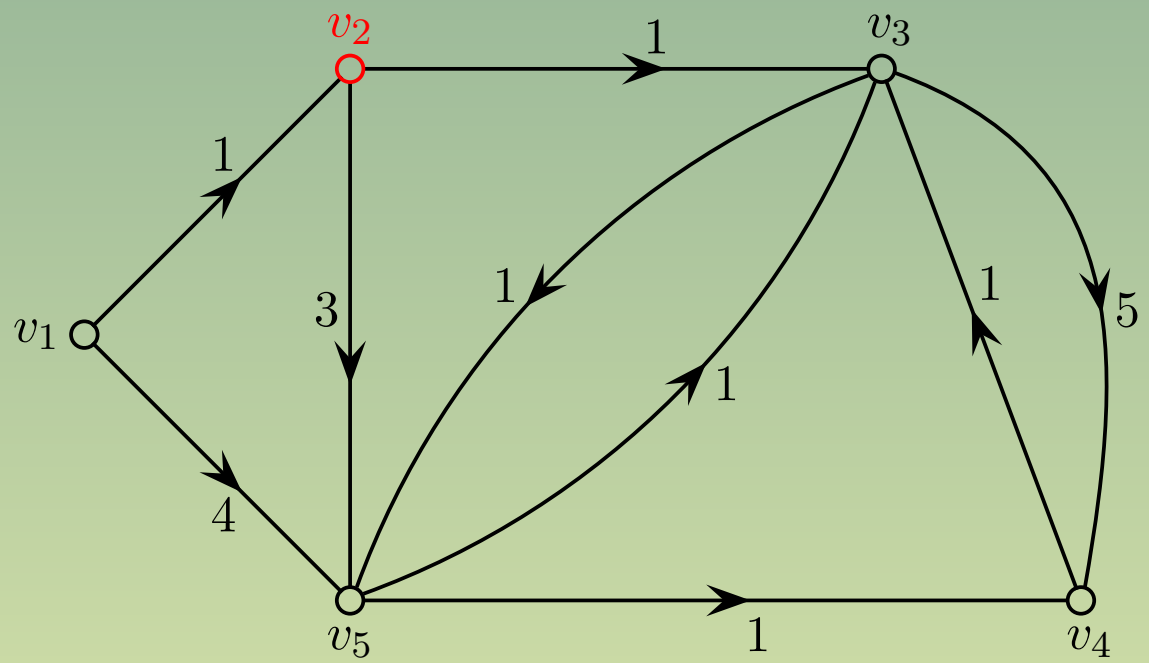
trenutni korak: 1

korak 0: $v_1(-,0)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$

korak 1: $v_1(-,0)$,

U prvom koraku moramo provjeriti oznake svih vrhova v_2, v_3, v_4, v_5 i po potrebi ih promijeniti. Stoga krenimo redom.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



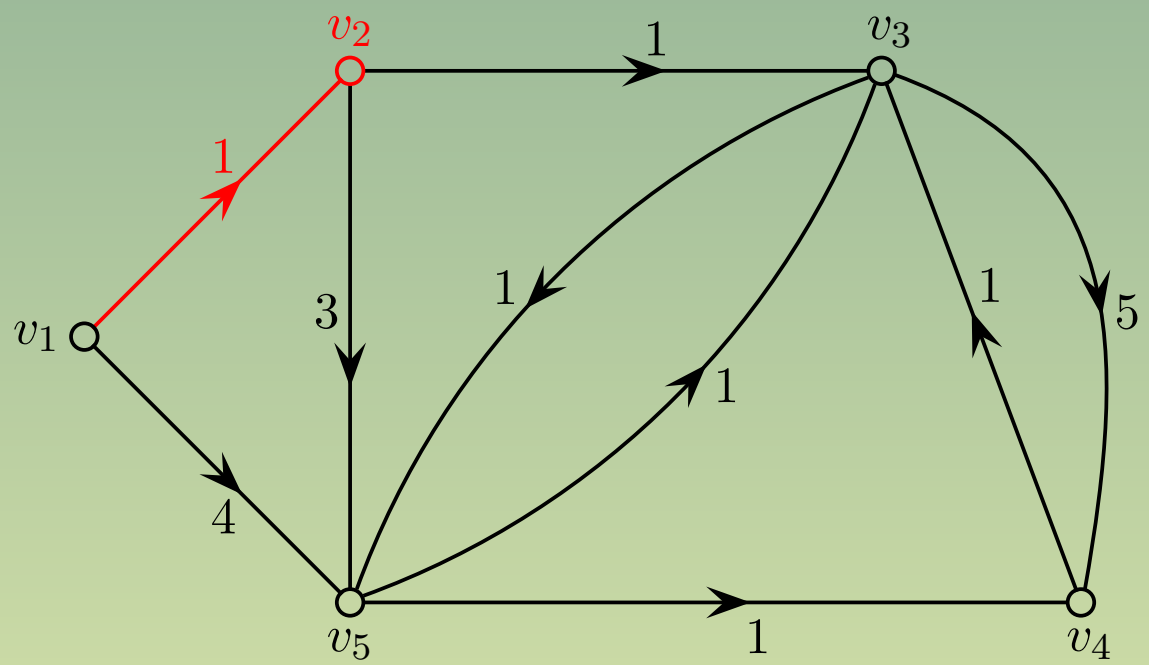
trenutni korak: 1

korak 0: $v_1(-,0)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$

korak 1: $v_1(-,0)$,

Pogledajmo vrh v_2

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



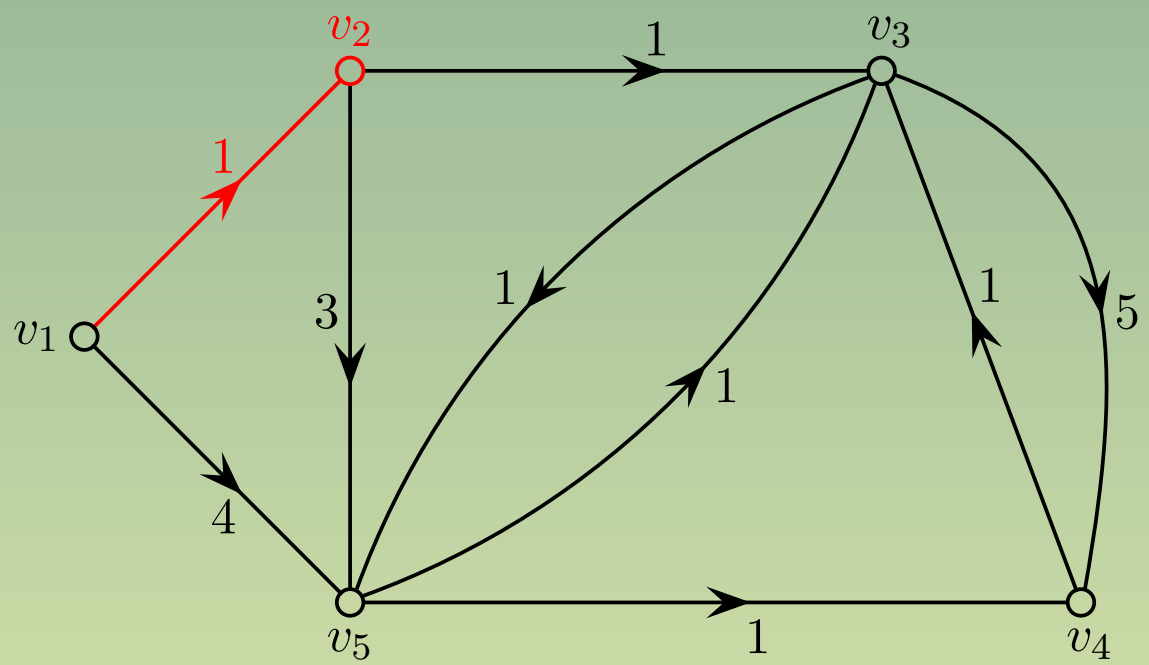
trenutni korak: 1

korak 0: $v_1(-,0)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$

korak 1: $v_1(-,0)$,

Pogledajmo vrh v_2 i sve lukove koji ulaze u njega. To je ovdje jedino luk v_1v_2.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 1

korak 0: $v_1(-,0)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$

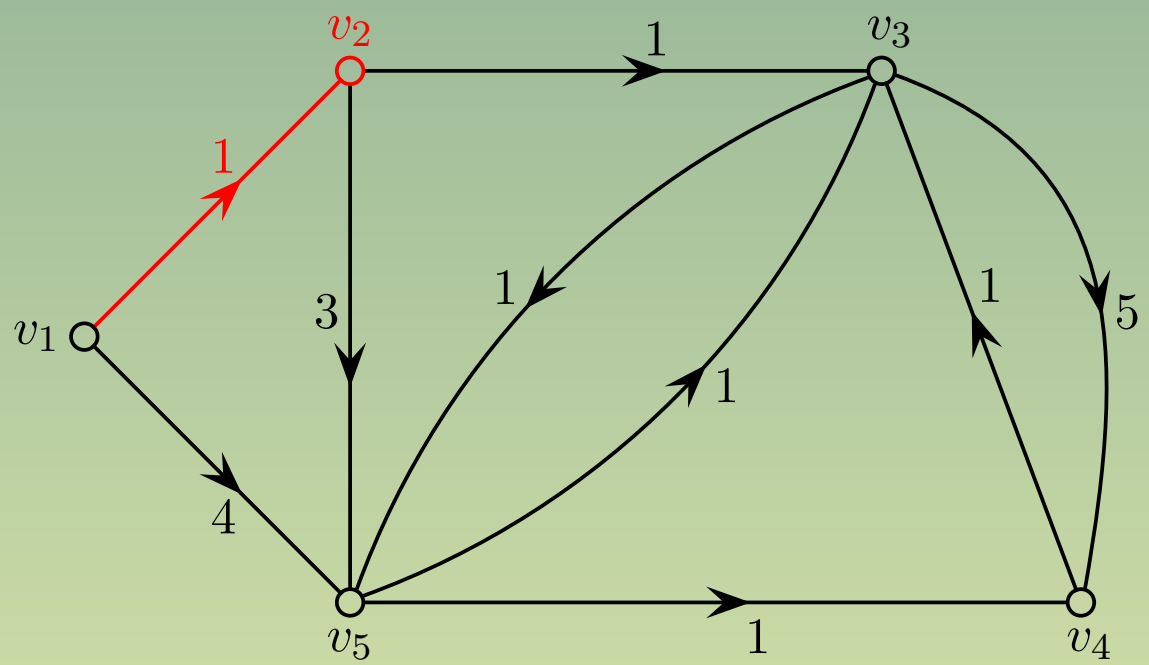
korak 1: $v_1(-,0)$,

Pogledajmo vrh v_2 i sve lukove koji ulaze u njega. To je ovdje jedino luk v_1v_2. Kada težinu luka v_1v_2 zbrojimo s drugom koordinatom oznake njegovog početka iz koraka 0 (s drugom koordinatom oznake vrha v_1 iz koraka 0) dobivamo vrijednost $1 + 0 = 1$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



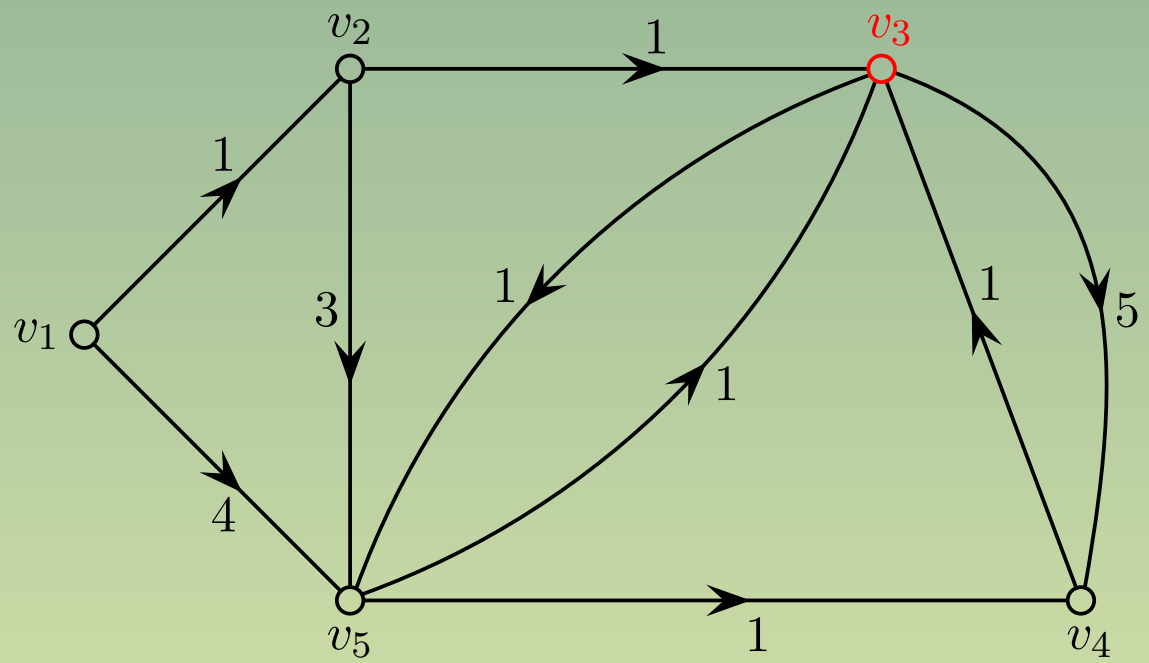
trenutni korak: 1

korak 0: $v_1(-,0)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$,

Kako je ta vrijednost 1 manja od trenutne druge koordinate oznake vrha v_2, tj. $1 < \infty$, tada vrh v_2 mijenja svoju trenutnu oznaku u oznaku $(v_1, 1)$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 1

korak 0: $v_1(-,0)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$,

Sada prelazimo na vrh v_3.

Usmjereni grafovi

Definicija digrafa

Izomorfizam digrafova

Šetnje u digrafu

Matrica susjedstva digrafa

Turnir

Tranzitivni turnir

Dipovezani turnir

Rangiranje

Bellman-Fordov algoritam

Opis Bellman-Fordovog algoritma

Bellman-Ford error

Aciklički digraf

Topološko sortiranje

Bellmanov algoritam

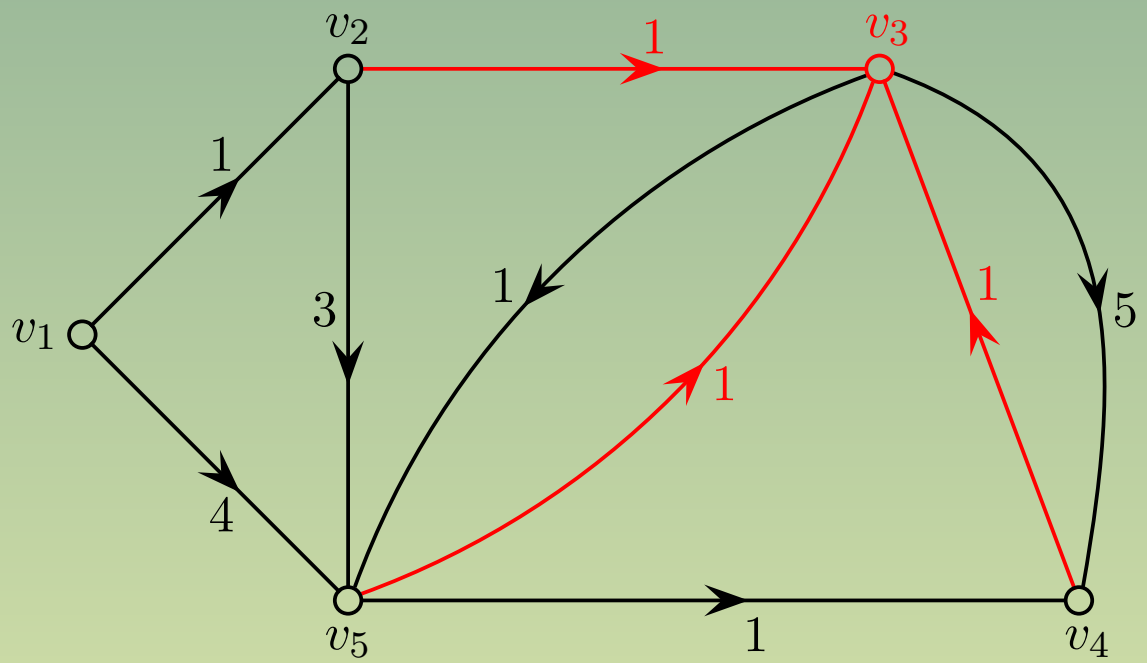
Problem rasporeda – 1. tip

Problem rasporeda – 2. tip

Problem jednosmjernih ulica

Transportne mreže

Ford-Fulkerson



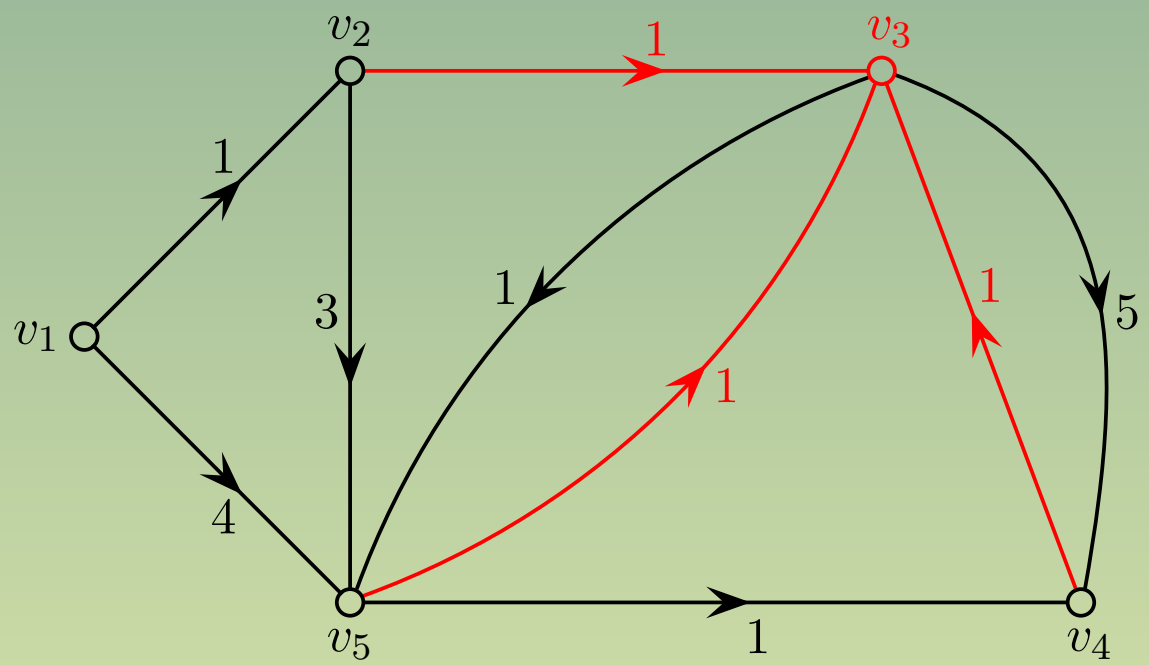
trenutni korak: 1

korak 0: $v_1(-,0)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$,

Sada prelazimo na vrh v_3. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_3. To su ovdje lukovi v_2v_3, v_4v_3 i v_5v_3.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 1

korak 0: $v_1(-,0)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$

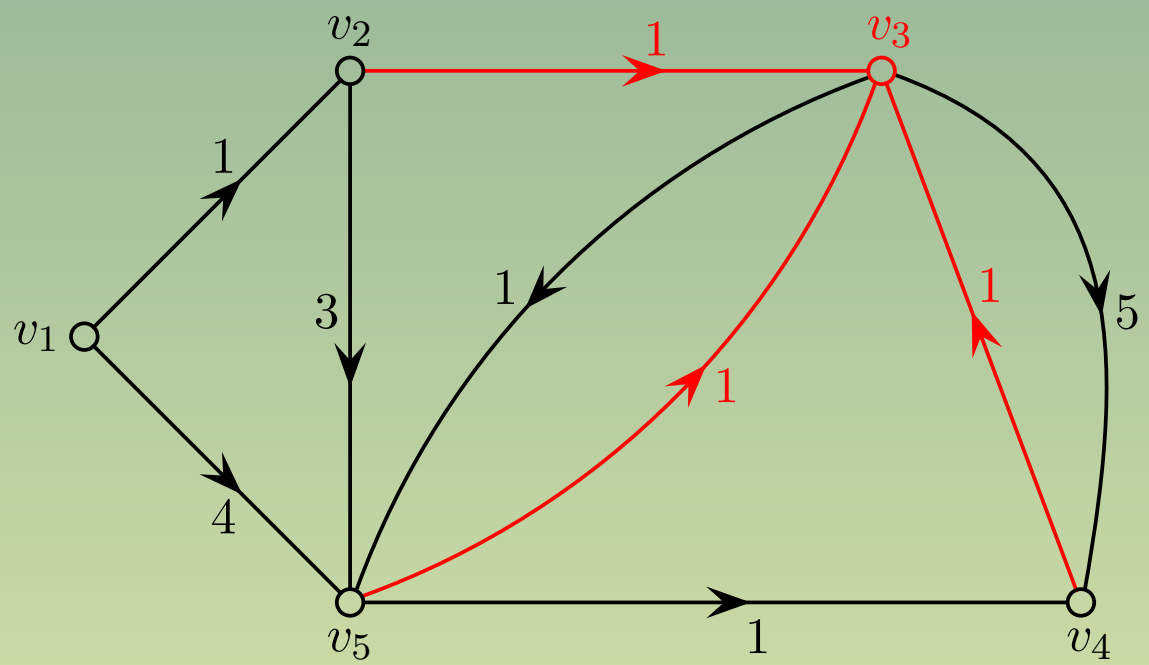
korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$,

Sada prelazimo na vrh v_3. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_3. To su ovdje lukovi v_2v_3, v_4v_3 i v_5v_3. Za svaki od tih lukova računamo

težina luka + druga koordinata oznake početka luka iz koraka 0

i odaberemo najmanju od tih vrijednosti.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 1

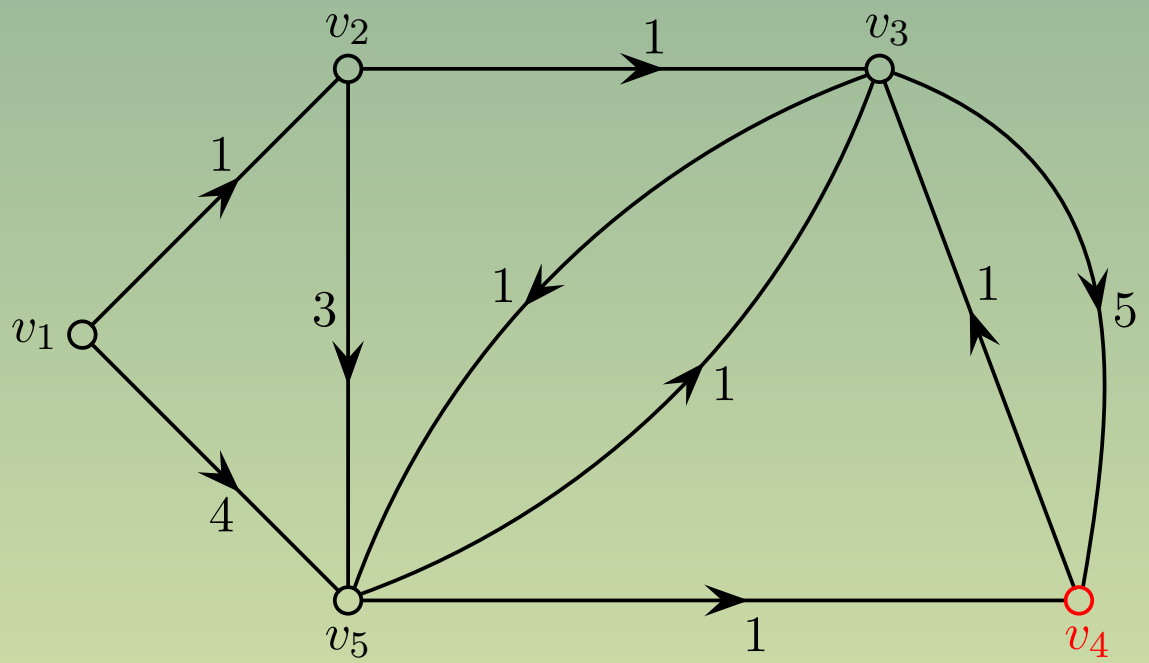
korak 0: $v_1(-,0)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$,

$$\begin{aligned} v_2v_3 &\rightarrow 1+\infty=\infty \\ v_4v_3 &\rightarrow 1+\infty=\infty \\ v_5v_3 &\rightarrow 1+\infty=\infty \end{aligned} \qquad \min\{\infty,\infty,\infty\}=\infty$$

Kako $\min\{\infty,\infty,\infty\}=\infty$ nije manji od trenutne druge koordinate vrha v_3, oznaka vrha v_3 se u ovom koraku ne mijenja.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



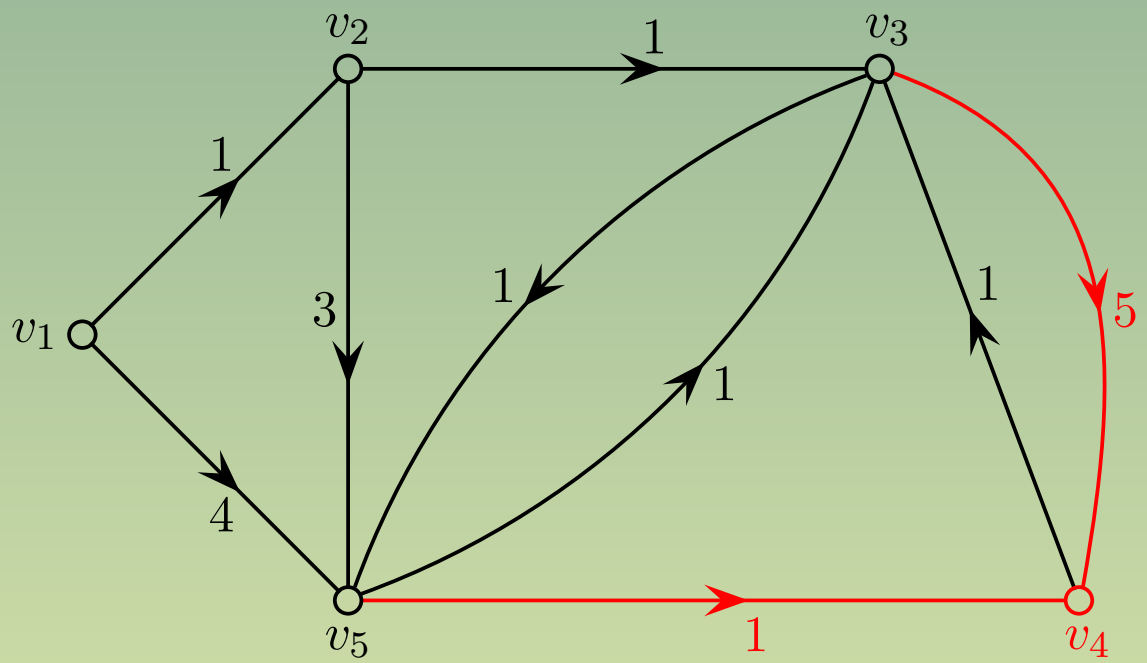
trenutni korak: 1

korak 0: $v_1(-,0)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$,

Sada prelazimo na vrh v_4.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



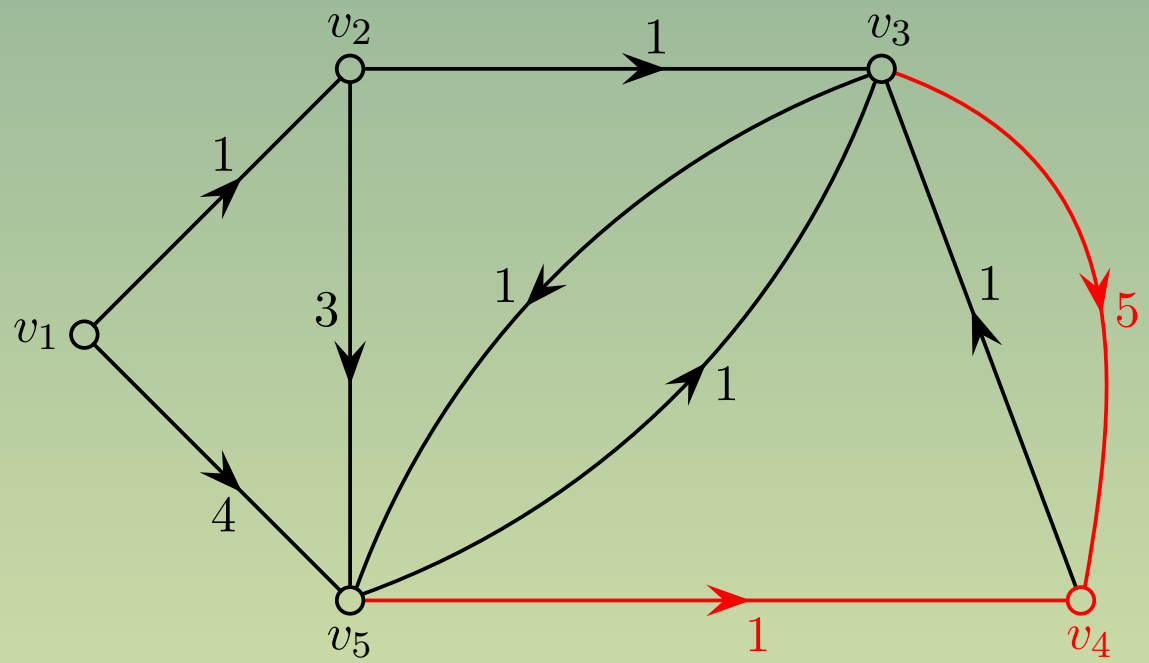
trenutni korak: 1

korak 0: $v_1(-,0)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$,

Sada prelazimo na vrh v_4. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_4. To su ovdje lukovi v_3v_4 i v_5v_4.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 1

korak 0: $v_1(-,0)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$

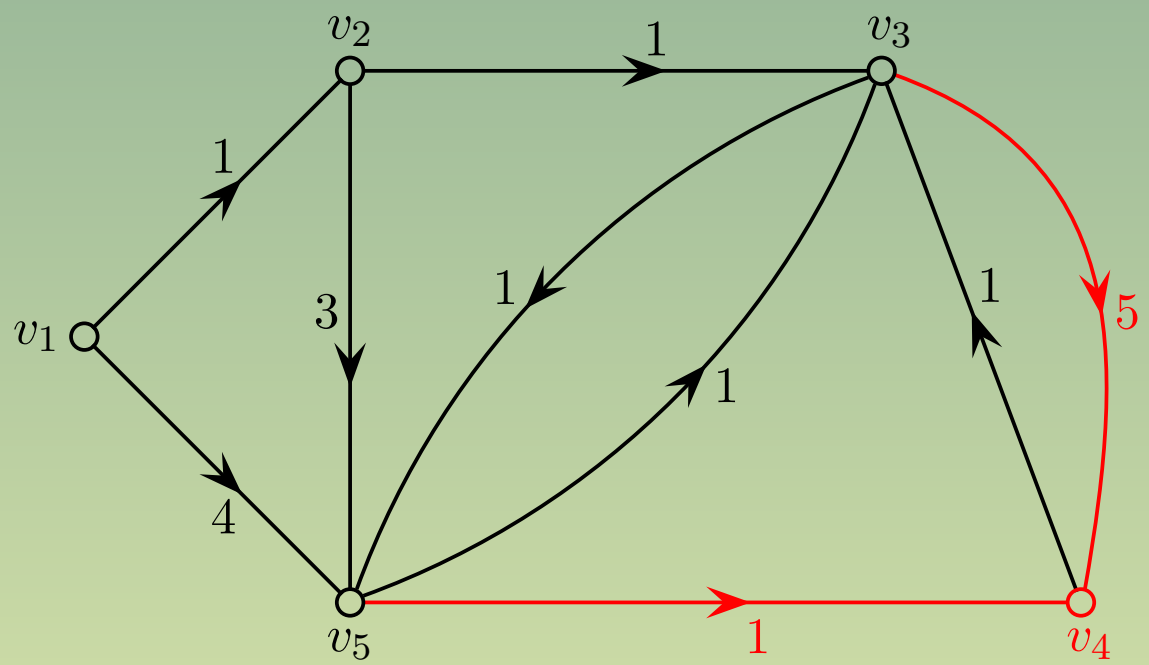
korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$,

Sada prelazimo na vrh v_4. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_4. To su ovdje lukovi v_3v_4 i v_5v_4. Za svaki od tih lukova računamo

težina luka + druga koordinata oznake početka luka iz koraka 0

i odaberemo najmanju od tih vrijednosti.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 1

korak 0: $v_1(-,0)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$

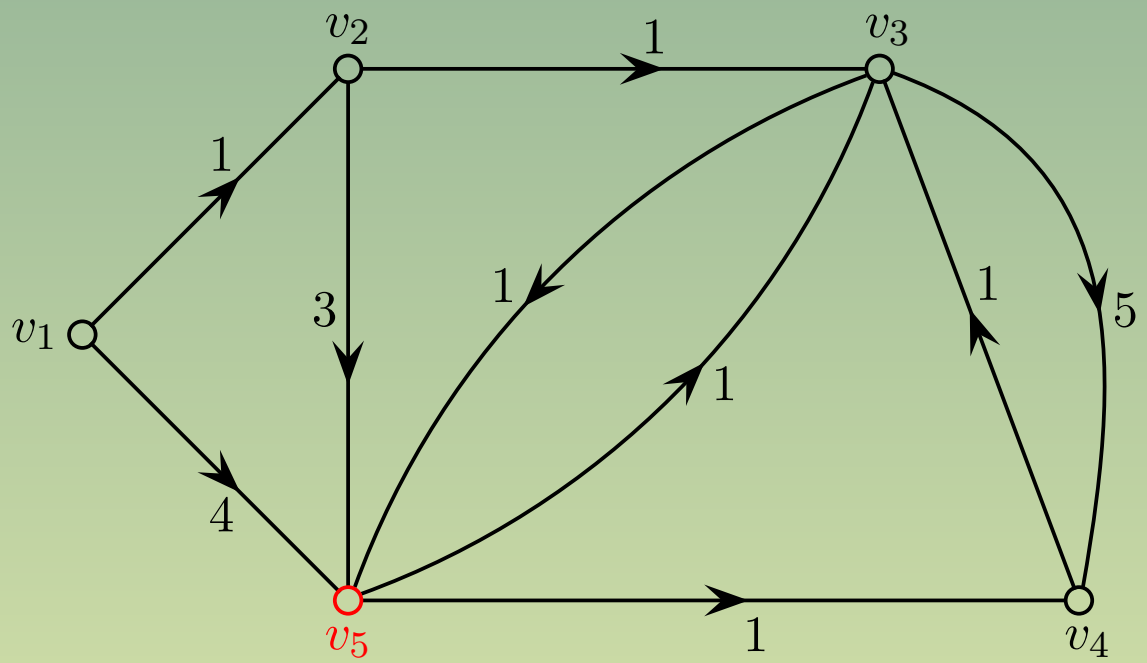
korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$,

$$v_3v_4 \quad \rightarrow \quad 5+\infty=\infty$$
$$v_5v_4 \quad \rightarrow \quad 1+\infty=\infty$$

$$\min\{\infty,\infty\}=\infty$$

Kako $\min\{\infty,\infty\}=\infty$ nije manji od trenutne druge koordinate vrha v_4, oznaka vrha v_4 se u ovom koraku ne mijenja.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



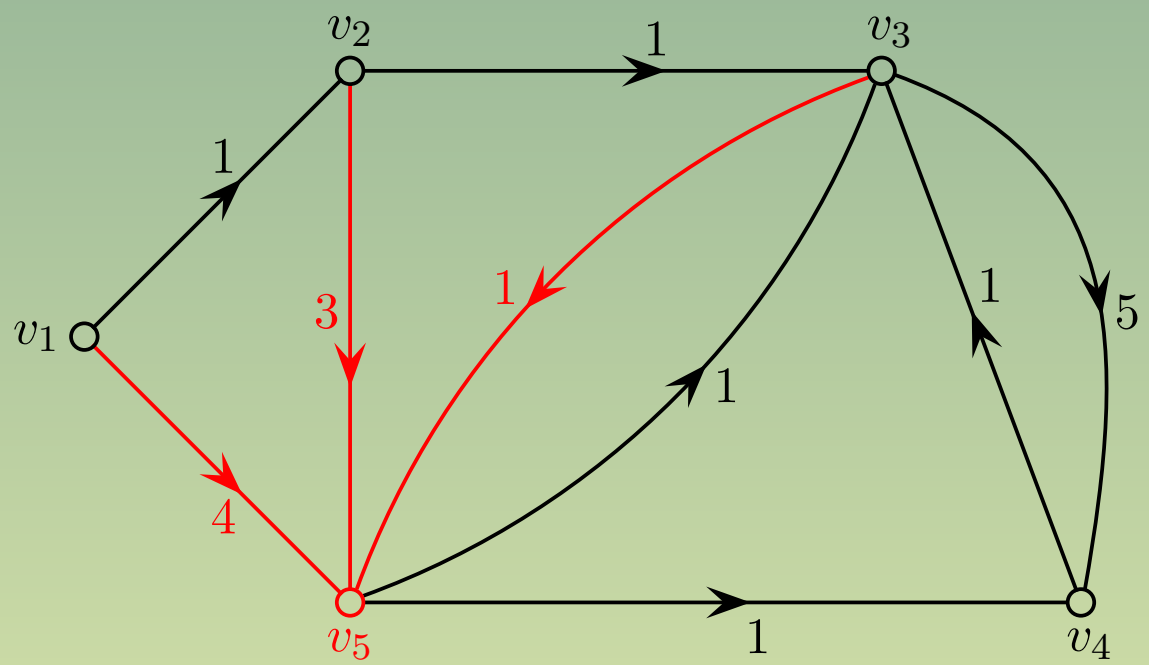
trenutni korak: 1

korak 0: $v_1(-,0)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$,

Sada prelazimo na vrh v_5.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



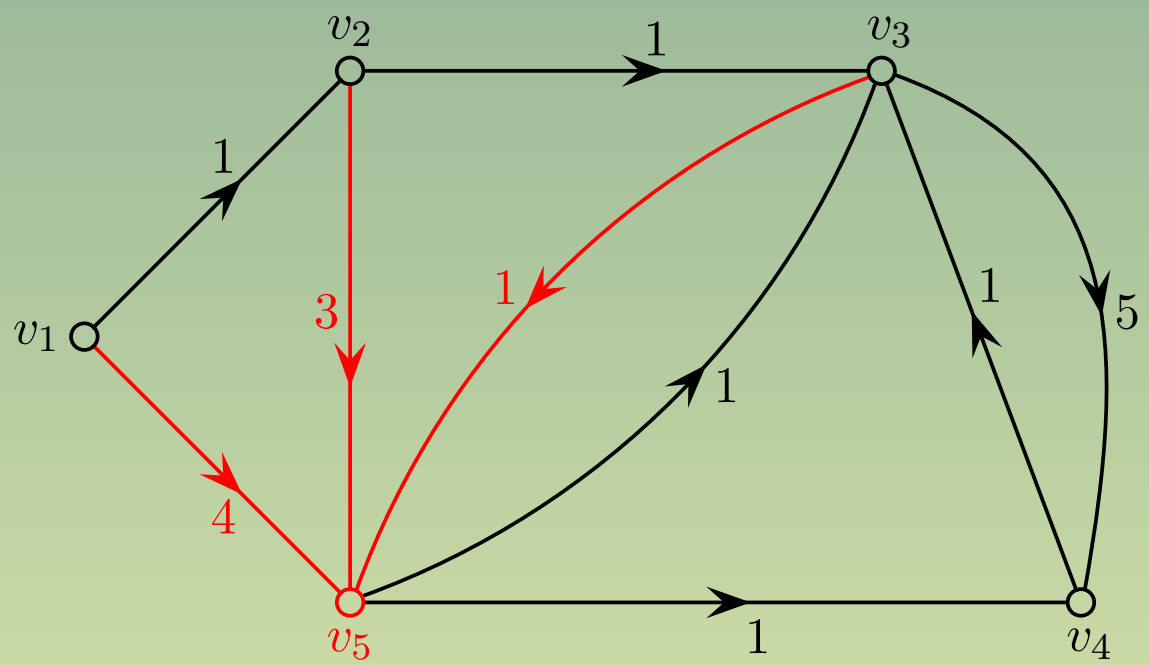
trenutni korak: 1

korak 0: $v_1(-,0)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$,

Sada prelazimo na vrh v_5. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_5. To su ovdje lukovi v_1v_5, v_2v_5 i v_3v_5.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 1

korak 0: $v_1(-,0)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$

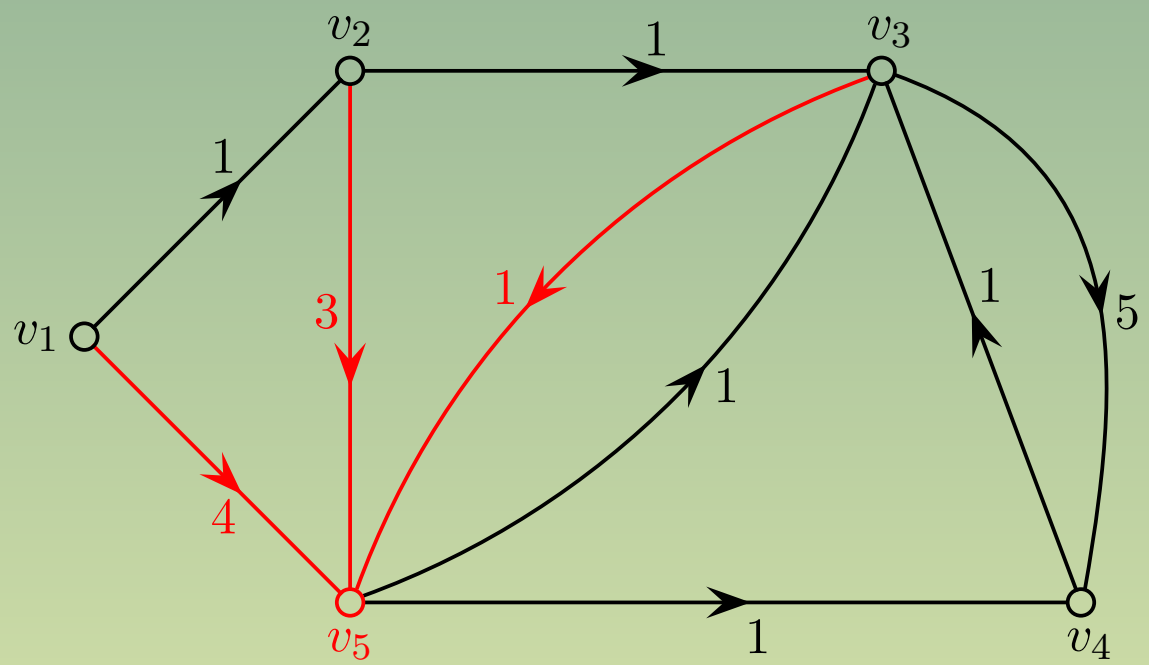
korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$,

Sada prelazimo na vrh v_5. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_5. To su ovdje lukovi v_1v_5, v_2v_5 i v_3v_5. Za svaki od tih lukova računamo

težina luka + druga koordinata oznake početka luka iz koraka 0

i odaberemo najmanju od tih vrijednosti.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 1

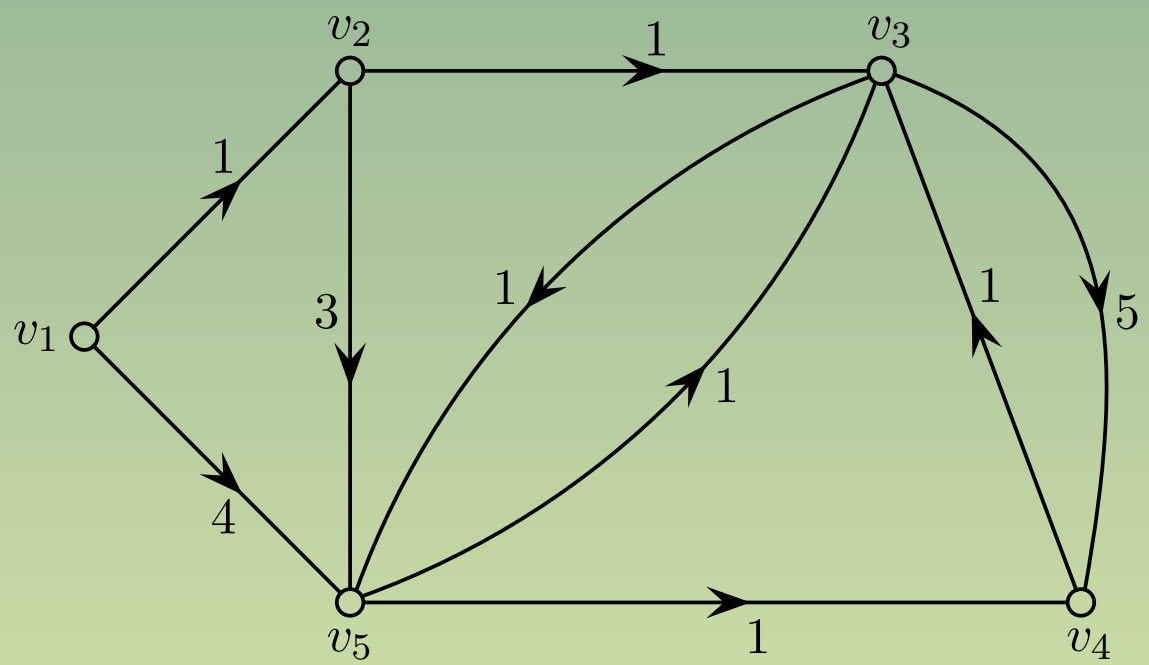
korak 0: $v_1(-,0)$, $v_2(-,\infty)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(-,\infty)$

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

$$\begin{aligned} v_1v_5 &\rightarrow 4+0=4 \\ v_2v_5 &\rightarrow 3+\infty=\infty \qquad \min\{4,\infty,\infty\}=4 \\ v_3v_5 &\rightarrow 1+\infty=\infty \end{aligned}$$

Kako je $\min\{4,\infty,\infty\}=4$ manji od trenutne druge koordinate vrha v_5, vrh v_5 dobiva novu oznaku $(v_1,4)$.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



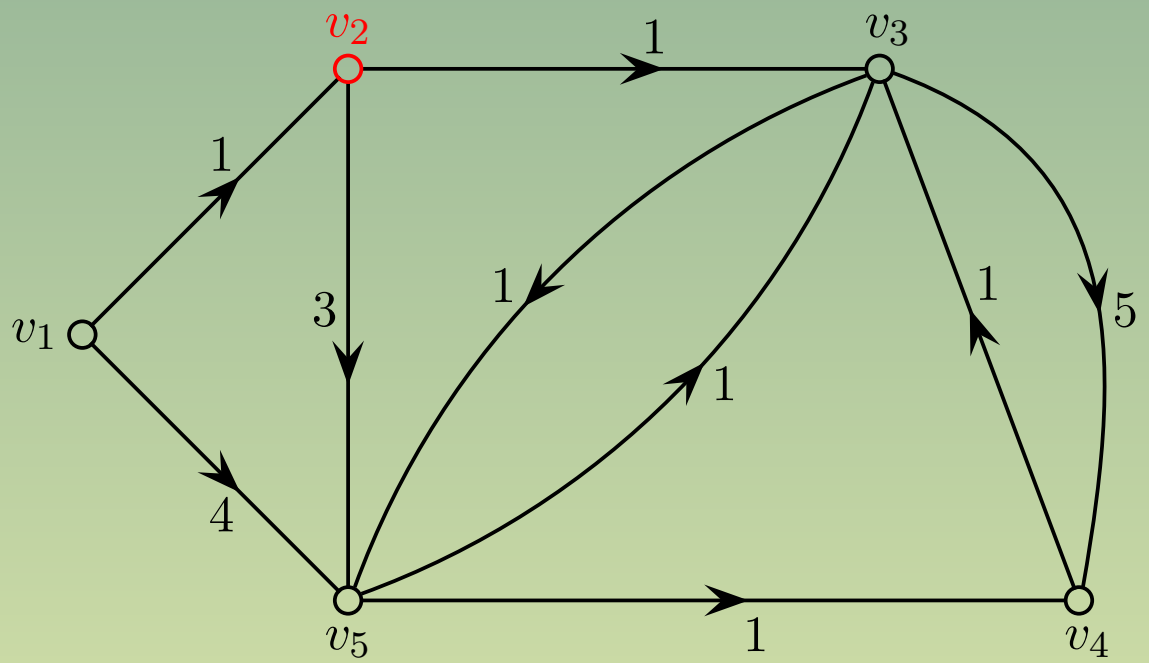
trenutni korak: 2

korak 1: $v_1(-, 0)$, $v_2(v_1, 1)$, $v_3(-, \infty)$, $v_4(-, \infty)$, $v_5(v_1, 4)$

korak 2: $v_1(-, 0)$,

U drugom koraku moramo provjeriti oznake svih vrhova v_2, v_3, v_4, v_5 i po potrebi ih promijeniti. Stoga krenimo redom.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 2

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

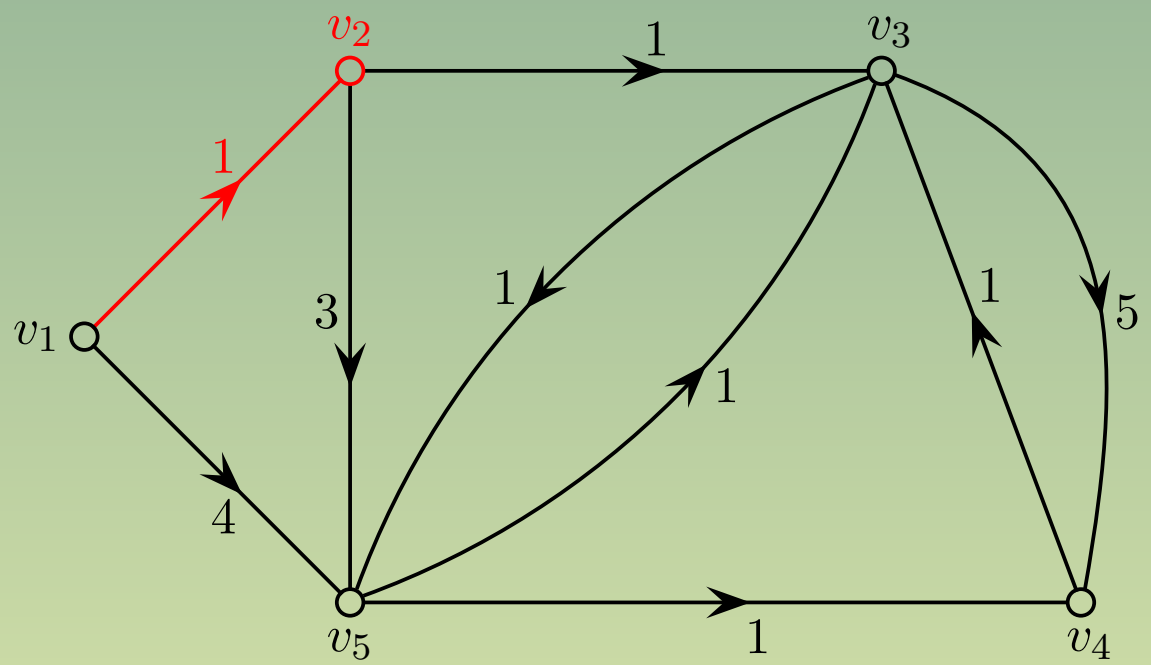
korak 2: $v_1(-,0)$,

Pogledajmo vrh v_2

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



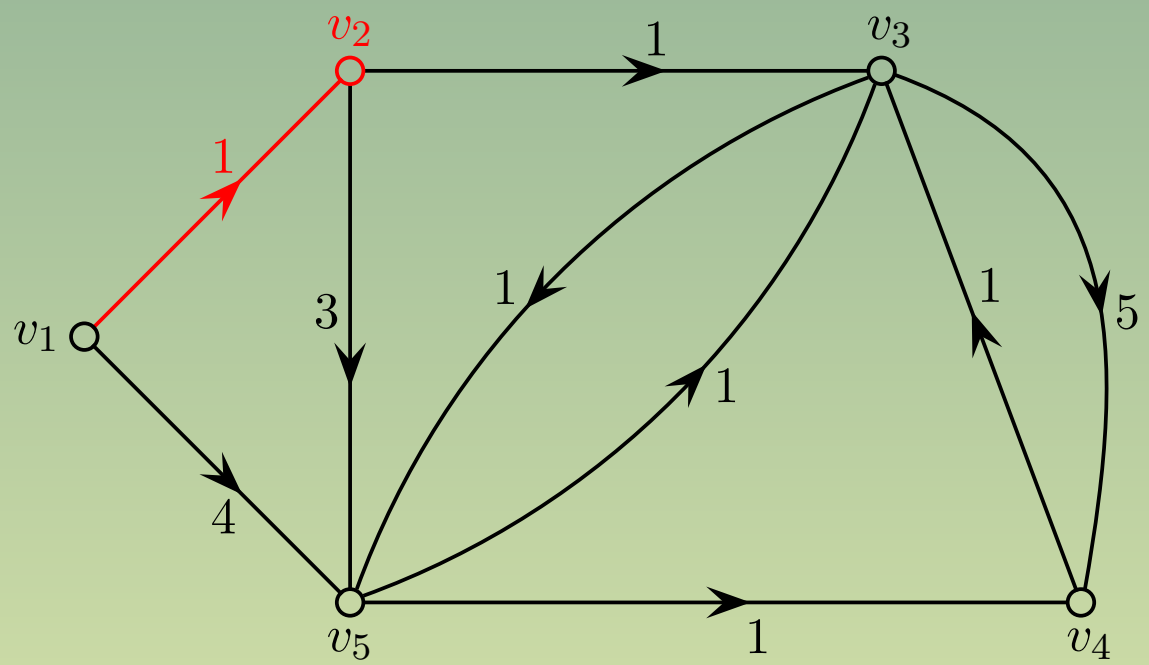
trenutni korak: 2

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

korak 2: $v_1(-,0)$,

Pogledajmo vrh v_2 i sve lukove koji ulaze u njega. To je ovdje jedino luk v_1v_2.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



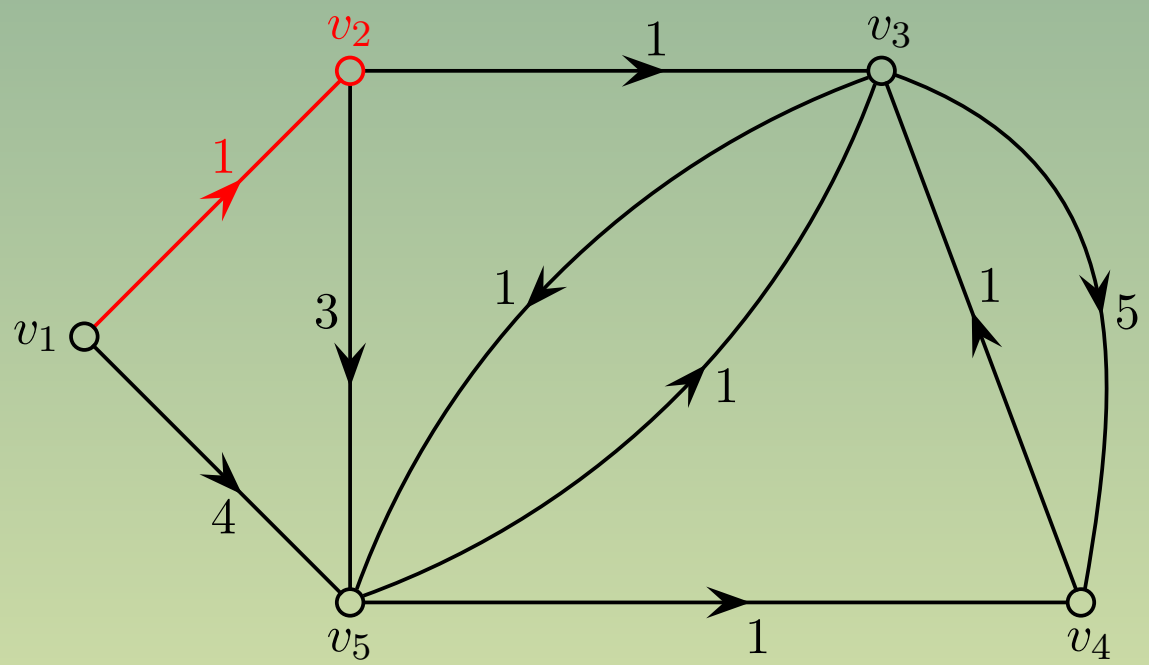
trenutni korak: 2

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

korak 2: $v_1(-,0)$,

Pogledajmo vrh v_2 i sve lukove koji ulaze u njega. To je ovdje jedino luk v_1v_2. Kada težinu luka v_1v_2 zbrojimo s drugom koordinatom oznake njegovog početka iz koraka 1 (s drugom koordinatom oznake vrha v_1 iz koraka 1) dobivamo vrijednost $1+0=1$.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



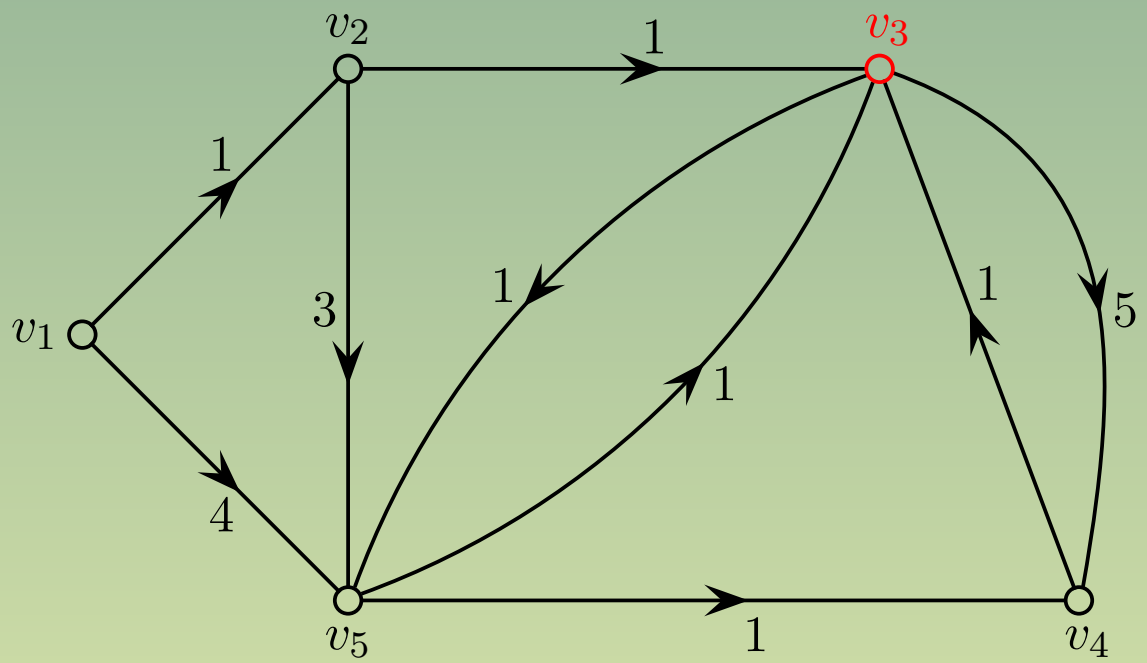
trenutni korak: 2

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$,

Kako ta vrijednost 1 nije manja od trenutne druge koordinate oznake vrha v_2, vrh v_2 u ovom koraku ne mijenja svoju oznaku.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



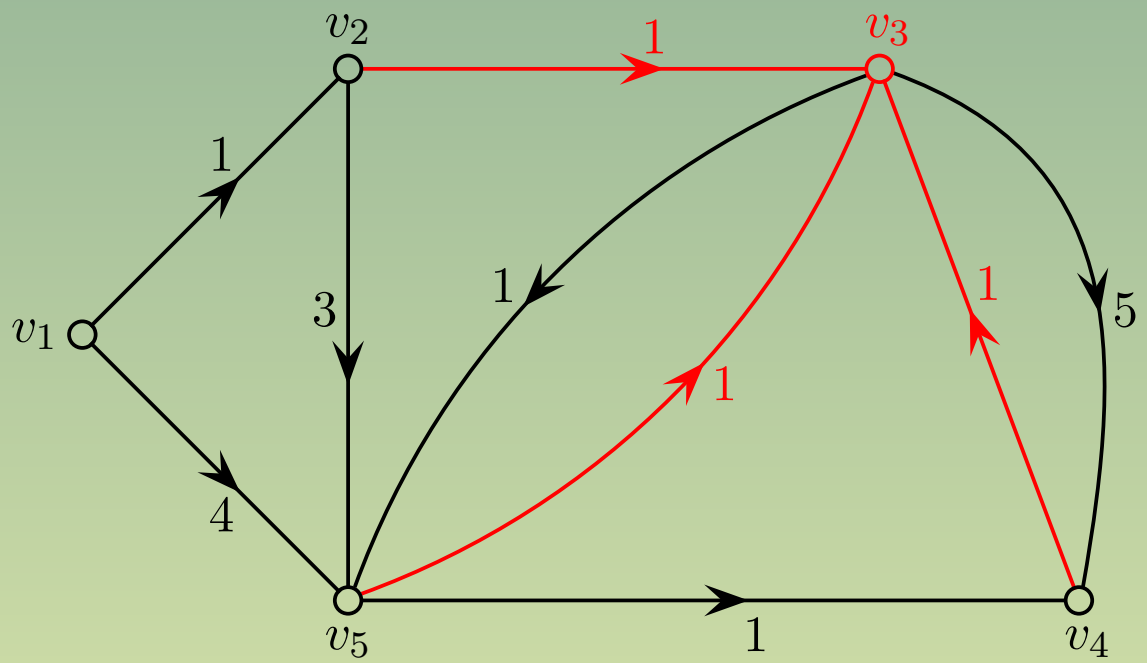
trenutni korak: 2

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$,

Sada prelazimo na vrh v_3.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



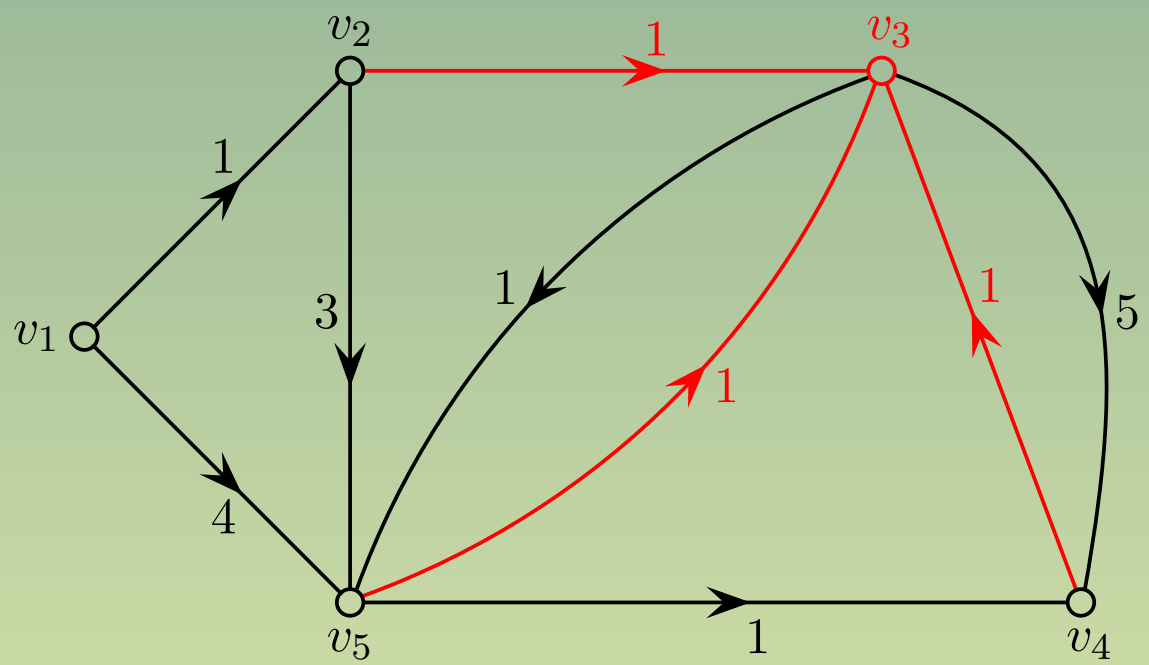
trenutni korak: 2

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$,

Sada prelazimo na vrh v_3. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_3. To su ovdje lukovi v_2v_3, v_4v_3 i v_5v_3.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 2

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

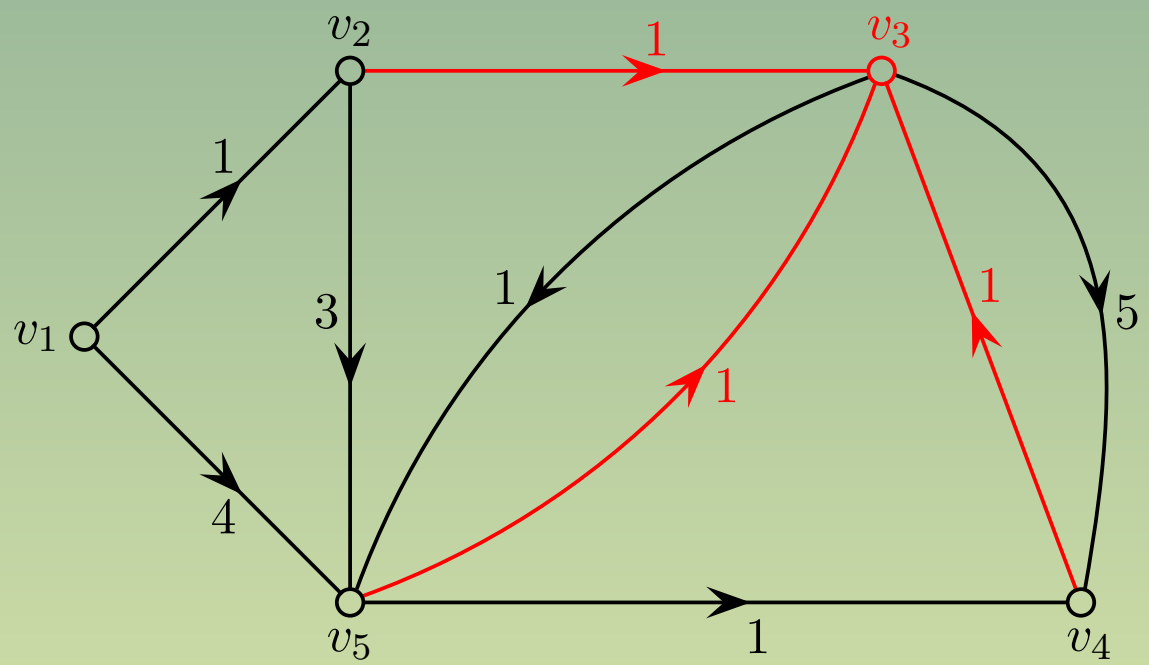
korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$,

Sada prelazimo na vrh v_3. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_3. To su ovdje lukovi v_2v_3, v_4v_3 i v_5v_3. Za svaki od tih lukova računamo

težina luka + druga koordinata oznake početka luka iz koraka 1

i odaberemo najmanju od tih vrijednosti.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 2

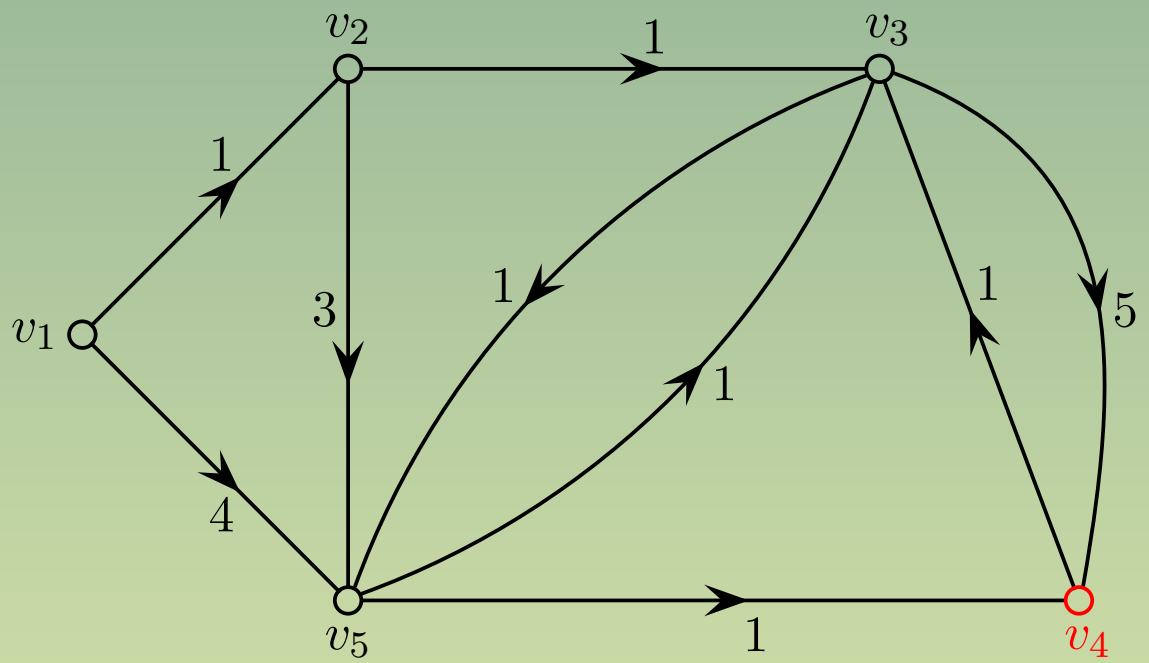
korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$,

$$\begin{aligned} v_2v_3 &\rightarrow 1+1=2 \\ v_4v_3 &\rightarrow 1+\infty=\infty \qquad \min\{2,\infty,5\}=2 \\ v_5v_3 &\rightarrow 1+4=5 \end{aligned}$$

Kako je $\min\{2,\infty,5\}=2$ manji od trenutne druge koordinate vrha v_3, vrh v_3 dobiva novu oznaku $(v_2,2)$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 2

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$,

Sada prelazimo na vrh v_4.

Usmjereni grafovi

Definicija digrafa

Izomorfizam digrafova

Šetnje u digrafu

Matrica susjedstva digrafa

Turnir

Tranzitivni turnir

Dipovezani turnir

Rangiranje

Bellman-Fordov algoritam

Opis Bellman-Fordovog algoritma

Bellman-Ford error

Aciklički digraf

Topološko sortiranje

Bellmanov algoritam

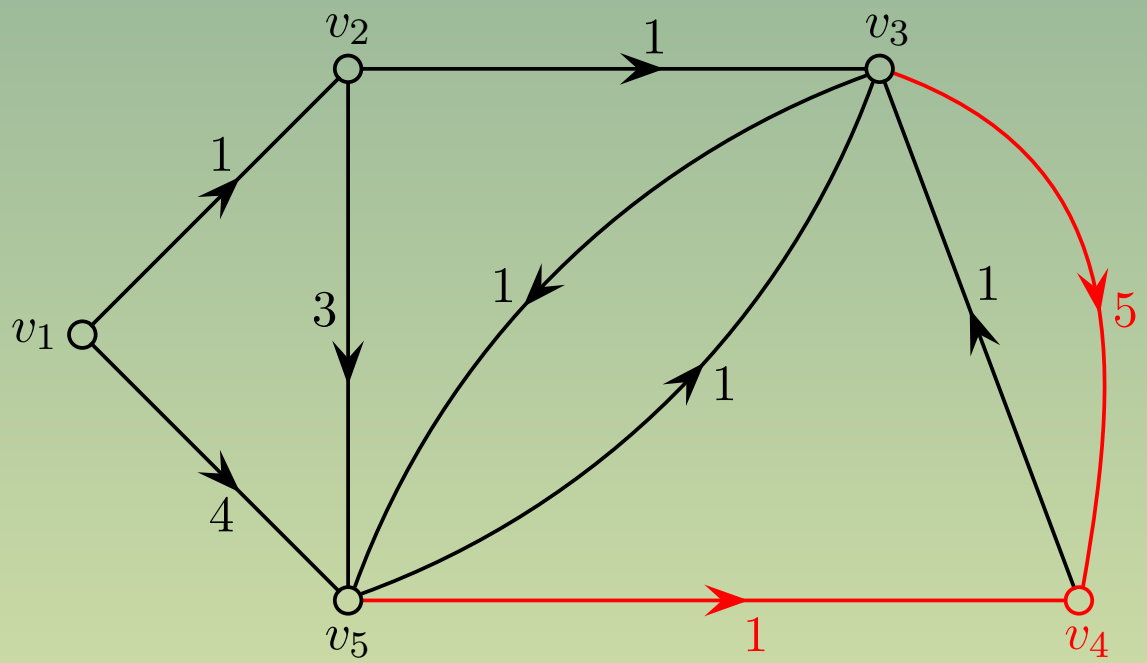
Problem rasporeda – 1. tip

Problem rasporeda – 2. tip

Problem jednosmjernih ulica

Transportne mreže

Ford-Fulkerson



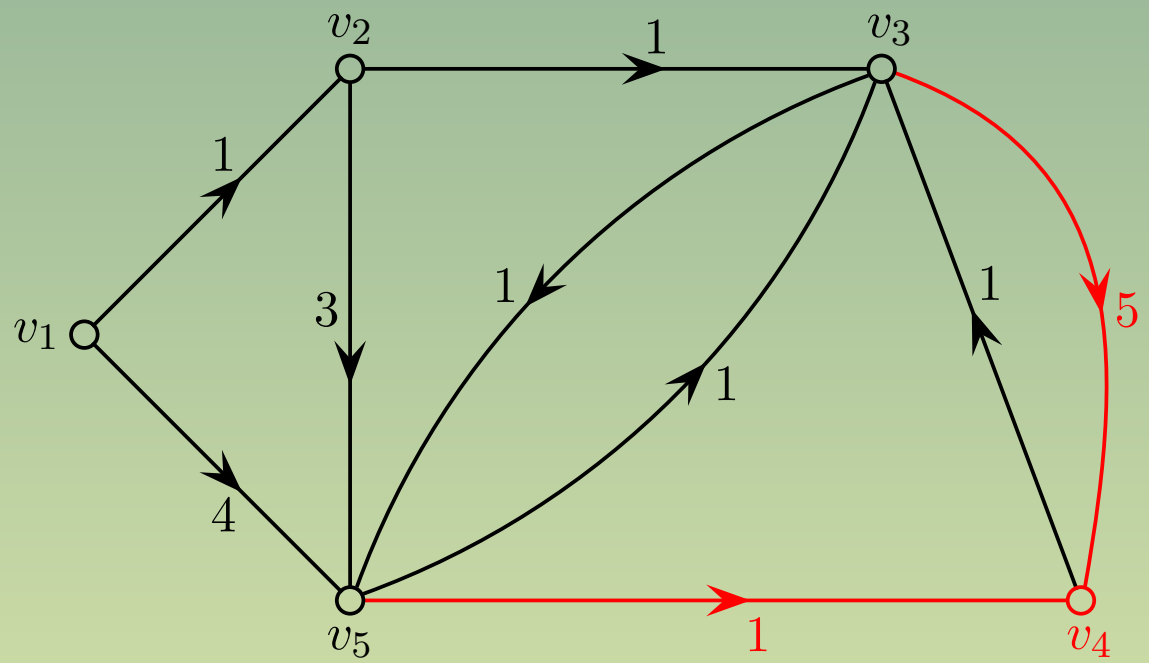
trenutni korak: 2

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$,

Sada prelazimo na vrh v_4. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_4. To su ovdje lukovi v_3v_4 i v_5v_4.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 2

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

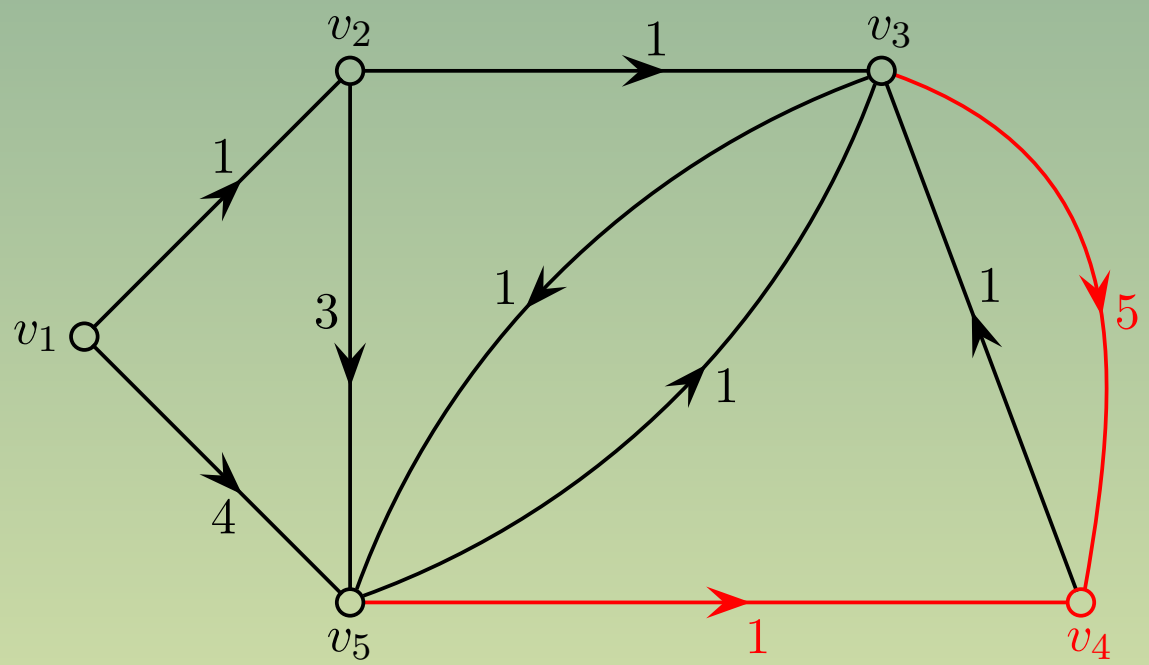
korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$,

Sada prelazimo na vrh v_4. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_4. To su ovdje lukovi v_3v_4 i v_5v_4. Za svaki od tih lukova računamo

težina luka + druga koordinata oznake početka luka iz koraka 1

i odaberemo najmanju od tih vrijednosti.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 2

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

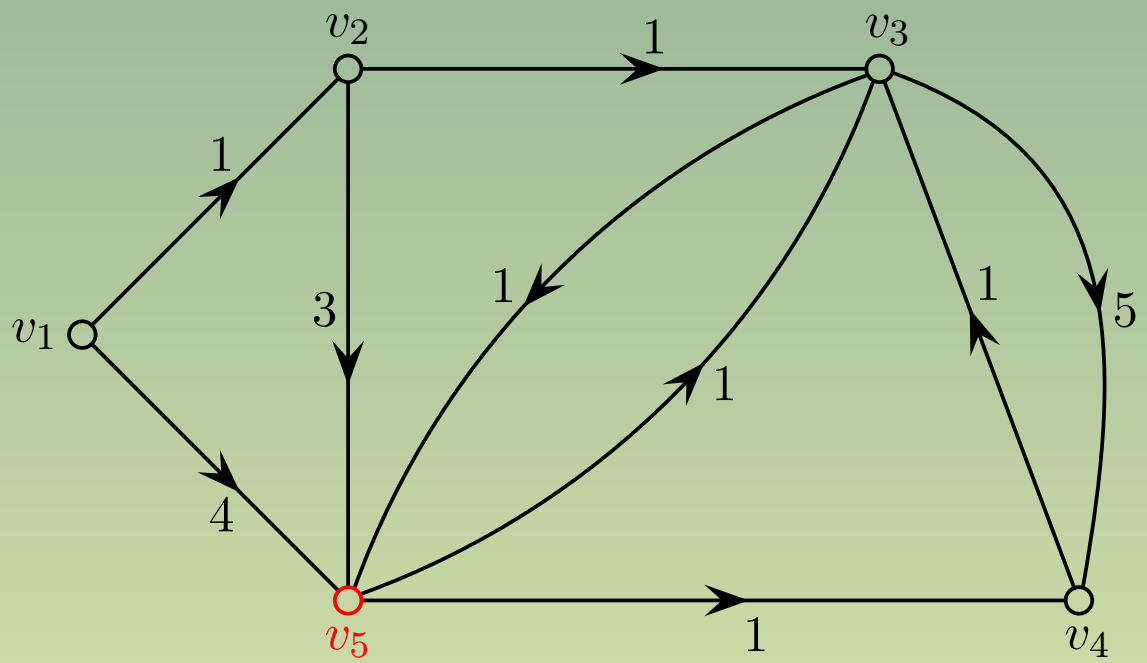
korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$,

$$v_3v_4 \quad \rightarrow \quad 5+\infty=\infty$$
$$v_5v_4 \quad \rightarrow \quad 1+4=5$$

$$\min\{\infty,5\}=5$$

Kako je $\min\{\infty,5\}=5$ manji od trenutne druge koordinate vrha v_4, vrh v_4 dobiva novu oznaku $(v_5,5)$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 2

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$,

Sada prelazimo na vrh v_5.

Usmjereni grafovi

Definicija digrafa

Izomorfizam digrafova

Šetnje u digrafu

Matrica susjedstva digrafa

Turnir

Tranzitivni turnir

Dipovezani turnir

Rangiranje

Bellman-Fordov algoritam

Opis Bellman-Fordovog algoritma

Bellman-Ford error

Aciklički digraf

Topološko sortiranje

Bellmanov algoritam

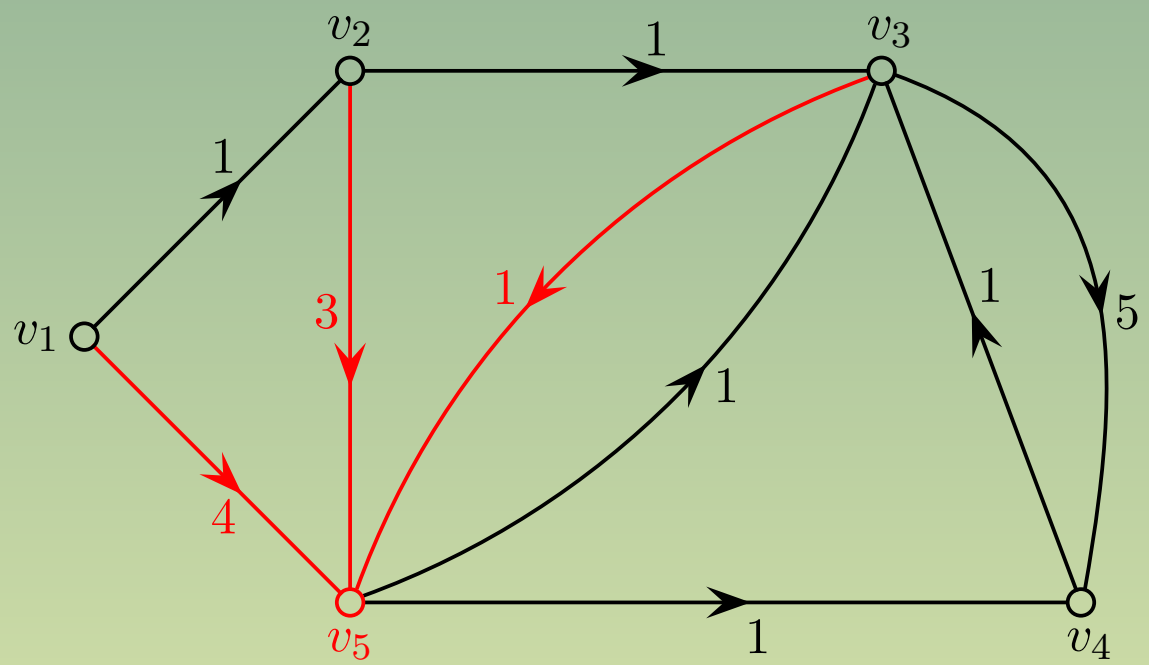
Problem rasporeda – 1. tip

Problem rasporeda – 2. tip

Problem jednosmjernih ulica

Transportne mreže

Ford-Fulkerson



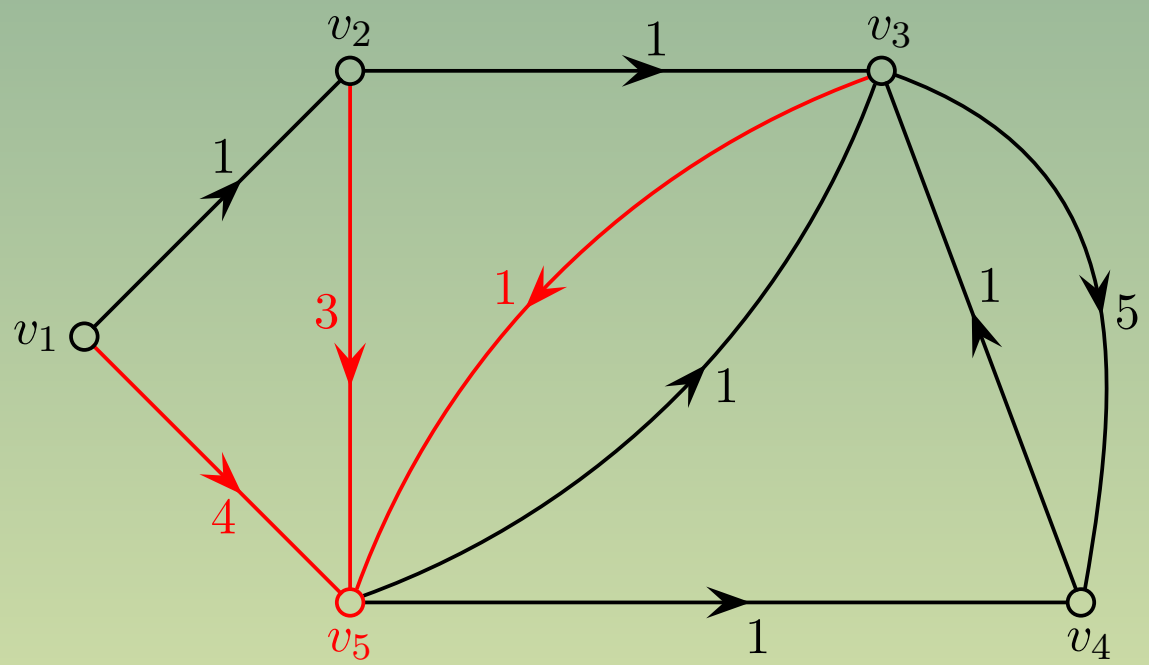
trenutni korak: 2

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$,

Sada prelazimo na vrh v_5. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_5. To su ovdje lukovi v_1v_5, v_2v_5 i v_3v_5.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 2

korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

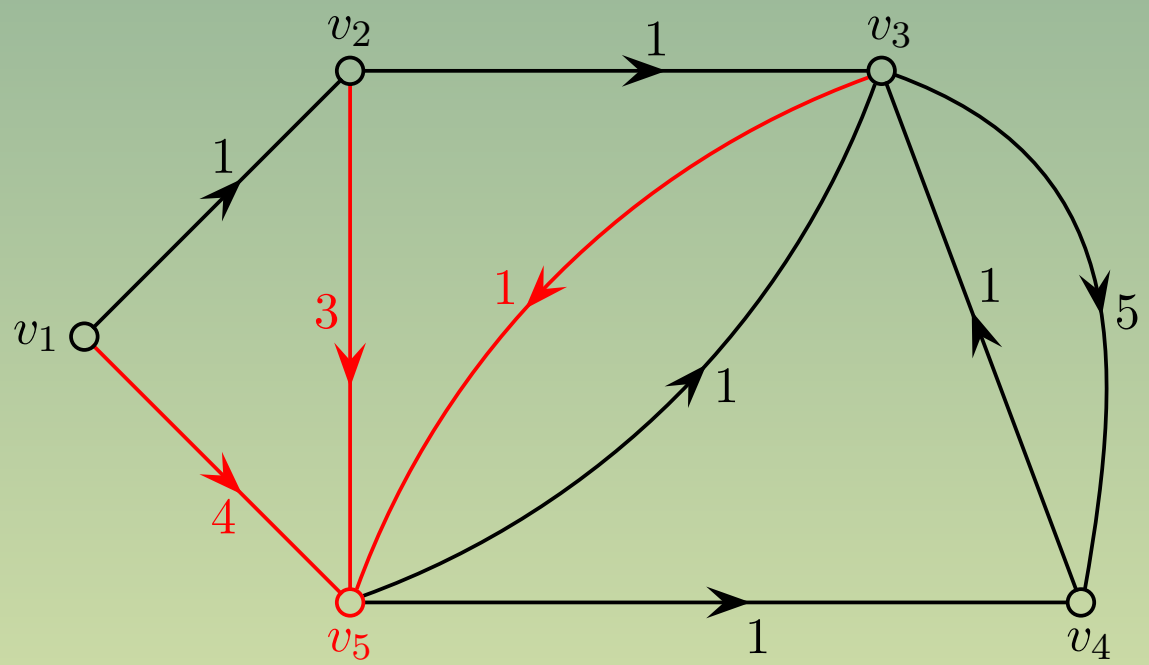
korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$,

Sada prelazimo na vrh v_5. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_5. To su ovdje lukovi v_1v_5, v_2v_5 i v_3v_5. Za svaki od tih lukova računamo

težina luka + druga koordinata oznake početka luka iz koraka 1

i odaberemo najmanju od tih vrijednosti.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 2

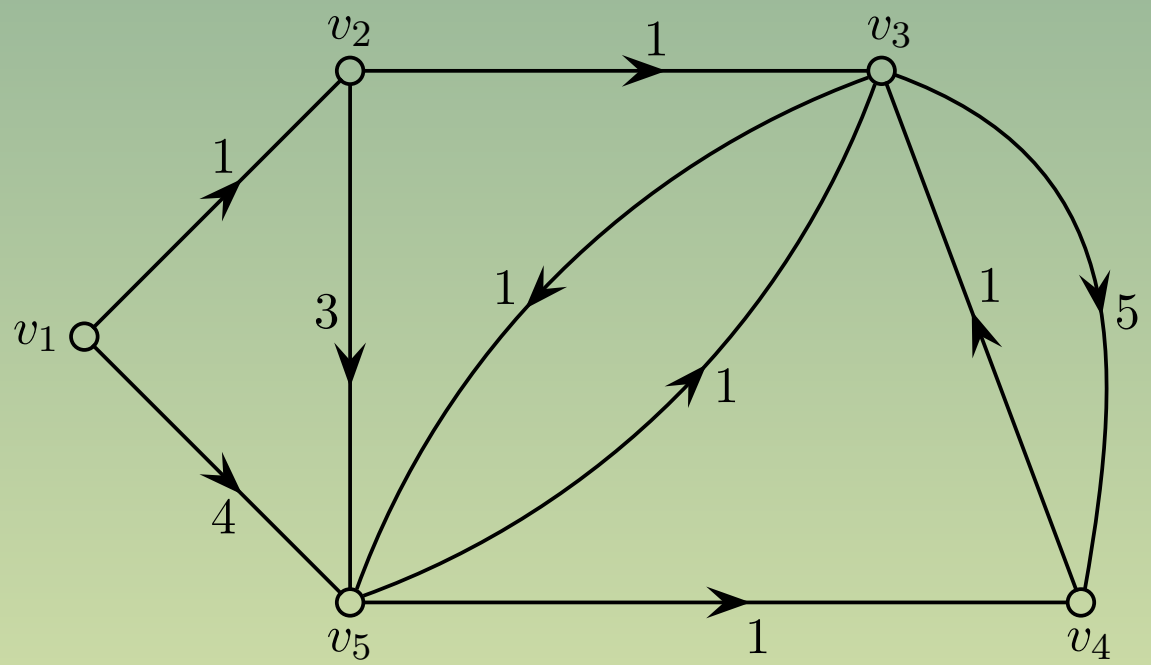
korak 1: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(-,\infty)$, $v_4(-,\infty)$, $v_5(v_1,4)$

korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_1,4)$

$$\begin{array}{lcll} v_1v_5 & \rightarrow & 4+0=4 & \\ v_2v_5 & \rightarrow & 3+1=4 & \min\{4,4,\infty\}=4 \\ v_3v_5 & \rightarrow & 1+\infty=\infty & \end{array}$$

Kako $\min\{4,4,\infty\}=4$ nije manji od trenutne druge koordinate vrha v_5, vrh v_5 ne mijenja svoju oznaku.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



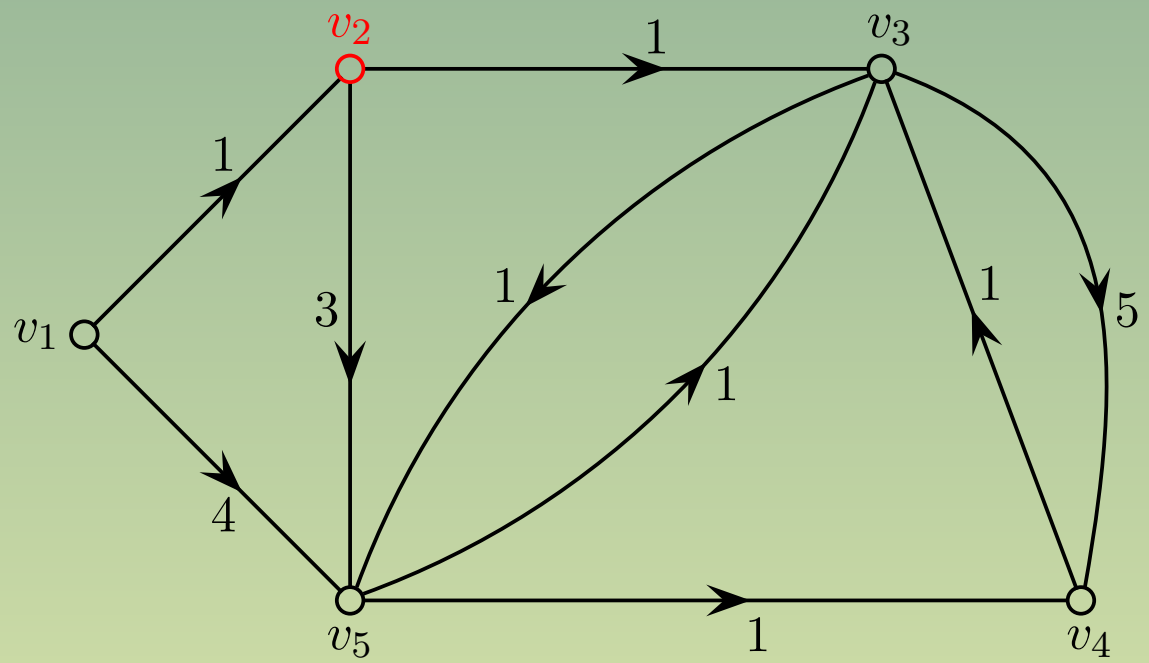
trenutni korak: 3

korak 2: $v_1(-, 0)$, $v_2(v_1, 1)$, $v_3(v_2, 2)$, $v_4(v_5, 5)$, $v_5(v_1, 4)$

korak 3: $v_1(-, 0)$,

U trećem koraku moramo provjeriti oznake svih vrhova v_2, v_3, v_4, v_5 i po potrebi ih promijeniti. Stoga krenimo redom.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 3

korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_1,4)$

korak 3: $v_1(-,0)$,

Pogledajmo vrh v_2

Usmjereni grafovi

Definicija digrafa

Izomorfizam digrafova

Šetnje u digrafu

Matrica susjedstva digrafa

Turnir

Tranzitivni turnir

Dipovezani turnir

Rangiranje

Bellman-Fordov algoritam

Opis Bellman-Fordovog algoritma

Bellman-Ford error

Aciklički digraf

Topološko sortiranje

Bellmanov algoritam

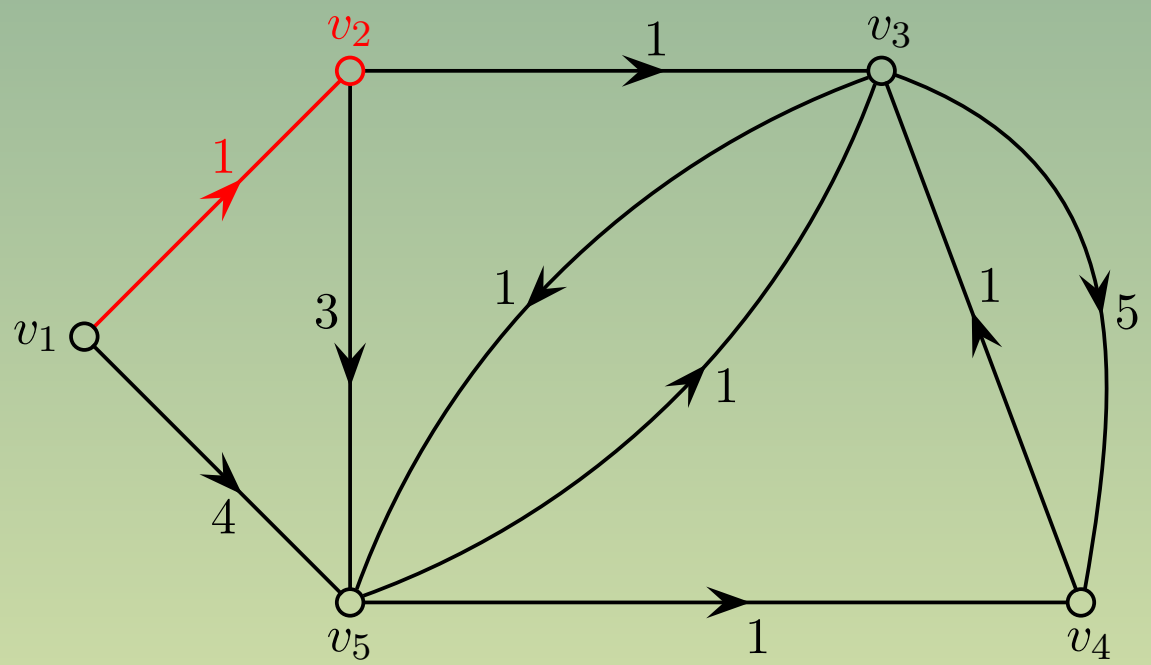
Problem rasporeda – 1. tip

Problem rasporeda – 2. tip

Problem jednosmjernih ulica

Transportne mreže

Ford-Fulkerson



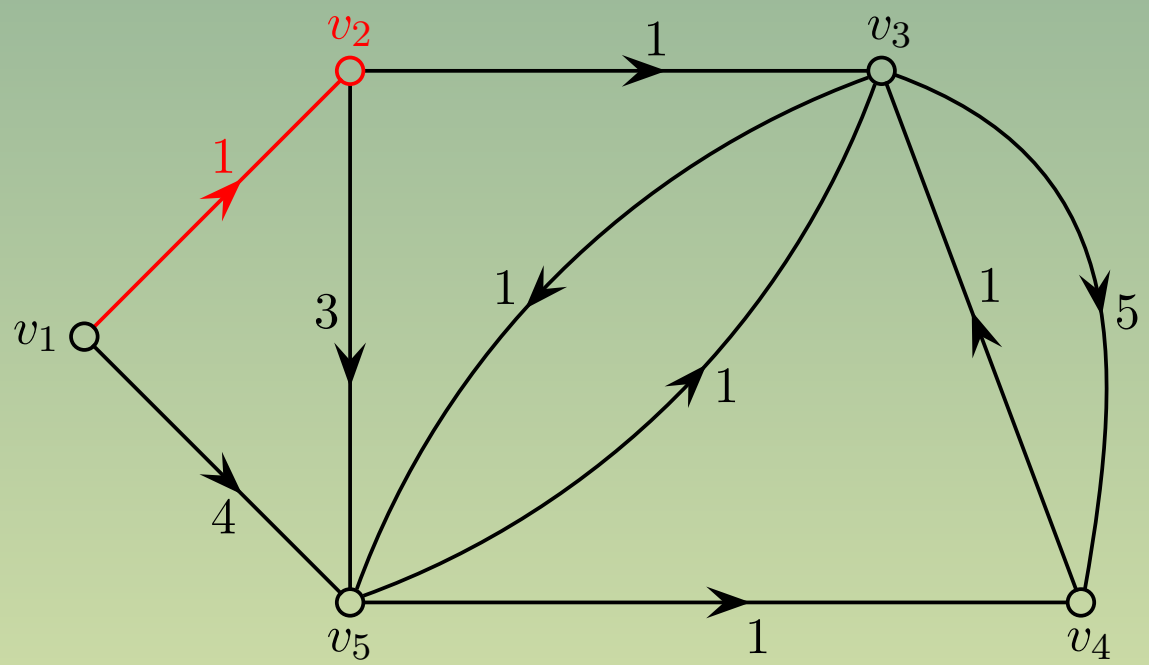
trenutni korak: 3

korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_1,4)$

korak 3: $v_1(-,0)$,

Pogledajmo vrh v_2 i sve lukove koji ulaze u njega. To je ovdje jedino luk v_1v_2.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



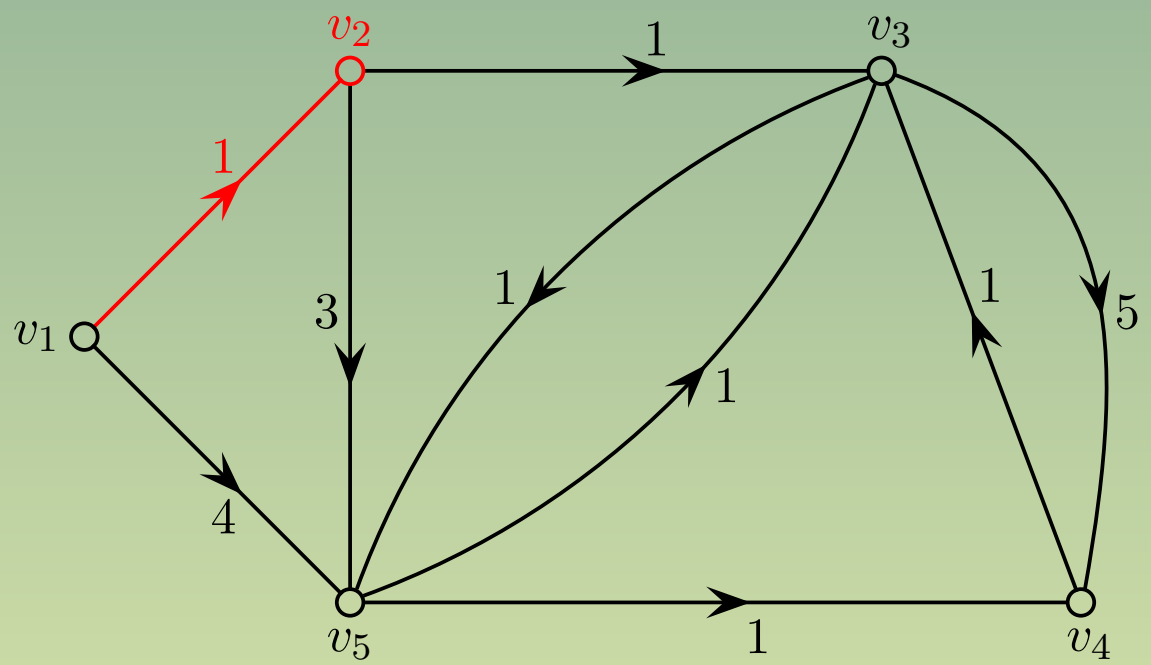
trenutni korak: 3

korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_1,4)$

korak 3: $v_1(-,0)$,

Pogledajmo vrh v_2 i sve lukove koji ulaze u njega. To je ovdje jedino luk v_1v_2. Kada težinu luka v_1v_2 zbrojimo s drugom koordinatom oznake njegovog početka iz koraka 2 (s drugom koordinatom oznake vrha v_1 iz koraka 2) dobivamo vrijednost $1+0=1$.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



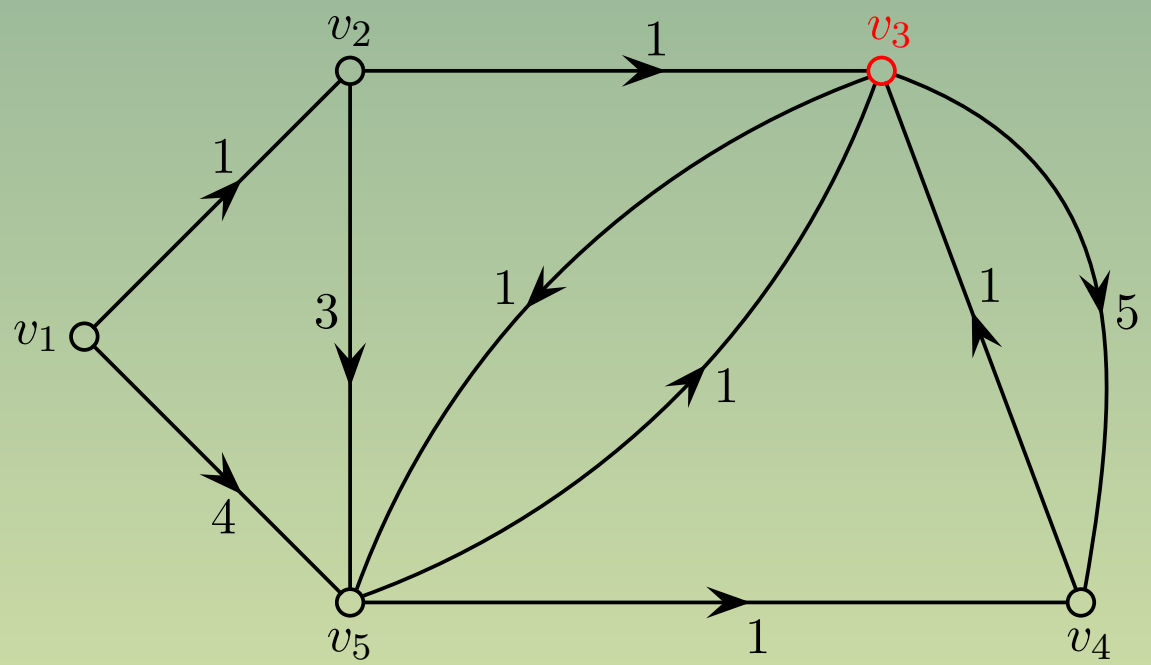
trenutni korak: 3

korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_1,4)$

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$,

Kako ta vrijednost 1 nije manja od trenutne druge koordinate oznake vrha v_2, vrh v_2 u ovom koraku ne mijenja svoju oznaku.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 3

korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_1,4)$

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$,

Sada prelazimo na vrh v_3.

Usmjereni grafovi

Definicija digrafa

Izomorfizam digrafova

Šetnje u digrafu

Matrica susjedstva digrafa

Turnir

Tranzitivni turnir

Dipovezani turnir

Rangiranje

Bellman-Fordov algoritam

Opis Bellman-Fordovog algoritma

Bellman-Ford error

Aciklički digraf

Topološko sortiranje

Bellmanov algoritam

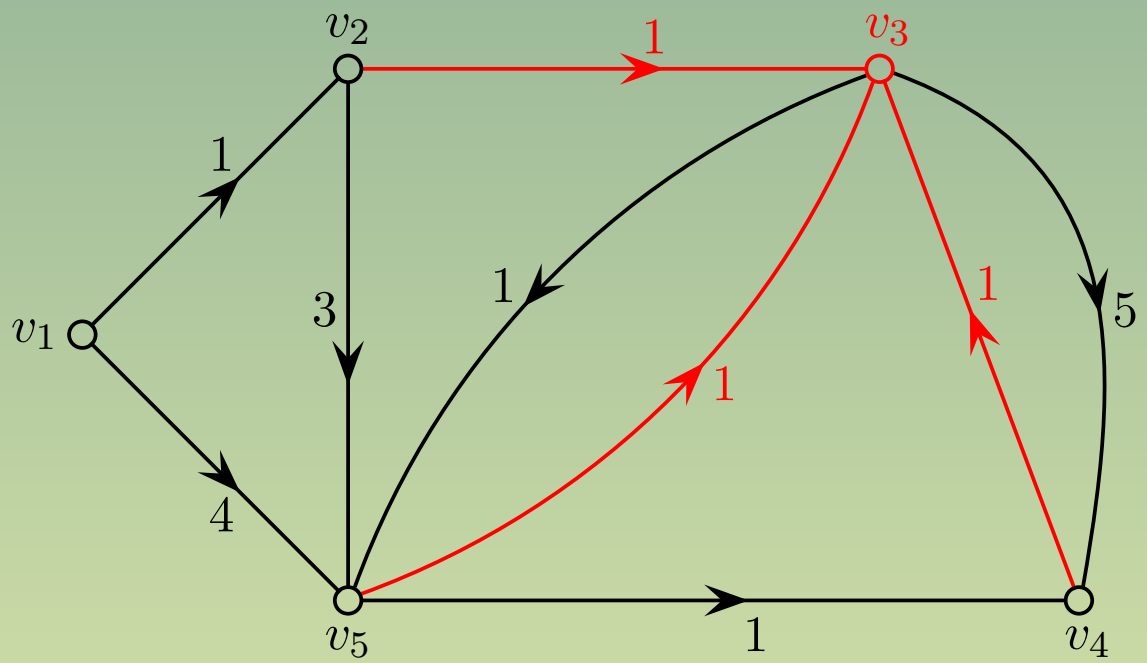
Problem rasporeda – 1. tip

Problem rasporeda – 2. tip

Problem jednosmjernih ulica

Transportne mreže

Ford-Fulkerson



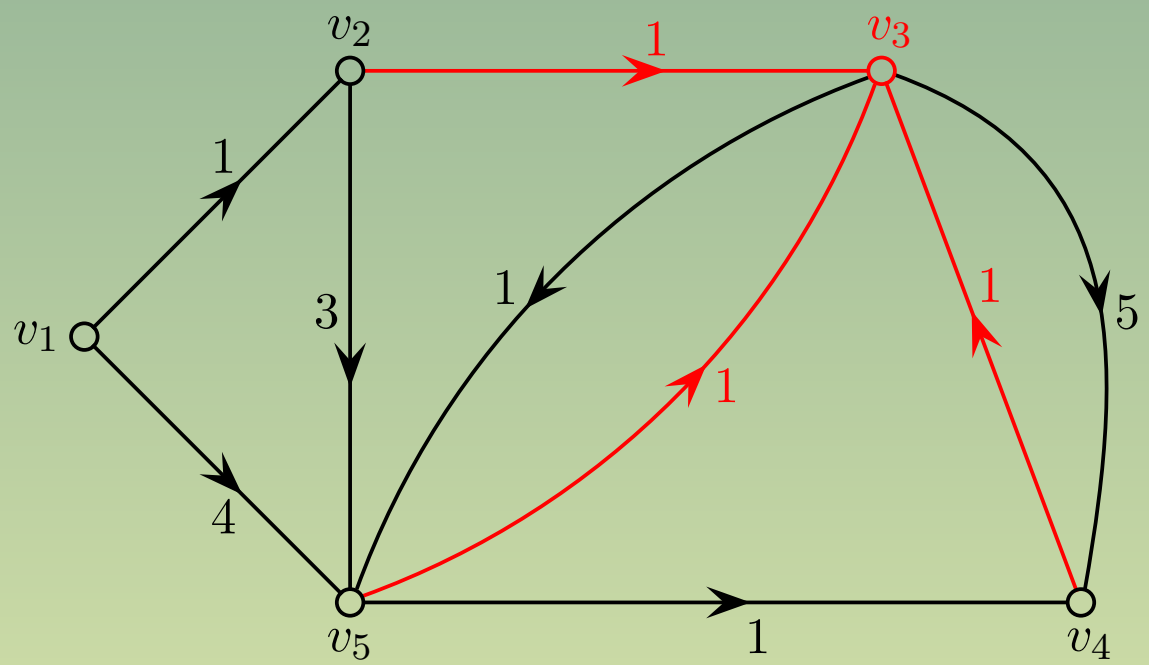
trenutni korak: 3

korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_1,4)$

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$,

Sada prelazimo na vrh v_3. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_3. To su ovdje lukovi v_2v_3, v_4v_3 i v_5v_3.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 3

korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_1,4)$

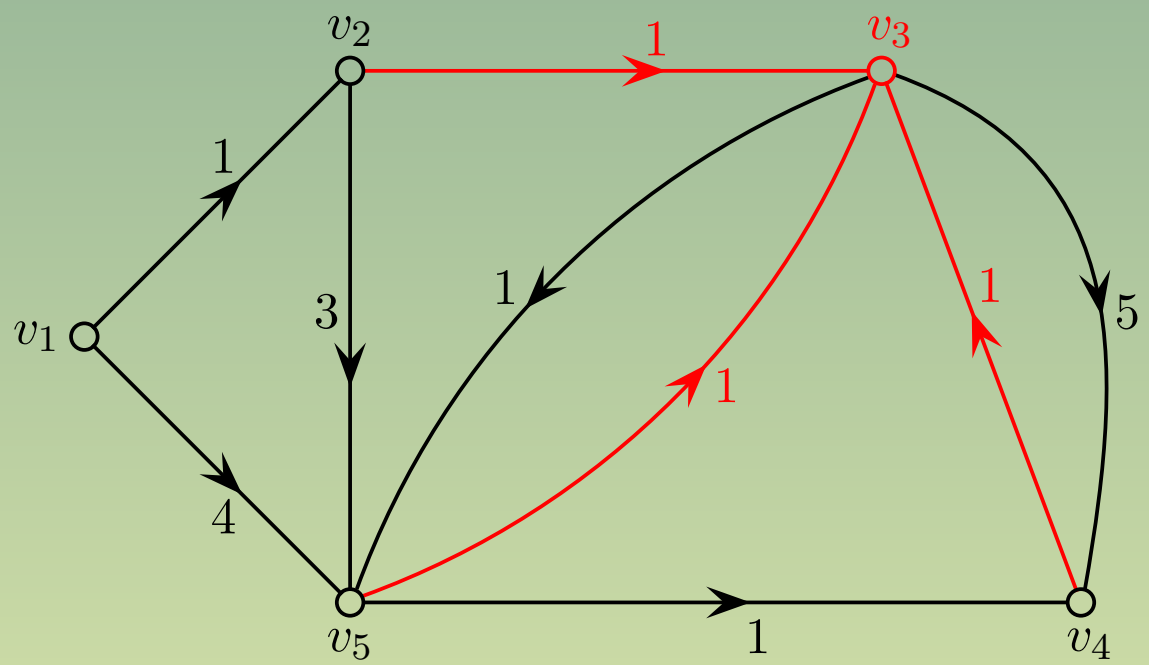
korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$,

Sada prelazimo na vrh v_3. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_3. To su ovdje lukovi v_2v_3, v_4v_3 i v_5v_3. Za svaki od tih lukova računamo

težina luka + druga koordinata oznake početka luka iz koraka 2

i odaberemo najmanju od tih vrijednosti.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 3

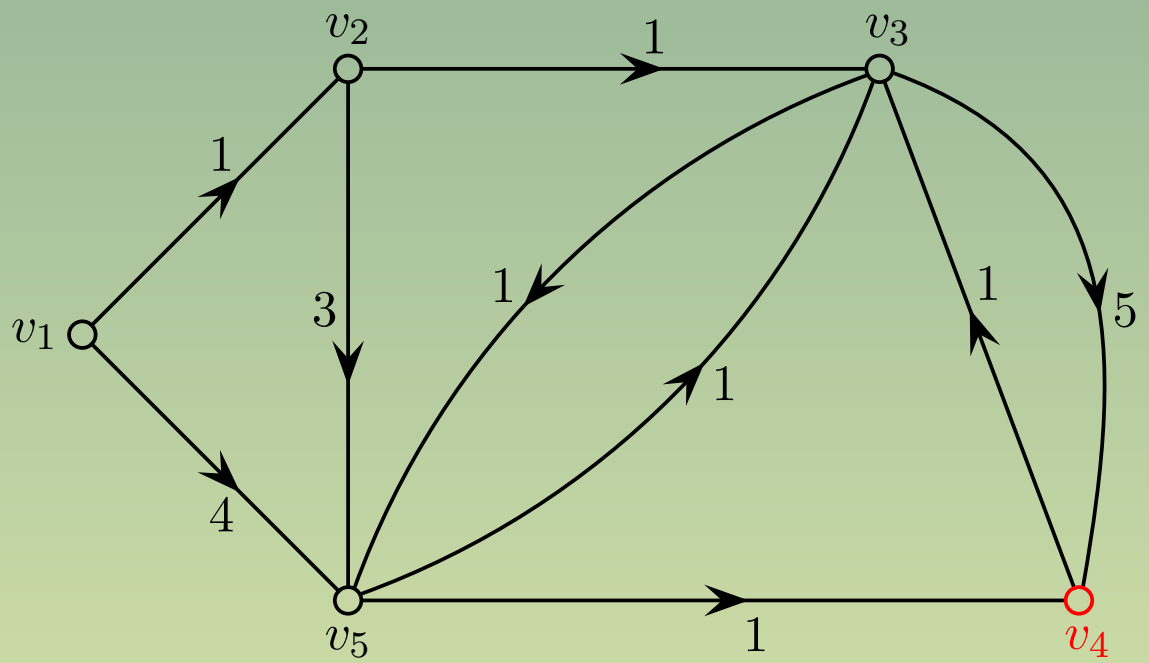
korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_1,4)$

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$,

$$\begin{aligned} v_2v_3 &\rightarrow 1+1=2 \\ v_4v_3 &\rightarrow 1+5=6 \qquad \min\{2,6,5\}=2 \\ v_5v_3 &\rightarrow 1+4=5 \end{aligned}$$

Kako $\min\{2,6,5\}=2$ nije manji od trenutne druge koordinate vrha v_3, vrh v_3 u ovom koraku ne mijenja oznaku.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 3

korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_1,4)$

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$,

Sada prelazimo na vrh v_4.

Usmjereni grafovi

Definicija digrafa

Izomorfizam digrafova

Šetnje u digrafu

Matrica susjedstva digrafa

Turnir

Tranzitivni turnir

Dipovezani turnir

Rangiranje

Bellman-Fordov algoritam

Opis Bellman-Fordovog algoritma

Bellman-Ford error

Aciklički digraf

Topološko sortiranje

Bellmanov algoritam

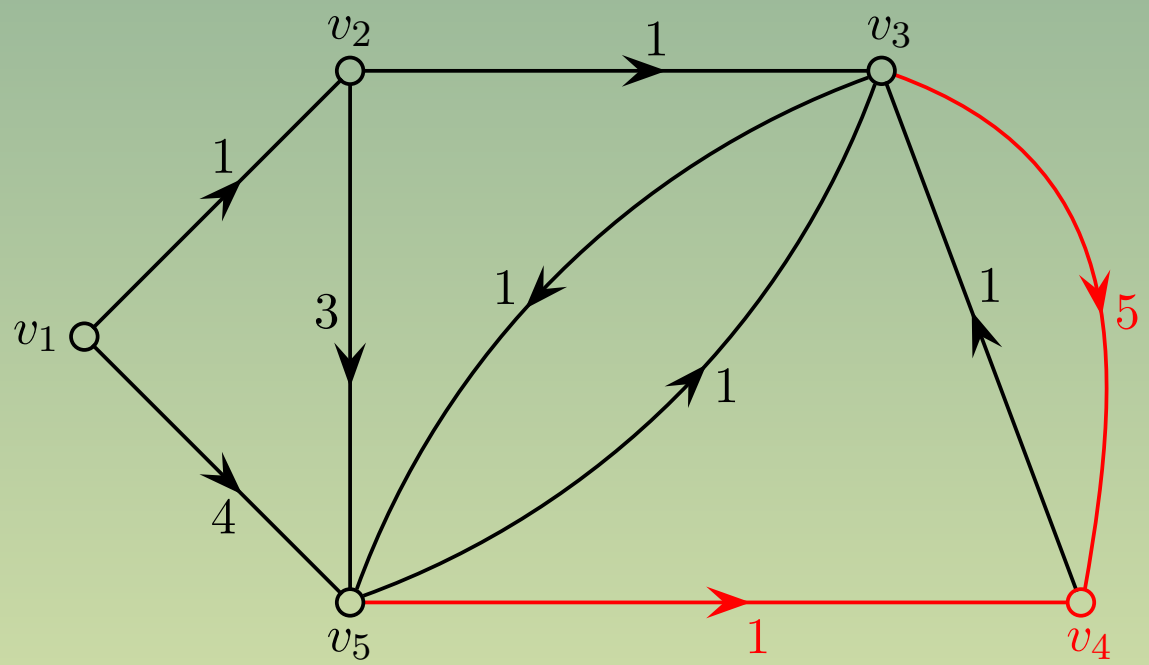
Problem rasporeda – 1. tip

Problem rasporeda – 2. tip

Problem jednosmjernih ulica

Transportne mreže

Ford-Fulkerson



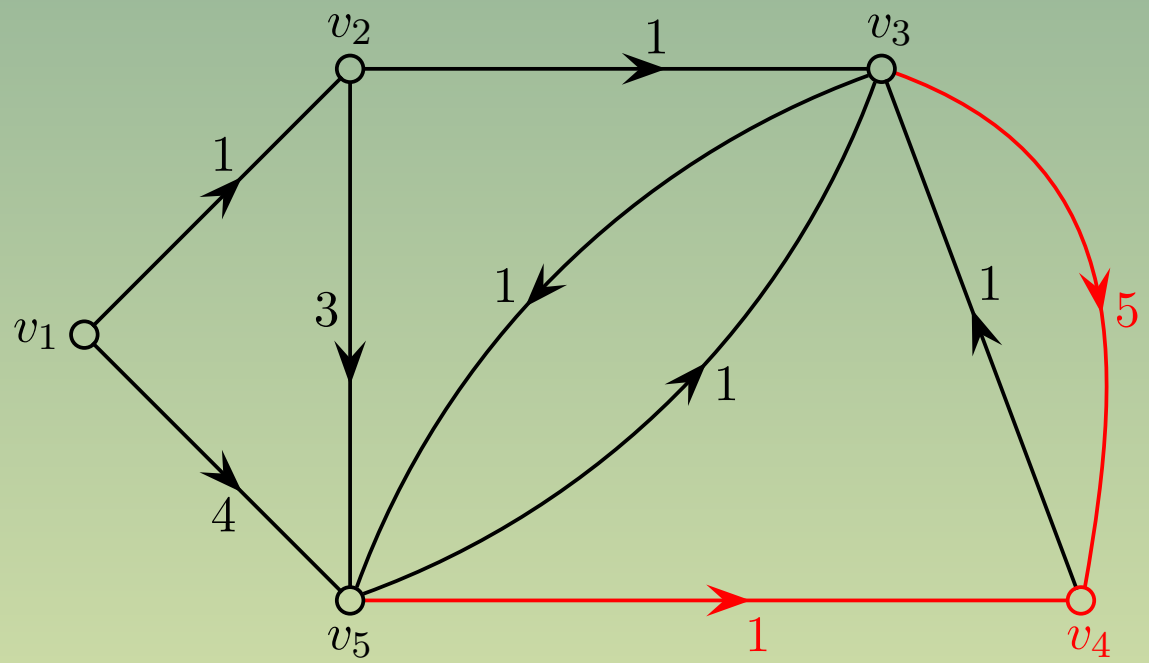
trenutni korak: 3

korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_1,4)$

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$,

Sada prelazimo na vrh v_4. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_4. To su ovdje lukovi v_3v_4 i v_5v_4.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 3

korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_1,4)$

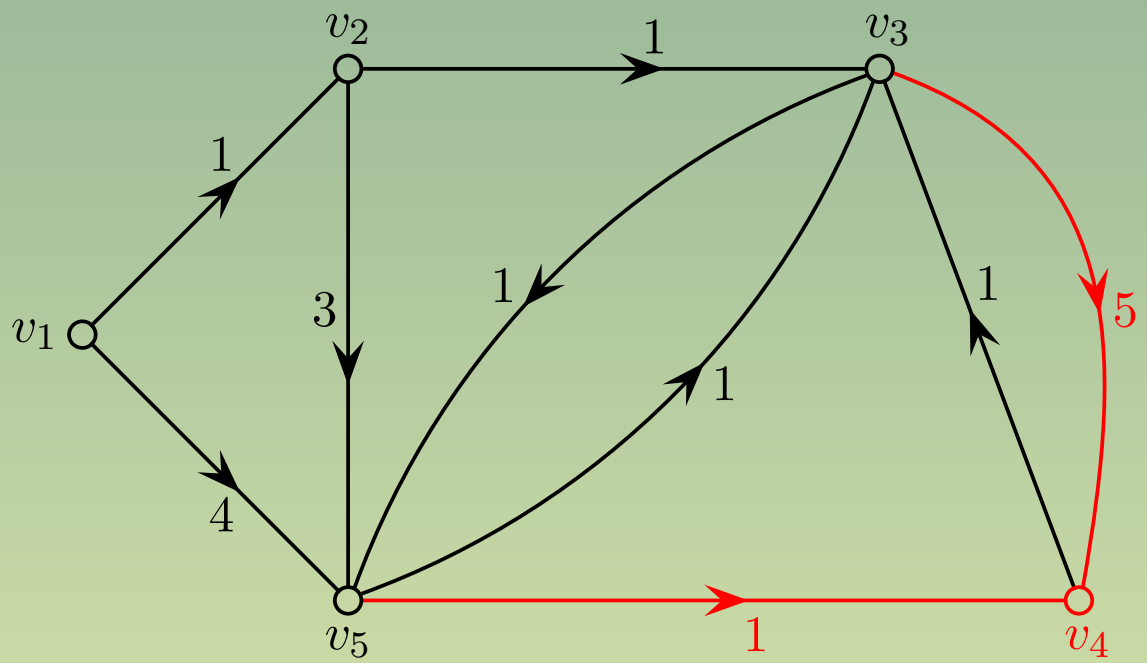
korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$,

Sada prelazimo na vrh v_4. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_4. To su ovdje lukovi v_3v_4 i v_5v_4. Za svaki od tih lukova računamo

težina luka + druga koordinata oznake početka luka iz koraka 2

i odaberemo najmanju od tih vrijednosti.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 3

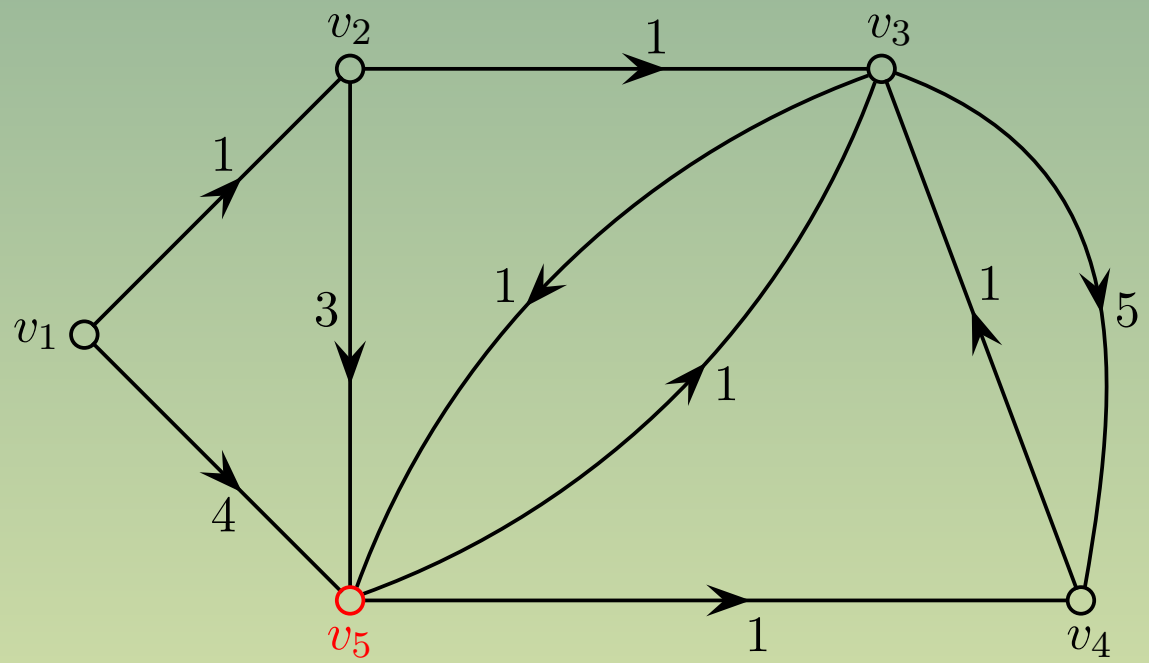
korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_1,4)$

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$,

$$\begin{aligned} v_3v_4 &\rightarrow 5+2=7 \\ v_5v_4 &\rightarrow 1+4=5 \end{aligned} \qquad \min\{7,5\}=5$$

Kako $\min\{7,5\}=5$ nije manji od trenutne druge koordinate vrha v_4, vrh v_4 u ovom koraku ne mijenja oznaku.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



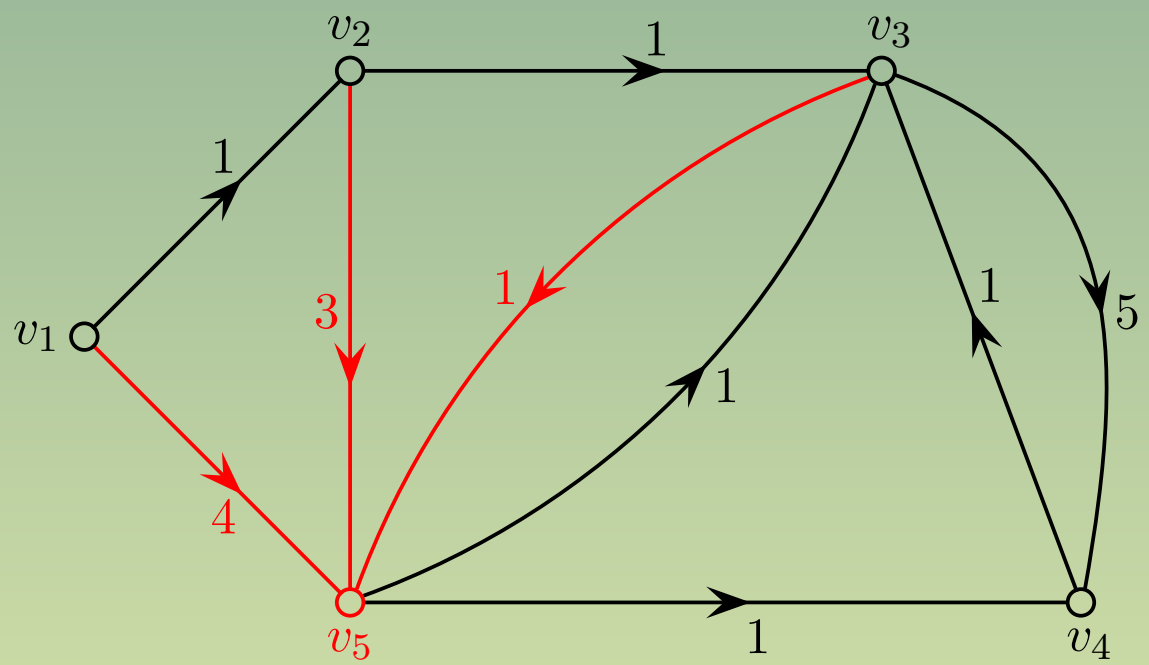
trenutni korak: 3

korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_1,4)$

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$,

Sada prelazimo na vrh v_5.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



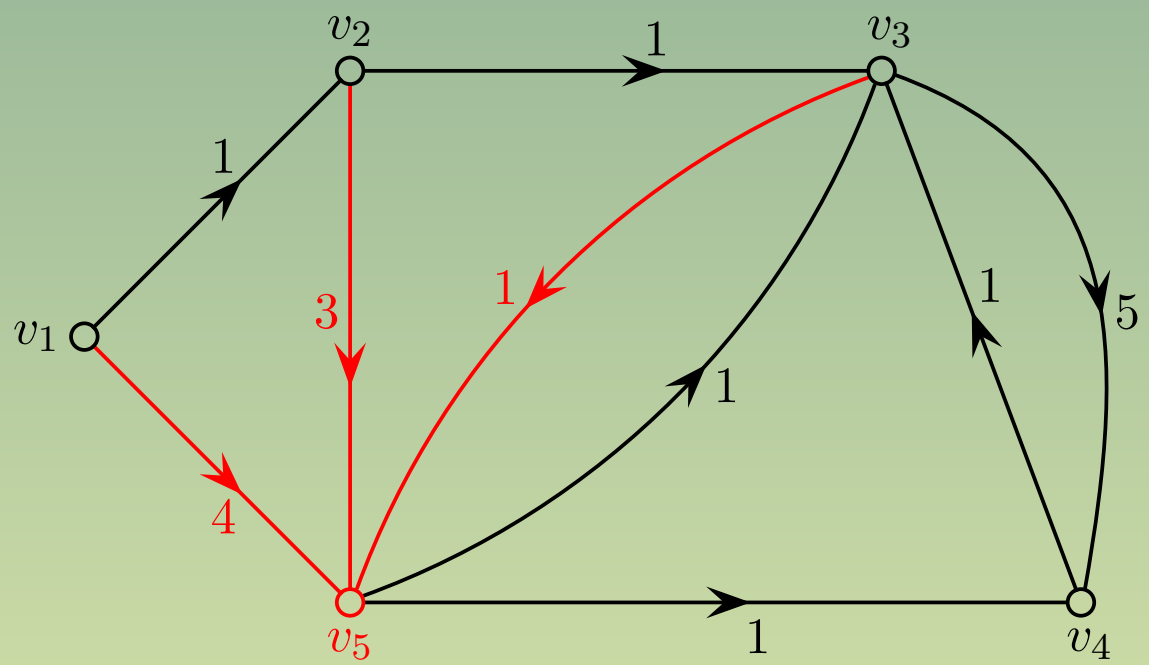
trenutni korak: 3

korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_1,4)$

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$,

Sada prelazimo na vrh v_5. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_5. To su ovdje lukovi v_1v_5, v_2v_5 i v_3v_5.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 3

korak 2: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_1,4)$

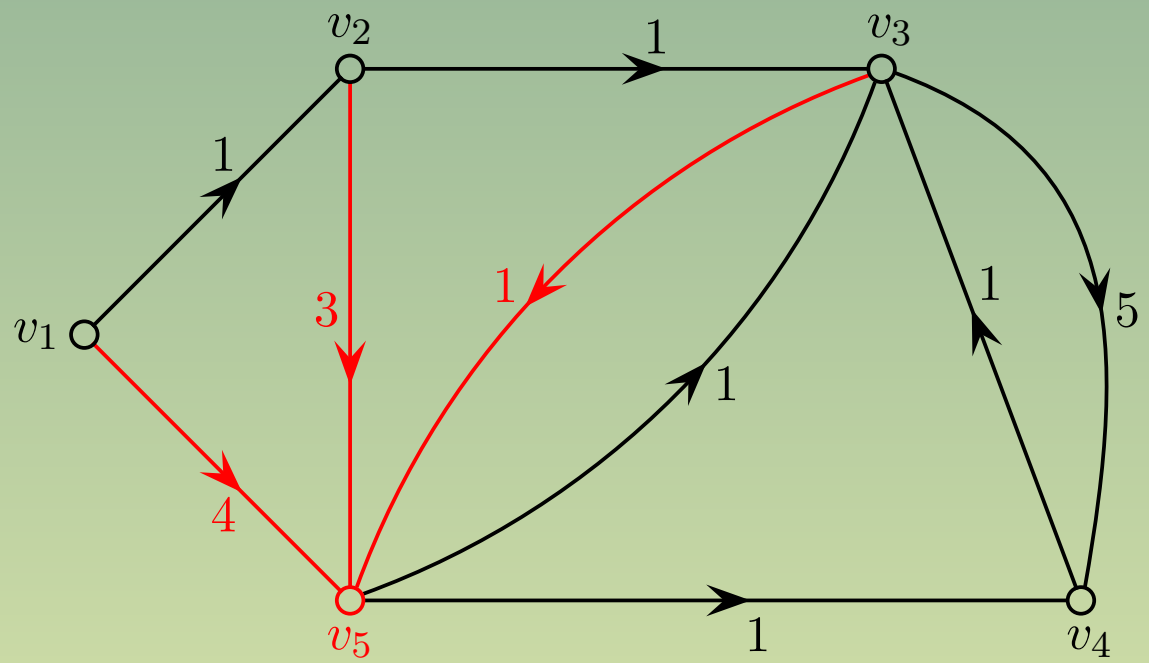
korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$,

Sada prelazimo na vrh v_5. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_5. To su ovdje lukovi v_1v_5, v_2v_5 i v_3v_5. Za svaki od tih lukova računamo

težina luka + druga koordinata oznake početka luka iz koraka 2

i odaberemo najmanju od tih vrijednosti.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 3

korak 2: $v_1(-,0),\ v_2(v_1,1),\ v_3(v_2,2),\ v_4(v_5,5),\ v_5(v_1,4)$

korak 3: $v_1(-,0),\ v_2(v_1,1),\ v_3(v_2,2),\ v_4(v_5,5),\ v_5(v_3,3)$

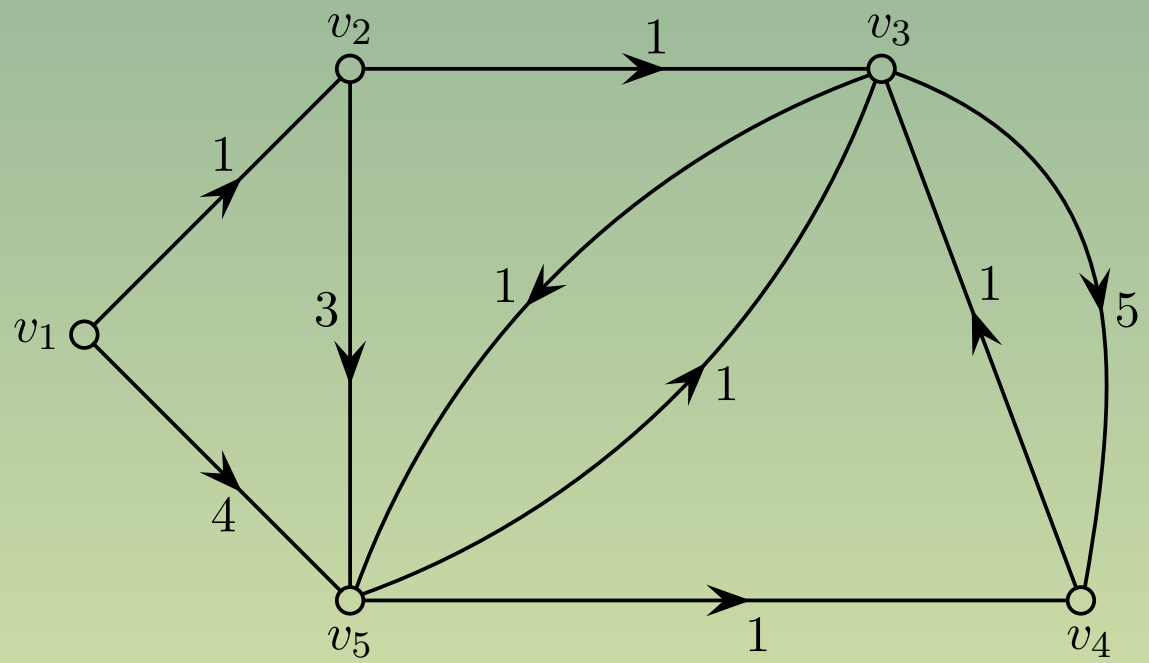
$$\begin{aligned} v_1v_5 &\rightarrow 4+0=4 \\ v_2v_5 &\rightarrow 3+1=4 \qquad \min\{4,4,3\}=3 \\ v_3v_5 &\rightarrow 1+2=3 \end{aligned}$$

Kako je $\min\{4,4,3\}=3$ manji od trenutne druge koordinate vrha v_5, vrh v_5 dobiva novu oznaku $(v_3,3)$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



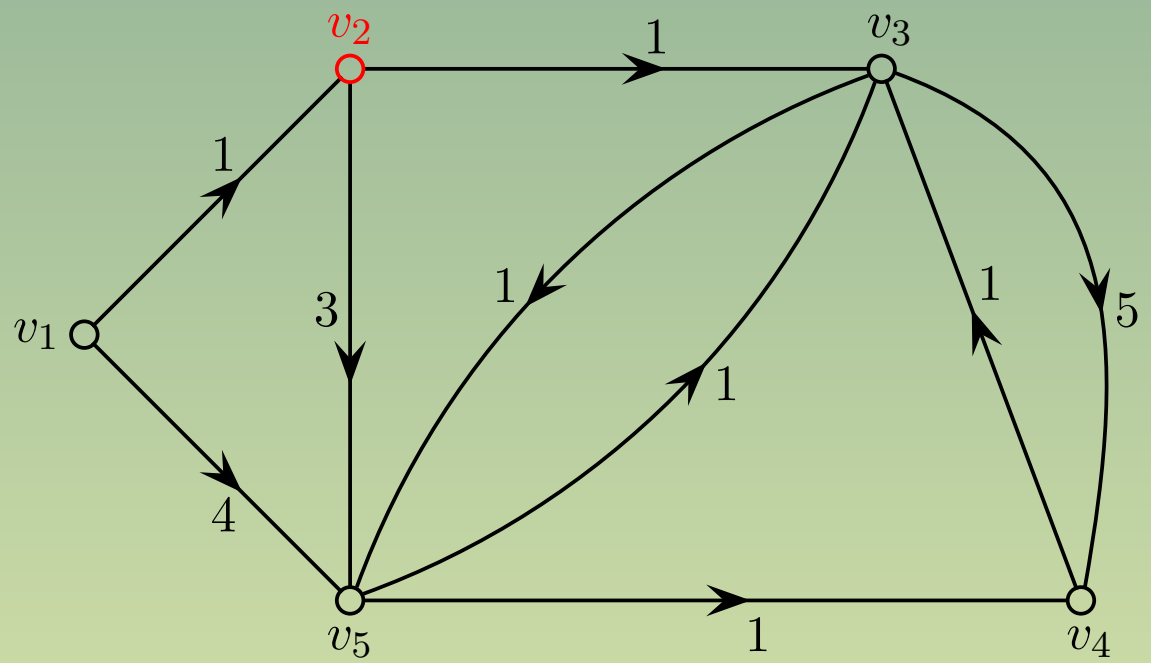
trenutni korak: 4

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_3,3)$

korak 4: $v_1(-,0)$,

U četvrtom koraku moramo provjeriti oznake svih vrhova v_2, v_3, v_4, v_5 i po potrebi ih promijeniti. Stoga krenimo redom.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



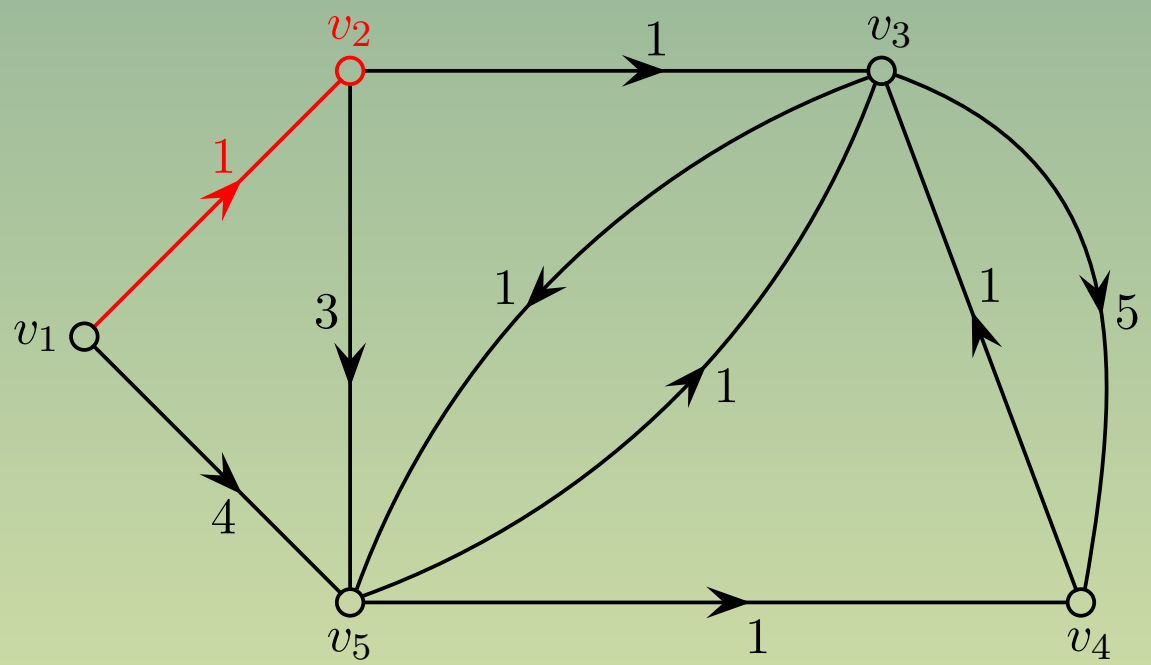
trenutni korak: 4

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_3,3)$

korak 4: $v_1(-,0)$,

Pogledajmo vrh v_2

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



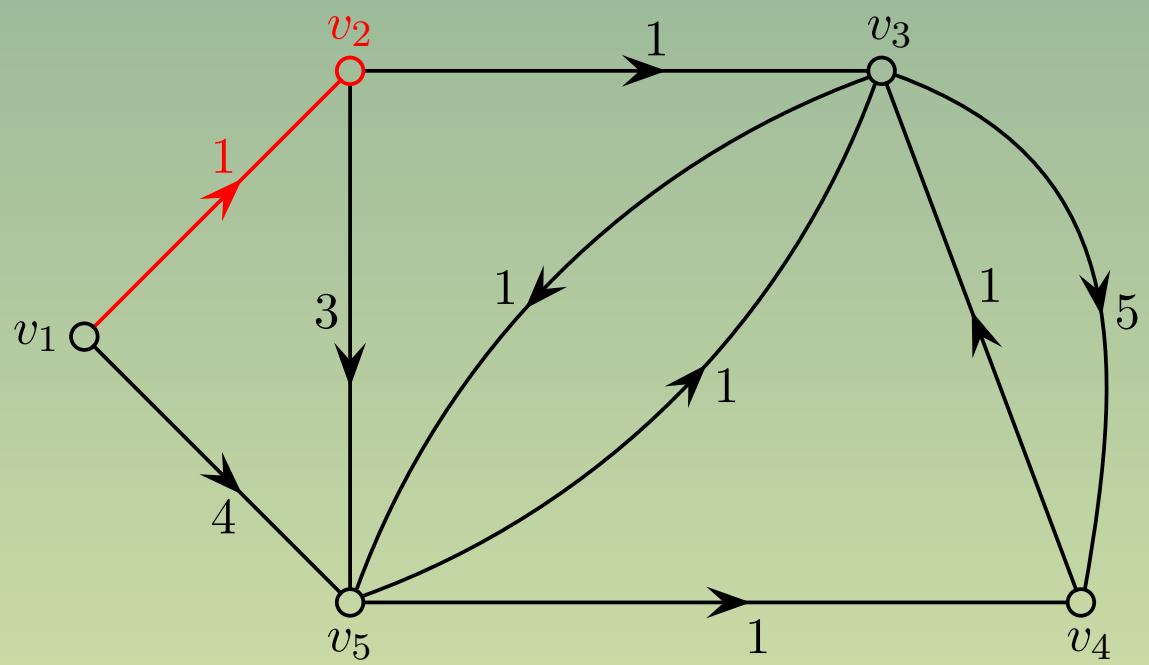
trenutni korak: 4

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_3,3)$

korak 4: $v_1(-,0)$,

Pogledajmo vrh v_2 i sve lukove koji ulaze u njega. To je ovdje jedino luk v_1v_2.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



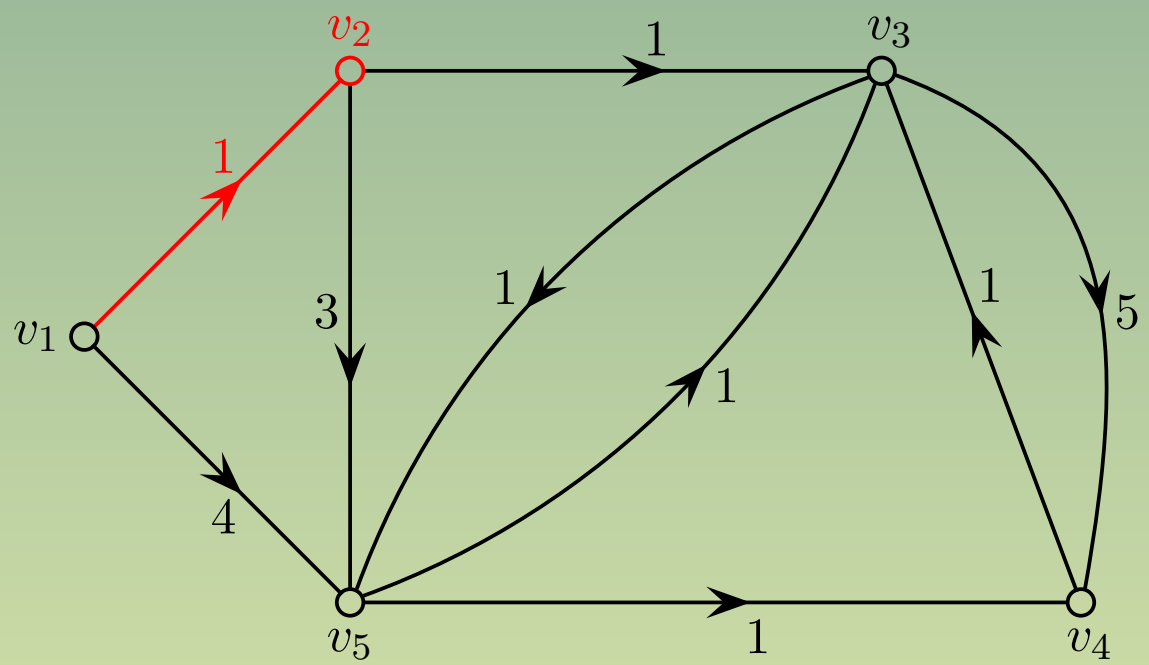
trenutni korak: 4

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_3,3)$

korak 4: $v_1(-,0)$,

Pogledajmo vrh v_2 i sve lukove koji ulaze u njega. To je ovdje jedino luk v_1v_2. Kada težinu luka v_1v_2 zbrojimo s drugom koordinatom oznake njegovog početka iz koraka 3 (s drugom koordinatom oznake vrha v_1 iz koraka 3) dobivamo vrijednost $1+0=1$.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



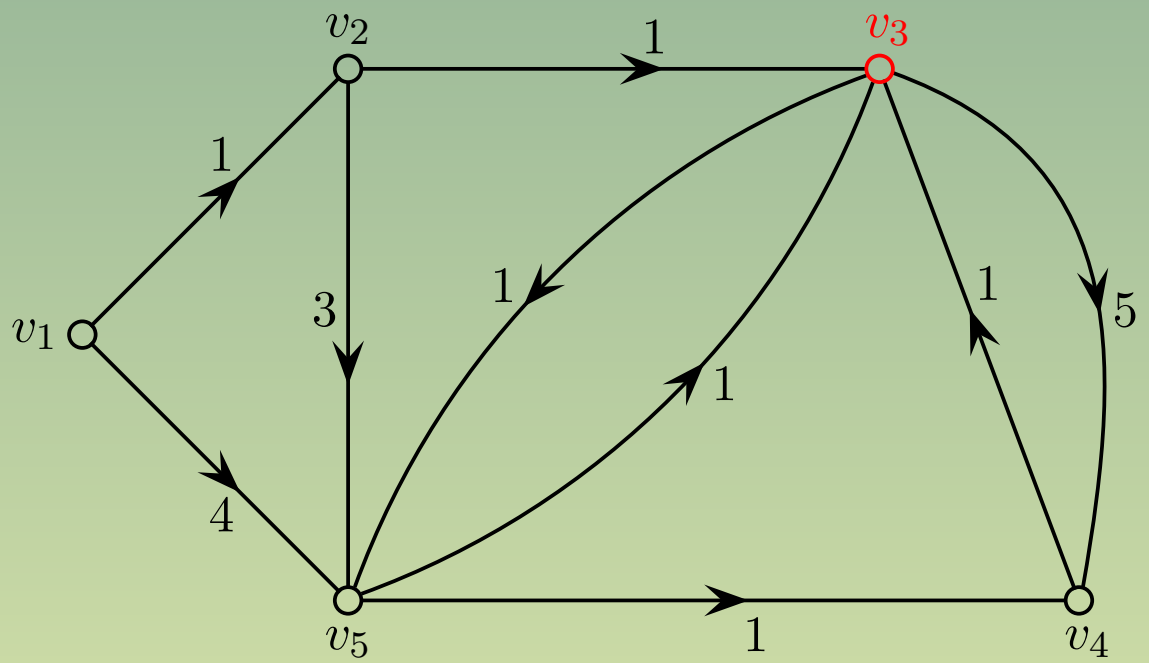
trenutni korak: 4

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_3,3)$

korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$,

Kako ta vrijednost 1 nije manja od trenutne druge koordinate oznake vrha v_2, vrh v_2 u ovom koraku ne mijenja svoju oznaku.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 4

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_3,3)$

korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$,

Sada prelazimo na vrh v_3.

Usmjereni grafovi

Definicija digrafa

Izomorfizam digrafova

Šetnje u digrafu

Matrica susjedstva digrafa

Turnir

Tranzitivni turnir

Dipovezani turnir

Rangiranje

Bellman-Fordov algoritam

Opis Bellman-Fordovog algoritma

Bellman-Ford error

Aciklički digraf

Topološko sortiranje

Bellmanov algoritam

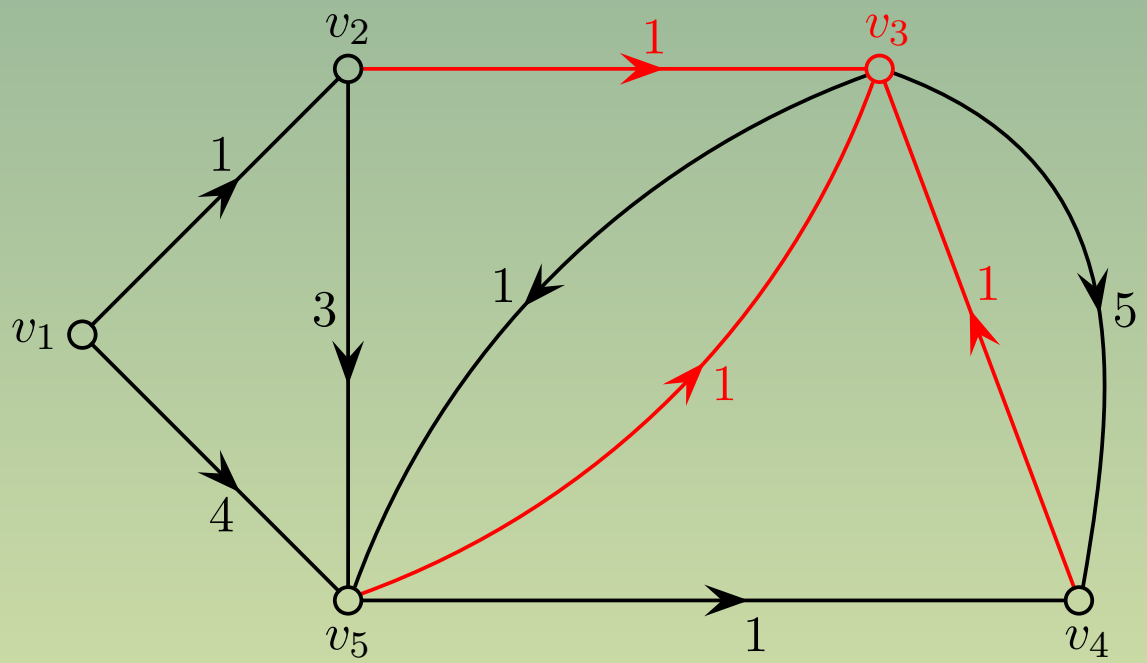
Problem rasporeda – 1. tip

Problem rasporeda – 2. tip

Problem jednosmjernih ulica

Transportne mreže

Ford-Fulkerson



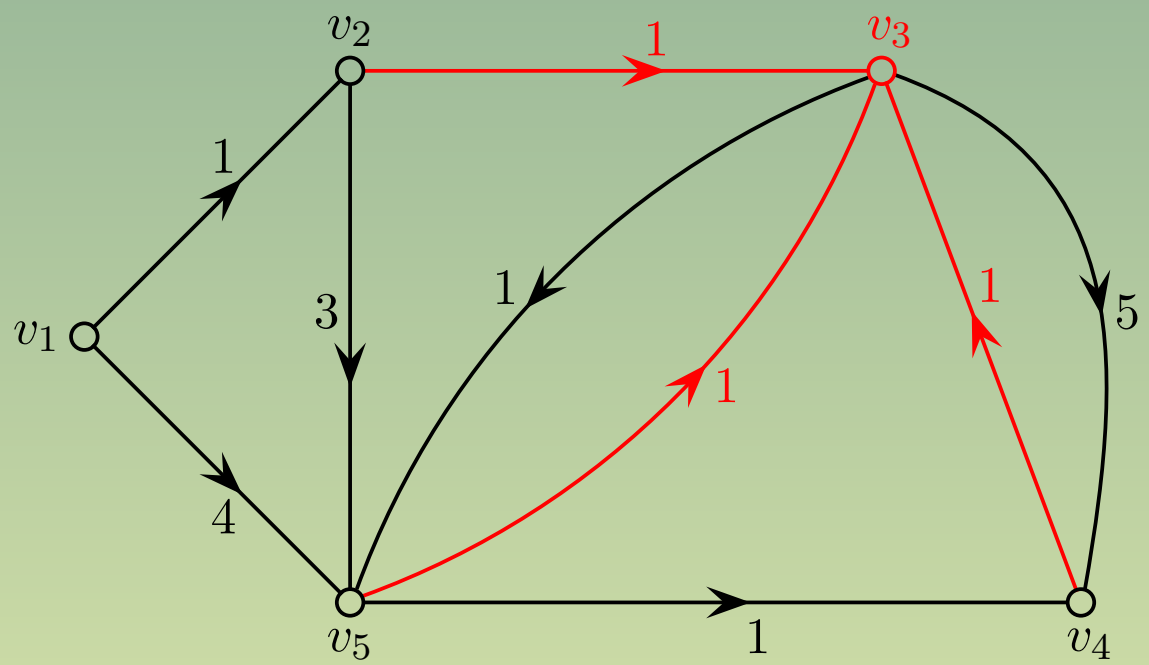
trenutni korak: 4

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_3,3)$

korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$,

Sada prelazimo na vrh v_3. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_3. To su ovdje lukovi v_2v_3, v_4v_3 i v_5v_3.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 4

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_3,3)$

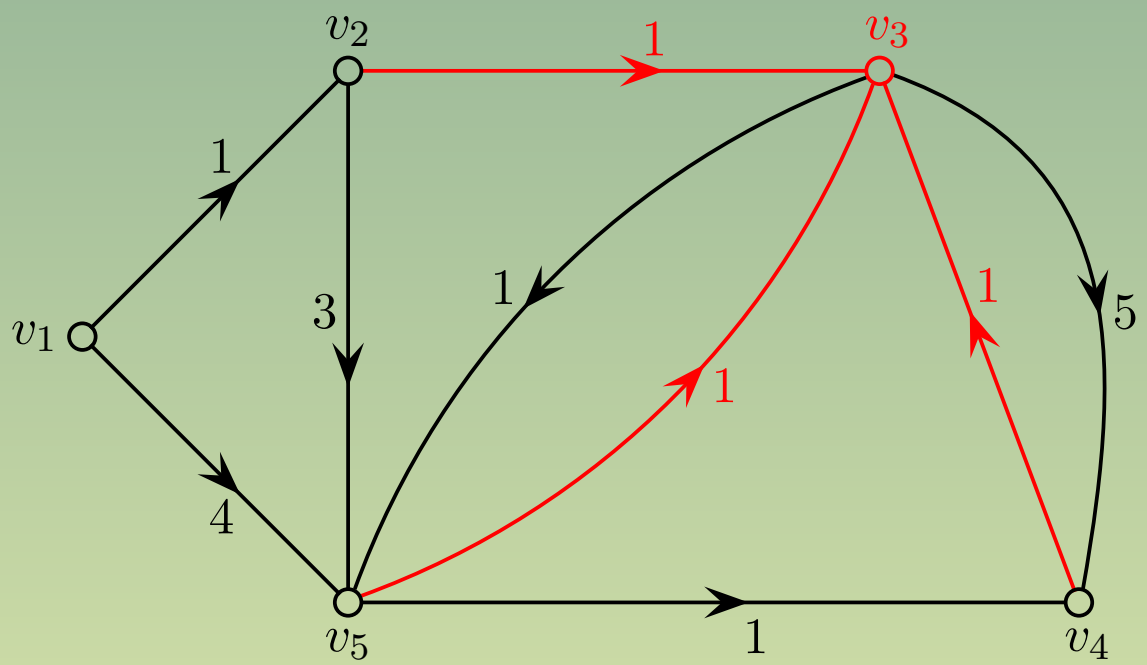
korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$,

Sada prelazimo na vrh v_3. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_3. To su ovdje lukovi v_2v_3, v_4v_3 i v_5v_3. Za svaki od tih lukova računamo

težina luka + druga koordinata oznake početka luka iz koraka 3

i odaberemo najmanju od tih vrijednosti.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 4

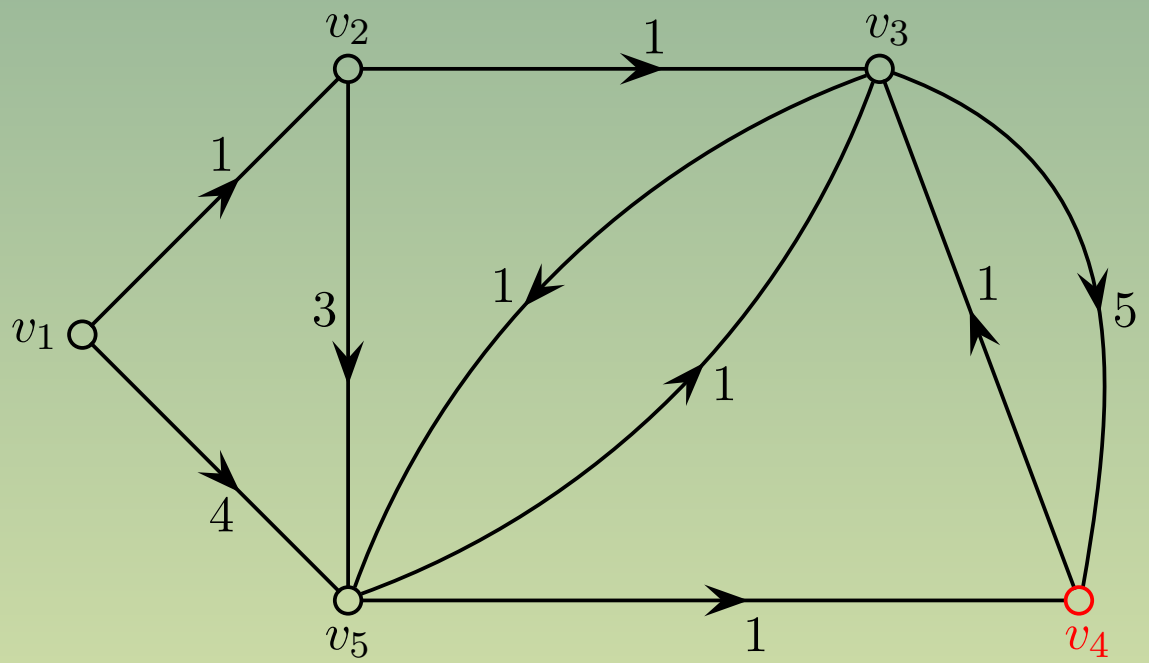
korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_3,3)$

korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$,

$$\begin{aligned} v_2v_3 &\rightarrow 1+1=2 \\ v_4v_3 &\rightarrow 1+5=6 \qquad \min\{2,6,4\}=2 \\ v_5v_3 &\rightarrow 1+3=4 \end{aligned}$$

Kako $\min\{2,6,4\}=2$ nije manji od trenutne druge koordinate vrha v_3, vrh v_3 u ovom koraku ne mijenja oznaku.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 4

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_3,3)$

korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$,

Sada prelazimo na vrh v_4.

Usmjereni grafovi

Definicija digrafa

Izomorfizam digrafova

Šetnje u digrafu

Matrica susjedstva digrafa

Turnir

Tranzitivni turnir

Dipovezani turnir

Rangiranje

Bellman-Fordov algoritam

Opis Bellman-Fordovog algoritma

Bellman-Ford error

Aciklički digraf

Topološko sortiranje

Bellmanov algoritam

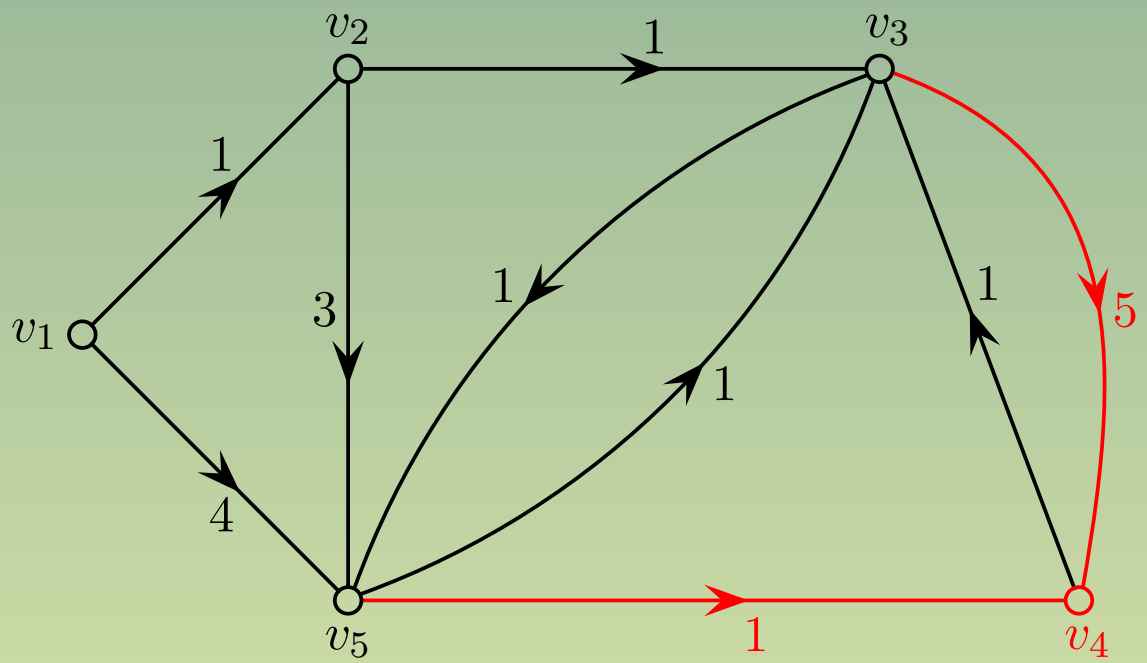
Problem rasporeda – 1. tip

Problem rasporeda – 2. tip

Problem jednosmjernih ulica

Transportne mreže

Ford-Fulkerson



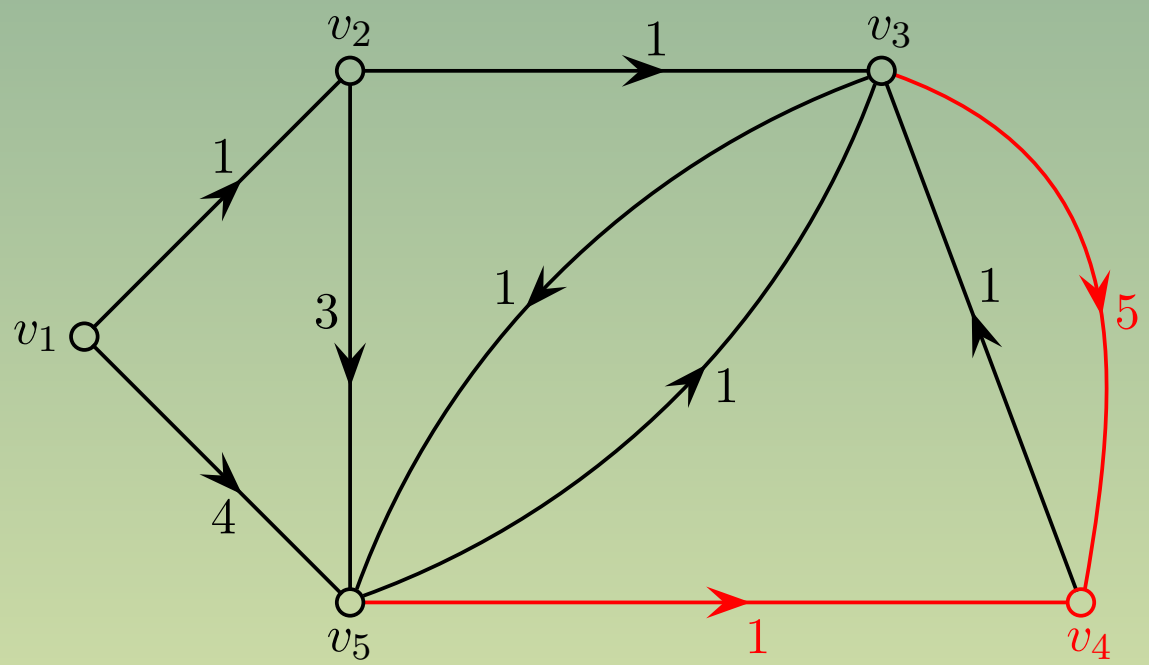
trenutni korak: 4

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_3,3)$

korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$,

Sada prelazimo na vrh v_4. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_4. To su ovdje lukovi v_3v_4 i v_5v_4.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 4

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_3,3)$

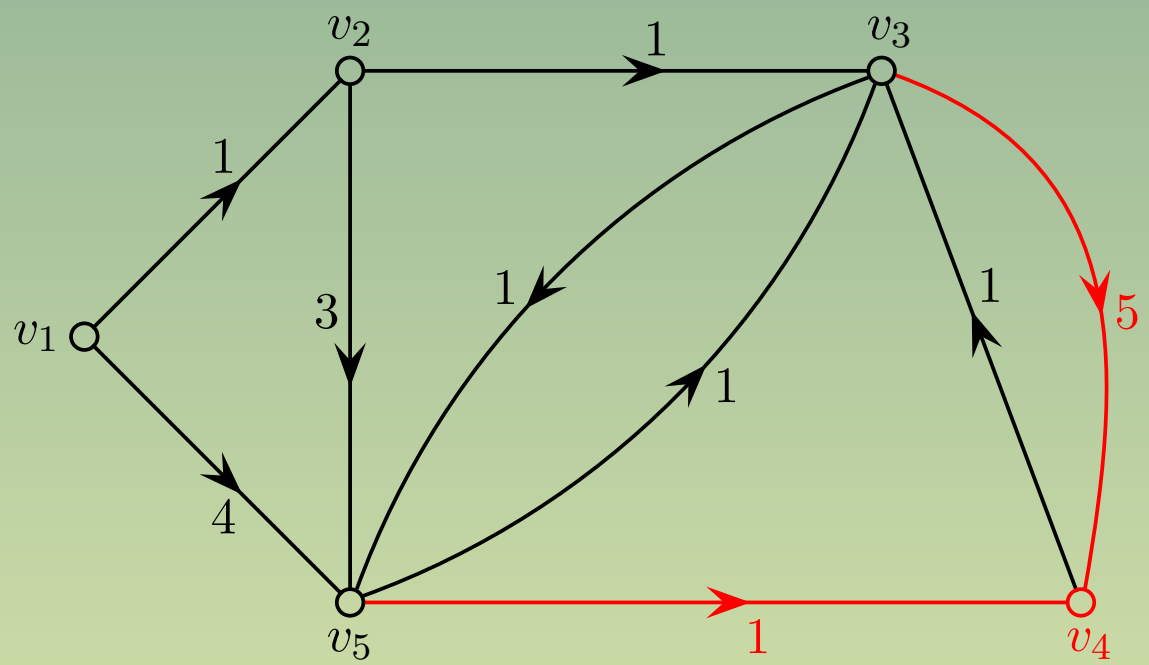
korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$,

Sada prelazimo na vrh v_4. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_4. To su ovdje lukovi v_3v_4 i v_5v_4. Za svaki od tih lukova računamo

težina luka + druga koordinata oznake početka luka iz koraka 3

i odaberemo najmanju od tih vrijednosti.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 4

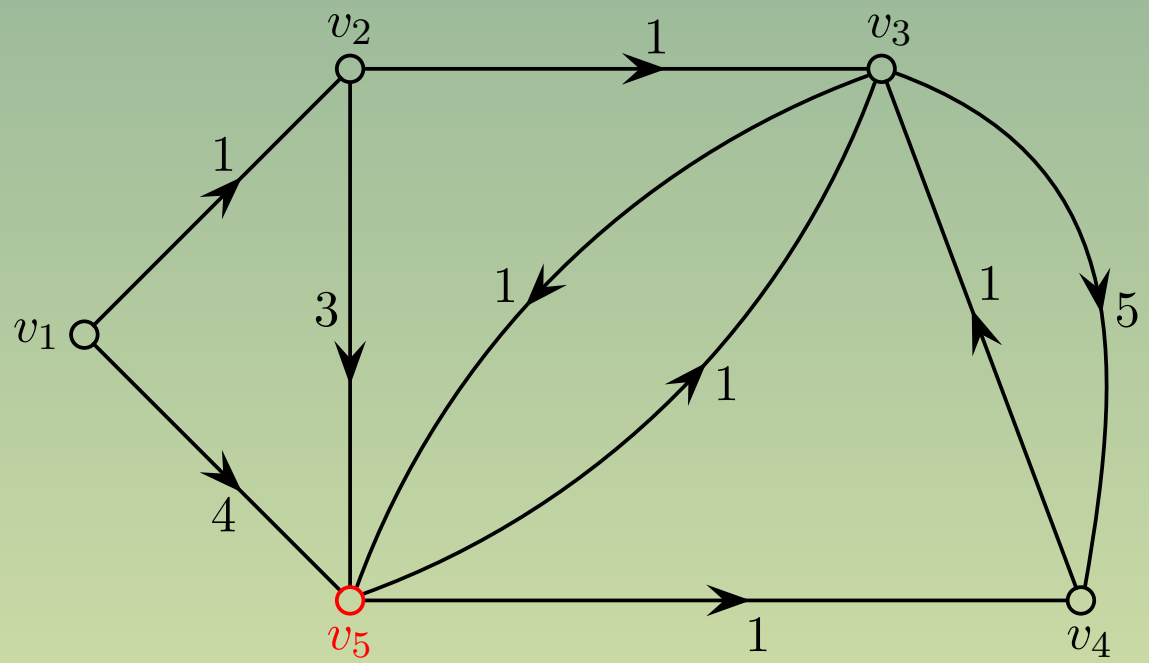
korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_3,3)$

korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$,

$$\begin{aligned} v_3v_4 &\rightarrow 5+2=7 \\ v_5v_4 &\rightarrow 1+3=4 \end{aligned} \qquad \min\{7,4\}=4$$

Kako je $\min\{7,4\}=4$ manji od trenutne druge koordinate vrha v_4, vrh v_4 dobiva novu oznaku $(v_5,4)$.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



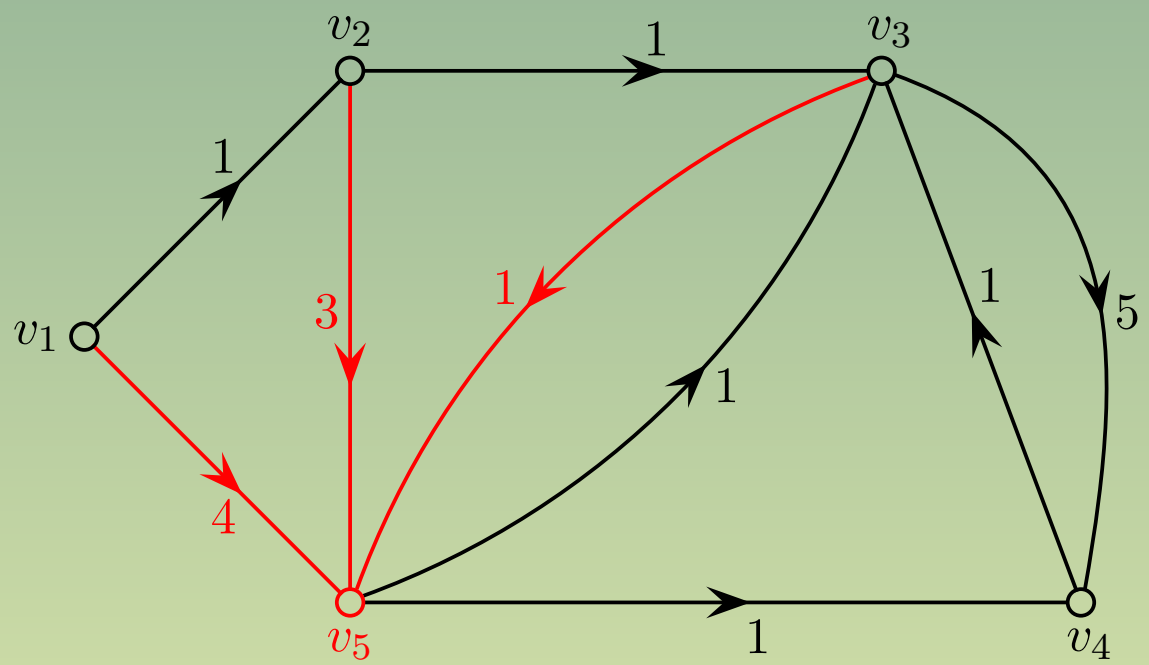
trenutni korak: 4

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_3,3)$

korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$,

Sada prelazimo na vrh v_5.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



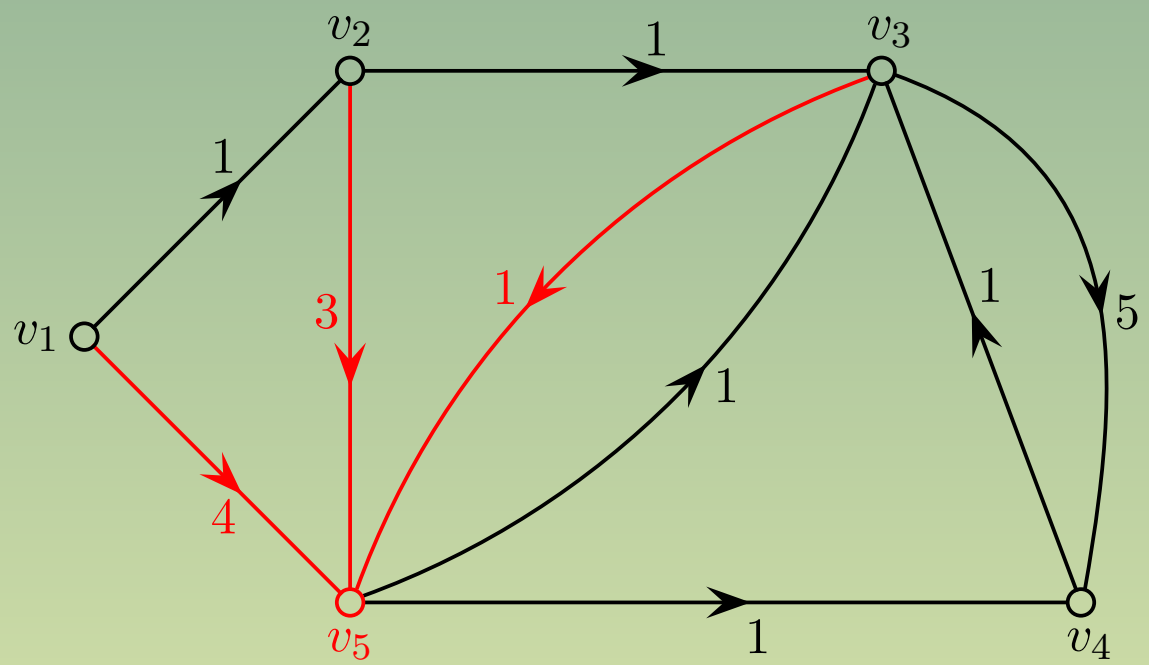
trenutni korak: 4

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_3,3)$

korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$,

Sada prelazimo na vrh v_5. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_5. To su ovdje lukovi v_1v_5, v_2v_5 i v_3v_5.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 4

korak 3: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,5)$, $v_5(v_3,3)$

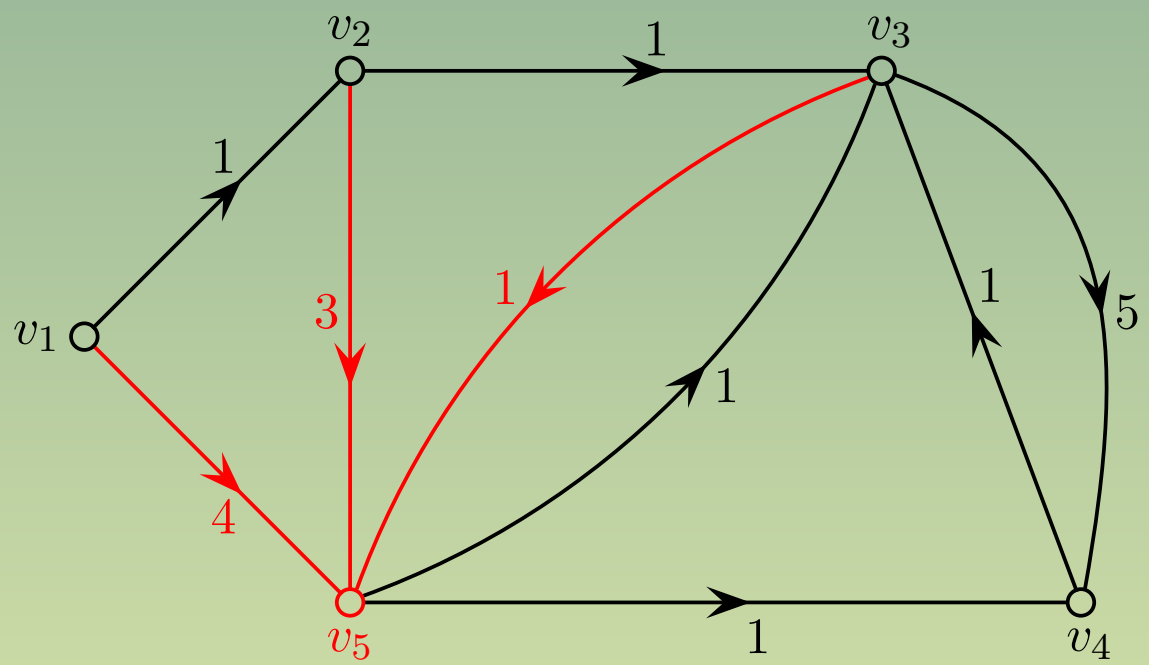
korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$,

Sada prelazimo na vrh v_5. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_5. To su ovdje lukovi v_1v_5, v_2v_5 i v_3v_5. Za svaki od tih lukova računamo

težina luka + druga koordinata oznake početka luka iz koraka 3

i odaberemo najmanju od tih vrijednosti.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 4

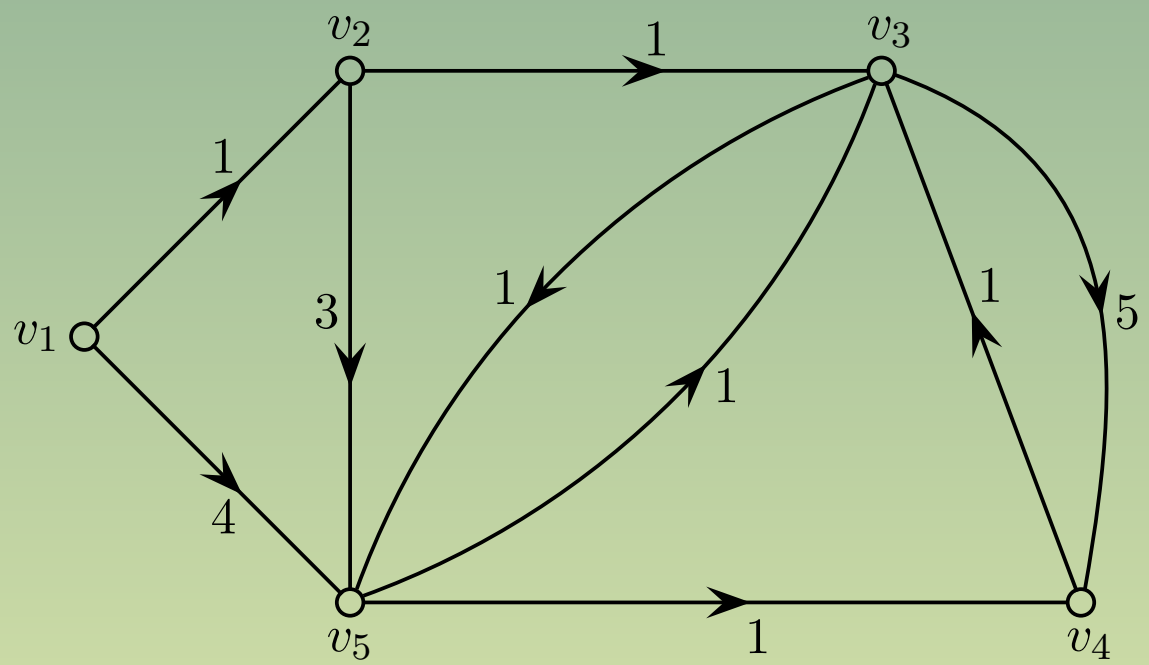
korak 3: $v_1(-,0),\ v_2(v_1,1),\ v_3(v_2,2),\ v_4(v_5,5),\ v_5(v_3,3)$

korak 4: $v_1(-,0),\ v_2(v_1,1),\ v_3(v_2,2),\ v_4(v_5,4),\ v_5(v_3,3)$

$$\begin{aligned} v_1v_5 &\rightarrow 4+0=4 \\ v_2v_5 &\rightarrow 3+1=4 \qquad \min\{4,4,3\}=3 \\ v_3v_5 &\rightarrow 1+2=3 \end{aligned}$$

Kako $\min\{4,4,3\}=3$ nije manji od trenutne druge koordinate vrha v_5, vrh v_5 u ovom koraku ne mijenja oznaku.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



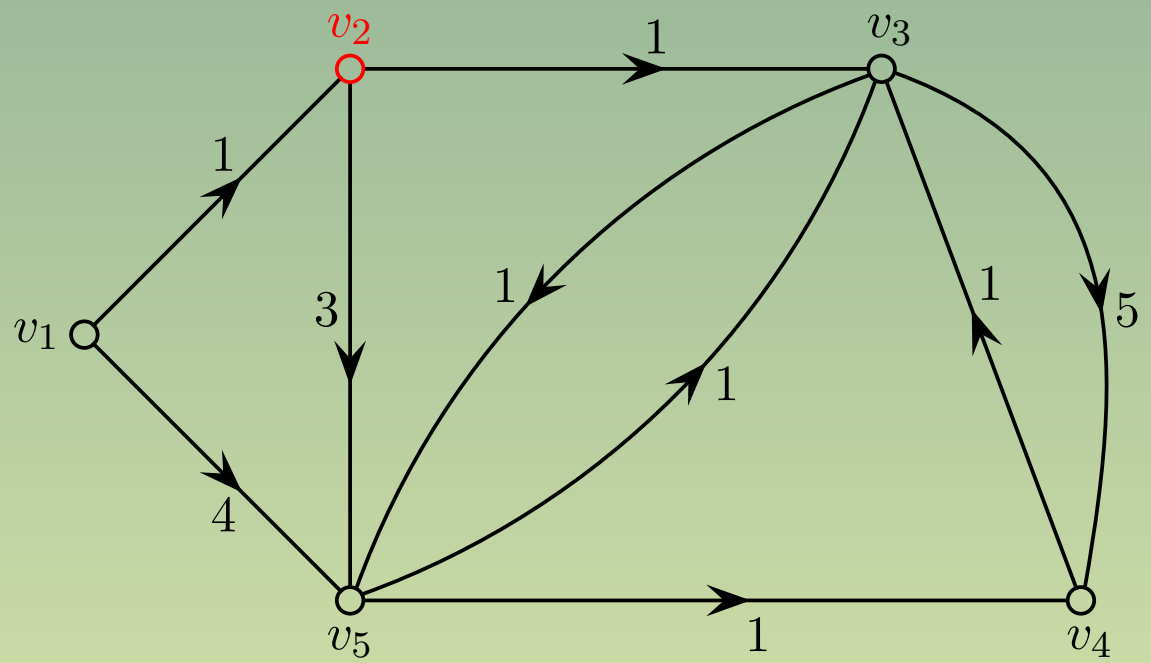
trenutni korak: 5

korak 4: $v_1(-, 0)$, $v_2(v_1, 1)$, $v_3(v_2, 2)$, $v_4(v_5, 4)$, $v_5(v_3, 3)$

korak 5: $v_1(-, 0)$,

Zadnji korak je korak provjere ispravnosti algoritma. Ako oznake svih vrhova u ovom koraku ostanu nepromijenjene, algoritam je ispravan i druge koordinate vrhova daju duljine najkraćih putova vrhova od vrha v_1. Ako se barem jedna oznaka promijeni, algoritam ne garantira točnost dobivenih duljina i vraća "error: postoji usmjereni ciklus negativne težine".

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 5

korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$, $v_5(v_3,3)$

korak 5: $v_1(-,0)$,

Pogledajmo vrh v_2

Usmjereni grafovi

Definicija digrafa

Izomorfizam digrafova

Šetnje u digrafu

Matrica susjedstva digrafa

Turnir

Tranzitivni turnir

Dipovezani turnir

Rangiranje

Bellman-Fordov algoritam

Opis Bellman-Fordovog algoritma

Bellman-Ford error

Aciklički digraf

Topološko sortiranje

Bellmanov algoritam

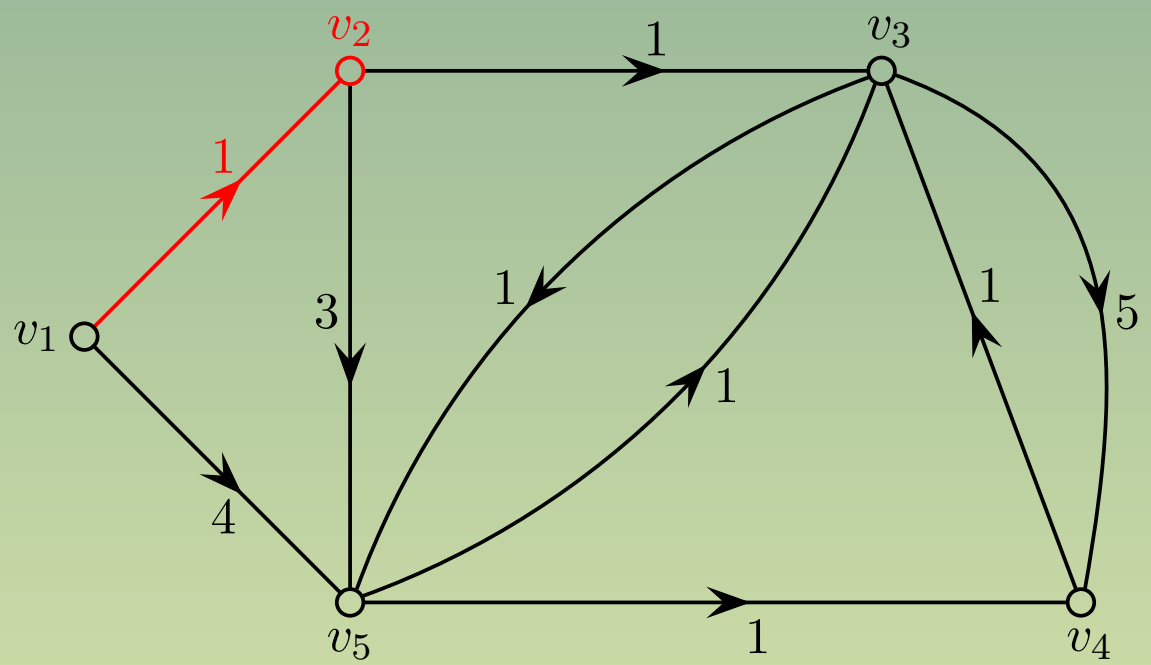
Problem rasporeda – 1. tip

Problem rasporeda – 2. tip

Problem jednosmjernih ulica

Transportne mreže

Ford-Fulkerson



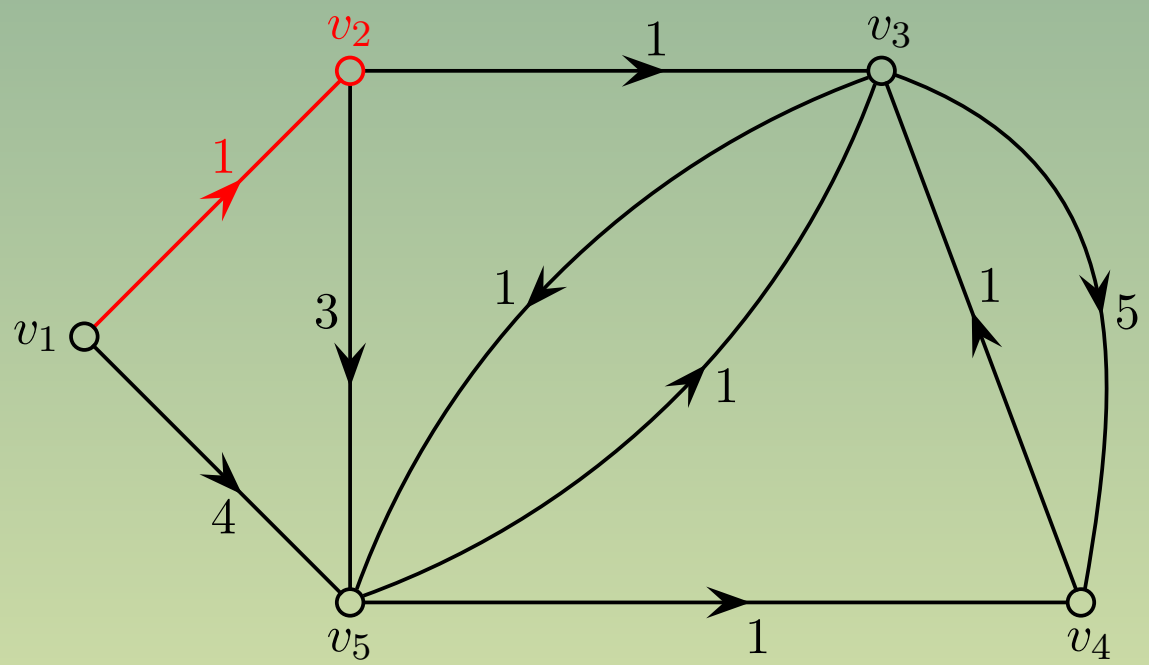
trenutni korak: 5

korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$, $v_5(v_3,3)$

korak 5: $v_1(-,0)$,

Pogledajmo vrh v_2 i sve lukove koji ulaze u njega. To je ovdje jedino luk v_1v_2.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



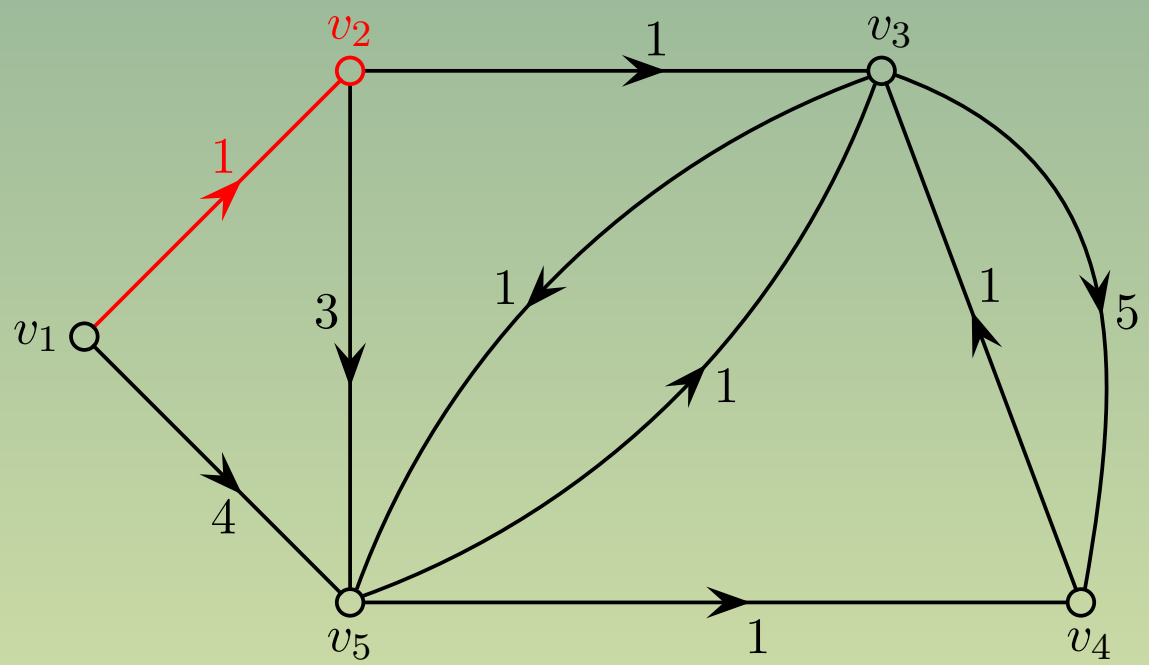
trenutni korak: 5

korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$, $v_5(v_3,3)$

korak 5: $v_1(-,0)$,

Pogledajmo vrh v_2 i sve lukove koji ulaze u njega. To je ovdje jedino luk v_1v_2. Kada težinu luka v_1v_2 zbrojimo s drugom koordinatom oznake njegovog početka iz koraka 4 (s drugom koordinatom oznake vrha v_1 iz koraka 4) dobivamo vrijednost $1+0=1$.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



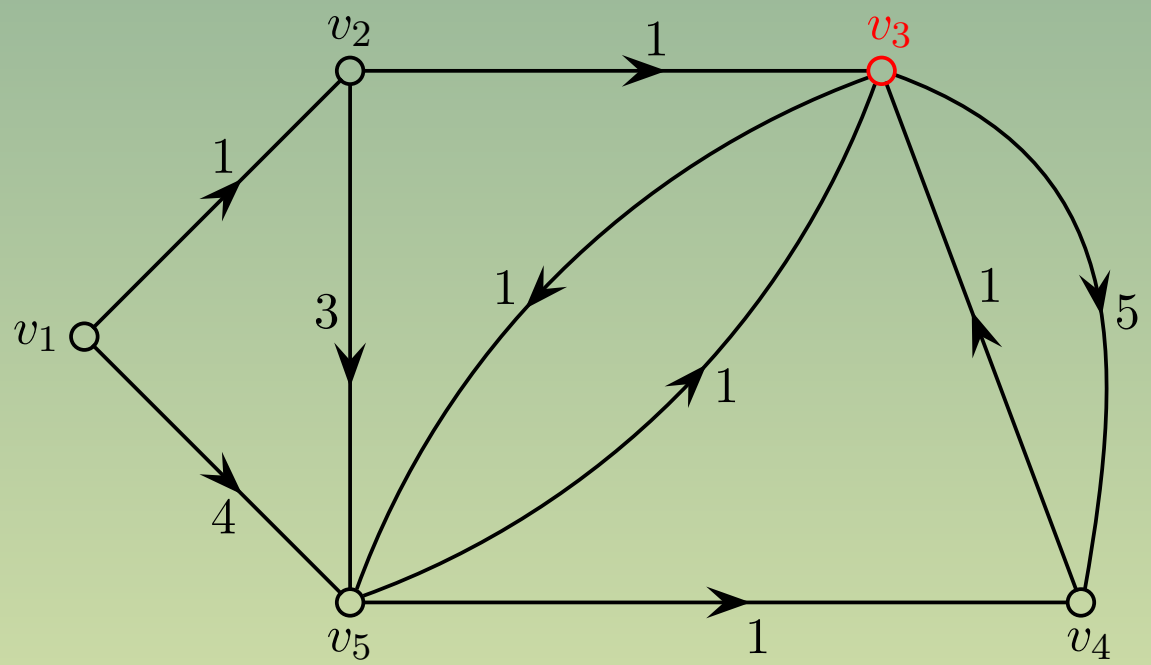
trenutni korak: 5

korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$, $v_5(v_3,3)$

korak 5: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$,

Kako ta vrijednost 1 nije manja od trenutne druge koordinate oznake vrha v_2, vrh v_2 u ovom koraku ne mijenja svoju oznaku.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



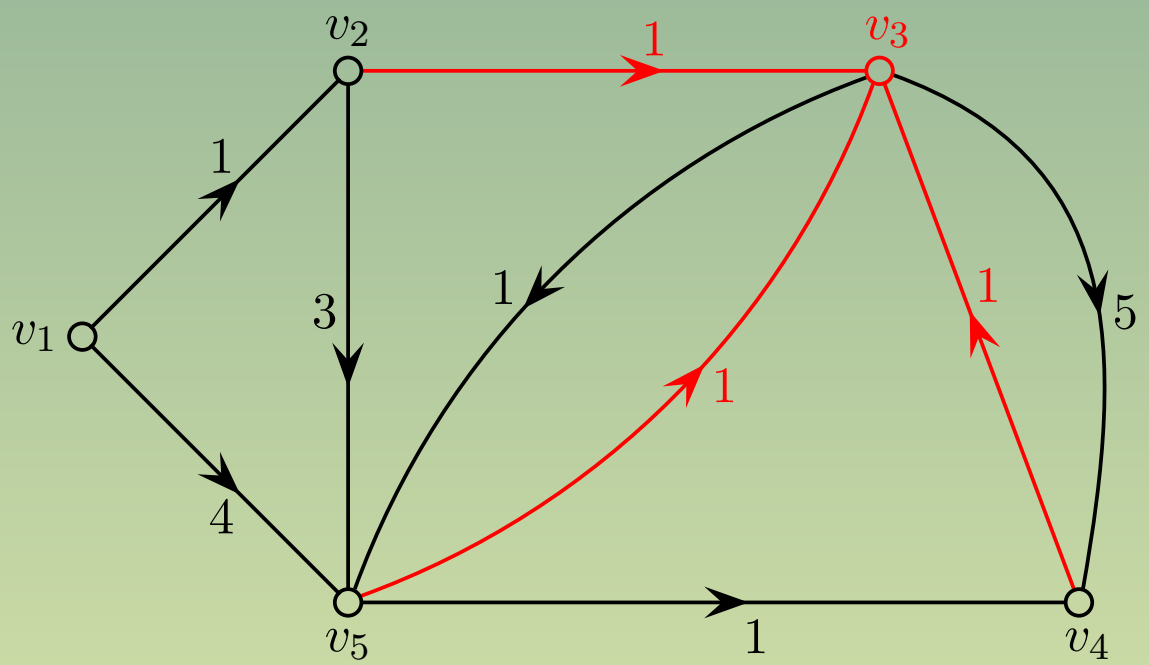
trenutni korak: 5

korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$, $v_5(v_3,3)$

korak 5: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$,

Sada prelazimo na vrh v_3.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



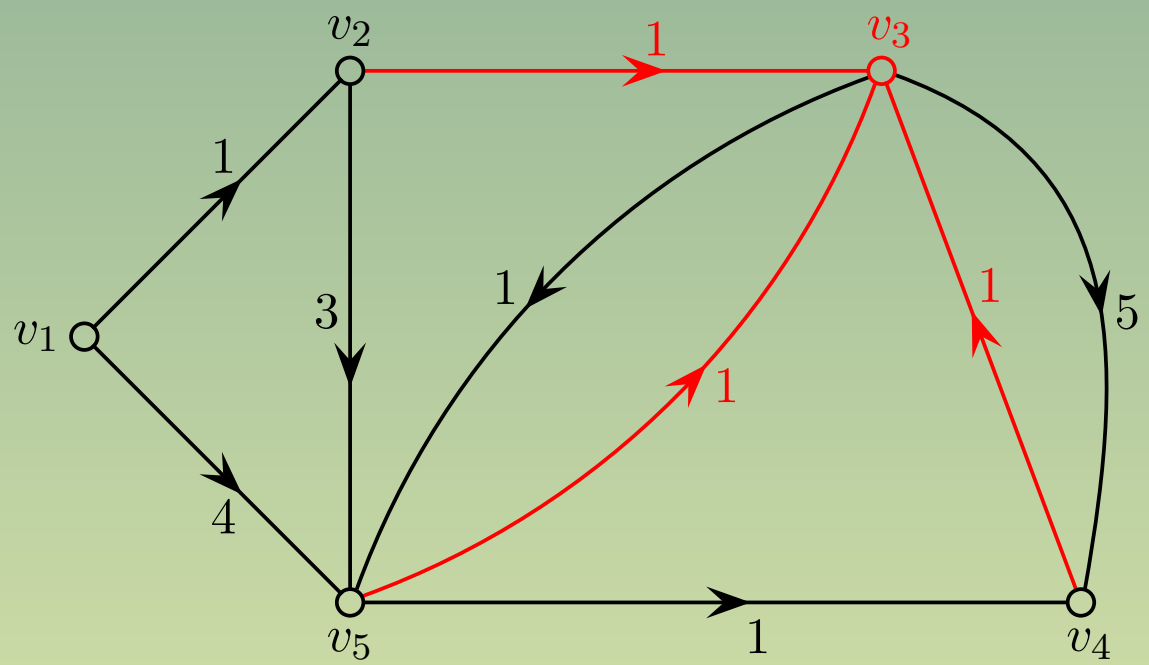
trenutni korak: 5

korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$, $v_5(v_3,3)$

korak 5: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$,

Sada prelazimo na vrh v_3. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_3. To su ovdje lukovi v_2v_3, v_4v_3 i v_5v_3.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 5

korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$, $v_5(v_3,3)$

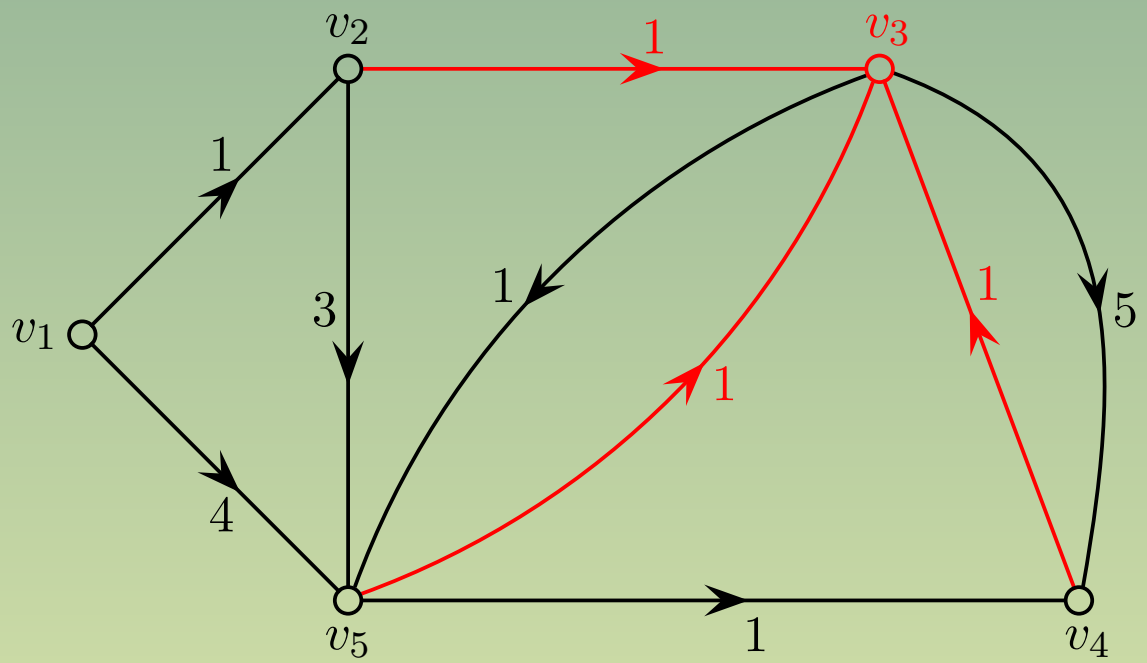
korak 5: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$,

Sada prelazimo na vrh v_3. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_3. To su ovdje lukovi v_2v_3, v_4v_3 i v_5v_3. Za svaki od tih lukova računamo

težina luka + druga koordinata oznake početka luka iz koraka 4

i odaberemo najmanju od tih vrijednosti.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 5

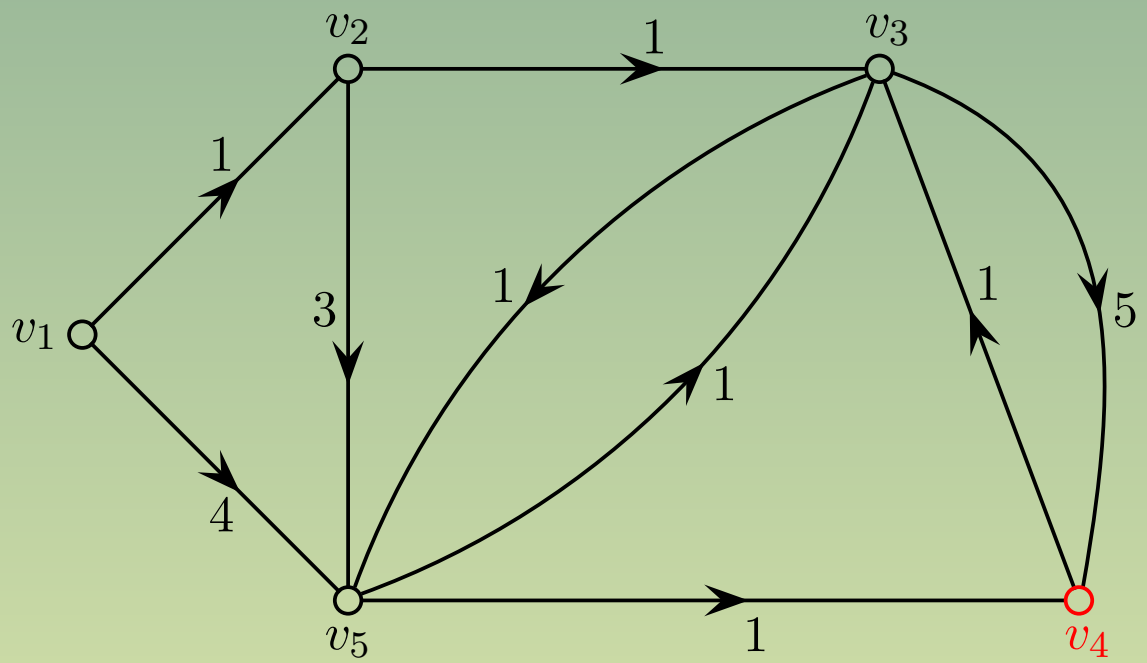
korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$, $v_5(v_3,3)$

korak 5: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$,

$$\begin{aligned} v_2v_3 &\rightarrow 1+1=2 \\ v_4v_3 &\rightarrow 1+4=5 \qquad \min\{2,5,4\}=2 \\ v_5v_3 &\rightarrow 1+3=4 \end{aligned}$$

Kako $\min\{2,5,4\}=2$ nije manji od trenutne druge koordinate vrha v_3, vrh v_3 u ovom koraku ne mijenja oznaku.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



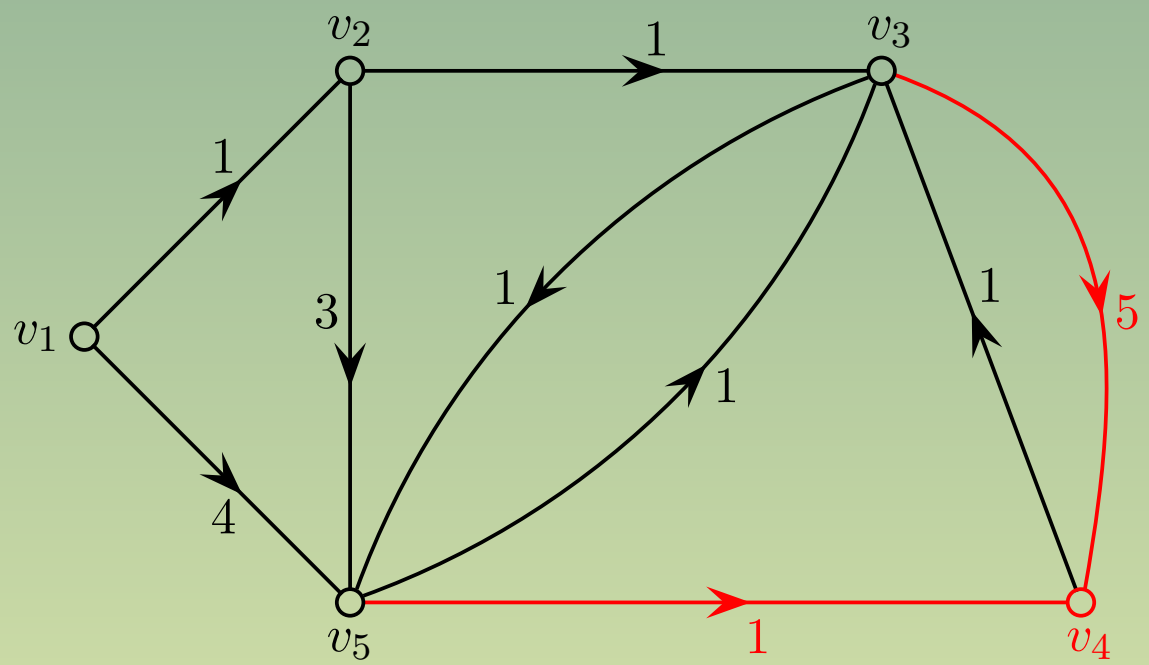
trenutni korak: 5

korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$, $v_5(v_3,3)$

korak 5: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$,

Sada prelazimo na vrh v_4.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



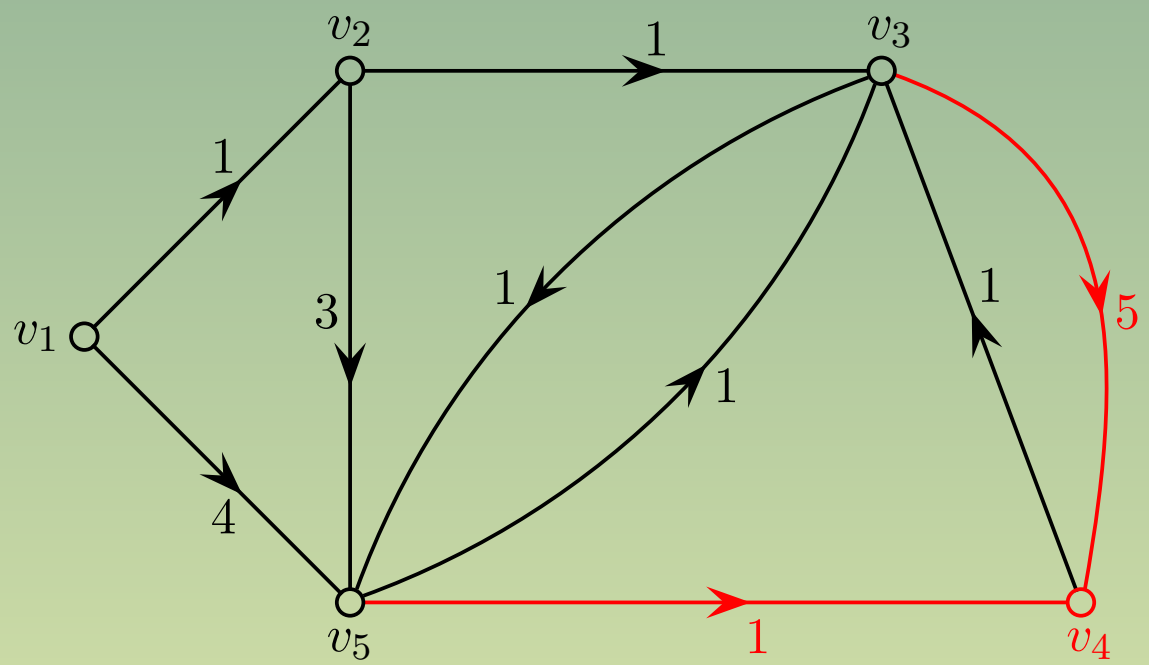
trenutni korak: 5

korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$, $v_5(v_3,3)$

korak 5: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$,

Sada prelazimo na vrh v_4. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_4. To su ovdje lukovi v_3v_4 i v_5v_4.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 5

korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$, $v_5(v_3,3)$

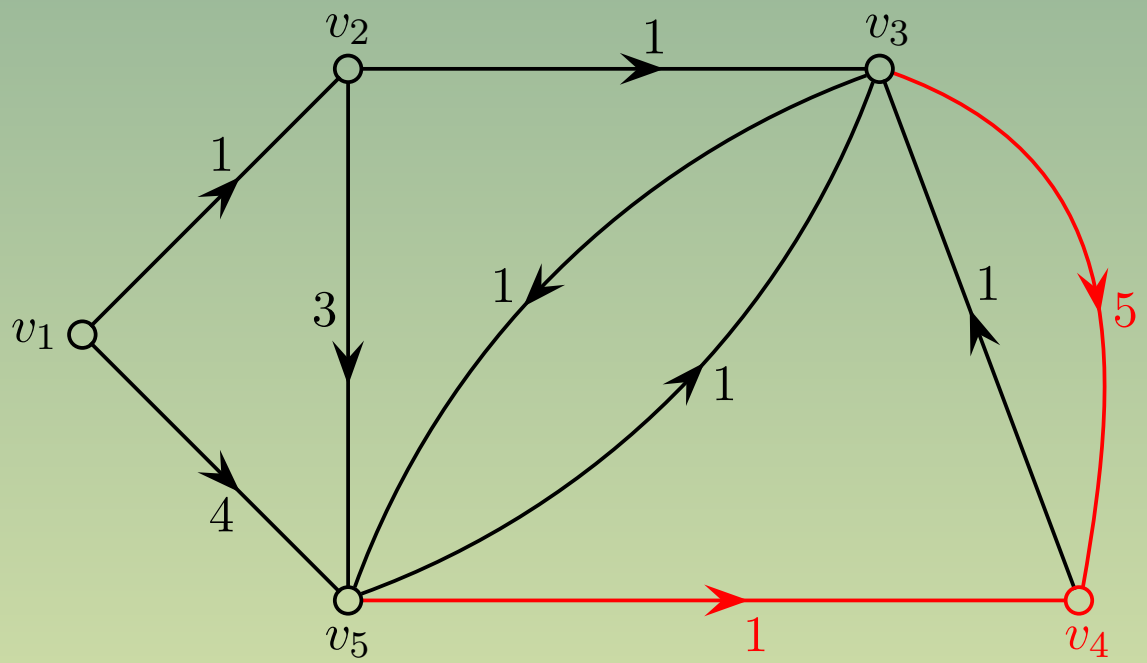
korak 5: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$,

Sada prelazimo na vrh v_4. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_4. To su ovdje lukovi v_3v_4 i v_5v_4. Za svaki od tih lukova računamo

težina luka + druga koordinata oznake početka luka iz koraka 4

i odaberemo najmanju od tih vrijednosti.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 5

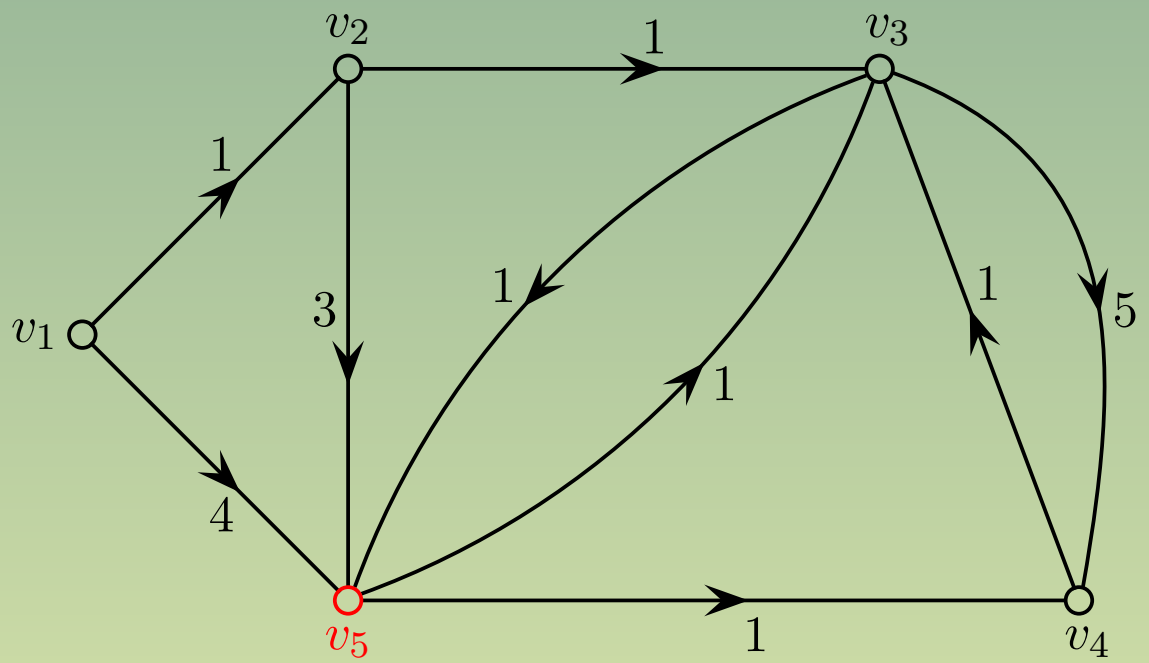
korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$, $v_5(v_3,3)$

korak 5: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$,

$$\begin{aligned} v_3v_4 &\rightarrow 5+2=7 \\ v_5v_4 &\rightarrow 1+3=4 \end{aligned} \qquad \min\{7,4\}=4$$

Kako $\min\{7,4\}=4$ nije manji od trenutne druge koordinate vrha v_4, vrh v_4 u ovom koraku ne mijenja oznaku.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



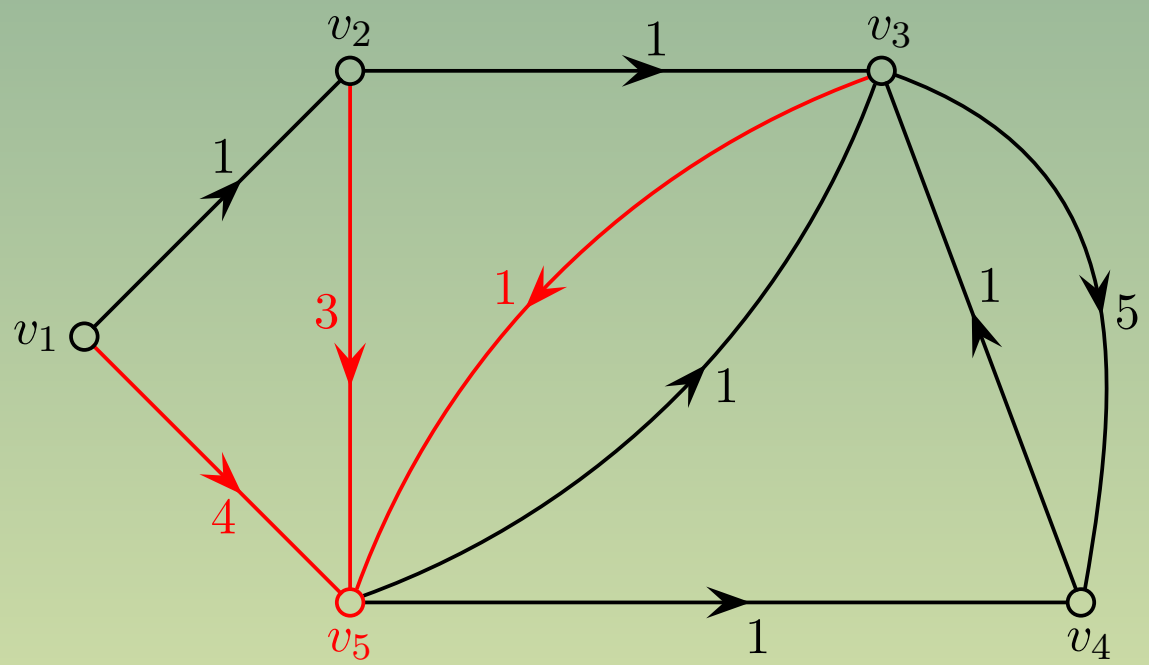
trenutni korak: 5

korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$, $v_5(v_3,3)$

korak 5: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$,

Sada prelazimo na vrh v_5.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



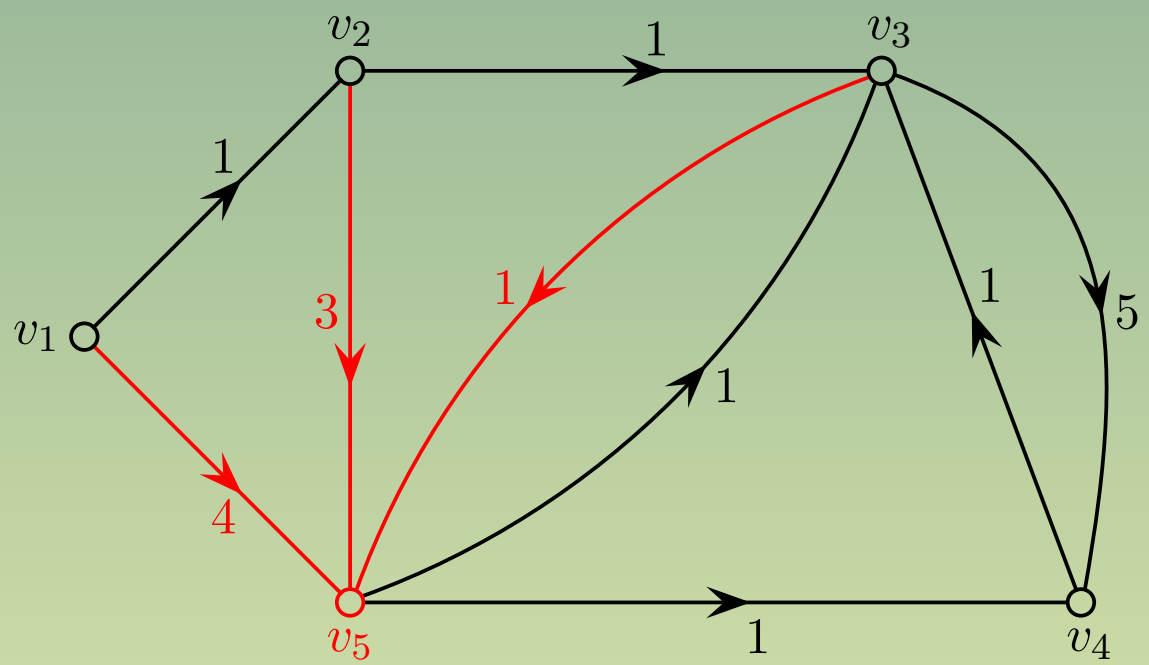
trenutni korak: 5

korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$, $v_5(v_3,3)$

korak 5: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$,

Sada prelazimo na vrh v_5. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_5. To su ovdje lukovi v_1v_5, v_2v_5 i v_3v_5.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 5

korak 4: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$, $v_5(v_3,3)$

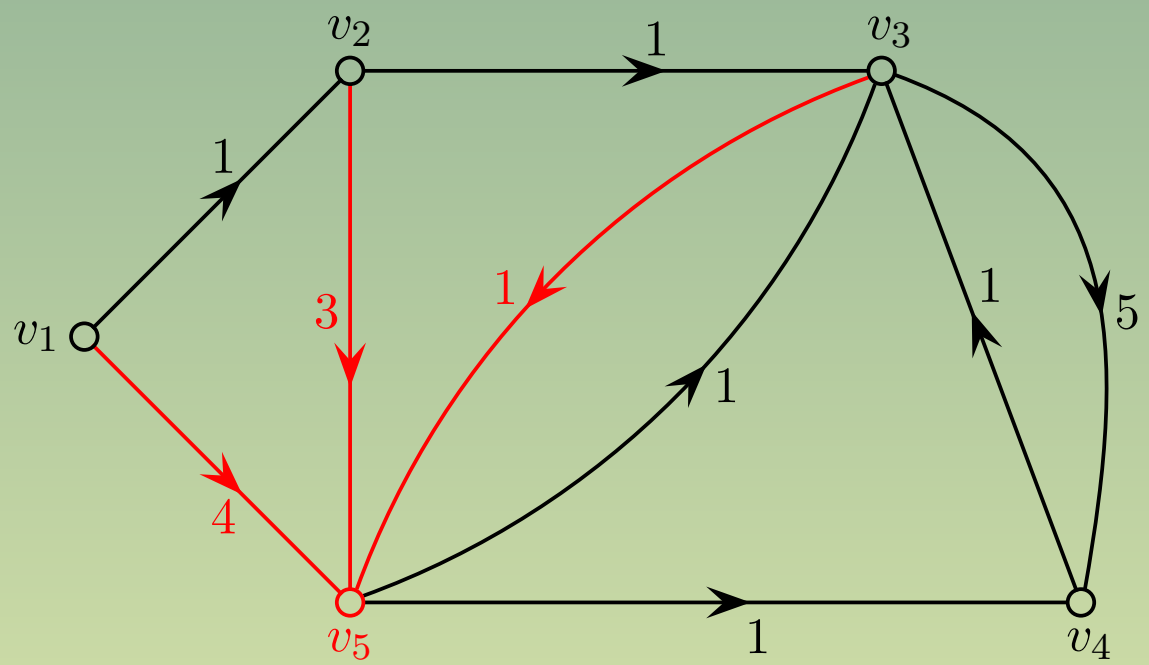
korak 5: $v_1(-,0)$, $v_2(v_1,1)$, $v_3(v_2,2)$, $v_4(v_5,4)$,

Sada prelazimo na vrh v_5. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_5. To su ovdje lukovi v_1v_5, v_2v_5 i v_3v_5. Za svaki od tih lukova računamo

težina luka + druga koordinata oznake početka luka iz koraka 4

i odaberemo najmanju od tih vrijednosti.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 5

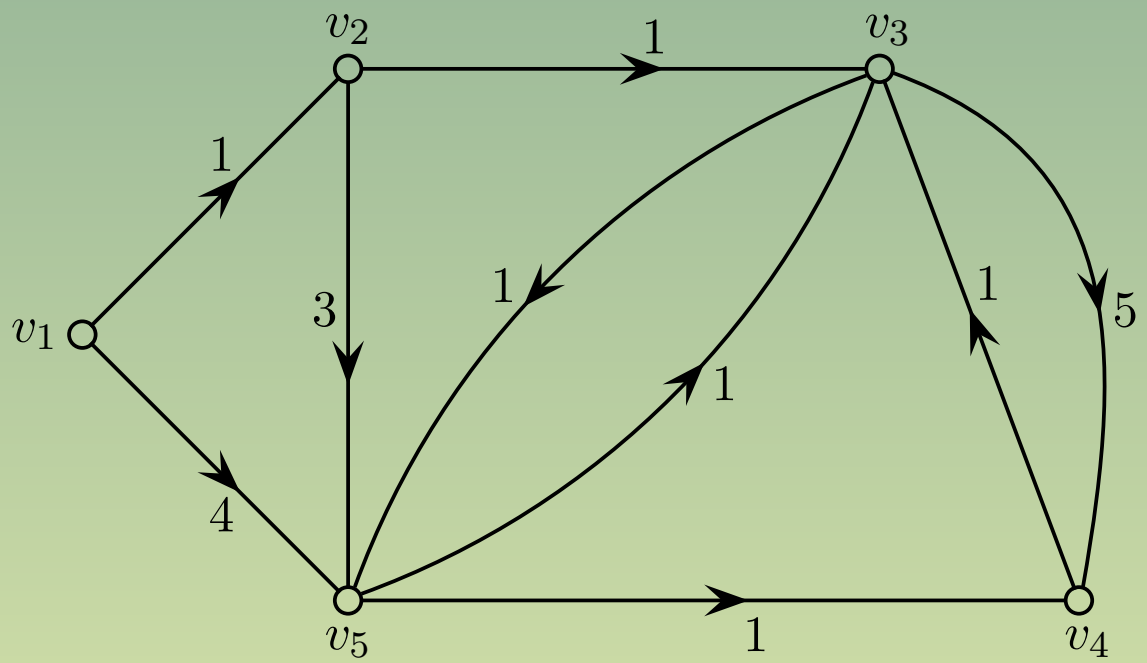
korak 4: $v_1(-,0),\ v_2(v_1,1),\ v_3(v_2,2),\ v_4(v_5,4),\ v_5(v_3,3)$

korak 5: $v_1(-,0),\ v_2(v_1,1),\ v_3(v_2,2),\ v_4(v_5,4),\ v_5(v_3,3)$

$$\begin{aligned} v_1v_5 &\rightarrow 4+0=4 \\ v_2v_5 &\rightarrow 3+1=4 \qquad \min\{4,4,3\}=3 \\ v_3v_5 &\rightarrow 1+2=3 \end{aligned}$$

Kako $\min\{4,4,3\}=3$ nije manji od trenutne druge koordinate vrha v_5, vrh v_5 u ovom koraku ne mijenja oznaku.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



trenutni korak: 5

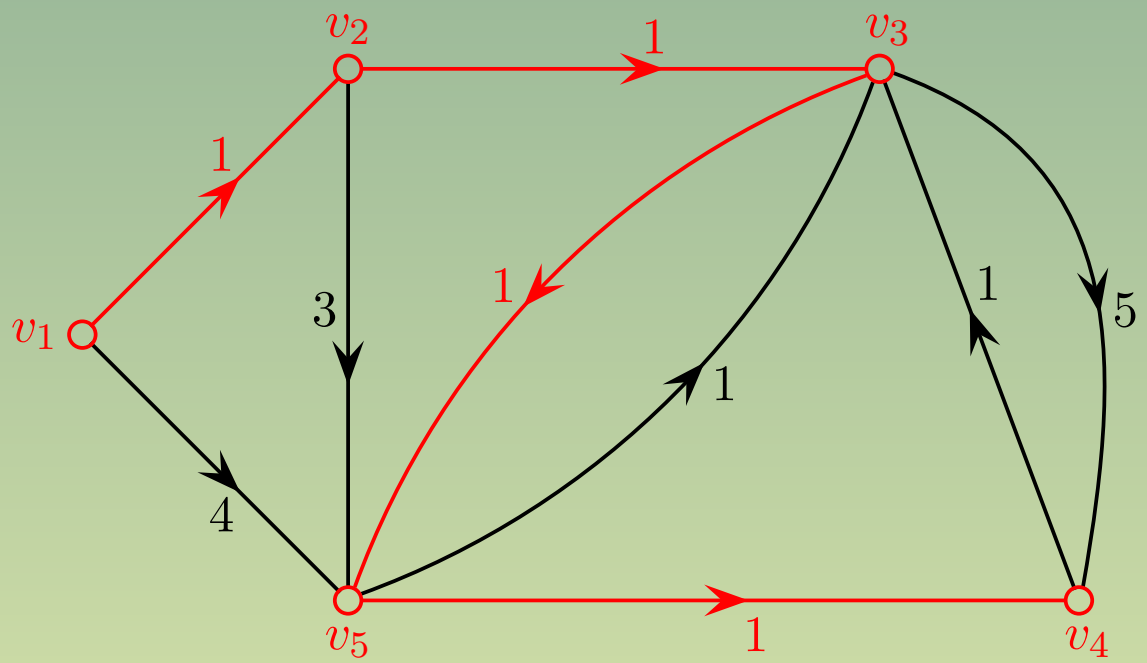
korak 4: $v_1(-,0),\ v_2(v_1,1),\ v_3(v_2,2),\ v_4(v_5,4),\ v_5(v_3,3)$

korak 5: $v_1(-,0),\ v_2(v_1,1),\ v_3(v_2,2),\ v_4(v_5,4),\ v_5(v_3,3)$

Kako su oznake svih vrhova u zadnjem koraku ostale nepromijenjene, algoritam je ispravan i vrijedi

$$d(v_1,v_2)=1,\ d(v_1,v_3)=2,\ d(v_1,v_4)=4,\ d(v_1,v_5)=3.$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



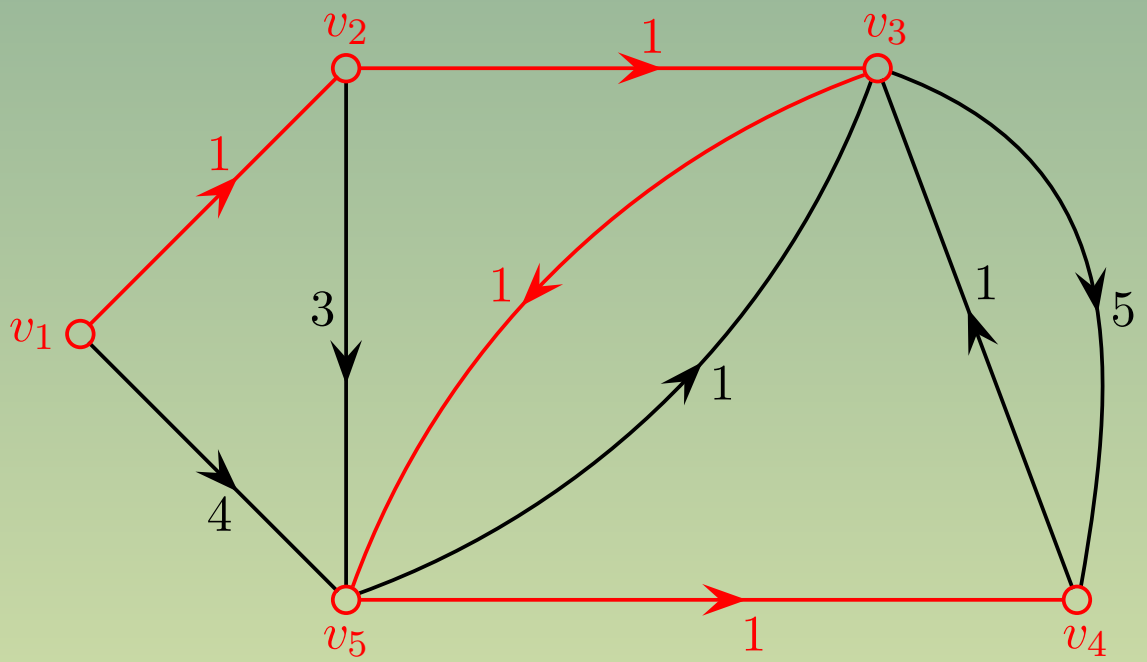
$v_1(-,0),\ v_2(v_1,1),\ v_3(v_2,2),\ v_4(v_5,4),\ v_5(v_3,3)$

objasni postupak

Pomoću prvih koordinata možemo rekonstruirati najkraće putove.

oznake vrhova	lukovi na najkraćim putovima
$v_2(v_1,1)$	v_1v_2
$v_3(v_2,2)$	v_2v_3
$v_4(v_5,4)$	v_5v_4
$v_5(v_3,3)$	v_3v_5

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Čitav postupak ćemo zapisivati u obliku tablice

	0	1	2	3	4	5
v_1	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$
v_2	∞	$v_1, 1$	$v_1, 1$	$v_1, 1$	$v_1, 1$	$v_1, 1$
v_3	∞	∞	$v_2, 2$	$v_2, 2$	$v_2, 2$	$v_2, 2$
v_4	∞	∞	$v_5, 5$	$v_5, 5$	$v_5, 4$	$v_5, 4$
v_5	∞	$v_1, 4$	$v_1, 4$	$v_3, 3$	$v_3, 3$	$v_3, 3$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.18.

Dokažite da se Bellman-Fordov algoritam može prekinuti i prije n-tog koraka ako su za dva uzastopna koraka brojevi $d_i(2), \ldots, d_i(n)$ jednaki, tj. ako su u tablici dva uzastopna stupca jednaka.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.18.

Dokažite da se Bellman-Fordov algoritam može prekinuti i prije n-tog koraka ako su za dva uzastopna koraka brojevi $d_i(2), \ldots, d_i(n)$ jednaki, tj. ako su u tablici dva uzastopna stupca jednaka.

Rješenje.

U drugom koraku algoritma, za svaki j vrijednosti $d_i(j)$ ovise samo o vrijednostima $d_{i-1}(k)$ i težinama lukova. Iz toga slijedi da ako za neki $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ vrijedi da je $d_{i-1}(j) = d_i(j)$ za svaki j, tada je

$$d_{i-1}(j) = d_i(j) = d_{i+1}(j) = \cdots = d_{n-1}(j) = d_n(j).$$

Dakle, ukoliko su za dva uzastopna koraka brojevi $d_i(2), \ldots, d_i(n)$ jednaki, tada se Bellman-Fordov algoritam može u tom trenutku prekinuti jer su dobivene vrijednosti duljina zapravo već i željene najkraće udaljenosti.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.19.

Da li nakon izvršenja Bellman-Fordovog algoritma svi vrhovi digrafa moraju imati konačne oznake?

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.19.

Da li nakon izvršenja Bellman-Fordovog algoritma svi vrhovi digrafa moraju imati konačne oznake?

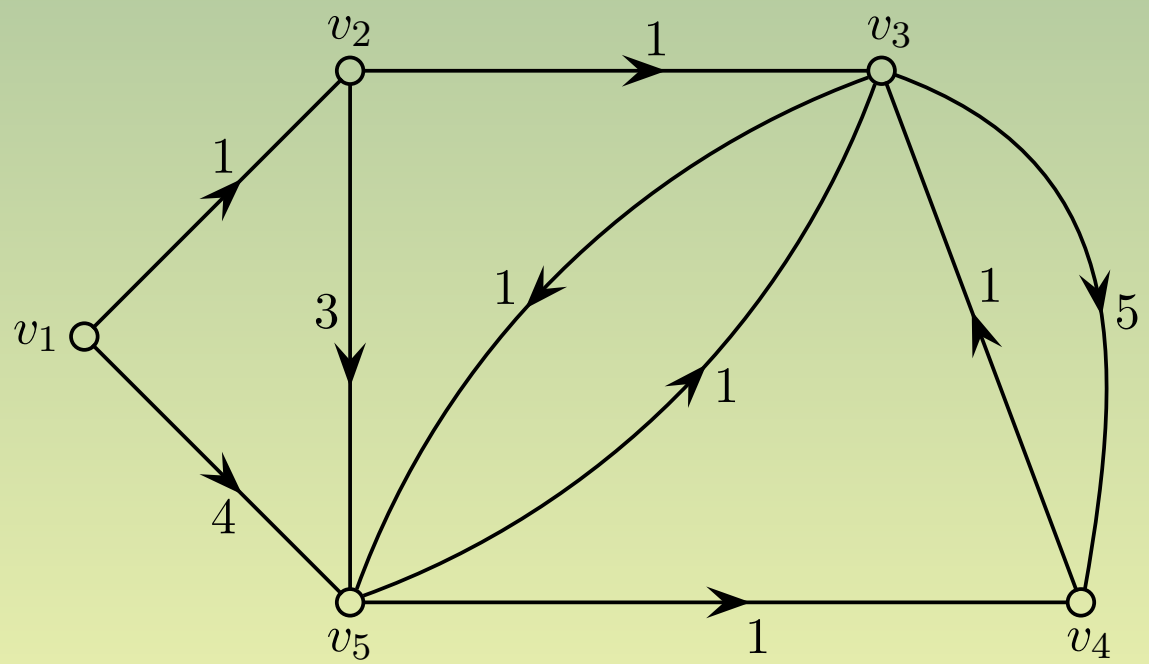
Rješenje.

Ne, ne moraju. Ako ne postoji usmjereni put od vrha v_1 do vrha v_i, tada će vrh v_i nakon izvršenja algoritma i dalje imati oznaku ∞.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.20.

Pomoću Bellman-Fordovog algoritma pronađite najkraće putove od vrha v_4 do svih preostalih vrhova u digrafu

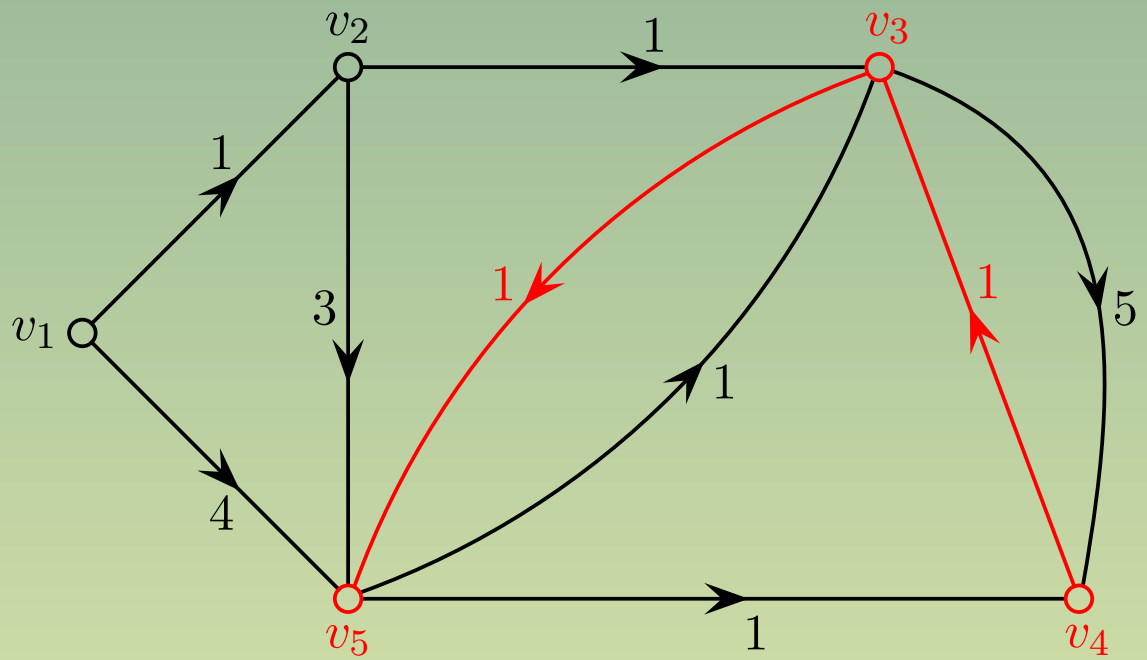


Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.

Ovdje vrh v_4 zapravo sada predstavlja vrh v_1 iz algoritma. Mogli smo baš njega nazvati s v_1, ali dobro znamo da se ne smijemo emotivno vezati za slova pa zbog tog razloga neka ostane ime v_4. Uostalom, zašto bi se vrh od kojeg tražimo najkraće putove uvijek morao zvati v_1. Nećemo detaljno objašnjavati svaki korak, nego ćemo samo dati konačno rješenje u obliku tablice. Sami provedite detalje na analogni način kako je to objašnjeno ranije. Uočite da će vrhovi v_1 i v_2 na kraju algoritma imati oznake ∞ jer ne postoje usmjereni putovi od vrha v_4 prema vrhovima v_1 i v_2. U vrh v_1 ne ulazi niti jedan luk pa onda jednostavno nema načina da on promijeni svoju početnu oznaku u nekom trenutku. Također uočite da nećemo algoritam provoditi u 5 koraka, nego ćemo ga završiti ranije zbog toga što su treći i četvrti stupac u tablici jednaki. ◂ primjer 9.18.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

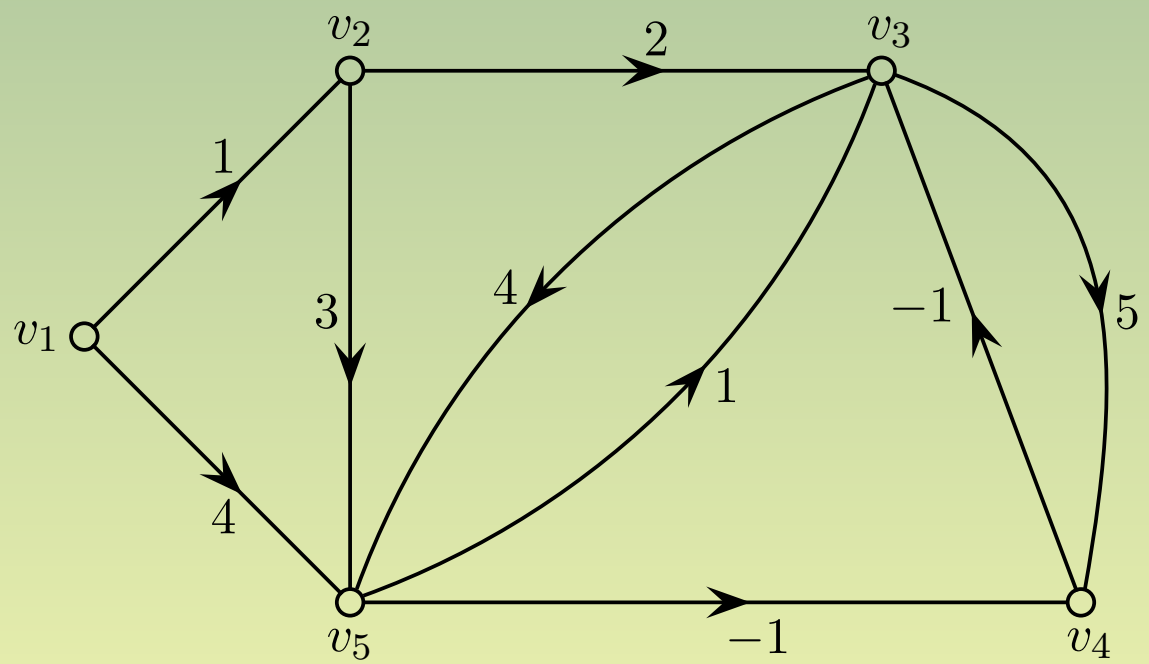


	0	1	2	3
v_4	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$
v_1	∞	∞	∞	∞
v_2	∞	∞	∞	∞
v_3	∞	$v_4, 1$	$v_4, 1$	$v_4, 1$
v_5	∞	∞	$v_3, 2$	$v_3, 2$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.21.

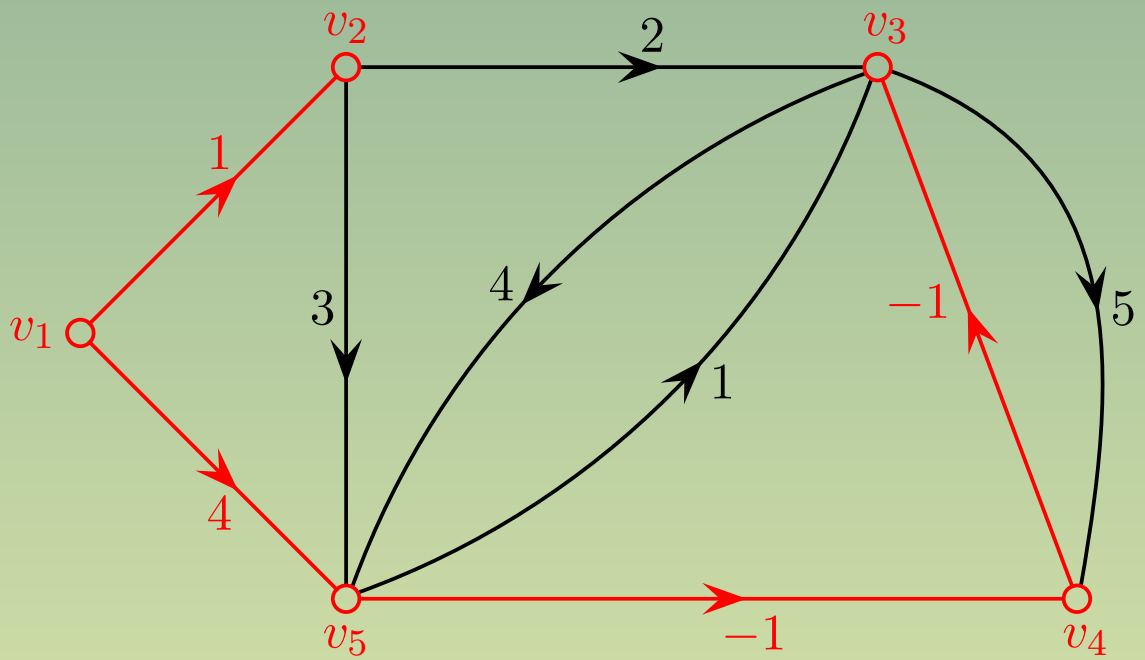
Pomoću Bellman-Fordovog algoritma pronađite najkraće putove od vrha v_1 do svih preostalih vrhova u digrafu



Rješenje.

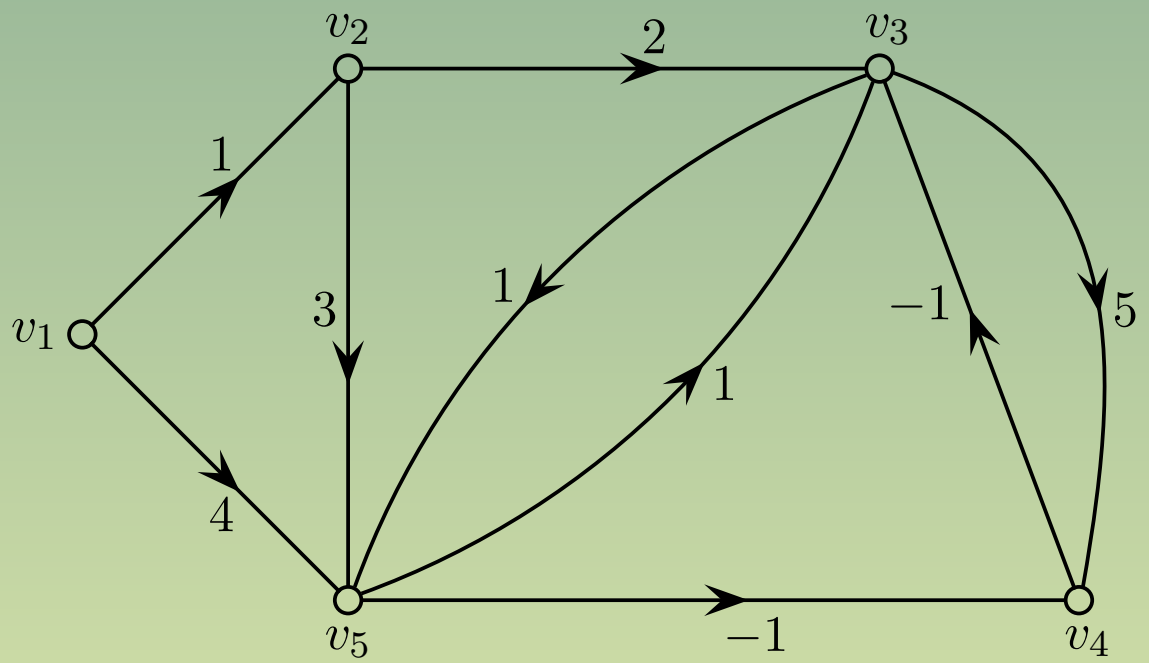
Sjetimo se, na ovom digrafu je propao Dijkstrin algoritam zbog negativnih težina lukova. Vidjet ćemo da Bellman-Fordov algoritam radi ispravno na ovakvom digrafu. Nećemo detaljno objašnjavati svaki korak, nego ćemo rješenje dati u obliku tablice. Sami za vježbu provedite sve detalje. Uočite da algoritam radi ispravno zbog toga jer su posljednja dva stupca u tablici jednaka.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



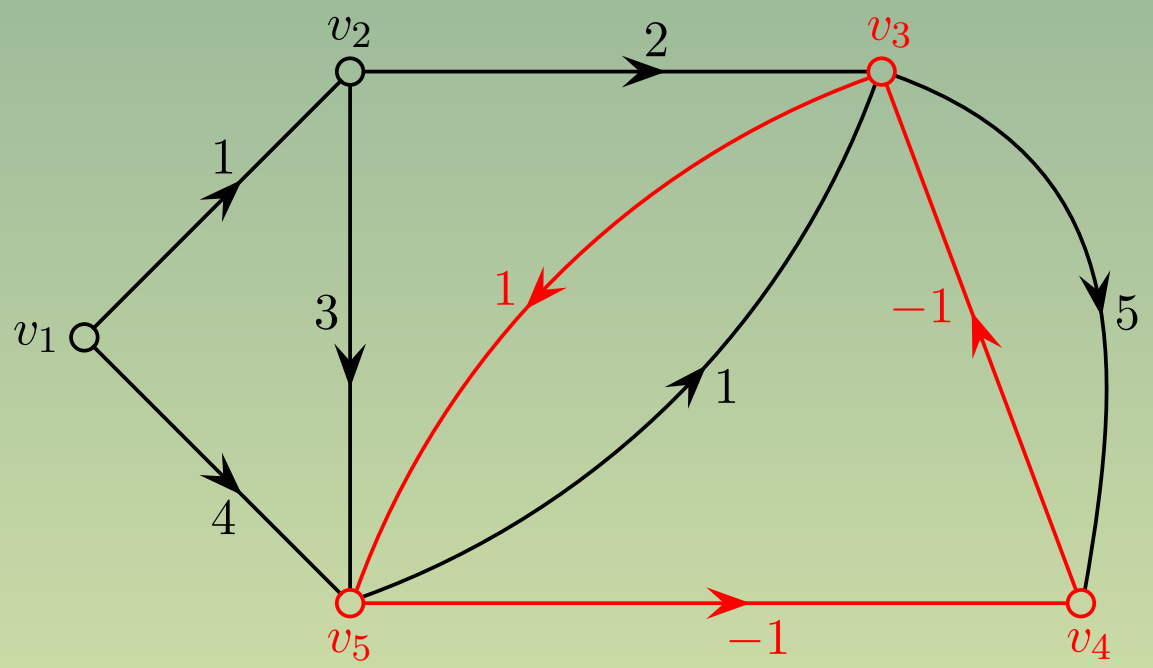
	0	1	2	3	4	5
v_1	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$
v_2	∞	$v_1, 1$	$v_1, 1$	$v_1, 1$	$v_1, 1$	$v_1, 1$
v_3	∞	∞	$v_2, 3$	$v_4, 2$	$v_4, 2$	$v_4, 2$
v_4	∞	∞	$v_5, 3$	$v_5, 3$	$v_5, 3$	$v_5, 3$
v_5	∞	$v_1, 4$	$v_1, 4$	$v_1, 4$	$v_1, 4$	$v_1, 4$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



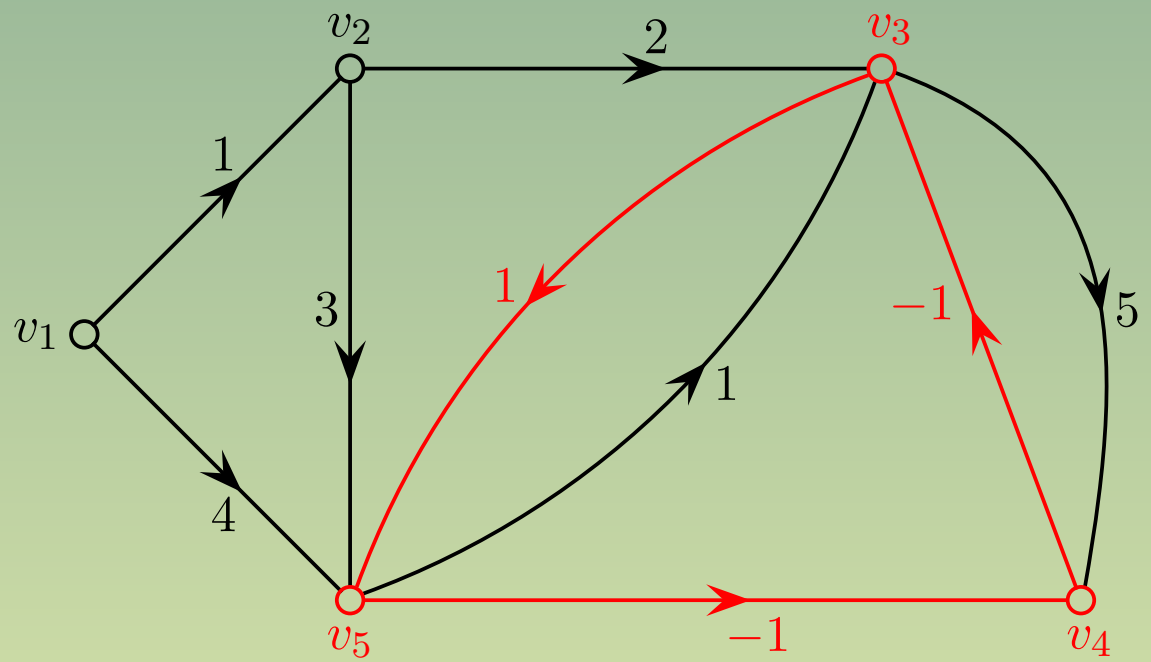
Zadani digraf ima usmjereni ciklus negativne težine.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



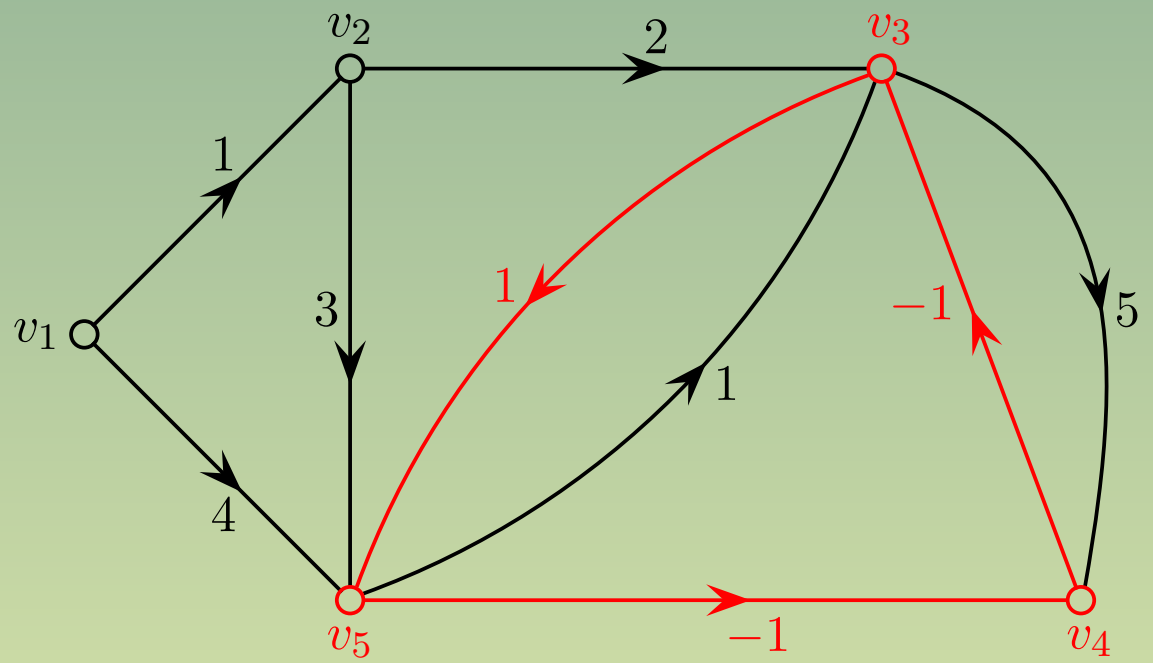
Zadani digraf ima usmjereni ciklus negativne težine. To je usmjereni ciklus $v_5v_4v_3v_5$ čija težina je jednaka $-1 + (-1) + 1 = -1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



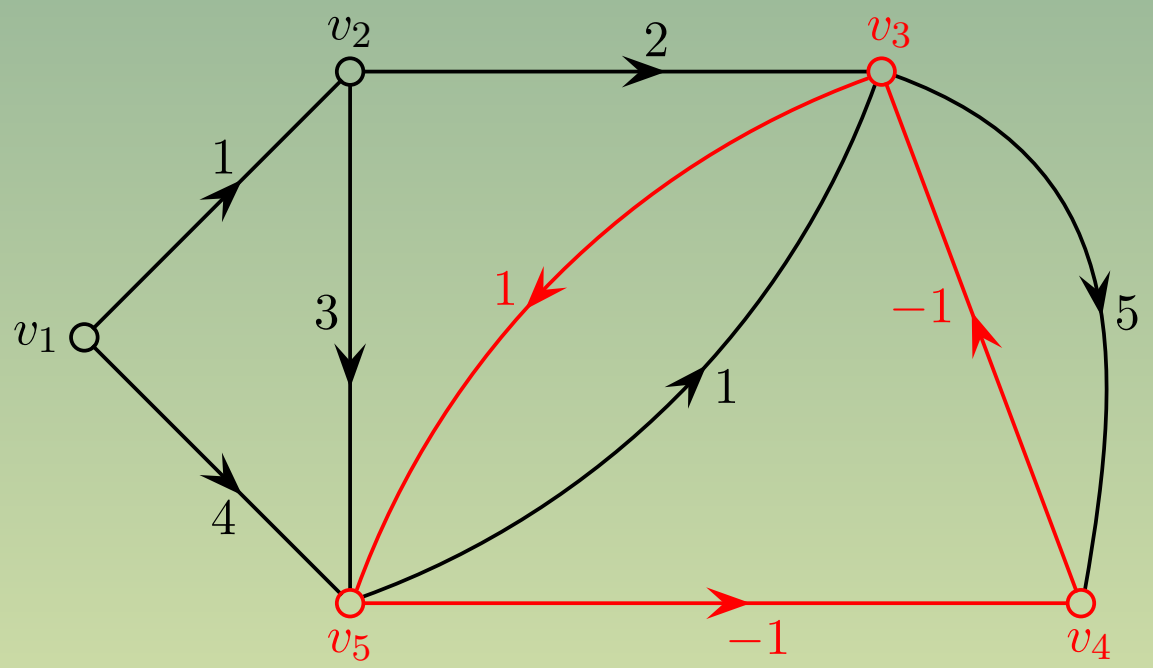
Zadani digraf ima usmjereni ciklus negativne težine. To je usmjereni ciklus $v_5v_4v_3v_5$ čija težina je jednaka $-1+(-1)+1=-1$. Takva situacija je problematična za Bellman-Fordov algoritam. Objasnimo ugrubo zbog čega nastaju problemi pa ćemo onda kasnije provesti algoritam u potpunosti i vidjeti da on zaista ne funkcionira u ovakvom slučaju.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



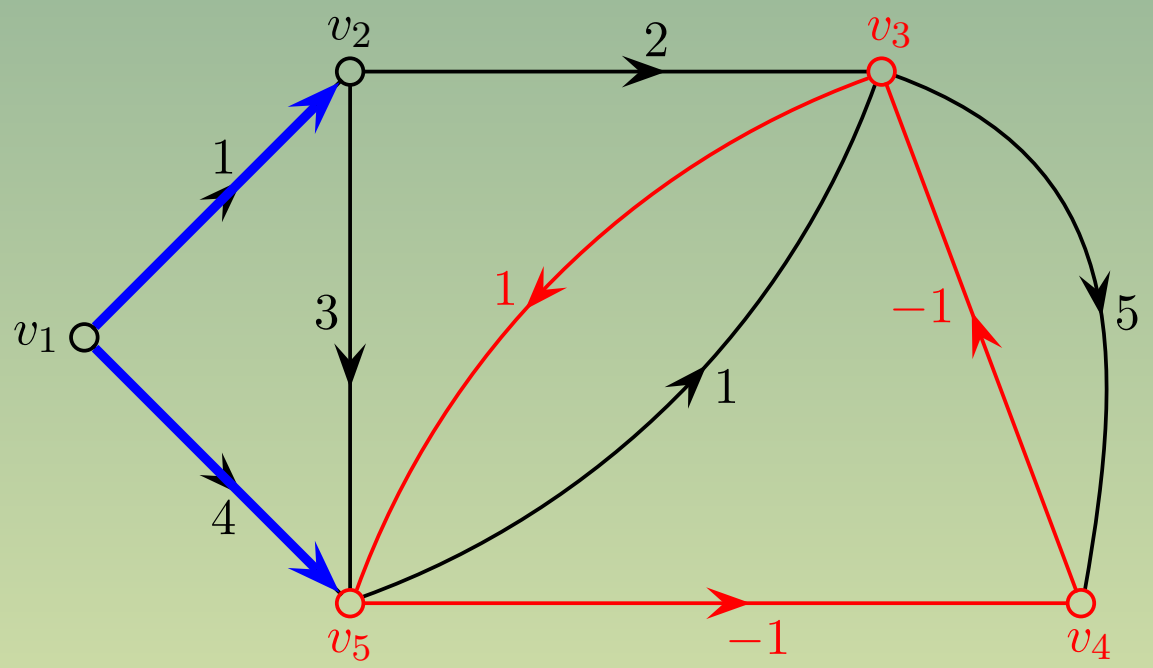
Pretpostavimo da tražimo najkraće putove od vrha v_1.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



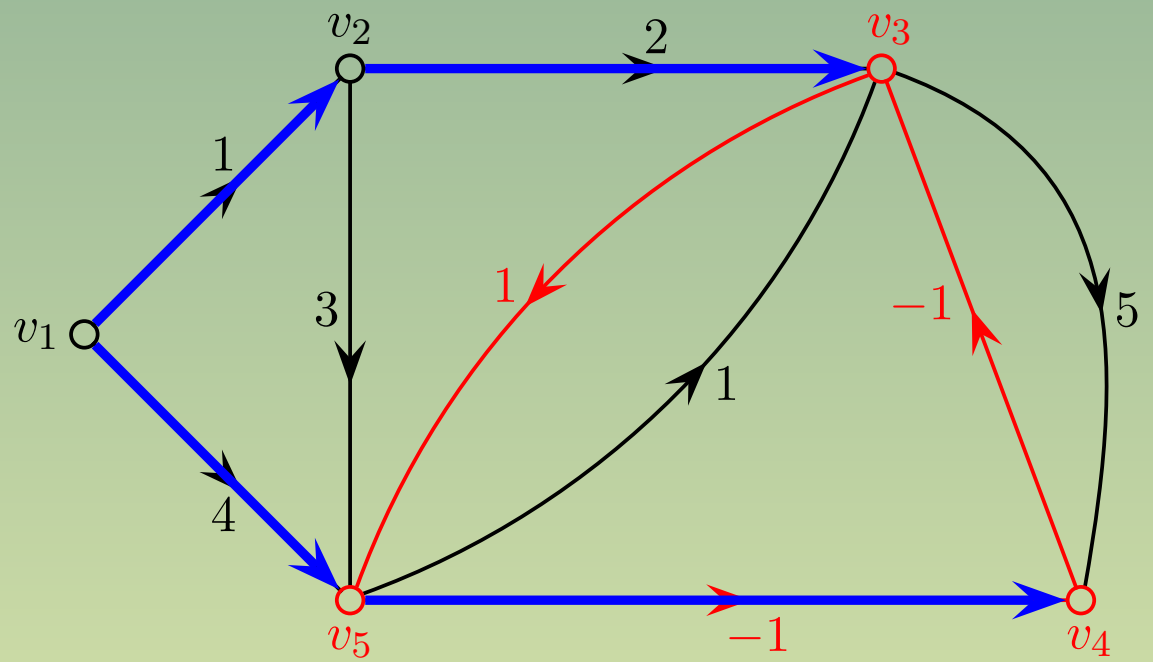
Pretpostavimo da tražimo najkraće putove od vrha v_1. Jasno je da je v_1v_5 najkraći put od v_1 do v_5 i on je težine 4. Isto tako, najkraći put od v_1 do v_4 je npr. $v_1v_5v_4$ i on je težine 3. Pogledajmo što bismo dobili Bellman-Fordovim algoritmom.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



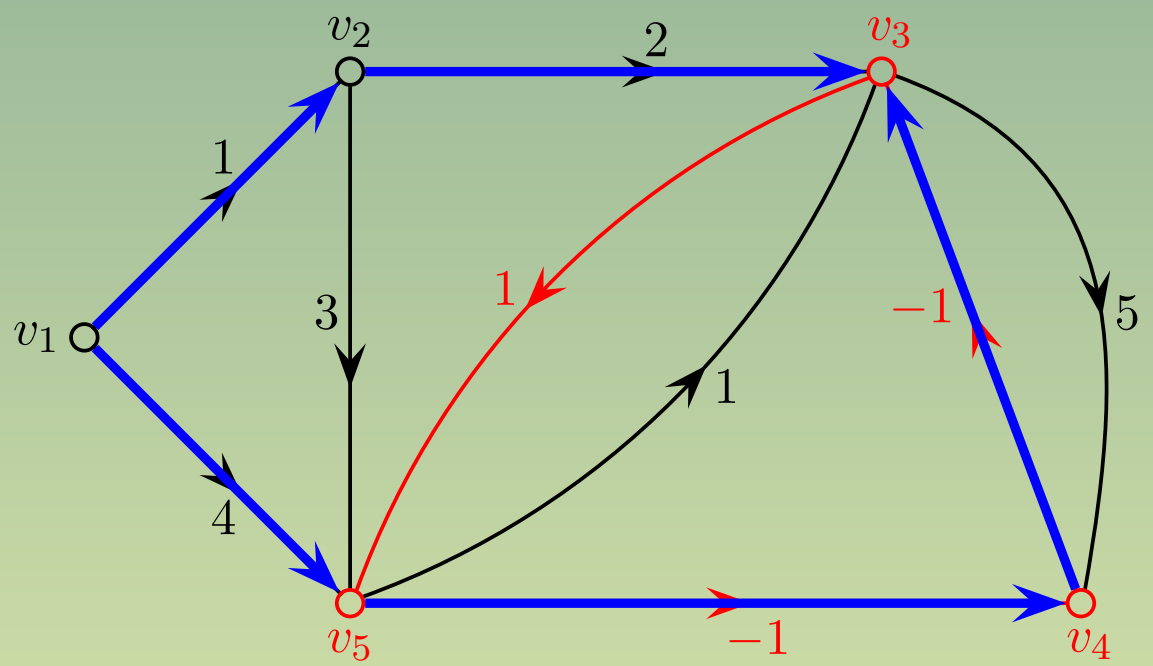
U prvom koraku će vrhovi v_2 i v_5 preko vrha v_1 dobiti oznake $v_2(v_1, 1)$ i $v_5(v_1, 4)$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



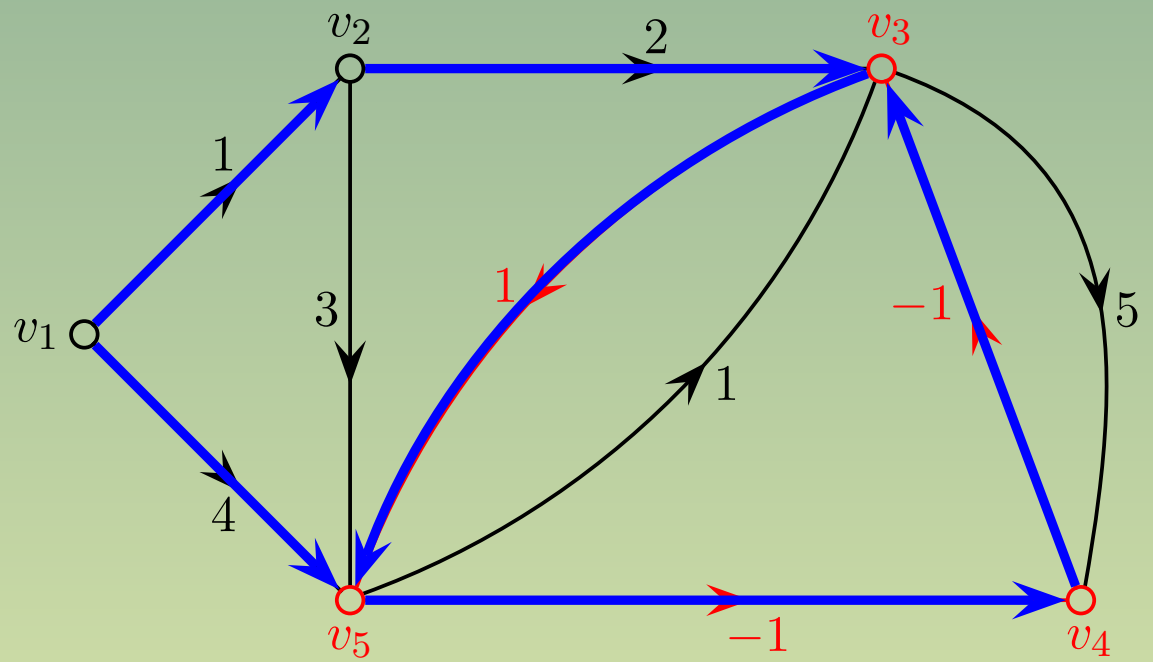
U prvom koraku će vrhovi v_2 i v_5 preko vrha v_1 dobiti oznake $v_2(v_1, 1)$ i $v_5(v_1, 4)$. U drugom koraku će vrh v_3 preko vrha v_2 dobiti oznaku $v_3(v_2, 3)$, a vrh v_4 će preko vrha v_5 dobiti oznaku $v_4(v_5, 3)$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



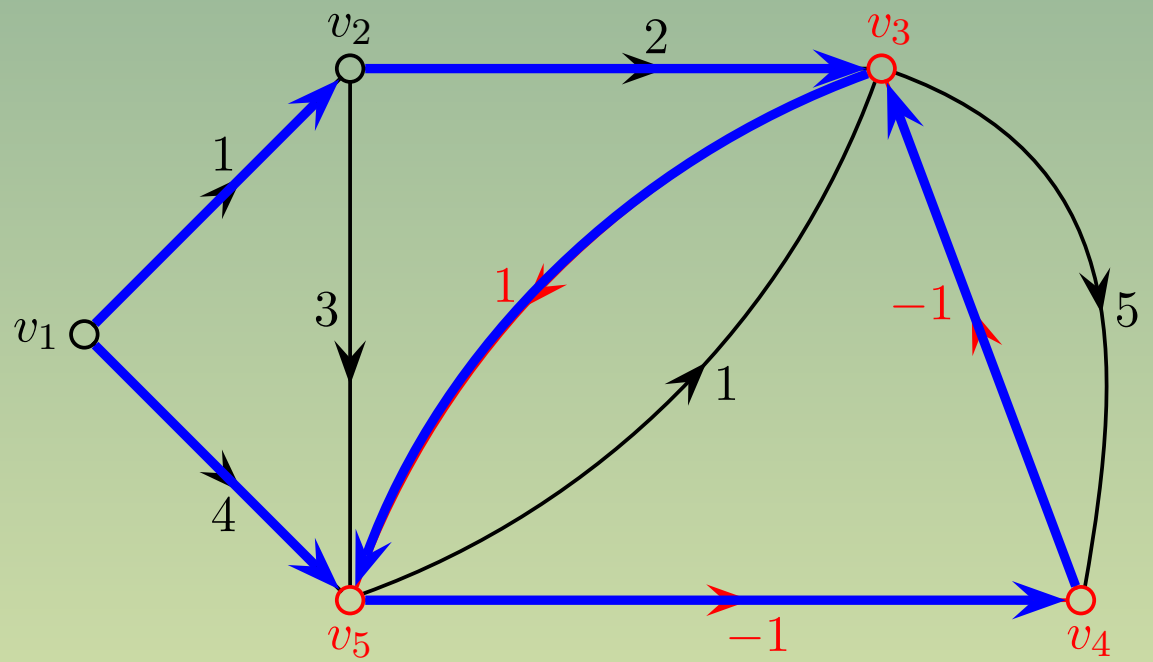
U prvom koraku će vrhovi v_2 i v_5 preko vrha v_1 dobiti oznake $v_2(v_1, 1)$ i $v_5(v_1, 4)$. U drugom koraku će vrh v_3 preko vrha v_2 dobiti oznaku $v_3(v_2, 3)$, a vrh v_4 će preko vrha v_5 dobiti oznaku $v_4(v_5, 3)$. U trećem koraku vrh v_3 dobiva novu oznaku $v_3(v_4, 2)$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



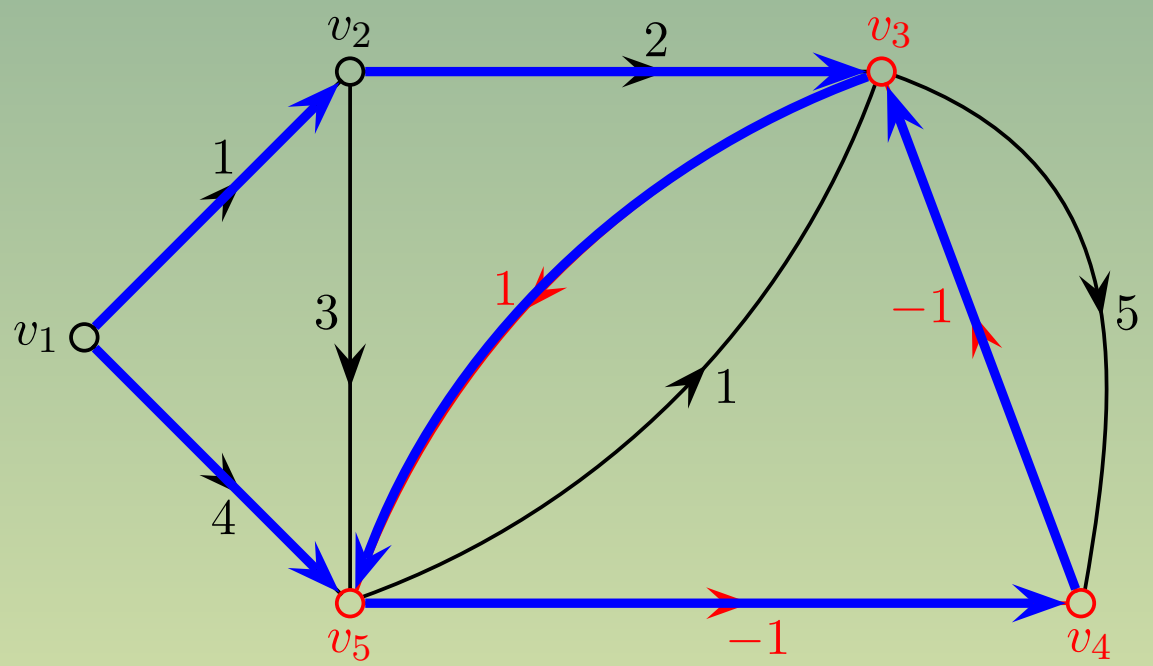
U prvom koraku će vrhovi v_2 i v_5 preko vrha v_1 dobiti oznake $v_2(v_1, 1)$ i $v_5(v_1, 4)$. U drugom koraku će vrh v_3 preko vrha v_2 dobiti oznaku $v_3(v_2, 3)$, a vrh v_4 će preko vrha v_5 dobiti oznaku $v_4(v_5, 3)$. U trećem koraku vrh v_3 dobiva novu oznaku $v_3(v_4, 2)$. U četvrtom koraku vrh v_5 preko vrha v_3 dobiva novu oznaku $v_5(v_3, 3)$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



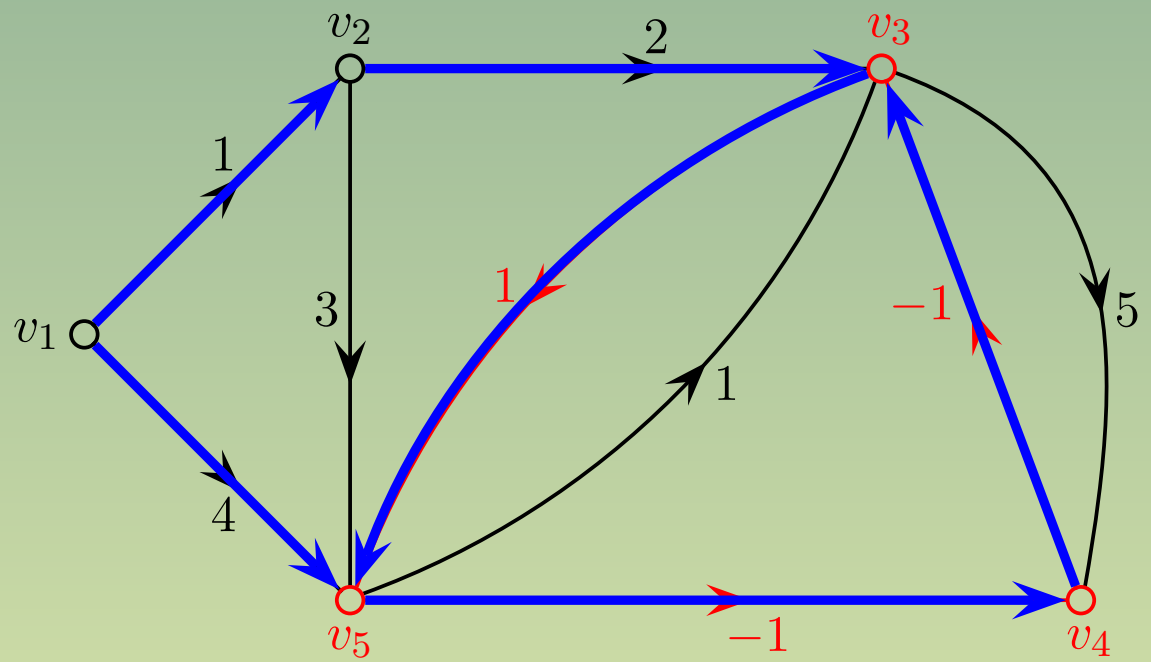
Što se sada dogodilo? Sjetimo se, najprije je vrh v_5 imao oznaku $(v_1, 4)$ i to je bila dobra oznaka jer je zaista v_1v_5 najkraći put od v_1 do v_5 i duljine je 4.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



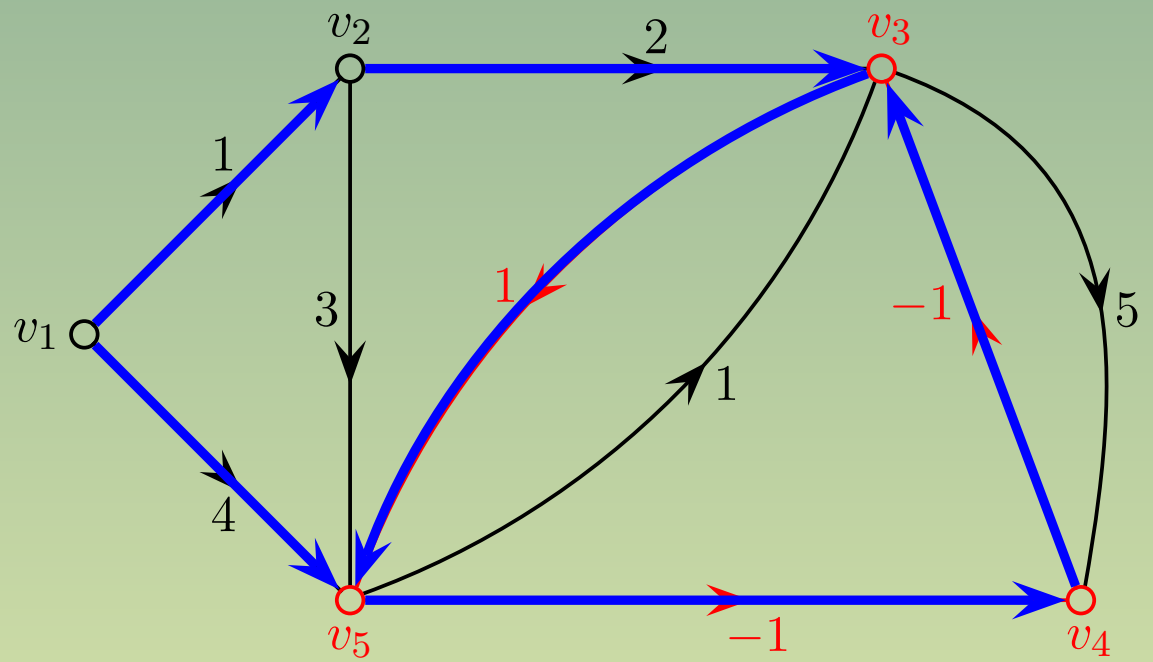
Što se sada dogodilo? Sjetimo se, najprije je vrh v_5 imao oznaku $(v_1, 4)$ i to je bila dobra oznaka jer je zaista v_1v_5 najkraći put od v_1 do v_5 i duljine je 4. Nakon četvrtog koraka vrh v_5 dobiva oznaku $(v_3, 3)$ koja više nije dobra jer najkraći put duljine 3 od vrha v_1 do vrha v_5 ne postoji.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



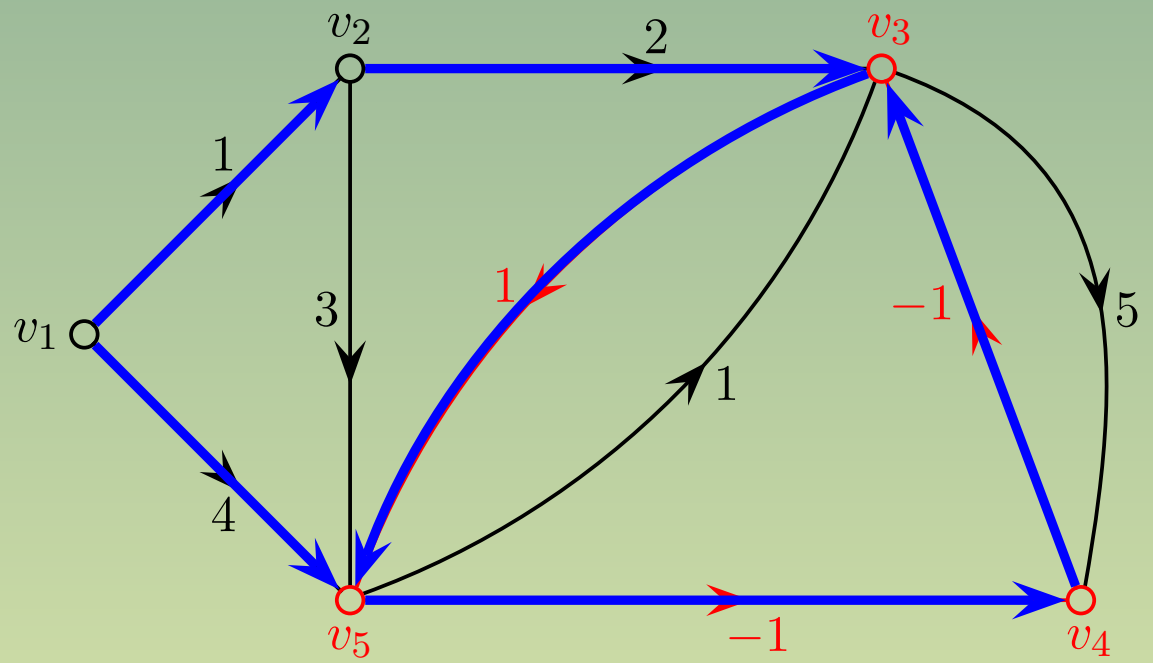
U čemu je problem? Ako malo bolje pogledamo, algoritam za vrh v_5 zapravo daje šetnju $v_1v_5v_4v_3v_5$ od v_1 do v_5 koja jest duljine 3, ali to nije put. Problem je što smo obišli čitav ciklus $v_5v_4v_3v_5$ negativne težine i u tom trenutku, za vrh v_5 koji je imao drugu koordinatu jednaku 4, kada smo njoj dodali negativni broj (težinu ciklusa), ona se smanjila i dobili smo netočni rezultat.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Nije problem sa usmjerenim ciklusima pozitivnih težina jer, konkretno ovdje, da je usmjereni ciklus $v_5v_4v_3v_5$ bio pozitivne težine, tada bismo drugoj koordinati vrha v_5 (koja je jednaka 4) dodavali pozitivni broj i dobili broj veći od 4 pa algoritam onda ne bi mijenjao oznaku vrha v_5 (oznaka se mijenja samo ako dobijemo manju drugu koordinatu od trenutne).

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

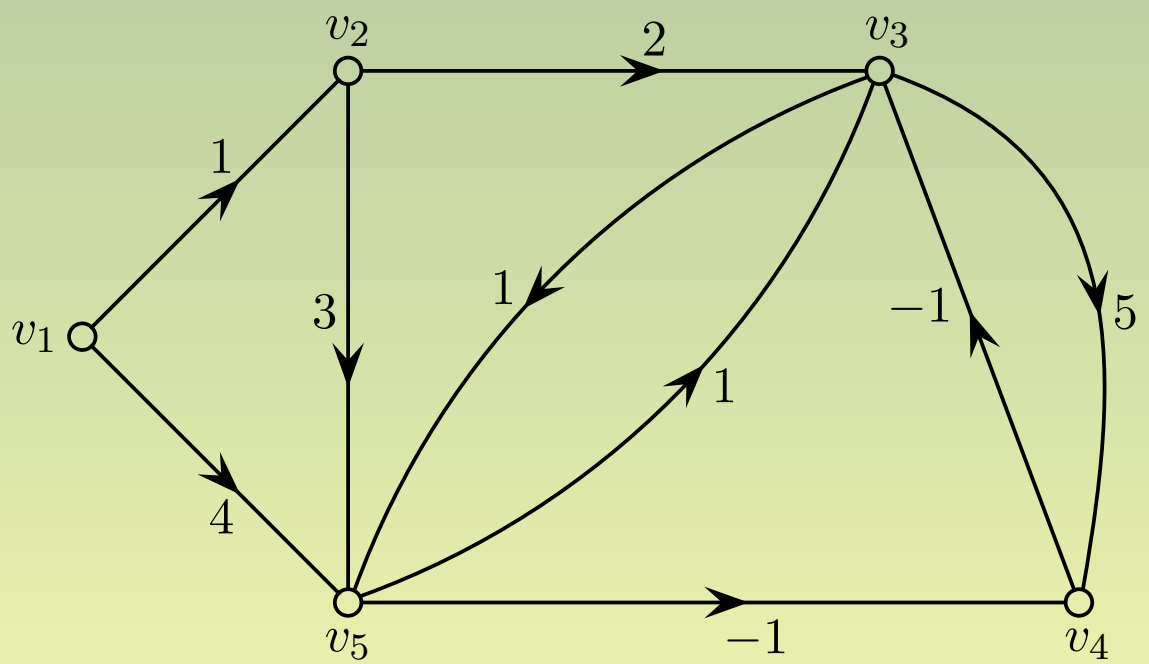


Na sljedećem primjeru ćemo provesti u potpunosti Bellman-Fordov algoritam za ovaj digraf i vidjeti kako u zadnjem koraku tog algoritma možemo saznati da li algoritam radi ispravno ili ne radi bez da gledamo na digraf. Već smo to na početku bili malo komentirali, ali možda nam tada to nije puno značilo. Nakon ove diskusije nam vjerojatno to ima više smisla.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.22.

Pomoću Bellman-Fordovog algoritma pronađite najkraće putove od vrha v_1 do svih preostalih vrhova u digrafu i pokažite da algoritam ne radi dobro u ovom slučaju.



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.

	0	1	2	3	4	5
v_1	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$
v_2	∞	$v_1, 1$	$v_1, 1$	$v_1, 1$	$v_1, 1$	$v_1, 1$
v_3	∞	∞	$v_2, 3$	$v_4, 2$	$v_4, 2$	$v_4, 2$
v_4	∞	∞	$v_5, 3$	$v_5, 3$	$v_5, 3$	$v_5, 2$
v_5	∞	$v_1, 4$	$v_1, 4$	$v_1, 4$	$v_3, 3$	$v_3, 3$

Vidimo da posljednja dva stupca nisu jednaka pa zaključujemo da algoritam ne radi ispravno. Ne samo da nije dobar najkraći put od vrha v_1 do vrha v_4 (jer se tu zadnja dva stupca razlikuju), nego nije dobar niti najkraći put od v_1 do v_5 bez obzira što se na tom mjestu zadnja dva stupca ne razlikuju.

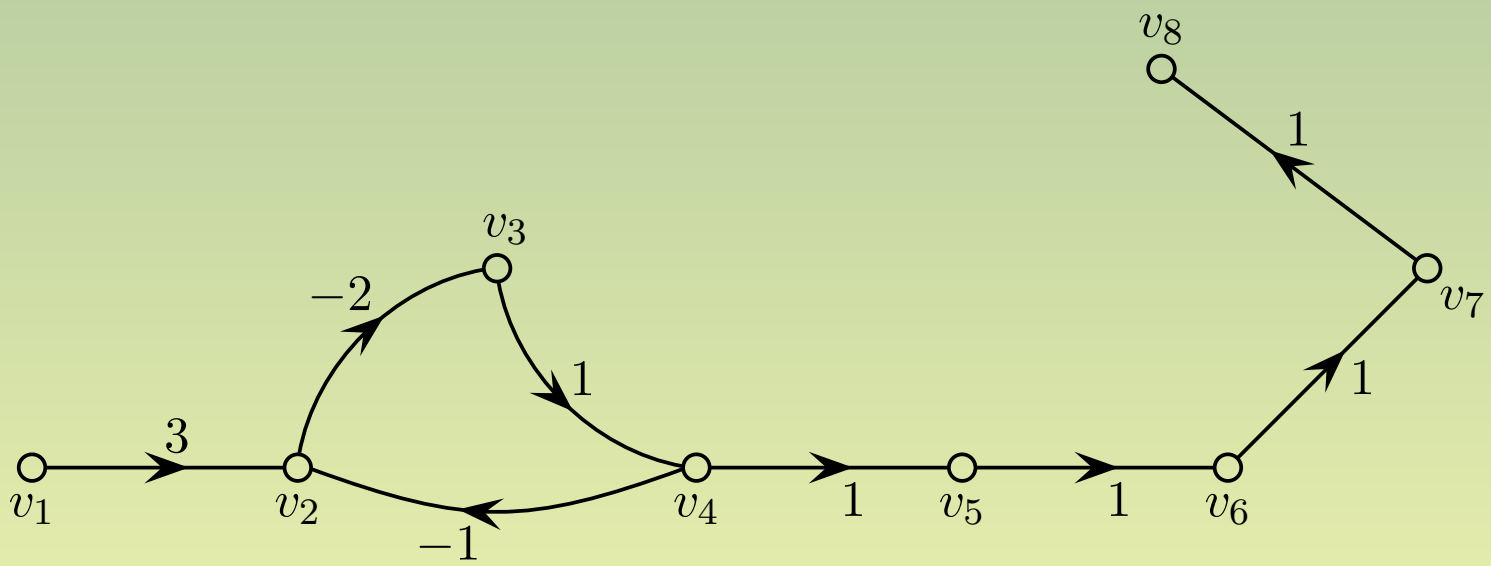
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dakle, ako se zadnja dva stupca razlikuju barem na jednom mjestu, algoritam ne radi ispravno i zaključujemo da digraf sadrži usmjerene cikluse negativnih težina. U tom slučaju nemamo nikakve garancije da je bilo koji od najkraćih putova dobar, čak ni ako se na pojedinom mjestu zadnja dva stupca ne razlikuju. Na ovom primjeru su dobri najkraći putovi za vrhove v_2 i v_3, ali to tek znamo ako pogledamo digraf, a sami algoritam to ne garantira i mora vratiti error. Gledajući ovaj primjer možda pomišljamo da se greške mogu dogoditi samo za vrhove koji su sadržani unutar usmjerenih ciklusa negativne težine. Međutim, sljedeći primjer pokazuje da nažalost, niti za vrhove izvan tih ciklusa nemamo također nikakve garancije da za njih algoritam ispravno radi.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.23.

Pomoću Bellman-Fordovog algoritma pronađite najkraće putove od vrha v_1 do svih preostalih vrhova u digrafu i pokažite da algoritam ne radi dobro u ovom slučaju.



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
v_1	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$
v_2	∞	$v_1, 3$	$v_1, 3$	$v_1, 3$	$v_4, 1$	$v_4, 1$	$v_4, 1$	$v_4, -1$	$v_4, -1$
v_3	∞	∞	$v_2, 1$	$v_2, 1$	$v_2, 1$	$v_2, -1$	$v_2, -1$	$v_2, -1$	$v_2, -3$
v_4	∞	∞	∞	$v_3, 2$	$v_3, 2$	$v_3, 2$	$v_3, 0$	$v_3, 0$	$v_3, 0$
v_5	∞	∞	∞	∞	$v_4, 3$	$v_4, 3$	$v_4, 3$	$v_4, 1$	$v_4, 1$
v_6	∞	∞	∞	∞	∞	$v_5, 4$	$v_5, 4$	$v_5, 4$	$v_5, 2$
v_7	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$v_6, 5$	$v_6, 5$	$v_6, 5$
v_8	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	$v_7, 6$	$v_7, 6$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Kao što možemo vidjeti, zadani digraf ima usmjereni ciklus negativne težine. To je ciklus $v_2v_3v_4v_2$ težine -2. Nadalje, u tablici posljednja dva stupca nisu jednaka pa zaključujemo da Bellman-Fordov algoritam ne radi ispravno na ovom digrafu. Ta dva stupca se razlikuju kod vrha v_3 i vrha v_6, što znači da sigurno nisu dobri dobiveni najkraći putovi od vrha v_1 prema spomenutim vrhovima. Uočite da vrh v_6 ovdje nije dio usmjerenog ciklusa $v_2v_3v_4v_2$ negativne težine. Isto tako, ako bolje pogledamo, nisu dobri niti dobiveni najkraći putovi za vrhove v_2, v_4 i v_5, iako su na tim mjestima posljednja dva stupca jednaka. Uočite opet da vrh v_5 nije dio usmjerenog ciklusa $v_2v_3v_4v_2$ negativne težine. Naime, tokom izvođenja algoritma usmjereni ciklus $v_2v_3v_4v_2$ se uspio jedanput obići pa je prava udaljenost od vrha v_5 smanjena upravo za težinu tog ciklusa. Udaljenosti za vrhove v_7 i v_8 su dobre, ali da se algoritam išao još jednom izvršavati, tada bi i za vrh v_7 dobili pogrešnu udaljenost.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Napomena.

Bilo koji usmjereni put u digrafu s n vrhova sadrži najviše $n-1$ lukova. Pitanje je zašto se Bellman-Fordov algoritam izvršava za $i = 1, \ldots, n$, a ne samo za $i = 1, 2, \ldots, n-1$ (naime, i je broj lukova na usmjerenom putu). Kao što smo vidjeli na prethodnim primjerima, ovaj posljednji korak se izvršava radi provjere ispravnosti rezultata dobivenih u koraku $i = n-1$ i detekciju usmjerenih ciklusa negativne težine. Naime, ako u digrafu postoji usmjereni ciklus negativne težine i ako se on može doseći iz vrha v_1, tada Bellman-Fordov algoritam ne može garantirati točnost rezultata i mora vratiti error. Ako je $d_n(j) < d_{n-1}(j)$, tada postoji usmjerena šetnja W od n lukova od vrha v_1 do vrha v_j ukupne težine manje od bilo koje druge šetnje koja koristi manje od n lukova. Takva šetnja mora imati barem jedan dvostruki vrh pa onda i ciklus $\mathcal{C} = u_1 u_2 \cdots u_1$. Stoga je $W = v_1 \cdots \mathcal{C} \cdots v_n$.

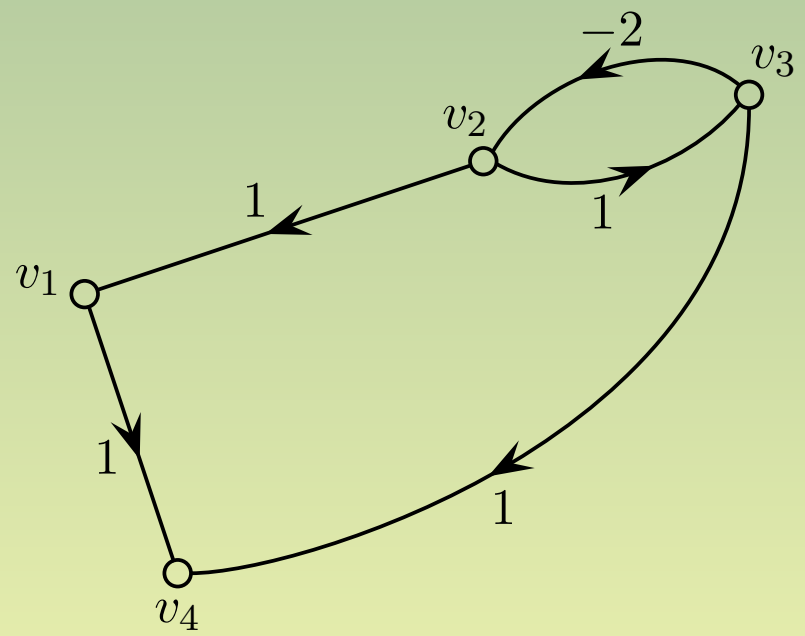
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Ciklus $\mathcal{C}$ mora biti negativne težine jer bi inače šetnja $v_1 \cdots u_1 \cdots v_n$ (bez ciklusa $\mathcal{C}$) imala manju težinu od W. Štoviše, svaki usmjereni ciklus negativne težine koji se može doseći iz vrha v_1, bit će detektiran Bellman-Fordovim algoritmom jer će za neki vrh v_j biti $d_n(j) \neq d_{n-1}(j)$. Uočite da u usmjerenom ciklusu negativne težine u svakom koraku algoritma jedan vrh tog ciklusa mijenja svoju trenutnu oznaku (naravno, nakon što barem jedan vrh tog usmjerenog ciklusa ima oznaku $< \infty$).

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.24.

Da li će Bellman-Fordov algoritam dati ispravne udaljenosti od vrha v_1 do preostalih vrhova u digrafu



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.

	0	1	2
v_1	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$
v_2	∞	∞	∞
v_3	∞	∞	∞
v_4	∞	$v_1, 1$	$v_1, 1$

Kako su drugi i treći stupac u tablici jednaki, algoritam možemo prekinuti ◂ primjer 9.18. i on ispravno radi. Naime, iako digraf sadrži usmjereni ciklus negativne težine, to je ciklus $v_2v_3v_2$, taj ciklus se ne može doseći iz vrha v_1 pa ga Bellman-Fordov algoritam neće detektirati i zbog toga ispravno radi. Da smo tražili najkraće putove od vrha v_2, tada Bellman-Fordov algoritam ne bi ispravno radio jer se usmjereni ciklus $v_2v_3v_2$ negativne težine može doseći iz vrha v_2.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.25.

Da li je moguće primijeniti Bellman-Fordov algoritam na neusmjerene grafove?

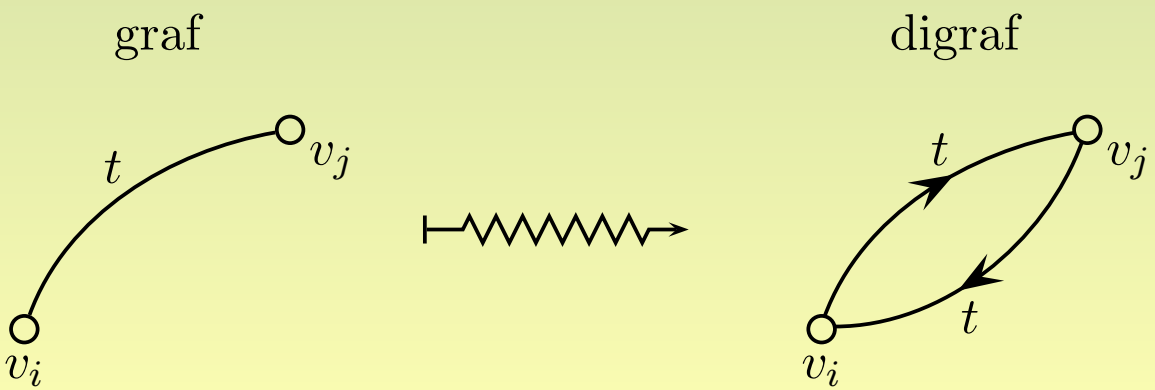
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.25.

Da li je moguće primijeniti Bellman-Fordov algoritam na neusmjerene grafove?

Rješenje.

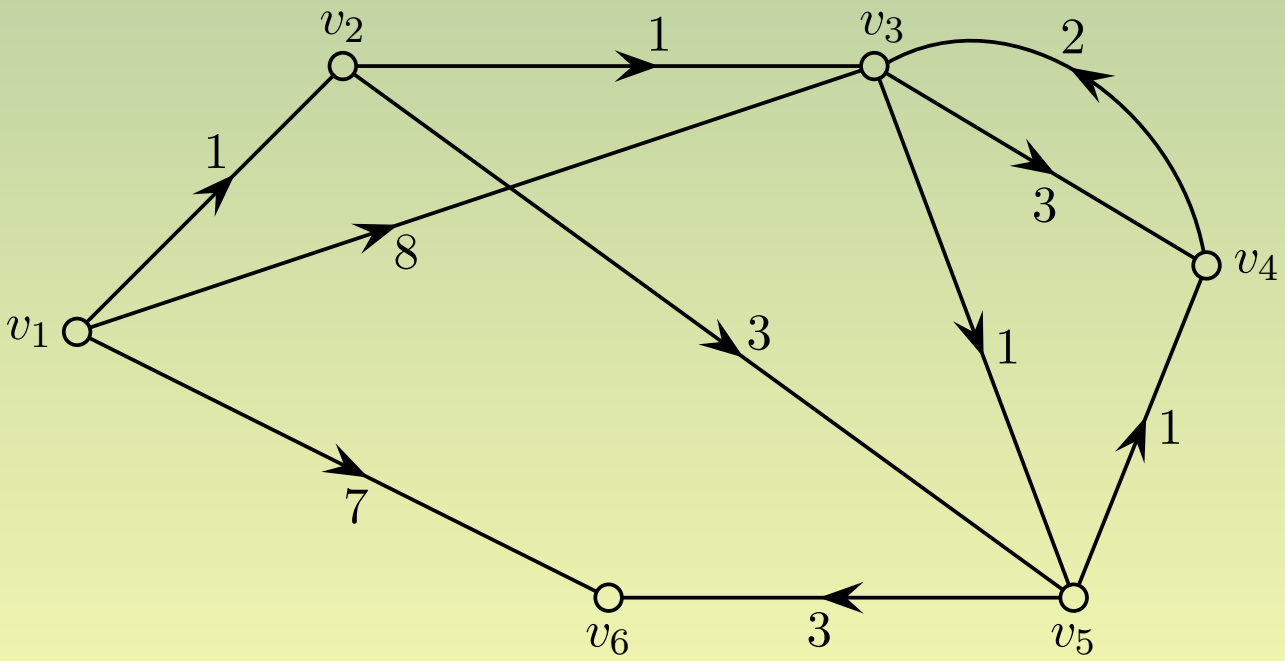
Na graf možemo gledati kao na specijalni digraf kako je dolje prikazano na slici. Svakom bridu v_iv_j s težinom t pridružimo lukove (v_i, v_j) i (v_j, v_i) s težinama t. Na grafove s pozitivnim težinama je moguće primijeniti Bellman-Fordov algoritam, tj. on će ispravno raditi. Na grafovima u kojima neki bridovi imaju negativne težine taj algoritam neće ispravno raditi jer ćemo u tom slučaju imati usmjerene 2-cikluse negativnih težina.



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.26.

Primijenite obje verzije Dijkstrinog algoritma i Bellman-Fordov algoritam da pronađete najkraće usmjerene putove od vrha v_1 prema ostalim vrhovima u digrafu



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.

Dijkstra (prva verzija)

$0:$ $\boxed{v_1(-,0)}$

$1:$ $\boxed{v_2(v_1,1)}$, $v_3(v_1,8)$, $v_6(v_1,7)$

$2:$ $v_3(v_1,8)$, $v_6(v_1,7)$, $\boxed{v_3(v_2,2)}$, $v_5(v_2,4)$

$3:$ $v_6(v_1,7)$, $v_5(v_2,4)$, $v_4(v_3,5)$, $\boxed{v_5(v_3,3)}$

$4:$ $v_6(v_1,7)$, $v_4(v_3,5)$, $v_6(v_5,6)$, $\boxed{v_4(v_5,4)}$

$5:$ $v_6(v_1,7)$, $\boxed{v_6(v_5,6)}$

Dijkstra (poboljšana verzija)

	0	1	2	3	4	5
v_1	$-, 0$	■	■	■	■	■
v_2	∞	$v_1, 1$	■	■	■	■
v_3	∞	$v_1, 8$	$v_2, 2$	■	■	■
v_4	∞	∞	∞	$v_3, 5$	$v_5, 4$	■
v_5	∞	∞	$v_2, 4$	$v_3, 3$	■	■
v_6	∞	$v_1, 7$	$v_1, 7$	$v_1, 7$	$v_5, 6$	$v_5, 6$

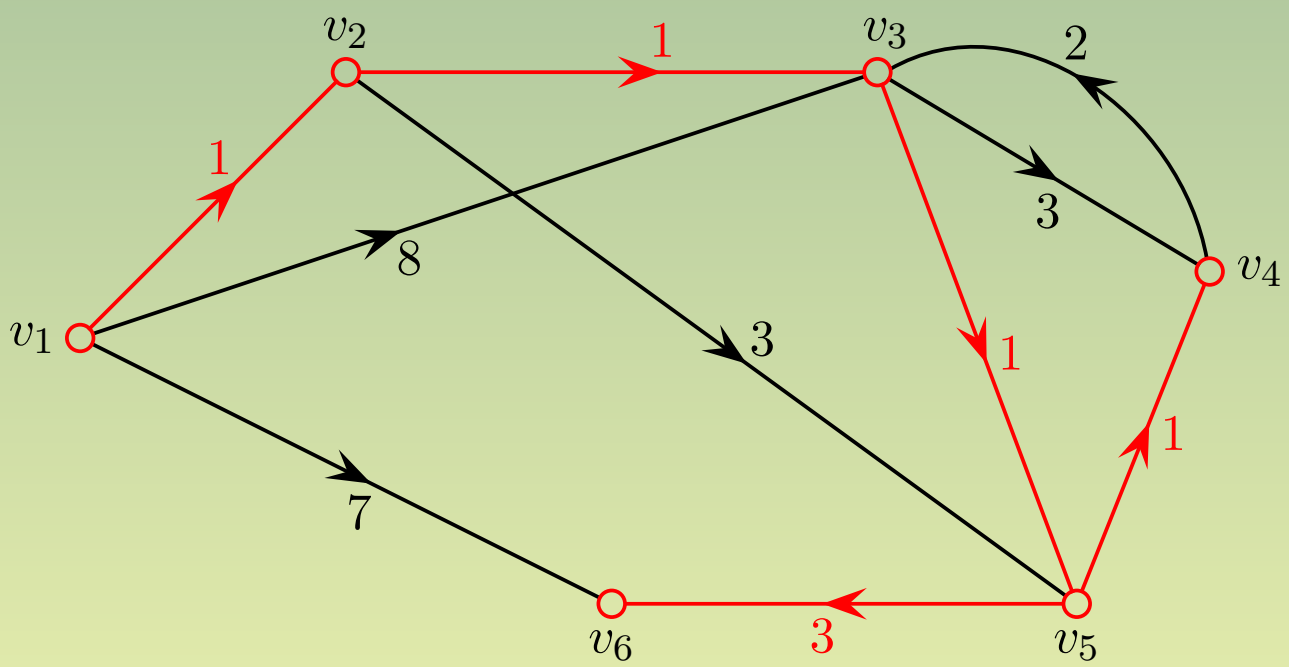
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellman-Ford

	0	1	2	3	4	5
v_1	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$
v_2	∞	$v_1, 1$	$v_1, 1$	$v_1, 1$	$v_1, 1$	$v_1, 1$
v_3	∞	$v_1, 8$	$v_2, 2$	$v_2, 2$	$v_2, 2$	$v_2, 2$
v_4	∞	∞	$v_3, 11$	$v_3, 5$	$v_5, 4$	$v_5, 4$
v_5	∞	∞	$v_2, 4$	$v_3, 3$	$v_3, 3$	$v_3, 3$
v_6	∞	$v_1, 7$	$v_1, 7$	$v_1, 7$	$v_5, 6$	$v_5, 6$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Najkraći putovi od vrha v_1

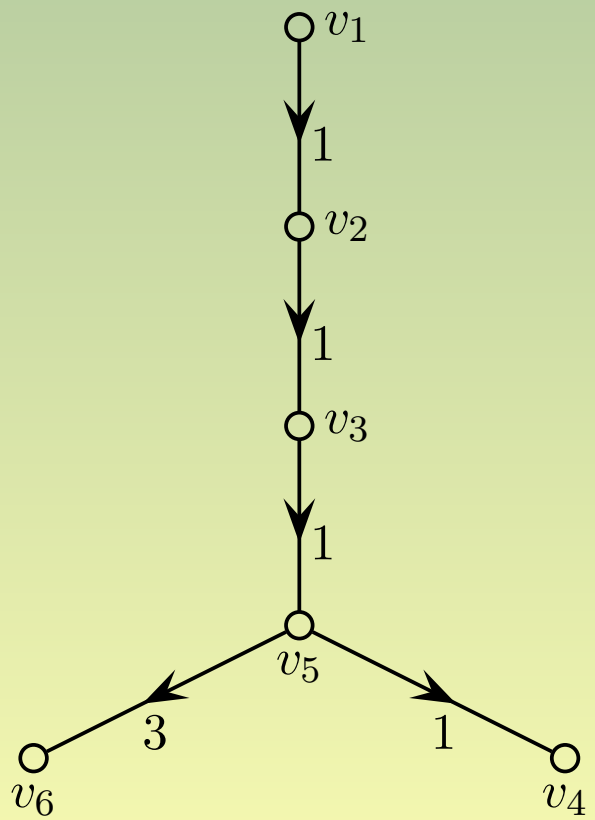


Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

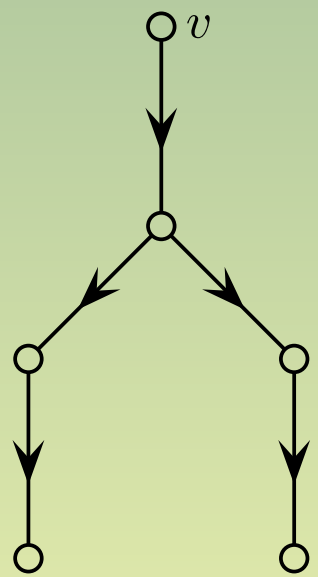
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Najkraće putove od vrha v_1 možemo prikazati u obliku usmjerenog korijenskog stabla s korijenom v_1. Na sljedećem slajdu je dana egzaktna definicija usmjerenog korijenskog stabla, a sa slike je intuitivno jasno o čemu se zapravo radi.

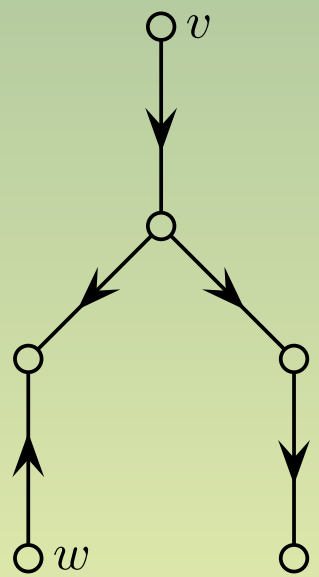


Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Usmjereno korijensko stablo T s korijenom v je digraf čiji je pripadni graf stablo, a korijen v je jedini vrh u T instupnja 0.



usmjereno korijensko stablo s korijenom v



nije usmjereno korijensko stablo jer postoje dva vrha v i w instupnja 0

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Propozicija 9.4.

U usmjerenom korijenskom stablu T s korijenom v postoji jedinstveni usmjereni put od v do bilo kojeg drugog vrha.

Dokaz.

Jedinstvenost

Pretpostavimo da postoje dva usmjerena puta P_1 i P_2 od korijena v do nekog vrha u. U tom slučaju bismo u pripadnom grafu od T imali ciklus pa taj graf ne bi bio stablo, a onda po definiciji T ne bi bio usmjereno korijensko stablo.

Egzistencija

Neka je u bilo koji vrh iz T različit od korijena v. Kako je $d^-(u) \neq 0$, postoji vrh u_1 takav da je u_1u luk u T. Ako je $u_1 = v$, tada je gotovo. Ako je $u_1 \neq v$, tada je $d^-(u_1) \neq 0$ pa postoji vrh u_2 takav da je u_2u_1 luk u T.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Nadalje, $u_2 \neq u$ jer je pripadni graf od T stablo. Stoga je u_2u_1u usmjereni put. Ako je $u_2 = v$, tada je gotovo. Općenito, pretpostavimo da smo za $k \geqslant 2$ pronašli usmjereni put

$$u_k u_{k-1} \cdots u_1 u,$$

pri čemu su svi vrhovi na tom putu različiti od korijena v. Tada je $d^-(u_k) \neq 0$ pa postoji vrh u_{k+1} takav da je $u_{k+1}u_k$ luk u T. Nadalje, $u_{k+1} \notin \{u, u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ jer je pripadni graf od T stablo. Stoga je

$$u_{k+1} u_k u_{k-1} \cdots u_1 u$$

usmjereni put u T. Ovim postupkom ćemo nakon konačno mnogo koraka doći do korijena v, tj. za neki $k \in \mathbb{N}$ će biti $u_k = v$.



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Korolar 9.2.

U svakom usmjerenom korijenskom stablu svaki vrh osim korijena ima instupanj jednak 1.

Dokaz.

Neka je T usmjereno korijensko stablo s korijenom v. Neka je u vrh u T različit od korijena i neka je $d^-(u) \neq 1$. Kako je $d^-(u) \neq 0$ (jer u nije korijen), slijedi da je tada $d^-(u) \geqslant 2$ pa postoje barem dva različita luka u_1u i $u_1'u$. Prema prethodnoj propoziciji postoji usmjereni put P od v do u_1 i postoji usmjereni put P' od v do u_1'. No, tada su Pu i $P'u$ dva različita usmjerena puta od korijena do vrha u, što je kontradikcija s jedinstvenošću iz prethodne propozicije. ♡

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Napomena.

Složenost Bellman-Fordovog algoritma je $O(\nu\varepsilon)$. Iz tog razloga je bolje u praksi upotrijebiti Dijkstrin algoritam ukoliko su u digrafu svi lukovi pozitivne težine, a Bellman-Fordov algoritam jedino u slučaju da su neki lukovi negativnih težina.

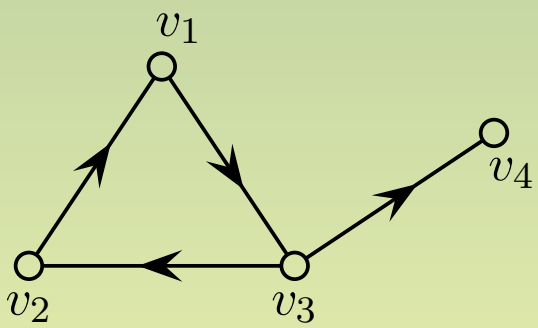
Zadatak 9.3.

Provjerite da je složenost Bellman-Fordovog algoritma $O(\nu\varepsilon)$ i implementirajte taj algoritam na računalu.

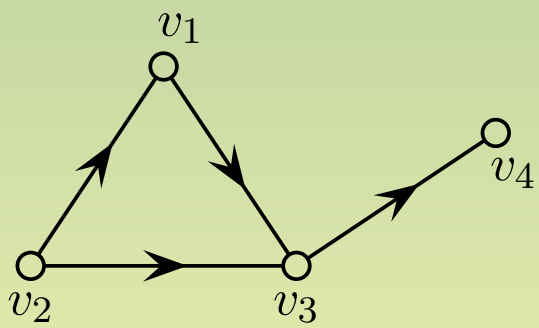
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Aciklički digraf

Za digraf kažemo da je **aciklički** ukoliko ne sadrži usmjerene cikluse.



ciklički digraf – sadrži usmjereni ciklus $v_1v_3v_2v_1$



aciklički digraf – ne sadrži niti jedan usmjereni ciklus

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Pitamo se, da li postoji algoritam koji će provjeriti da li je neki digraf aciklički ili nije. Odgovor je potvrdan, ali da bismo došli do tog algoritma, moramo najprije proučiti neka svojstva acikličkih digrafova.

Označavanje $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ vrhova digrafa zovemo **kanonsko označavanje** ako je svaki luk u tom digrafu oblika $v_i v_j$ pri čemu je $i < j$. Također govorimo da je $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ **kanonski poredak** vrhova digrafa ili da su vrhovi **topološki sortirani**.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Lema 9.1.

Svaki aciklički digraf D ima barem jedan vrh instupnja 0 i barem jedan vrh outstupnja 0.

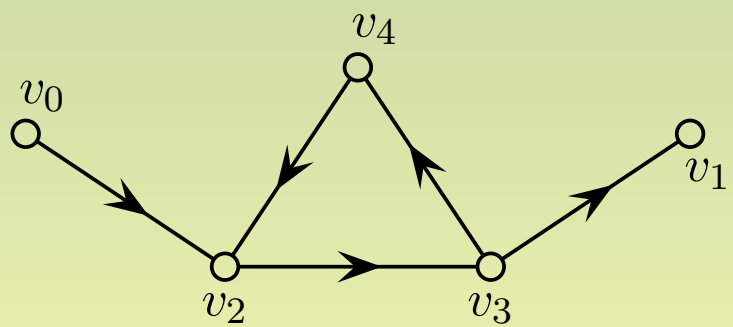
Dokaz.

Neka je $P = v_1 v_2 \cdots v_k$ usmjereni put u D maksimalne duljine. Tvrdimo da je tada $d^-(v_1) = 0$ i $d^+(v_k) = 0$. Pretpostavimo da je $d^-(v_1) > 0$. Tada postoji vrh w takav da je (w, v_1) luk u D. Ukoliko bi bilo $w \neq v_i$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, k$, tada bi u D postojao usmjereni put $P' = w v_1 v_2 \cdots v_k$ dulji od puta P, što je kontradikcija s maksimalnošću puta P. Stoga je $w = v_i$ za neki $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Međutim, u tom slučaju D sadrži usmjereni ciklus $\mathcal{C} = v_1 v_2 \cdots v_i v_1$, što je opet kontradikcija s činjenicom da je D aciklički digraf. Dakle, naša pretpostavka da postoji luk oblika (w, v_1) je bila pogrešna pa je zaista $d^-(v_1) = 0$. Na analogni način se dokaže da je $d^+(v_k) = 0$. ♡

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Napomena.

Obrnuto ne vrijedi, tj. ako neki digraf ima vrh instupnja nula i vrh outstupnja nula, tada on ne mora biti aciklički. Donji digraf ima vrh v_0 instupnja nula i vrh v_1 outstupnja nula, ali on nije aciklički jer sadrži usmjereni ciklus $v_2v_3v_4v_2$.



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Teorem 9.9 (Karakterizacija acikličkih digrafa).

Digraf D je aciklički akko D dopušta kanonsko označavanje vrhova.

Dokaz.

$\boxed{\Leftarrow}$

Pretpostavimo da D dopušta kanonsko označavanje vrhova $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$. Tada je svaki usmjereni put u D oblika $v_{i_0} v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_k}$ pri čemu je $i_0 < i_1 < i_2 \cdots < i_k$. Kada bi takav usmjereni put mogao biti zatvoren, imali bismo usmjereni ciklus $v_{i_0} v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_k} v_{i_0}$ i luk $v_{i_k} v_{i_0}$ pa bi moralo biti $i_k < i_0$, što je nemoguće. Dakle, D je aciklički digraf.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

$\Rightarrow$

Pretpostavimo da je D aciklički digraf s $n > 1$ vrhova. Prema prethodnoj lemi postoji vrh v_0 za koji je $d^-(v_0) = 0$. Primijenimo li lemu na skup $V(D) \setminus \{v_0\}$, dobivamo da postoji vrh $v_1 \in V(D) \setminus \{v_0\}$ za kojeg ne postoji niti jedan vrh x iz $V(D) \setminus \{v_0\}$ takav da bi xv_1 bio luk u D. Dakle, jedini mogući luk oblika xv_1 je jedino za $x = v_0$. Primijenimo li dalje lemu na skup $V(D) \setminus \{v_0, v_1\}$, dobivamo da postoji vrh $v_2 \in V(D) \setminus \{v_0, v_1\}$ sa svojstvom da ne postoji luk oblika xv_2 za $x \in V(D) \setminus \{v_0, v_1\}$. Jedini mogući lukovi oblika xv_2 su v_0v_2 i v_1v_2. Nastavljajući ovaj postupak dobivamo vrhove $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ sa svojstvom da za svaki j jedini lukovi oblika xv_j su jedino za $x = v_i$, $i < j$. Stoga $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ predstavlja kanonsko označavanje vrhova od D. $\heartsuit$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Algoritam za topološko sortiranje

ULAZ: aciklički digraf D
IZLAZ: topološki sortirani (kanonski označeni) vrhovi od D

1: Neka je L prazna lista koja će na kraju sadržavati topološki sortirane vrhove od D. Neka je S skup svih vrhova u D koji imaju instupanj nula.

2: Sve dok je $S \neq \emptyset$ radi

   a) Prebaci vrh v iz S u listu L.

   b) Za svaki vrh u s lukom $e = vu$ izbriši luk e iz digrafa. Ako vrh u nakon toga ima instupanj nula, tada ga ubaci u skup S.

3: Ako digraf ima još uvijek lukova, tada izbaci error "Digraf nije acikličan", inače ispiši listu L.

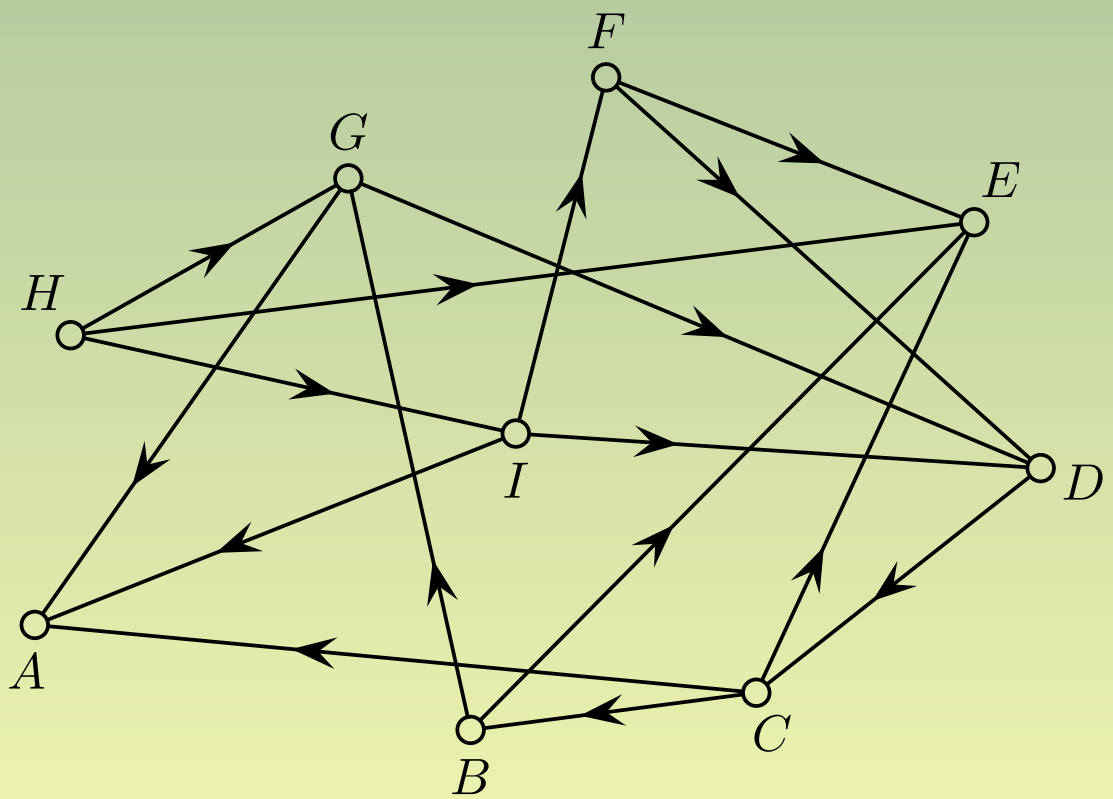
Napomena.

Većina algoritama za topološko sortiranje ima složenost $O(\nu + \varepsilon)$. Neki od njih koriste i DFS algoritam.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.27.

Da li je zadani digraf acikličkі?

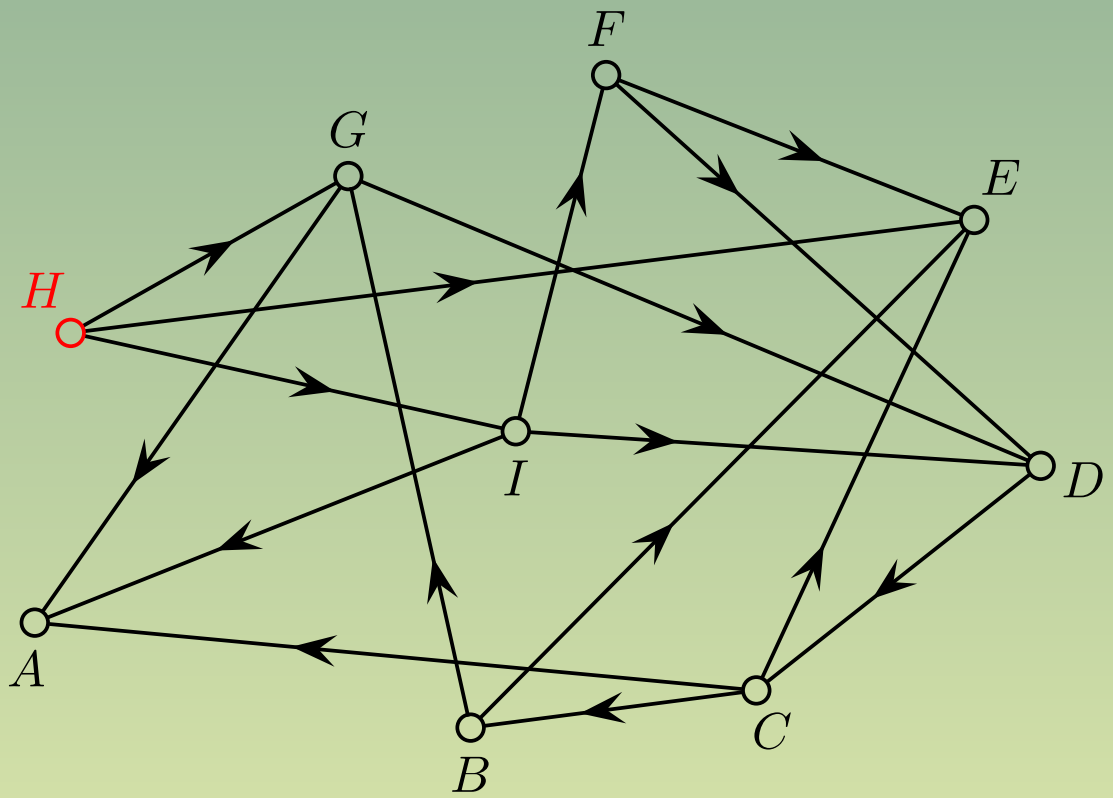


Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.

Primijenit ćemo algoritam za topološko sortiranje. Ukoliko uspijemo topološki sortirati vrhove digrafa, tada će prema ◂ karakterizaciji acikličkih digrafa slijediti da je zadani digraf aciklički. Ukoliko algoritam vrati error, tada zadani digraf nije aciklički, tj. sadrži barem jedan usmjereni ciklus. Objasnit ćemo detaljno svaki korak.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



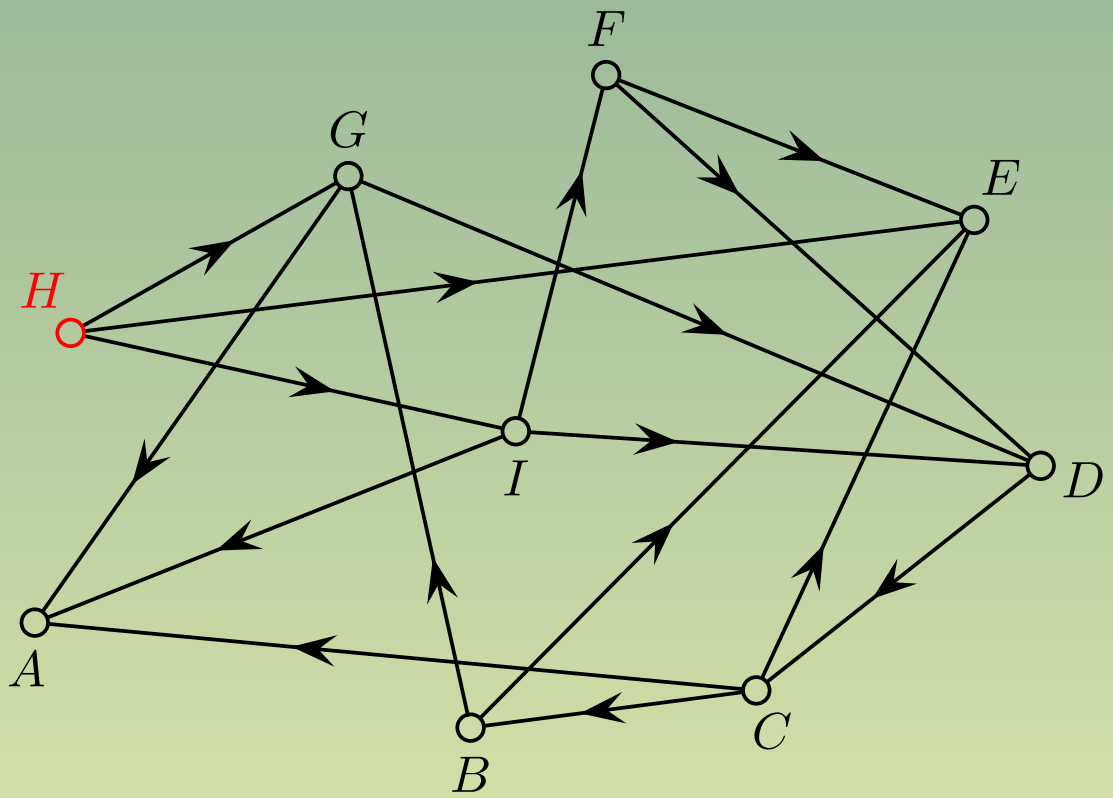
lista L:

skup S **vrhova instupnja 0**: H

konačno rješenje

Na početku stavimo da je $L = \emptyset$. Kako je H jedini vrh instupnja nula, slijedi da je $S = \{H\}$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

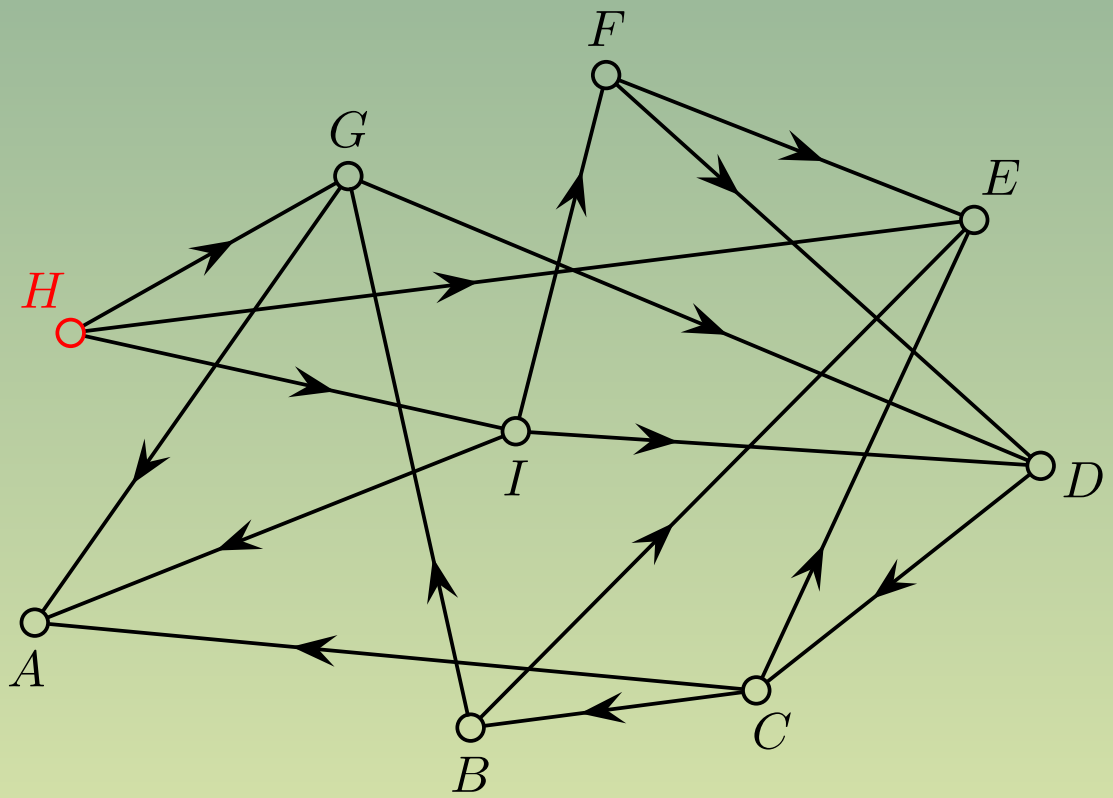


lista L:

skup S **vrhova instupnja 0**: H

Na početku stavimo da je $L = \emptyset$. Kako je H jedini vrh instupnja nula, slijedi da je $S = \{H\}$. Odaberemo neki vrh iz skupa S i prebacimo ga u listu L.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

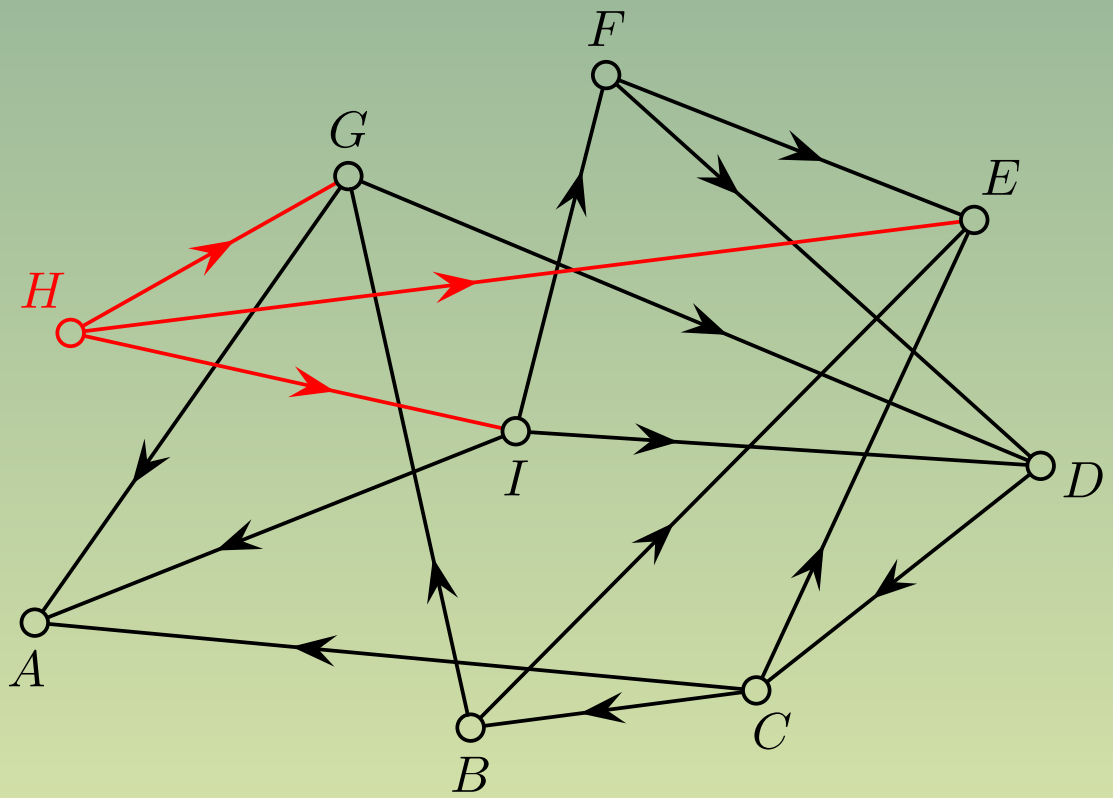


lista L: H

skup S **vrhova instupnja 0**:

Kako je H jedini takav vrh, tada njega prebacimo u listu L.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

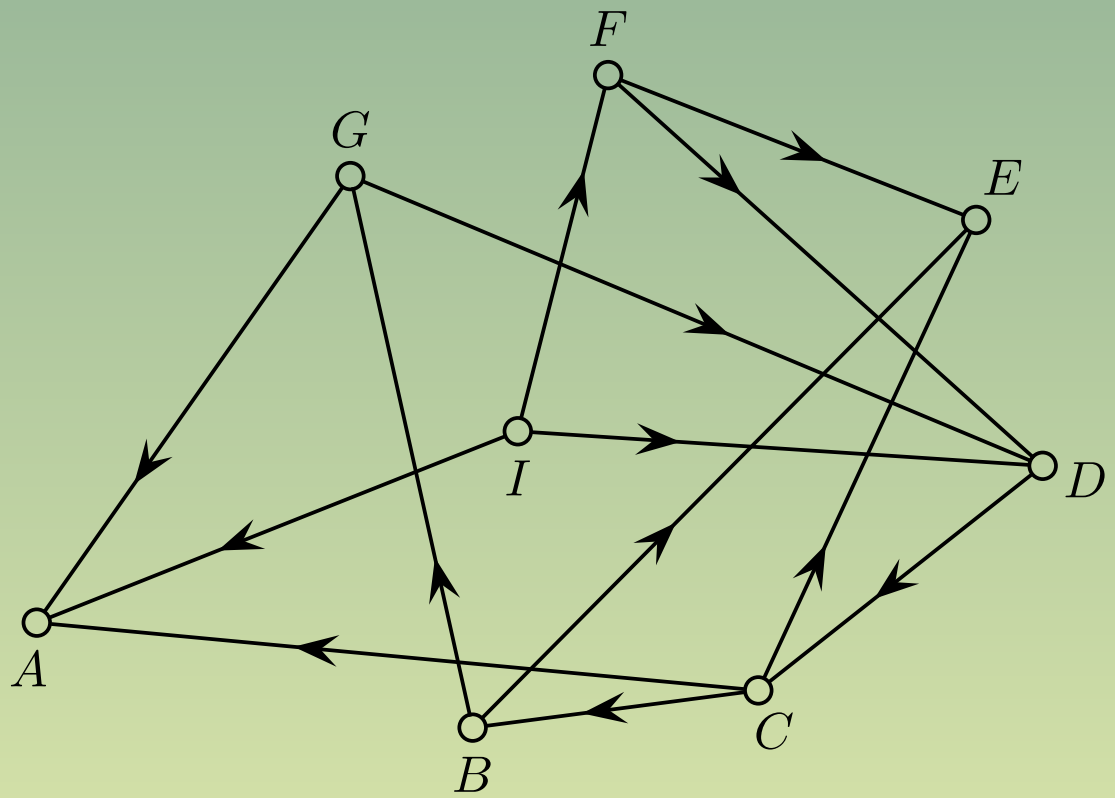


lista L: H

skup S **vrhova instupnja 0**:

Kako je H jedini takav vrh, tada njega prebacimo u listu L. Zatim pogledamo sve lukove koji izlaze iz vrha H.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

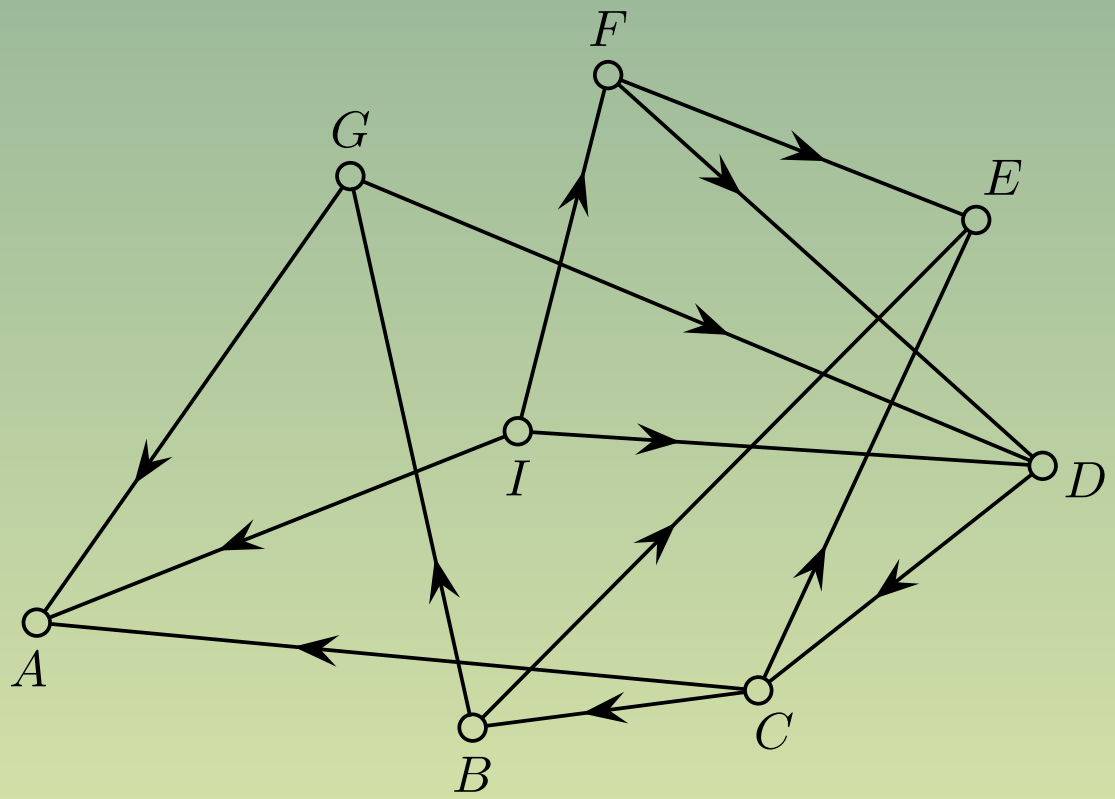


lista L: H

skup S **vrhova instupnja 0**:

Kako je H jedini takav vrh, tada njega prebacimo u listu L. Zatim pogledamo sve lukove koji izlaze iz vrha H. Sve te lukove uklonimo iz digrafa zajedno s vrhom H.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

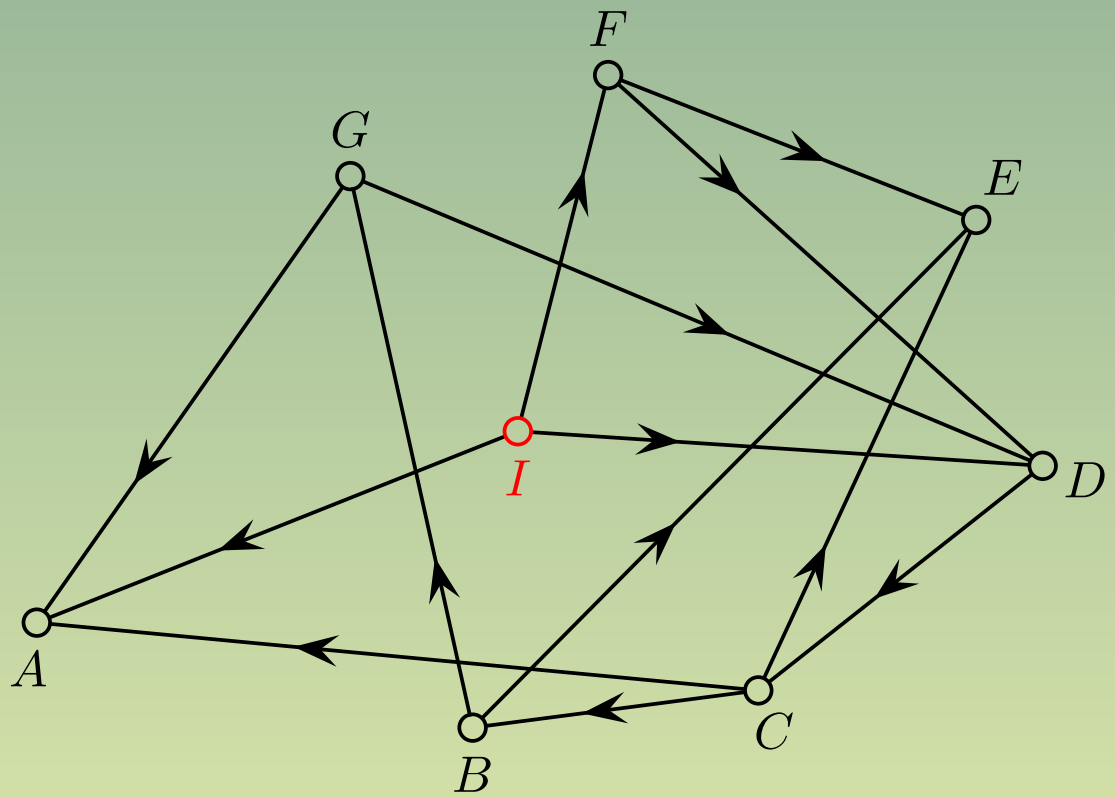


lista L: H

skup S **vrhova instupnja 0**:

Provjeravamo da li nakon toga neki od vrhova ima instupanj 0.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

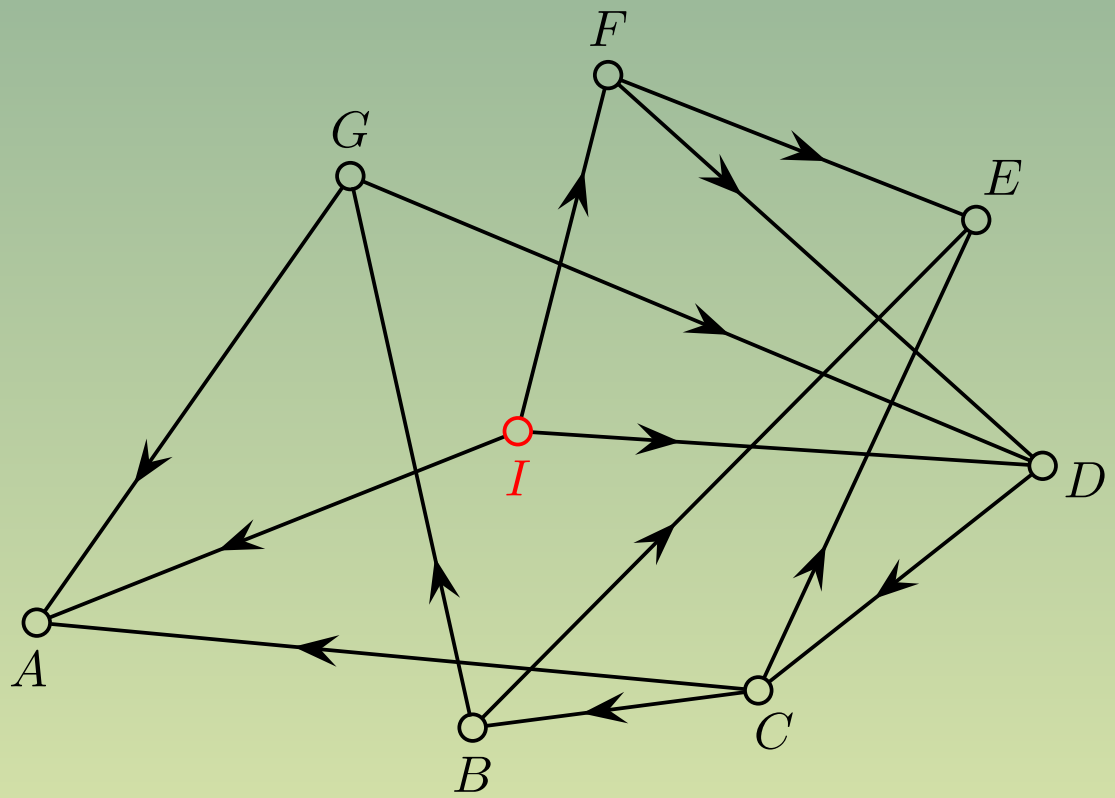


lista L: H

skup S **vrhova instupnja 0**: I

Provjeravamo da li nakon toga neki od vrhova ima instupanj 0.
Uočavamo da je to jedino vrh I pa njega stavimo u skup S.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

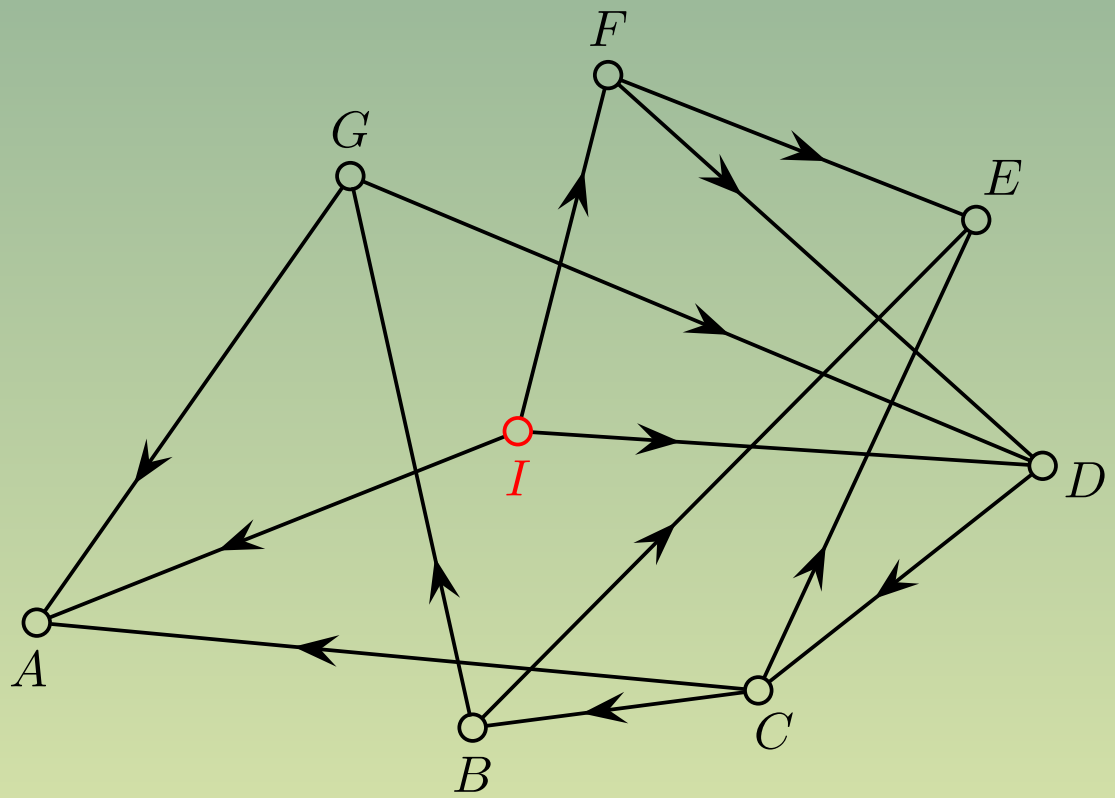


lista L: H

skup S **vrhova instupnja 0**: I

Provjeravamo da li nakon toga neki od vrhova ima instupanj 0. Uočavamo da je to jedino vrh I pa njega stavimo u skup S. Opet biramo neki vrh iz skupa S i prebacimo ga u listu L.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

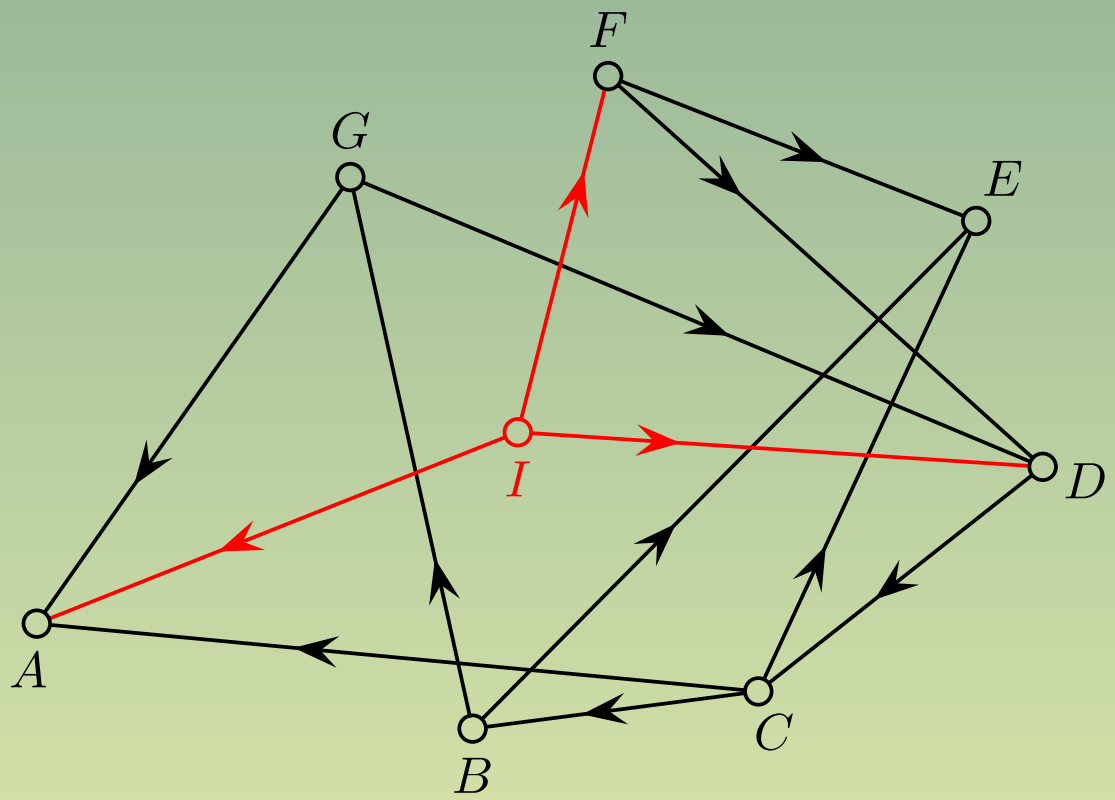


lista L: H, I

skup S **vrhova instupnja 0**:

Kako je I jedini takav vrh, tada njega prebacimo u listu L.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

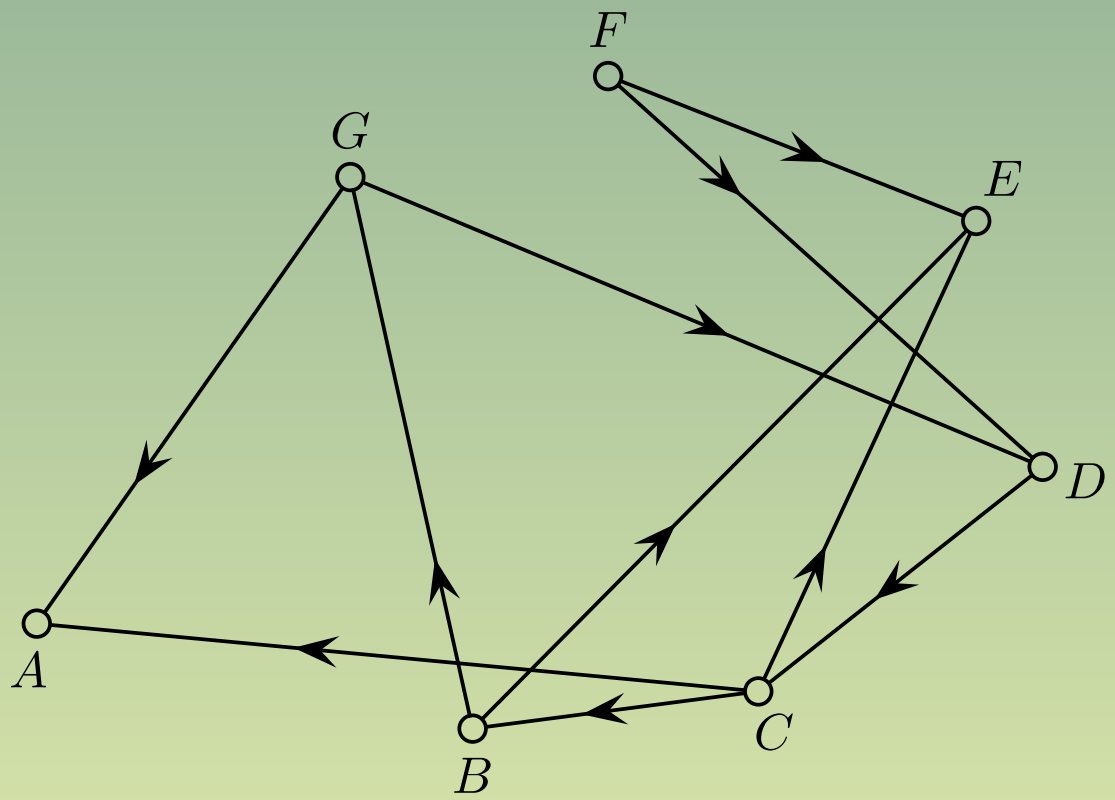


lista L: H, I

skup S **vrhova instupnja 0**:

Kako je I jedini takav vrh, tada njega prebacimo u listu L. Zatim pogledamo sve lukove koji izlaze iz vrha I.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

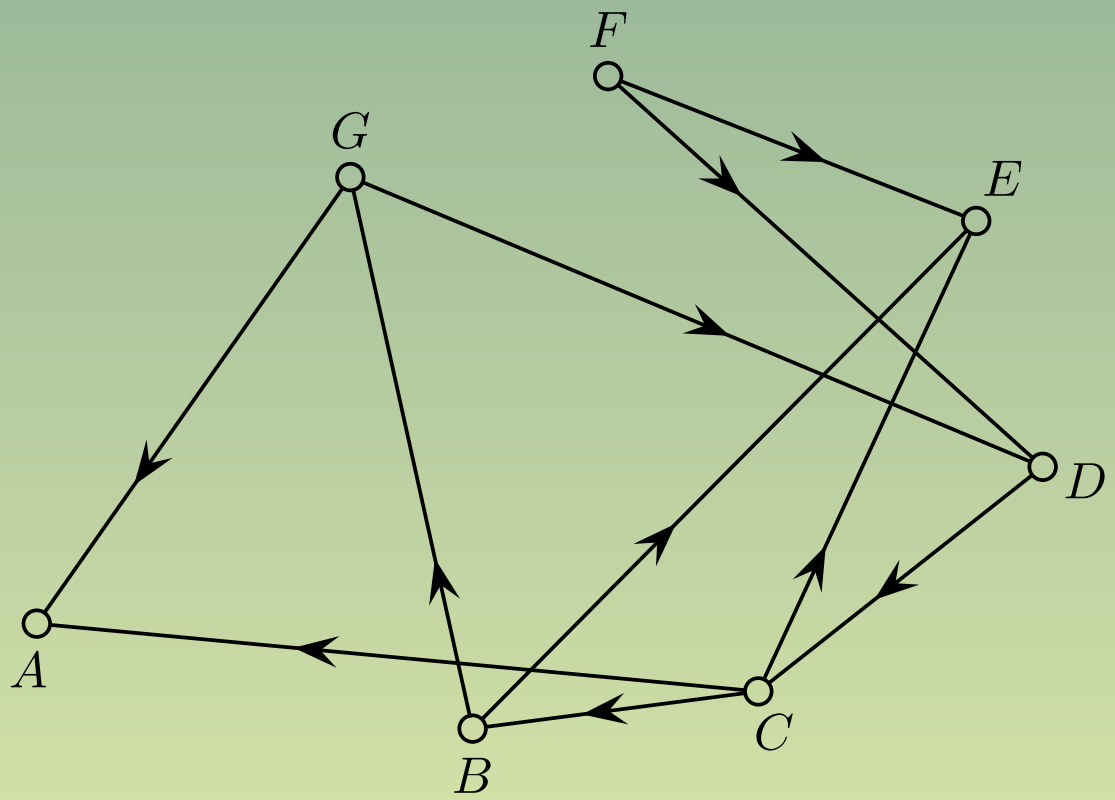


lista L: H, I

skup S **vrhova instupnja 0**:

Kako je I jedini takav vrh, tada njega prebacimo u listu L. Zatim pogledamo sve lukove koji izlaze iz vrha I. Sve te lukove uklonimo iz digrafa zajedno s vrhom I.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

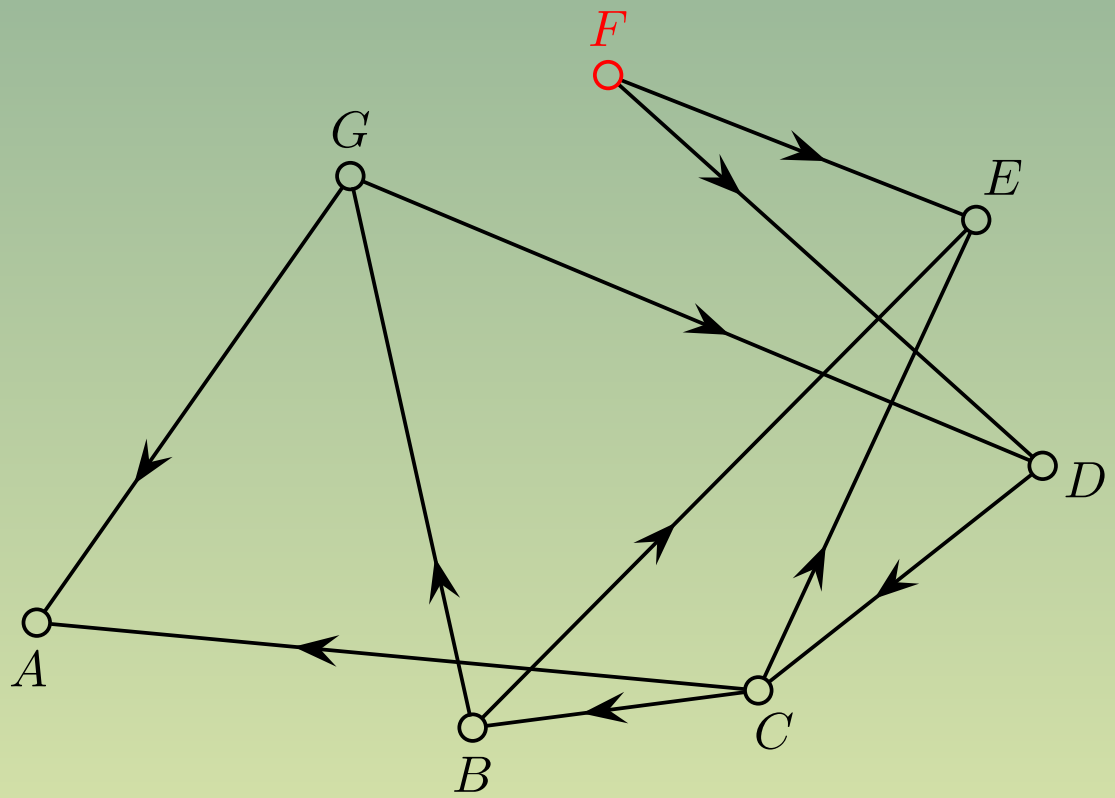


lista L: H, I

skup S **vrhova instupnja 0**:

Provjeravamo da li nakon toga neki od vrhova ima instupanj 0.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



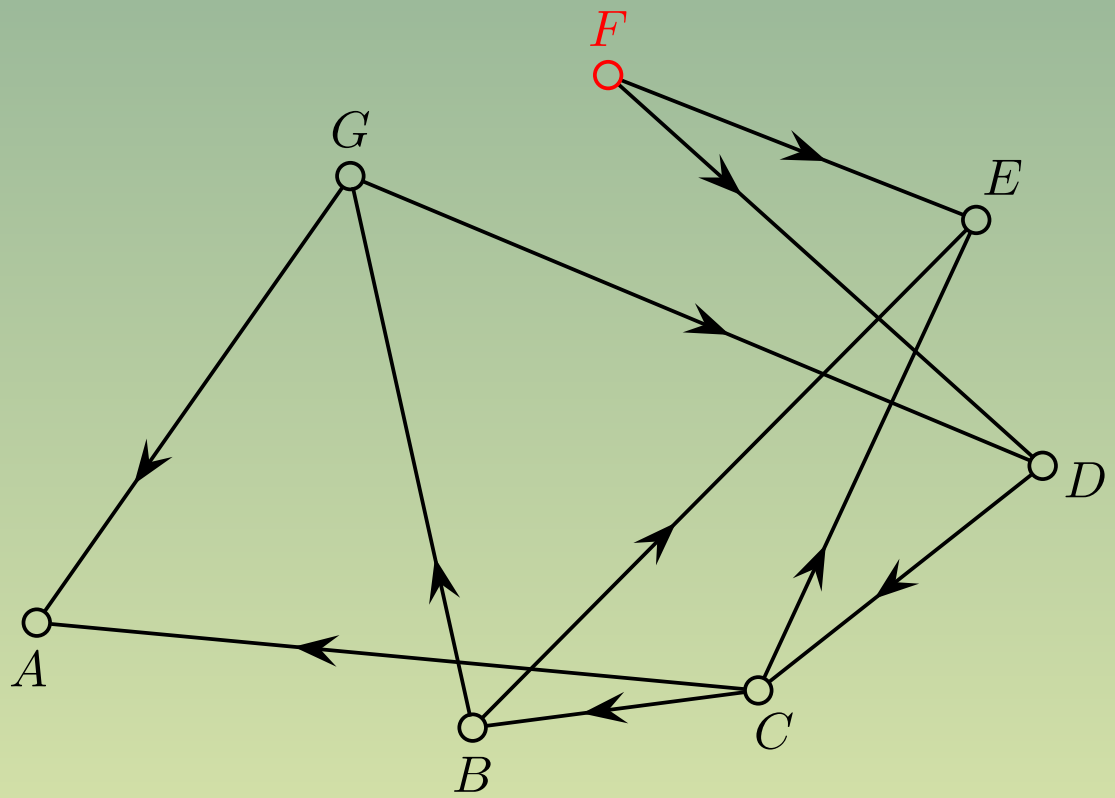
lista L: H, I

skup S **vrhova instupnja 0**: F

Provjeravamo da li nakon toga neki od vrhova ima instupanj 0.

Uočavamo da je to jedino vrh F pa njega stavimo u skup S.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

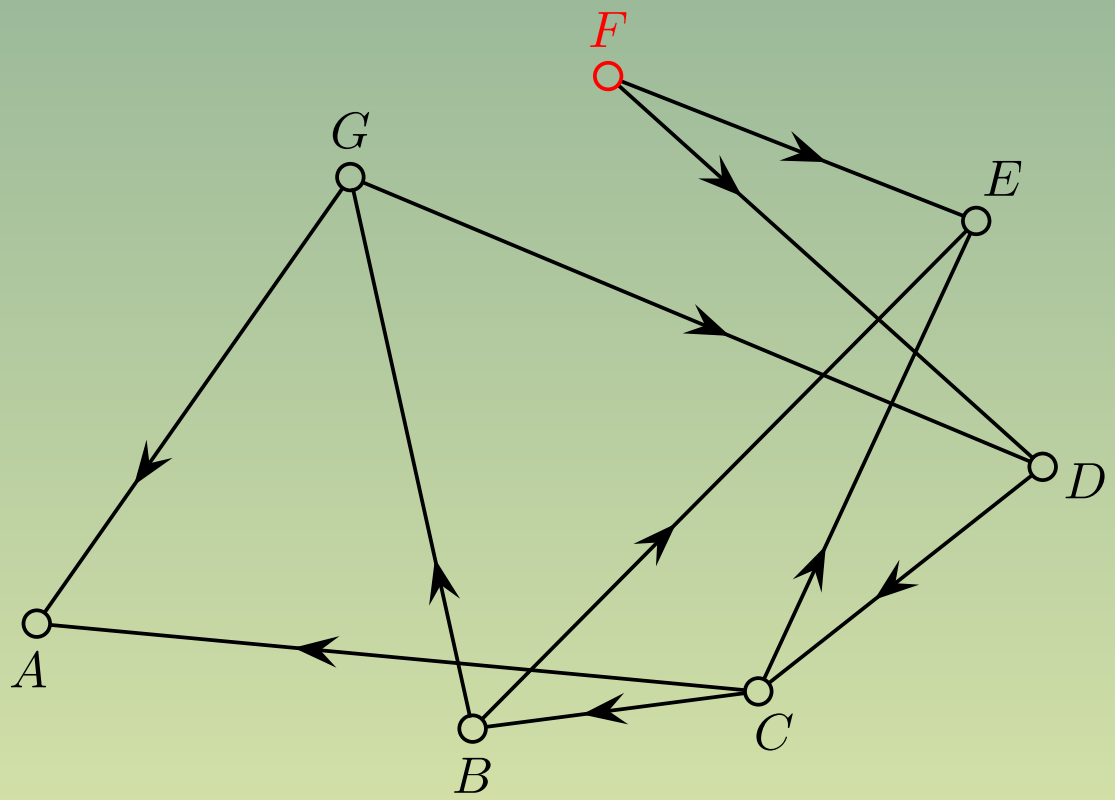


lista L: H, I

skup S **vrhova instupnja 0**: F

Provjeravamo da li nakon toga neki od vrhova ima instupanj 0. Uočavamo da je to jedino vrh F pa njega stavimo u skup S. Opet biramo neki vrh iz skupa S i prebacimo ga u listu L.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

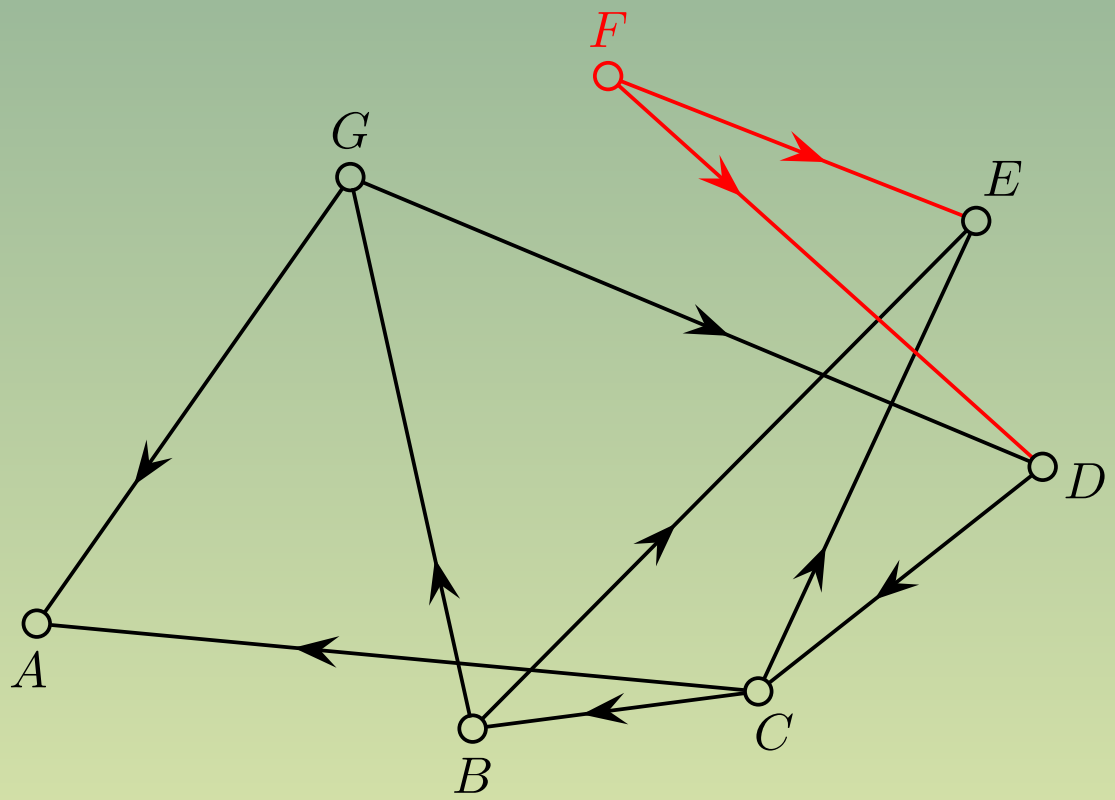


lista L: H, I, F

skup S **vrhova instupnja 0**:

Kako je F jedini takav vrh, tada njega prebacimo u listu L.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

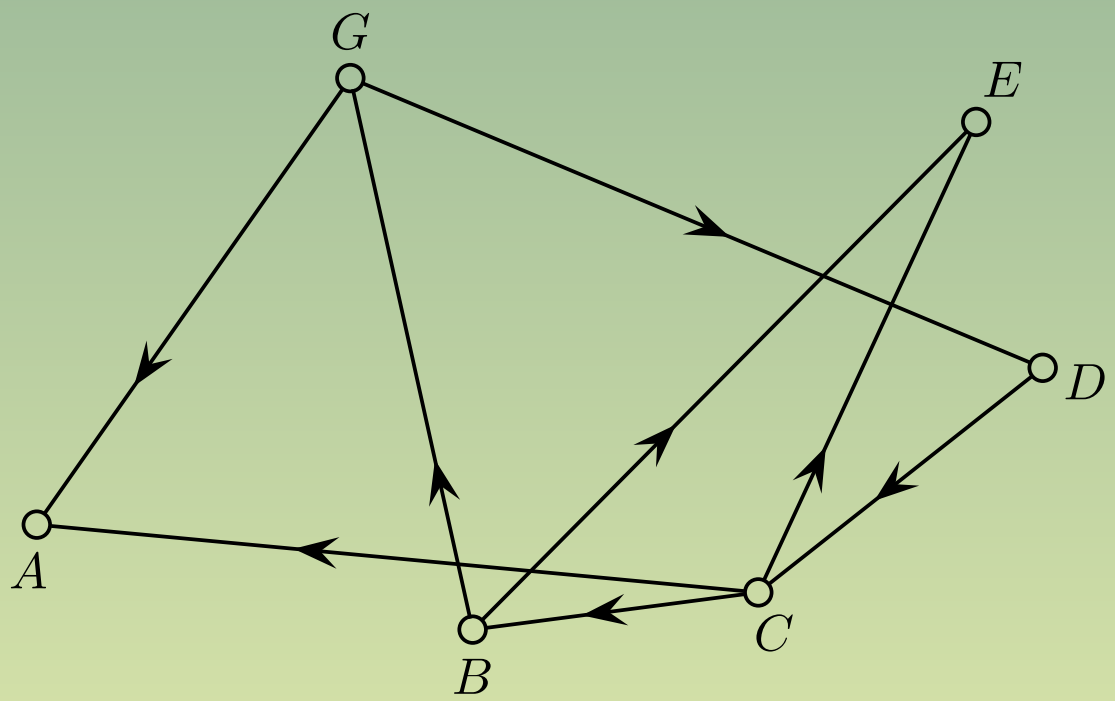


lista L: H, I, F

skup S **vrhova instupnja 0**:

Kako je F jedini takav vrh, tada njega prebacimo u listu L. Zatim pogledamo sve lukove koji izlaze iz vrha F.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

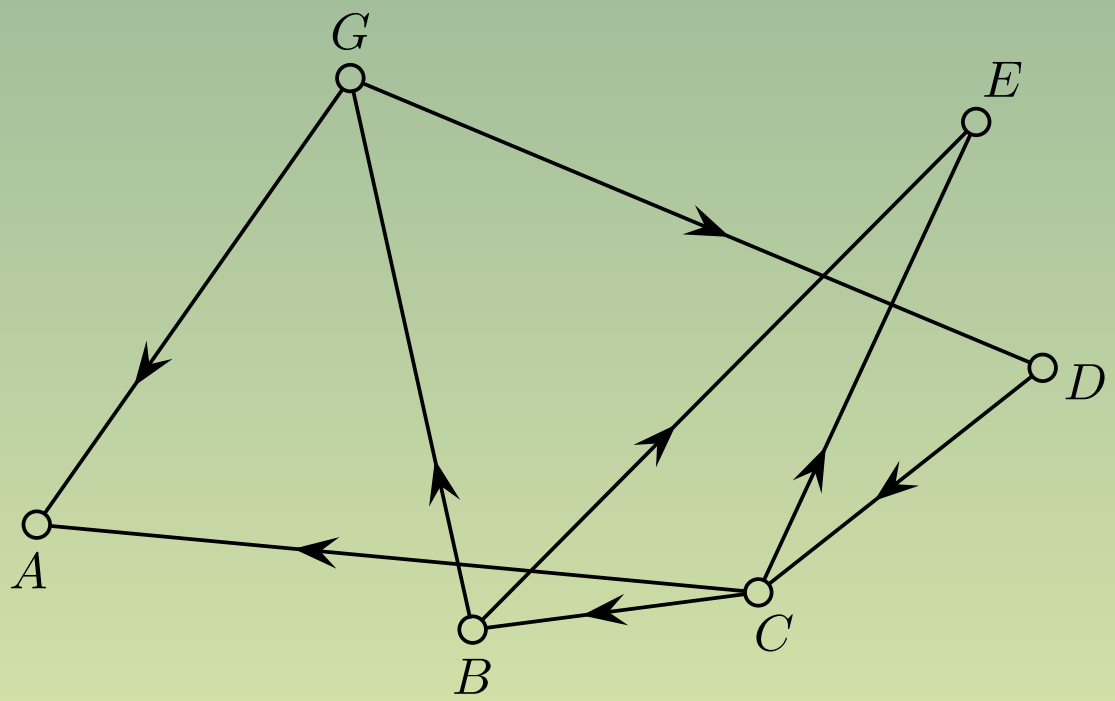


lista L: H, I, F

skup S **vrhova instupnja 0**:

Kako je F jedini takav vrh, tada njega prebacimo u listu L. Zatim pogledamo sve lukove koji izlaze iz vrha F. Sve te lukove uklonimo iz digrafa zajedno s vrhom F.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

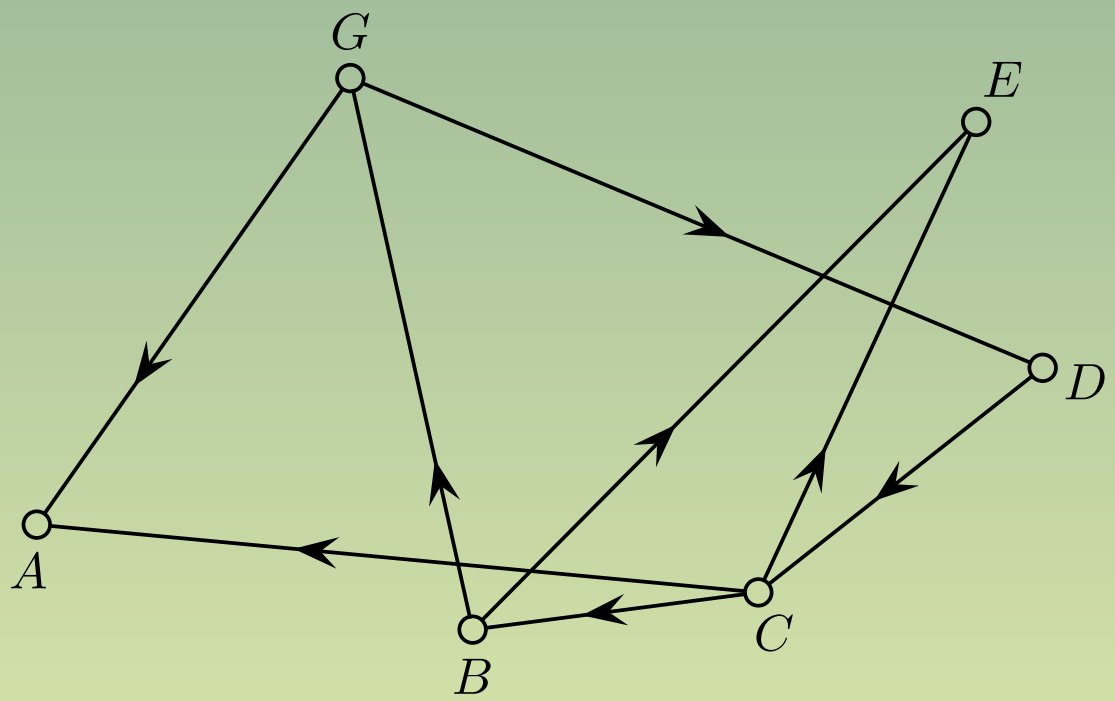


lista L: H, I, F

skup S **vrhova instupnja 0**:

Provjeravamo da li nakon toga neki od vrhova ima instupanj 0.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



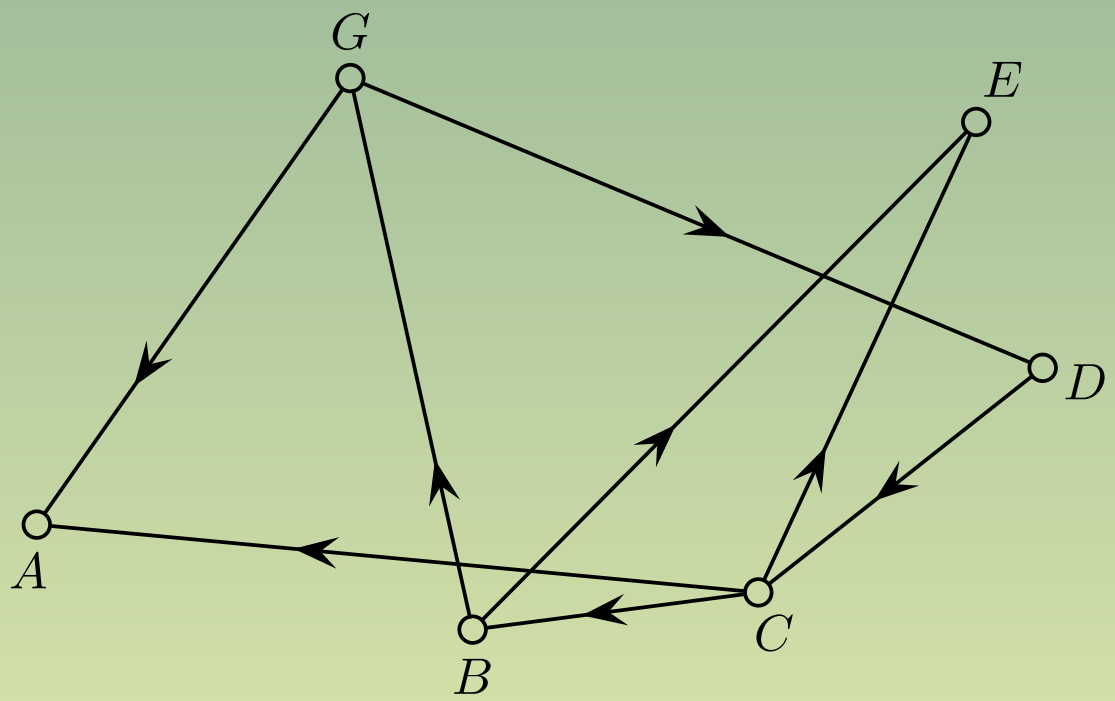
lista L: H, I, F

skup S **vrhova instupnja 0**:

Provjeravamo da li nakon toga neki od vrhova ima instupanj 0.

Uočavamo da takvog vrha više nema.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

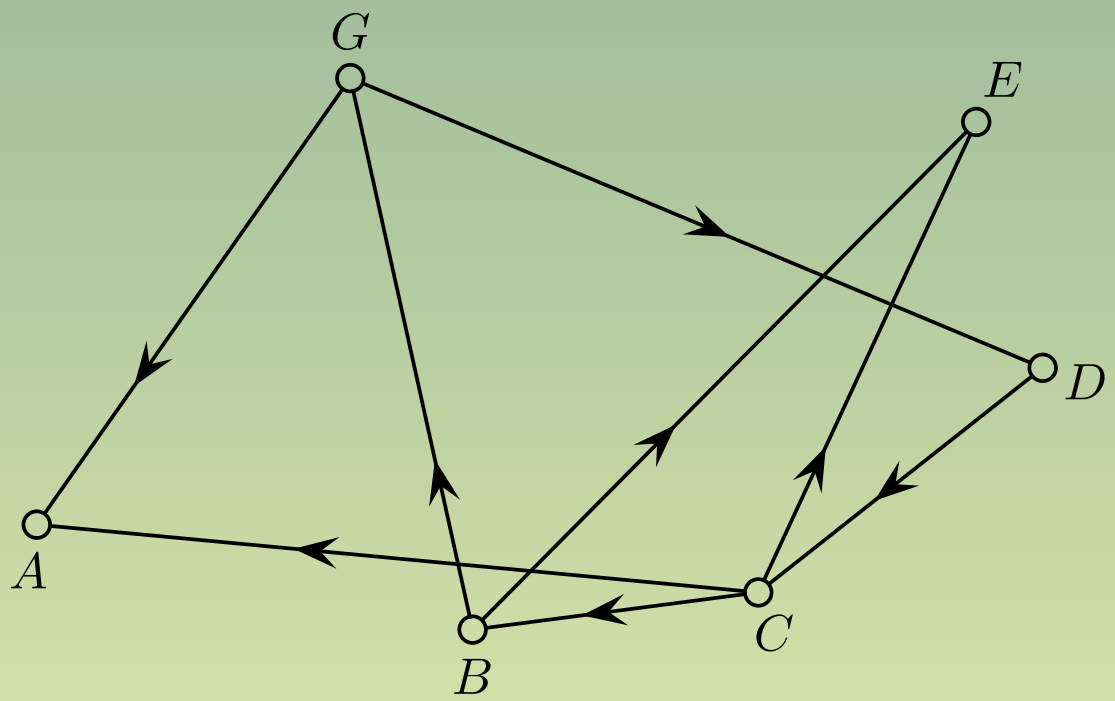


lista L: H, I, F

skup S **vrhova instupnja 0**:

Kako je $S = \emptyset$, algoritam završava. Kako još uvijek ima neizbrisanih lukova, algoritam vraća error pa početni digraf nije aciklički, tj. sadrži barem jedan usmjereni ciklus.

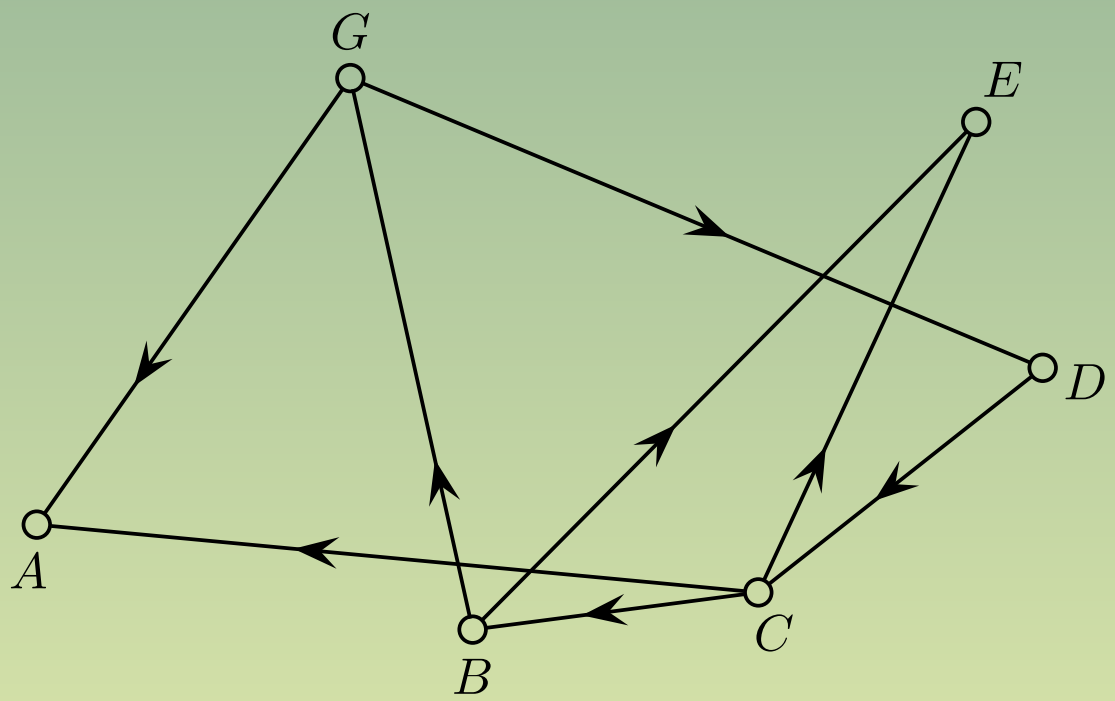
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Postavlja se pitanje kako pronaći jedan usmjereni ciklus u tom digrafu.

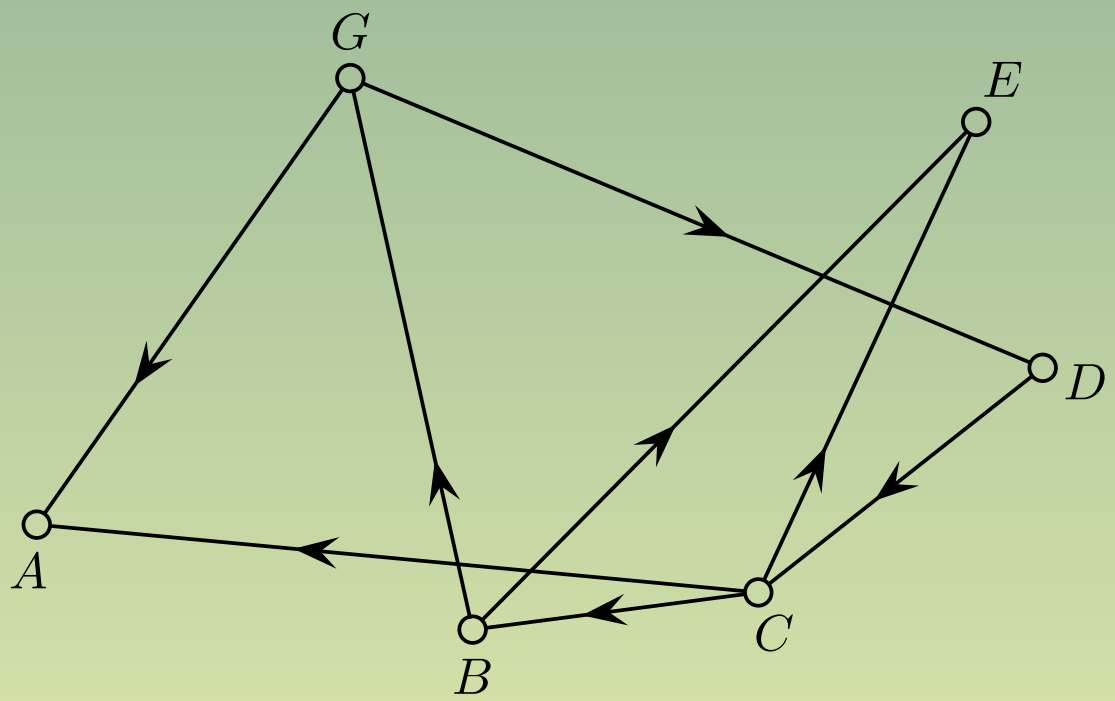
Poanta je da usmjereni ciklus tražimo među neizbrisanim lukovima.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



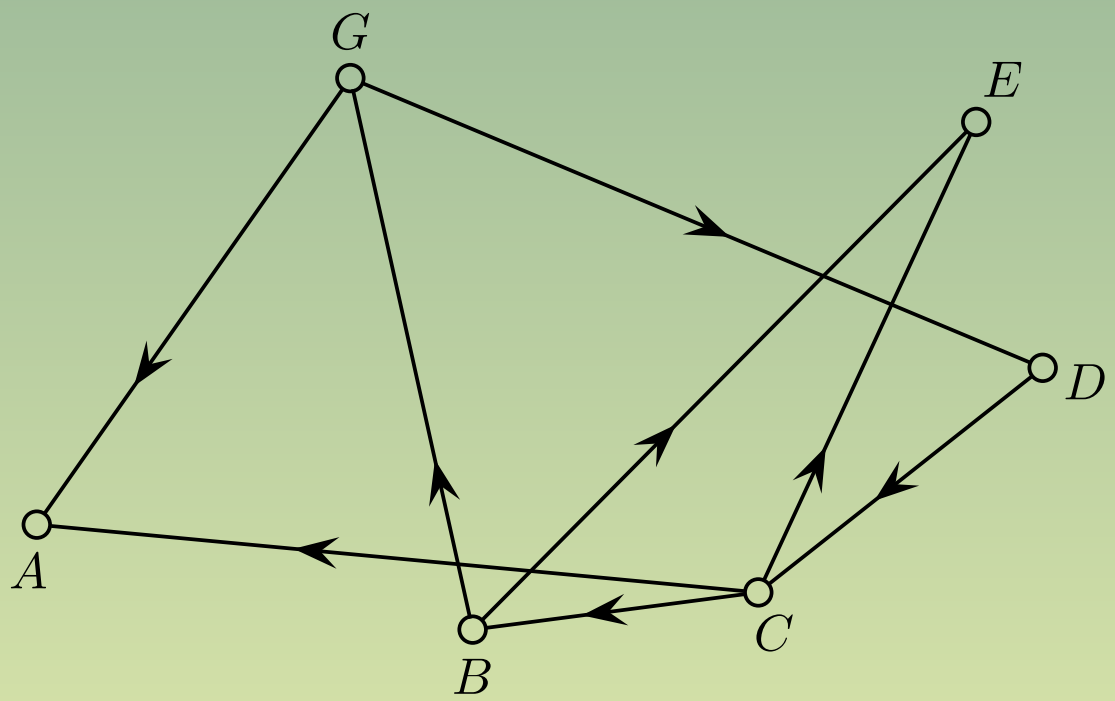
Krenemo od nekog vrha i putujemo sukcesivno prema ostalim vrhovima. Prvi put nakon što se neki od vrhova ponovi, možemo rekonstruirati usmjereni ciklus. Ukoliko iz nekog vrha ne možemo nastaviti dalje, a nije se još ponovio niti jedan vrh, tada se vraćamo korak unatrag i krenemo prema nekom drugom vrhu.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



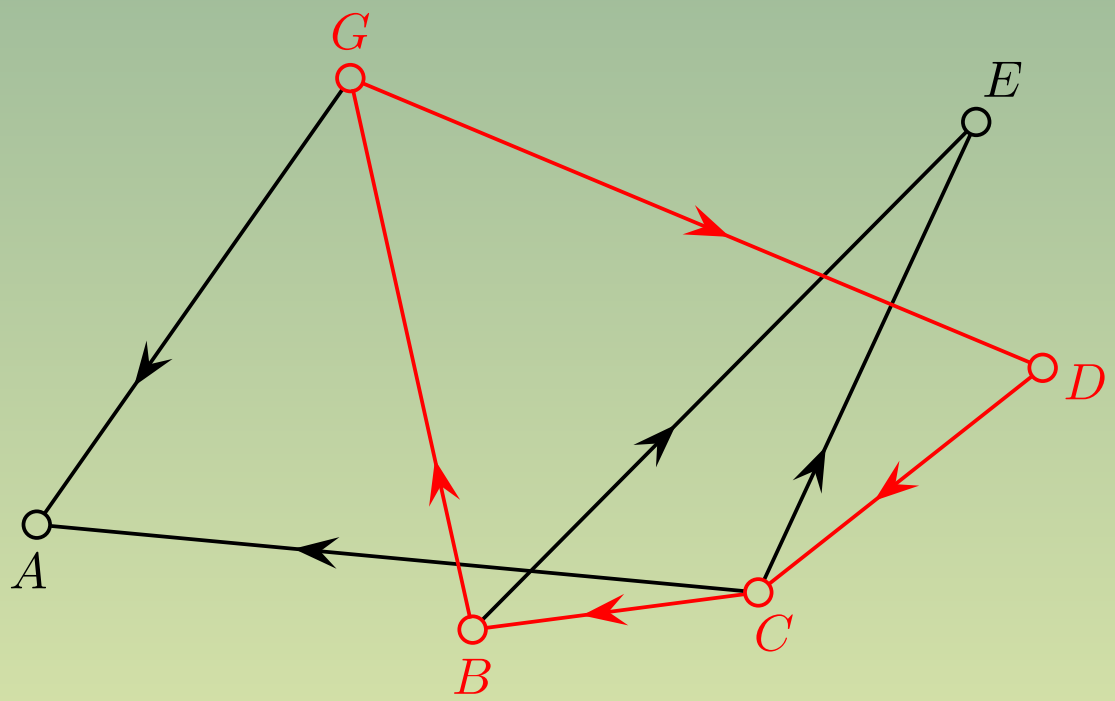
Konkretno ovdje, ako bismo krenuli od vrha G prema vrhu A imali bismo put GA. No, od vrha A ne možemo nastaviti dalje, a nije se još ponovio niti jedan vrh u GA pa vrh A uklanjamo i vraćamo se natrag prema vrhu G. Od vrha G krećemo prema nekom drugom vrhu, ovdje konkretno vrhu D i dobivamo put GD.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



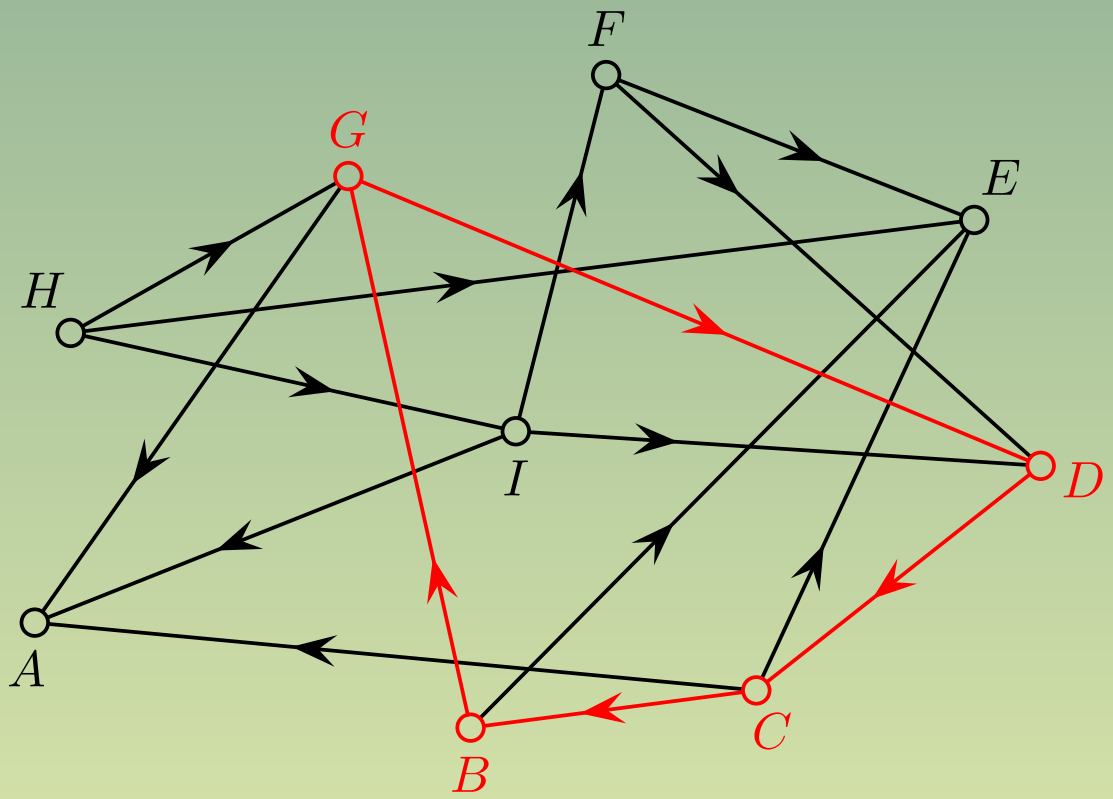
Od vrha D krenemo prema vrhu C i dobivamo put GDC. Od vrha C možemo krenuti prema jednom od vrhova A, B ili E. Vrhovi A i E neće biti dobri jer od njih nećemo moći krenuti dalje pa stoga krenemo prema vrhu B i dobivamo put $GDCB$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Iz vrha B možemo krenuti prema jednom od vrhova G i E. Vrh E neće biti dobar, morali bismo se opet vraćati, pa krenemo prema vrhu G i dobivamo $GDCBG$. Vidimo da se ponovio vrh G pa smo dobili usmjereni ciklus $GDCBG$. Ne mora se općenito ponoviti prvi vrh od kojeg smo krenuli. Npr., da se umjesto vrha G ponovio vrh D, tada bismo imali $GDCBD$ pa bismo dobili usmjereni ciklus $DCBD$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Evo i početnog digrafa i označenog pronađenog usmjerenog ciklusa $GDCBG$.

objasni postupak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam

ULAZ: aciklički digraf D s kanonskim poretkom vrhova $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ i nenegativnim težinama lukova

IZLAZ: najkraći putovi od v_0 do svih ostalih vrhova

1: Stavi $d_0 = 0$ i $d_i = \infty$ za $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Stavi $p_i = -1$ za $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

2: Za $t = 1$ do $n-1$ radi

$$d_t = \min\{d_j + w(v_j, v_t) : j = 0, 1, \ldots, t-1\}$$

p_t neka bude jednak onom j za koji se postiže minimum

Ukoliko se žele dobiti najkraći putovi od v_k do svih ostalih vrhova, tada prvi korak modificiramo s $d_k = 0$ i $d_i = \infty$ za $i \neq k$. U drugom koraku petlju izvršavamo od $t = k+1$ do $t = n-1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Napomena.

Složenost Bellmanovog algoritma je $O(\nu + \varepsilon)$ uključujući i prethodno potrebno topološko sortiranje vrhova acikličkog digrafa. Uočavamo da je to puno bolje od Bellman-Fordovog algoritma, ali i pomalo od Dijkstrinog algoritma. No, opet moramo imati na umu da se Bellmanov algoritam može primijeniti jedino na acikličke digrafe. U čemu je razlika između Bellmanovog i Bellman-Fordovog algoritma? Naime, Bellmanov algoritam koristi uveliko činjenicu da radi na acikličkom digrafu pa stoga ne radi nepotrebna provjeravanja vrhova koja se provode u Bellman-Fordovom algoritmu. Nakon što su vrhovi topološki sortirani, tada znamo da ne postoje lukovi iz vrhova s većim indeksima prema vrhovima s manjim indeksima. Konkretno, ukoliko tražimo najkraći put od vrha v_0 do vrha v_3, tada je dovoljno samo provjeravati vrhove v_0, v_1 i v_2 jer jedino iz tih vrhova postoje eventualni lukovi prema vrhu v_3 pa najkraći

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

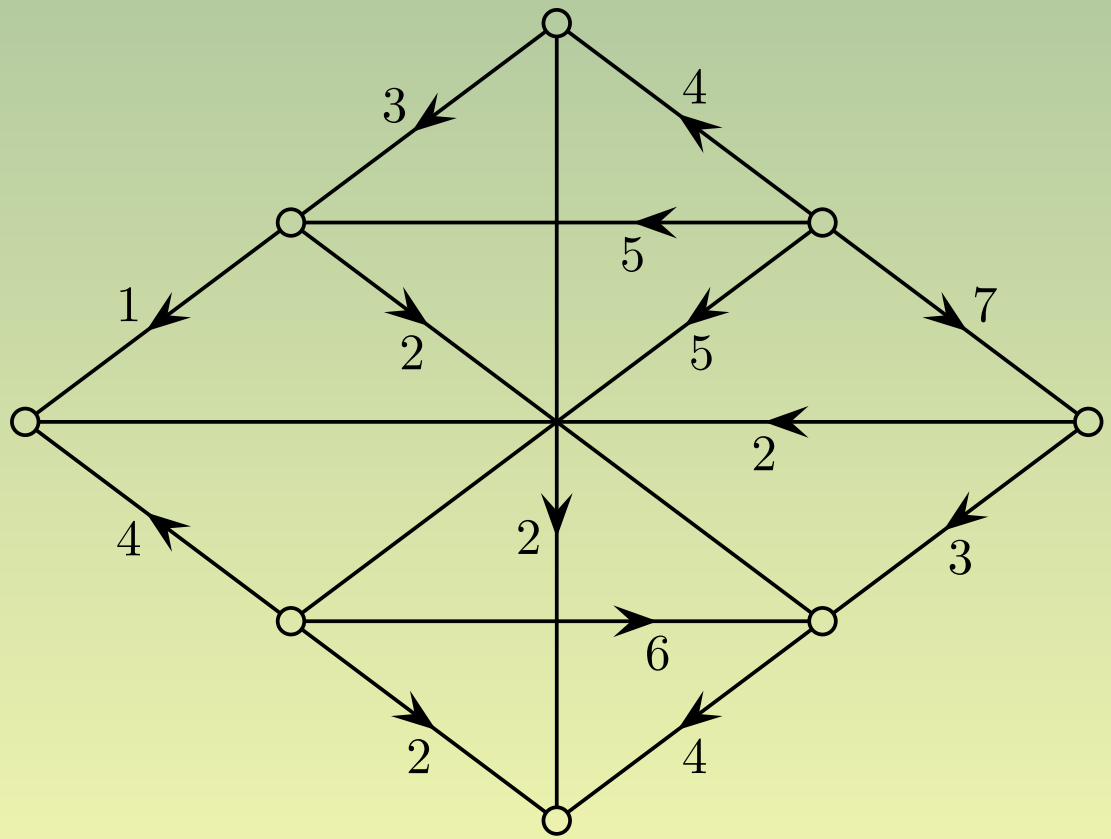
put od v_0 do v_3 može jedino sadržavati neke (ili sve) od vrhova v_0, v_1, v_2 i v_3. Općenito, za najkraći put od vrha v_0 do vrha v_i je dovoljno samo gledati vrhove $v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}$ jer jedino iz tih vrhova postoje eventualni lukovi prema vrhu v_i. Tu činjenicu zapravo koristi Bellmanov algoritam i zato ima puno bolju složenost za razliku od Bellman-Fordovog algoritma koji tu činjenicu ne koristi i provjerava sve vrhove. No, zbog toga Bellman-Fordov algoritam radi i na općenitijim digrafima, dok Bellmanov algoritam funkcionira samo za acikličke digrafe.

Isto tako, ako tražimo najkraće putove od vrha v_k do preostalih vrhova, tada znamo da ne postoje najkraći putovi od vrha v_k prema bilo kojem od vrhova $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$ jer ne postoje lukovi od vrhova s većim indeksima prema vrhovima s manjim indeksima pa je tada dovoljno petlju u drugom koraku početi s $t = k + 1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.28.

Zadan je težinski digraf



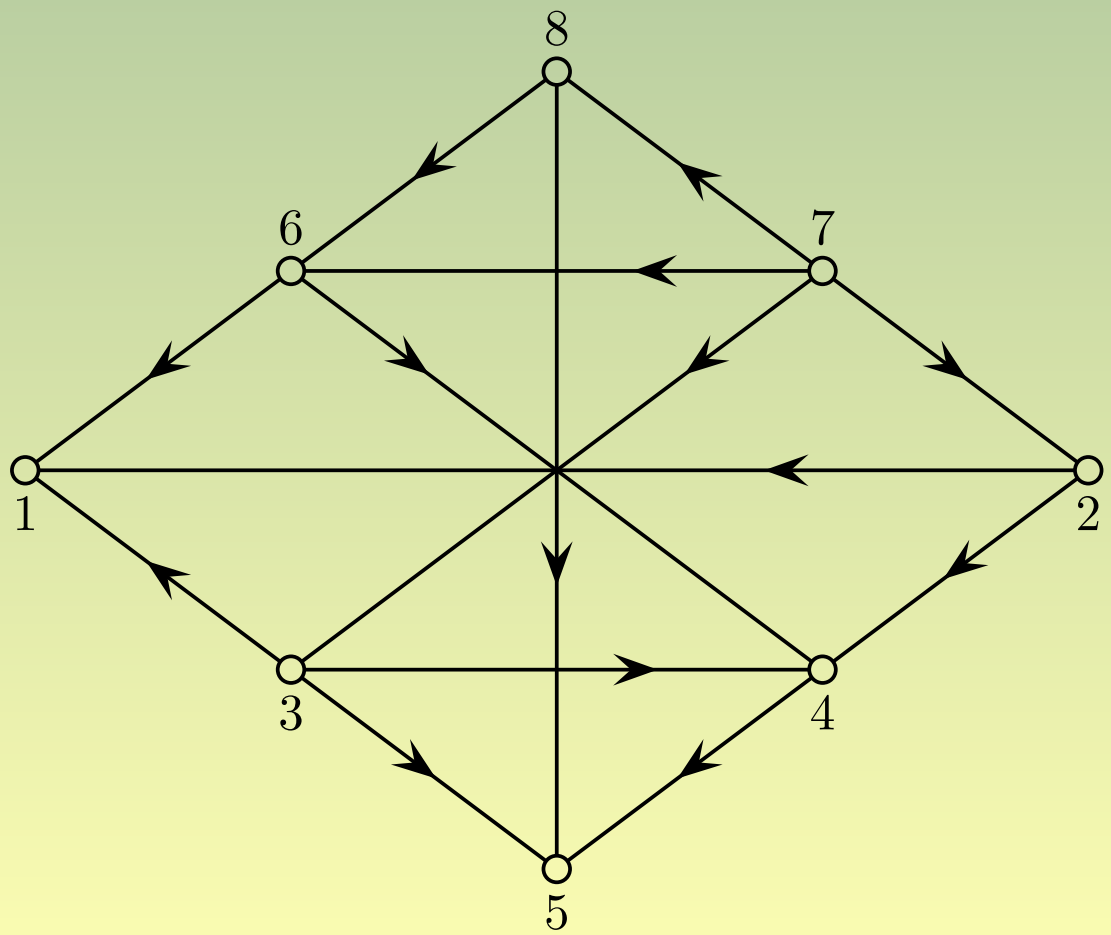
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

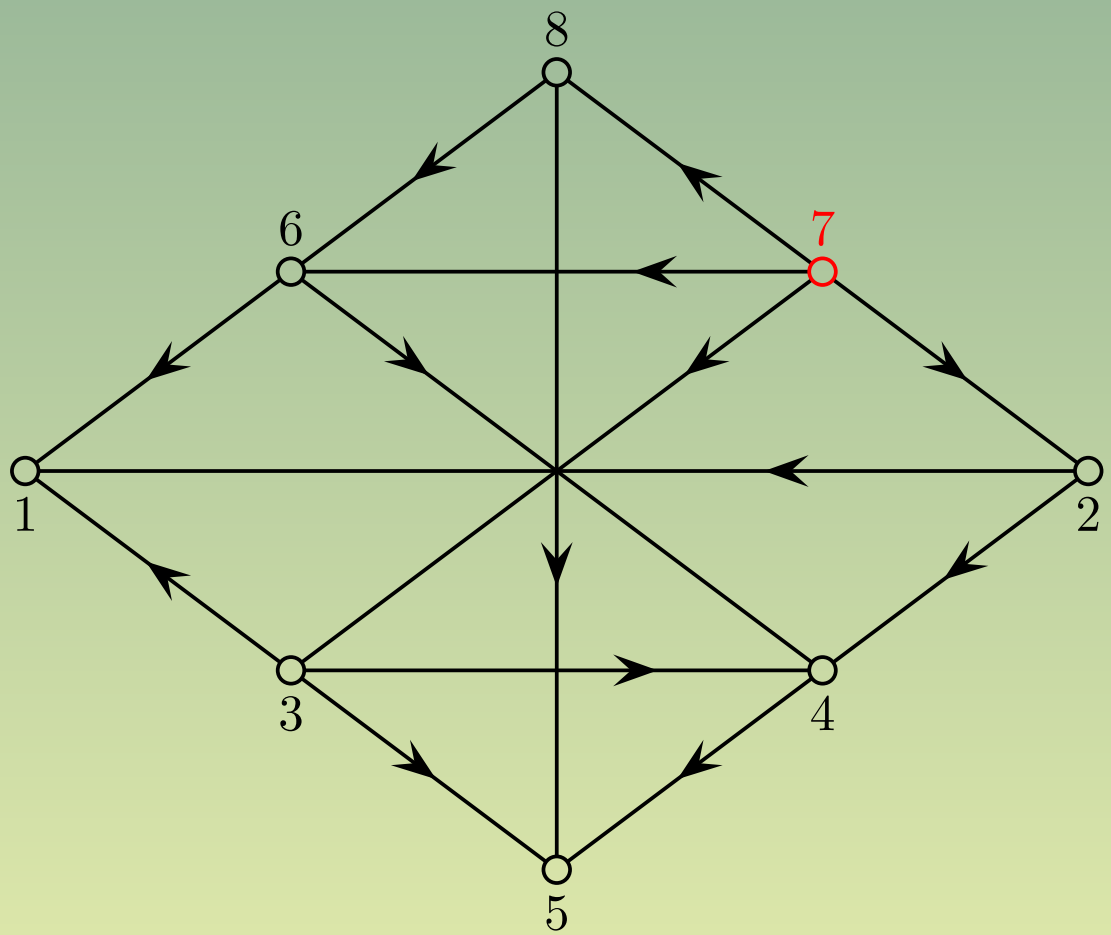
a. *Pomoću topološkog sortiranja provjerite da je digraf acikličk.*
b. *Pomoću Bellmanovog algoritma pronađite najkraće putove od v_0 do svih ostalih vrhova, pri čemu su $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ topološki sortirani vrhovi.*
c. *Pomoću Bellmanovog algoritma pronađite najkraće putove od vrhova v_1 i v_2 do preostalih vrhova u digrafu.*

Rješenje.

Za topološko sortiranje vrhova nam ne trebaju težine lukova pa ćemo stoga promatrati pripadni netežinski digraf, čije ćemo vrhove označiti brojevima $1, 2, \ldots, 8$ kako je prikazano na slici. Cilj nam je te vrhove topološki sortirati ukoliko je to moguće.



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



lista L:

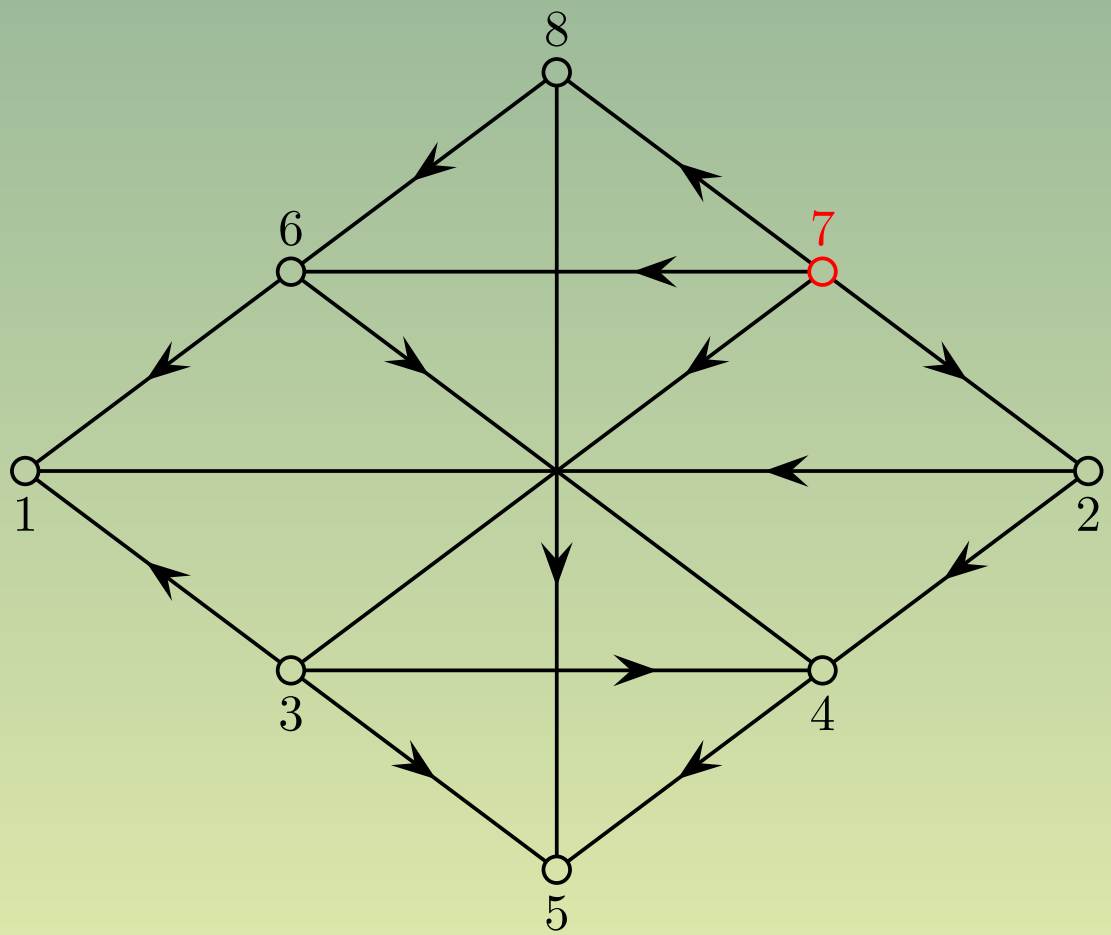
skup S **vrhova instupnja 0**: 7

konačno rješenje

Na početku stavimo da je $L = \emptyset$. Kako je 7 jedini vrh instupnja nula, slijedi da je $S = \{7\}$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

a



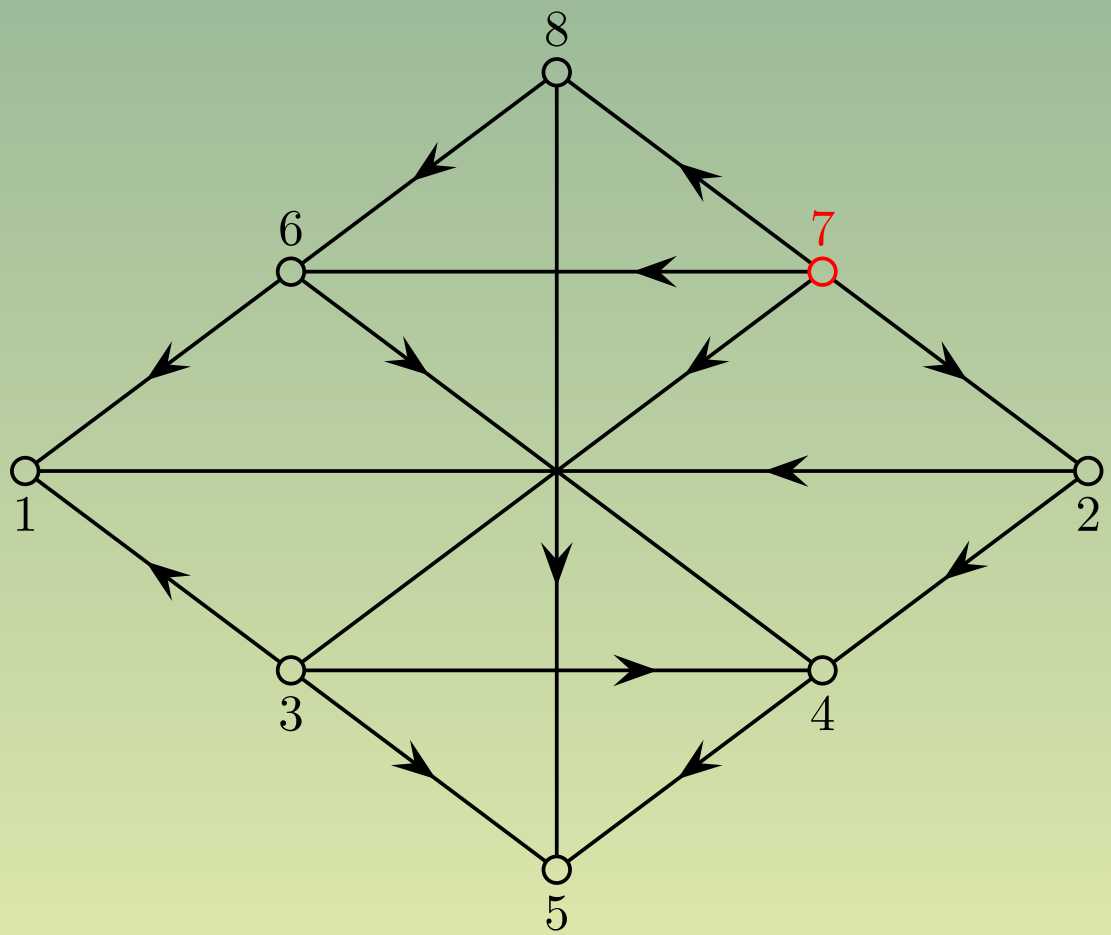
lista L:

skup S **vrhova instupnja 0**: 7

Na početku stavimo da je $L = \emptyset$. Kako je 7 jedini vrh instupnja nula, slijedi da je $S = \{7\}$. Odaberemo neki vrh iz skupa S i prebacimo ga u listu L.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

a

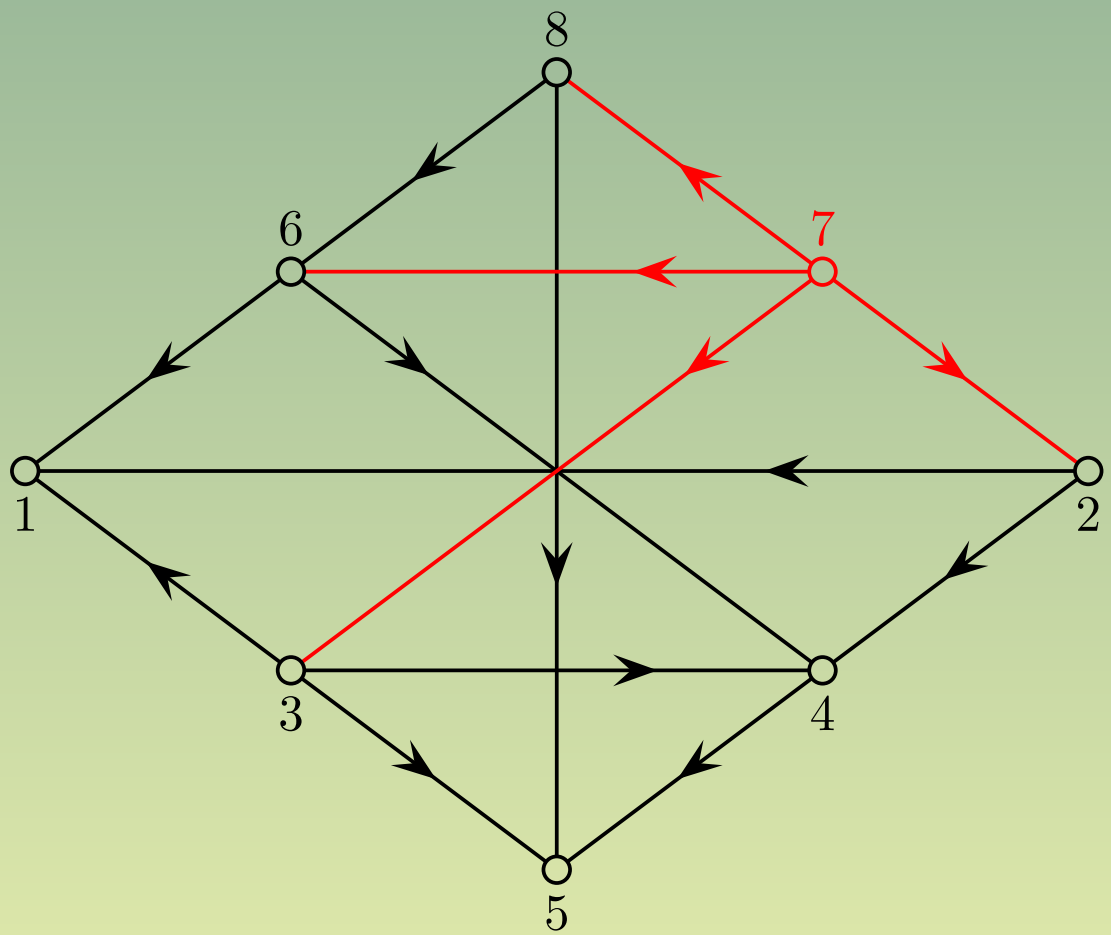


lista L: 7

skup S **vrhova instupnja 0**:

Kako je 7 jedini takav vrh, tada njega prebacimo u listu L.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



lista L: 7

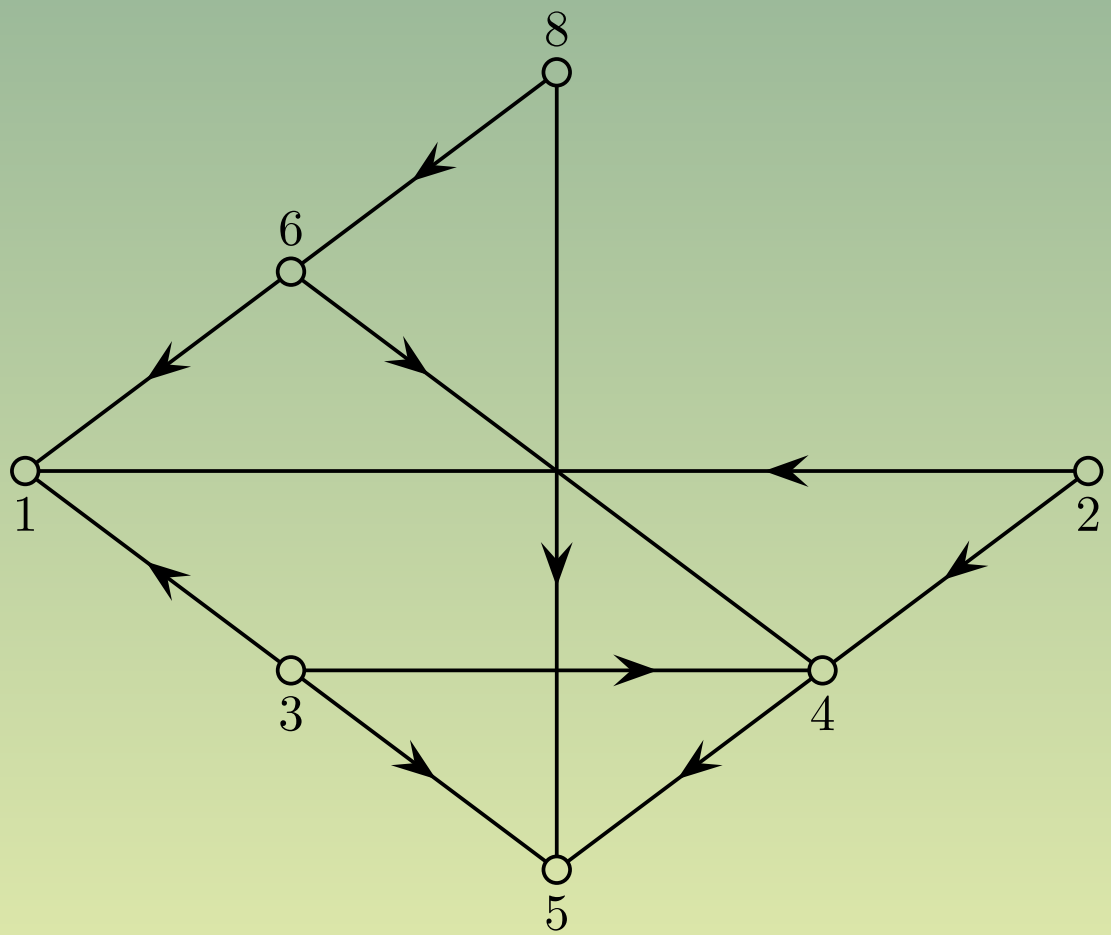
skup S **vrhova instupnja 0**:

Kako je 7 jedini takav vrh, tada njega prebacimo u listu L. Zatim pogledamo sve lukove koji izlaze iz vrha 7.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

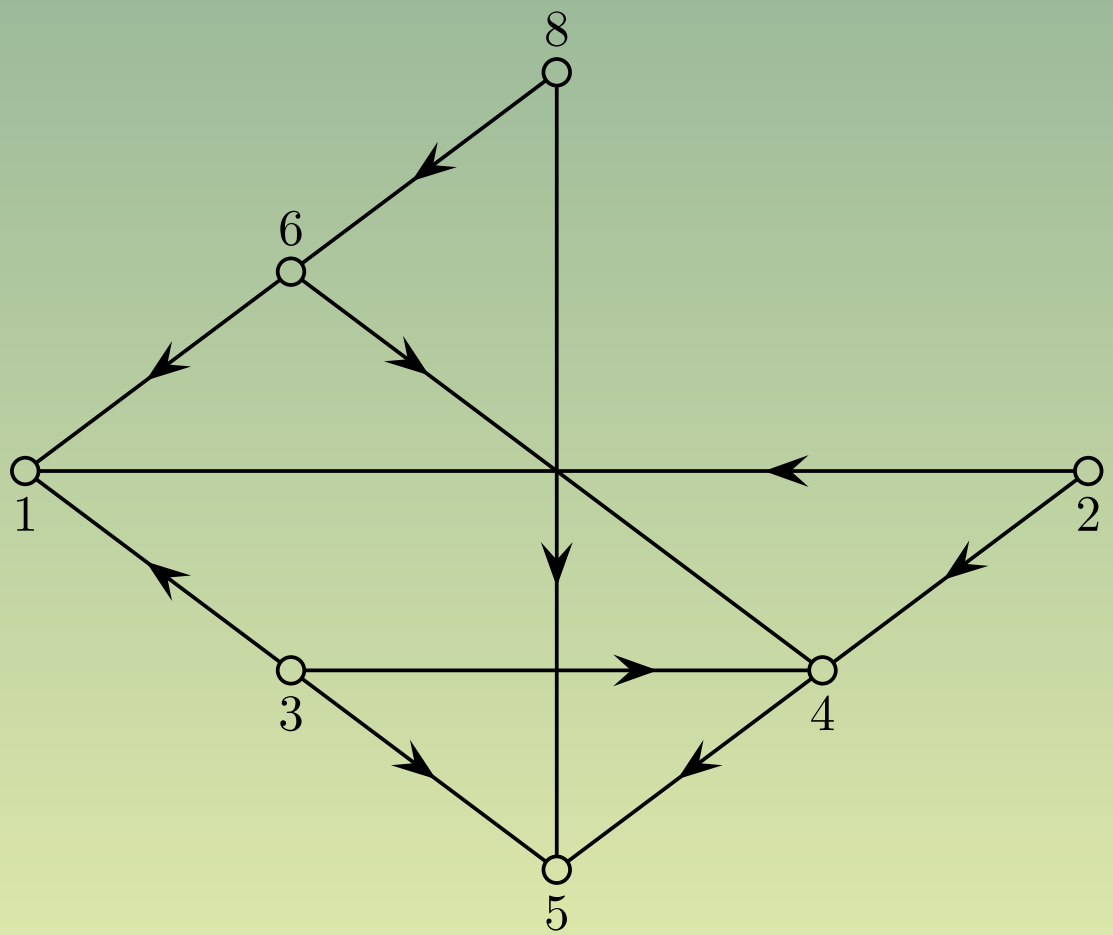


lista L: 7

skup S **vrhova instupnja 0**:

Kako je 7 jedini takav vrh, tada njega prebacimo u listu L. Zatim pogledamo sve lukove koji izlaze iz vrha 7. Sve te lukove uklonimo iz digrafa zajedno s vrhom 7.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

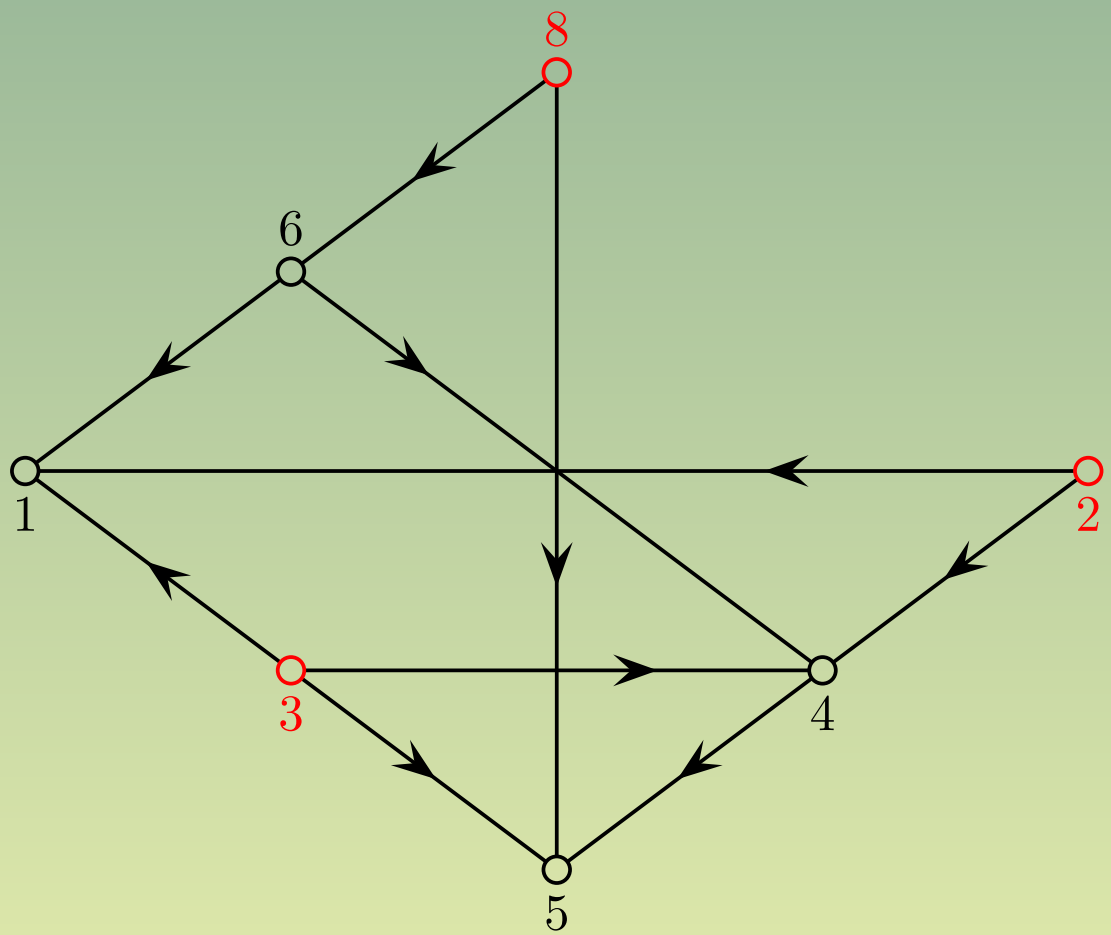


lista L: 7

skup S **vrhova instupnja 0**:

Provjeravamo da li nakon toga neki od vrhova ima instupanj 0.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



lista L: 7

skup S **vrhova instupnja 0**: 2, 3, 8

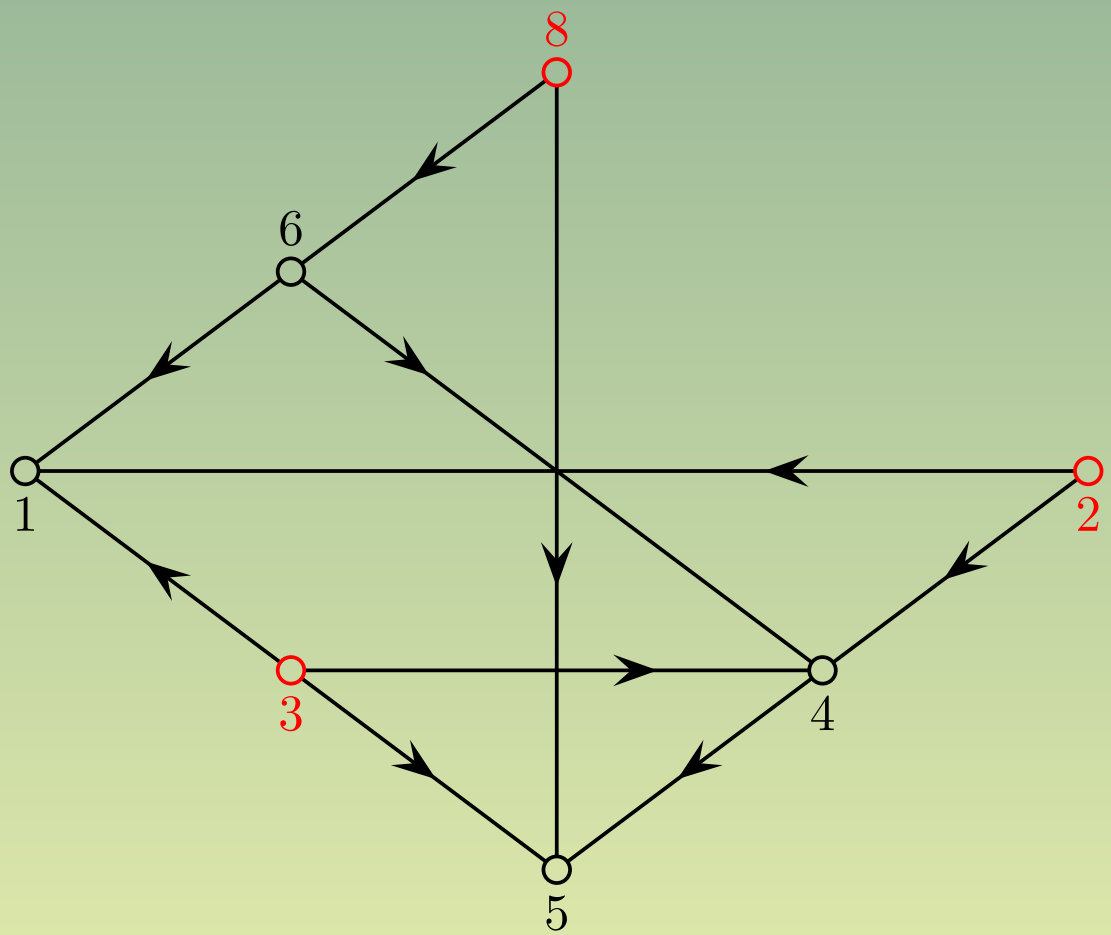
Provjeravamo da li nakon toga neki od vrhova ima instupanj 0.

Uočavamo da imamo tri takva vrha 2, 3 i 8 pa sve njih stavimo u skup S.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



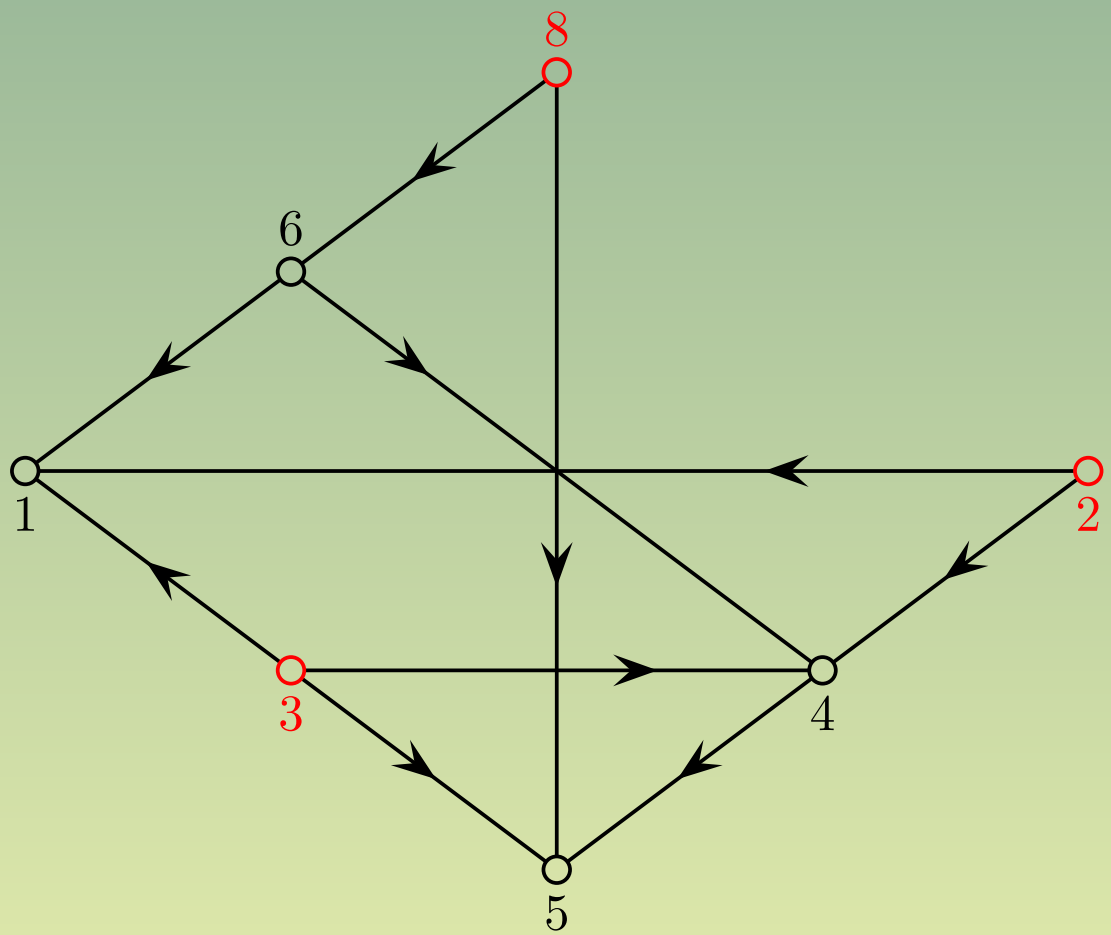
lista L: 7

skup S **vrhova instupnja 0**: 2, 3, 8

Provjeravamo da li nakon toga neki od vrhova ima instupanj 0. Uočavamo da imamo tri takva vrha 2, 3 i 8 pa sve njih stavimo u skup S. Opet biramo neki vrh iz skupa S i prebacimo ga u listu L.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

a

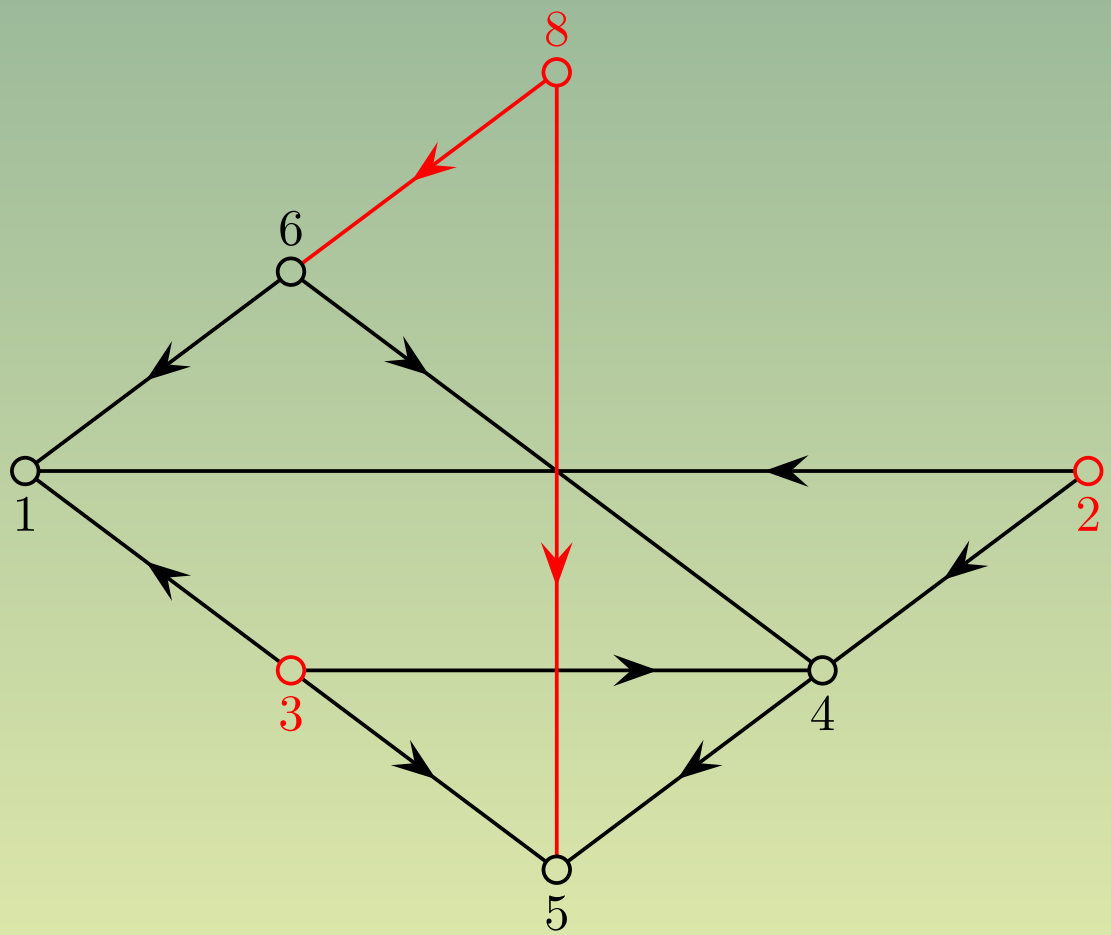


lista L: 7, 8

skup S **vrhova instupnja 0**: 2, 3

Odaberemo, npr. vrh 8 i prebacimo ga u listu L.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

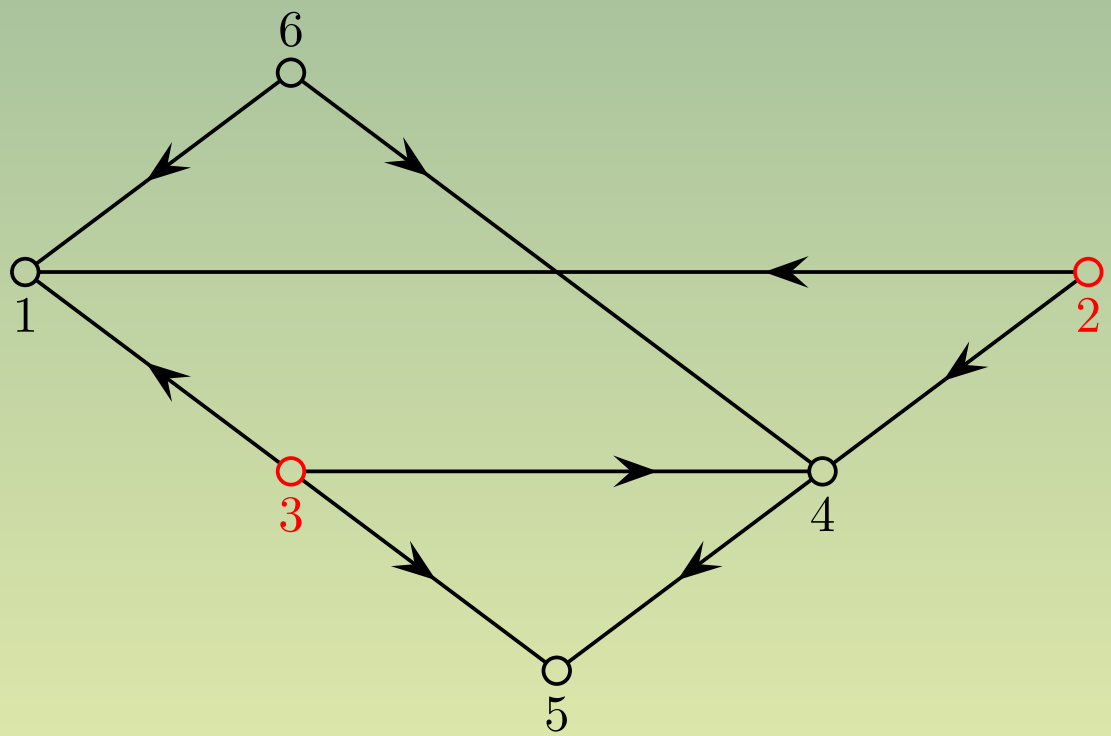


lista L: 7, 8

skup S **vrhova instupnja 0**: 2, 3

Odaberemo, npr. vrh 8 i prebacimo ga u listu L. Zatim pogledamo sve lukove koji izlaze iz vrha 8.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



lista L: 7, 8

skup S **vrhova instupnja 0**: 2, 3

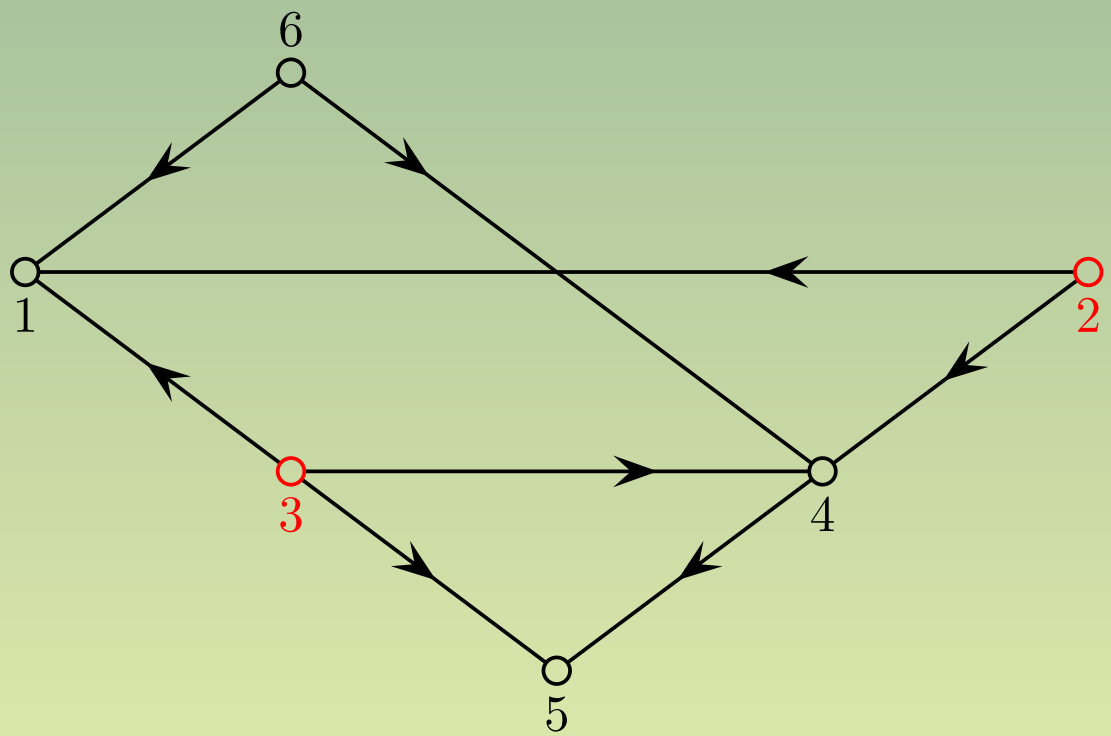
Odaberemo, npr. vrh 8 i prebacimo ga u listu L. Zatim pogledamo sve lukove koji izlaze iz vrha 8. Sve te lukove uklonimo iz digrafa zajedno s vrhom 8.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

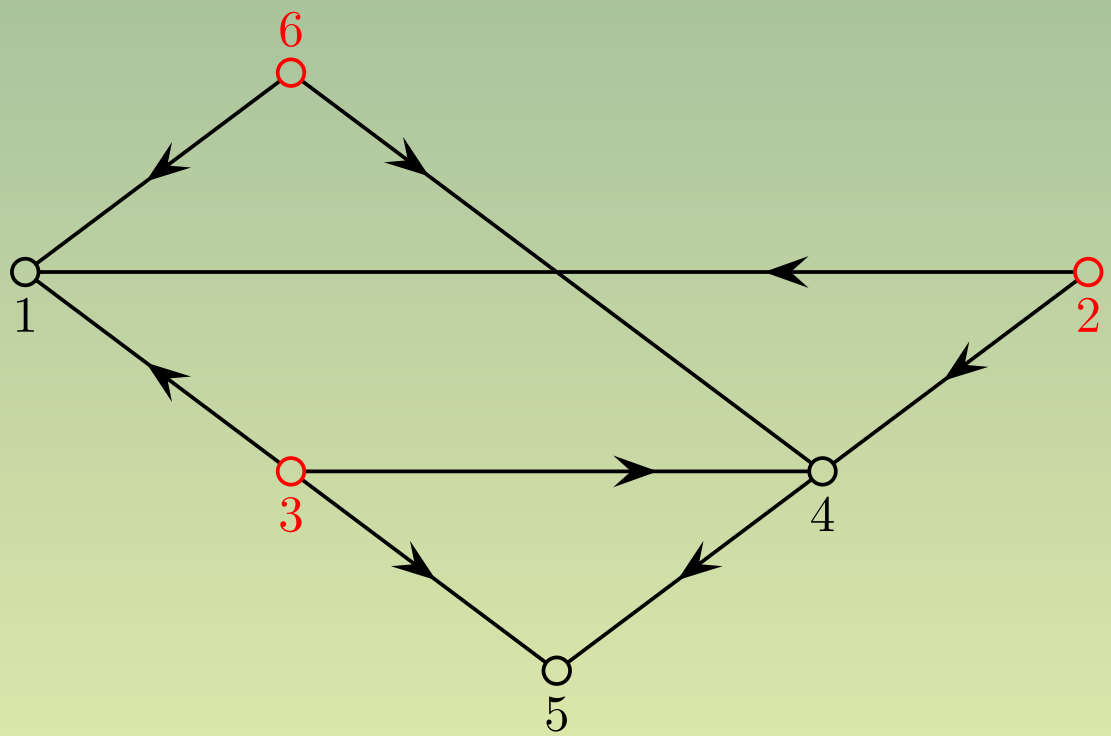


lista L: 7, 8

skup S **vrhova instupnja 0**: 2, 3

Provjeravamo da li nakon toga još neki od vrhova ima instupanj 0.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

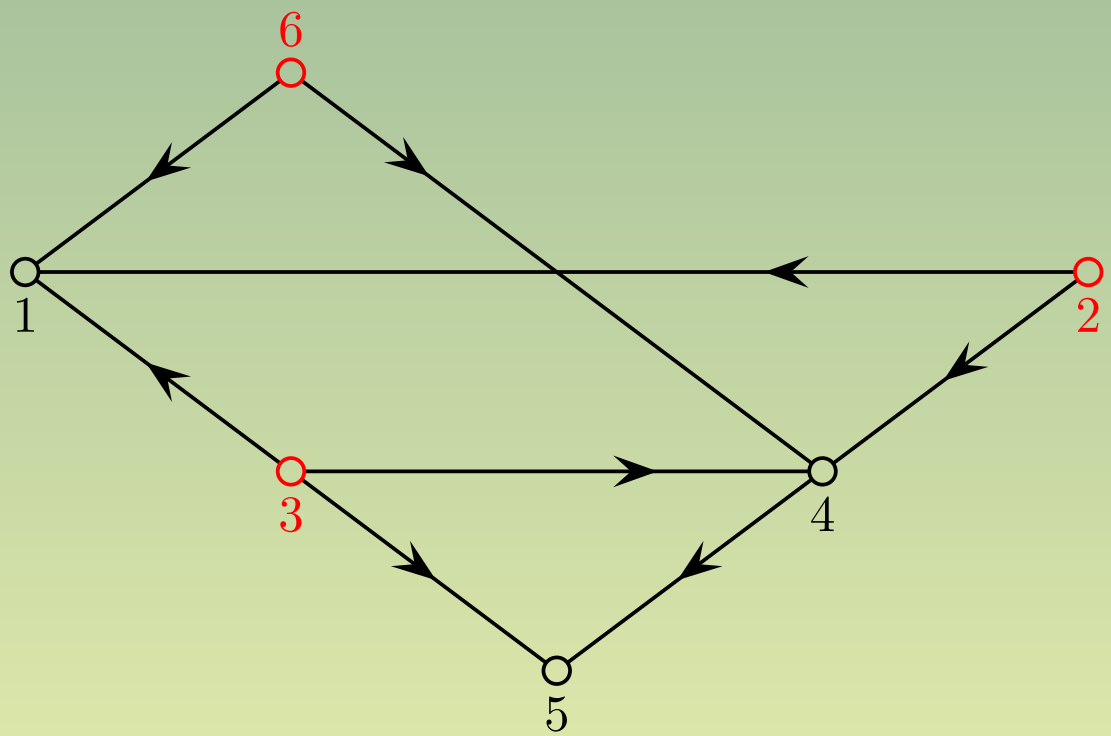


lista L: 7, 8

skup S **vrhova instupnja 0**: 2, 3, 6

Provjeravamo da li nakon toga još neki od vrhova ima instupanj 0.

Uočavamo da je to vrh 6 pa ga stavimo u skup S.



lista L: 7, 8

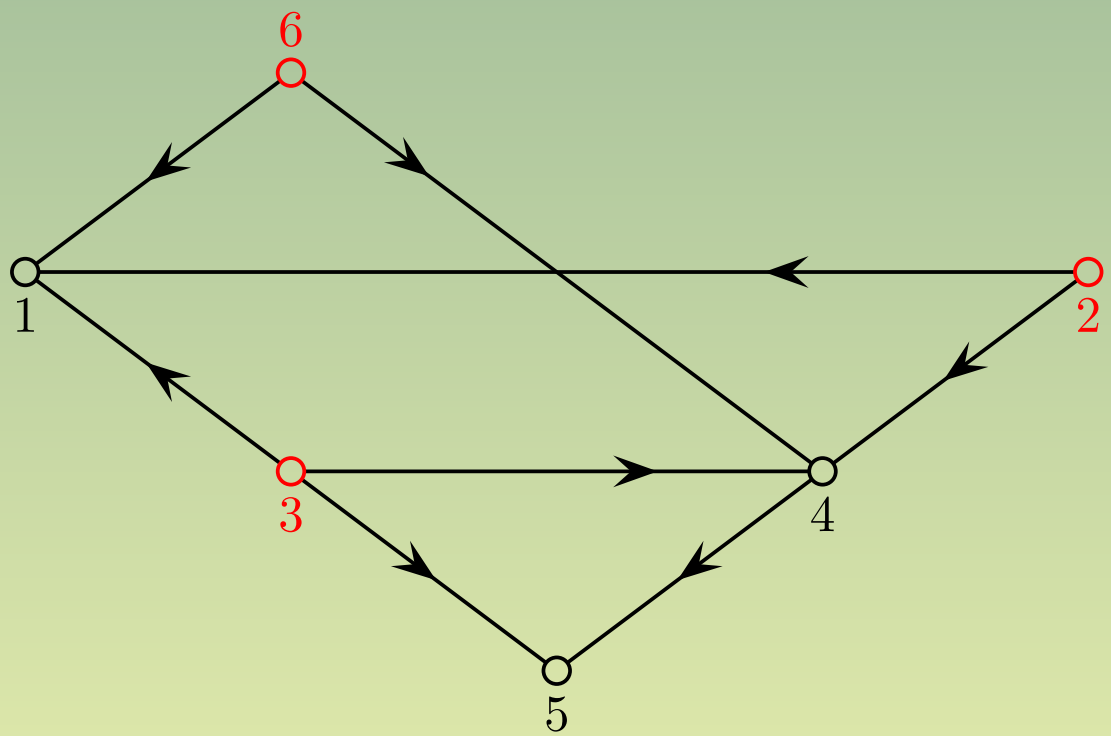
skup S **vrhova instupnja 0**: 2, 3, 6

Provjeravamo da li nakon toga još neki od vrhova ima instupanj 0. Uočavamo da je to vrh 6 pa ga stavimo u skup S. Opet biramo neki vrh iz skupa S i prebacimo ga u listu L.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

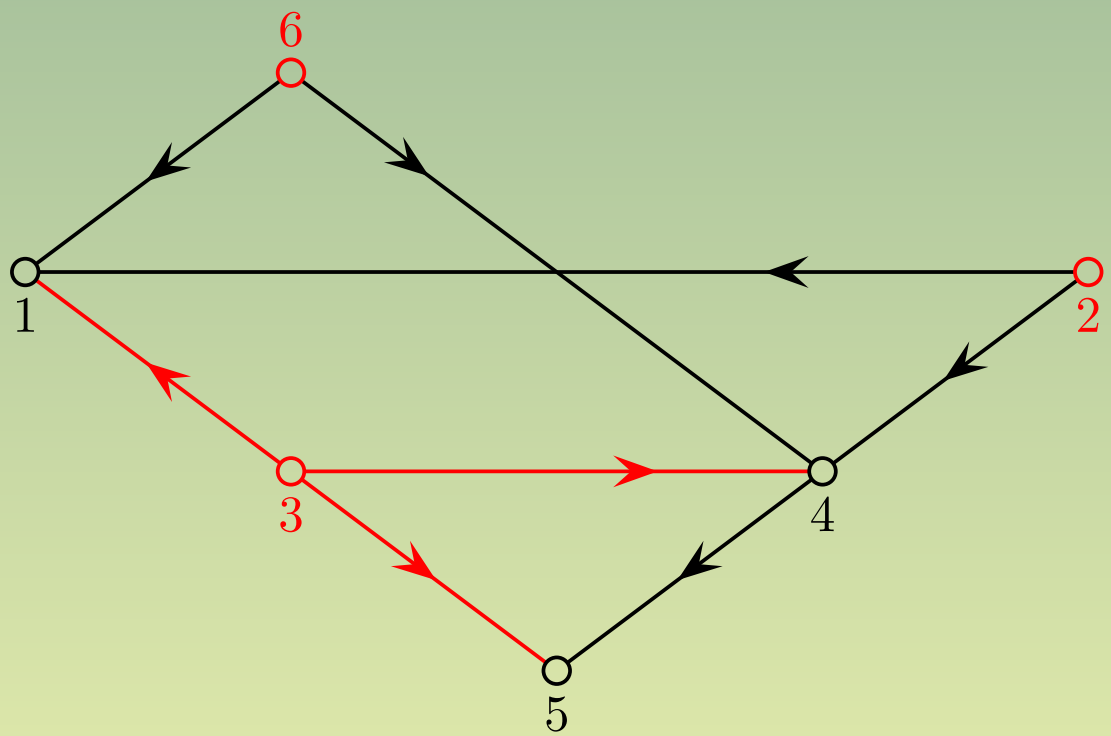
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



lista L: 7, 8, 3

skup S **vrhova instupnja 0**: 2, 6

Odaberemo, npr. vrh 3 i prebacimo ga u listu L.



lista L: 7, 8, 3

skup S **vrhova instupnja 0**: 2, 6

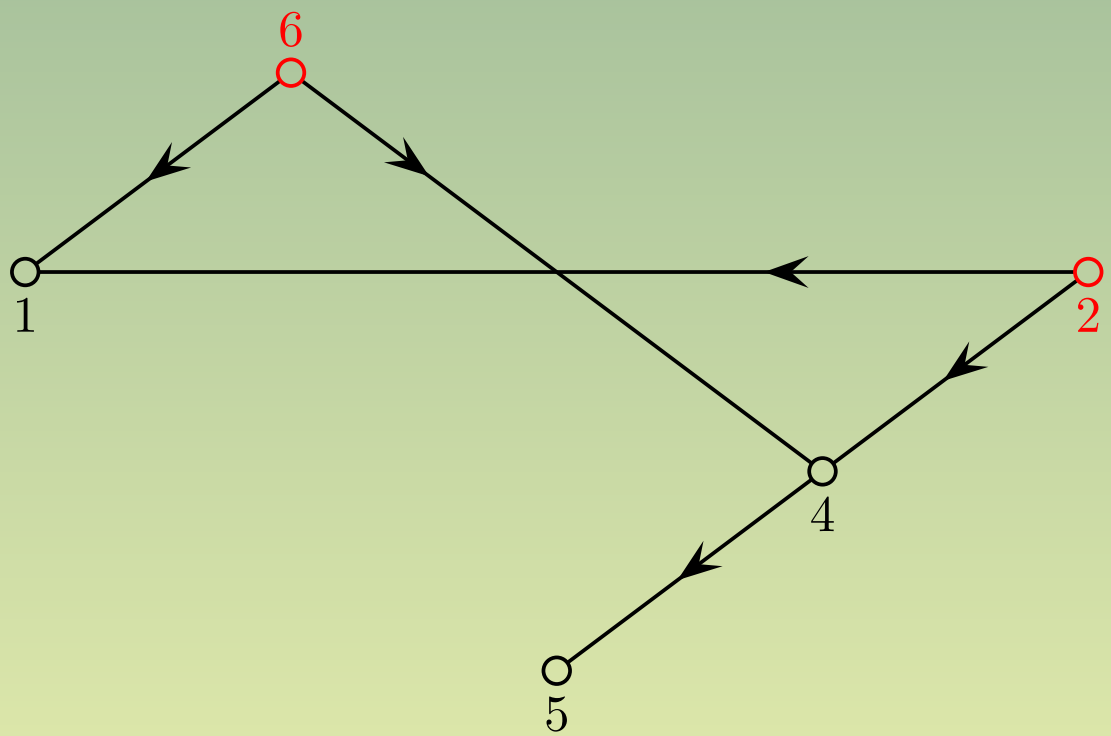
Odaberemo, npr. vrh 3 i prebacimo ga u listu L. Zatim pogledamo sve lukove koji izlaze iz vrha 3.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

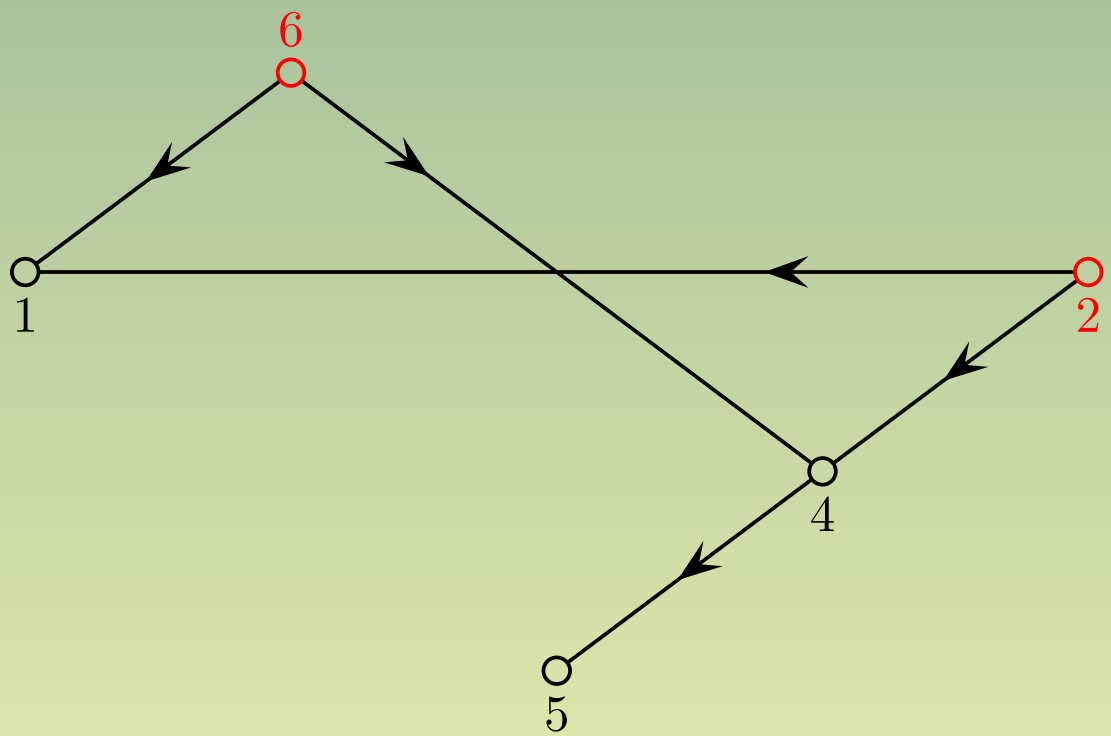


lista L: 7, 8, 3

skup S **vrhova instupnja 0**: 2, 6

Odaberemo, npr. vrh 3 i prebacimo ga u listu L. Zatim pogledamo sve lukove koji izlaze iz vrha 3. Sve te lukove uklonimo iz digrafa zajedno s vrhom 3.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

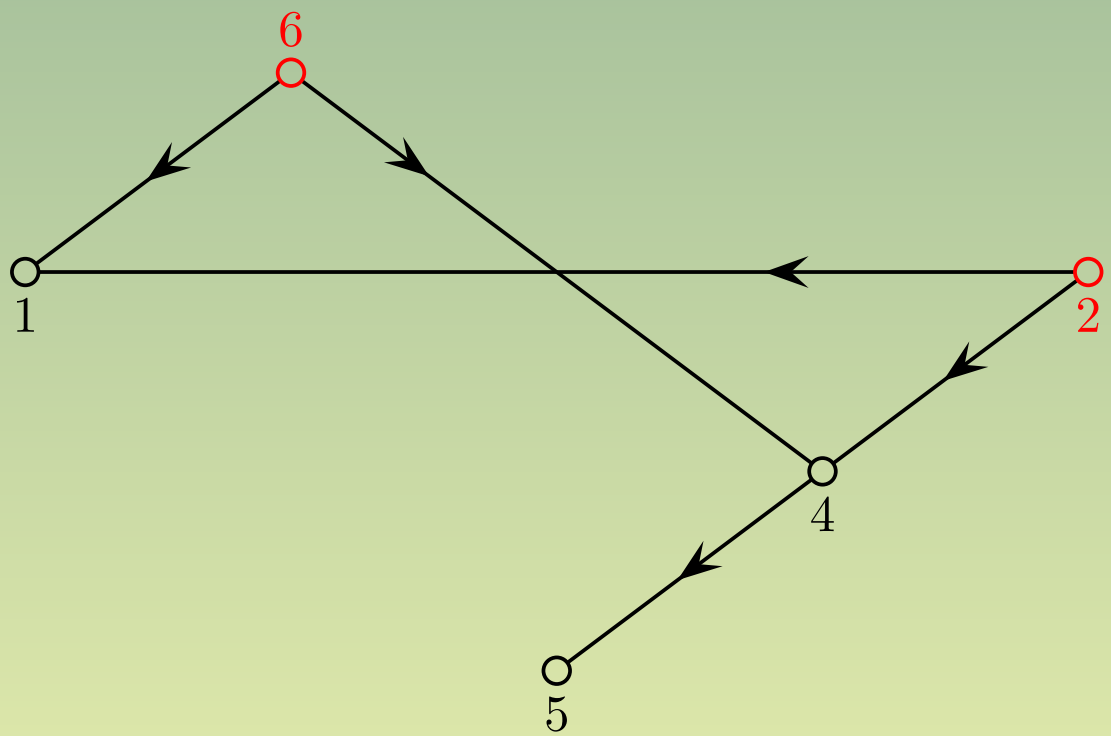


lista L: 7, 8, 3

skup S **vrhova instupnja 0**: 2, 6

Provjeravamo da li nakon toga još neki od vrhova ima instupanj 0.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

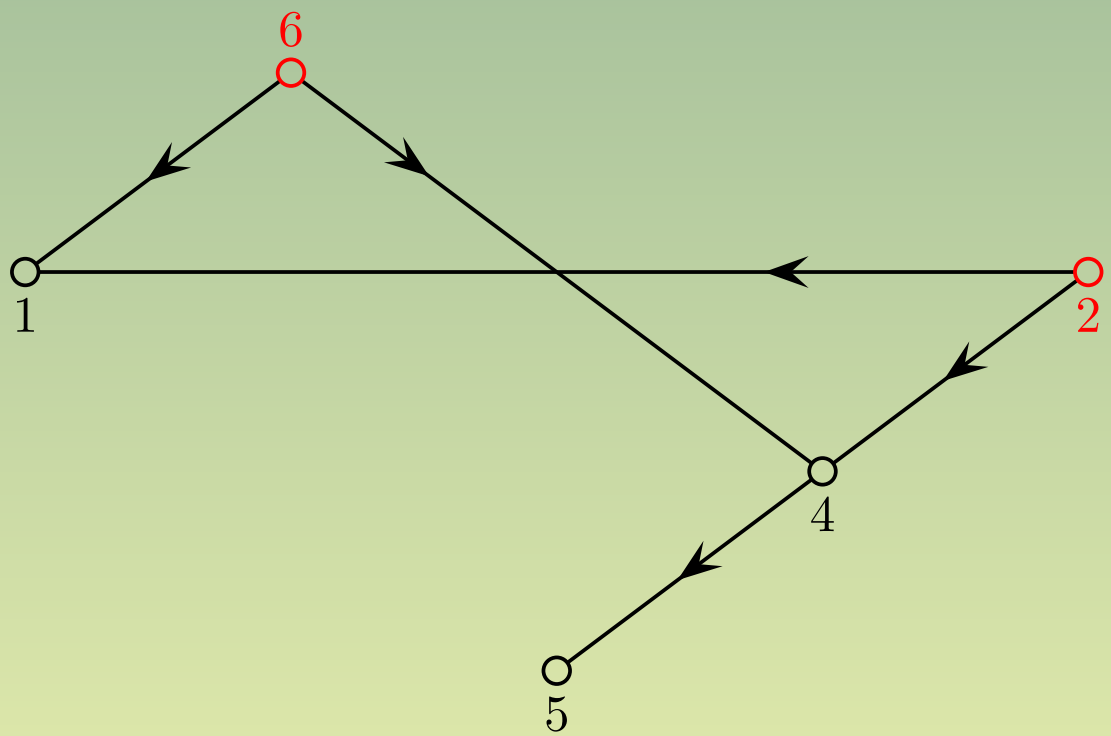


lista L: 7, 8, 3

skup S **vrhova instupnja 0**: 2, 6

Provjeravamo da li nakon toga još neki od vrhova ima instupanj 0. Vidimo da nema novih vrhova instupnja 0, osim onih koji već jesu od prije u skupu S.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

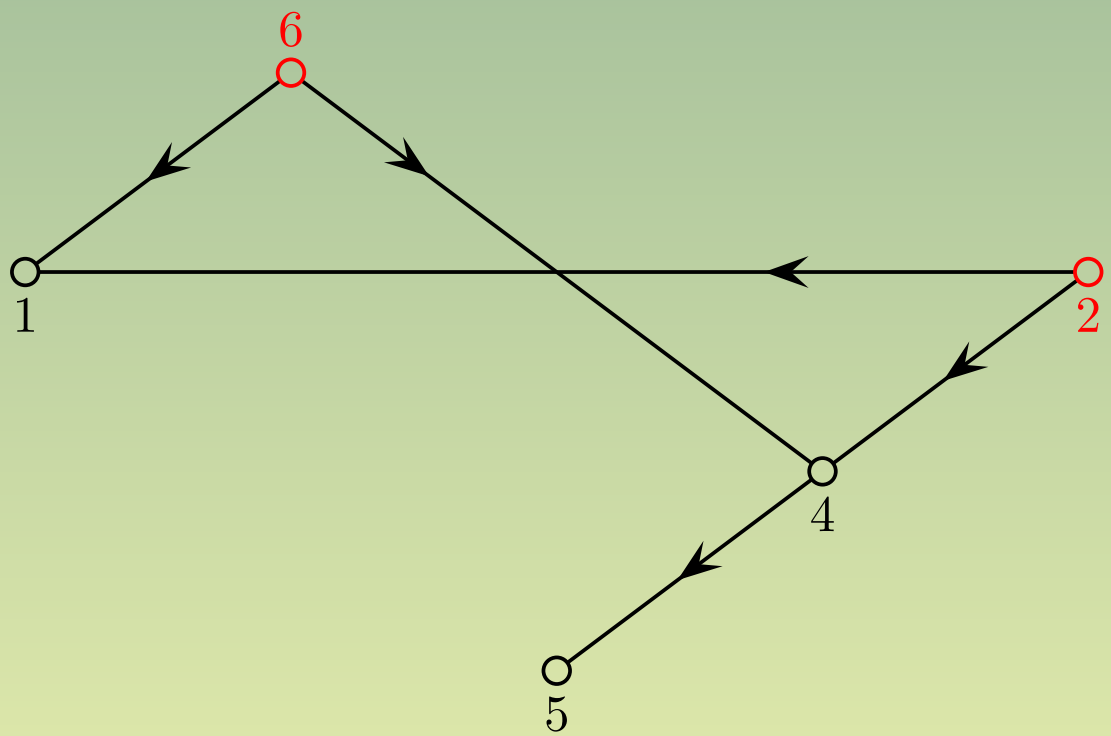


lista L: 7, 8, 3

skup S **vrhova instupnja 0**: 2, 6

Provjeravamo da li nakon toga još neki od vrhova ima instupanj 0. Vidimo da nema novih vrhova instupnja 0, osim onih koji već jesu od prije u skupu S. Opet biramo neki vrh iz skupa S i prebacimo ga u listu L.

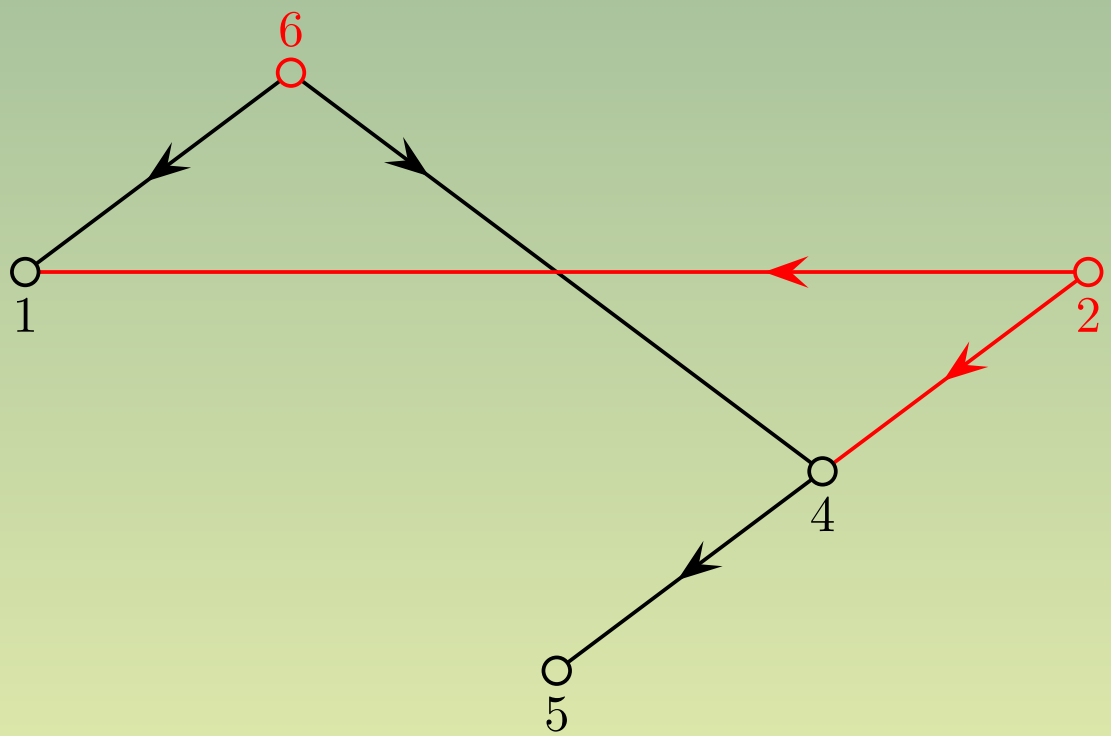
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



lista L: 7, 8, 3, 2

skup S **vrhova instupnja 0**: 6

Odaberemo, npr. vrh 2 i prebacimo ga u listu L.



lista L: 7, 8, 3, 2

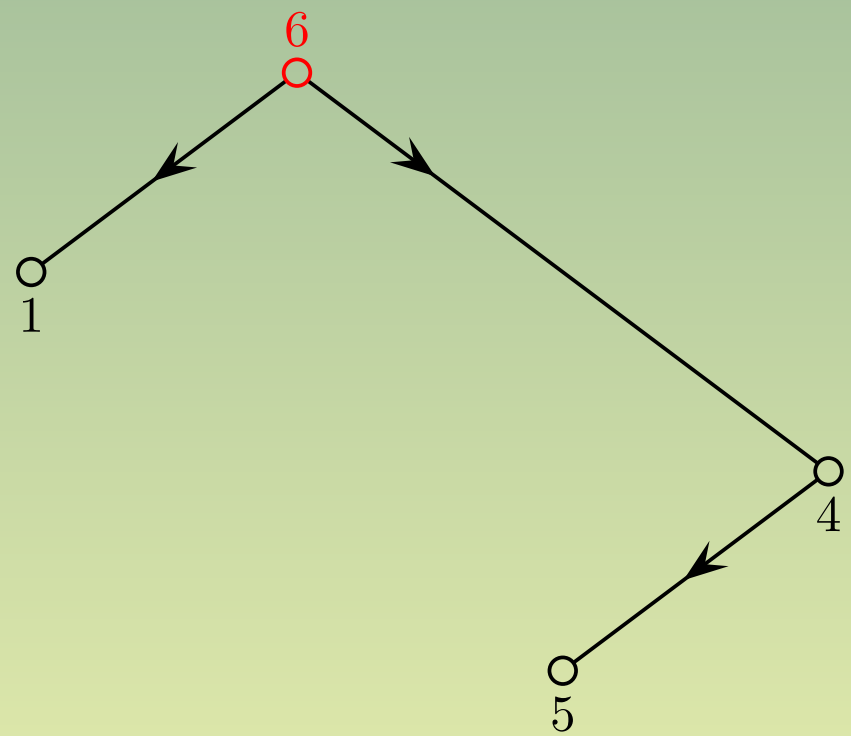
skup S **vrhova instupnja 0**: 6

Odaberemo, npr. vrh 2 i prebacimo ga u listu L. Zatim pogledamo sve lukove koji izlaze iz vrha 2.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



lista L: 7, 8, 3, 2

skup S **vrhova instupnja 0**: 6

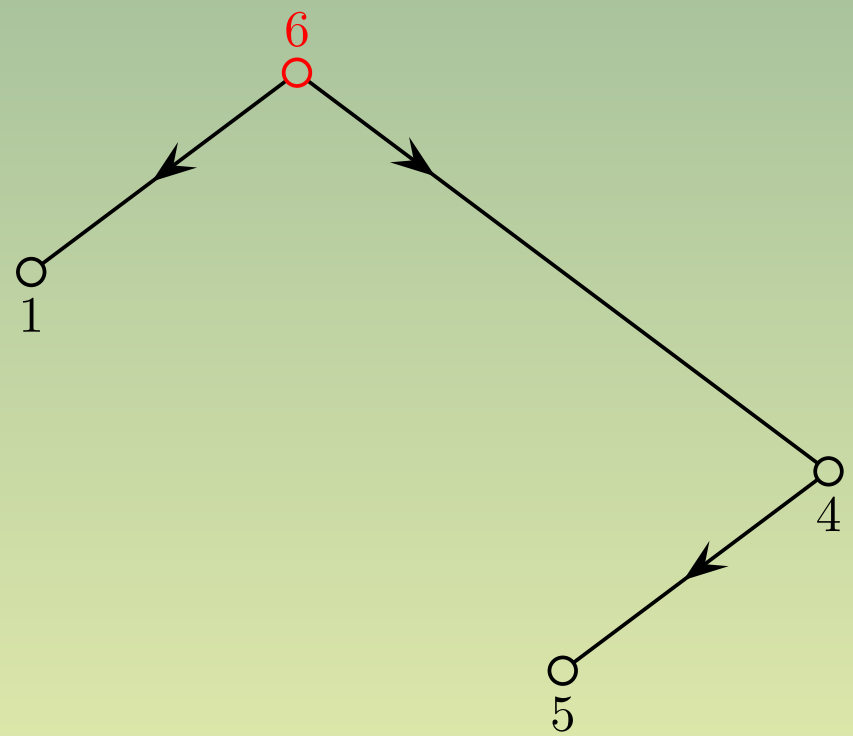
Odaberemo, npr. vrh 2 i prebacimo ga u listu L. Zatim pogledamo sve lukove koji izlaze iz vrha 2. Sve te lukove uklonimo iz digrafa zajedno s vrhom 2.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

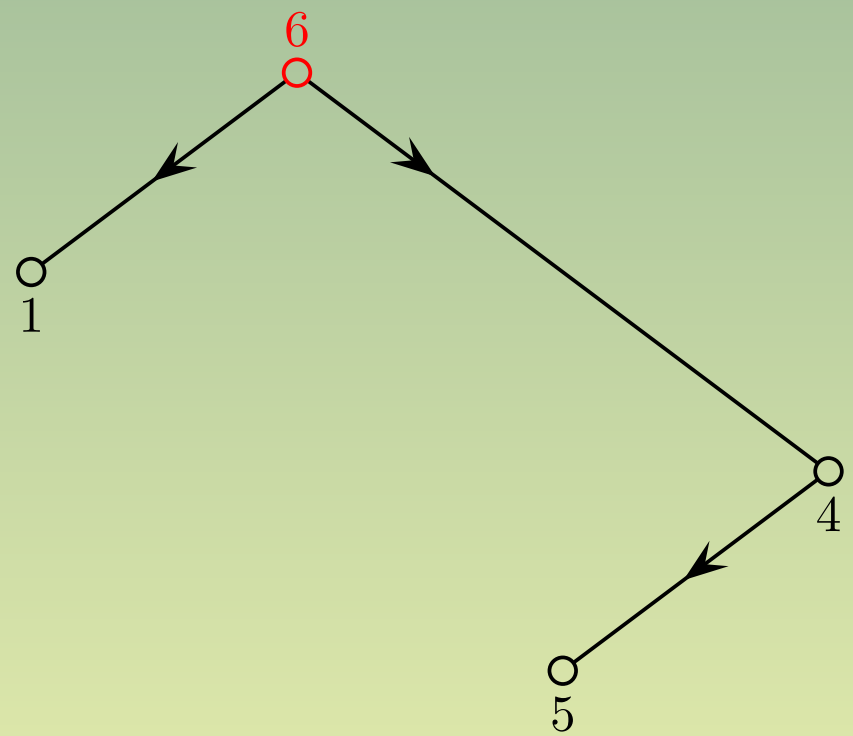


lista L: 7, 8, 3, 2

skup S **vrhova instupnja 0**: 6

Provjeravamo da li nakon toga još neki od vrhova ima instupanj 0.

a



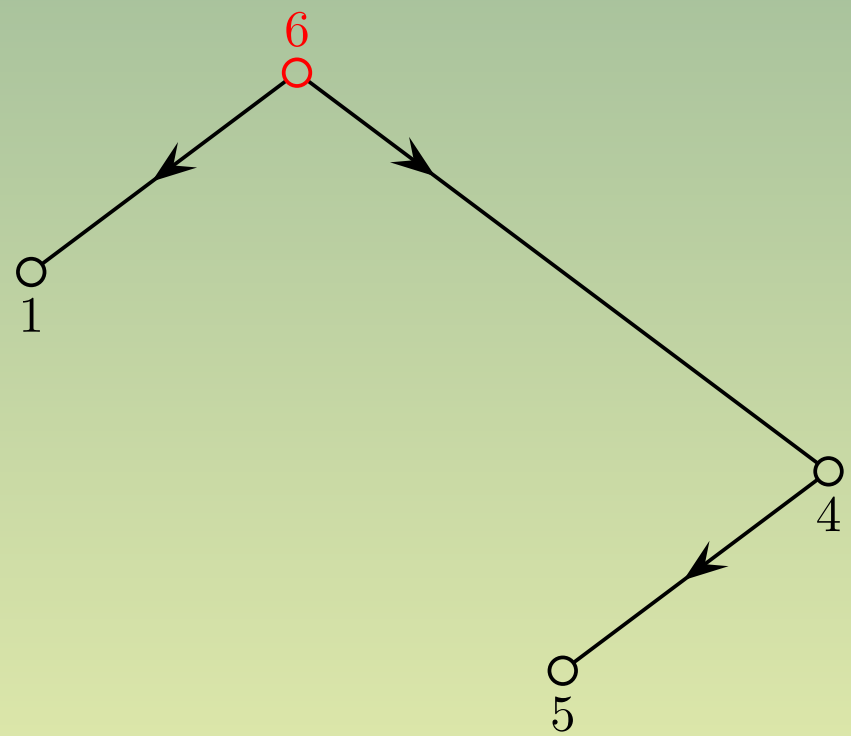
lista L: 7, 8, 3, 2

skup S **vrhova instupnja 0**: 6

Provjeravamo da li nakon toga još neki od vrhova ima instupanj 0. Vidimo da nema novih vrhova instupnja 0, osim onih koji već jesu od prije u skupu S.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

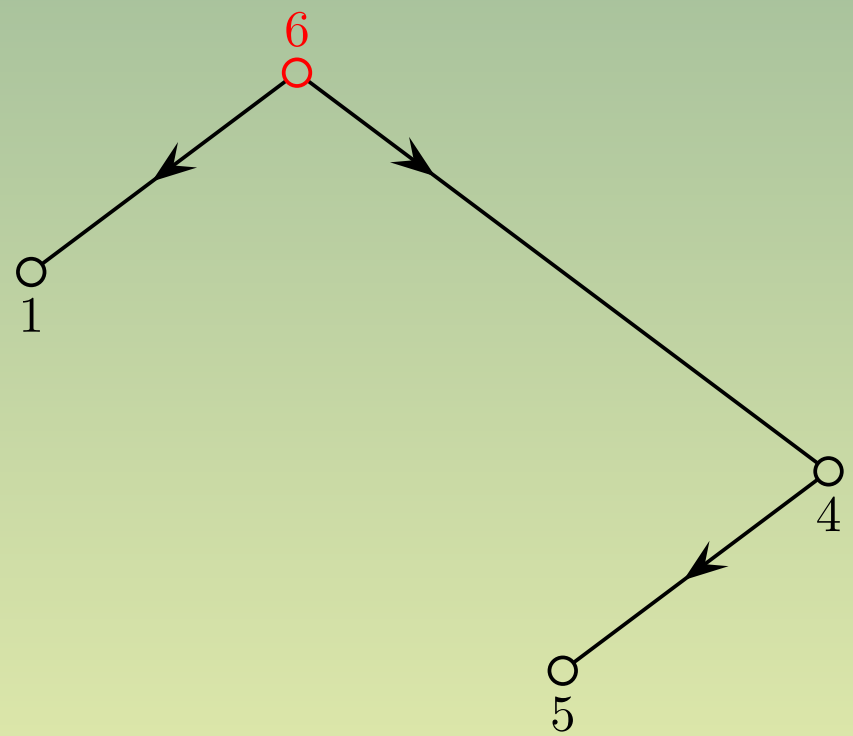


lista L: 7, 8, 3, 2

skup S **vrhova instupnja 0**: 6

Provjeravamo da li nakon toga još neki od vrhova ima instupanj 0. Vidimo da nema novih vrhova instupnja 0, osim onih koji već jesu od prije u skupu S. Opet biramo neki vrh iz skupa S i prebacimo ga u listu L.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

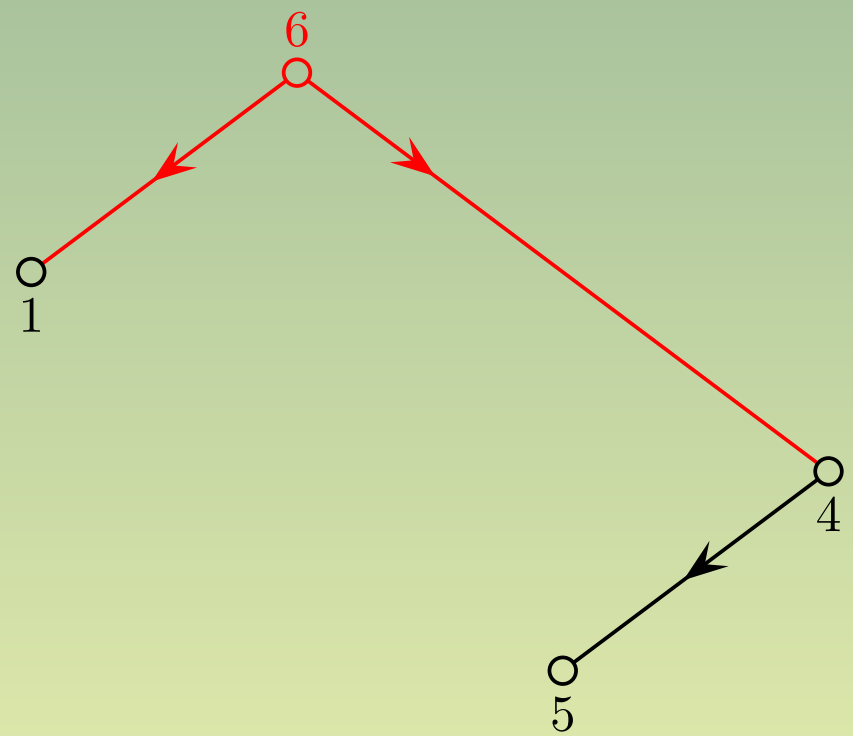


lista L: 7, 8, 3, 2, 6

skup S **vrhova instupnja 0**:

Kako je 6 jedini takav vrh, tada njega prebacimo u listu L.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



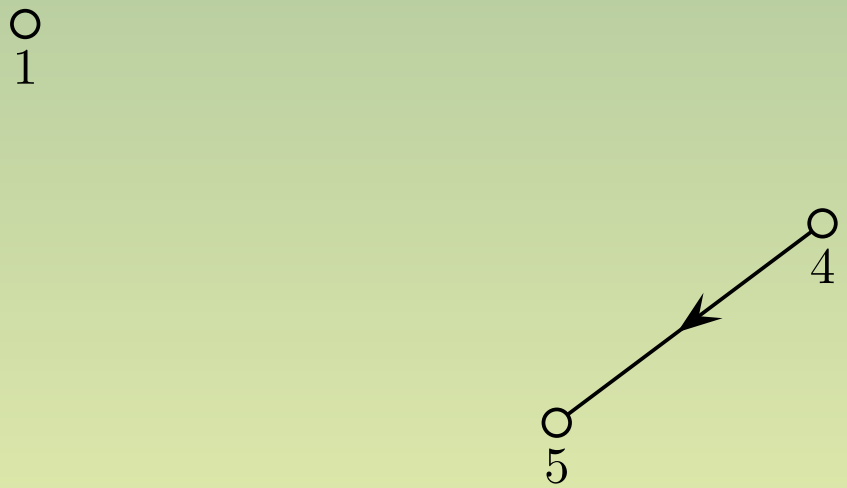
lista L: 7, 8, 3, 2, 6

skup S **vrhova instupnja 0**:

Kako je 6 jedini takav vrh, tada njega prebacimo u listu L. Zatim pogledamo sve lukove koji izlaze iz vrha 6.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

a



lista L: 7, 8, 3, 2, 6

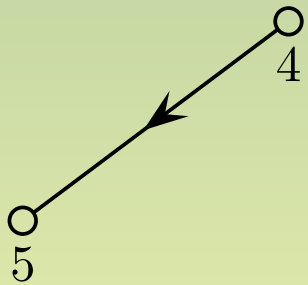
skup S **vrhova instupnja 0**:

Kako je 6 jedini takav vrh, tada njega prebacimo u listu L. Zatim pogledamo sve lukove koji izlaze iz vrha 6. Sve te lukove uklonimo iz digrafa zajedno s vrhom 6.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

a





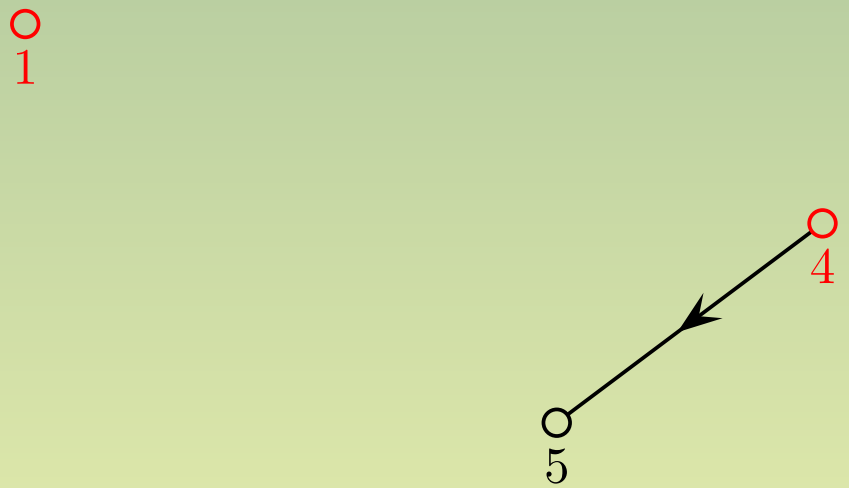
lista L: 7, 8, 3, 2, 6

skup S **vrhova instupnja 0**:

Provjeravamo da li nakon toga još neki od vrhova ima instupanj 0.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

a



lista L: 7, 8, 3, 2, 6

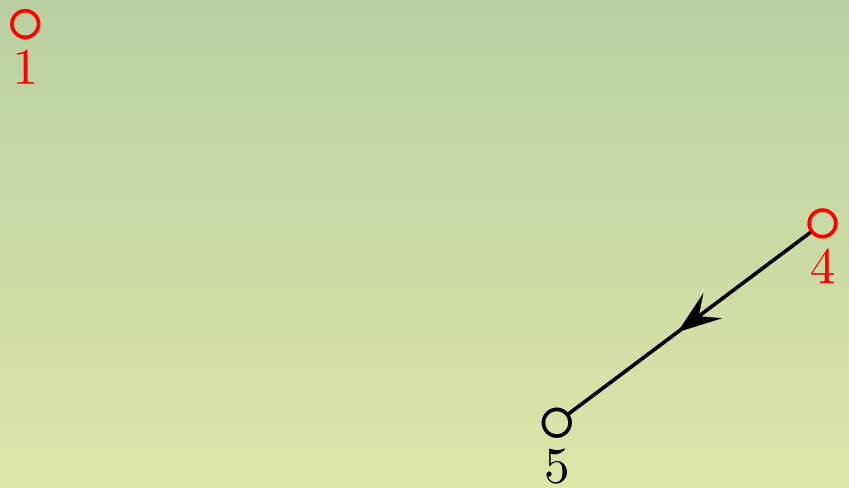
skup S **vrhova instupnja 0**: 1, 4

Provjeravamo da li nakon toga još neki od vrhova ima instupanj 0.

Uočavamo da imamo dva takva vrha 1 i 4 pa ih stavimo u S.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

a



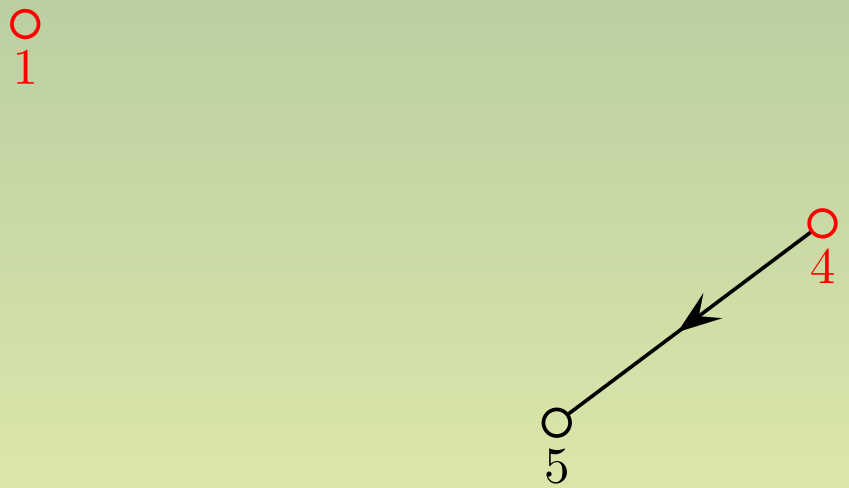
lista L: 7, 8, 3, 2, 6

skup S **vrhova instupnja 0**: 1, 4

Provjeravamo da li nakon toga još neki od vrhova ima instupanj 0. Uočavamo da imamo dva takva vrha 1 i 4 pa ih stavimo u S. Opet biramo neki vrh iz skupa S i prebacimo ga u listu L.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

a

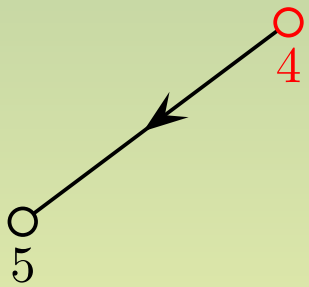


lista L: 7, 8, 3, 2, 6, 1

skup S **vrhova instupnja 0**: 4

Odaberemo, npr. vrh 1 i prebacimo ga u listu L.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

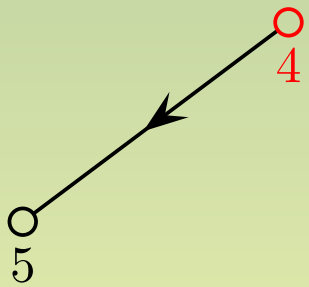


lista L: 7, 8, 3, 2, 6, 1

skup S **vrhova instupnja 0**: 4

Odaberemo, npr. vrh 1 i prebacimo ga u listu L. Kako nema lukova koji izlaze iz vrha 1, onda samo uklonimo vrh 1 iz digrafa.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

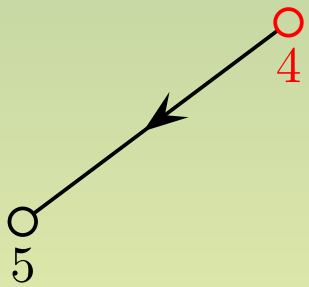


lista L: 7, 8, 3, 2, 6, 1

skup S **vrhova instupnja 0**: 4

Provjeravamo da li nakon toga još neki od vrhova ima instupanj 0.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

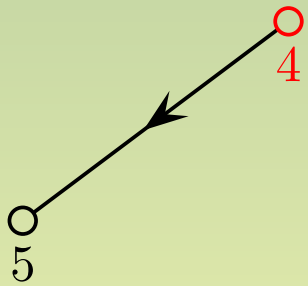


lista L: 7, 8, 3, 2, 6, 1

skup S **vrhova instupnja 0**: 4

Provjeravamo da li nakon toga još neki od vrhova ima instupanj 0. Vidimo da nema novih vrhova instupnja 0, osim onih koji već jesu od prije u skupu S.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

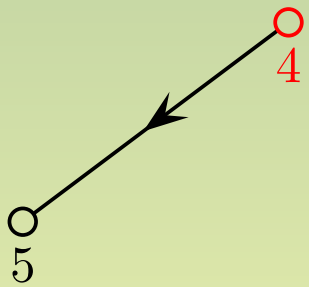


lista L: 7, 8, 3, 2, 6, 1

skup S **vrhova instupnja 0**: 4

Provjeravamo da li nakon toga još neki od vrhova ima instupanj 0. Vidimo da nema novih vrhova instupnja 0, osim onih koji već jesu od prije u skupu S. Opet biramo neki vrh iz skupa S i prebacimo ga u listu L.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

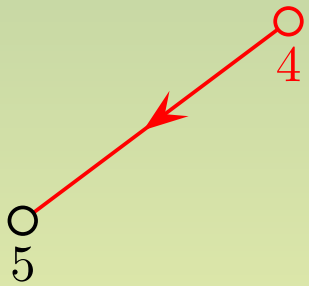


lista L: 7, 8, 3, 2, 6, 1, 4

skup S **vrhova instupnja 0**:

Kako je 4 jedini takav vrh, tada njega prebacimo u listu L.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



lista L: 7, 8, 3, 2, 6, 1, 4

skup S **vrhova instupnja 0**:

Kako je 4 jedini takav vrh, tada njega prebacimo u listu L. Zatim pogledamo sve lukove koji izlaze iz vrha 4.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson





lista L: 7, 8, 3, 2, 6, 1, 4

skup S **vrhova instupnja 0**:

Kako je 4 jedini takav vrh, tada njega prebacimo u listu L. Zatim pogledamo sve lukove koji izlaze iz vrha 4. Sve te lukove uklonimo iz digrafa zajedno s vrhom 4.





lista L: 7, 8, 3, 2, 6, 1, 4

skup S **vrhova instupnja 0**:

Provjeravamo da li nakon toga još neki od vrhova ima instupanj 0.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



lista L: 7, 8, 3, 2, 6, 1, 4

skup S **vrhova instupnja 0**: 5

Provjeravamo da li nakon toga još neki od vrhova ima instupanj 0.

Uočavamo da je to vrh 5 pa ga stavimo u skup S.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



lista L: 7, 8, 3, 2, 6, 1, 4

skup S **vrhova instupnja 0**: 5

Provjeravamo da li nakon toga još neki od vrhova ima instupanj 0. Uočavamo da je to vrh 5 pa ga stavimo u skup S. Opet biramo neki vrh iz skupa S i prebacimo ga u listu L.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



lista L: 7, 8, 3, 2, 6, 1, 4, 5

skup S **vrhova instupnja 0**:

Kako je 4 jedini takav vrh, tada njega prebacimo u listu L.

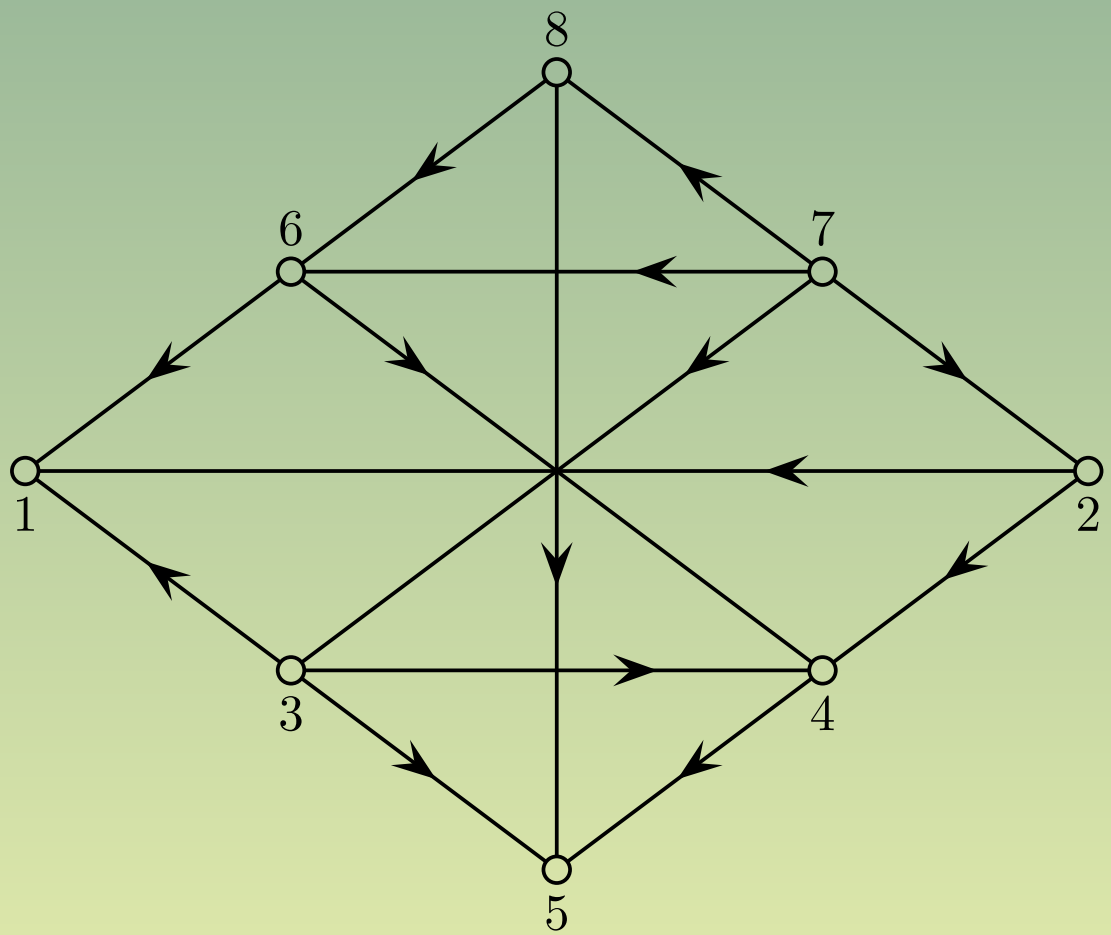
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



lista L: 7, 8, 3, 2, 6, 1, 4, 5

skup S **vrhova instupnja 0**:

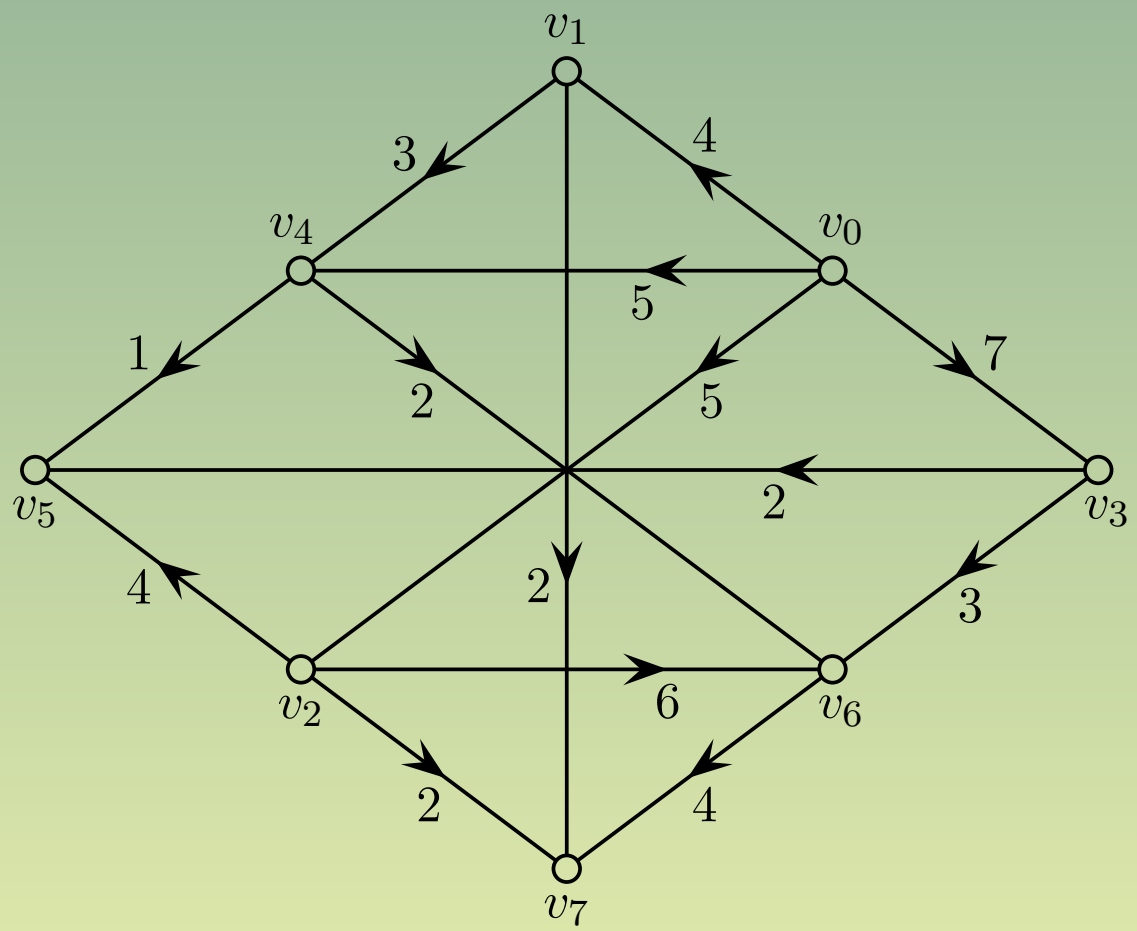
Kako je 5 jedini takav vrh, tada njega prebacimo u listu L. Kako više nema vrhova i lukova i skup S je prazan, algoritam završava. Lista L sadrži topološki sortirane vrhove početnog digrafa.



7	8	3	2	6	1	4	5
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

a



Konačno, dobivamo topološki sortirane vrhove na početnom težinskom digrafu pa nakon toga možemo na njega primijeniti Bellmanov algoritam za traženje najkraćih putova.

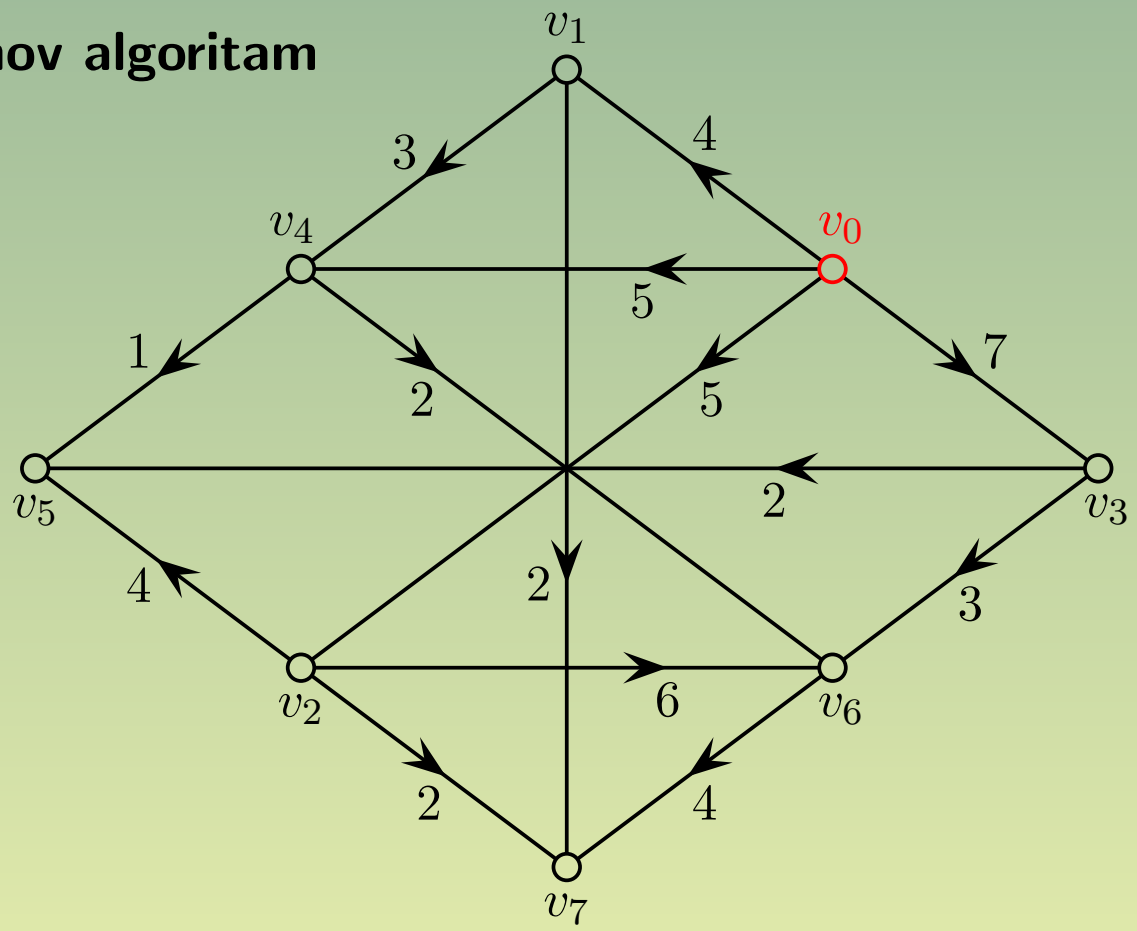
◂ objasni postupak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

- Kao i kod Bellman-Fordovog algoritma tako i ovdje se nećemo strogo držati oznaka iz opisa Bellmanovog algoritma jer svima nam je jasno da se ručno provođenje algoritma bitno razlikuje od implementiranog algoritma koje će izvoditi računalo. Mi neke stvari "vidimo" pa neke od tih stvari ne moramo nepotrebno provoditi, dok ih računalo ne može vidjeti pa je takve stvari onda potrebno provoditi ili ih spremati u neke varijable. Opet ćemo vrhovima pridruživati oznake. Prva koordinata oznake vrha v_i će biti vrh preko kojeg je vrh v_i dobio oznaku i to se zapravo u algoritmu čuva u varijabli p_i (zapravo se čuva indeks tog vrha, ali mi ćemo pisati čitavo ime vrha). Druga koordinata oznake vrha v_i će biti udaljenost tog vrha od početnog vrha (vrha od kojeg tražimo najkraće udaljenosti prema ostalim vrhovima), a to se u algoritmu zapravo čuva u varijabli d_i.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-, 0)$

konačno rješenje

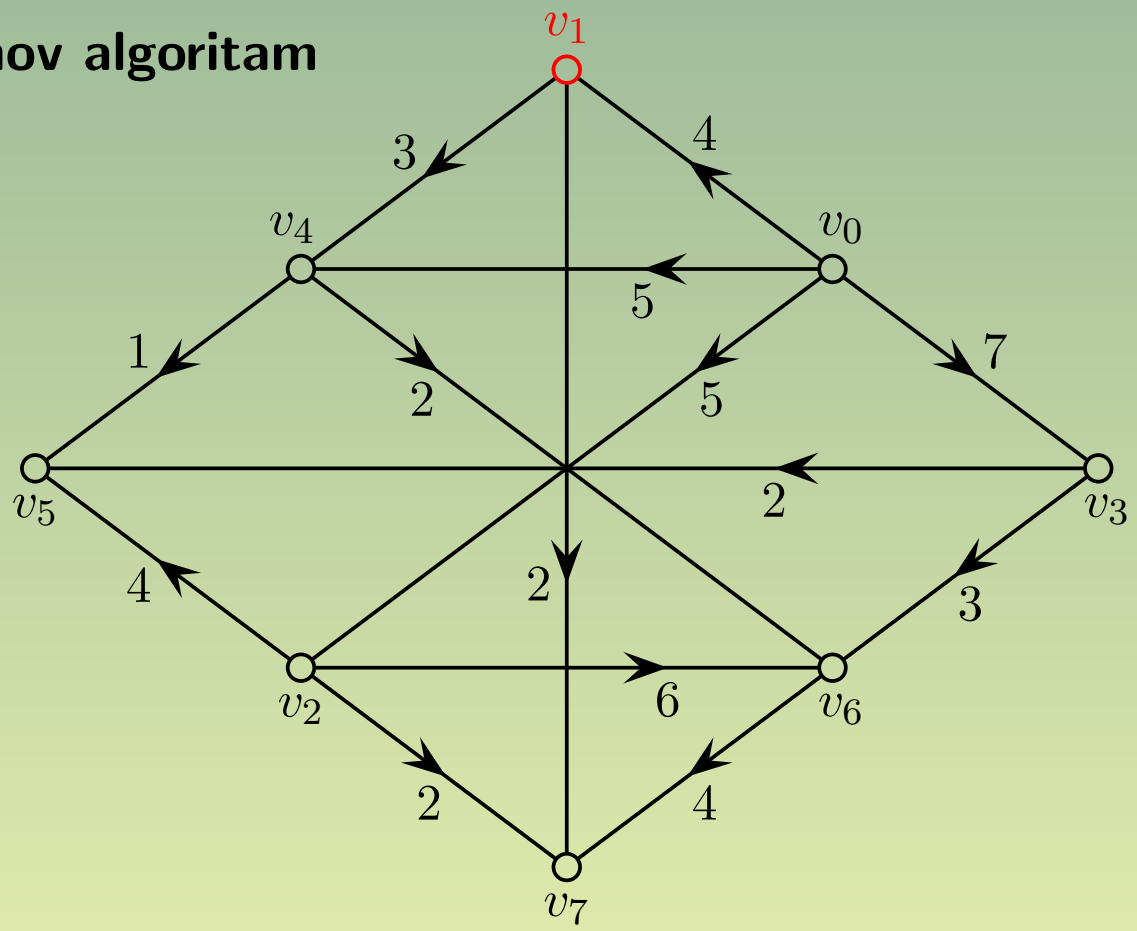
Na početku vrhu v_0 pridružimo oznaku $(-, 0)$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-, 0)$

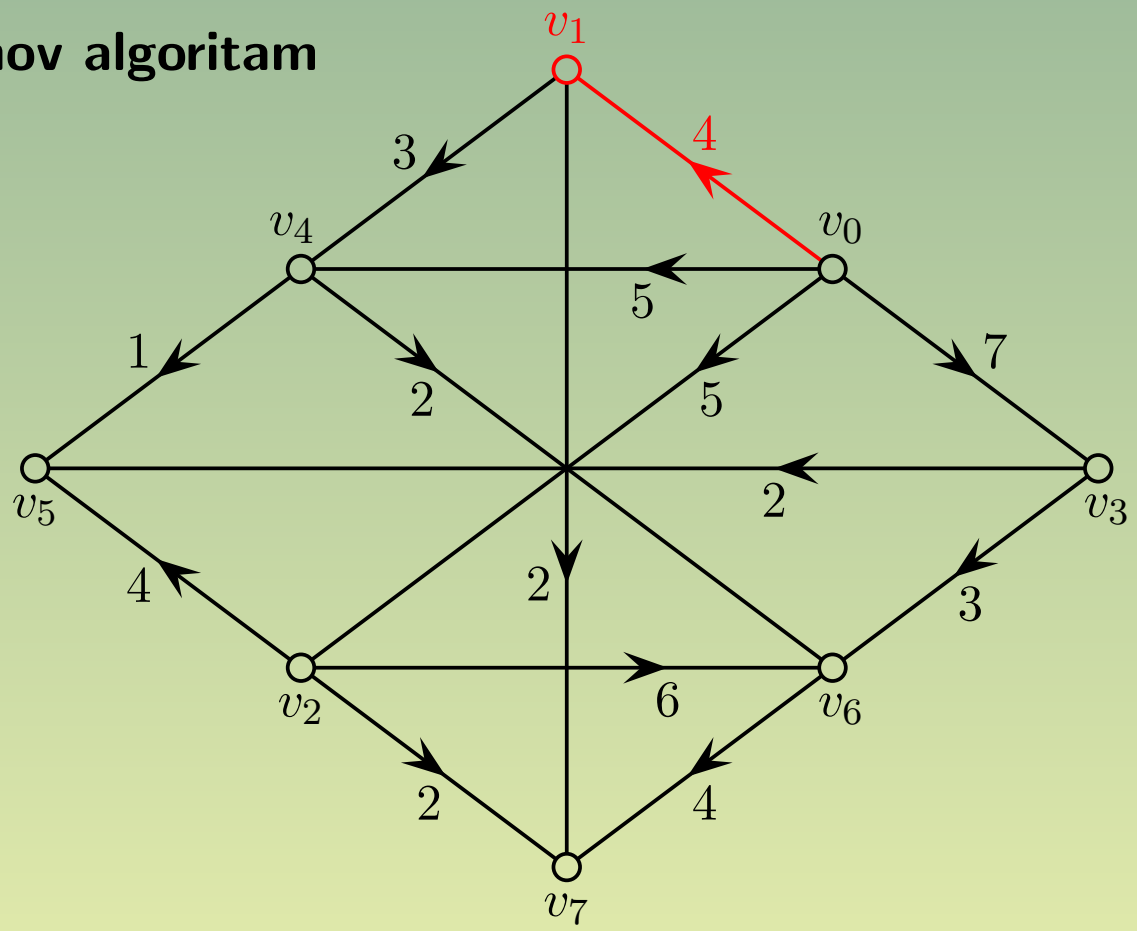
Prelazimo na vrh v_1.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-, 0)$

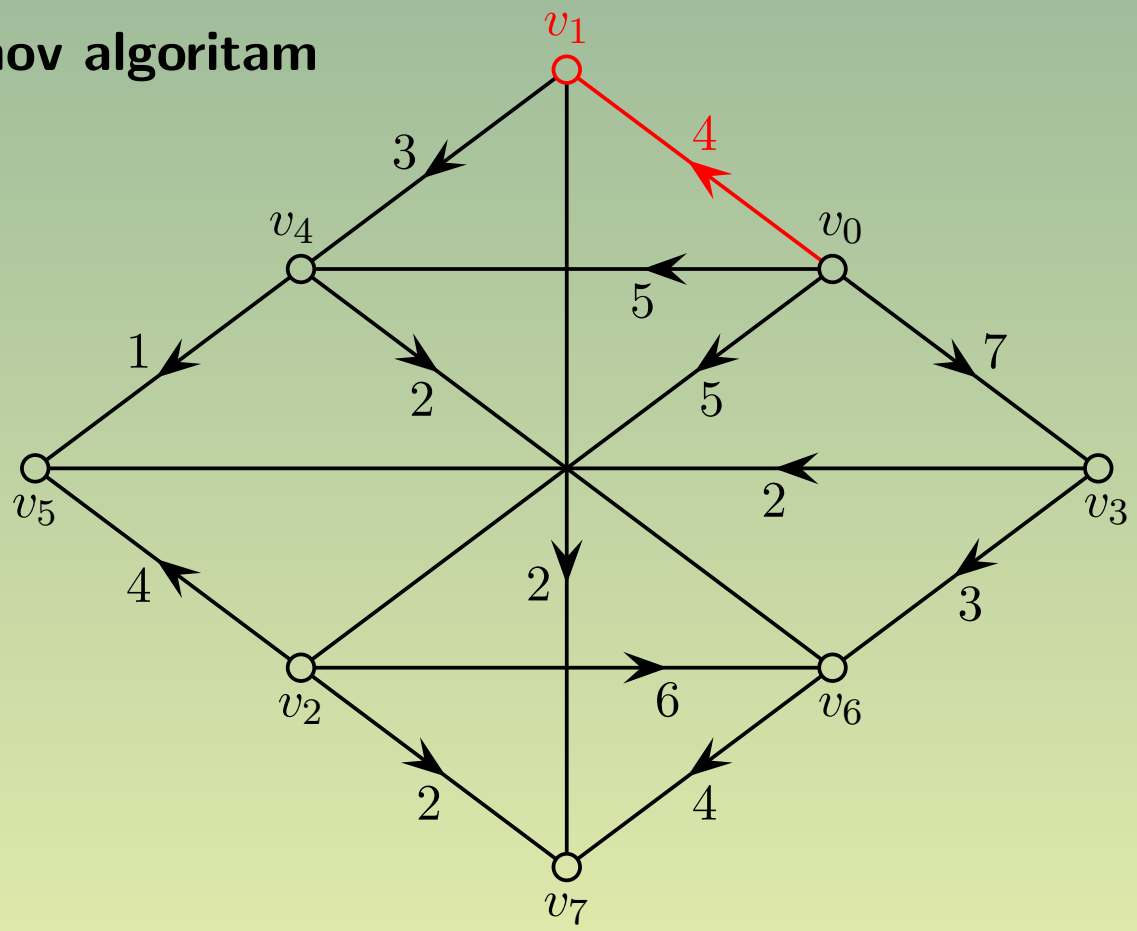
Prelazimo na vrh v_1. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_1. To je ovdje jedino luk v_0v_1.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-, 0)$

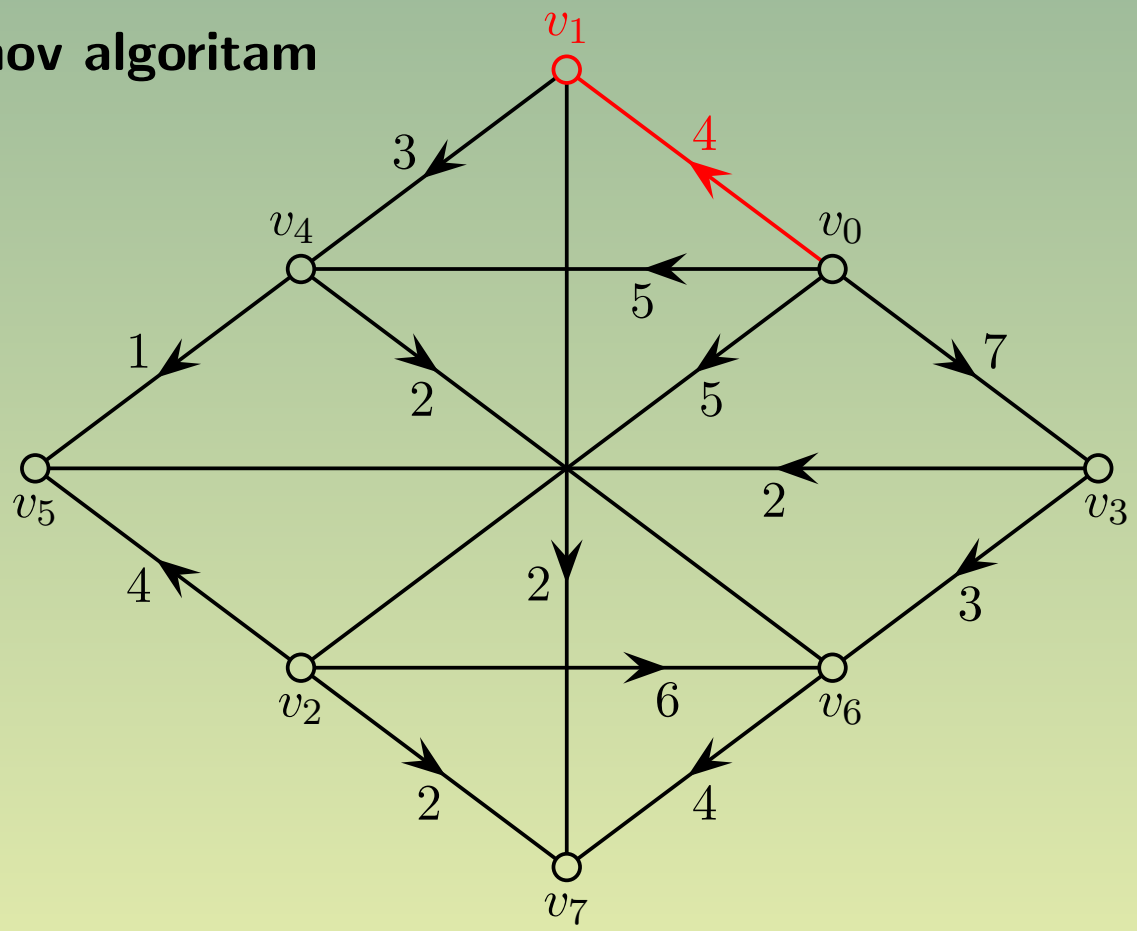
Sada zbrojimo težinu luka v_0v_1 s drugom koordinatom oznake njegovog početka (vrh v_0) pa dobivamo $4 + 0 = 4$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam

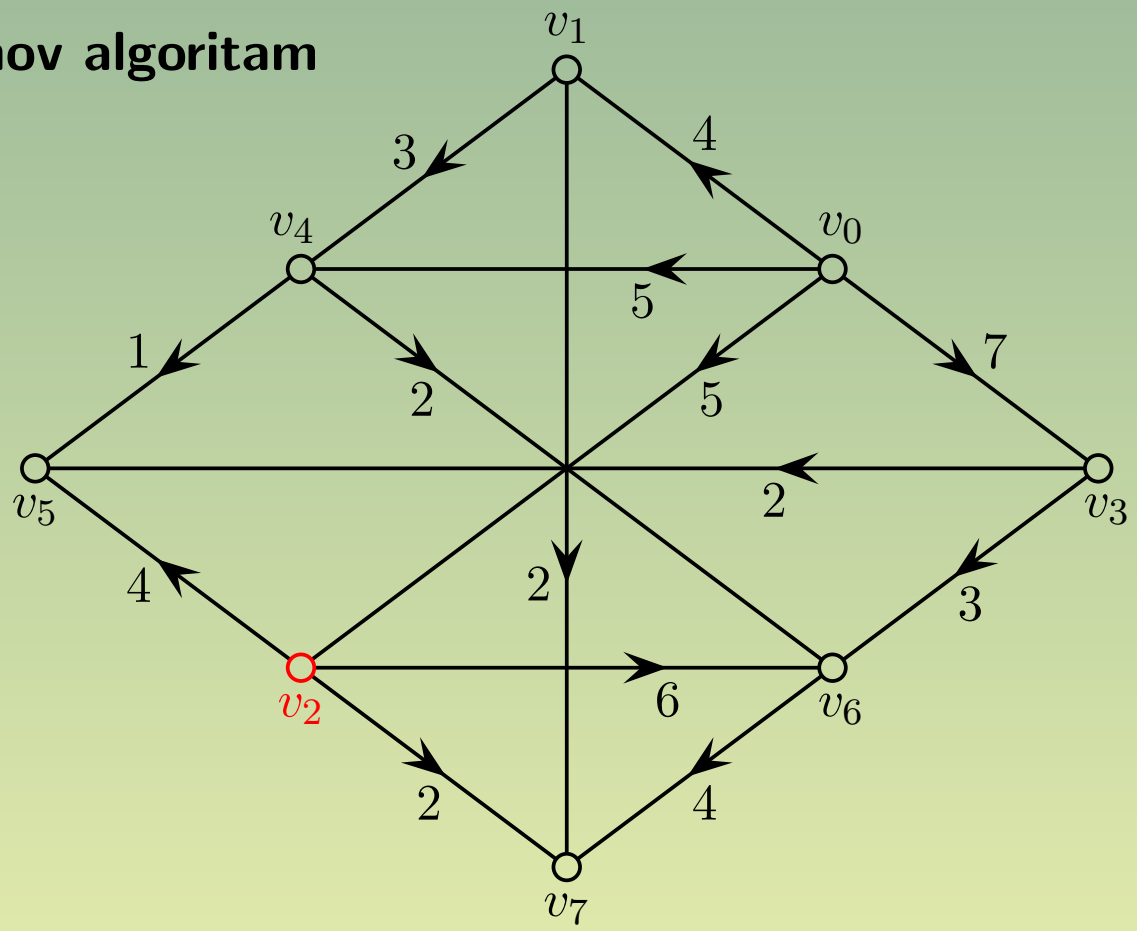


$v_0(-, 0)$, $v_1(v_0, 4)$

Sada zbrojimo težinu luka v_0v_1 s drugom koordinatom oznake njegovog početka (vrh v_0) pa dobivamo $4 + 0 = 4$. Vrh v_1 dobiva oznaku $(v_0, 4)$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-, 0)$, $v_1(v_0, 4)$

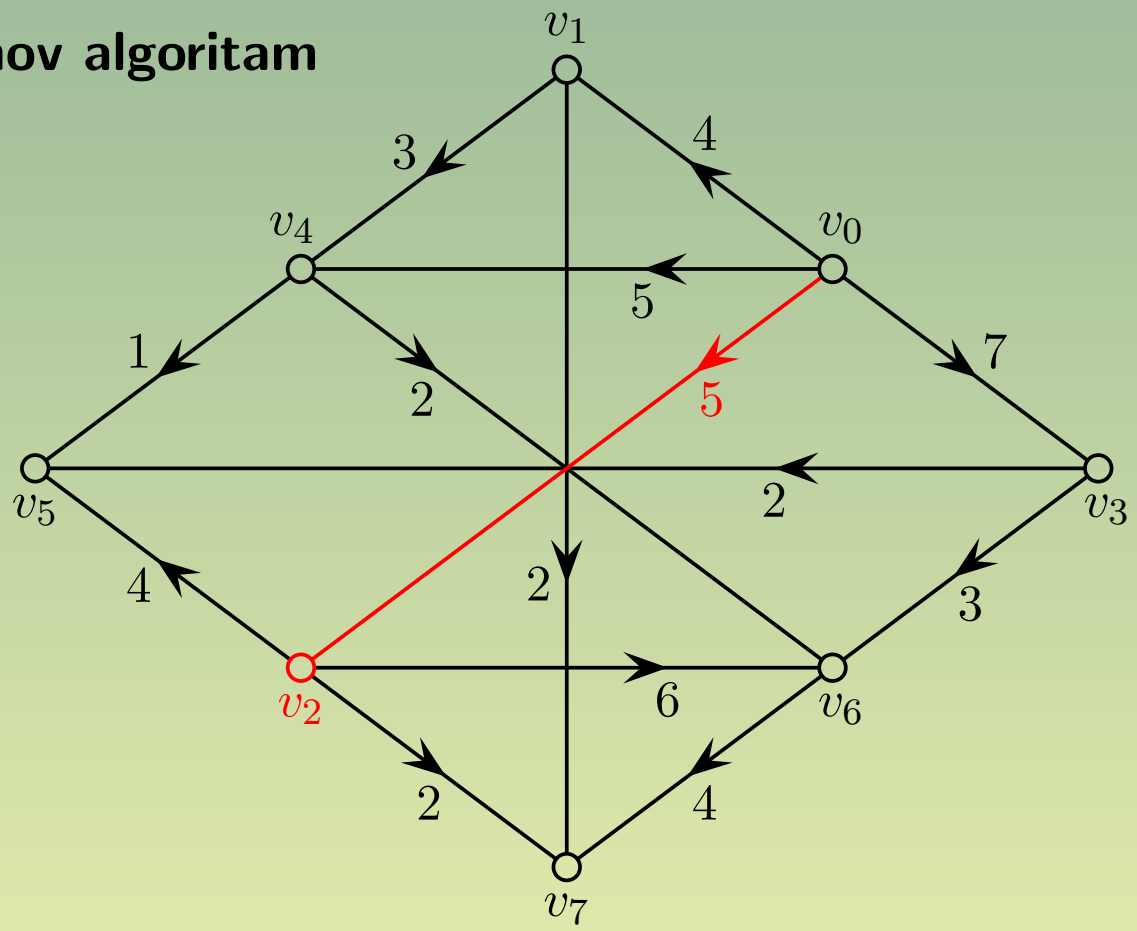
Prelazimo na vrh v_2.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-, 0)$, $v_1(v_0, 4)$

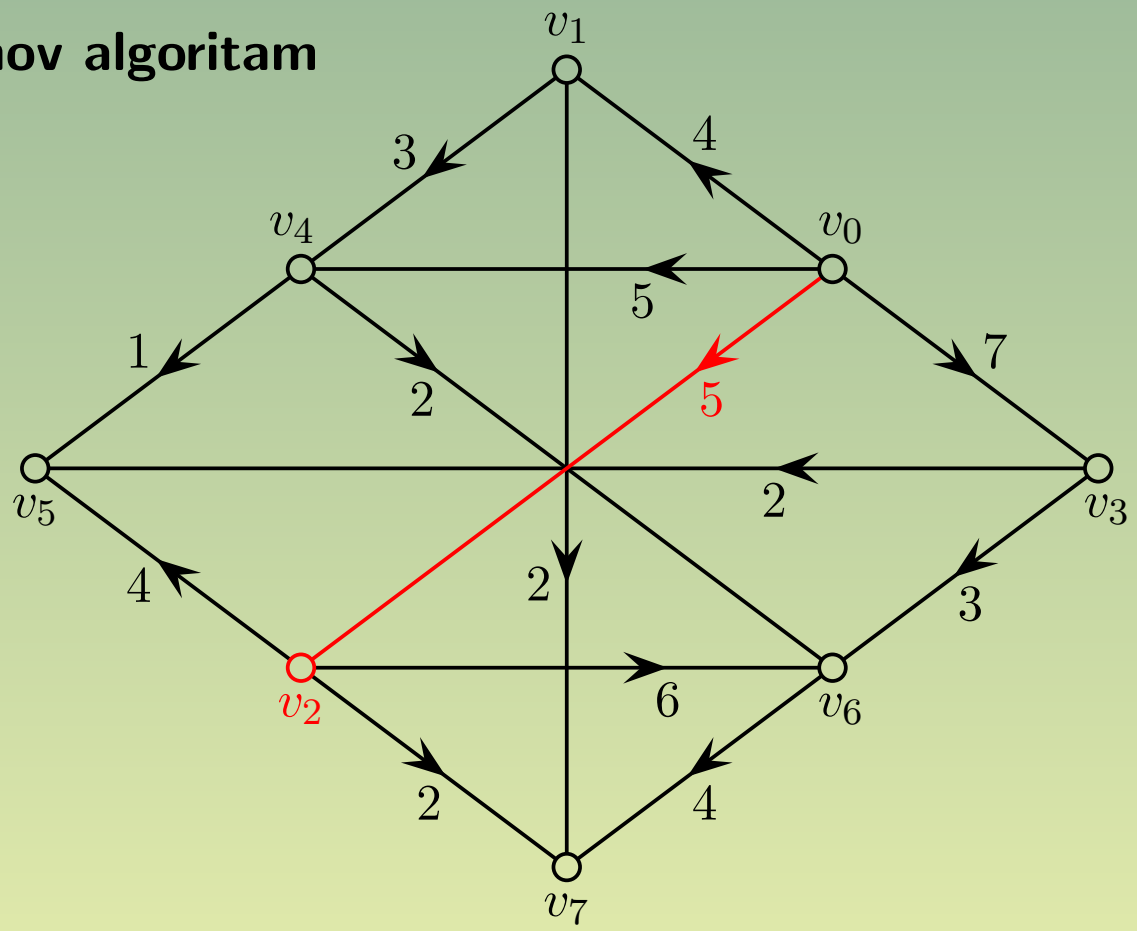
Prelazimo na vrh v_2. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_2. To je ovdje jedino luk v_0v_2.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-, 0)$, $v_1(v_0, 4)$

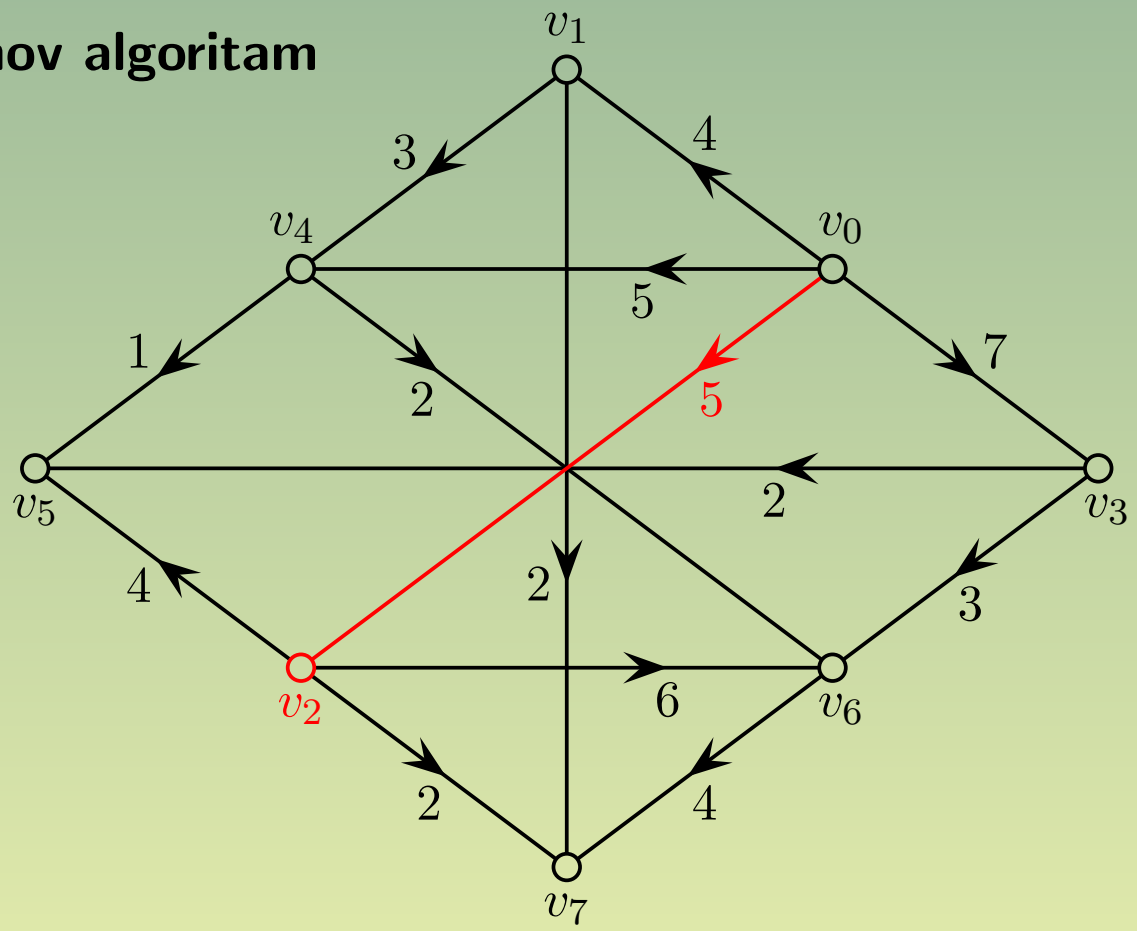
Sada zbrojimo težinu luka v_0v_2 s drugom koordinatom oznake njegovog početka (vrh v_0) pa dobivamo $5 + 0 = 5$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam

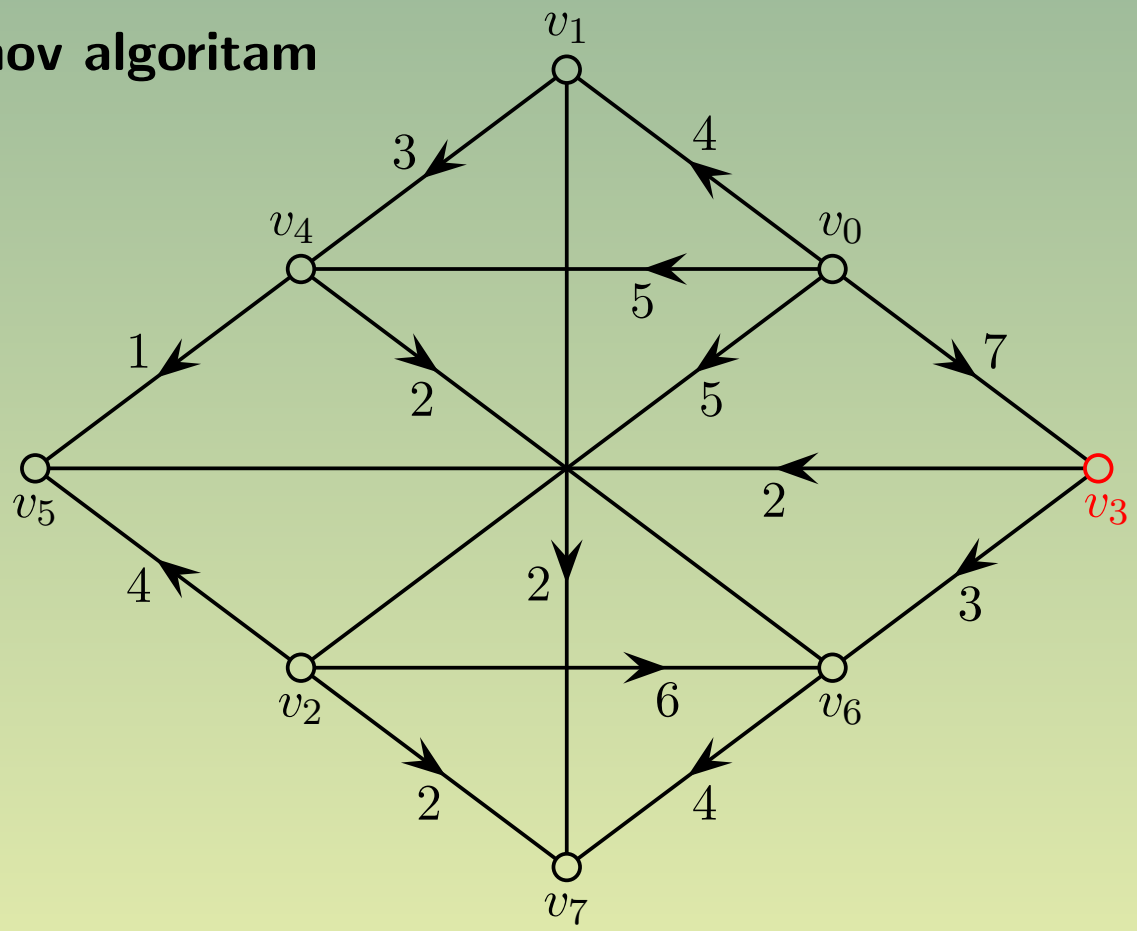


$v_0(-, 0)$, $v_1(v_0, 4)$, $v_2(v_0, 5)$

Sada zbrojimo težinu luka v_0v_2 s drugom koordinatom oznake njegovog početka (vrh v_0) pa dobivamo $5 + 0 = 5$. Vrh v_2 dobiva oznaku $(v_0, 5)$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam

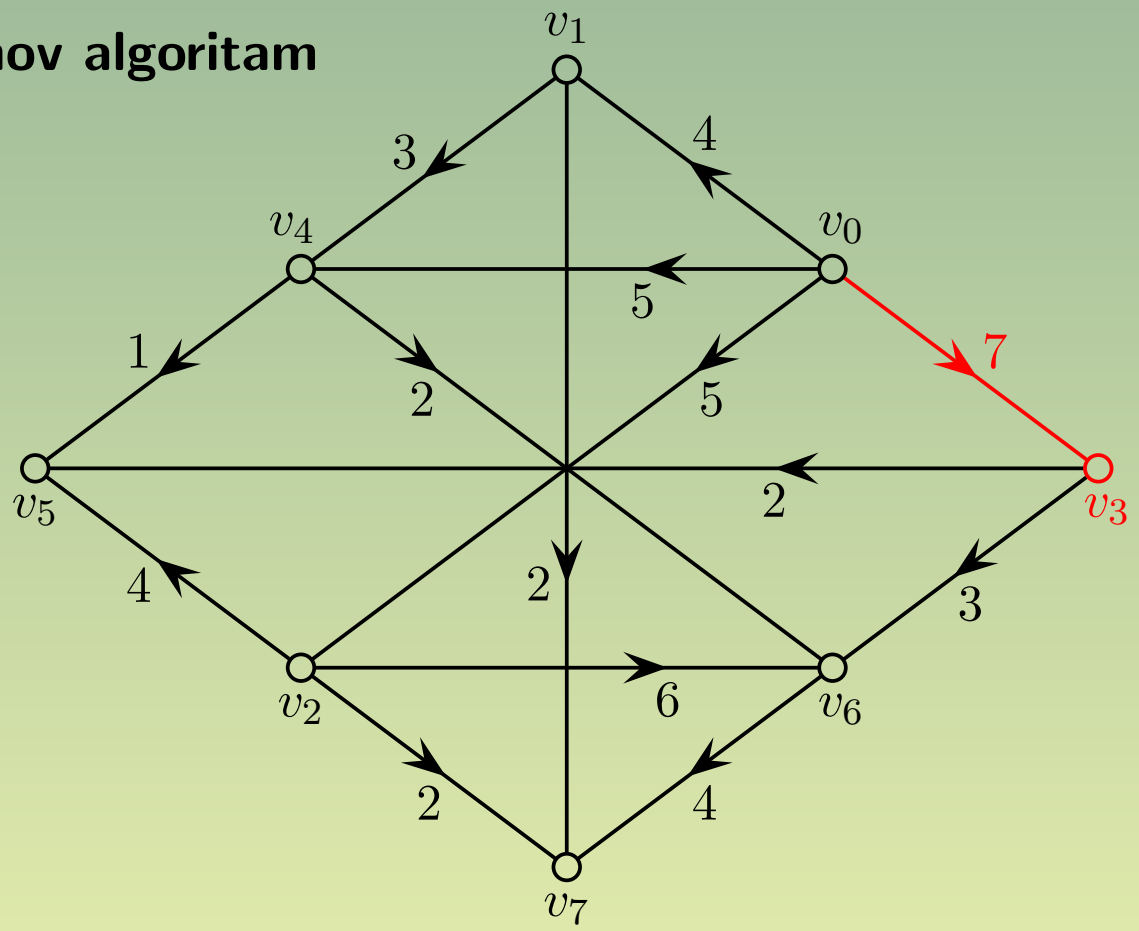


$v_0(-, 0)$, $v_1(v_0, 4)$, $v_2(v_0, 5)$

Prelazimo na vrh v_3.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-, 0)$, $v_1(v_0, 4)$, $v_2(v_0, 5)$

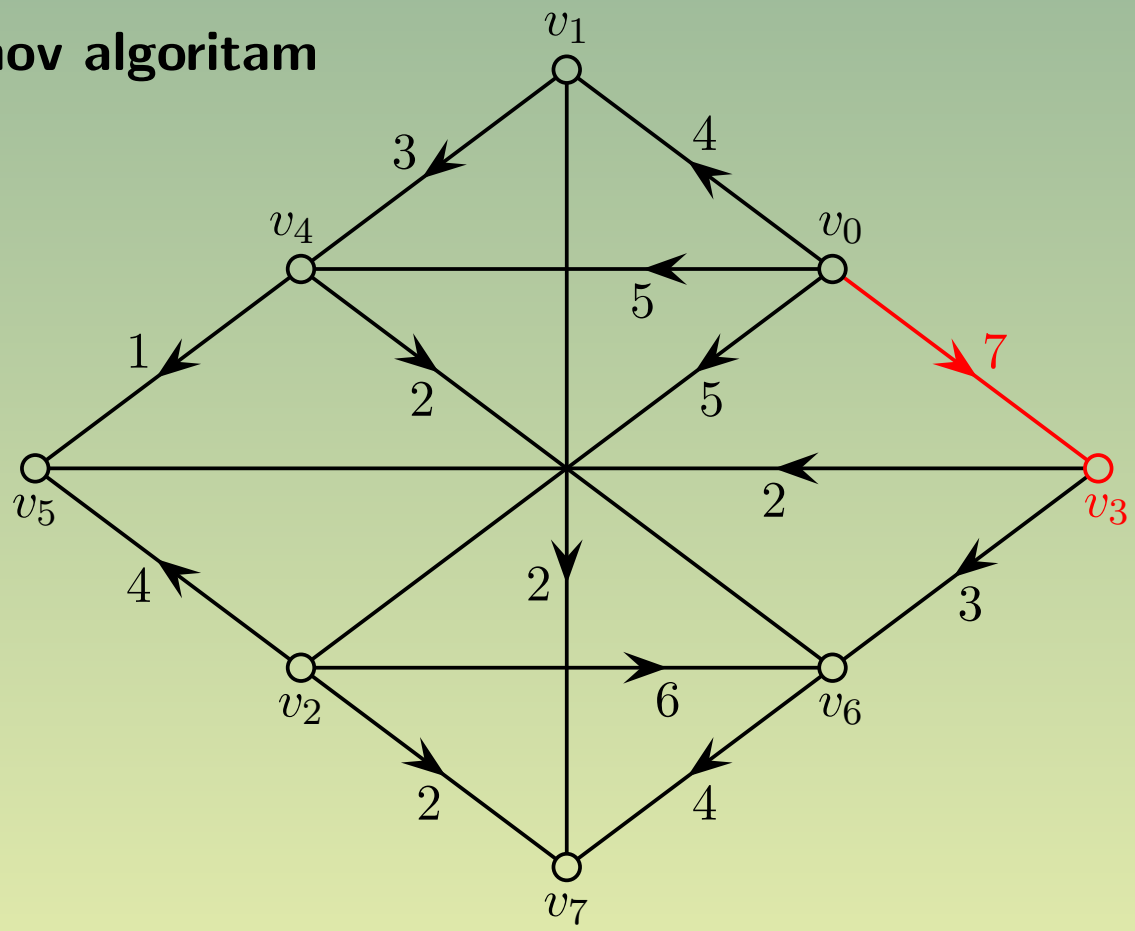
Prelazimo na vrh v_3. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_3. To je ovdje jedino luk v_0v_3.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-, 0)$, $v_1(v_0, 4)$, $v_2(v_0, 5)$

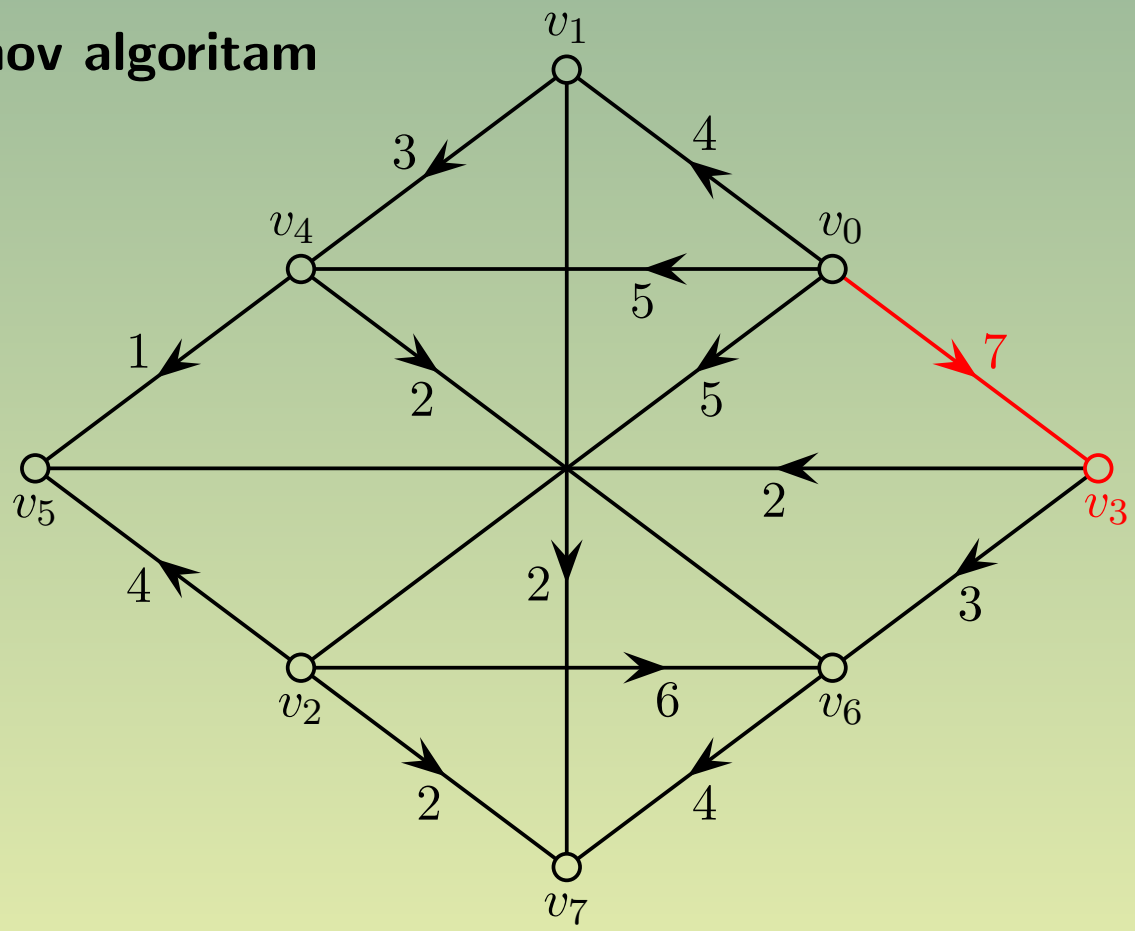
Sada zbrojimo težinu luka v_0v_3 s drugom koordinatom oznake njegovog početka (vrh v_0) pa dobivamo $7 + 0 = 7$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam

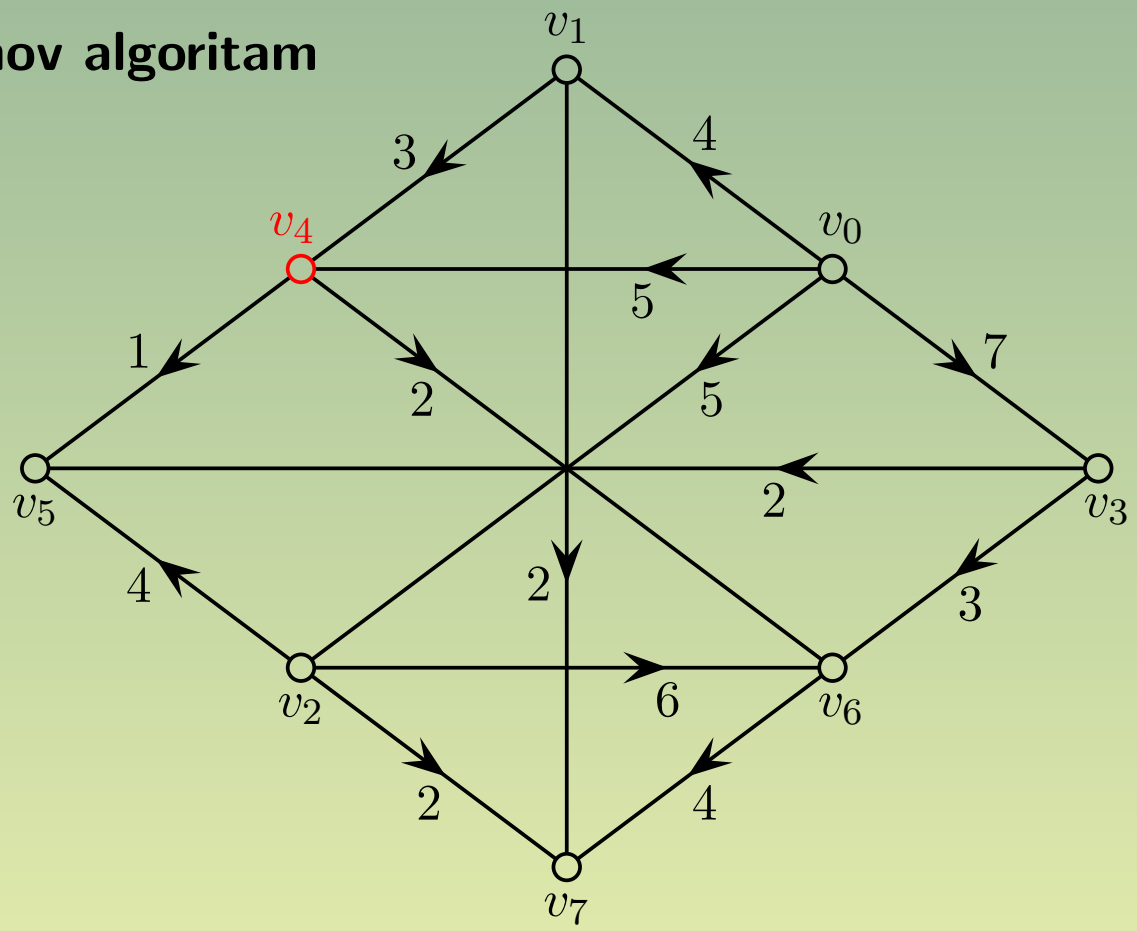


$v_0(-, 0)$, $v_1(v_0, 4)$, $v_2(v_0, 5)$, $v_3(v_0, 7)$

Sada zbrojimo težinu luka v_0v_3 s drugom koordinatom oznake njegovog početka (vrh v_0) pa dobivamo $7 + 0 = 7$. Vrh v_3 dobiva oznaku $(v_0, 7)$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-, 0)$, $v_1(v_0, 4)$, $v_2(v_0, 5)$, $v_3(v_0, 7)$

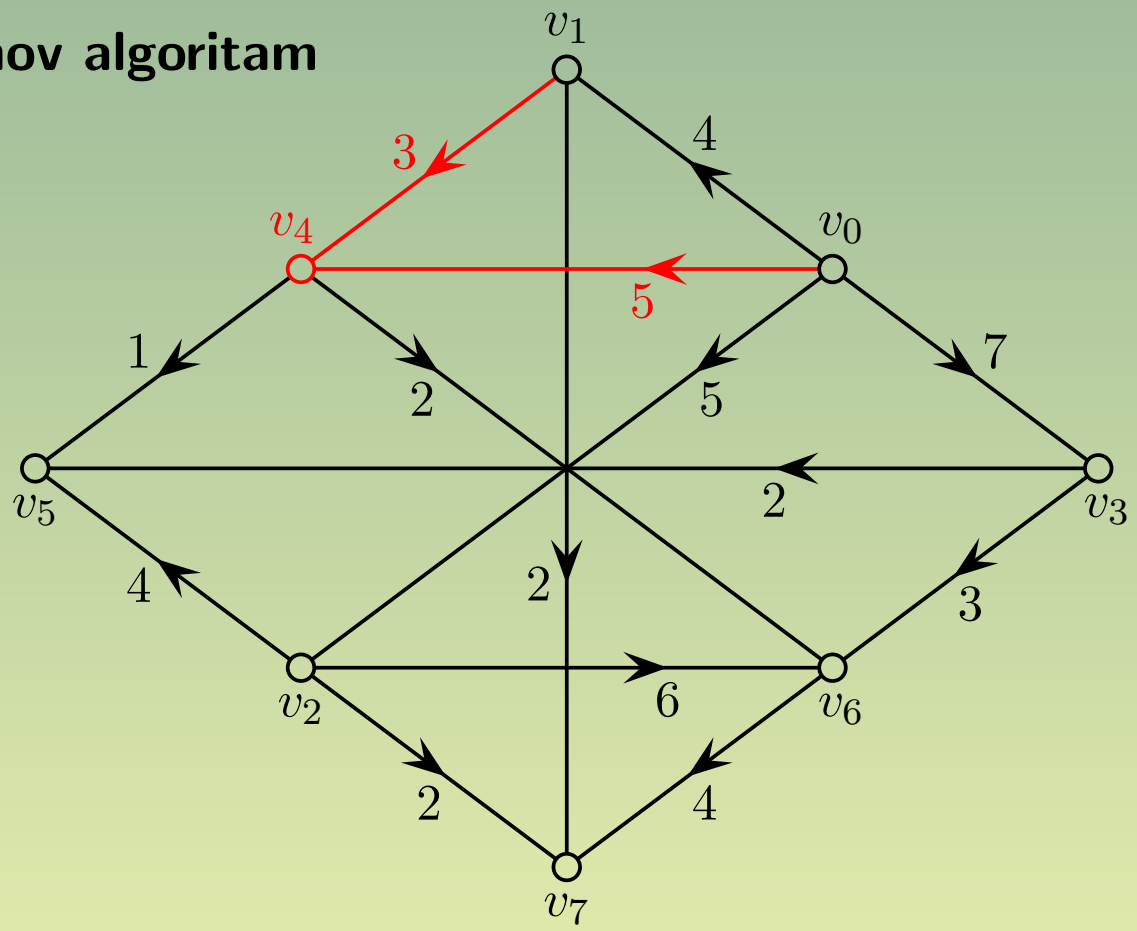
Prelazimo na vrh v_4.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam

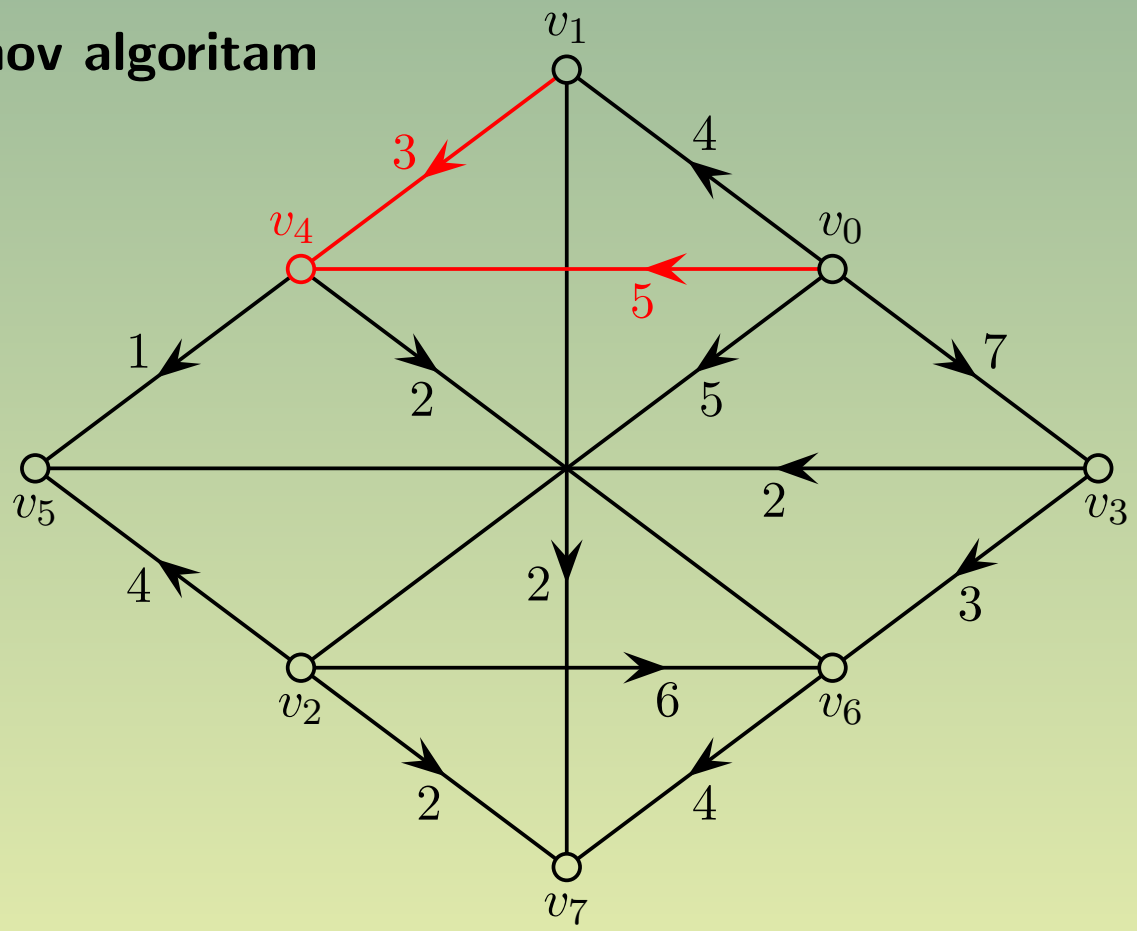


$v_0(-, 0)$, $v_1(v_0, 4)$, $v_2(v_0, 5)$, $v_3(v_0, 7)$

Prelazimo na vrh v_4. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_4. To su ovdje lukovi v_0v_4 i v_1v_4.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam

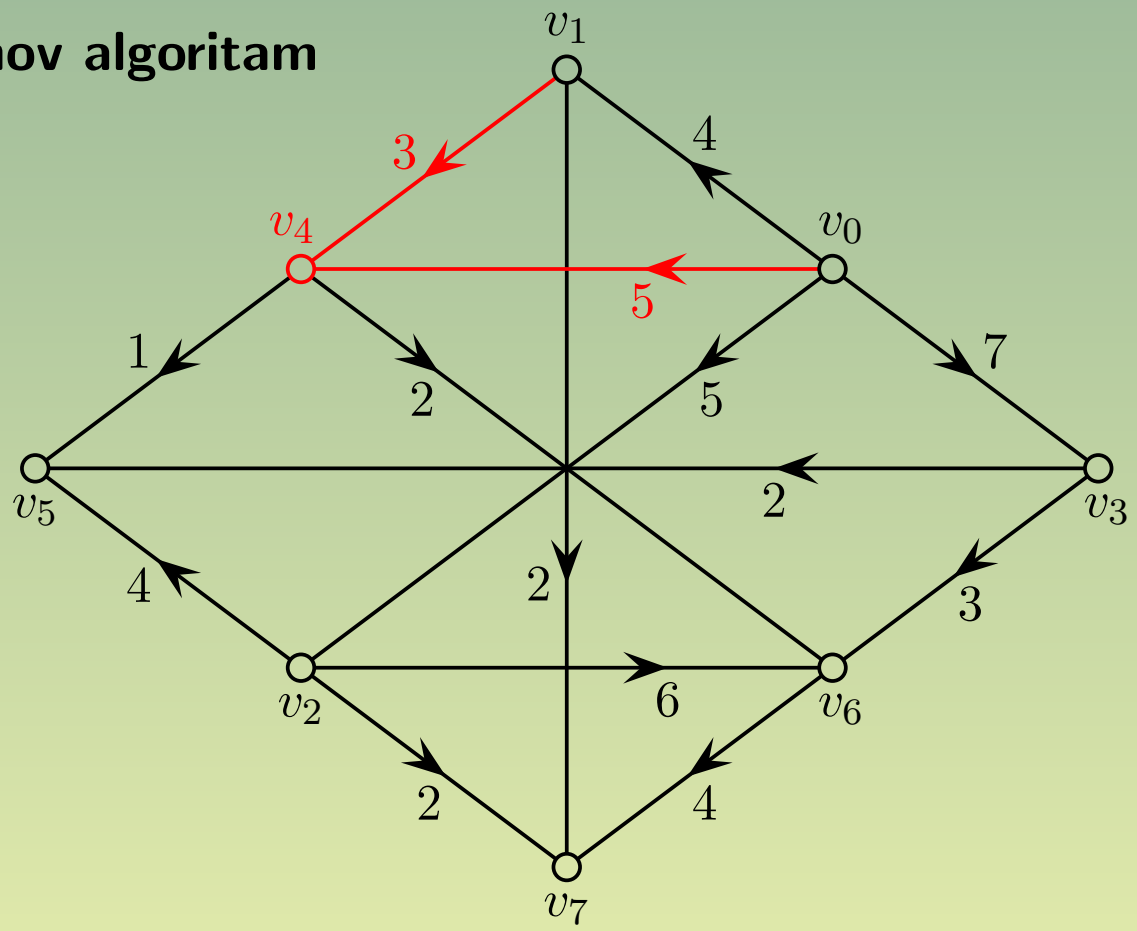


$v_0(-, 0)$, $v_1(v_0, 4)$, $v_2(v_0, 5)$, $v_3(v_0, 7)$

Prelazimo na vrh v_4. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_4. To su ovdje lukovi v_0v_4 i v_1v_4. Za svaki od tih lukova računamo sumu težine luka i druge koordinate oznake njegovog početka.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-,0),\ v_1(v_0,4),\ v_2(v_0,5),\ v_3(v_0,7)$

Dobivamo

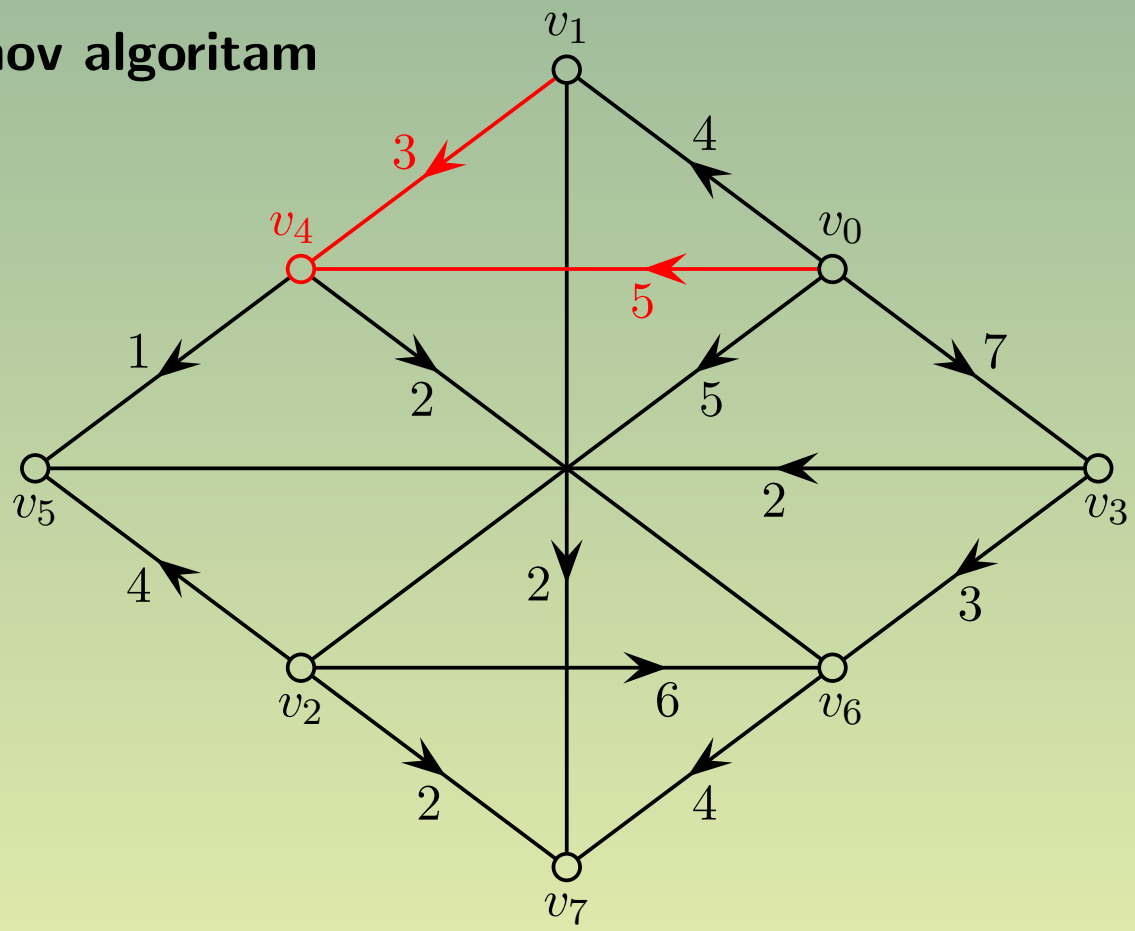
$v_0v_4 \ \rightarrow\ 5+0=5, \quad v_1v_4 \ \rightarrow\ 3+4=7$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-,0)$, $v_1(v_0,4)$, $v_2(v_0,5)$, $v_3(v_0,7)$, $v_4(v_0,5)$

Dobivamo

$v_0v_4 \rightarrow 5+0=5, \quad v_1v_4 \rightarrow 3+4=7$

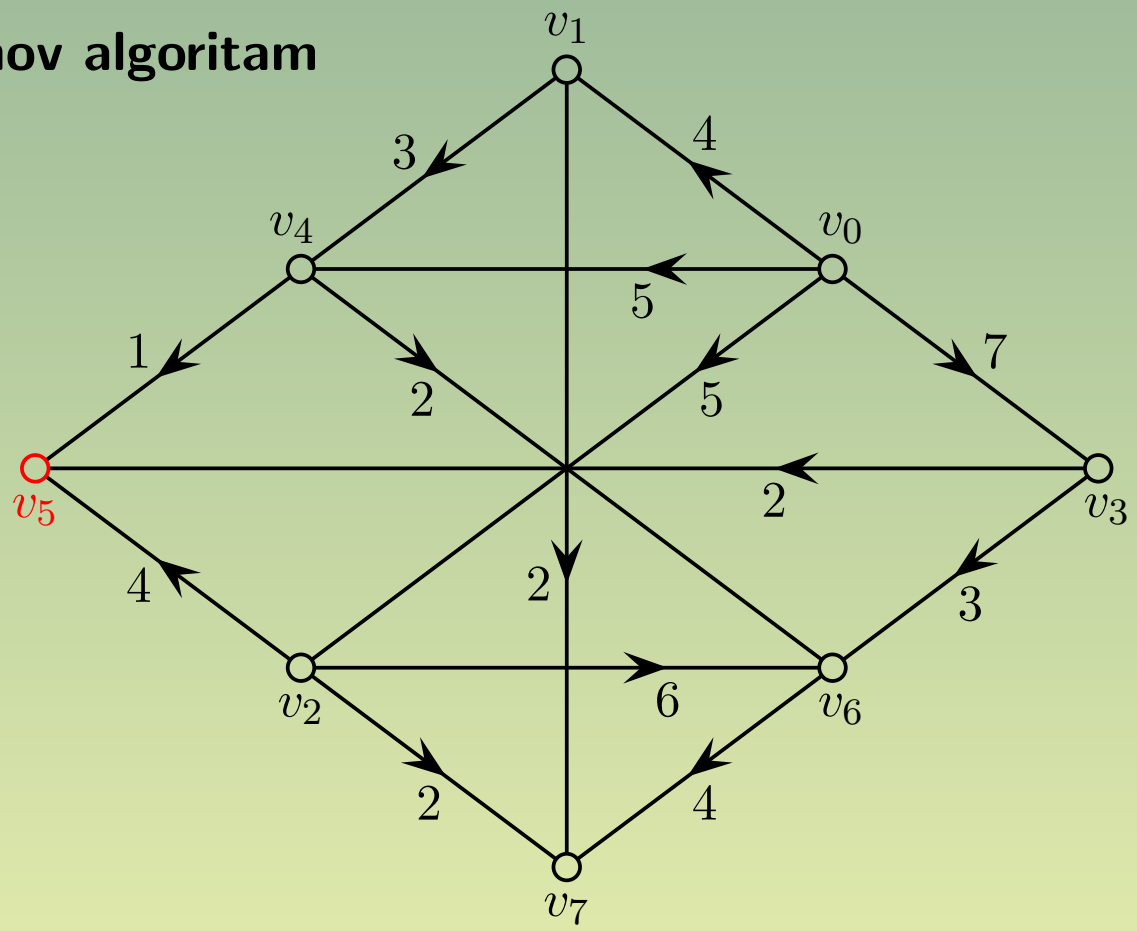
i uzmemo manju od tih vrijednosti pa vrh v_4 dobiva oznaku $(v_0,5)$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-, 0)$, $v_1(v_0, 4)$, $v_2(v_0, 5)$, $v_3(v_0, 7)$, $v_4(v_0, 5)$

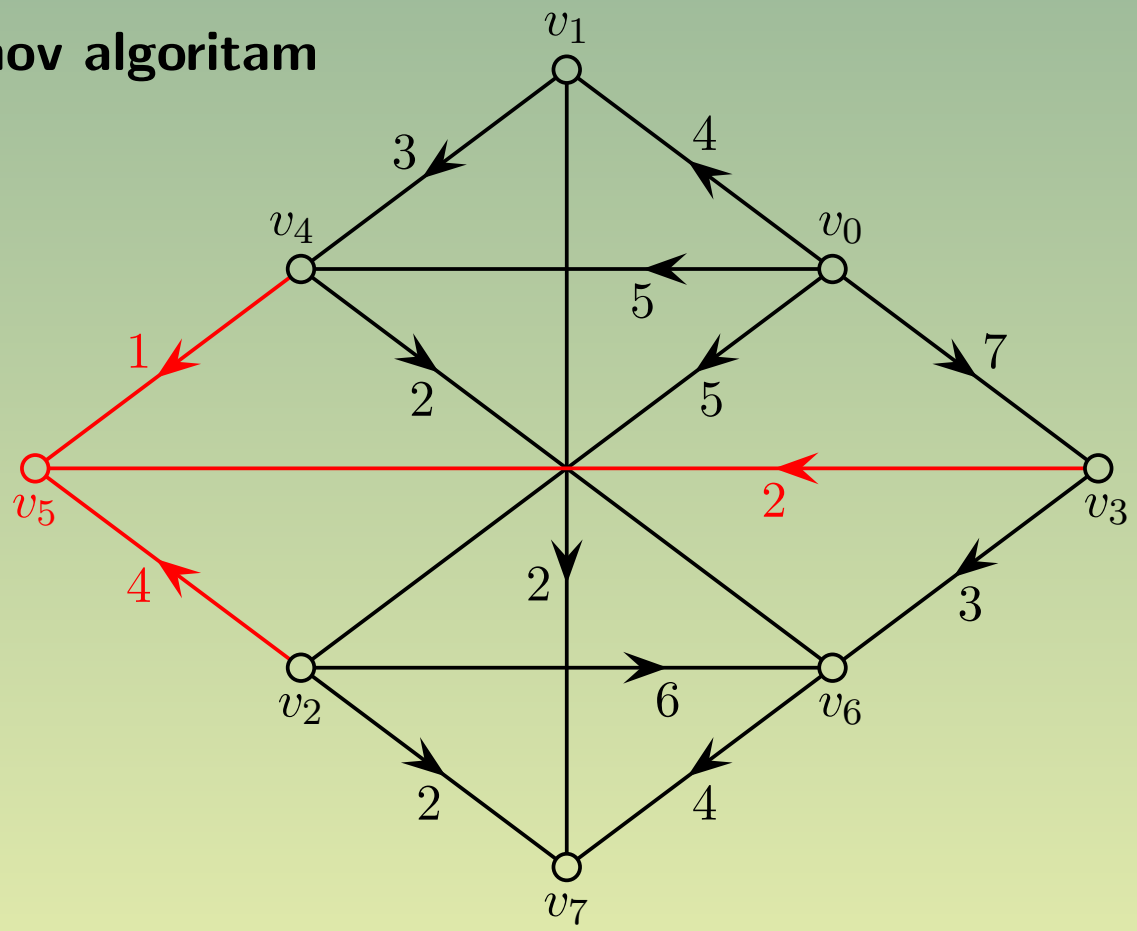
Prelazimo na vrh v_5.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam

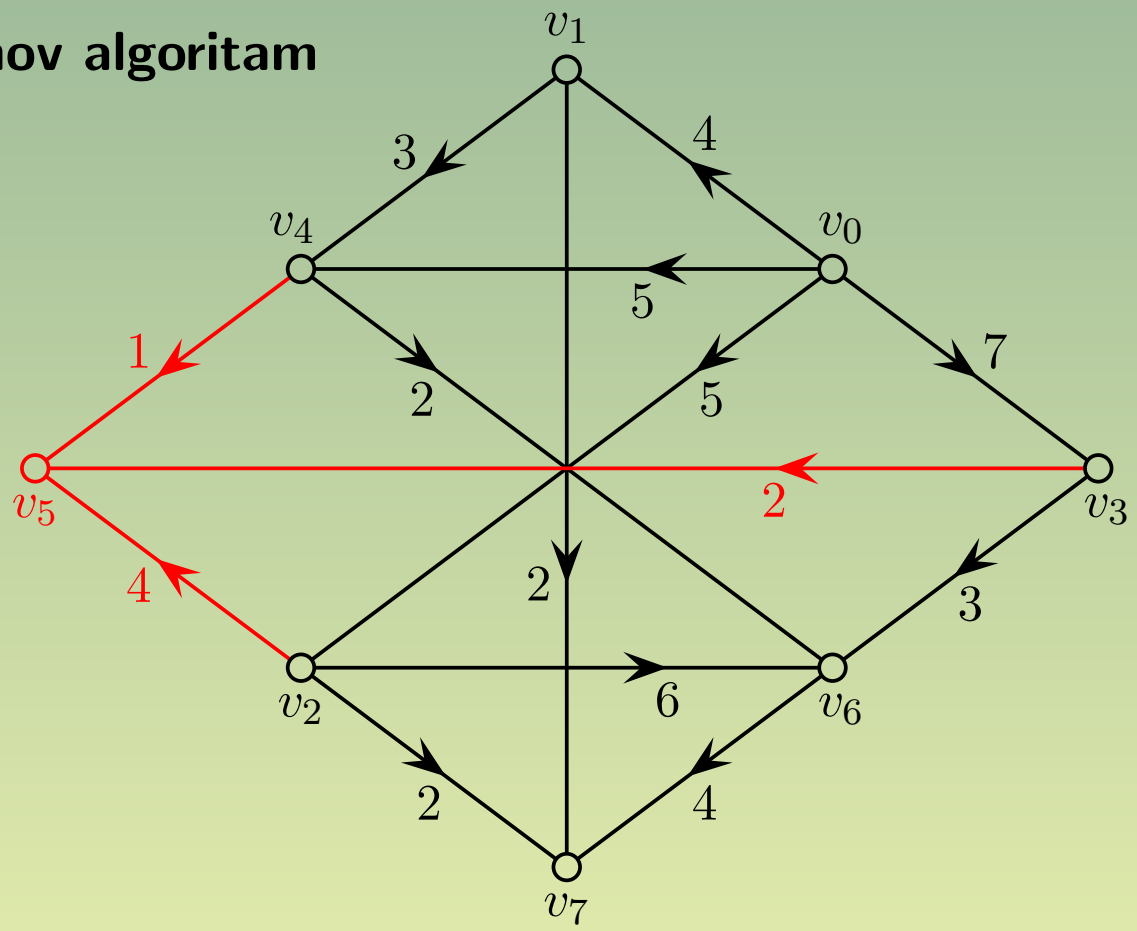


$v_0(-, 0)$, $v_1(v_0, 4)$, $v_2(v_0, 5)$, $v_3(v_0, 7)$, $v_4(v_0, 5)$

Prelazimo na vrh v_5. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_5. To su ovdje lukovi v_2v_5, v_3v_5 i v_4v_5.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-, 0)$, $v_1(v_0, 4)$, $v_2(v_0, 5)$, $v_3(v_0, 7)$, $v_4(v_0, 5)$

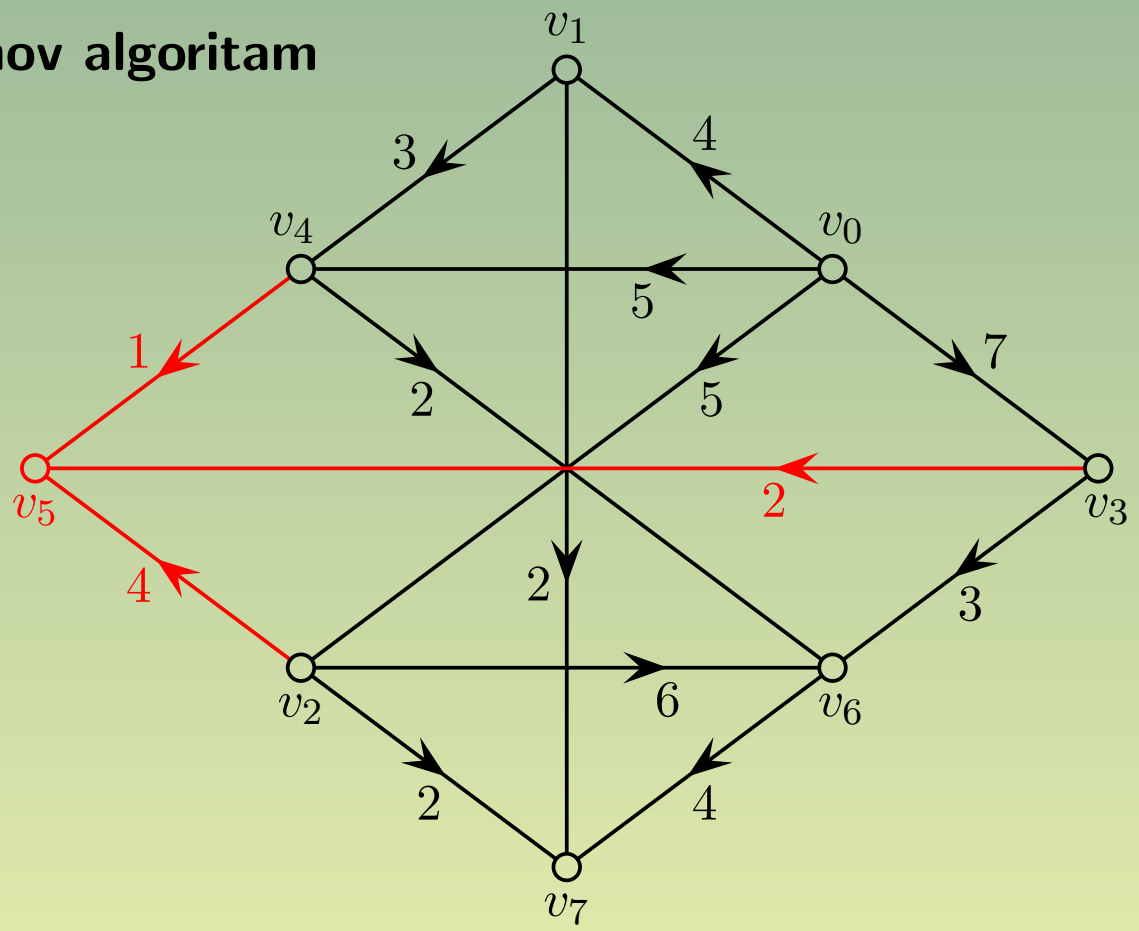
Prelazimo na vrh v_5. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_5. To su ovdje lukovi v_2v_5, v_3v_5 i v_4v_5. Za svaki od tih lukova računamo sumu težine luka i druge koordinate oznake njegovog početka.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-,0),\ v_1(v_0,4),\ v_2(v_0,5),\ v_3(v_0,7),\ v_4(v_0,5)$

Dobivamo

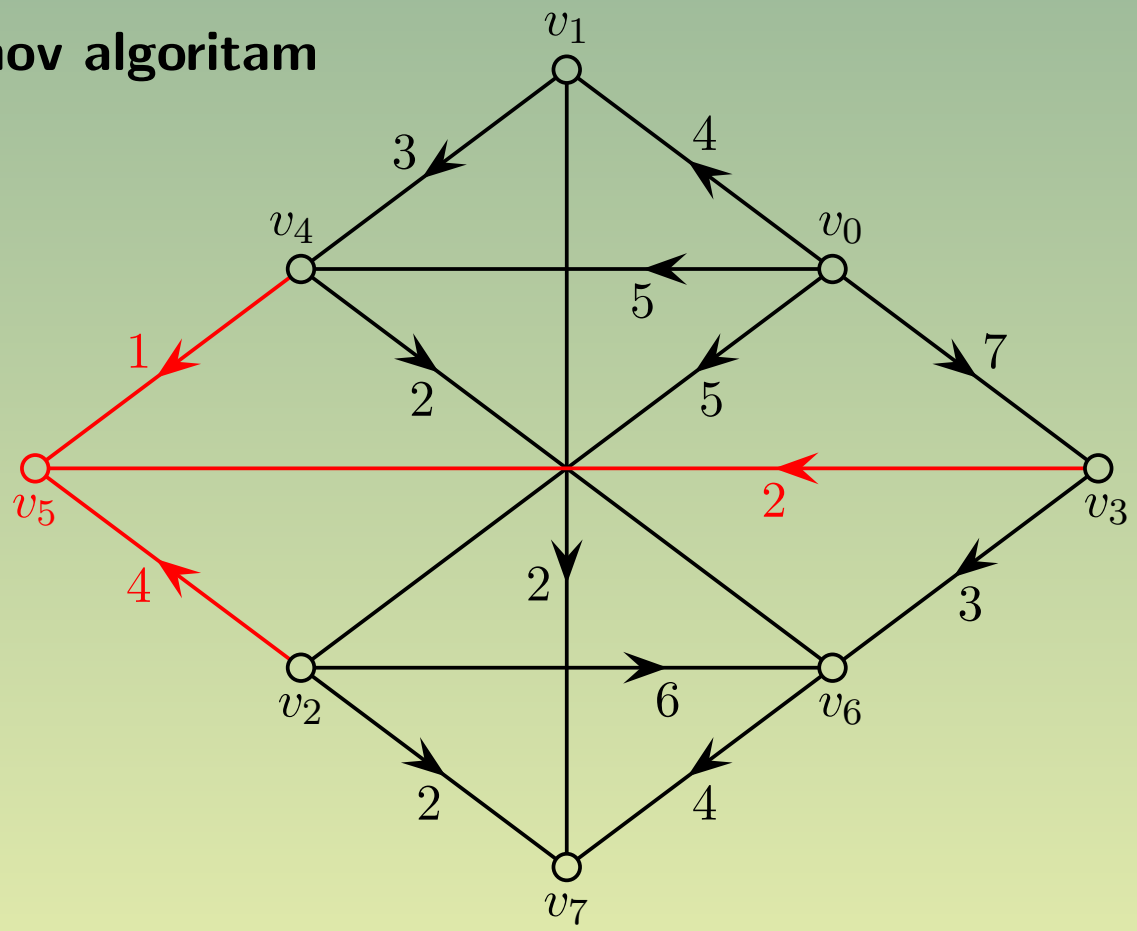
$$v_2v_5 \ \rightarrow\ 4+5=9, \quad v_3v_5 \ \rightarrow\ 2+7=9, \quad v_4v_5 \ \rightarrow\ 1+5=6$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-,0)$, $v_1(v_0,4)$, $v_2(v_0,5)$, $v_3(v_0,7)$, $v_4(v_0,5)$, $v_5(v_4,6)$

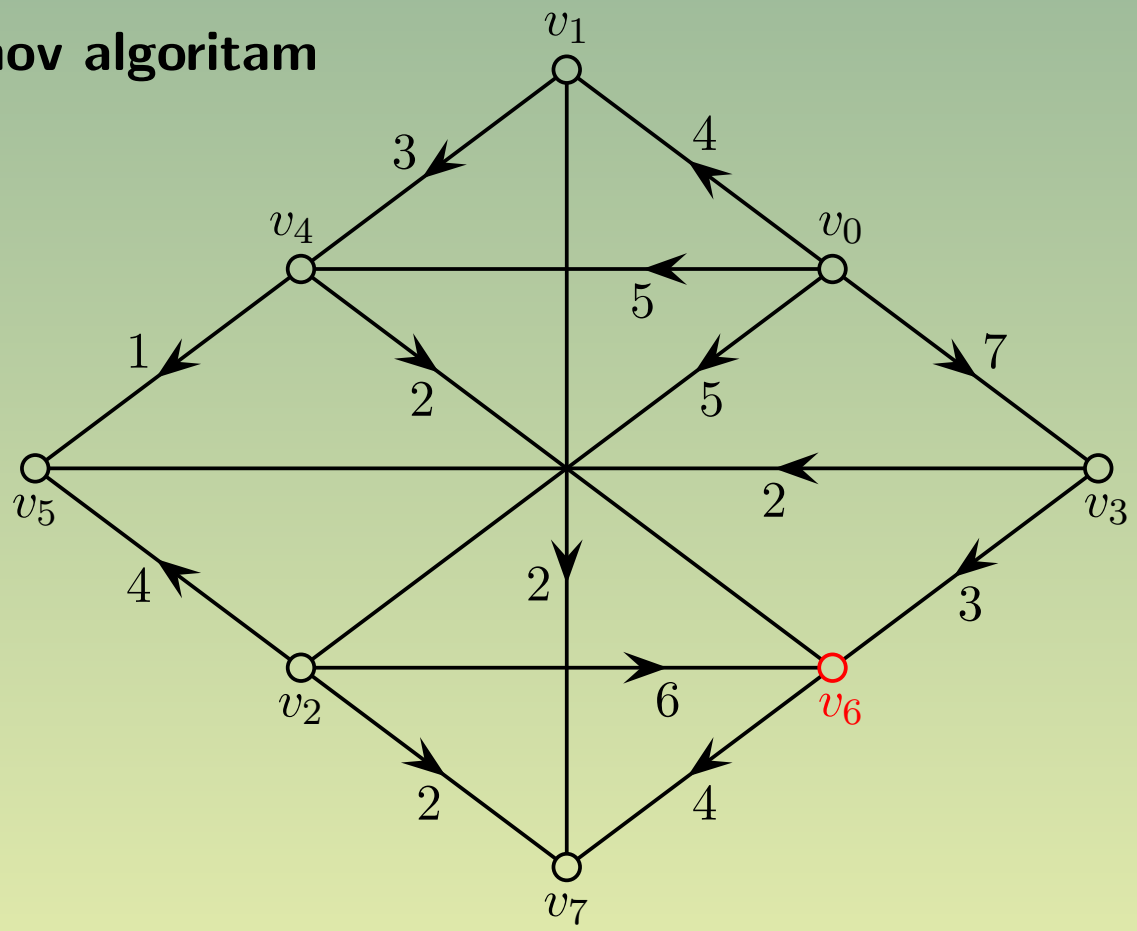
Dobivamo

$v_2v_5 \to 4+5=9, \quad v_3v_5 \to 2+7=9, \quad v_4v_5 \to 1+5=6$

i uzmemo najmanju od tih vrijednosti pa vrh v_5 dobiva oznaku $(v_4,6)$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam

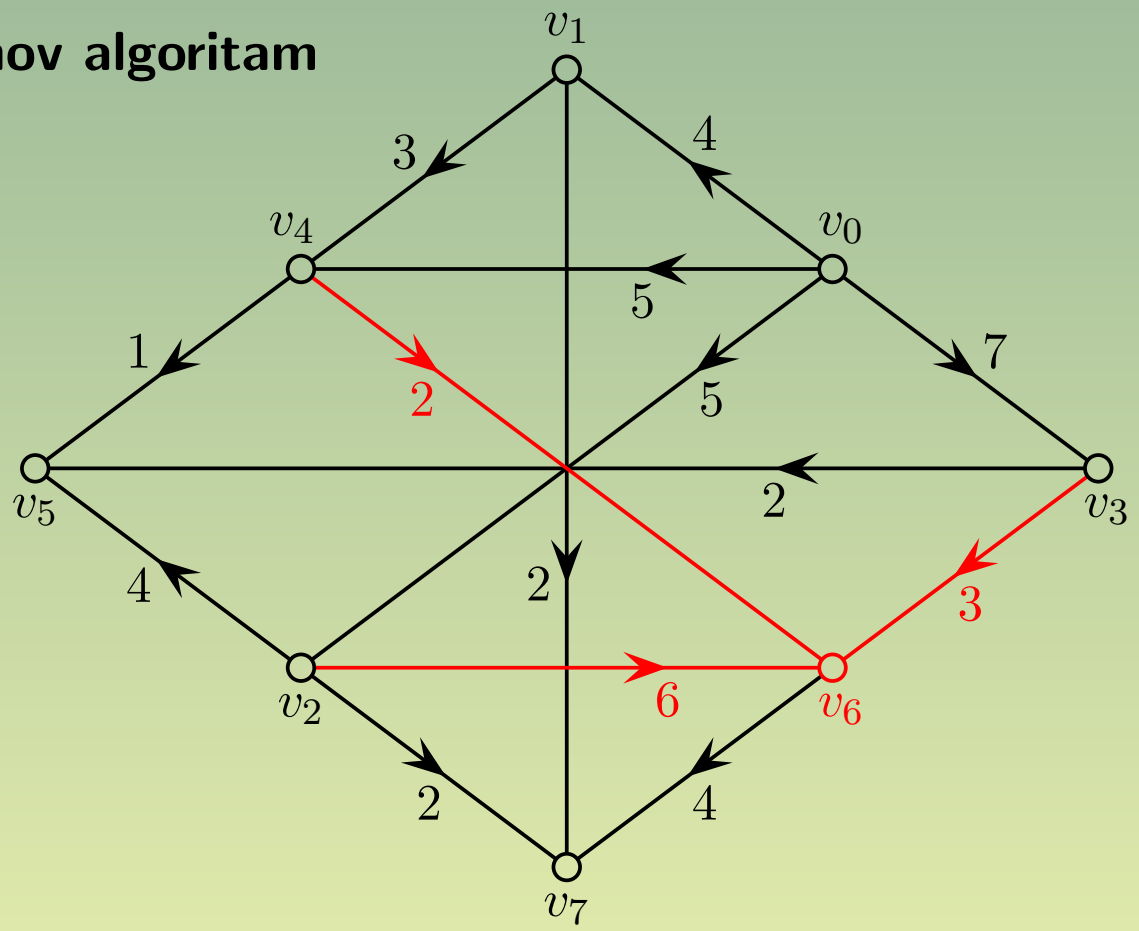


$v_0(-, 0)$, $v_1(v_0, 4)$, $v_2(v_0, 5)$, $v_3(v_0, 7)$, $v_4(v_0, 5)$, $v_5(v_4, 6)$

Prelazimo na vrh v_6.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-, 0)$, $v_1(v_0, 4)$, $v_2(v_0, 5)$, $v_3(v_0, 7)$, $v_4(v_0, 5)$, $v_5(v_4, 6)$

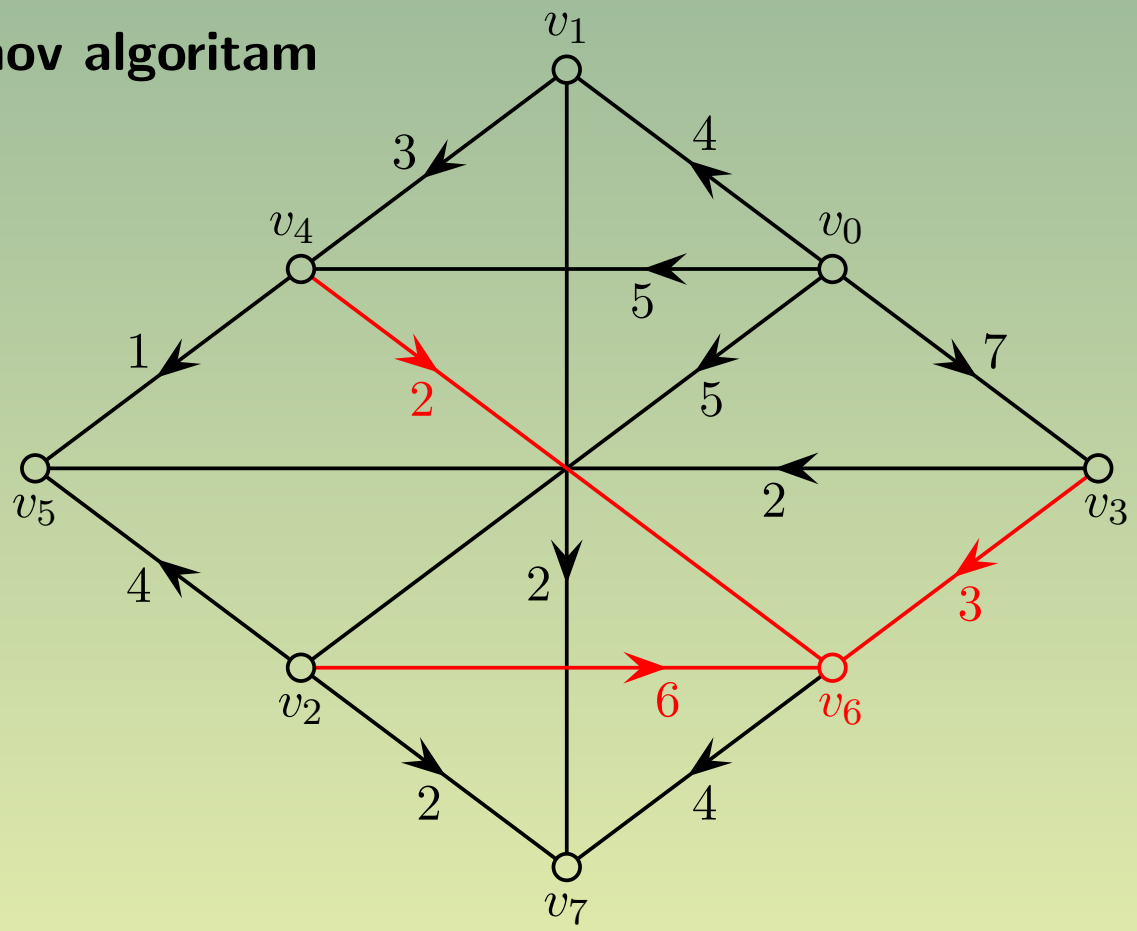
Prelazimo na vrh v_6. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_6. To su ovdje lukovi v_2v_6, v_3v_6 i v_4v_6.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-,0)$, $v_1(v_0,4)$, $v_2(v_0,5)$, $v_3(v_0,7)$, $v_4(v_0,5)$, $v_5(v_4,6)$

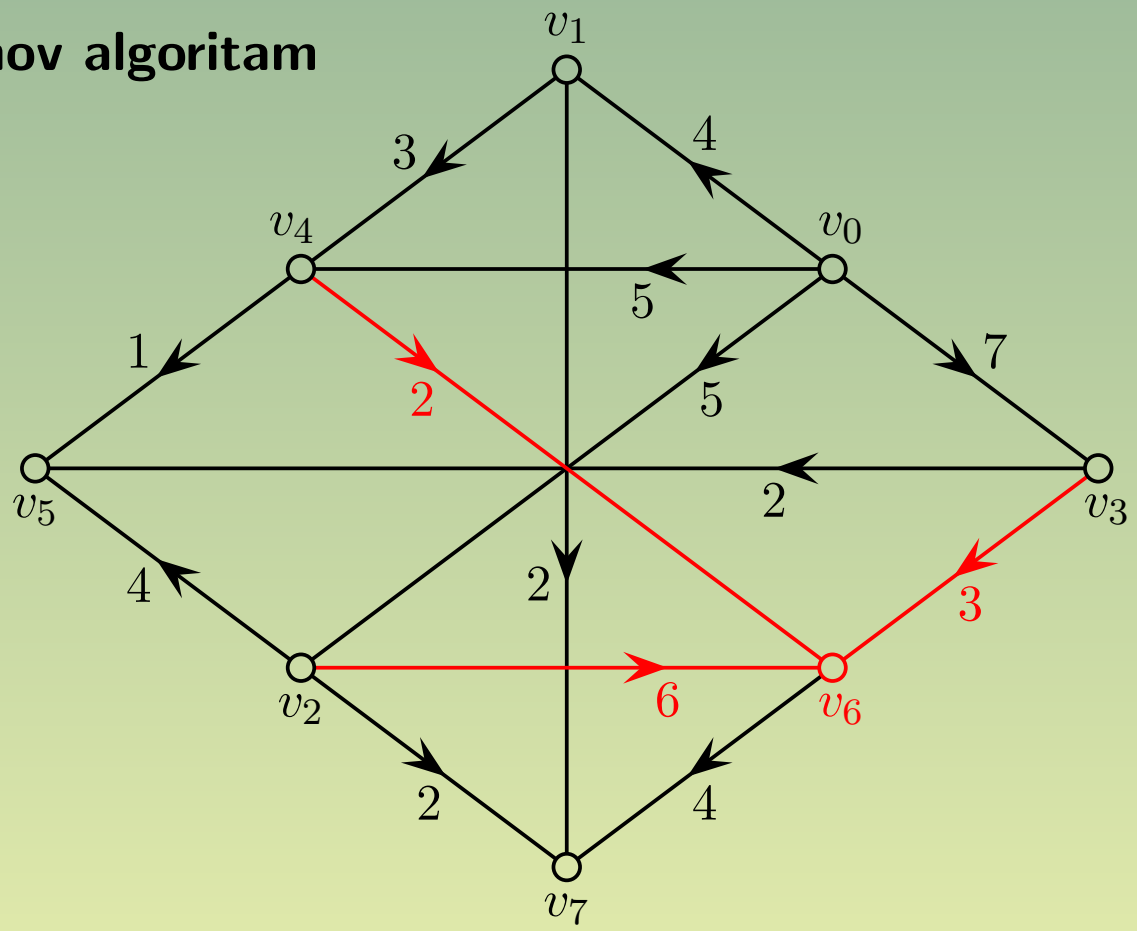
Prelazimo na vrh v_6. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_6. To su ovdje lukovi v_2v_6, v_3v_6 i v_4v_6. Za svaki od tih lukova računamo sumu težine luka i druge koordinate oznake njegovog početka.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-,0),\ v_1(v_0,4),\ v_2(v_0,5),\ v_3(v_0,7),\ v_4(v_0,5),\ v_5(v_4,6)$

Dobivamo

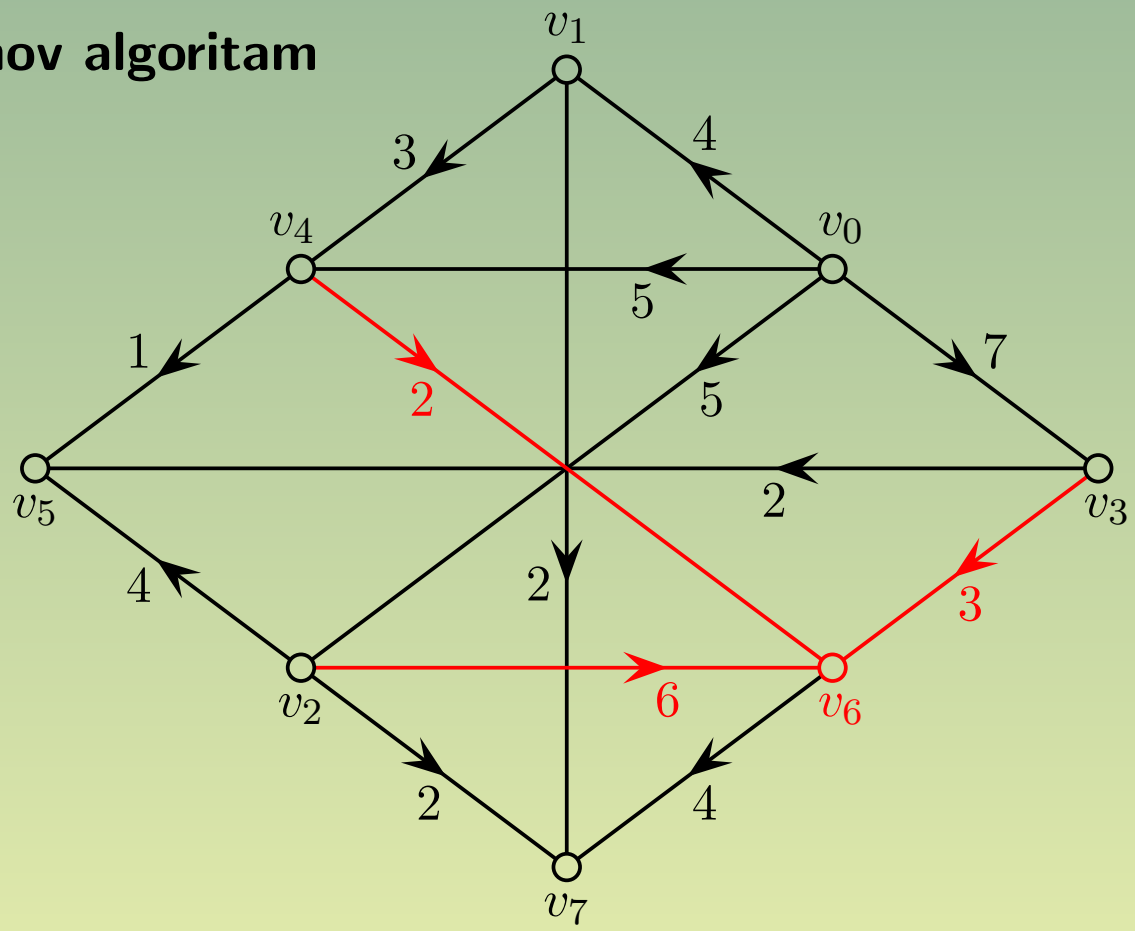
$$v_2v_6 \ \rightarrow\ 6+5=11, \quad v_3v_6 \ \rightarrow\ 3+7=10, \quad v_4v_6 \ \rightarrow\ 2+5=7$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-,0)$, $v_1(v_0,4)$, $v_2(v_0,5)$, $v_3(v_0,7)$, $v_4(v_0,5)$, $v_5(v_4,6)$, $v_6(v_4,7)$

Dobivamo

$v_2v_6 \rightarrow 6+5=11, \quad v_3v_6 \rightarrow 3+7=10, \quad v_4v_6 \rightarrow 2+5=7$

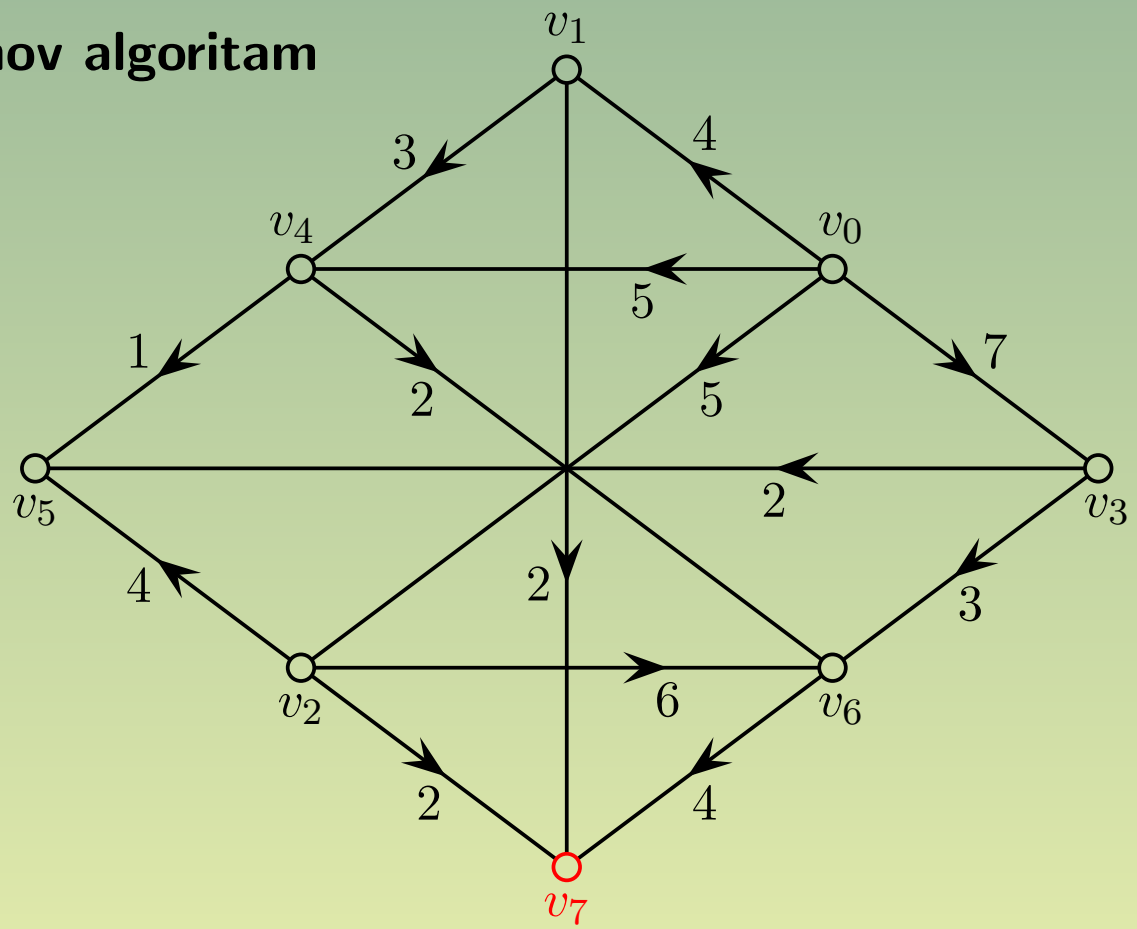
i uzmemo najmanju od tih vrijednosti pa vrh v_6 dobiva oznaku $(v_4,7)$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam

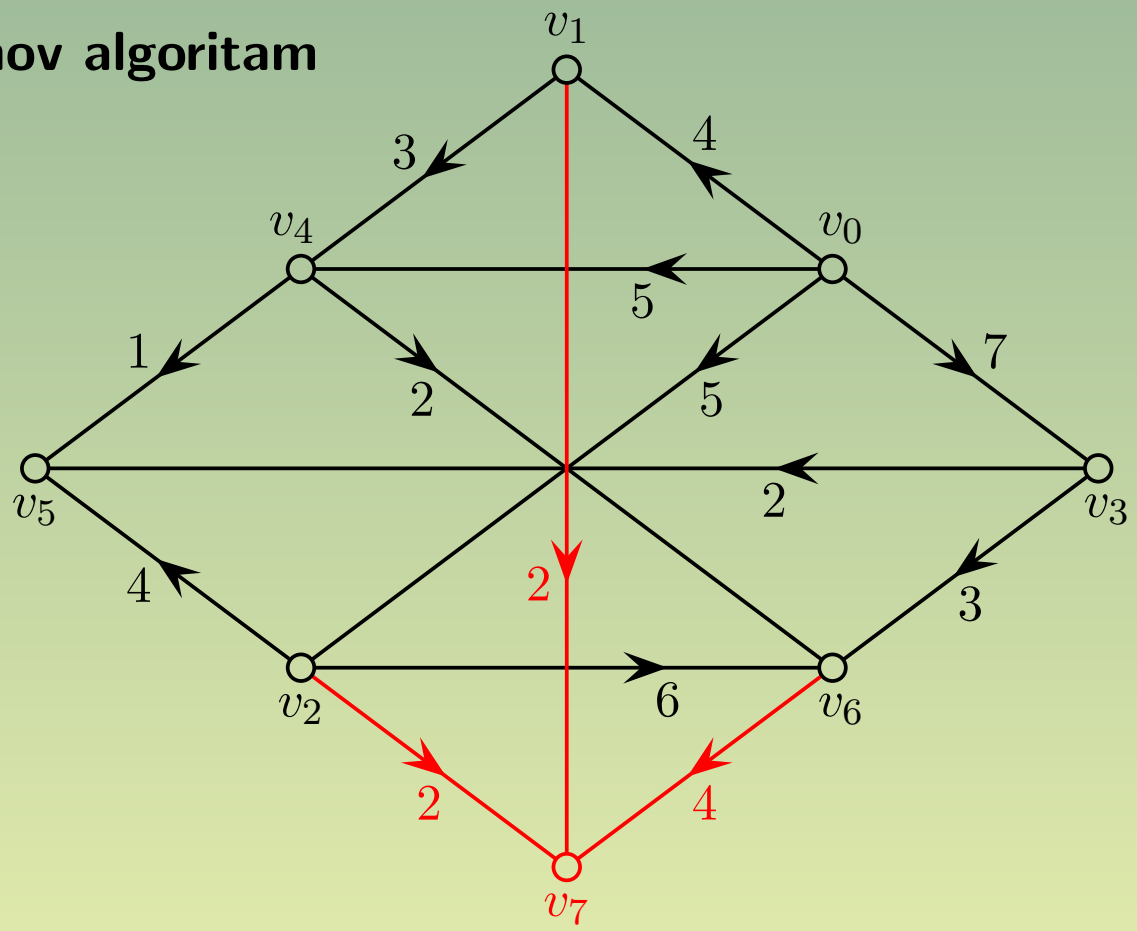


$v_0(-, 0)$, $v_1(v_0, 4)$, $v_2(v_0, 5)$, $v_3(v_0, 7)$, $v_4(v_0, 5)$, $v_5(v_4, 6)$, $v_6(v_4, 7)$

Prelazimo na vrh v_7.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam

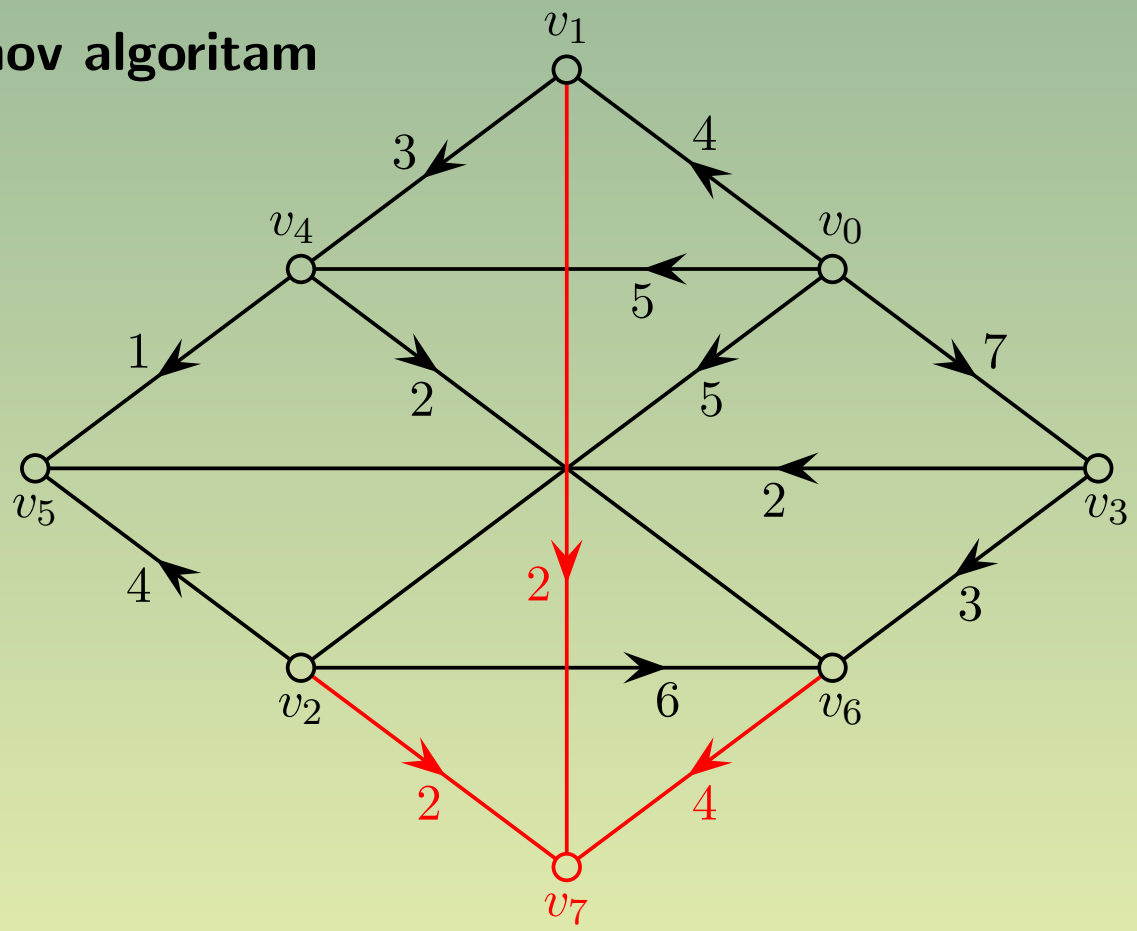


$v_0(-,0)$, $v_1(v_0,4)$, $v_2(v_0,5)$, $v_3(v_0,7)$, $v_4(v_0,5)$, $v_5(v_4,6)$, $v_6(v_4,7)$

Prelazimo na vrh v_7. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_7. To su ovdje lukovi v_1v_7, v_2v_7 i v_6v_7.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-,0)$, $v_1(v_0,4)$, $v_2(v_0,5)$, $v_3(v_0,7)$, $v_4(v_0,5)$, $v_5(v_4,6)$, $v_6(v_4,7)$

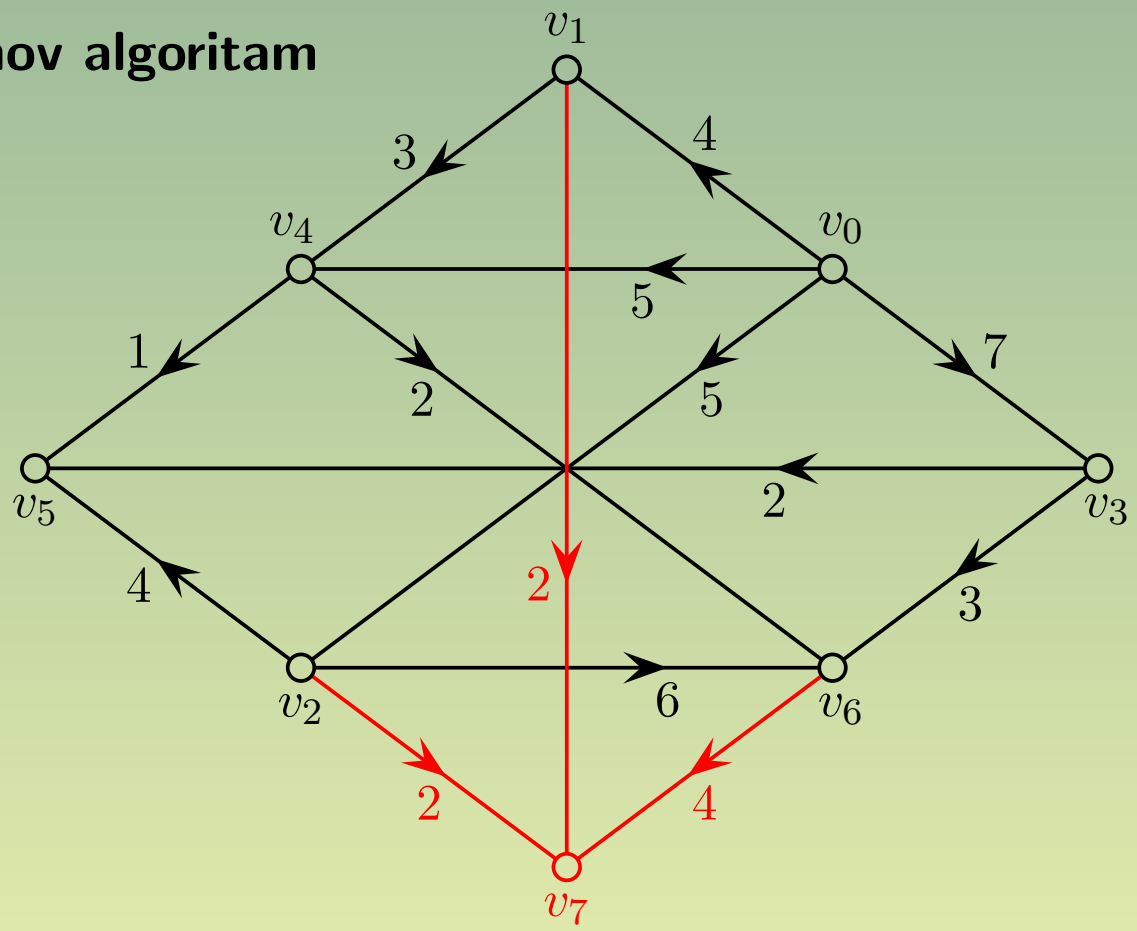
Prelazimo na vrh v_7. Pogledamo sve lukove koji ulaze u vrh v_7. To su ovdje lukovi v_1v_7, v_2v_7 i v_6v_7. Za svaki od tih lukova računamo sumu težine luka i druge koordinate oznake njegovog početka.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-,0),\ v_1(v_0,4),\ v_2(v_0,5),\ v_3(v_0,7),\ v_4(v_0,5),\ v_5(v_4,6),\ v_6(v_4,7)$

Dobivamo

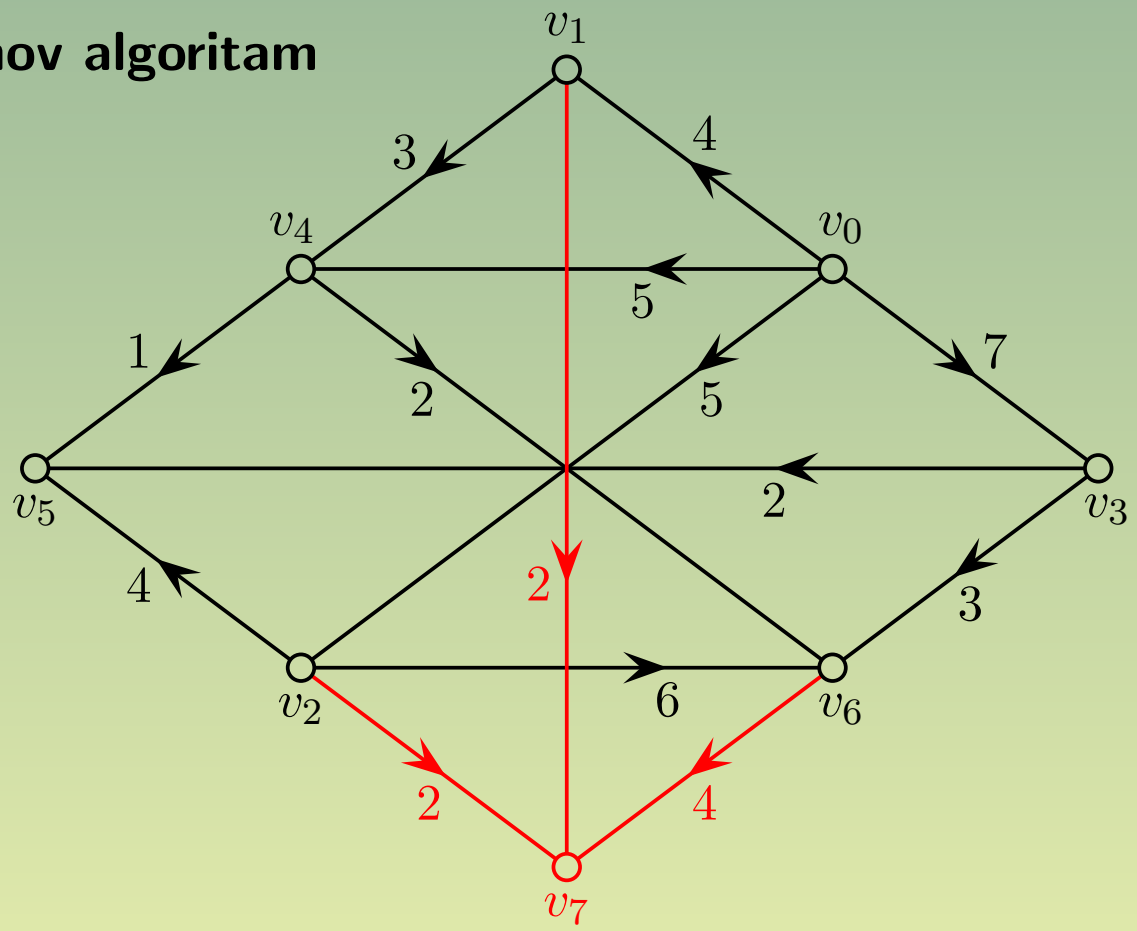
$$v_1v_7 \ \to\ 2+4=6, \quad v_2v_7 \ \to\ 2+5=7, \quad v_6v_7 \ \to\ 4+7=11$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



$v_0(-,0)$, $v_1(v_0,4)$, $v_2(v_0,5)$, $v_3(v_0,7)$, $v_4(v_0,5)$, $v_5(v_4,6)$, $v_6(v_4,7)$, $v_7(v_1,6)$

Dobivamo

$v_1v_7 \rightarrow 2+4=6, \quad v_2v_7 \rightarrow 2+5=7, \quad v_6v_7 \rightarrow 4+7=11$

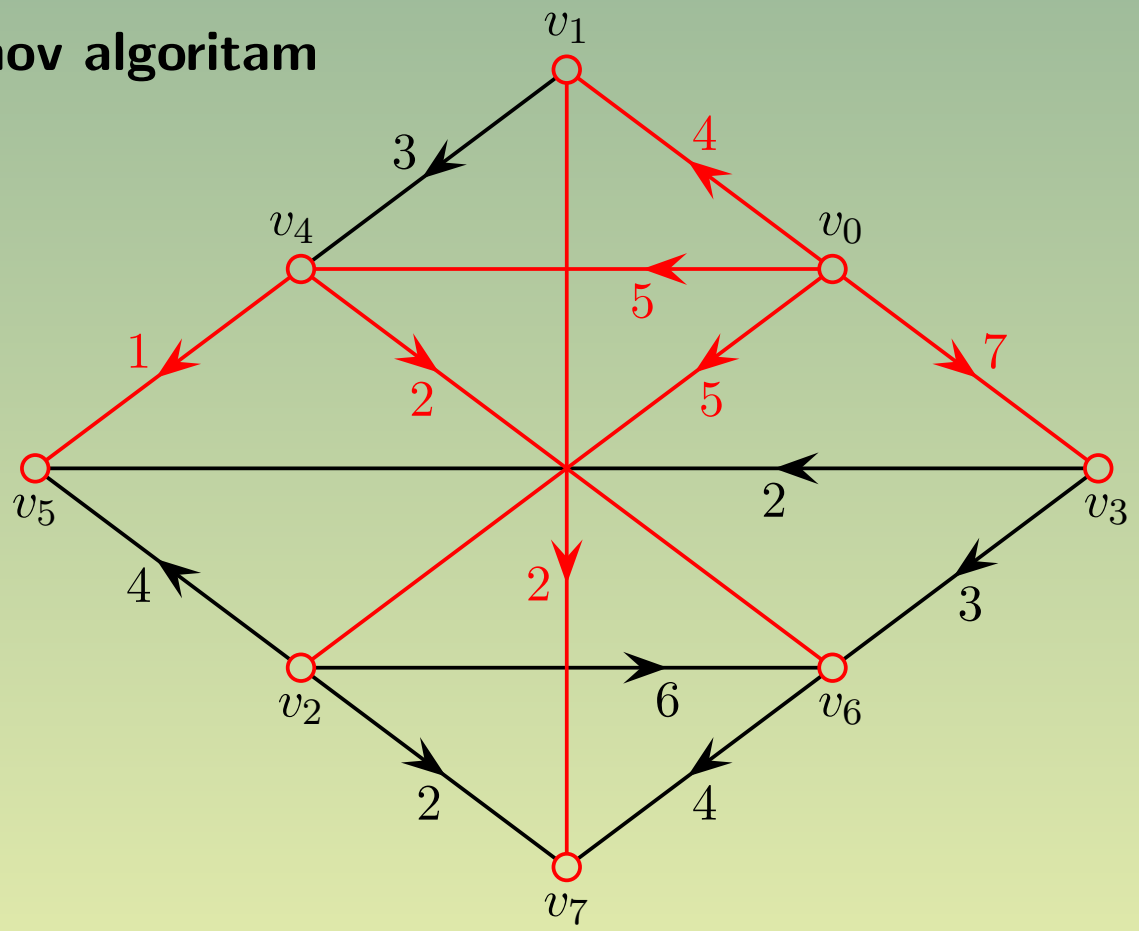
i uzmemo najmanju od tih vrijednosti pa vrh v_7 dobiva oznaku $(v_1,6)$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam

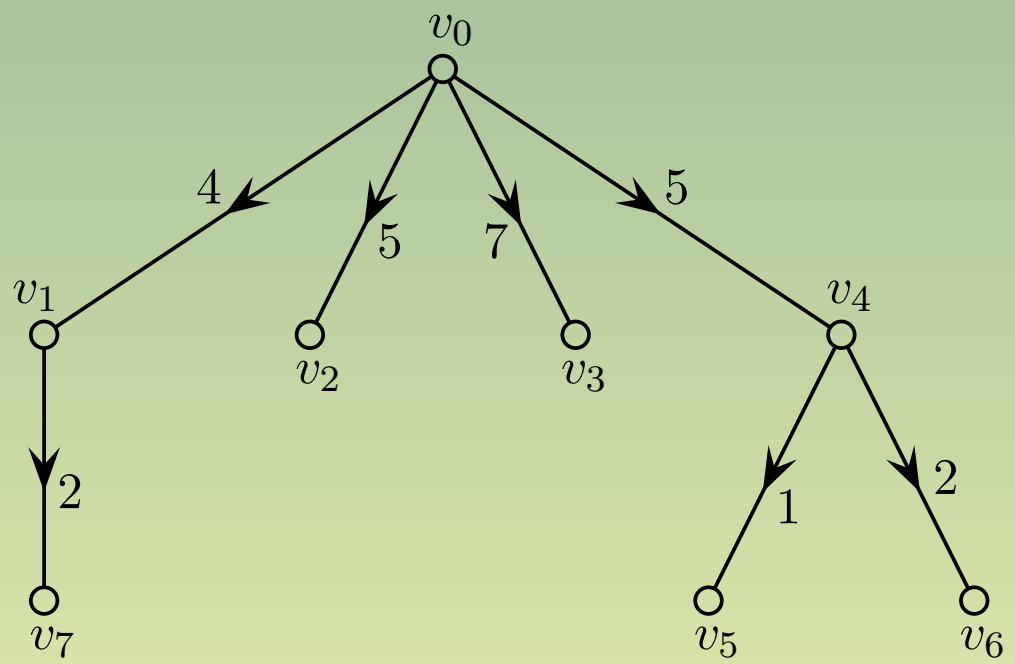


$v_0(-,0)$, $v_1(v_0,4)$, $v_2(v_0,5)$, $v_3(v_0,7)$, $v_4(v_0,5)$, $v_5(v_4,6)$, $v_6(v_4,7)$, $v_7(v_1,6)$

Druge koordinate pojedinih vrhova su najkraće udaljenosti vrha v_0 do tih vrhova, a pomoću prvih koordinata možemo rekonstruirati i najkraće putove kako je prikazano na slici.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam

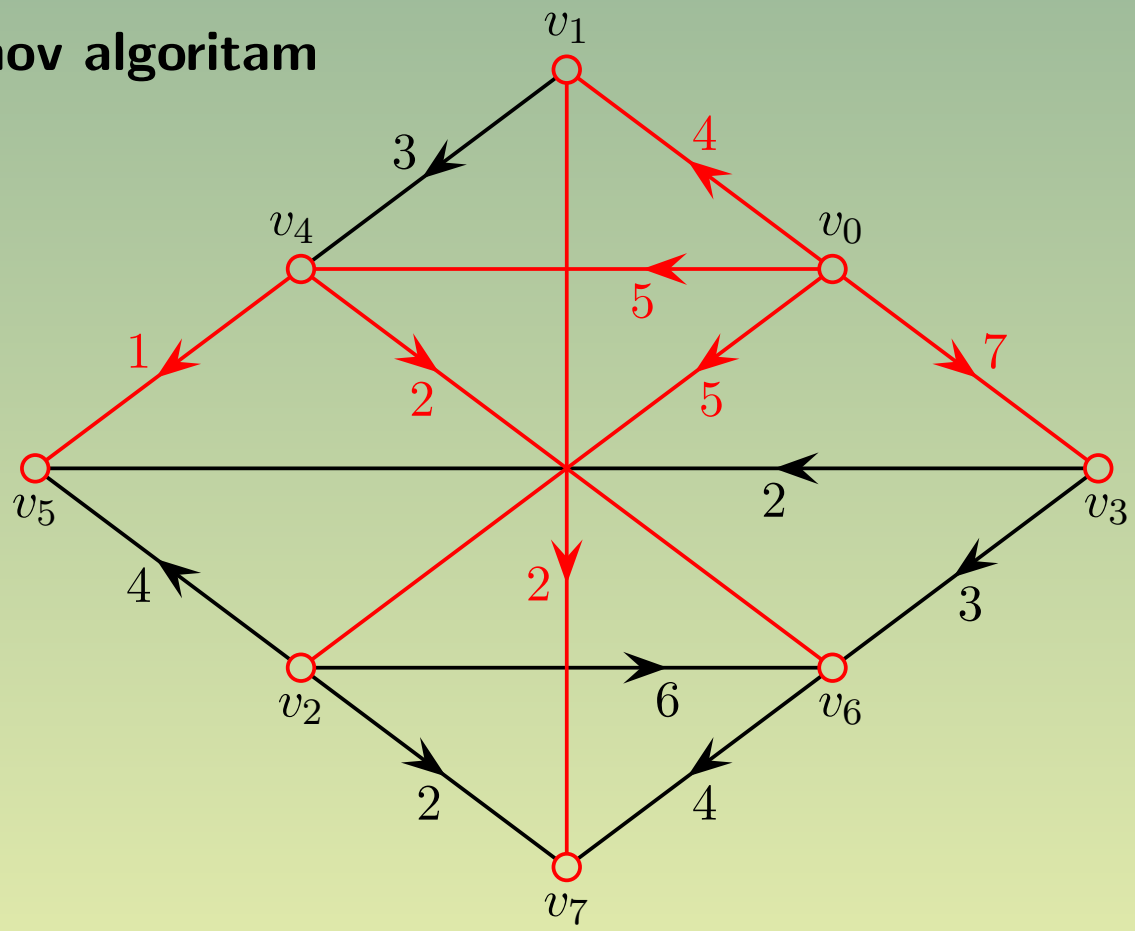


$v_0(-, 0)$, $v_1(v_0, 4)$, $v_2(v_0, 5)$, $v_3(v_0, 7)$, $v_4(v_0, 5)$, $v_5(v_4, 6)$, $v_6(v_4, 7)$, $v_7(v_1, 6)$

Najkraće putove od vrha v_0 prema ostalim vrhovima možemo prikazati u obliku usmjerenog korijenskog stabla s korijenom v_0.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Bellmanov algoritam



Čitav postupak zapisujemo kratko u obliku tablice

◂ objasni postupak

vrh	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
oznaka	$-, 0$	$v_0, 4$	$v_0, 5$	$v_0, 7$	$v_0, 5$	$v_4, 6$	$v_4, 7$	$v_1, 6$

Diskretne strukture s teorijom grafova

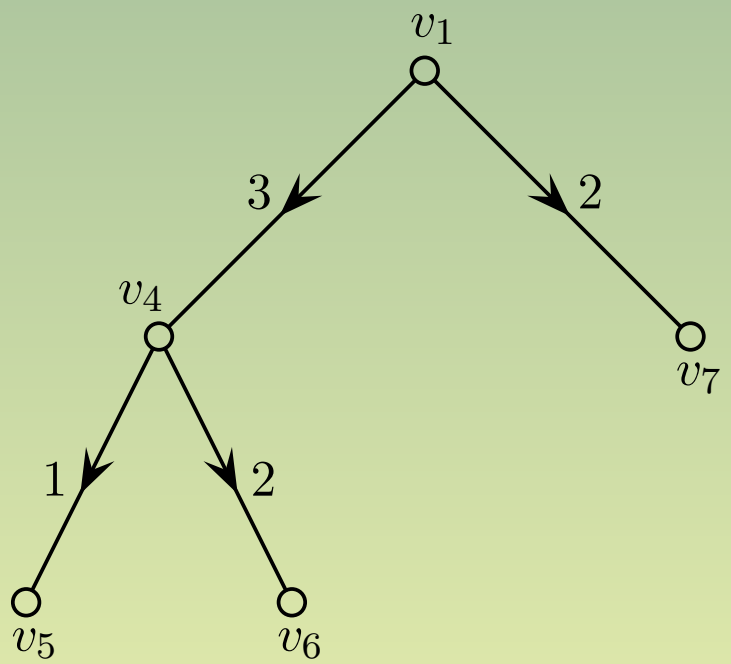
prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

- Nećemo objašnjavati svaki detalj jer se algoritam provodi potpuno analogno kako je to objašnjeno u b) dijelu zadatka, jedino što se na početku, npr. za vrh v_2, vrhu v_2 stavi oznaka $(-, 0)$, a vrhovima s manjim indeksima (u ovom slučaju vrhovima v_0 i v_1) se stave oznake $(-, \infty)$ koje će ostati takve do kraja jer ne postoje lukovi od vrhova s većim indeksima prema vrhovima s manjim indeksima ako su vrhovi topološki sortirani. Napravite za vježbu sami detaljno svaki korak kako je to napravljeno u b) dijelu zadatka, a ovdje će biti dana samo konačna rješenja.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

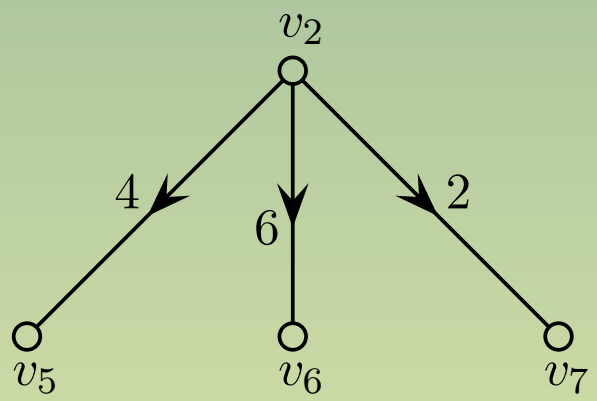
Najkraći putovi od vrha v_1 prema ostalim vrhovima



vrh	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
oznaka	$-, \infty$	$-, 0$	$-, \infty$	$-, \infty$	$v_1, 3$	$v_4, 4$	$v_4, 5$	$v_1, 2$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Najkraći putovi od vrha v_2 prema ostalim vrhovima



vrh	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
oznaka	$-, \infty$	$-, \infty$	$-, 0$	$-, \infty$	$-, \infty$	$v_2, 4$	$v_2, 6$	$v_2, 2$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Napomena.

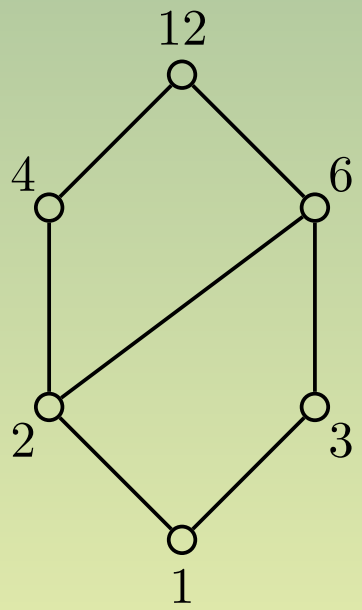
Topološko sortiranje ne mora biti jedinstveno. To ovisi o skupu S unutar algoritma. Ako je skup S u svakom koraku jednočlani skup, tada će topološko sortiranje biti jedinstveno. Razmislite u kojem će se slučaju to dogoditi. U prethodnom primjeru skup S nije bio jednočlan u svakom koraku pa smo mogli birati između više elemenata iz skupa S koji ćemo staviti u listu L. Riješite prethodni primjer tako da na neke druge načine napravite topološko sortiranje vrhova.

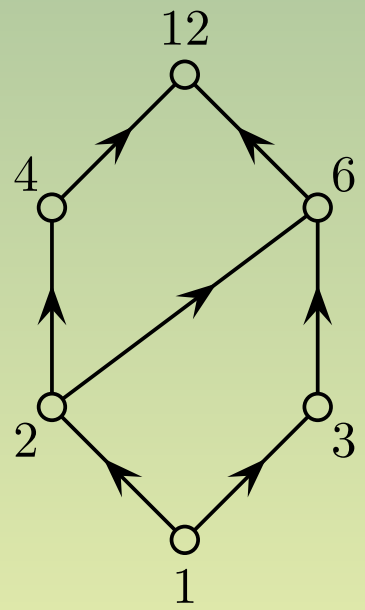
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Prije smo spominjali sortiranje u parcijalno uređenom skupu pomoću stabla sortiranja. Zapravo je to bilo topološko sortiranje, samo što se tamo sortiralo pomoću stabla sortiranja i zadanog Hasseovog dijagrama, a ovdje se to radi pomoću opisanog algoritma za topološko sortiranje i acikličkog digrafa. Naime, te dvije stvari su povezane. Od svakog Hasseovog dijagrama možemo napraviti aciklički digraf tako da njegove bridove orijentiramo "prema gore", odnosno na svaki brid stavimo strelicu koja pokazuje prema onom kraju tog brida koji je na većoj visini. Pogledajmo to na već puno puta korištenom primjeru parcijalno uređenog skupa $\left(D_{12}, |\ \right)$, skupa svih prirodnih djelitelja broja 12 uz relaciju "dijeli".

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Na lijevoj slici je prikazan Hasseov dijagram od $(D_{12}, |\,)$, a na desnoj slici je prikazan pripadni acikličkи digraf. U nekim literaturama se desna slika zove Hasseov dijagram, međutim sve je to stvar pristupa i dogovora.



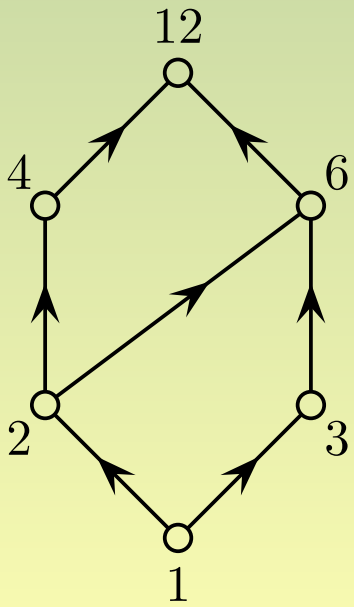


Desna slika ima svojih prednosti jer više ne moramo paziti na kojoj visini ćemo nacrtati pojedini vrh. Naime, vrijedi da je $a \preccurlyeq b$ ako i samo ako postoji usmjereni put od vrha a do vrha b pa ne mora nužno vrh b biti iznad vrha a kao što to moramo paziti kod lijeve slike jer nam zapravo strelice govore tko je s kim usporediv.

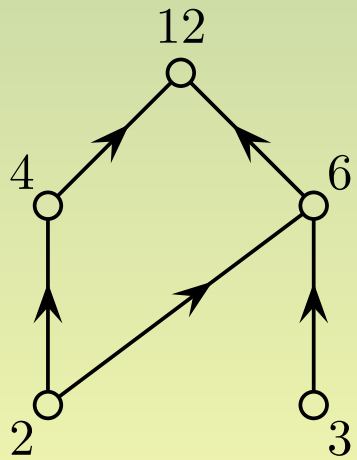
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Ranije smo pokazali kako se sortira u D_{12} pomoću stabla sortiranja, a pokažimo sada kako se sortira u D_{12} pomoću algoritma za topološko sortiranje. Nećemo detaljno opisivati svaki korak jer smo to već napravili ranije na nekim primjerima.

1. $L = \emptyset$,
   $S = \{1\}$

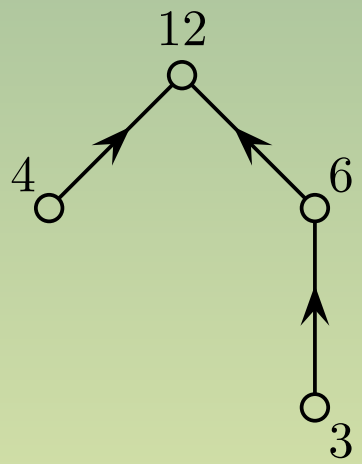


2. $L = \{1\}$,
   $S = \{2, 3\}$

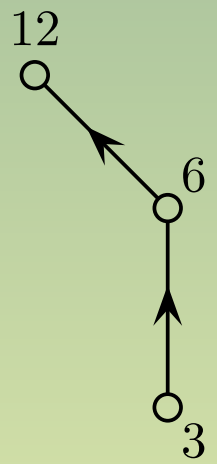


Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

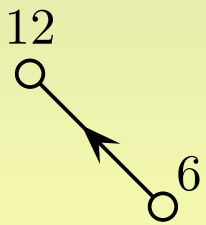
3. $L = \{1, 2\}$,
   $S = \{3, 4\}$



4. $L = \{1, 2, 4\}$,
   $S = \{3\}$



5. $L = \{1, 2, 4, 3\}$,
   $S = \{6\}$



6. $L = \{1, 2, 4, 3, 6\}$,
   $S = \{12\}$



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

7. $L = \{1, 2, 4, 3, 6, 12\}, \quad S = \emptyset$

   Dobili smo topološki sortirane elemente $1, 2, 4, 3, 6, 12$.

   Jasno, ovdje smo također imali više mogućnosti topoloških sortiranja jer nije u svakom koraku S bio jednočlan skup.

Napomena.

Topološko sortiranje na konačnom parcijalno uređenom skupu $(A, \preccurlyeq)$ zapravo predstavlja proširenje parcijalnog uređaja $\preccurlyeq$ do linearnog uređaja na A. Naime, u parcijalno uređenom skupu nisu svaka dva elementa usporediva, što nam ponekad u praksi može predstavljati problem. Ideja je tada da izmislimo neki linearni uređaj $\preccurlyeq_{\text{lin}}$ na tom skupu koji će u sebi sadržavati postojeći parcijalni uređaj u smislu da vrijedi

$$a \preccurlyeq b \Rightarrow a \preccurlyeq_{\text{lin}} b.$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Drugim riječima, želimo postojeći parcijalni uređaj $\preccurlyeq$ malo "podebljati" tako da on postane linearni uređaj $\preccurlyeq_{\text{lin}}$. Ako se radi o konačnome skupu, tada topološko sortiranje upravo to i radi, proširuje postojeći parcijalni uređaj do linearnog uređaja. Konkretno, na primjeru parcijalno uređenog skupa $(D_{12}, |\,)$, topološkim sortiranjem smo dobili listu $1, 2, 4, 3, 6, 12$. O toj listi možemo razmišljati kao o linearnom uređaju $\preccurlyeq_{\text{lin}}$ na D_{12} u kojoj su elementi napisani u rastućem poretku. Na primjer, vrijedi da je $4 \preccurlyeq_{\text{lin}} 3$, $2 \preccurlyeq_{\text{lin}} 3$, $4 \preccurlyeq_{\text{lin}} 12$, itd. Nadalje, s obzirom na parcijalni uređaj $|$, elementi 2 i 3 nisu usporedivi jer, niti vrijedi $2 \mid 3$, niti vrijedi $3 \mid 2$. Međutim, s obzirom na $\preccurlyeq_{\text{lin}}$ vrijedi $2 \preccurlyeq_{\text{lin}} 3$. Isto tako, elementi 2 i 6 su usporedivi s obzirom da parcijalni uređaj $|$ jer vrijedi $2 \mid 6$. Međutim, isti odnos vrijedi i s obzirom na $\preccurlyeq_{\text{lin}}$ jer je $2 \preccurlyeq_{\text{lin}} 6$. Dakle, topološkim sortiranjem se očuvaju odnosi elemenata koji vrijede u nekom konačnom parcijalno uređenom skupu i još k tome dobijemo linearni uređaj na tom skupu.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Problem rasporeda – 1. tip

Usmjerena mreža je digraf čije su sve težine lukova cjelobrojne pozitivne vrijednosti.

Usmjerene mreže imaju veliku primjenu u poslovanju, gdje pomažu u radu s velikom količinom kompleksnih podataka i zadanim rokovima.

Poznate tehnike mreža za izradu rasporeda su:

- Program Evaluation and Review Technique - PERT
- Metoda kritičnog puta (Critical Path Method) - CPM, odnosno Arrow Diagram Method - ADM

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Problem rasporeda, 1. tip

Cilj je završiti određeni projekt u što je moguće kraćem vremenu. Da bi se projekt ostvario, potrebno je napraviti neke zadatke (poslove). Svaki posao zahtijeva određeno vrijeme da bi se ostvario i neki od zadataka mora biti ostvaren prije da bi se moglo prijeći na obavljanje sljedećeg zadatka. Isto tako, vrijeme potrebno za ostvarenje nekog zadatka ovisi i o tome koji su zadaci prethodno već ostvareni. Pitanje je kojim redoslijedom treba obavljati poslove da bi se projekt završio u što je moguće kraćem vremenu.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Ovaj problem se može modelirati pomoću usmjerenih mreža. Lukovi reprezentiraju zadatke koje treba obaviti i imaju težine koje predstavljaju vrijeme potrebno za ostvarenje nekog zadatka, dok vrhovi predstavljaju etape u cjelokupnom procesu ostvarenja projekta. Na taj način lukovima pridružujemo dvije oznake, prva je ime zadatka (možda manje važna, ali ipak da znamo koji zadatak predstavlja određeni luk), a druga je vrijeme potrebno za ostvarenje tog zadatka. Jasno, istom zadatku mogu biti pridružene različite težine na različitim mjestima u usmjerenoj mreži jer ovisi u kojoj etapi ćemo ga izvršavati, tj. koji su zadaci već prethodno ostvareni pa mogu ubrzati ili usporiti ostvarenje promatranog zadatka.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Uz opisani način modeliranja, naš je zadatak da tada pronađemo u toj usmjerenoj mreži najkraći put od vrha koji predstavlja početak projekta do vrha koji predstavlja završetak projekta. Pritom koristimo Dijkstrin algoritam koji pronalazi taj najkraći put koji nam daje redoslijed obavljanja zadataka, ali dobivamo također i duljinu tog puta, tj. minimalno trajanje projekta.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.29.

Učenik, prije nego krene u školu, mora se istuširati, odjenuti, doručkovati i završiti zadaću iz matematike. Tuširanje će obaviti prije odijevanja, a odijevanje će obaviti prije pisanja zadaće iz matematike. Drugih ograničenja nema. Tuširanje traje 9 minuta. Odijevanje traje 9 minuta ako je učenik već doručkovao, a inače traje 12 minuta. Pisanje zadaće traje 12 minuta ako je učenik doručkovao, a inače 18 minuta. Doručak traje 9 minuta ako je zadaća napravljena, a inače 18 minuta. Pronađite sve moguće načine na koje učenik može obaviti svoje zadatke u što je moguće kraćem vremenu prije nego krene u školu.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.

Uvedimo najprije sljedeće oznake:

$$\text{tuširanje} \to T$$
$$\text{odijevanje} \to O$$
$$\text{zadaća} \to Z$$
$$\text{doručak} \to D$$

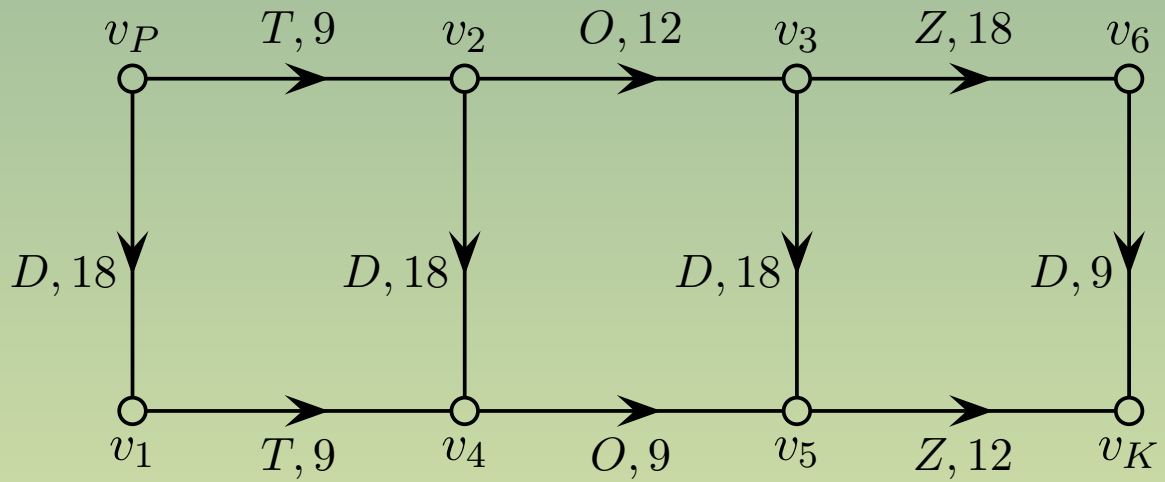
Uz navedenja ograničenja, mogući rasporedi obavljanja poslova su

$$TOZD, \quad TODZ, \quad TDOZ, \quad DTOZ.$$

Kako je ovo maleni primjer (nema puno poslova i mogućih rasporeda), mogli bismo ga riješiti "napamet" bez primjene usmjerenih mreža. Međutim, poanta je da vidimo kako to funkcionira pomoću usmjerenih mreža jer u slučaju da imamo puno više poslova (npr., 100 poslova), tada bismo teško to napamet riješili.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Pripadna usmjerena mreža izgleda



Pritom vrh v_P označava početak projekta, a vrh v_K kraj projekta. Naš zadatak je da pronađemo najkraći usmjereni put od vrha v_P do vrha v_K. Kako nas zanimaju sve moguće kombinacije izvršavanja poslova za koje projekt najkraće traje, zapravo trebamo pronaći sve moguće najkraće usmjerene putove od vrha v_P do vrha v_K. Stoga je u tom slučaju bolje upotrijebiti prvu verziju Dijkstrinog algoritma jer pomoću poboljšane verzije nećemo moći uzeti u obzir sve mogućnosti.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Ukoliko u nekom koraku neki vrh možemo označiti preko više različitih vrhova, tada ćemo jednu od tih mogućnosti odabrati, a ostale ćemo označiti crvenom bojom koja će nam sugerirati da smo i te mogućnosti mogli odabrati. Na kraju ćemo onda lako vraćanjem unatrag od vrha v_K rekonstruirati sve najkraće putove od v_P do v_K.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

$1:$ $\boxed{v_P(-,0)}$

$2:$ $v_1(v_P,18),$ $\boxed{v_2(v_P,9)}$

$3:$ $\boxed{v_1(v_P,18)},$ $v_3(v_2,21),$ $v_4(v_2,27)$

$4:$ $\boxed{v_3(v_2,21)},$ $v_4(v_2,27),$ $v_4(v_1,27)$

$5:$ $\boxed{v_4(v_2,27)},$ $v_4(v_1,27),$ $v_5(v_3,39),$ $v_6(v_3,39)$

$6:$ $v_5(v_3,39),$ $v_6(v_3,39),$ $\boxed{v_5(v_4,36)}$

$7:$ $\boxed{v_6(v_3,39)},$ $v_K(v_5,48)$

$8:$ $\boxed{v_K(v_5,48)},$ $v_K(v_6,48)$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Napravimo tablicu svih mogućih oznaka za pojedine vrhove (one koje smo odabrali i one crvene koje nismo odabrali).

v_P	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_K
$-, 0$	$v_P, 18$	$v_P, 9$	$v_2, 21$	$v_2, 27$ $v_1, 27$	$v_4, 36$	$v_3, 39$	$v_5, 48$ $v_6, 48$

Krećemo rekonstruirati sve najkraće putove od v_P do v_K tako da krenemo od vrha v_K prema unatrag.

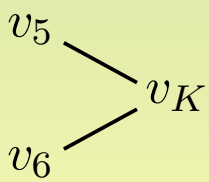
v_K

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Napravimo tablicu svih mogućih oznaka za pojedine vrhove (one koje smo odabrali i one crvene koje nismo odabrali).

v_P	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_K
$-, 0$	$v_P, 18$	$v_P, 9$	$v_2, 21$	$v_2, 27$ $v_1, 27$	$v_4, 36$	$v_3, 39$	$v_5, 48$ $v_6, 48$

Prema vrhu v_K smo mogli doći iz vrha v_5 ili iz vrha v_6.

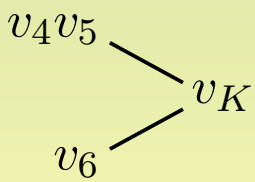


Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Napravimo tablicu svih mogućih oznaka za pojedine vrhove (one koje smo odabrali i one crvene koje nismo odabrali).

v_P	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_K
$-, 0$	$v_P, 18$	$v_P, 9$	$v_2, 21$	$v_2, 27$ $v_1, 27$	$v_4, 36$	$v_3, 39$	$v_5, 48$ $v_6, 48$

Prema vrhu v_5 smo mogli doći jedino iz vrha v_4.

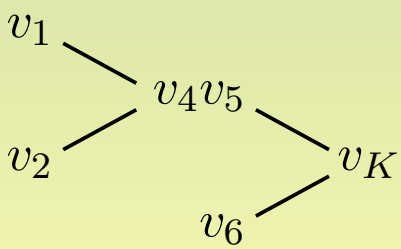


Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Napravimo tablicu svih mogućih oznaka za pojedine vrhove (one koje smo odabrali i one crvene koje nismo odabrali).

v_P	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_K
$-, 0$	$v_P, 18$	$v_P, 9$	$v_2, 21$	$v_2, 27$ $v_1, 27$	$v_4, 36$	$v_3, 39$	$v_5, 48$ $v_6, 48$

Prema vrhu v_4 smo mogli doći iz vrha v_1 ili iz vrha v_2.

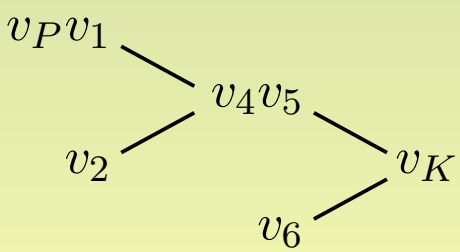


Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Napravimo tablicu svih mogućih oznaka za pojedine vrhove (one koje smo odabrali i one crvene koje nismo odabrali).

v_P	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_K
$-, 0$	$v_P, 18$	$v_P, 9$	$v_2, 21$	$v_2, 27$ $v_1, 27$	$v_4, 36$	$v_3, 39$	$v_5, 48$ $v_6, 48$

Prema vrhu v_1 smo mogli doći jedino iz vrha v_P.

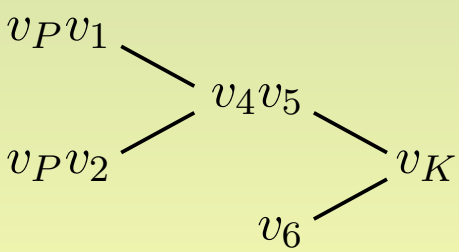


Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Napravimo tablicu svih mogućih oznaka za pojedine vrhove (one koje smo odabrali i one crvene koje nismo odabrali).

v_P	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_K
$-, 0$	$v_P, 18$	$v_P, 9$	$v_2, 21$	$v_2, 27$ $v_1, 27$	$v_4, 36$	$v_3, 39$	$v_5, 48$ $v_6, 48$

Prema vrhu v_2 smo mogli doći jedino iz vrha v_P.

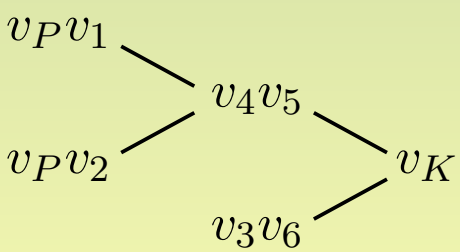


Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Napravimo tablicu svih mogućih oznaka za pojedine vrhove (one koje smo odabrali i one crvene koje nismo odabrali).

v_P	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_K
$-, 0$	$v_P, 18$	$v_P, 9$	$v_2, 21$	$v_2, 27$ $v_1, 27$	$v_4, 36$	$v_3, 39$	$v_5, 48$ $v_6, 48$

Prema vrhu v_6 smo mogli doći jedino iz vrha v_3.

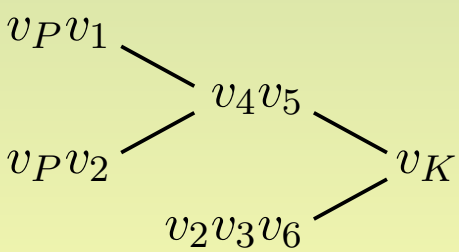


Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Napravimo tablicu svih mogućih oznaka za pojedine vrhove (one koje smo odabrali i one crvene koje nismo odabrali).

v_P	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_K
$-, 0$	$v_P, 18$	$v_P, 9$	$v_2, 21$	$v_2, 27$ $v_1, 27$	$v_4, 36$	$v_3, 39$	$v_5, 48$ $v_6, 48$

Prema vrhu v_3 smo mogli doći jedino iz vrha v_2.

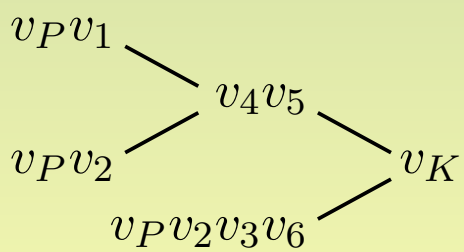


Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Napravimo tablicu svih mogućih oznaka za pojedine vrhove (one koje smo odabrali i one crvene koje nismo odabrali).

v_P	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_K
$-, 0$	$v_P, 18$	$v_P, 9$	$v_2, 21$	$v_2, 27$ $v_1, 27$	$v_4, 36$	$v_3, 39$	$v_5, 48$ $v_6, 48$

Prema vrhu v_2 smo mogli doći jedino iz vrha v_P.

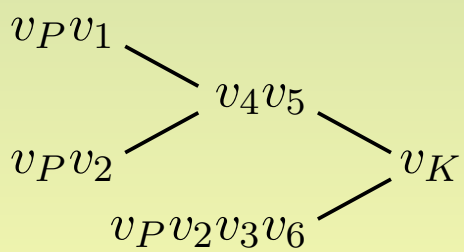


Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Napravimo tablicu svih mogućih oznaka za pojedine vrhove (one koje smo odabrali i one crvene koje nismo odabrali).

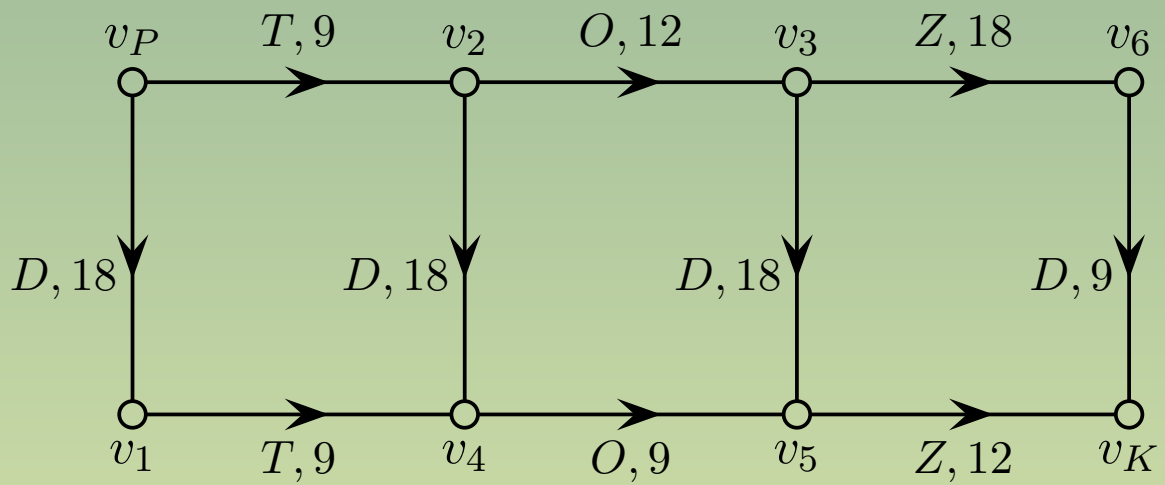
v_P	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_K
$-, 0$	$v_P, 18$	$v_P, 9$	$v_2, 21$	$v_2, 27$ $v_1, 27$	$v_4, 36$	$v_3, 39$	$v_5, 48$ $v_6, 48$

Dobivamo da postoje tri različita najkraća puta duljine 48 od v_P do v_K: $v_P v_1 v_4 v_5 v_K$, $v_P v_2 v_4 v_5 v_K$ i $v_P v_2 v_3 v_6 v_K$.



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Pogledamo li usmjerenu mrežu



možemo rekonstruirati redoslijed obavljanja poslova.

$$v_P v_1 v_4 v_5 v_K \to DTOZ$$
$$v_P v_2 v_4 v_5 v_K \to TDOZ$$
$$v_P v_2 v_3 v_6 v_K \to TOZD$$

Dakle, ukoliko učenik krene izvršavati zadatke nekim od gornja tri redoslijeda, trebat će mu najmanje vremena (48 minuta) da sve to napravi.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.30.

Da bi završio magisterij, student geologije mora napraviti terenski rad i laboratorijsku analizu, istražiti knjižnicu za literaturu, napraviti bazu relevantnih članaka i konačno, napisati magistarski rad. Pisanje rada ne može početi prije nego što su napravljeni svi prethodni poslovi, osim eventualno laboratorijske analize. Za pisanje rada potrebno je tri mjeseca ako su svi prethodni poslovi obavljeni, a inače pet mjeseci. Terenski rad, koji traje četiri mjeseca, mora prethoditi laboratorijskoj analizi i kreiranju baze relevantnih članaka. Istraživanje knjižnice za literaturu traje dva mjeseca. Laboratorijska analiza traje dva mjeseca ako se provodi nakon istraživanja knjižnice, a inače traje tri mjeseca. Kreiranje baze podataka relevantnih članaka traje jedan mjesec ako se radi nakon obavljenog istraživanja literature, a u protivnom traje četiri mjeseca. U kojem minimalnom vremenu student može napraviti svoj magisterij? Kojim redoslijedom treba obavljati poslove da bi magisterij napravio u što kraćem vremenu?

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.

Uvedimo najprije sljedeće oznake:

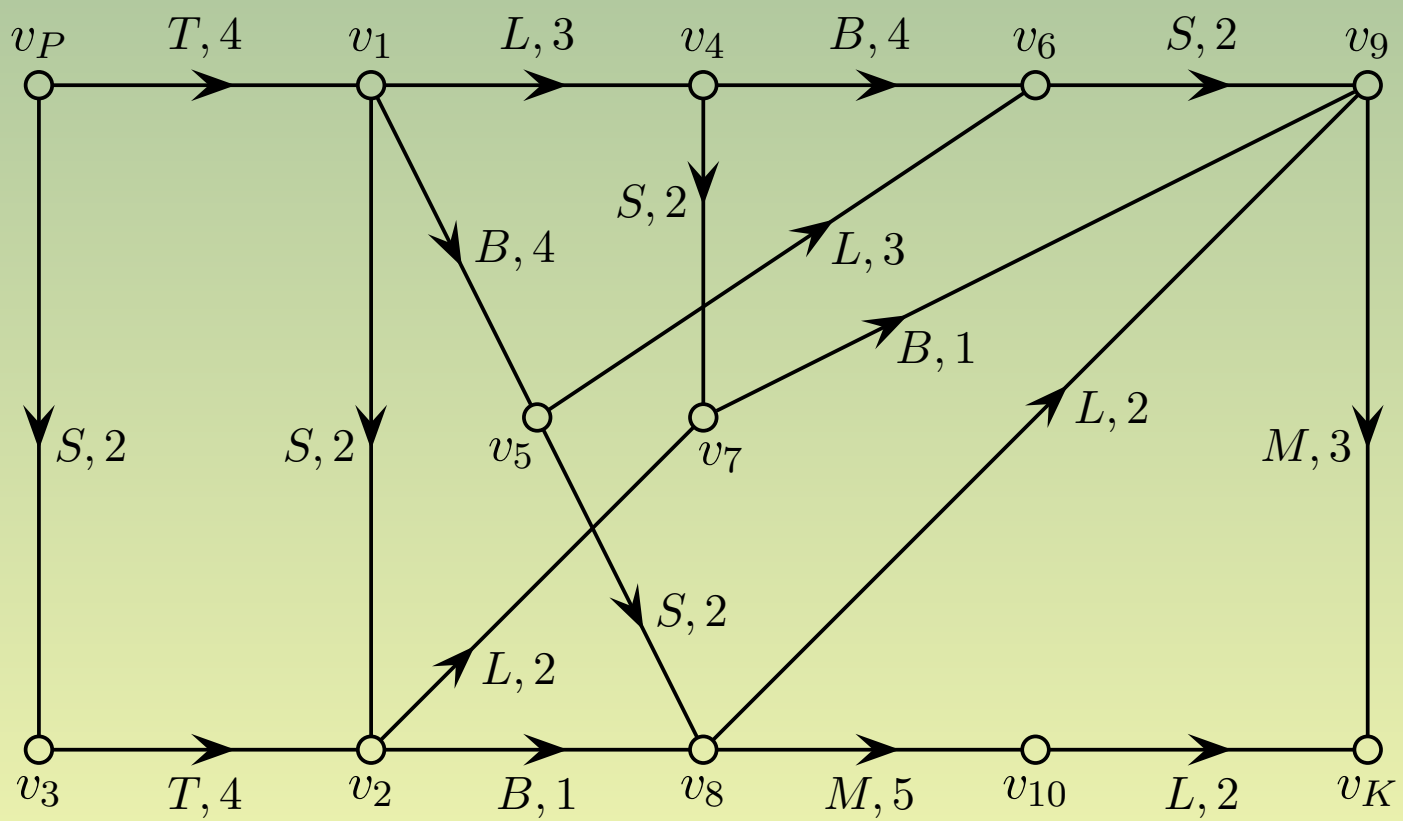
$$\text{terenski rad} \to T$$
$$\text{laboratorijska analiza} \to L$$
$$\text{istraživanje literature} \to S$$
$$\text{kreiranje baze članaka} \to B$$
$$\text{pisanje magisterija} \to M$$

Uz navedenja ograničenja i malo kombinatorike, dobivaju se mogući rasporedi obavljanja poslova:

$TLBSM$	$STLBM$	$TBSML$
$TLSBM$	$STBLM$	$TSBML$
$TBLSM$		$STBML$
$TBSLM$		
$TSLBM$		
$TSBLM$		

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Pripadna usmjerena mreža izgleda



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Pritom vrh v_P označava početak projekta, a vrh v_K kraj projekta. Naš zadatak je da pronađemo najkraći usmjereni put od vrha v_P do vrha v_K. Kako nas zanimaju sve moguće kombinacije izvršavanja poslova za koje projekt najkraće traje, zapravo trebamo pronaći sve moguće najkraće usmjerene putove od vrha v_P do vrha v_K. Stoga ćemo kao i u prethodnom zadatku upotrijebiti prvu verziju Dijkstrinog algoritma. Isto tako, ukoliko u nekom koraku neki vrh možemo označiti preko više različitih vrhova, tada ćemo jednu od tih mogućnosti odabrati, a ostale ćemo označiti crvenom bojom koja će nam sugerirati da smo i te mogućnosti mogli odabrati. Na kraju ćemo onda lako vraćanjem unatrag od vrha v_K rekonstruirati sve najkraće putove od v_P do v_K.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

$1:$ $\boxed{v_P(-,0)}$

$2:$ $v_1(v_P,4),$ $\boxed{v_3(v_P,2)}$

$3:$ $\boxed{v_1(v_P,4)},$ $v_2(v_3,6)$

$4:$ $\boxed{v_2(v_3,6)},$ $v_4(v_1,7),$ $v_5(v_1,8),$ $v_2(v_1,6)$

$5:$ $\boxed{v_4(v_1,7)},$ $v_5(v_1,8),$ $v_7(v_2,8),$ $\boxed{v_8(v_2,7)}$

$6:$ $\boxed{v_5(v_1,8)},$ $\boxed{v_7(v_2,8)},$ $v_6(v_4,11),$ $v_7(v_4,9),$

$v_9(v_8,9),$ $v_{10}(v_8,12)$

$7:$ $v_6(v_4,11),$ $\boxed{v_9(v_8,9)},$ $v_{10}(v_8,12),$ $v_6(v_5,11),$ $v_9(v_7,9)$

$8:$ $\boxed{v_6(v_4,11)},$ $v_{10}(v_8,12),$ $v_6(v_5,11),$ $v_K(v_9,12)$

$9:$ $\boxed{v_{10}(v_8,12)},$ $\boxed{v_K(v_9,12)}$

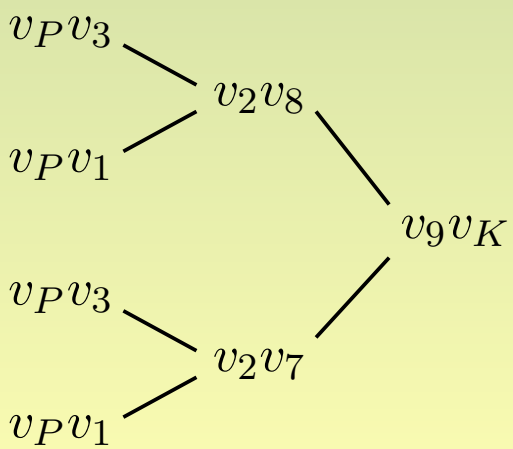
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Napravimo tablicu svih mogućih oznaka za pojedine vrhove (one koje smo odabrali i one crvene koje nismo odabrali).

v_P	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
$-, 0$	$v_P, 4$	$v_3, 6$ $v_1, 6$	$v_P, 2$	$v_1, 7$	$v_1, 8$

v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_K
$v_4, 11$ $v_5, 11$	$v_2, 8$	$v_2, 7$	$v_8, 9$ $v_7, 9$	$v_8, 12$	$v_9, 12$

Kao i u prethodnom zadatku, pomoću te tablice rekonstruiramo sve najkraće putove od v_P do v_K.



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rekonstrukcijom najkraćih putova dobivamo optimalni redoslijed obavljanja poslova.

$$v_P v_3 v_2 v_8 v_9 v_K \to STBLM$$
$$v_P v_1 v_2 v_8 v_9 v_K \to TSBLM$$
$$v_P v_3 v_2 v_7 v_9 v_K \to STLBM$$
$$v_P v_1 v_2 v_7 v_9 v_K \to TSLBM$$

Ako će student obavljati poslove u nekom od gornja četiri redoslijeda, tada će njegov magisterij biti završen u najkraćem mogućem roku, a taj najkraći mogući rok je 12 mjeseci jer smo dobili $v_K(v_9, 12)$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Problem rasporeda – 2. tip

Problem rasporeda, 2. tip

Cilj je završiti određeni projekt u što je moguće kraćem vremenu. Da bi se projekt ostvario, potrebno je napraviti neke zadatke (poslove). Moguće je da se više poslova može obavljati istovremeno (ako ima više ljudi), a vrijeme trajanja svakog posla ne ovisi o drugim poslovima. Ponekad je redoslijed obavljanja pojedinih poslova bitan, a ponekad nije. Pitanje je kako rasporediti redoslijed obavljanja poslova tako da projekt bude završen u što je moguće kraćem vremenu, a da pritom poštujemo eventualni unaprijed određeni redoslijed obavljanja poslova i imamo na umu da se neki poslovi mogu obavljati istovremeno.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Ovaj problem se također može modelirati pomoću usmjerenih mreža. Kao i u 1. tipu rasporeda, tako i ovdje lukovi reprezentiraju zadatke koje treba obaviti i imaju težine koje predstavljaju vrijeme potrebno za ostvarenje nekog zadatka, a vrhovi predstavljaju etape u cjelokupnom procesu ostvarenja projekta. Za razliku od 1. tipa rasporeda, ovdje se svakom zadatku na samo jednom mjestu u usmjerenoj mreži pridružuje luk baš zato jer obavljeni poslovi ne utječu na vrijeme izvršavanja još neobavljenih poslova, dok se u 1. tipu rasporeda to moglo dogoditi. U 1. tipu rasporeda se nije moglo više poslova istovremeno obavljati, dok se ovdje može. U ovakvom načinu modeliranja ponekad na nekim mjestima treba staviti i lukove težine 0 između pojedinih vrhova kako bismo povezali sve etape u cijelom projektu, što ćemo vidjeti kasnije na primjerima. Ti lukovi ne označavaju nikakve aktivnosti.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

U ovakvoj situaciji zapravo želimo pronaći najdulji put, tzv. **kritični put**, od vrha koji predstavlja početak projekta do vrha koji predstavlja završetak projekta. Taj put nam daje najkraće vrijeme završetka projekta. Za pronalaženje takvog puta treba modificirati prvu verziju Dijkstrinog algoritma na dva mjesta:

i. Niti jedan vrh ne dobiva oznaku tako dugo dok nisu označeni svi njegovi preduvjeti.

ii. U svakom koraku oznaku dobiva onaj vrh koji ima najveću drugu koordinatu uz pretpostavku da su već označeni svi njegovi preduvjeti. Ukoliko nije tako, tada se mora označiti njegov preduvjet, usprkos tome što ima manju drugu koordinatu.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Neka je $V(v)$ druga koordinata oznake vrha v dobivena modificiranim Dijkstrinim algoritmom. Za vrh p koji predstavlja početak projekta je tada $V(p) = 0$, a za svaki drugi vrh v u pripadnoj usmjerenoj mreži vrijedi rekurzivna relacija

$$V(v) = \max_u \{V(u) + w(u, v) : (u, v) \text{ je luk}\}.$$

Za svaki vrh v, neka je $K(v)$ krajnje vrijeme kada taj događaj treba nastupiti da bi se projekt završio u zadanom roku. Ovdje imamo rekurziju unatrag. Ako je t vrijeme trajanja projekta, tada za vrh z koji predstavlja završetak projekta vrijedi $K(z) = t$. Za svaki drugi vrh v je

$$K(v) = \min_x \{K(x) - w(v, x) : (v, x) \text{ je luk}\}.$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Za aktivnost uv definiramo **float time** $F(u, v)$ kao

$$F(u, v) = K(v) - V(u) - w(u, v),$$

što znači da aktivnost uv može početi bilo kada u vremenu od $V(u)$ do $V(u) + F(u, v)$ bez da to utječe na završetak projekta. Drugim riječima, aktivnost uv se može otezati još $F(u, v)$ vremenskih trenutaka dulje od planiranog, a da ipak projekt bude završen na vrijeme. Aktivnost uv za koju je $F(u, v) = 0$ se zove **kritična aktivnost** za projekt. Ona se ne smije otezati jer inače projekt neće biti završen u najkraćem mogućem roku. U svakoj mreži projekata postoji barem jedan put koji se sastoji od kritičnih aktivnosti i zove se **kritični put**.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.31.

U projektu su zadane aktivnosti a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 i a_6. Vremena (izražena u tjednima) potrebna da se te aktivnosti obave su t_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$, i dana su u donjoj tablici. U tablici su dani preduvjeti p_i za pojedine aktivnosti. Aktivnosti koje nisu jedna drugoj preduvjeti mogu se obavljati istovremeno.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
t_i	2	4	6	5	4	3
p_i		a_1	a_1	a_3	a_2	a_5
p_i					a_4	

a. *Prikažite projekt u obliku usmjerene mreže.*

b. *Koliko je minimalno trajanje projekta?*

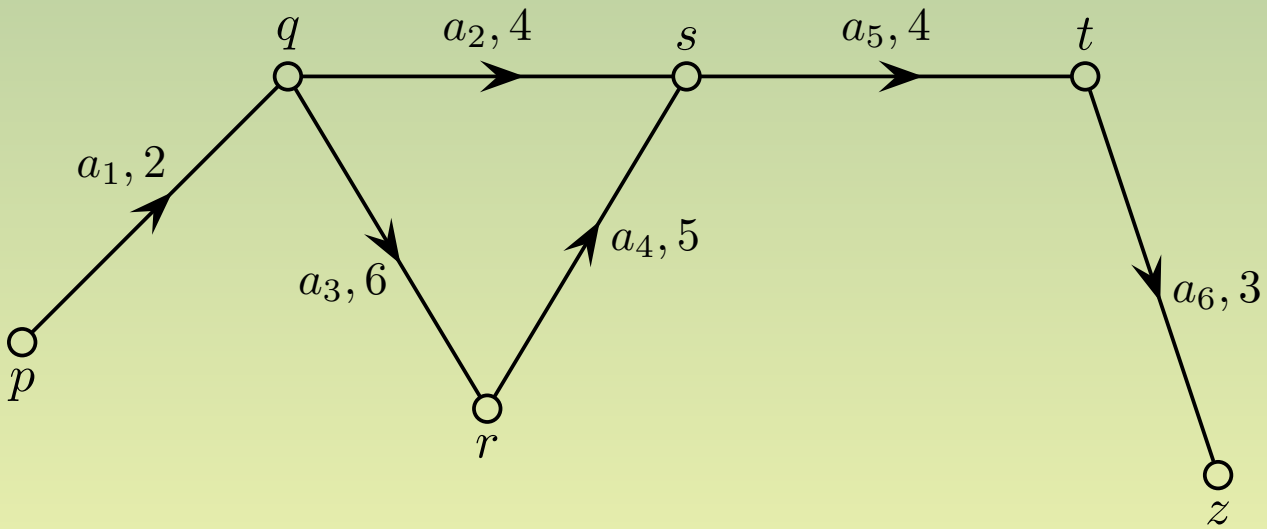
c. *Odredite kritični put u toj mreži.*

d. *Odredite koje se aktivnosti mogu odugovlačiti, a da ipak projekt bude završen na vrijeme.*

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.

- Promatrani projekt u obliku usmjerene mreže izgleda



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

- Primijenit ćemo modificirani Dijkstrin algoritam da bismo pronašli minimalno trajanje projekta i kritični put. Dakle, tražimo najdulji put od vrha p (početka projekta) do vrha z (završetka projekta).

$1: \boxed{p(-,0)}$

$2: \boxed{q(p,2)}$

$3: s(q,6), \boxed{r(q,8)}$

$4: s(q,6), \boxed{s(r,13)}$

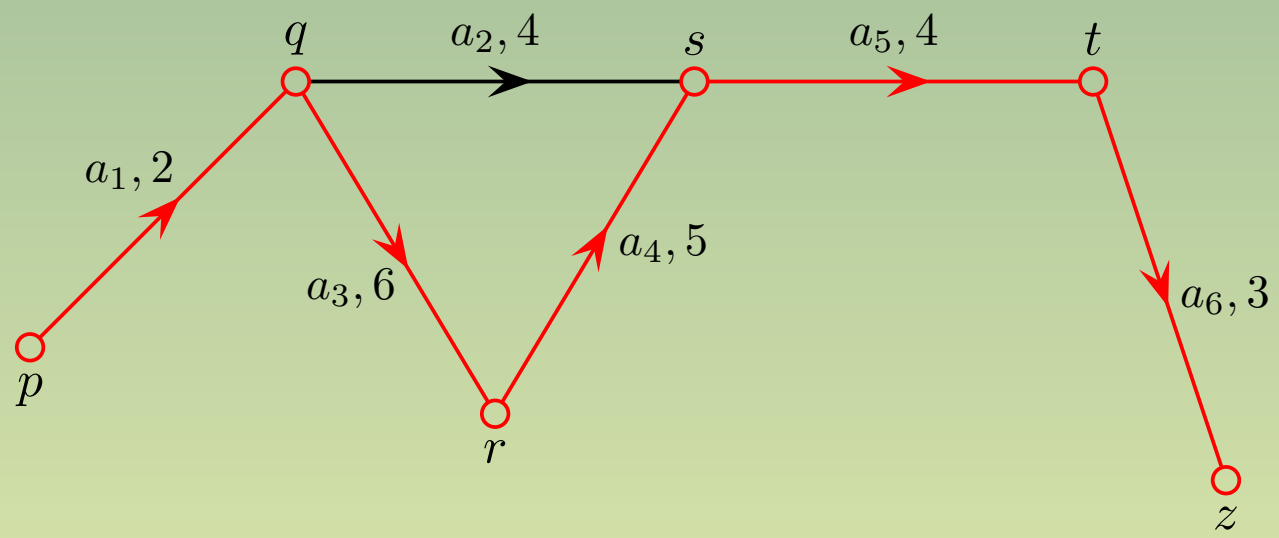
$5: \boxed{t(s,17)}$

$6: \boxed{z(t,20)}$

Dobivamo da je minimalno trajanje projekta 20 tjedana.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

- Pomoću prvih koordinata vrhova možemo rekonstruirati i kritični put, a on je $pqrstz$.



Aktivnosti $a_1 = pq$, $a_3 = qr$, $a_4 = rs$, $a_5 = st$ i $a_6 = tz$ se nalaze na kritičnom putu i one se ne smiju otezati ukoliko želimo projekt završiti za 20 tjedana. Aktivnost a_2 nije na kritičnom putu pa nju smijemo otezati. Jasno, pitanje je koliko dugo smijemo aktivnost a_2 otezati, a da usprkos tome još uvijek završimo projekt u minimalnom mogućem vremenu (za 20 tjedana).

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

	p	q	r	s	t	z
$V(v)$	0	2	8	13	17	20
$K(v)$	0	2	8	13	17	20

Za svaku aktivnost računamo njezin float time.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

	p	q	r	s	t	z
$V(v)$	0	2	8	13	17	20
$K(v)$	0	2	8	13	17	20

Za svaku aktivnost računamo njezin float time.

Za aktivnost $a_1 = pq$ imamo

$$F(p,q) = K(q) - V(p) - w(pq) = 2 - 0 - 2 = 0,$$

što znači da aktivnost a_1 ne smijemo otezati ukoliko želimo projekt završiti na vrijeme. Aktivnost a_1 mora biti završena u dva tjedna.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

	p	q	r	s	t	z
$V(v)$	0	2	8	13	17	20
$K(v)$	0	2	8	13	17	20

Za svaku aktivnost računamo njezin float time.

Za aktivnost $a_3 = qr$ imamo

$$F(q,r) = K(r) - V(q) - w(qr) = 8 - 2 - 6 = 0,$$

što znači da aktivnost a_3 ne smijemo otezati ukoliko želimo projekt završiti na vrijeme. Aktivnost a_3 mora biti završena u šest tjedana.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

	p	q	r	s	t	z
$V(v)$	0	2	8	13	17	20
$K(v)$	0	2	8	13	17	20

Za svaku aktivnost računamo njezin float time.

Za aktivnost $a_4 = rs$ imamo

$$F(r,s) = K(s) - V(r) - w(rs) = 13 - 8 - 5 = 0,$$

što znači da aktivnost a_4 ne smijemo otezati ukoliko želimo projekt završiti na vrijeme. Aktivnost a_4 mora biti završena u pet tjedana.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

	p	q	r	s	t	z
$V(v)$	0	2	8	13	17	20
$K(v)$	0	2	8	13	17	20

Za svaku aktivnost računamo njezin float time.

Za aktivnost $a_5 = st$ imamo

$$F(s,t) = K(t) - V(s) - w(st) = 17 - 13 - 4 = 0,$$

što znači da aktivnost a_5 ne smijemo otezati ukoliko želimo projekt završiti na vrijeme. Aktivnost a_5 mora biti završena u četiri tjedna.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

	p	q	r	s	t	z
$V(v)$	0	2	8	13	17	20
$K(v)$	0	2	8	13	17	20

Za svaku aktivnost računamo njezin float time.

Za aktivnost $a_6 = tz$ imamo

$$F(t,z) = K(z) - V(t) - w(tz) = 20 - 17 - 3 = 0,$$

što znači da aktivnost a_6 ne smijemo otezati ukoliko želimo projekt završiti na vrijeme. Aktivnost a_6 mora biti završena u tri tjedna.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

d

	p	q	r	s	t	z
$V(v)$	0	2	8	13	17	20
$K(v)$	0	2	8	13	17	20

Za svaku aktivnost računamo njezin float time.

Za aktivnost $a_2 = qs$ imamo

$$F(q,s) = K(s) - V(q) - w(qs) = 13 - 2 - 4 = 7,$$

što znači da aktivnost a_2 smije trajati čak 7 tjedana dulje od planiranog. Dakle, po planu je bilo da aktivnost a_2 traje 4 tjedna, ali ako bi trajala i 7 tjedana dulje, dakle 11 tjedana, projekt bi još uvijek bio završen na vrijeme, tj. za 20 tjedana.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.32.

Jedan bračni par planira pozvati prijatelje na večeru. Poslove koje treba obaviti prije nego stignu gosti i vremena (u satima) koja ti poslovi zahtijevaju dani su u sljedećoj tablici (pored svakog posla je i kratka oznaka za taj posao).

čišćenje kuće	D	3
preuređenje kuće	V	2
postavljanje stola	T	1
nabavka vina	W	4
kupovina ribe	F	6
ubiranje povrća	P	2
kuhanje	C	4
doček gostiju	G	2

Riba i vino moraju biti nabavljeni prije postavljanja stola. Kuhanje može početi tek kad su riba i povrće spremni, a vino se

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

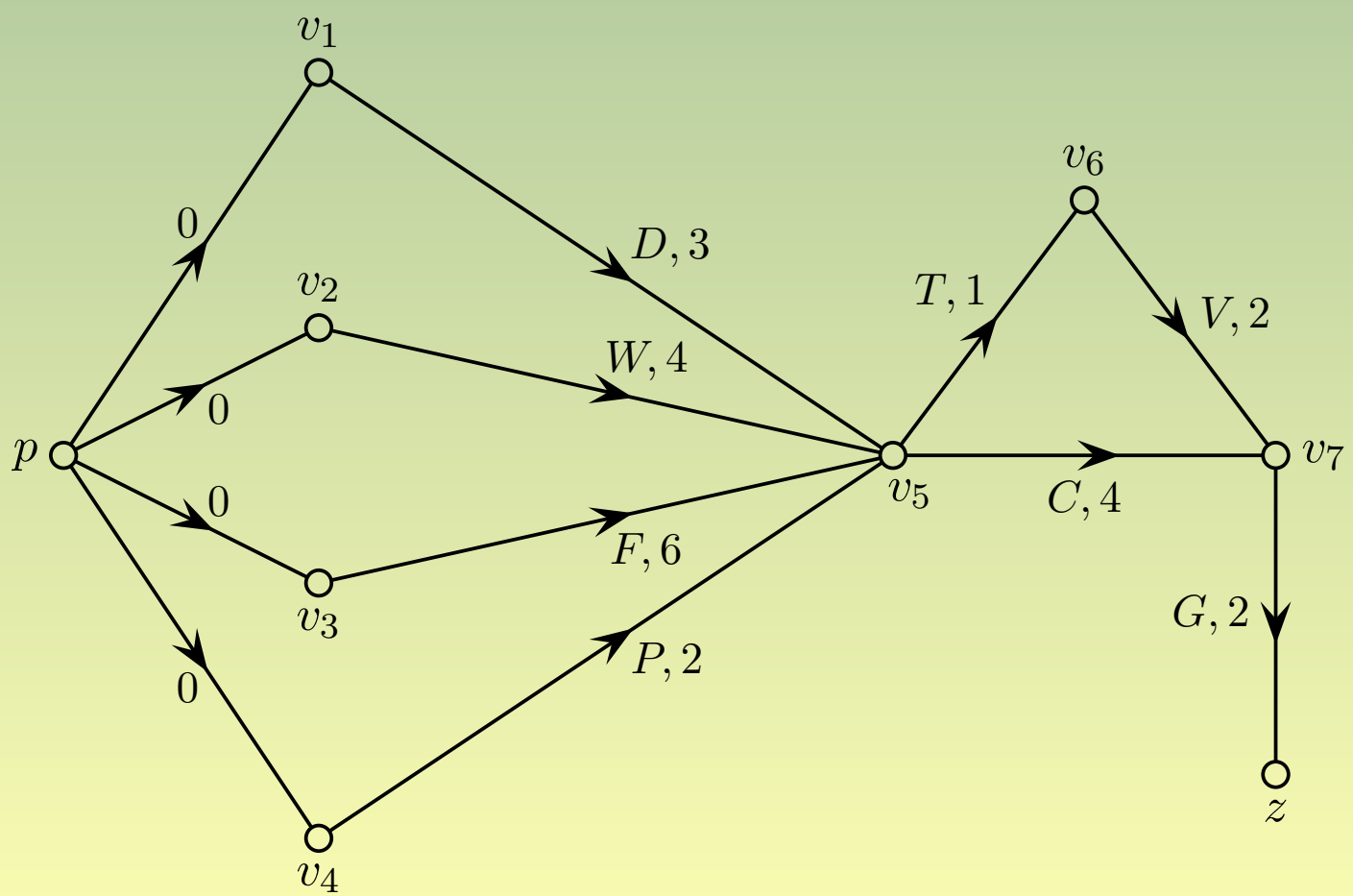
ne koristi kod kuhanja hrane. Stol mora biti očišćen prije postavljanja. Preuređenje kuće se ne obavlja prije nego što je stol postavljen. Na sreću, bračni par ima sina i kćer koji uvijek rado pomognu svojim roditeljima, tako da se mogu četiri posla istovremeno obavljati. Nakon što su svi poslovi obavljeni, svi dočekuju navečer goste.

a. *U kojem najkraćem vremenu mogu biti obavljeni svi navedeni poslovi? Pronađite kritični put.*
b. *Koje od aktivnosti se mogu odugovlačiti, a koje se ne smiju da bi svi poslovi bili obavljeni u najkraćem mogućem vremenu?*

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.

- Promatrani projekt u obliku usmjerene mreže izgleda (može slika i drukčije izgledati)



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Da bismo pronašli minimalno trajanje svih poslova, primijenjujemo modificirani Dijkstrin algoritam. Pazite, u četvrtom koraku nije označen vrh v_7, iako on ima najveću drugu koordinatu jer u tom trenutku nije označen njegov preduvjet vrh v_6. Zbog toga je u četvrtom koraku označen vrh v_6, usprkos tome što on ima manju drugu koordinatu.

$1: \boxed{p(-,0)}$

$2: \boxed{v_1(p,0)}, \boxed{v_2(p,0)}, \boxed{v_3(p,0)}, \boxed{v_4(p,0)}$

$3: v_5(v_1,3),\ v_5(v_2,4),\ \boxed{v_5(v_3,6)},\ v_5(v_4,2)$

$4: \boxed{v_6(v_5,7)},\ v_7(v_5,10)$

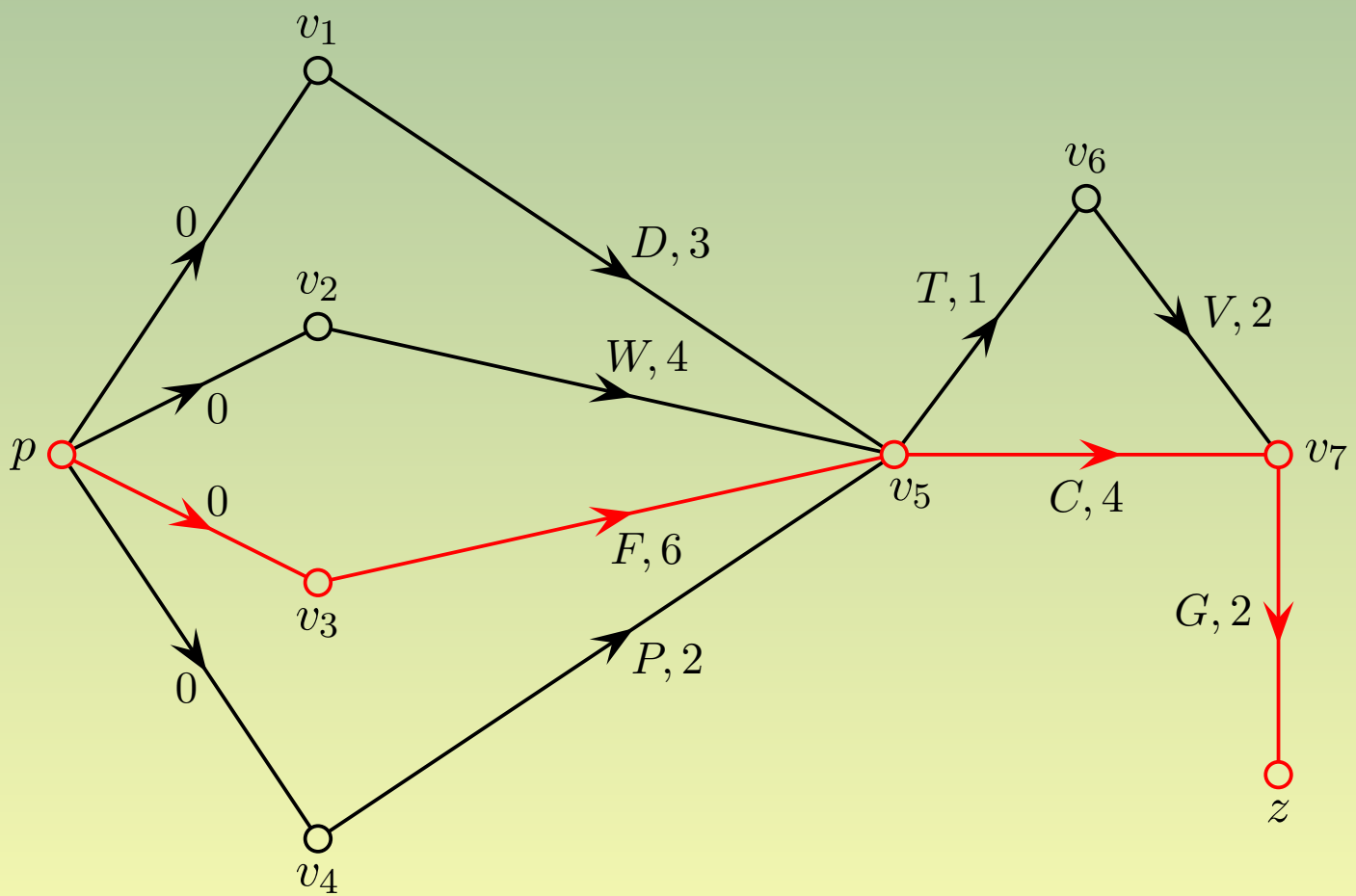
$5: \boxed{v_7(v_5,10)},\ v_7(v_6,9)$

$6: \boxed{z(v_7,12)}$

Dakle, svi poslovi mogu biti obavljeni najbrže za 12 sati.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Pomoću prvih koordinata u oznakama vrhova dobivamo da je kritični put $pv_3v_5v_7z$.



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

	p	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	z
$V(v)$	0	0	0	0	0	6	7	10	12
$K(v)$	0	3	2	0	4	6	8	10	12

Kako su aktivnosti F, C i G na kritičnom putu, one se ne smiju odugovlačiti ukoliko želimo da sve bude gotovo u najkraćem vremenskom roku, tj. za 12 sati. Za ostale aktivnosti izračunamo njihove float time.

$$F(v_1, v_5) = 6 - 0 - 3 = 3$$
$$F(v_2, v_5) = 6 - 0 - 4 = 2$$
$$F(v_4, v_5) = 6 - 0 - 2 = 4$$
$$F(v_5, v_6) = 8 - 6 - 1 = 1$$
$$F(v_6, v_7) = 10 - 7 - 2 = 1$$

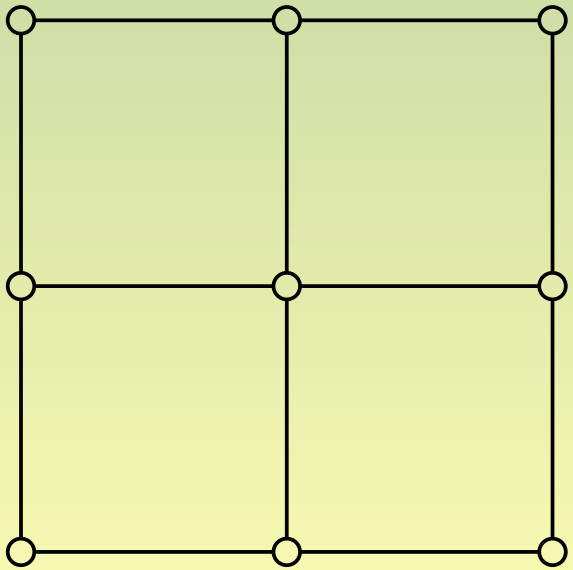
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Aktivnost D smije trajati 3 sata dulje, aktivnost W još 2 sata dulje i aktivnost P još 4 sata dulje. Poanta je da se sve tri aktivnosti D, W i P smiju oduljiti svaka najviše za navedeni broj sati. Međutim, kod aktivnosti T i V je drukčija situacija. Naime, svaka od njih smije trajati 1 sat dulje, ali samo jedna od njih jer se one obavljaju jedna za drugom i ako bismo svaku od njih oduljili 1 sat, tada bi i čitav projekt trajao 1 sat dulje. Možemo još reći da aktivnosti T i V obje smiju trajati najviše 1 sat dulje. Na primjer, može svaka od njih trajati pola sata dulje; ili jedna 20 minuta dulje, a druga 40 minuta dulje ili...

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

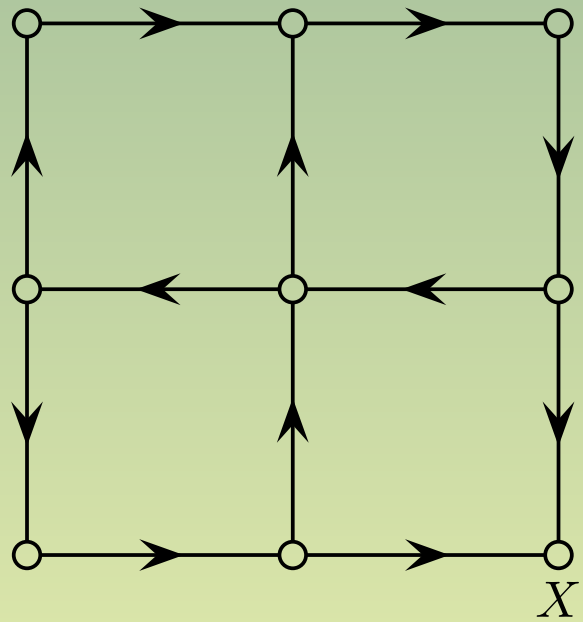
Problem jednosmjernih ulica

Postavlja se pitanje kako u gradu organizirati promet jednosmjernim ulicama. Na primjer, pretpostavimo da na donjoj slici bridovi predstavljaju ulice, a vrhovi raskrižja. Pitamo se kako te ulice napraviti jednosmjernima, a da se sa svakog mjesta u gradu (vrha) može doći u bilo koje drugo mjesto i da li je uopće moguće nešto takvog realizirati.



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Sigurno ne želimo jednosmjerne ulice oblika



jer ako iz nekog mjesta u gradu dođemo u mjesto X, tada više mjesto X ne možemo napustiti ukoliko želimo poštivati jednosmjerne ulice i biti savjesni vozači. Što bismo zapravo htjeli?

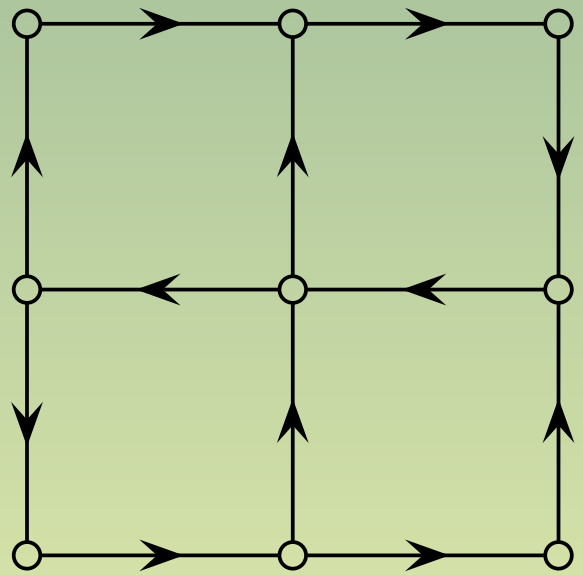
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Sigurno ne želimo situaciju sa prethodne slike. Zapravo želimo organizirati promet jednosmjernim ulicama tako da iz svakog mjesta možemo doći u bilo koje drugo mjesto. Na primjer, ako su X i Y neka mjesta u gradu, tada želimo da je moguće iz mjesta X doći u mjesto Y, ali isto tako želimo da je iz mjesta Y moguće doći u mjesto X, možda ne baš istim ulicama, nego nekim drugim ulicama, naravno poštujući pritom zadane smjerove ulica u kojima je dozvoljeno voziti.

U terminima teorije grafova problem se svodi na to da na zadanom jednostavnom grafu pronađemo orijentaciju s obzirom na koju će dobiveni digraf biti dipovezan. Takvu orijentaciju tada zovemo **jaka orijentacija** zadanog jednostavnog grafa.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Na primjer,

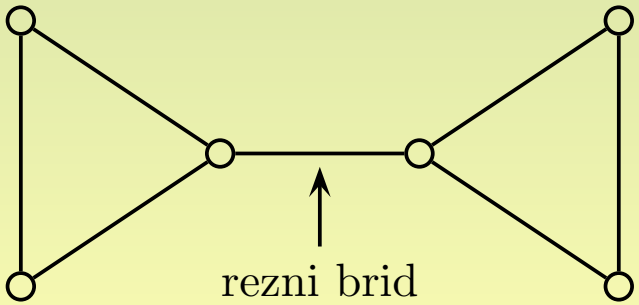


je jedna jaka orijentacija na prethodno promatranom jednostavnom grafu. To je jednosmjerni promet u gradu kakvog sigurno želimo, iz svakog mjesta možemo doći u bilo koje drugo mjesto poštivajući jednosmjerne ulice.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Problem koji želimo riješiti je sljedeći. Kako pronaći jednu jaku orijentaciju na zadanom grafu ukoliko ona postoji? Kako saznati da li neki graf dopušta na sebi jaku orijentaciju? Postoji li algoritam koji bi pronalazio jaku orijentaciju na grafu? Na ova pitanja ćemo korak po korak ovdje odgovoriti.

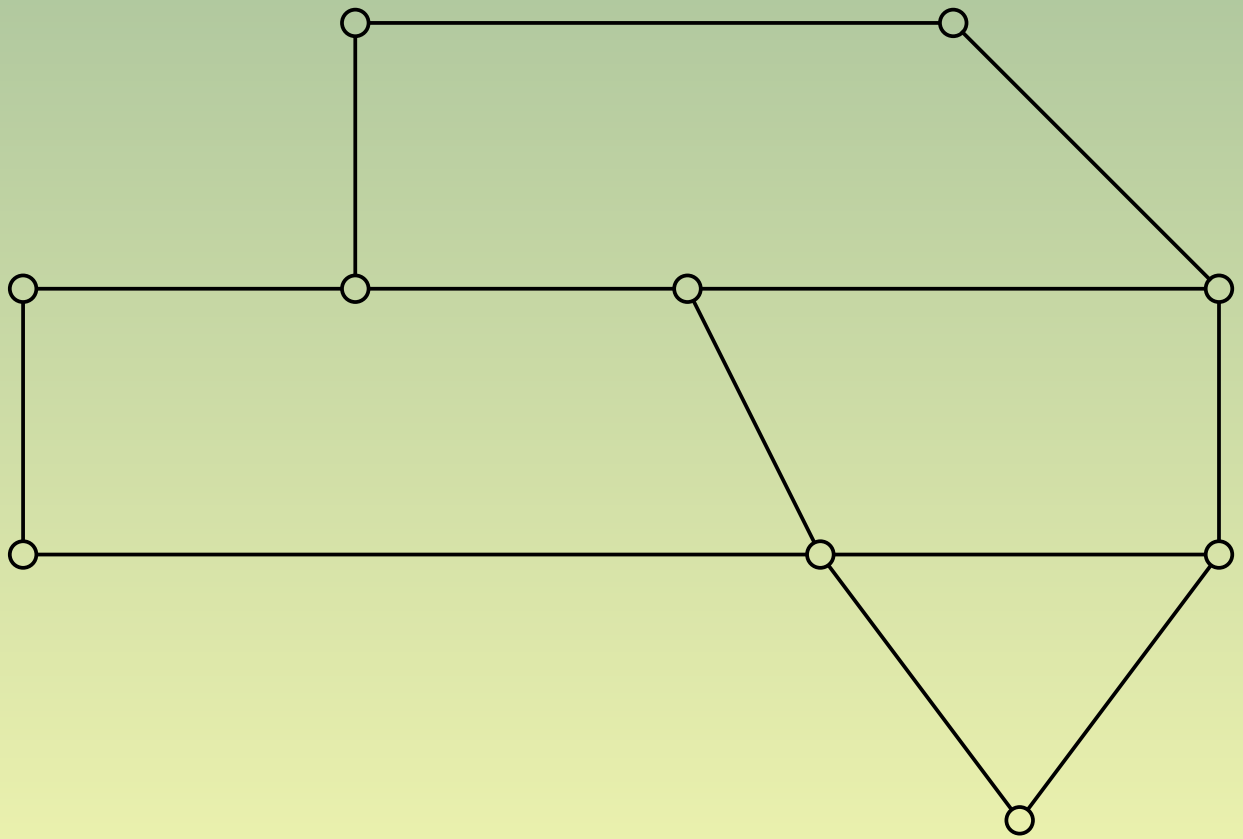
Možemo odati tajnu, graf će dopuštati jaku orijentaciju jedino ako nema reznih bridova. To je nužan i dovoljan uvjet kojeg ćemo kasnije dokazati. Na primjer, donji graf ima jedan rezni brid pa on ne dopušta na sebi jaku orijentaciju, što nam je i intuitivno jasno jer kako god orijentirali rezni brid, dobiveni digraf neće biti dipovezan.



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

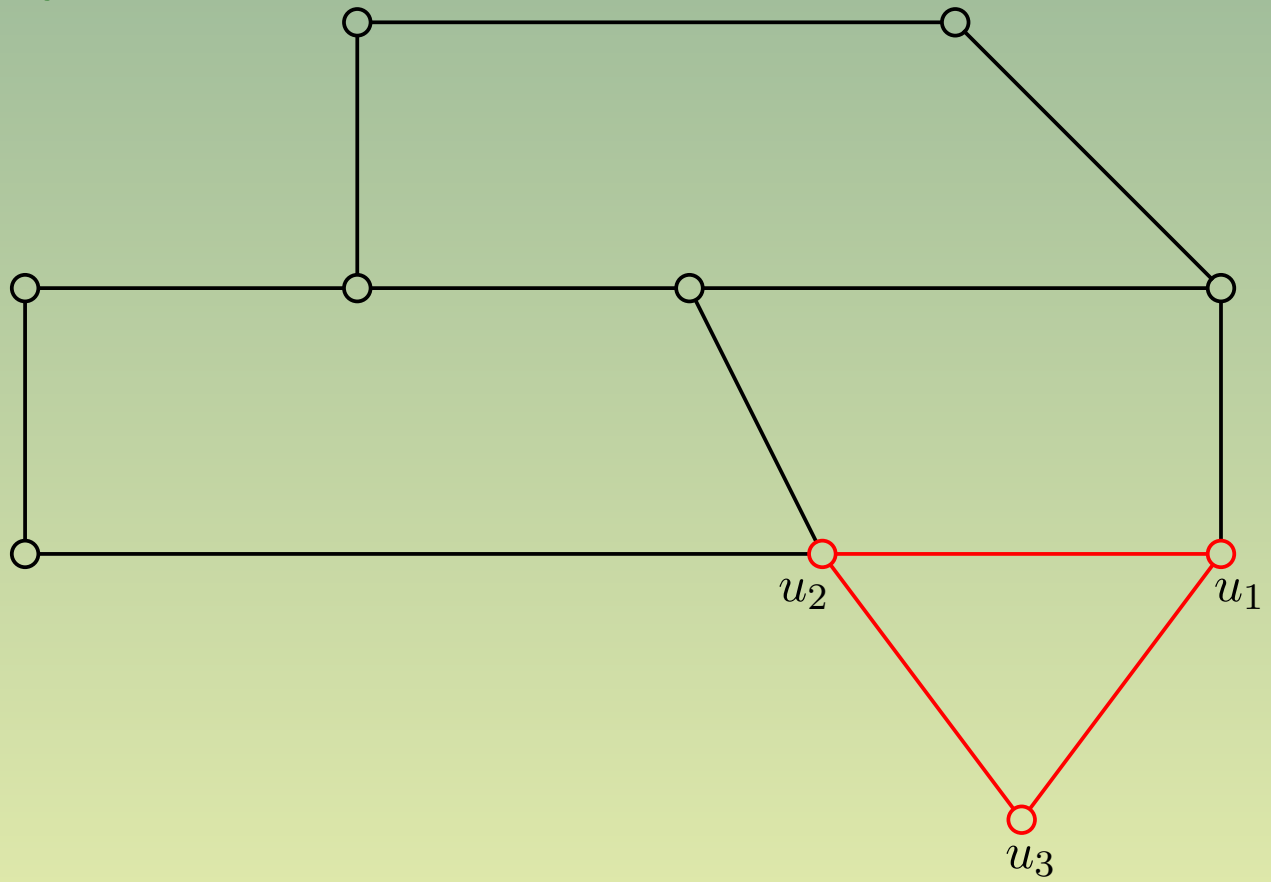
Primjer 9.33.

Pronađite jaku orijentaciju na grafu



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

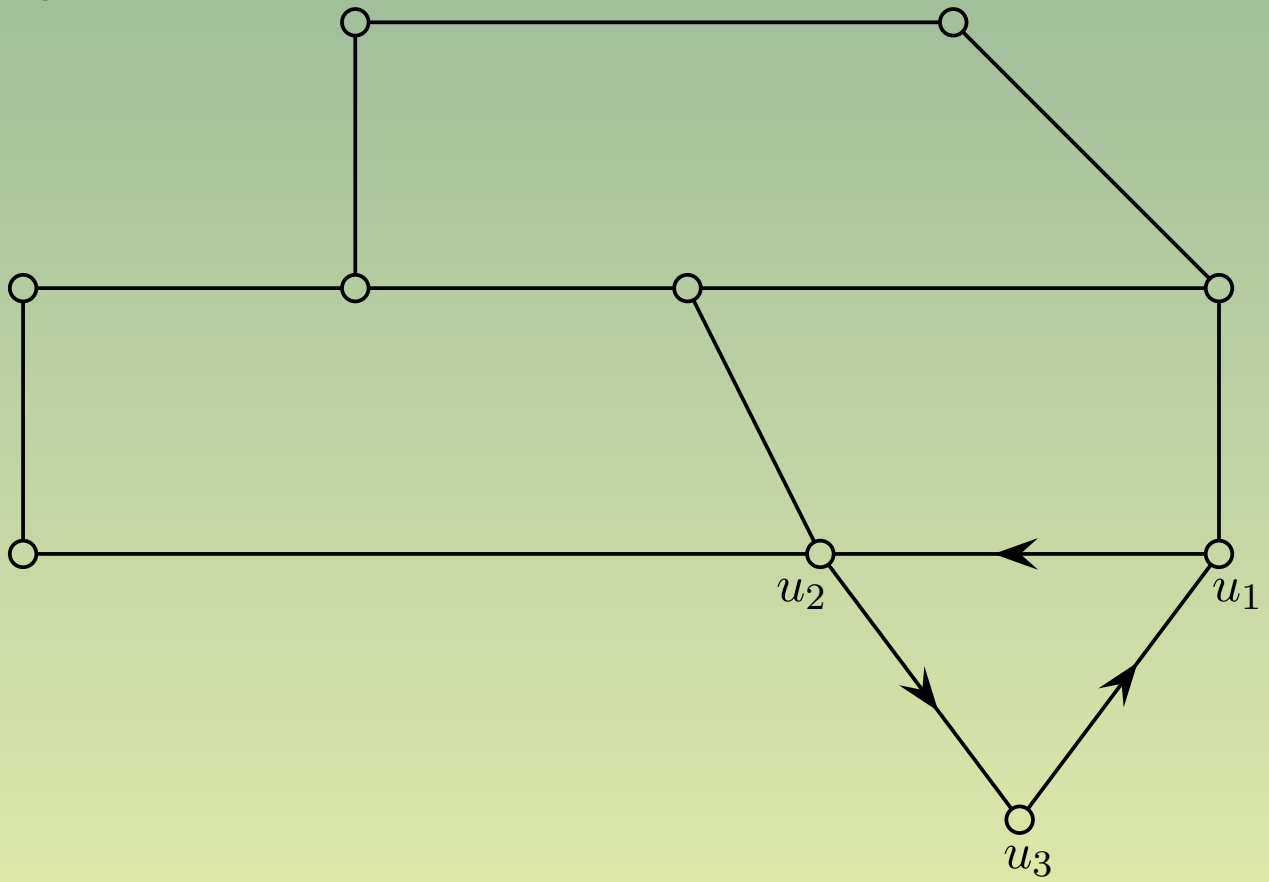
Rješenje.



Odaberemo jedan ciklus, npr. ciklus $u_1u_2u_3u_1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

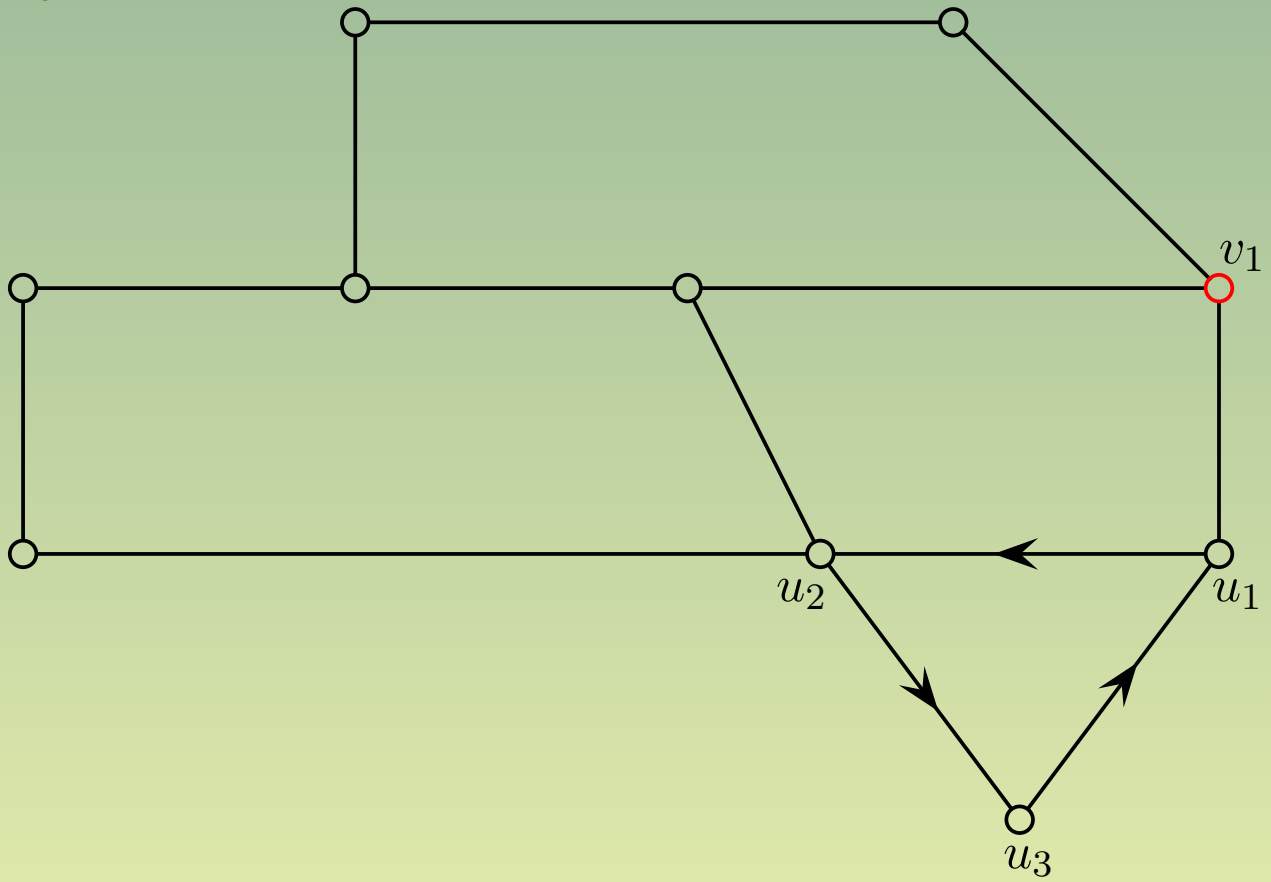
Rješenje.



Odaberemo jedan ciklus, npr. ciklus $u_1u_2u_3u_1$. Orijentiramo bridove tog ciklusa kao $u_1 \to u_2 \to u_3 \to u_1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

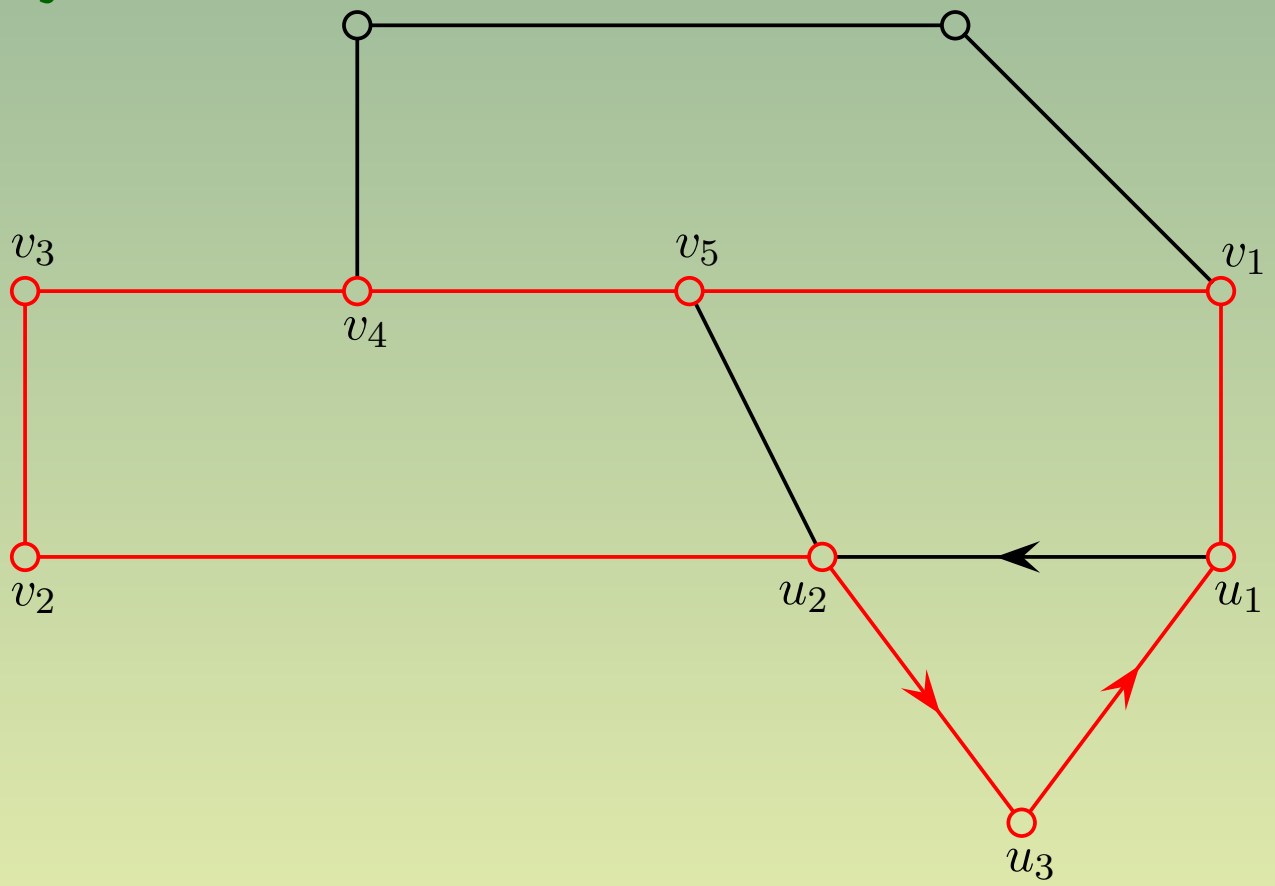
Rješenje.



Odaberemo vrh koji je susjedan s nekim od vrhova u_1, u_2 ili u_3 i koji ne pripada prethodno odabranom ciklusu. Na primjer, vrh v_1 koji je susjedan s vrhom u_1.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

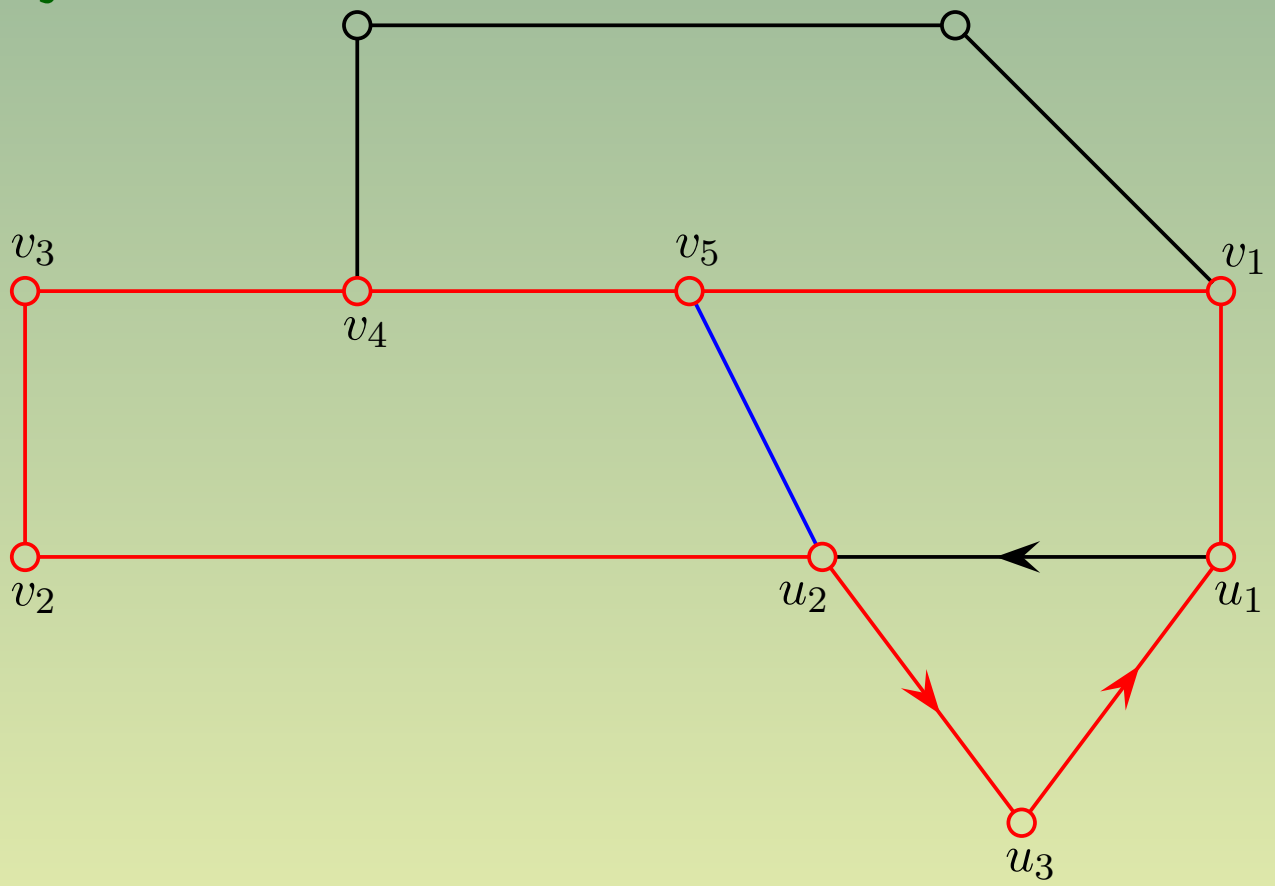
Rješenje.



Tražimo ciklus koji sadrži brid v_1u_1, npr. ciklus $v_1u_1u_3u_2v_2v_3v_4v_5v_1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

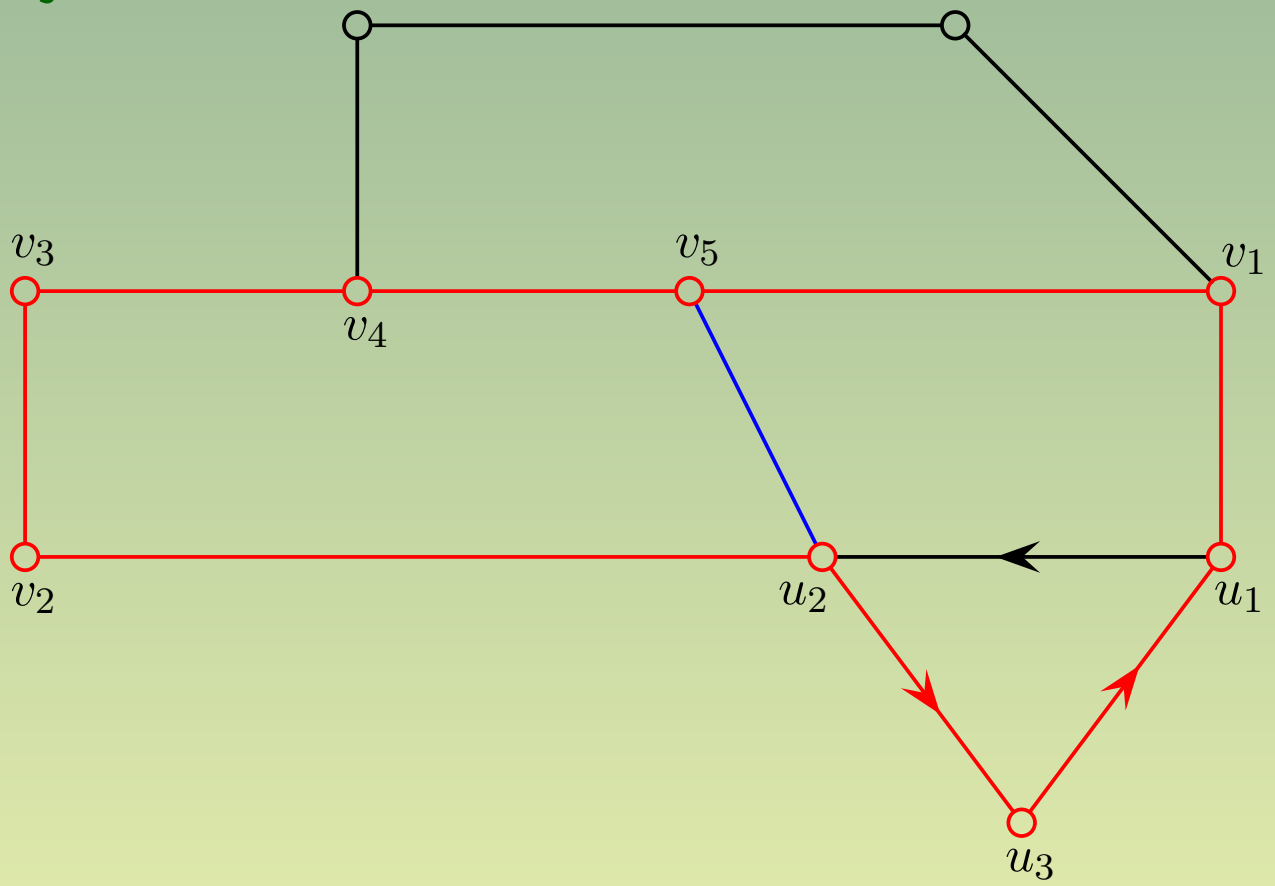
Rješenje.



Tražimo ciklus koji sadrži brid v_1u_1, npr. ciklus $v_1u_1u_3u_2v_2v_3v_4v_5v_1$. Ovdje su se još pojavili bridovi koji imaju oba kraja u odabranom ciklusu i nisu još orijentirani, a nisu dio tog ciklusa. To je ovdje jedino brid u_2v_5 (brid u_1u_2 je već orijentiran).

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

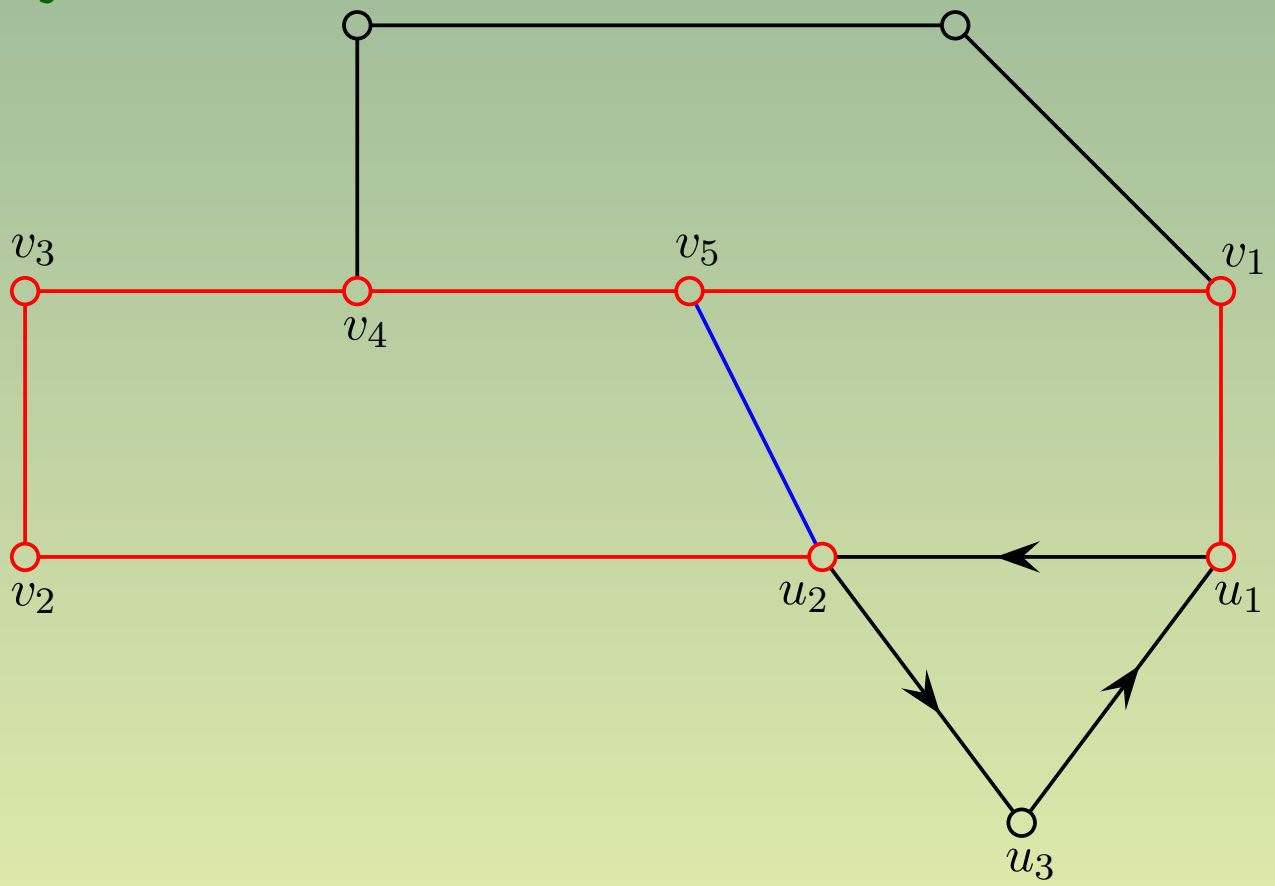
Rješenje.



Bridove ciklusa $v_1u_1u_3u_2v_2v_3v_4v_5v_1$ orijentiramo kao i prije na način $v_1 \to u_1 \to u_3 \to u_2 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_5 \to v_1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

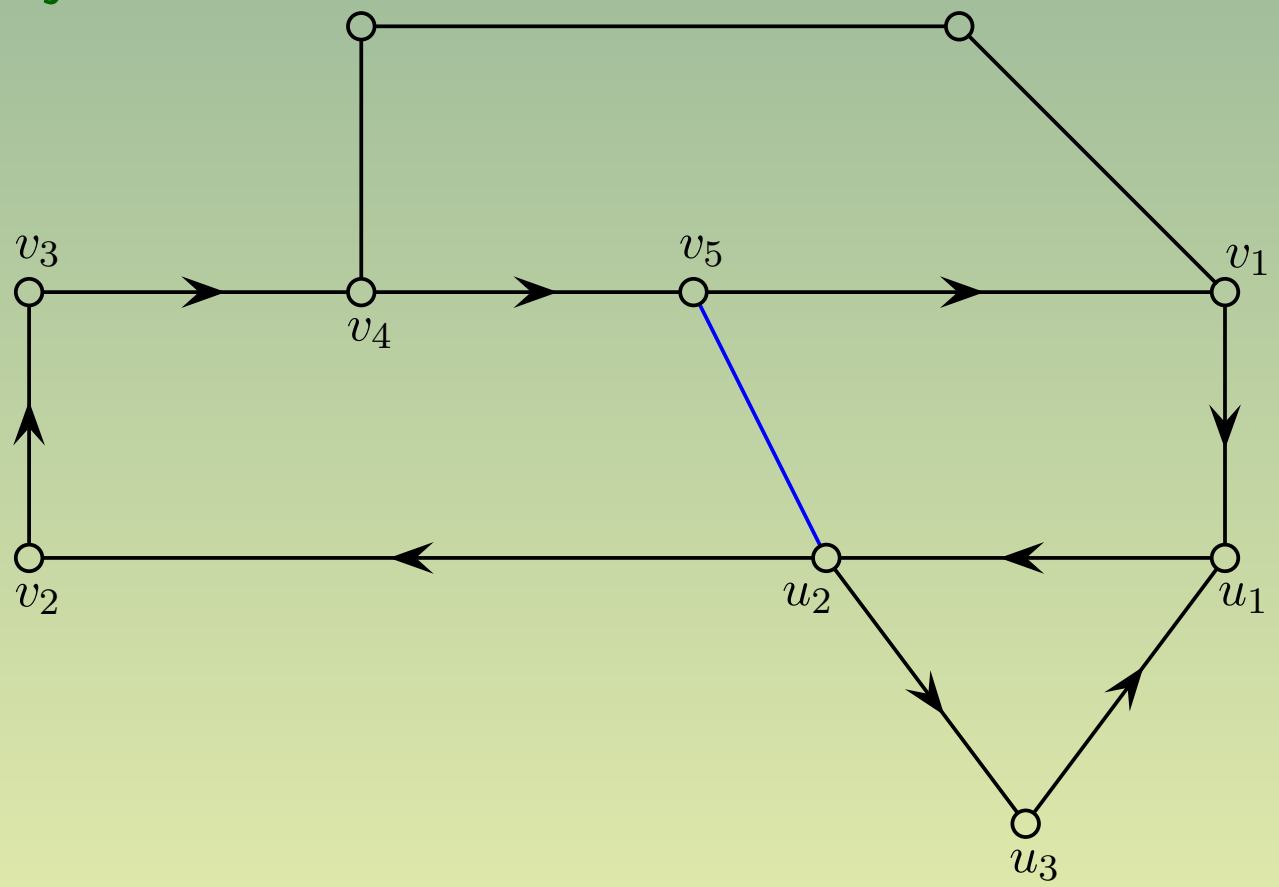
Rješenje.



Bridove ciklusa $v_1u_1u_3u_2v_2v_3v_4v_5v_1$ orijentiramo kao i prije na način $v_1 \to u_1 \to u_3 \to u_2 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_5 \to v_1$. No, bridovi u_1u_3 i u_3u_2 su već orijentirani pa ih ostavimo na miru.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

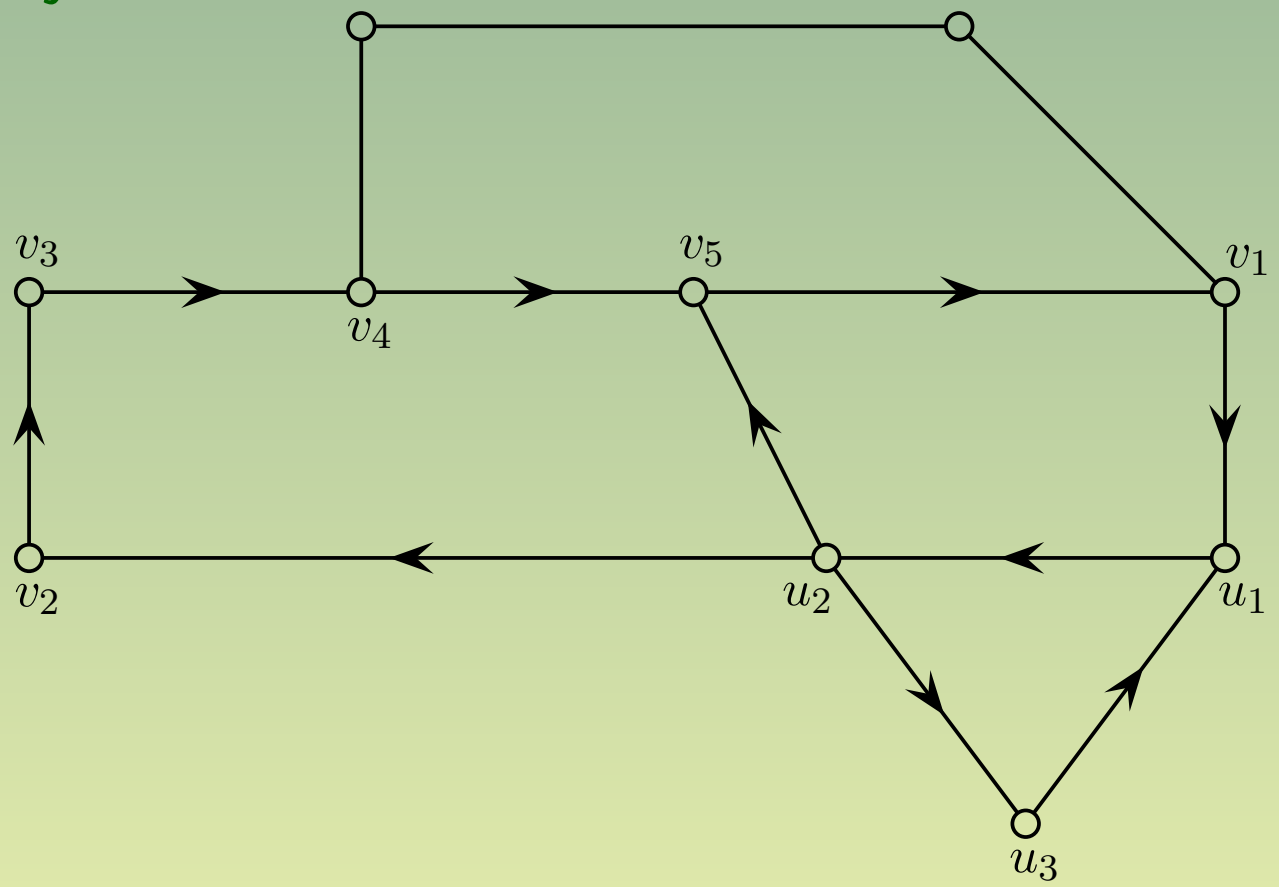
Rješenje.



Bridove ciklusa $v_1u_1u_3u_2v_2v_3v_4v_5v_1$ orijentiramo kao i prije na način $v_1 \to u_1 \to u_3 \to u_2 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_5 \to v_1$. No, bridovi u_1u_3 i u_3u_2 su već orijentirani pa ih ostavimo na miru. Ostale bridove orijentiramo na opisani način.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

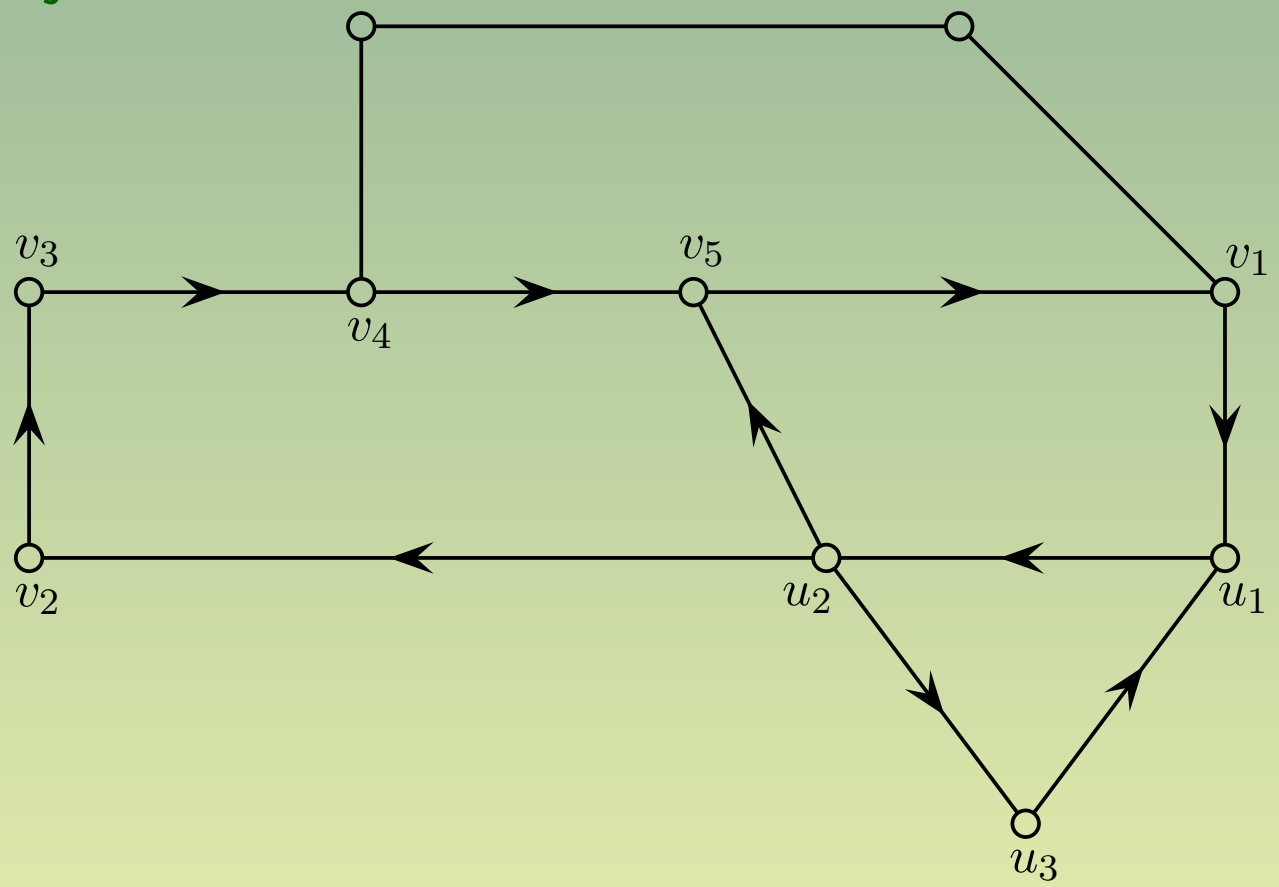
Rješenje.



Bridove ciklusa $v_1u_1u_3u_2v_2v_3v_4v_5v_1$ orijentiramo kao i prije na način $v_1 \to u_1 \to u_3 \to u_2 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_5 \to v_1$. No, bridovi u_1u_3 i u_3u_2 su već orijentirani pa ih ostavimo na miru. Ostale bridove orijentiramo na opisani način. Brid u_2v_5 orijentiramo po želji, npr. $u_2 \to v_5$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



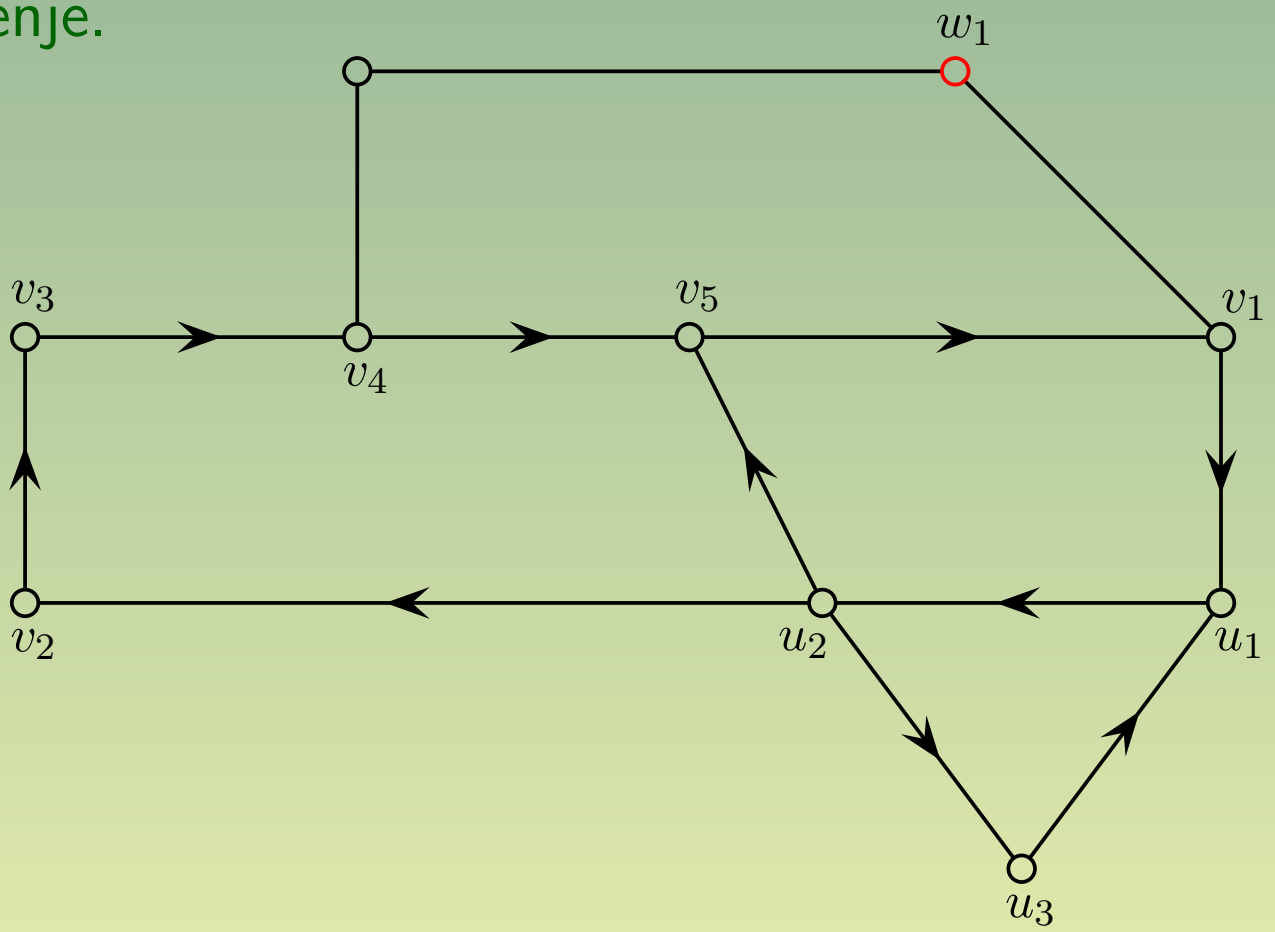
Ključno je ovdje primijetiti da je inducirani podgraf

$$G_1 = G\big[\{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}\big]$$

dipovezan kao digraf.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

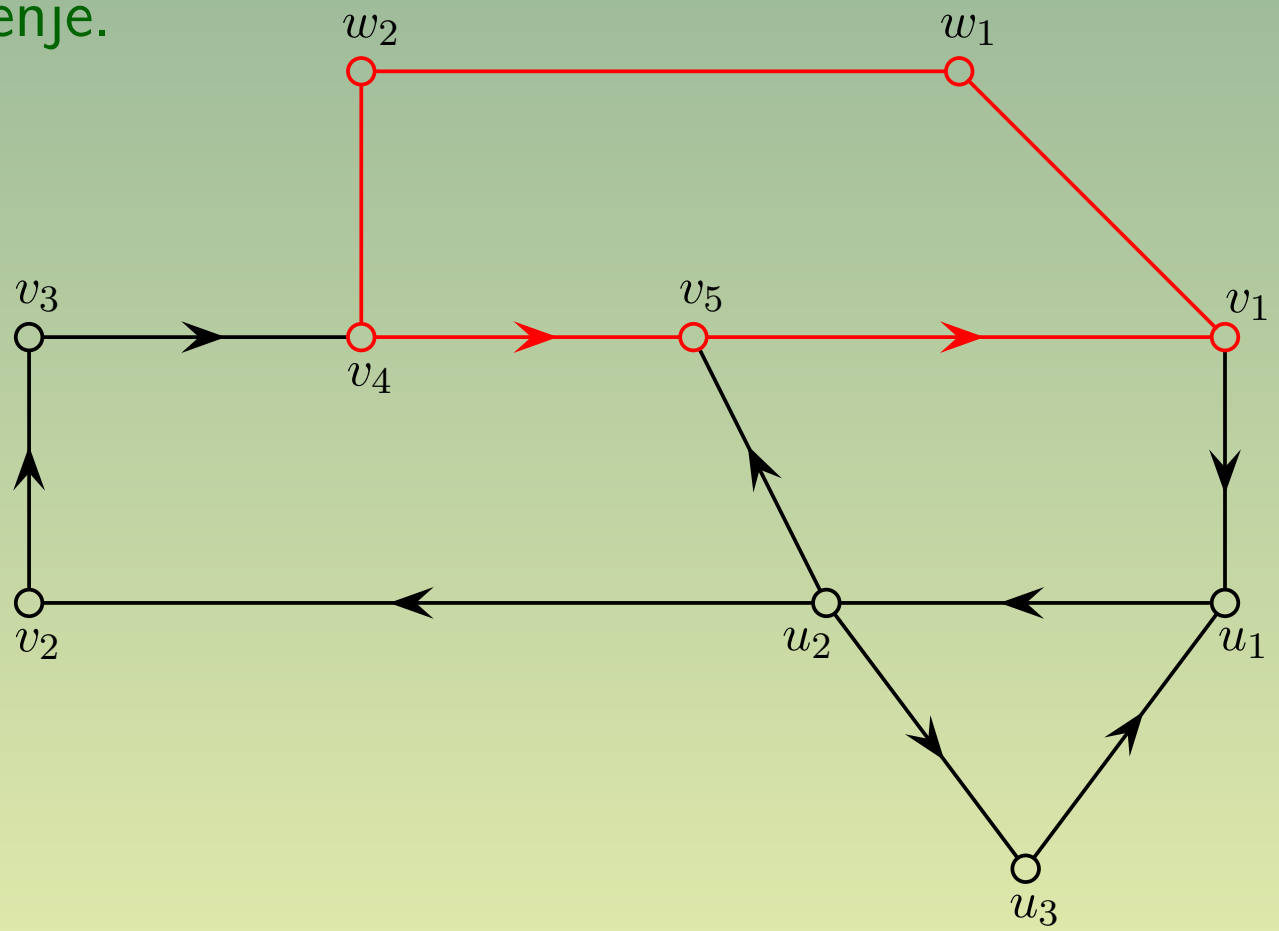
Rješenje.



Tražimo vrh iz $V(G) \setminus V(G_1)$ koji je susjedan s nekim od vrhova iz $V(G_1)$. Na primjer, vrh w_1 koji je susjedan s vrhom v_1.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

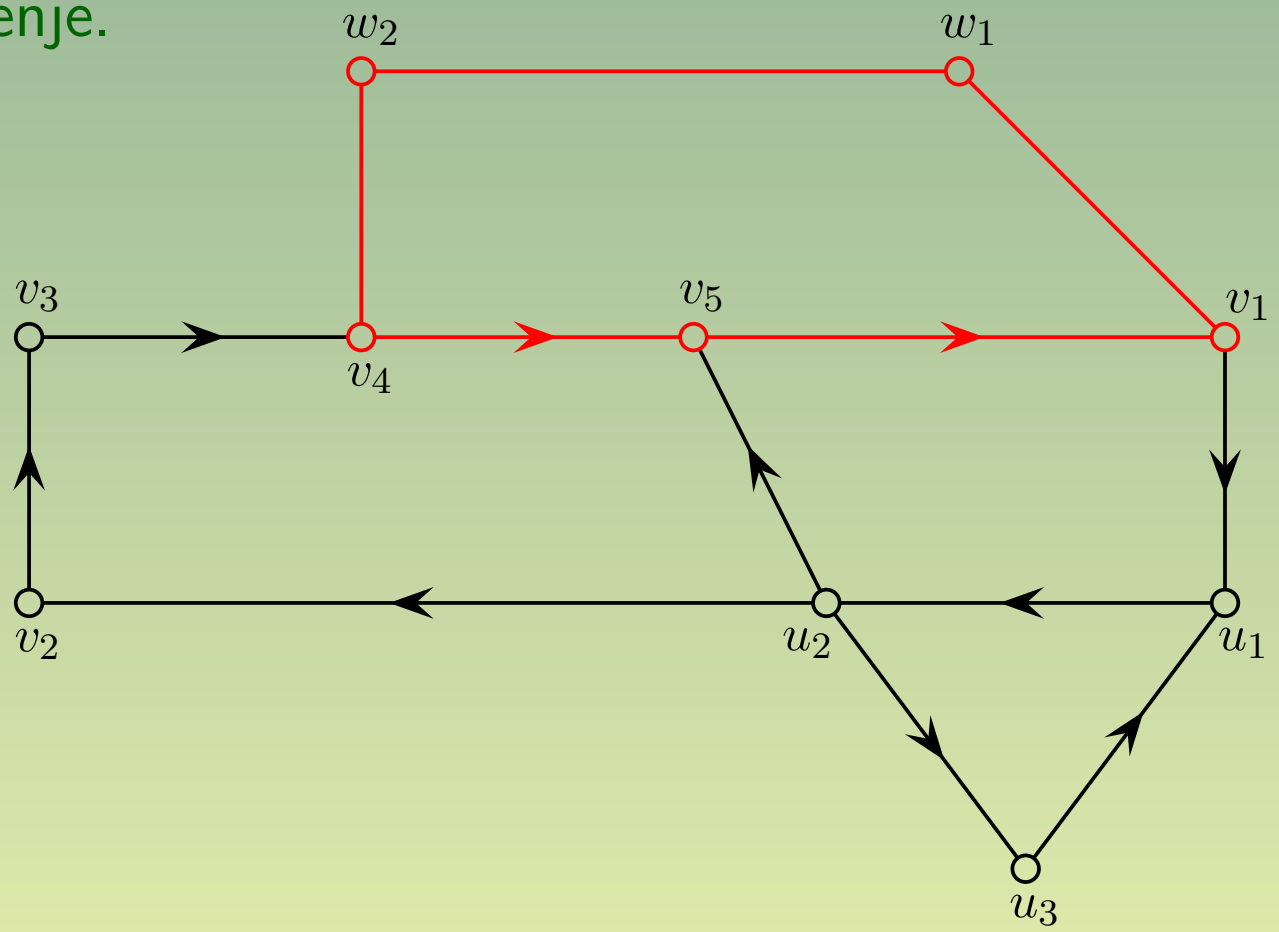
Rješenje.



Tražimo vrh iz $V(G) \setminus V(G_1)$ koji je susjedan s nekim od vrhova iz $V(G_1)$. Na primjer, vrh w_1 koji je susjedan s vrhom v_1. Tražimo ciklus koji sadrži brid w_1v_1, npr. ciklus $w_1v_1v_5v_4w_2w_1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.

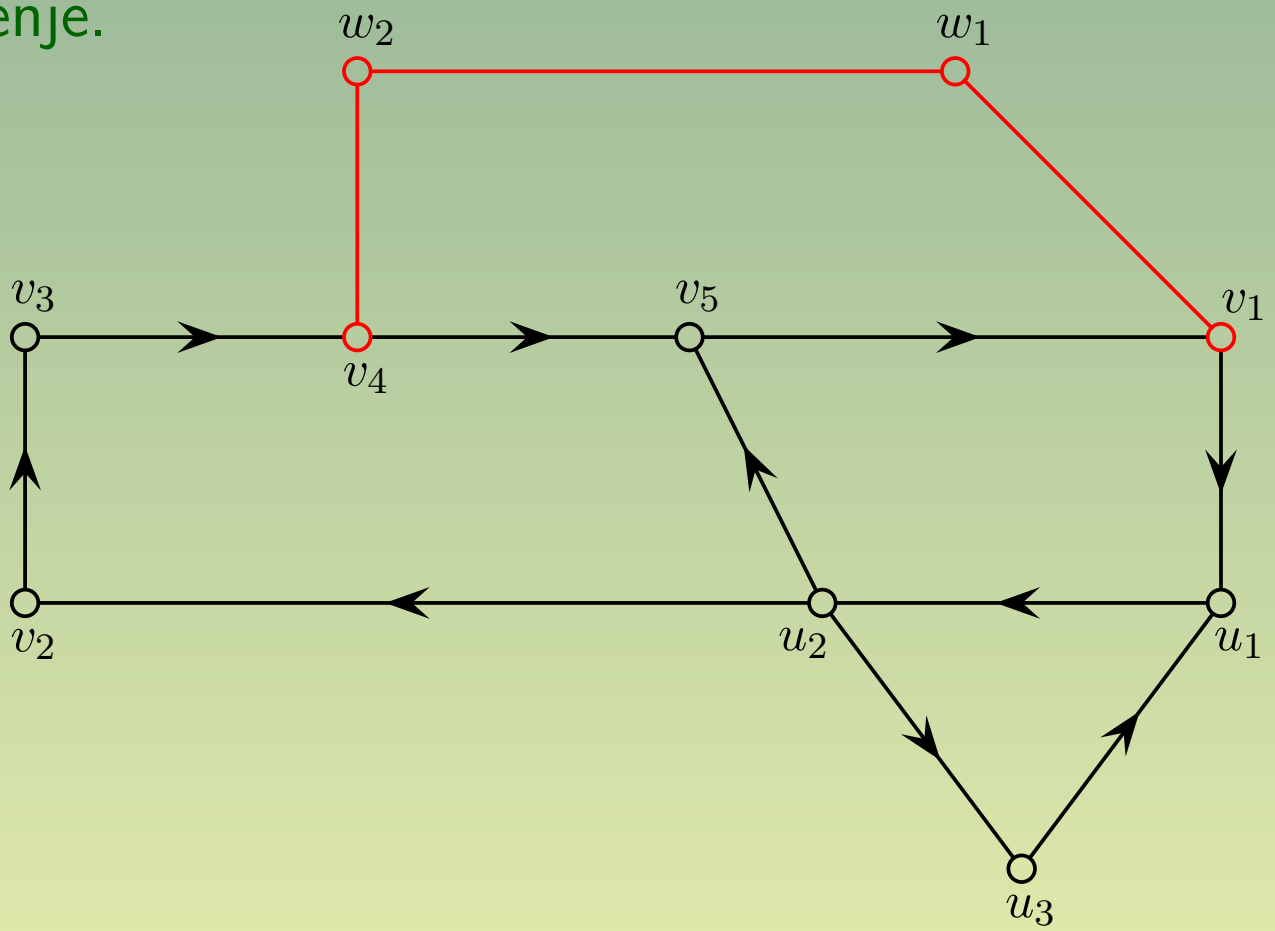


Bridove ciklusa $w_1v_1v_5v_4w_2w_1$ orijentiramo na način

$w_1 \to v_1 \to v_5 \to v_4 \to w_2 \to w_1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

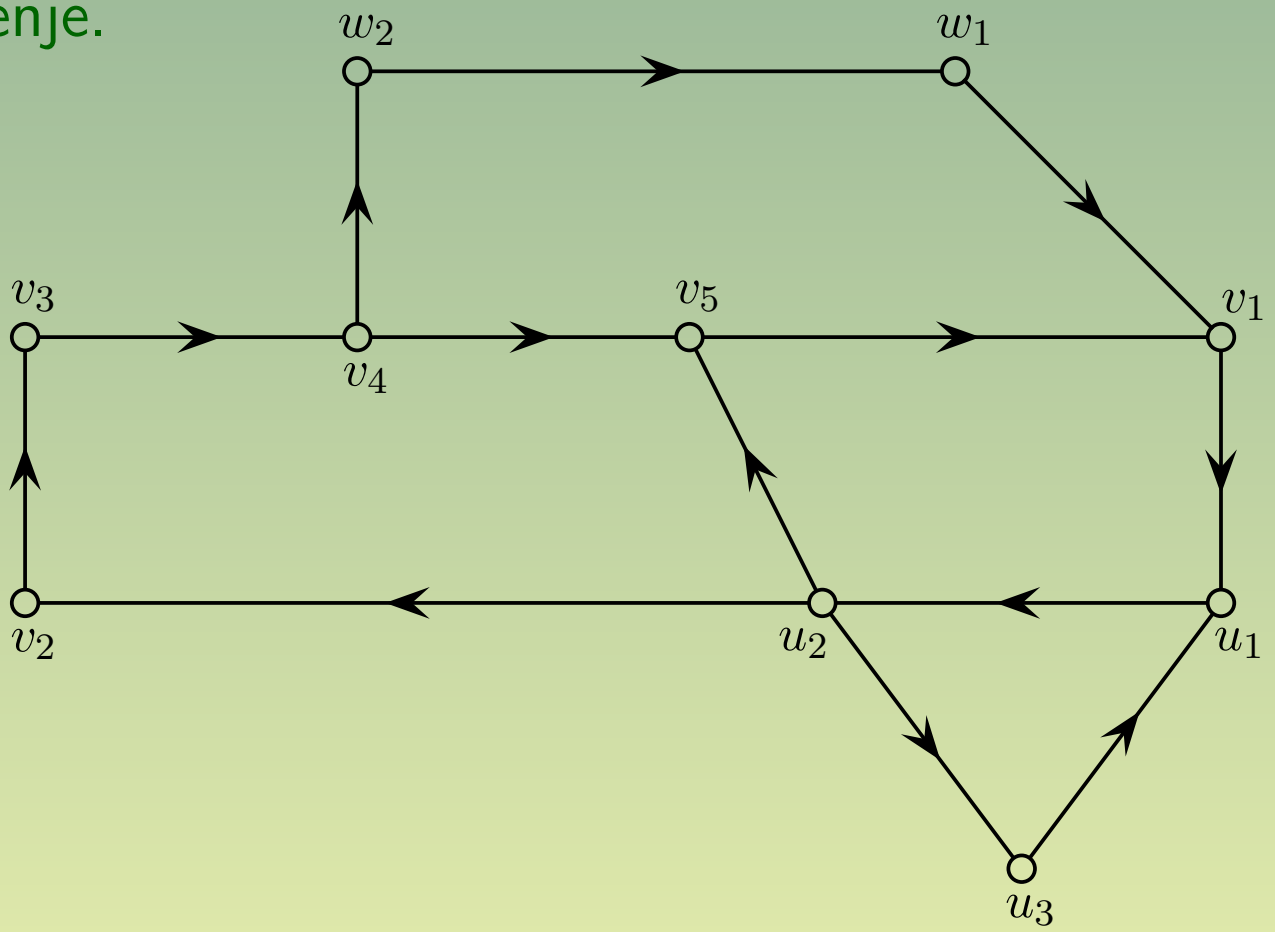
Rješenje.



Bridove ciklusa $w_1v_1v_5v_4w_2w_1$ orijentiramo na način $w_1 \to v_1 \to v_5 \to v_4 \to w_2 \to w_1$. Međutim, bridovi v_1v_5 i v_5v_4 su već orijentirani pa ih ostavimo na miru.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

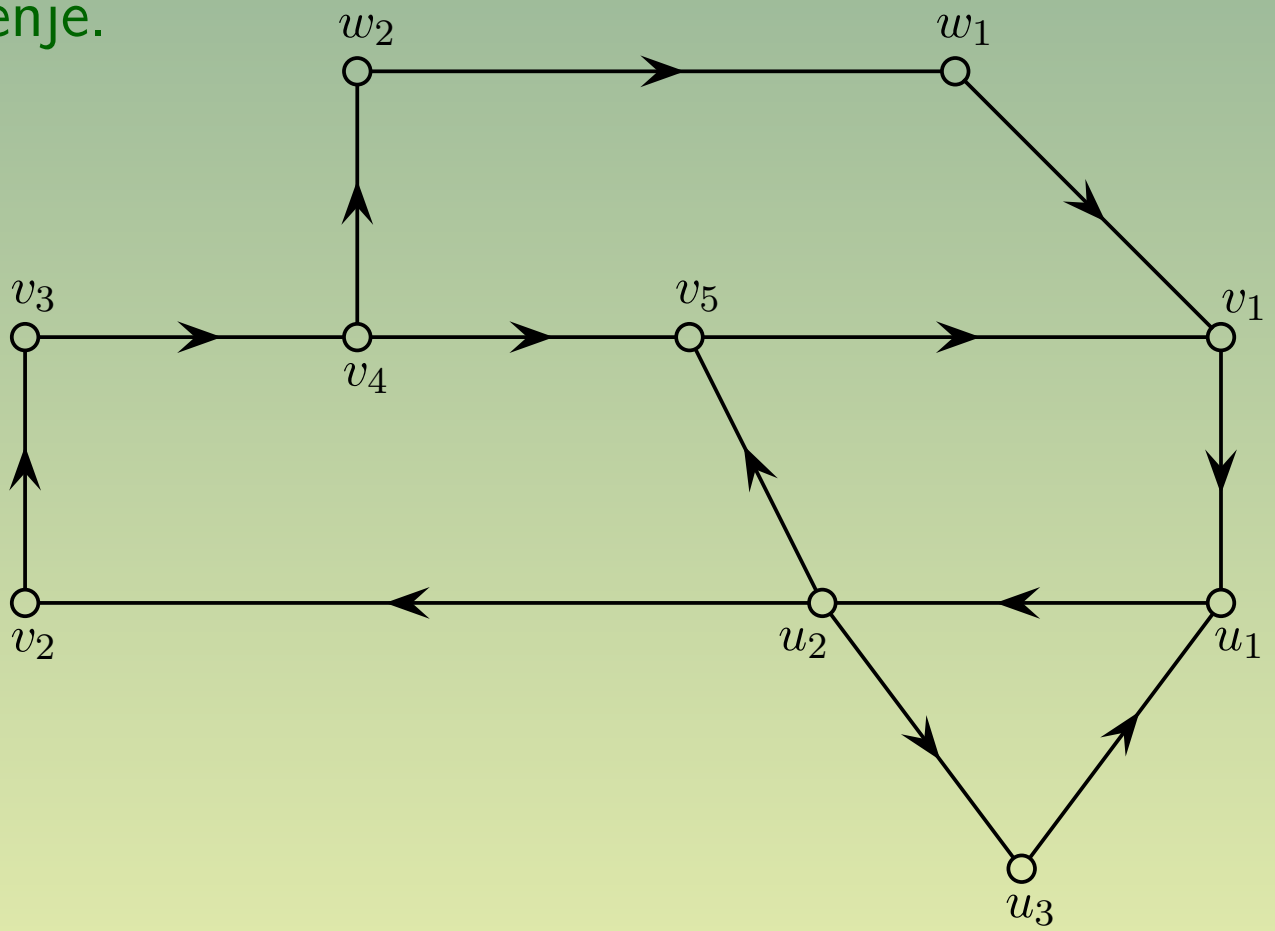
Rješenje.



Bridove ciklusa $w_1v_1v_5v_4w_2w_1$ orijentiramo na način $w_1 \to v_1 \to v_5 \to v_4 \to w_2 \to w_1$. Međutim, bridovi v_1v_5 i v_5v_4 su već orijentirani pa ih ostavimo na miru. Ostale bridove orijentiramo na opisani način.

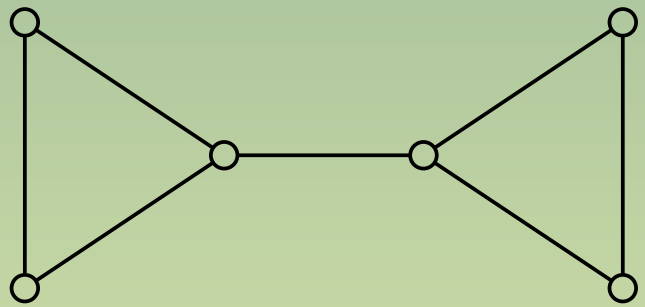
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



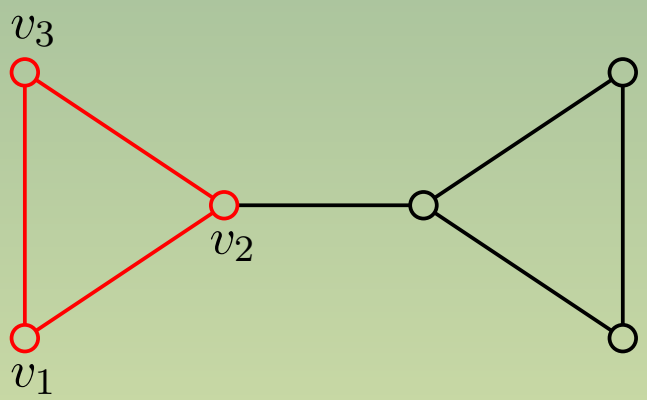
Bridove ciklusa $w_1v_1v_5v_4w_2w_1$ orijentiramo na način $w_1 \to v_1 \to v_5 \to v_4 \to w_2 \to w_1$. Međutim, bridovi v_1v_5 i v_5v_4 su već orijentirani pa ih ostavimo na miru. Ostale bridove orijentiramo na opisani način. Dobivena orijentacija je jaka orijentacija na zadanom grafu.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



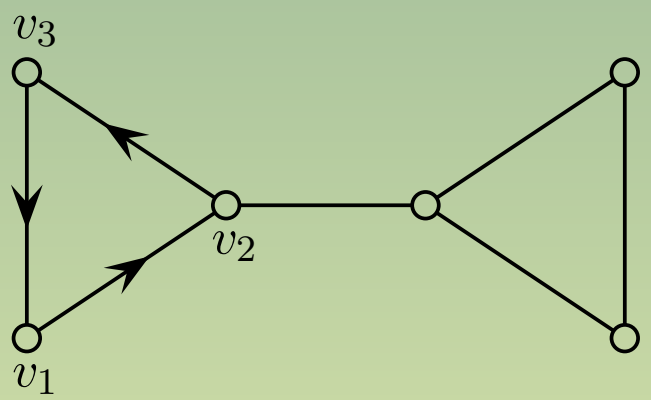
Pogledajmo kako bi funkcionirao opisani algoritam iz prethodnog primjera na gornjem grafu koji ne dopušta jaku orijentaciju.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



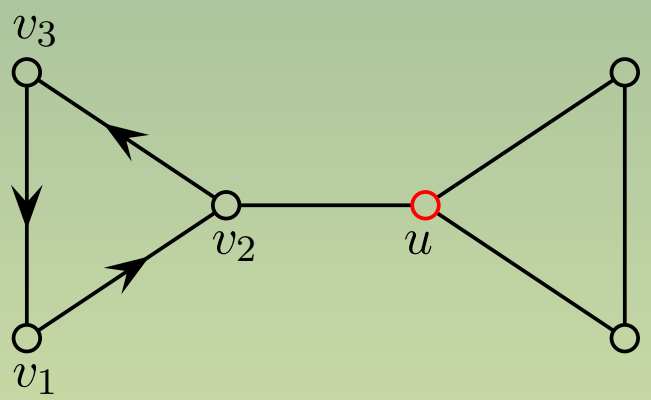
Odaberemo jedan ciklus, npr. ciklus $v_1v_2v_3v_1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



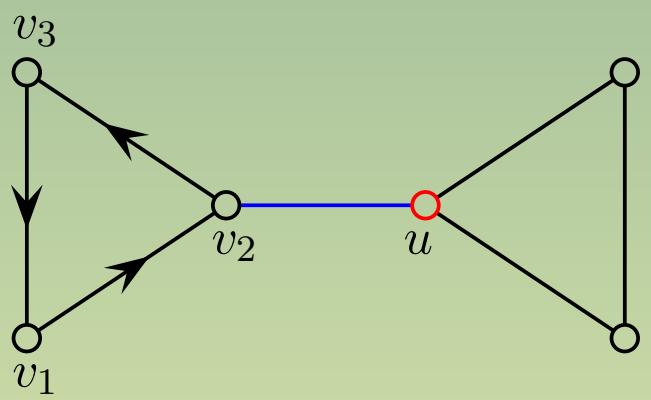
Odaberemo jedan ciklus, npr. ciklus $v_1v_2v_3v_1$. Orijentiramo bridove tog ciklusa kao $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Odaberemo jedan ciklus, npr. ciklus $v_1v_2v_3v_1$. Orijentiramo bridove tog ciklusa kao $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_1$. Odaberemo vrh koji je susjedan s nekim od vrhova v_1, v_2 ili v_3, a ne pripada ciklusu $v_1v_2v_3v_1$. To je ovdje jedino vrh u.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Sada tražimo ciklus koji sadrži brid uv_2. Međutim, takav ciklus ne postoji jer je uv_2 rezni brid. Stoga se algoritam prekida i zadani graf ne dopušta jaku orijentaciju.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dokaz sljedećeg teorema se upravo bazira na prethodno opisanom algoritmu za traženje jake orijentacije na grafu.

Teorem 9.10.

Graf G dopušta jaku orijentaciju akko G je povezani graf i nema reznih bridova.

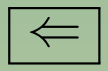
Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Ako graf G dopušta jaku orijentaciju, tada je G očito povezan. Dokažimo još da G nema reznih bridova. Neka je $e = uv$ brid iz G. Neka je brid e orijentiran kao $u \to v$ (s obzirom na jaku orijentaciju na G). Tada u pripadnom dipovezanom digrafu postoji usmjereni put od vrha v prema vrhu u. Posebno, postoji put u grafu G između vrhova u i v koji ne sadrži brid e. Iz toga slijedi da je $G - e$ povezani graf, pa e nije rezni brid. Kako je e bio proizvoljan brid, slijedi da graf G nema reznih bridova.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Pretpostavimo da je G povezani graf bez reznih bridova. Iz toga slijedi da je svaki brid u G dio nekog ciklusa. Neka je $\mathcal{C}_1 = u_1u_2 \cdots u_nu_1$ ciklus u G (postoji barem jedan ciklus u G jer je svaki brid u G dio nekog ciklusa). Za $1 \leqslant i \leqslant n-1$ pridružimo bridu u_iu_{i+1} orijentaciju $u_i \to u_{i+1}$. Bridu u_nu_1 pridružimo orijentaciju $u_n \to u_1$. Sve ostale bridove koji imaju oba kraja u ciklusu $\mathcal{C}_1$, a nisu dio tog ciklusa, orijentiramo po želji. Ako $\mathcal{C}_1$ sadrži sve vrhove iz G, tada je očito dobivena orijentacija jaka orijentacija na G jer je na $\mathcal{C}_1$ to jaka orijentacija. Pretpostavimo stoga da $\mathcal{C}_1$ ne sadrži sve vrhove iz G. Kako je G povezan, postoji vrh v_1 koji nije u $\mathcal{C}_1$, ali je susjedan s nekim vrhom iz $\mathcal{C}_1$, npr. s vrhom u_j. Kako je svaki brid u G dio nekog ciklusa, tada je i brid v_1u_j dio nekog ciklusa $\mathcal{C}_2 = v_1v_2v_3 \cdots v_mv_1$, gdje smo stavili da je $v_2 = u_j$.

Bridu $v_1v_2 = v_1u_j$ pridružimo orijentaciju $v_1 \to v_2$. Bridove iz $\mathcal{C}_2$, koji su eventualno već od prije orijentirani, ostavimo na miru. Svakom još neorijentiranom bridu v_iv_{i+1} iz $\mathcal{C}_2$ pridružimo orijentaciju $v_i \to v_{i+1}$, a bridu v_mv_1 pridružimo orijentaciju $v_m \to v_1$. Konačno, bridovima kojima su oba kraja u $\mathcal{C}_2$, a nisu dio ciklusa $\mathcal{C}_2$ i nisu još orijentirani, pridružimo proizvoljne orijentacije. Tvrdimo da je pripadni digraf induciranog podgrafa

$$G_1 = G\big[\{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m\}\big]$$

dipovezan. Moguće je da u skupu $\{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m\}$ ima jednakih vrhova, tj. da je neki u_i jednak nekom v_j. Moramo pokazati da postoje usmjereni putovi između svaka dva vrha iz skupa $\{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m\}$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Od bilo kojeg vrha u_i možemo doći do bilo kojeg vrha u_j unutar ciklusa $\mathcal{C}_1$. Nadalje, postoji usmjereni put od vrha v_i do vrha v_{i+1}. Naime, ukoliko je $v_i \to v_{i+1}$, tada je to put $v_i v_{i+1}$. Ukoliko je $v_{i+1} \to v_i$, tada su oba vrha dio ciklusa $\mathcal{C}_1$ pa postoji usmjereni put od v_{i+1} do v_i unutar ciklusa $\mathcal{C}_1$. Nadalje, po konstrukciji je $v_m \to v_1$ i $v_1 \to v_2$. Iz svega toga slijedi da postoji usmjereni put od bilo kojeg v_i prema bilo kojem v_j. Treba još pokazati da postoji usmjereni put od bilo kojeg u_i prema bilo kojem v_j i obrnuto, od bilo kojeg v_k prema bilo kojem u_l. Znamo da postoji usmjereni put od u_i do $u_j = v_2$ unutar ciklusa $\mathcal{C}_1$, a prema pokazanom postoji usmjereni put od v_2 prema bilo kojem v_j pa stoga postoji usmjereni put od bilo kojeg u_i do bilo kojeg v_j. Isto tako, prema pokazanom postoji usmjereni put od v_k prema $v_2 = u_j$ i postoji usmjereni put od u_j do u_l pa stoga postoji usmjereni put od bilo kojeg v_k do bilo kojeg u_l.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dokazali smo da inducirani podgraf G_1 dopušta jaku orijentaciju. Ako je $G_1 = G$, tada je gotovo, a u protivnom odaberemo neki vrh w_1 koji ne pripada G_1, a susjedan je s nekim vrhom iz G_1 i ponovimo opisani postupak. Taj postupak mora završiti u konačno mnogo koraka jer imamo konačno mnogo vrhova i na kraju ćemo dobiti jaku orijentaciju na grafu G. ♡

Napomena.

Opisani algoritam u prethodnom dokazu je malo kompliciran za implementaciju jer treba tražiti cikluse u grafu. Postoji jednostavniji algoritam za implementaciju pomoću razapinjućeg stabla i DFS algoritma kojeg ćemo sada navesti i koristiti kod rješavanja zadataka.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Algoritam za jaku orijentaciju

ULAZ: Povezani graf G bez reznih bridova
IZLAZ: Jaka orijentacija na G

1: Pomoću DFS algoritma pronađi razapinjuće stablo $\mathcal{T}$ grafa G.

2: Za svaki brid $e \in E(G)$ promatraj oznake i i j njegovih krajeva (one su dobivene u DFS algoritmu). Neka je $i < j$.
Ako je $e \in E(\mathcal{T})$, stavi $i \to j$, a inače stavi $j \to i$.

Napomena.

Opisani algoritam će dati orijentaciju i na povezanom grafu G koji ima reznih bridova, ali ta orijentacija neće biti jaka orijentacija na G. Stoga moramo biti pažljivi i prije toga provjeriti da je graf povezan i da nema reznih bridova.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.34.

Dokažite da je prethodno opisani algoritam za traženje jake orijentacije na grafu ispravan.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.34.

Dokažite da je prethodno opisani algoritam za traženje jake orijentacije na grafu ispravan.

Rješenje.

Pretpostavimo da je G povezani graf bez reznih bridova. Treba dokazati da postoji usmjereni put između svaka dva vrha u pripadnom digrafu koji je dobiven opisanim algoritmom za jaku orijentaciju. U tu svrhu je dovoljno dokazati da postoji usmjereni put od vrha 1 do vrha k i obrnuto, od vrha k do vrha 1 za svaki k. Naime, ako bismo to dokazali, tada je lako vidjeti da postoji usmjereni put između bilo koja dva vrha k_1 i k_2 jer tada postoji usmjereni put od vrha k_1 do vrha 1 i postoji usmjereni put od vrha 1 do vrha k_2 pa onda postoji usmjereni put od vrha k_1 do vrha k_2. Analogno razmatranje je i za usmjereni put od vrha k_2 do vrha k_1.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Tvrdnju ćemo dokazati pomoću jake forme matematičke indukcije po k. Za $k = 1$ tvrdnja očito vrijedi jer postoji usmjereni put od vrha 1 do vrha 1 (zapravo nam ne treba nikakvi usmjereni put da bismo došli od vrha 1 do vrha 1). Pretpostavimo da je $k > 1$ i da za svaki $1 \leqslant l < k$ postoji usmjereni put od 1 do l i obrnuto, postoji usmjereni put od l do 1 poštujući orijentaciju dobivenu algoritmom. Želimo dokazati da tada postoji usmjereni put od 1 do k i obrnuto, od k do 1.

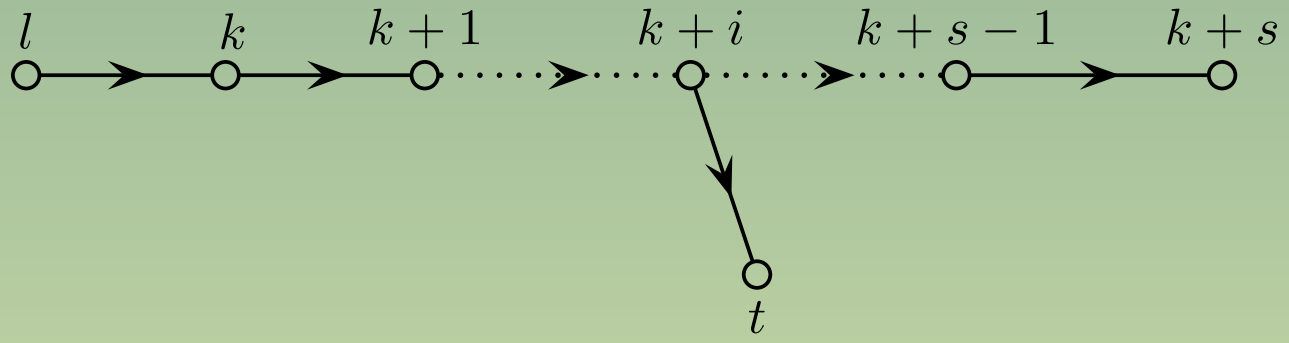
Dokažimo najprije da postoji usmjereni put od 1 do k. Vrh k je dobio svoju oznaku jer je bio susjedan s nekim od već posjećenih vrhova, npr. l. Kako DFS algoritam uvijek bira najmanju raspoloživu oznaku za označavanje, slijedi da je $l < k$. Prema pretpostavci indukcije postoji usmjereni put od 1 do l. Kako je brid lk dio razapinjućeg stabla dobivenog DFS algoritmom, slijedi da će algoritam za jaku orijentaciju bridu lk pridružiti orijentaciju $l \to k$. Stoga postoji usmjereni put od 1 do k.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dokažimo još da postoji usmjereni put od k do 1. Pretpostavimo prvo da se DFS algoritam počeo vraćati natrag odmah nakon oznake k jer su svi vrhovi susjedni s k već bili posjećeni. Mora postojati neki vrh susjedan s vrhom k osim vrha l jer bi u protivnom brid lk bio rezni brid. Pretpostavimo da je to vrh s oznakom t, gdje je $t < k$. Kako brid tk nije dio razapinjućeg stabla, algoritam će ga orijentirati kao $k \to t$. Prema pretpostavci indukcije postoji usmjereni put od t do 1 pa sve zajedno, postoji usmjereni put od k do 1.

S druge strane, pretpostavimo da se DFS algoritam nije vraćao odmah nakon oznake k. Tada je on nastavljao prema nekom susjednom neposjećenom vrhu kojeg je označio s $k+1$, pa sljedećeg s $k+2$, itd. Konačno, u nekom trenutku od vrha $k+s$, $s \geqslant 1$, se morao početi vraćati unatrag. Važno je uočiti da postoji usmjereni put od k prema $k+i$ za $0 \leqslant i \leqslant s$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Ako je neki od tih vrhova susjedan s vrhom koji ima oznaku t, $t < k$, tada prema pretpostavci indukcije postoji usmjereni put od t do 1 pa onda imamo

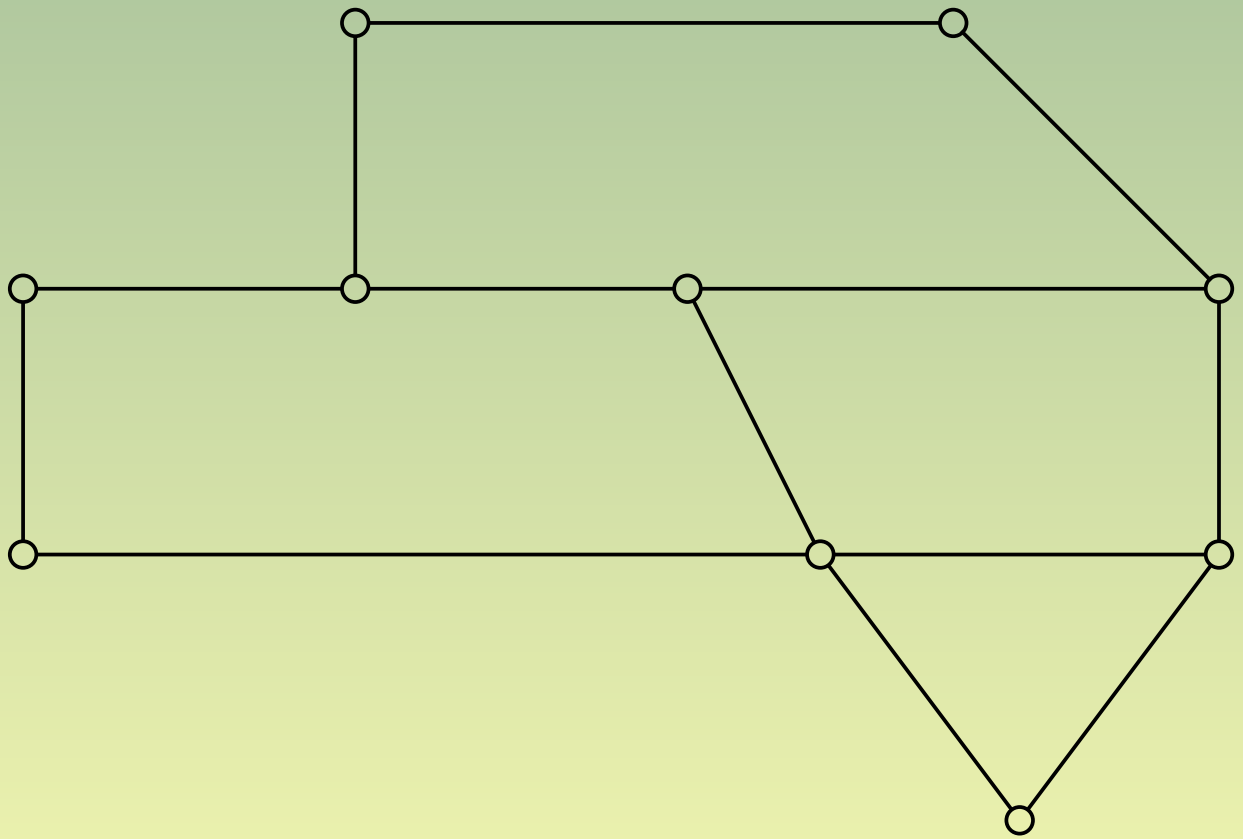
$$k \rightsquigarrow k+i \to t \rightsquigarrow 1$$

i usmjereni put od k prema 1. S druge strane, ako bi jedini vrhovi susjedni s vrhom oblika $k+i$ bili također tog oblika, tada ne bi u grafu G postojao put od $k+s$ do l koji ne sadrži brid lk, pa bi lk bio rezni brid u G, što je nemoguće jer G po pretpostavci nema reznih bridova.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

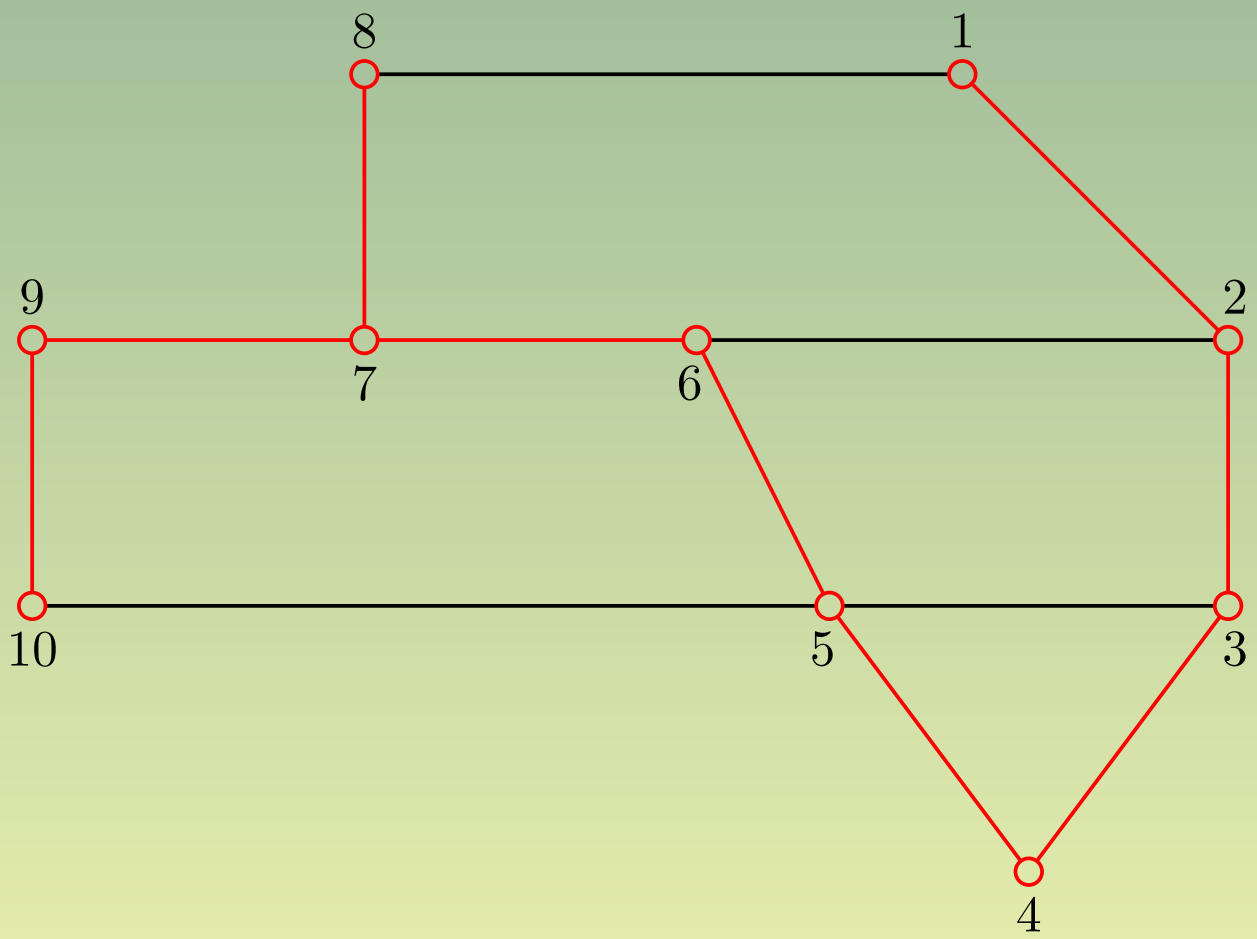
Primjer 9.35.

Pronađite jaku orijentaciju na grafu



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

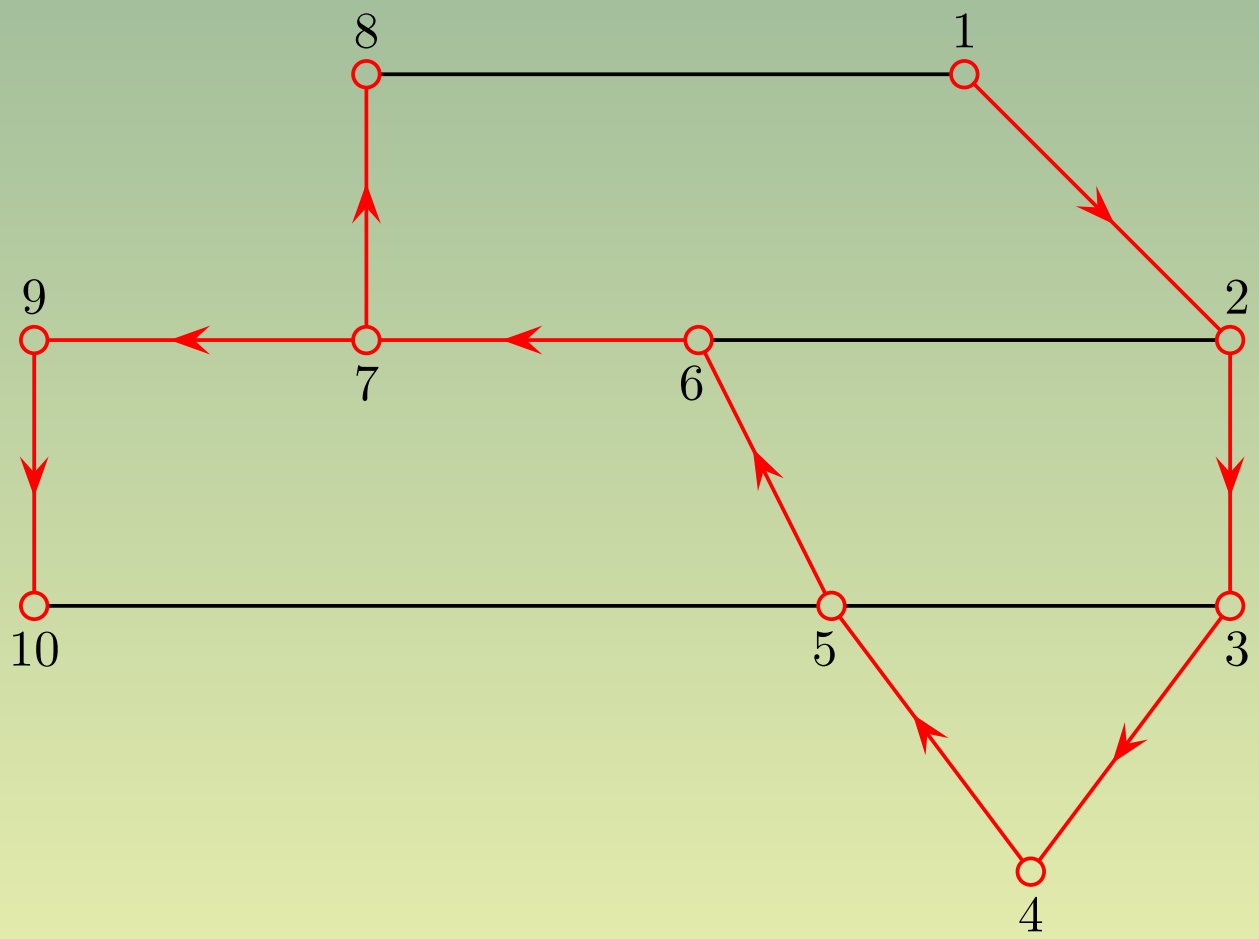
Rješenje.



Najprije pomoću DFS algoritma pronađemo jedno razapinjuće stablo.
Oznake vrhova predstavljaju redoslijed posjećivanja vrhova.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

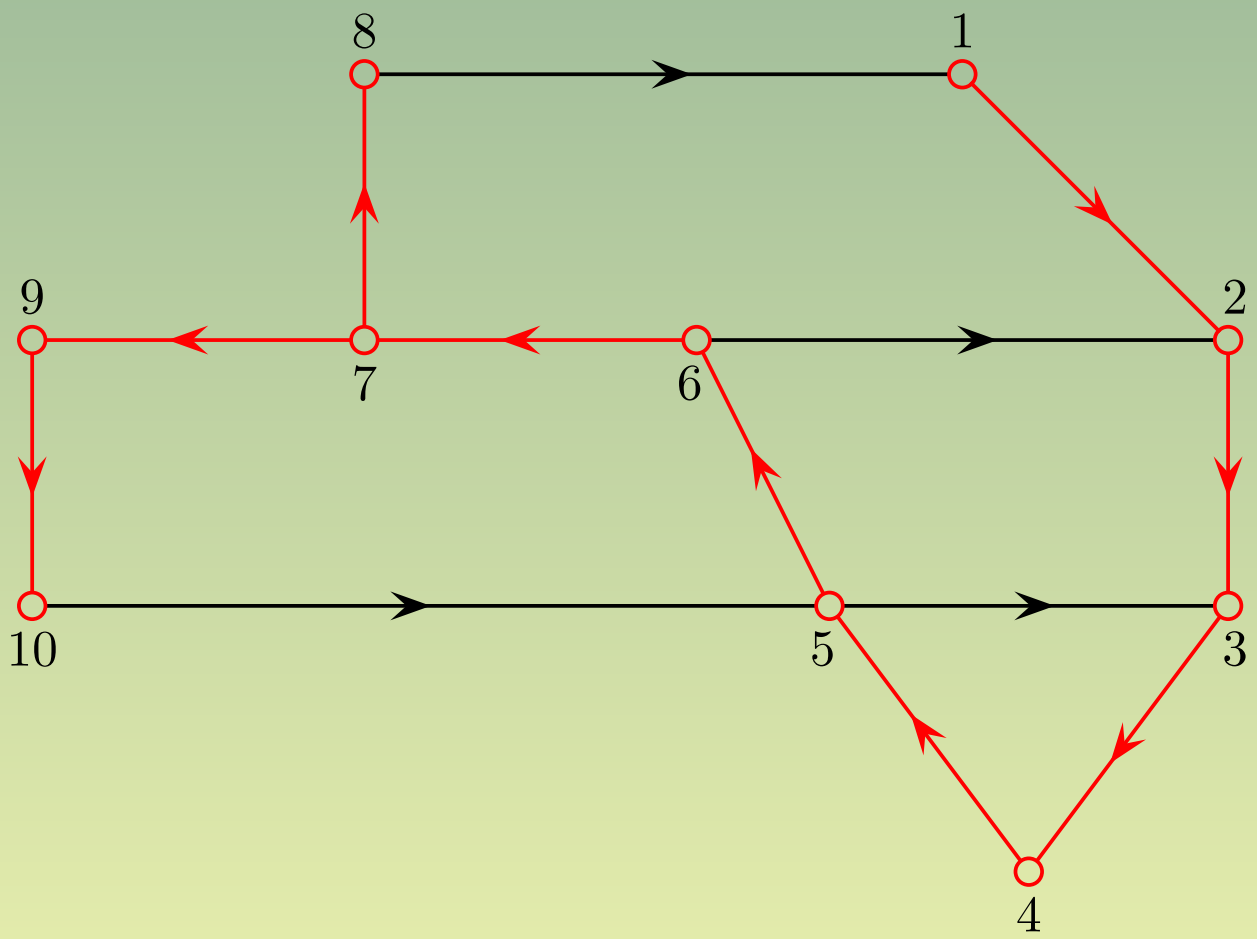
Rješenje.



Bridove koji pripadaju razapinjućem stablu orijentiramo od manje oznake prema većoj oznaci krajeva.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

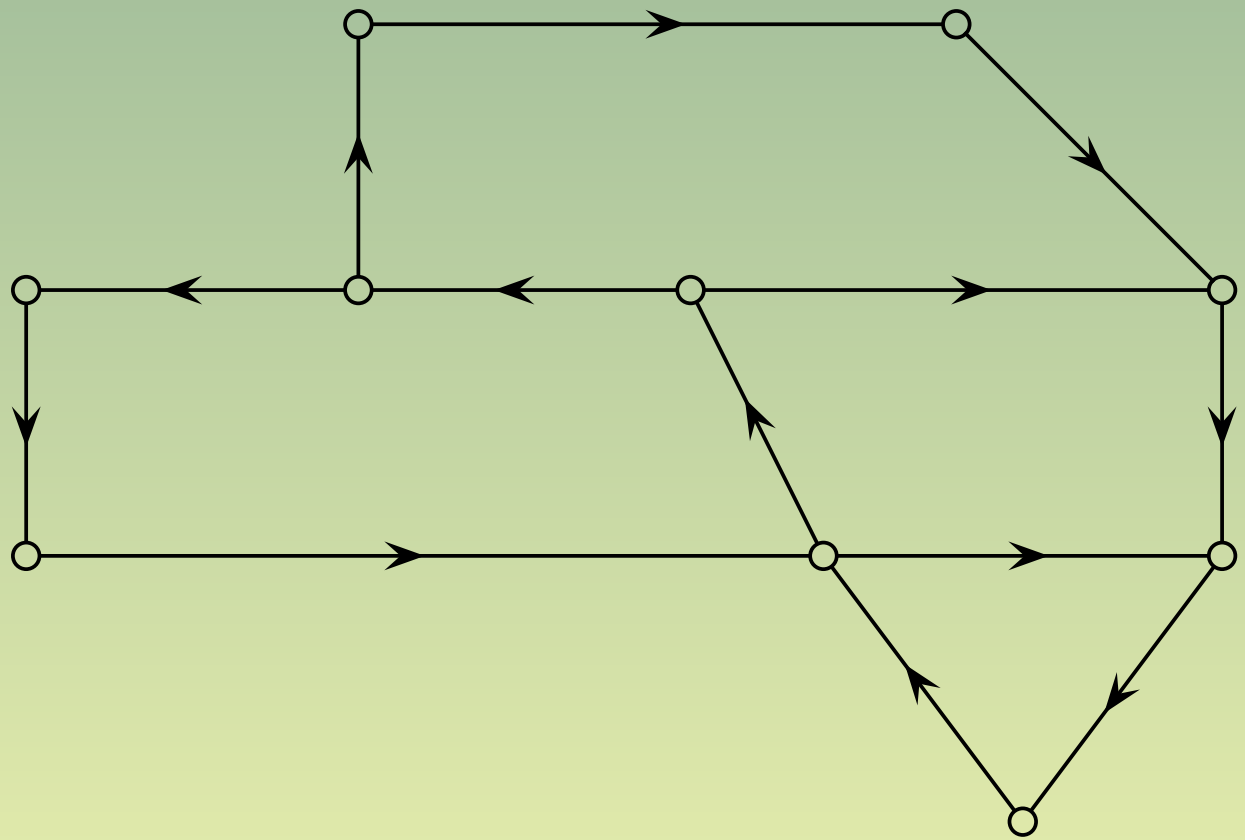
Rješenje.



Bridove koji ne pripadaju razapinjućem stablu orijentiramo od veće oznake prema manjoj oznaci krajeva.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

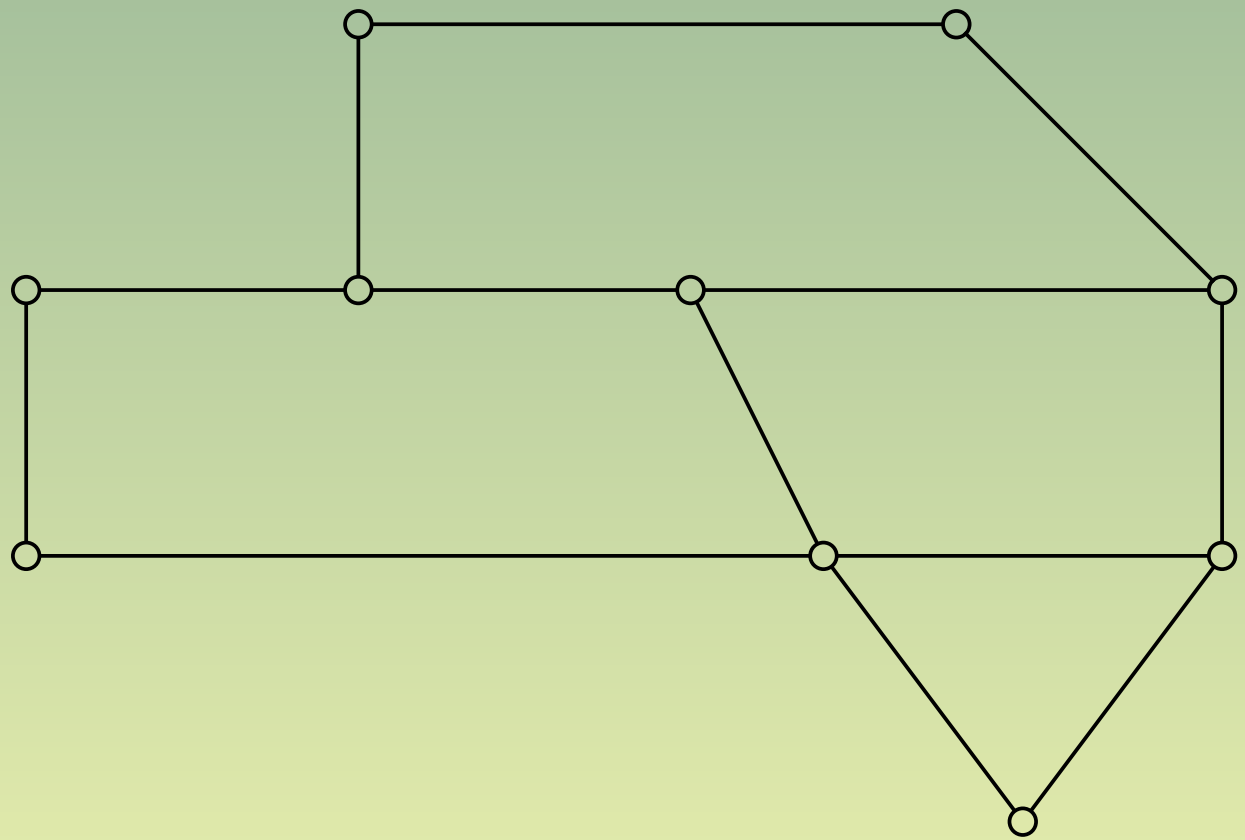
Rješenje.



Na taj način dobivamo jednu jaku orijentaciju na promatranom grafu, tj. dobiveni digraf je dipovezan.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

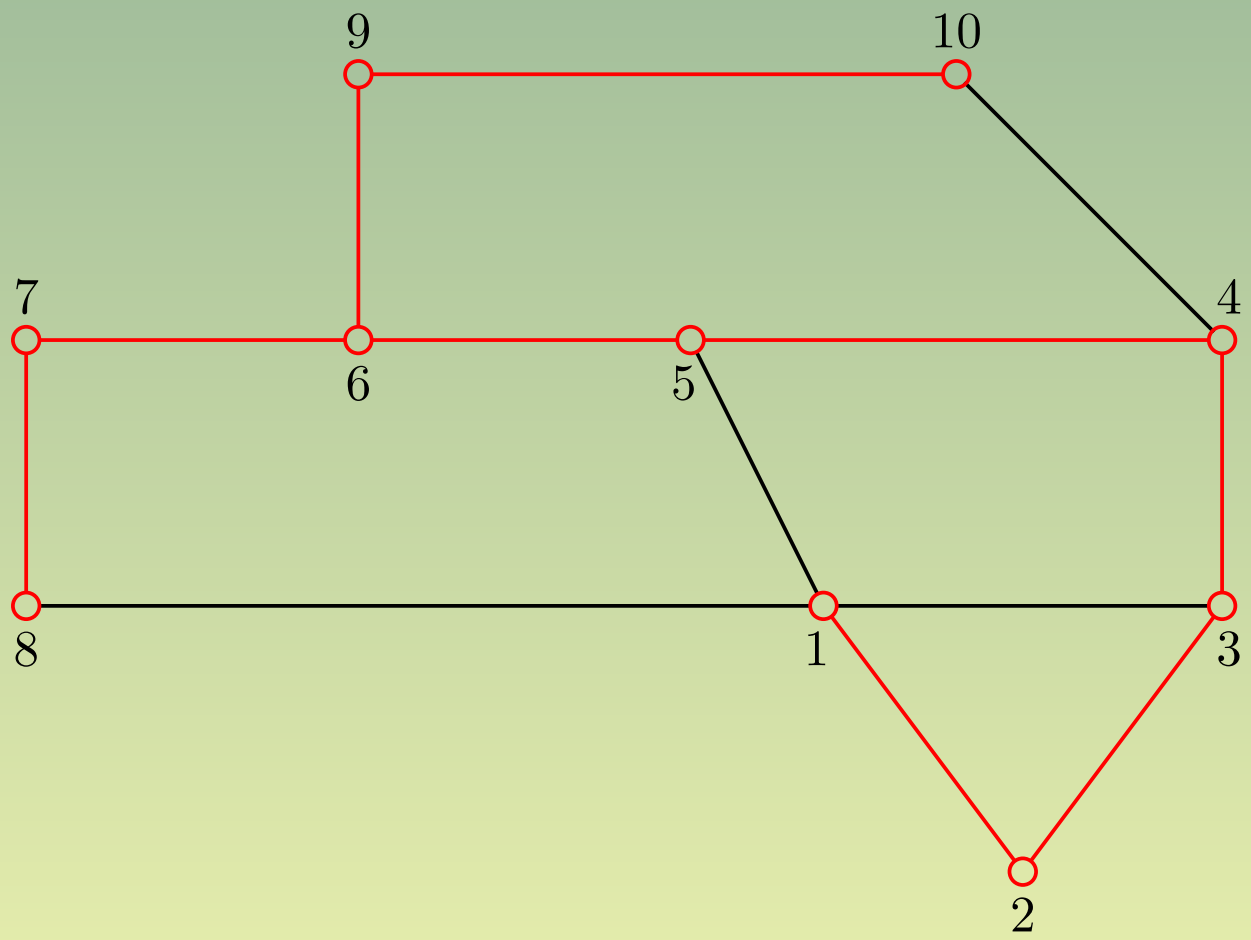
Rješenje.



Neku drugu jaku orijentaciju na zadanom grafu možemo dobiti tako da pomoću DFS algoritma pronađemo neko drugo razapinjuće stablo,

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

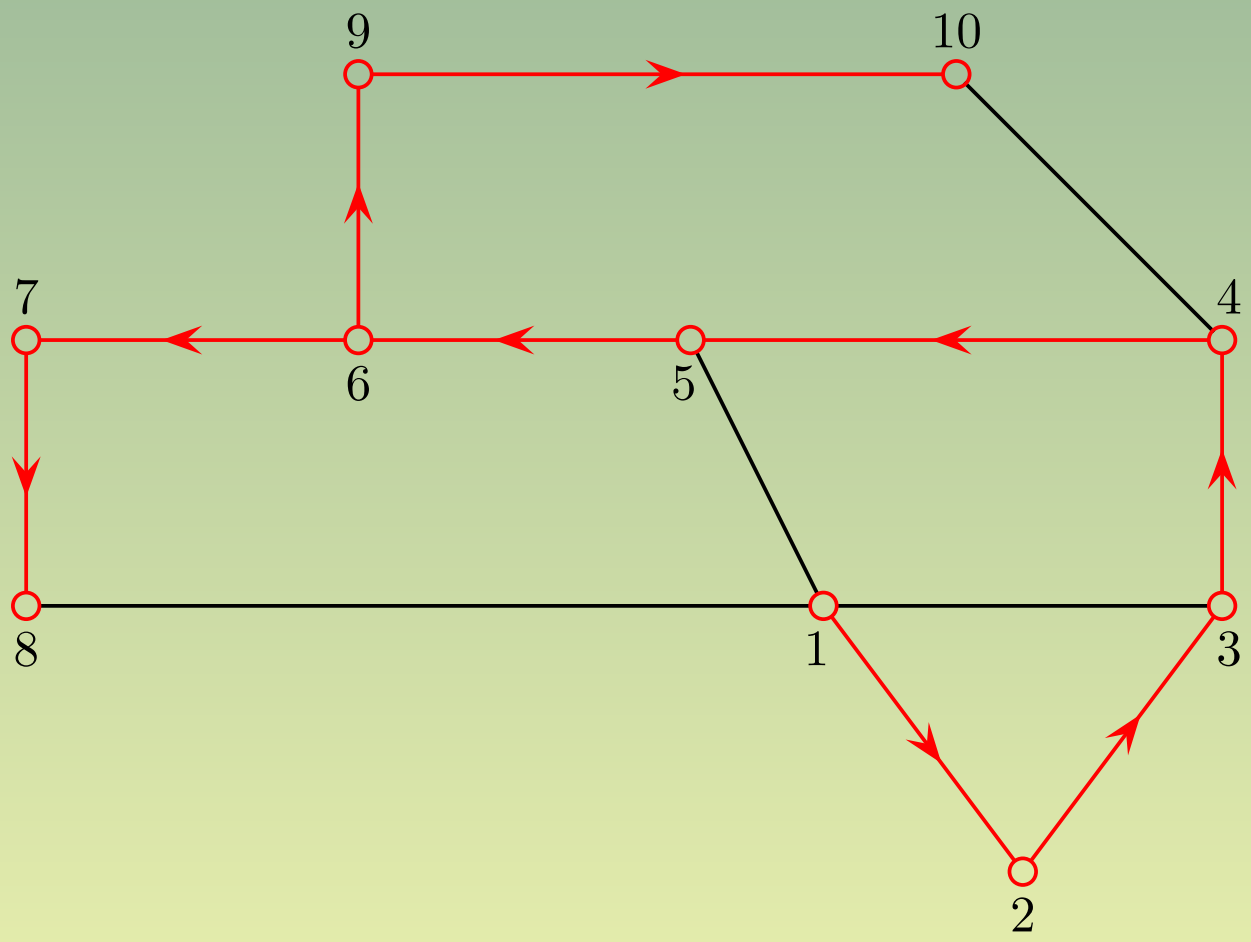
Rješenje.



Neku drugu jaku orijentaciju na zadanom grafu možemo dobiti tako da pomoću DFS algoritma pronađemo neko drugo razapinjuće stablo, npr. razapinjuće stablo prikazano na slici crvenom bojom.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

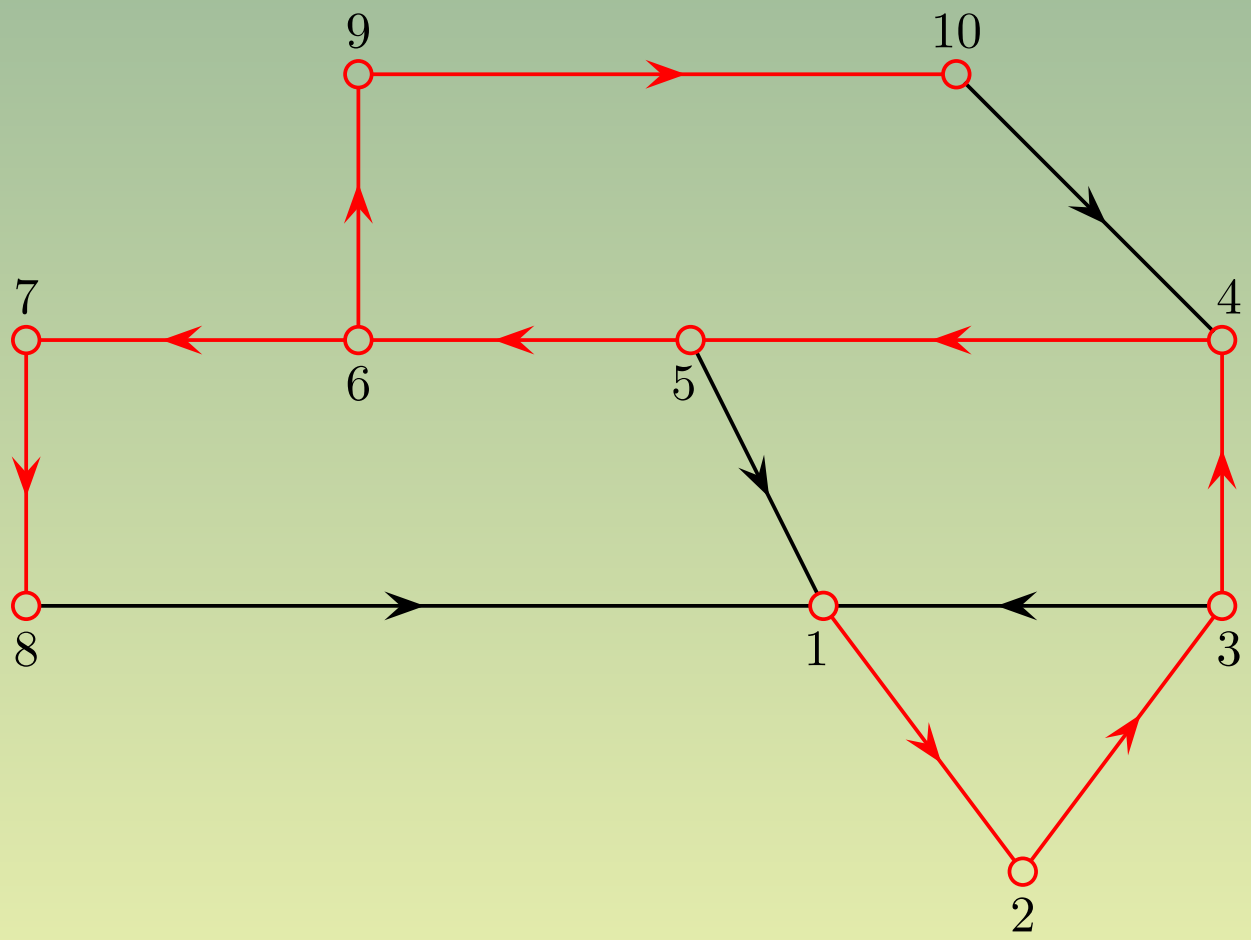
Rješenje.



Bridove koji pripadaju razapinjućem stablu orijentiramo od manje oznake prema većoj oznaci krajeva.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

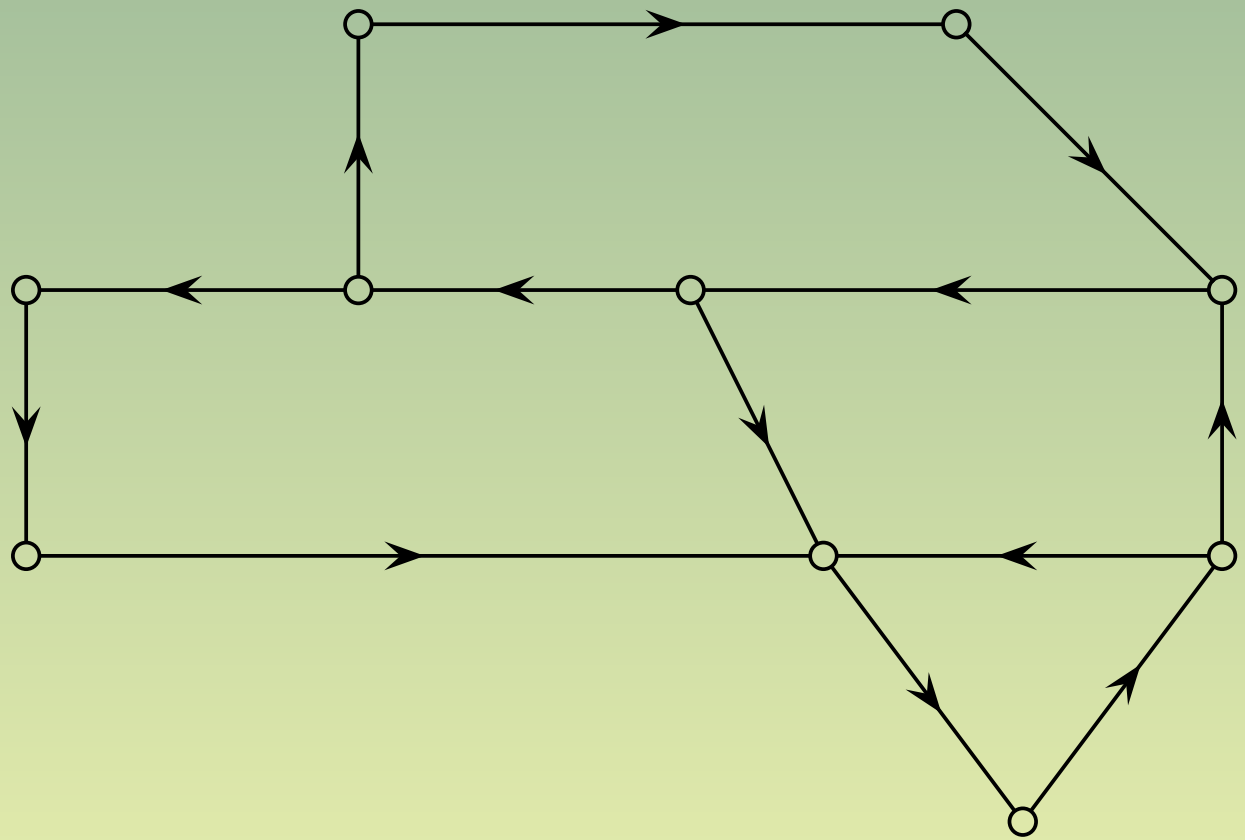
Rješenje.



Bridove koji ne pripadaju razapinjućem stablu orijentiramo od veće oznake prema manjoj oznaci krajeva.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.

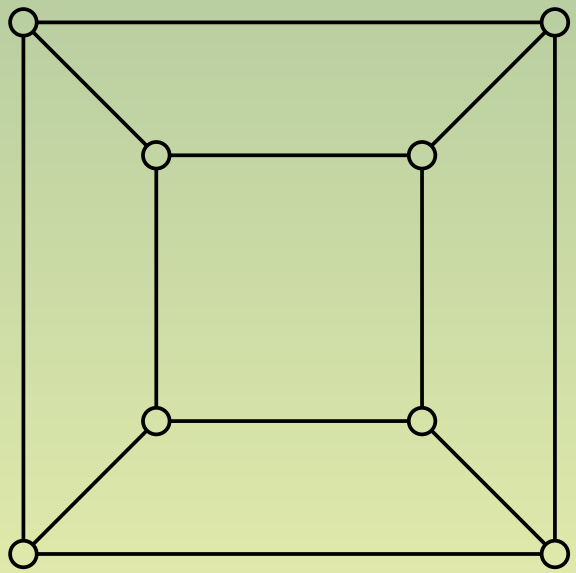


Na taj način dobivamo neku drugu jaku orijentaciju na promatranom grafu, tj. opet je dobiveni digraf dipovezan.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

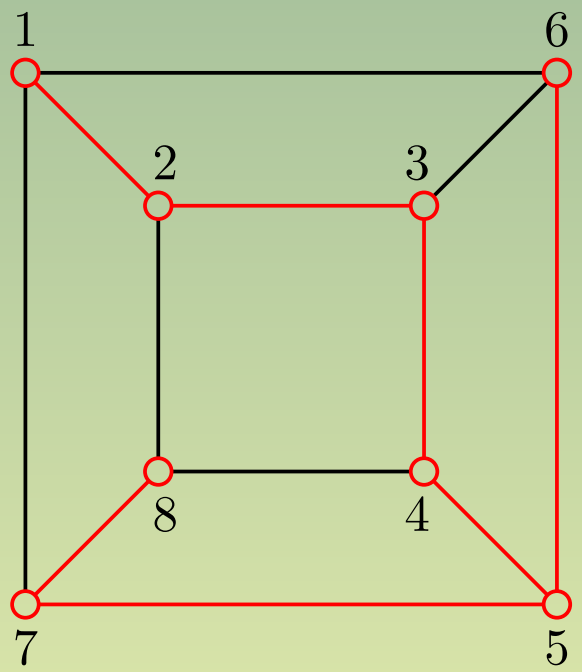
Primjer 9.36.

Pronađite jaku orijentaciju na kubnom grafu



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

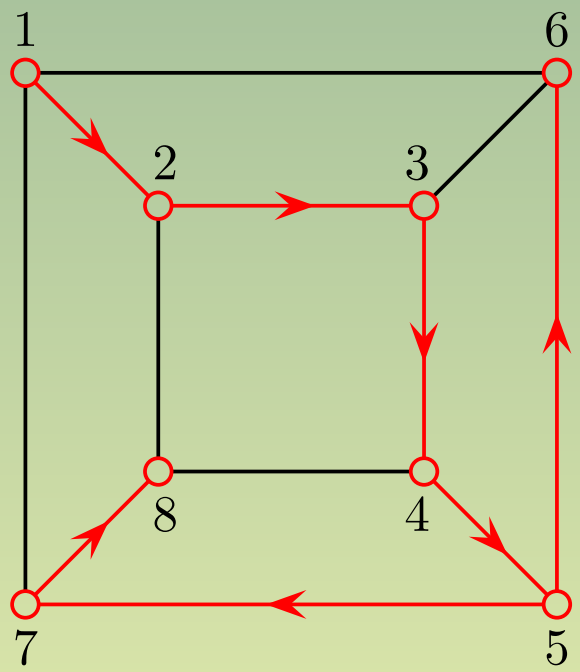
Rješenje.



Najprije pomoću DFS algoritma pronađemo jedno razapinjuće stablo. Oznake vrhova predstavljaju redoslijed posjećivanja vrhova.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

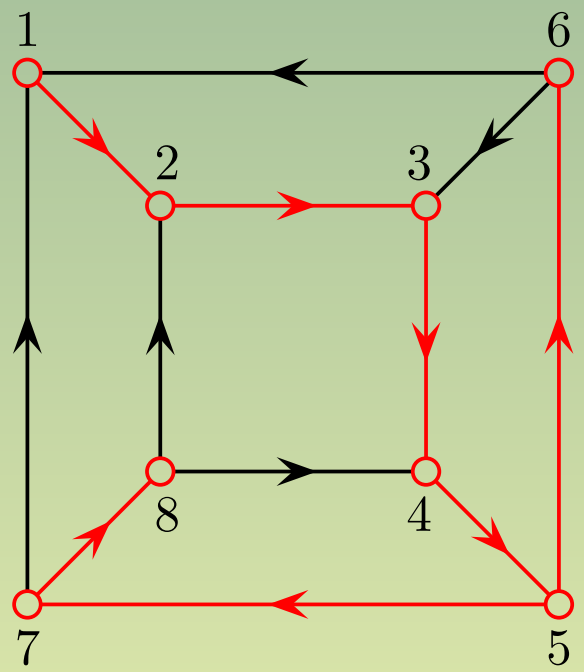
Rješenje.



Bridove koji pripadaju razapinjućem stablu orijentiramo od manje oznake prema većoj oznaci krajeva.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

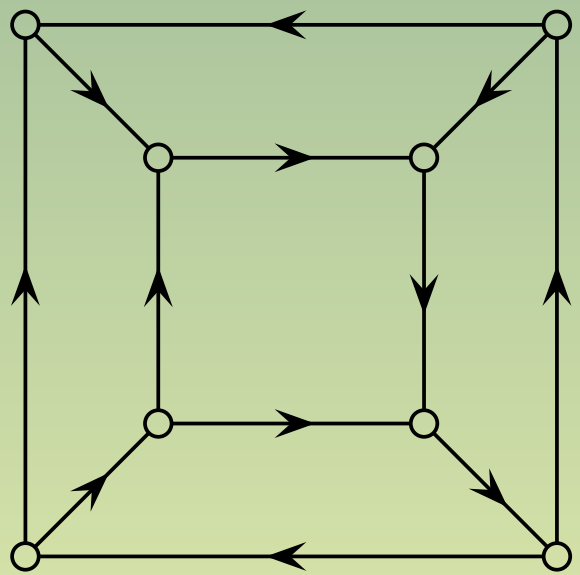
Rješenje.



Bridove koji ne pripadaju razapinjućem stablu orijentiramo od veće oznake prema manjoj oznaci krajeva.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



Na taj način dobivamo jednu jaku orijentaciju na promatranom grafu, tj. dobiveni digraf je dipovezan.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.37.

Da li svaki Hamiltonov graf dopušta jaku orijentaciju? Da li graf koji dopušta jaku orijentaciju mora biti Hamiltonov? Objasnite!

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.37.

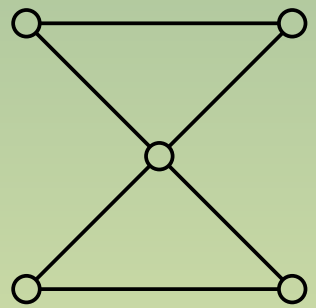
Da li svaki Hamiltonov graf dopušta jaku orijentaciju? Da li graf koji dopušta jaku orijentaciju mora biti Hamiltonov? Objasnite!

Rješenje.

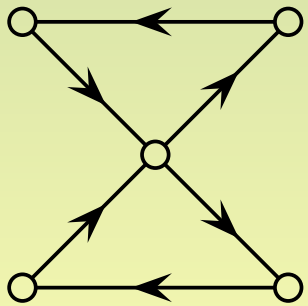
Ako je graf Hamiltonov, tada postoji u njemu ciklus koji sadrži sve vrhove tog grafa. Neka je to ciklus $\mathcal{H} = v_1 v_2 \cdots v_n v_1$. Orijentiramo ciklus $\mathcal{H}$ kao $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{n-1} \to v_n \to v_1$. Ostale bridove orijentiramo po volji. Dobivena orijentacija jest jaka orijentacija na čitavom grafu. Dakle, svaki Hamiltonov graf dopušta jaku orijentaciju. Obrnuto, graf koji dopušta jaku orijentaciju ne mora biti Hamiltonov.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Na primjer, donji graf nije Hamiltonov,



ali dopušta jaku orijentaciju, npr.



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.38.

Dokažite da se svaki povezani graf može orijentirati tako da dobiveni digraf neće biti dipovezan.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.38.

Dokažite da se svaki povezani graf može orijentirati tako da dobiveni digraf neće biti dipovezan.

Rješenje.

Neka je $v \in V(G)$ proizvoljni vrh povezanog grafa G. Odaberimo orijentaciju takvu da je $d^+(v) = 0$. Takva orijentacija na G postoji, ali naravno nije jedinstvena. Dobiveni digraf očito nije dipovezan jer ne postoji usmjereni put od vrha v do bilo kojeg drugog vrha iz G.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.39.

Dokažite ili opovrgnite: ako je svaki brid u grafu dio nekog ciklusa, tada graf dopušta jaku orijentaciju.

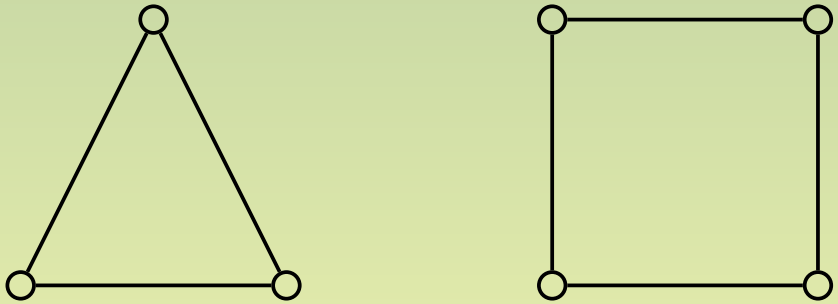
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.39.

Dokažite ili opovrgnite: ako je svaki brid u grafu dio nekog ciklusa, tada graf dopušta jaku orijentaciju.

Rješenje.

Tvrdnja ne vrijedi, npr. u grafu



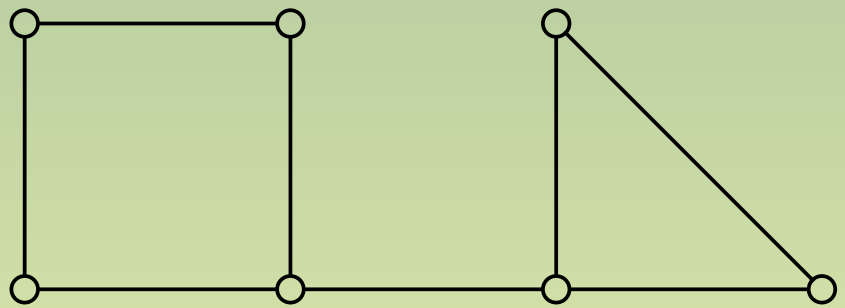
je svaki brid dio nekog ciklusa, ali graf ne dopušta jaku orijentaciju jer nije povezan.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.40.

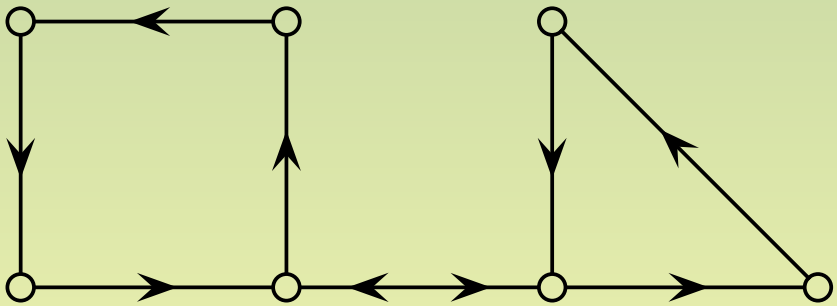
Plan grada s ulicama kao bridovima reprezentiran je grafom



Na koji način organizirati promet u gradu tako da bude što je više moguće jednosmjernih ulica i da se pritom iz svakog mjesta može doći u bilo koje drugo mjesto u gradu?

Rješenje.

Uklonimo sve rezne bridove iz grafa. Tada svaka komponenta povezanosti dopušta jaku orijentaciju. Ako je komponenta povezanosti prazan graf, tj. samo jedan vrh, tada niti nemamo što orijentirati tu komponentu. Dodamo natrag rezne bridove i oni moraju biti dvosmjerne ulice. Za naš graf dobivamo, npr.



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Zadatak 9.4.

Objasnite na koji se način može upotrijebiti DFS algoritam da bi se pronašli svi rezni bridovi u danom povezanom grafu. Smislite i implementirajte algoritam čija će složenost biti najviše $O(\nu^3)$. Sjetite se u kakvoj su vezi rezni bridovi i razapinjuća stabla nekog grafa.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Transportne mreže

Transportna mreža je striktni digraf $D = (V, A)$ za koji vrijedi:

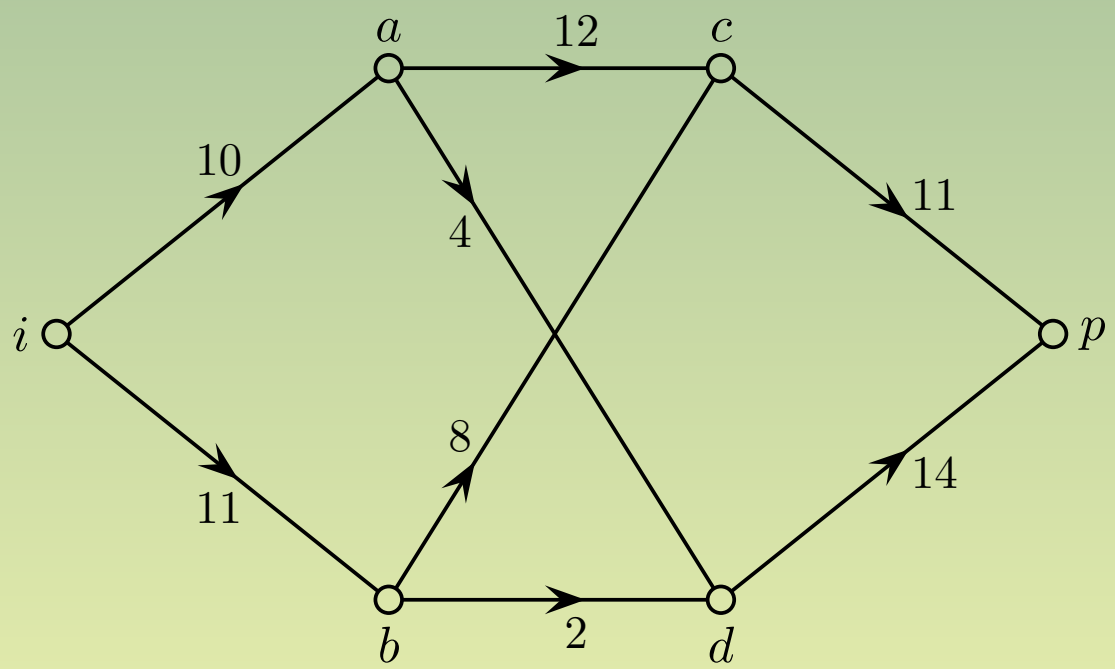
a. Postoji jedinstveni vrh i za koji je $d^-(i) = 0$. Takav vrh se zove **izvor**.

b. Postoji jedinstveni vrh p za koji je $d^+(p) = 0$. Takav vrh se zove **ponor**.

c. Svakom luku $a = (u, v)$ pridružen je kapacitet $c(a) = c(u, v) = c_{uv} \geqslant 0$ preko funkcije kapaciteta $c : A \to \mathbb{R}^+$. Ako ne postoji luk (u, v), stavljamo $c_{uv} = 0$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Na slici je prikazana transportna mreža s izvorom i i ponorom p. Kapacitet luka (a, c) je 12, tj. $c_{ac} = 12$. Ne postoji luk (c, a) pa je $c_{ca} = 0$.



Kapaciteti svih lukova su:

$$c_{ia} = 10, \quad c_{ib} = 11, \quad c_{ac} = 12, \quad c_{bd} = 2,$$
$$c_{bc} = 8, \quad c_{ad} = 4, \quad c_{dp} = 14, \quad c_{cp} = 11$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Neka je $D = (V, A)$ transportna mreža s izvorom i i ponorom p. (i, p) **protok**, ili kratko **protok**, transportne mreže D je funkcija $f : A \to \mathbb{R}^+$ koja luku (u, v) pridružuje nenegativni realni broj $f(u, v) = f_{uv}$ tako da vrijedi:

a. $0 \leqslant f_{uv} \leqslant c_{uv}, \quad \forall u, v \in V$

   Protok kroz svaki luk ne može biti veći od kapaciteta tog luka.

b. $\sum_{v \in V} f_{uv} = \sum_{v \in V} f_{vu}, \quad \forall u \in V \setminus \{i, p\}$

   Ovo je zakon očuvanja količine. Količina koja uđe u vrh u mora biti jednaka količini koja izađe iz vrha u.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Neka je $D = (V, A)$ transportna mreža i $f : A \to \mathbb{R}^+$ (i, p) protok. Za svaki vrh $u \in V \setminus \{p\}$ definiramo

$$\text{izlaz}(u) = \sum_{v \in V} f_{uv}.$$

Nadalje, za svaki vrh $u \in V \setminus \{i\}$ definiramo

$$\text{ulaz}(u) = \sum_{v \in V} f_{vu}.$$

Zakon očuvanja količine zapravo govori da je

$$\text{ulaz}(u) = \text{izlaz}(u), \quad \forall u \in V \setminus \{i, p\}.$$

Interesantno je da tada vrijedi da je također (dokazat ćemo to kasnije)

$$\text{izlaz}(i) = \text{ulaz}(p),$$

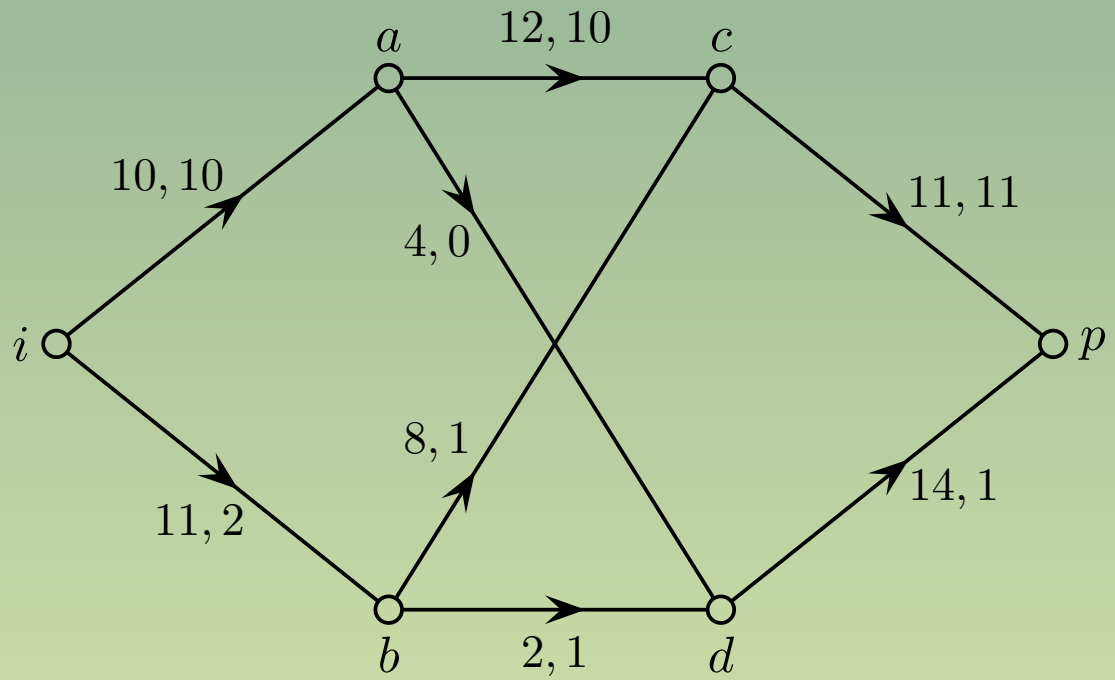
tj. količina koja izađe iz izvora dolazi do ponora bez gubitaka.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Napomena.

Ako u transportnoj mreži svaki luk ima samo jednu oznaku, tada je ta oznaka zapravo kapacitet tog luka. Ukoliko svaki luk ima dvije oznake, tada je prva oznaka kapacitet tog luka, a druga oznaka je vrijednost protoka kroz taj luk. Dakle, ako neki luk ima oznake $15, 8$, tada to znači da taj luk ima kapacitet 15, a vrijednost protoka kroz njega je 8.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



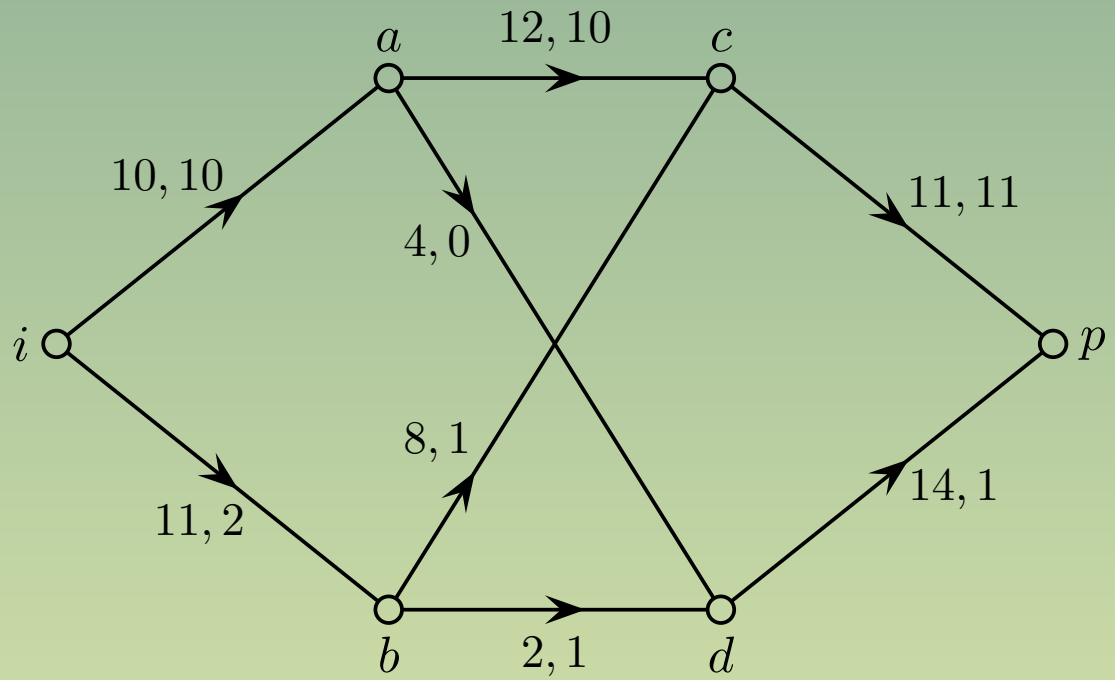
Kapaciteti svih lukova su:

$$c_{ia} = 10, \quad c_{ib} = 11, \quad c_{ac} = 12, \quad c_{bd} = 2,$$
$$c_{bc} = 8, \quad c_{ad} = 4, \quad c_{dp} = 14, \quad c_{cp} = 11$$

Vrijednosti protoka kroz pojedine lukove:

$$f_{ia} = 10, \quad f_{ib} = 2, \quad f_{ac} = 10, \quad f_{bd} = 1,$$
$$f_{bc} = 1, \quad f_{ad} = 0, \quad f_{dp} = 1, \quad f_{cp} = 11$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Zakon očuvanja količine za pojedine vrhove (osim izvora i ponora):

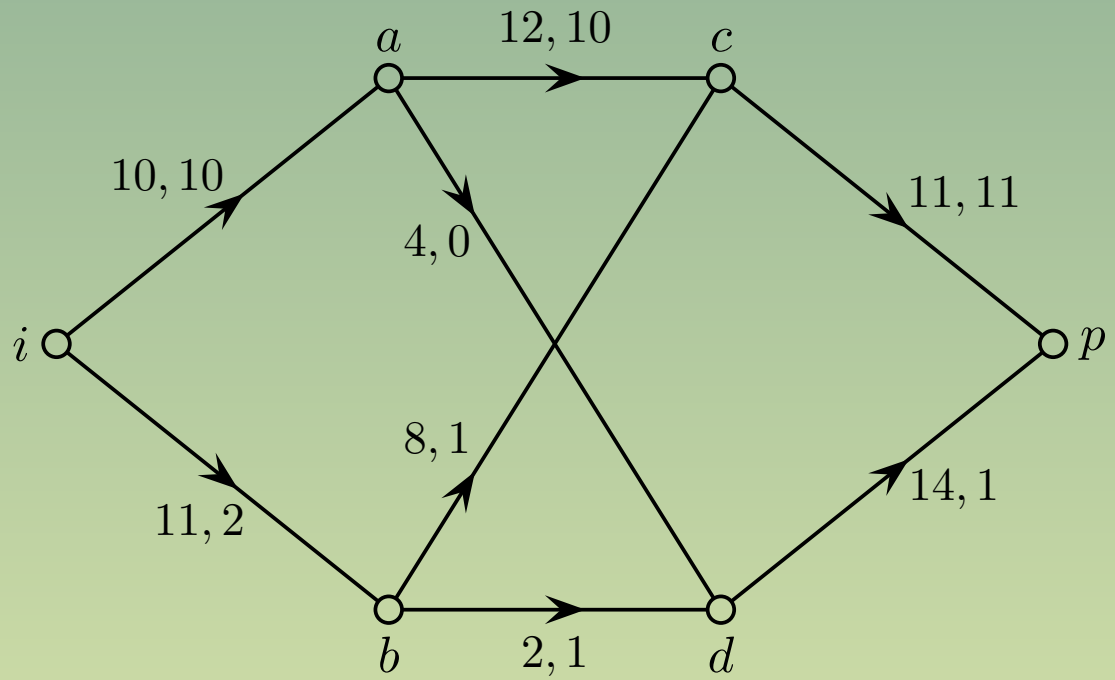
$$\text{ulaz}(a) = f_{ia} = 10, \quad \text{izlaz}(a) = f_{ac} + f_{ad} = 10 + 0 = 10$$

$$\text{ulaz}(b) = f_{ib} = 2, \quad \text{izlaz}(b) = f_{bc} + f_{bd} = 1 + 1 = 2$$

$$\text{ulaz}(c) = f_{ac} + f_{bc} = 10 + 1 = 11, \quad \text{izlaz}(c) = f_{cp} = 11$$

$$\text{ulaz}(d) = f_{ad} + f_{bd} = 0 + 1 = 1, \quad \text{izlaz}(d) = f_{dp} = 1$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Svaki protok od izvora dolazi do ponora bez gubitaka.

$$\text{izlaz}(i) = f_{ia} + f_{ib} = 10 + 2 = 12$$

$$\text{ulaz}(p) = f_{cp} + f_{dp} = 11 + 1 = 12$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Propozicija 9.5.

Neka je $D = (V, A)$ transportna mreža sa izvorom i i ponorom p. Neka je f protok u D. Tada je $\text{izlaz}(i) = \text{ulaz}(p)$.

Dokaz.

Iz očite relacije

$$\sum_{u,v \in V} f_{uv} = \sum_{u,v \in V} f_{vu}$$

slijedi da je

$$\sum_{u,v \in V} f_{uv} - \sum_{u,v \in V} f_{vu} = 0.$$

Dalje dobivamo

$$\sum_{u \in V} \left(\sum_{v \in V} f_{uv} - \sum_{v \in V} f_{vu} \right) = 0.$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Zbog zakona očuvanja količine, slijedi da je izraz

$$\sum_{v \in V} f_{uv} - \sum_{v \in V} f_{vu}$$

uvijek jednak nuli, osim za $u = i$ i $u = p$. Iz toga slijedi da je

$$\sum_{v \in V} f_{iv} - \sum_{v \in V} f_{vi} + \sum_{v \in V} f_{pv} - \sum_{v \in V} f_{vp} = 0. \qquad (\clubsuit)$$

Kako ne postoje lukovi oblika (v, i), niti lukovi oblika (p, v) slijedi

$$\sum_{v \in V} f_{vi} = 0, \quad \sum_{v \in V} f_{pv} = 0. \qquad (\spadesuit)$$

Iz $(\clubsuit)$ i $(\spadesuit)$ slijedi

$$\sum_{v \in V} f_{iv} = \sum_{v \in V} f_{vp}$$

pa je $\text{izlaz}(i) = \text{ulaz}(p)$. ♡

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Vrijednost protoka f na transportnoj mreži $D = (V, A)$ s izvorom i i ponorom p je

$$\mathrm{val}(f) := \mathrm{izlaz}(i) = \mathrm{ulaz}(p).$$

Za protok f^* kažemo da je **maksimalni protok** u transportnoj mreži $D = (V, A)$ ako u D ne postoji protok f za koji je $\mathrm{val}(f) > \mathrm{val}(f^*)$.

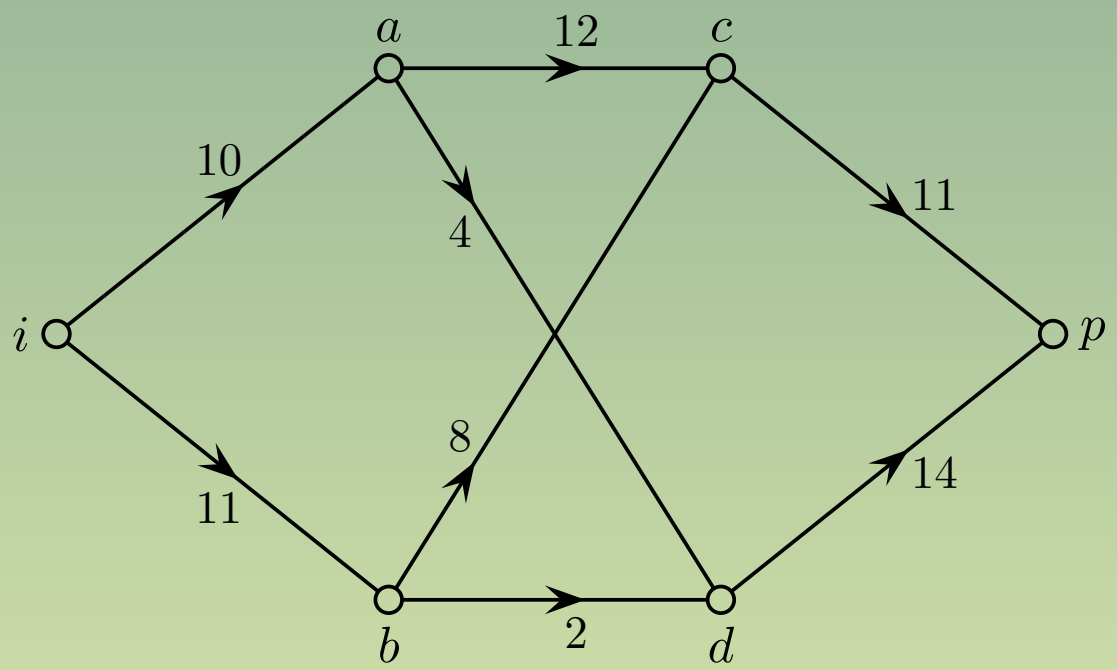
(i, p)-**rez** u transportnoj mreži $D = (V, A)$ je particija $\{S, T\}$ od skupa vrhova V takva da je $i \in S$, $p \in T$. **Kapacitet** (i, p)-**reza** $\{S, T\}$ je

$$\mathrm{cap}(S, T) = \sum_{u \in S,\, v \in T} c_{uv}.$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

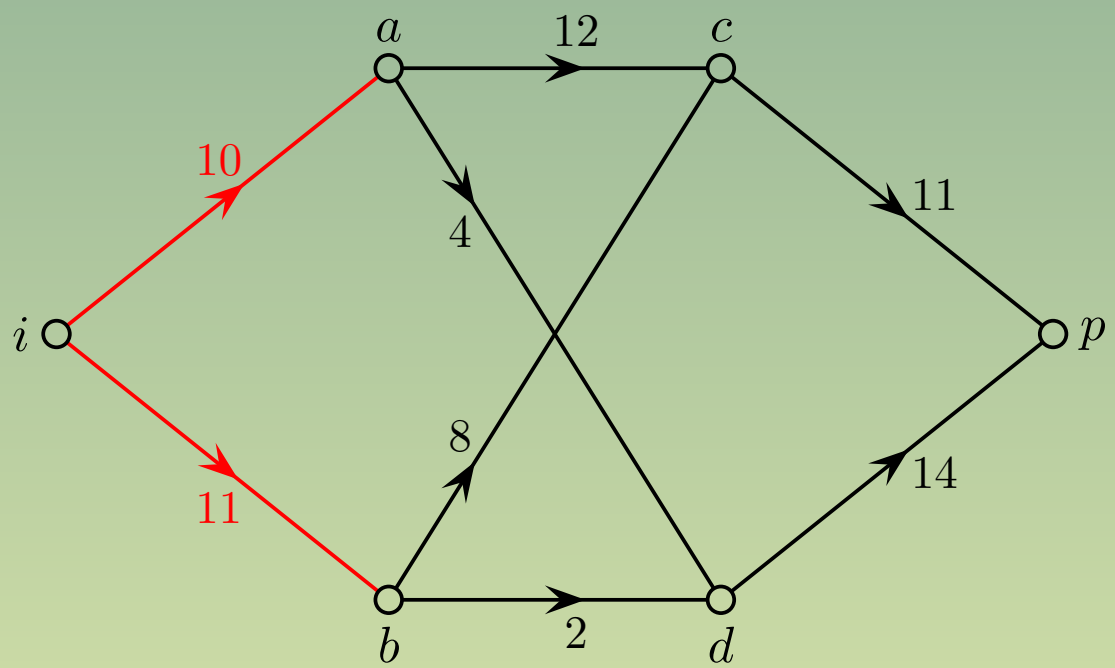
prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



(i, p) rez: $\{S, T\}$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



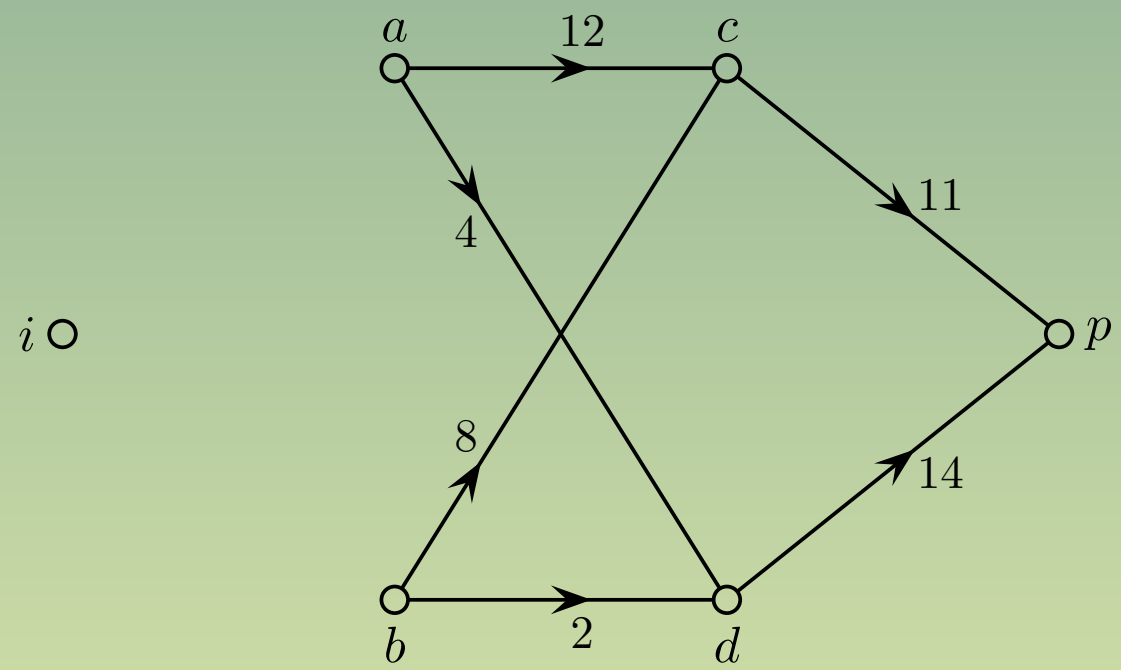
(i, p) rez: $\{S, T\}$

$S = \{i\}, \quad T = \{a, b, c, d, p\}$

lukovi iz S u T: ia, ib

$\text{cap}(S, T) = c_{ia} + c_{ib} = 10 + 11 = 21$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



(i, p) rez: $\{S, T\}$

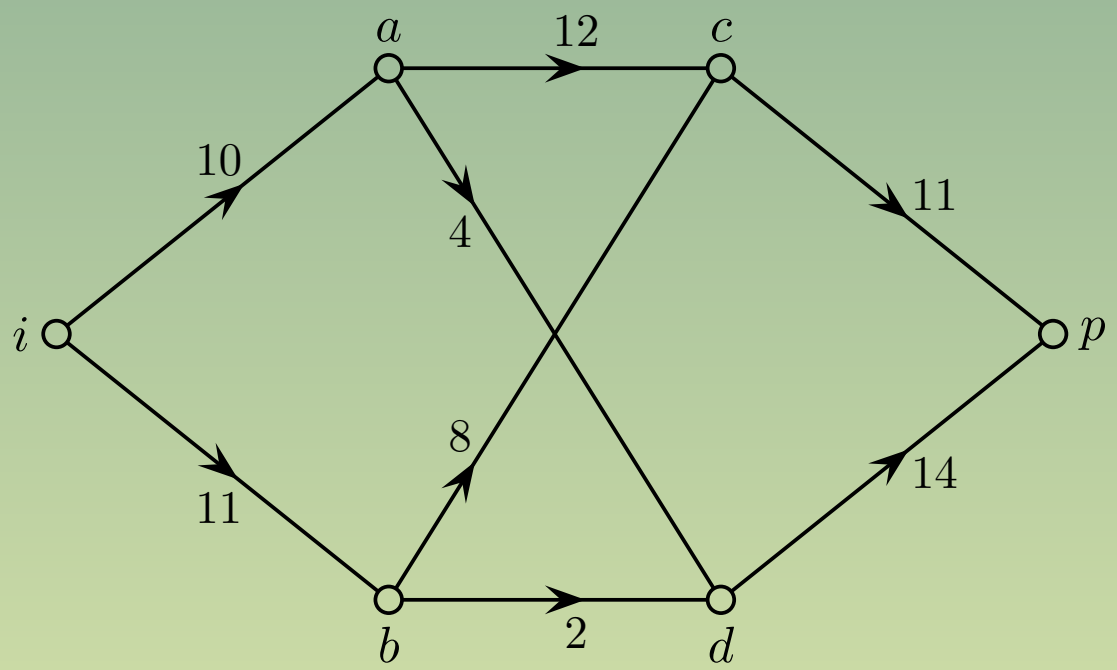
$S = \{i\}, \quad T = \{a, b, c, d, p\}$

lukovi iz S u T: ia, ib

$\text{cap}(S, T) = c_{ia} + c_{ib} = 10 + 11 = 21$

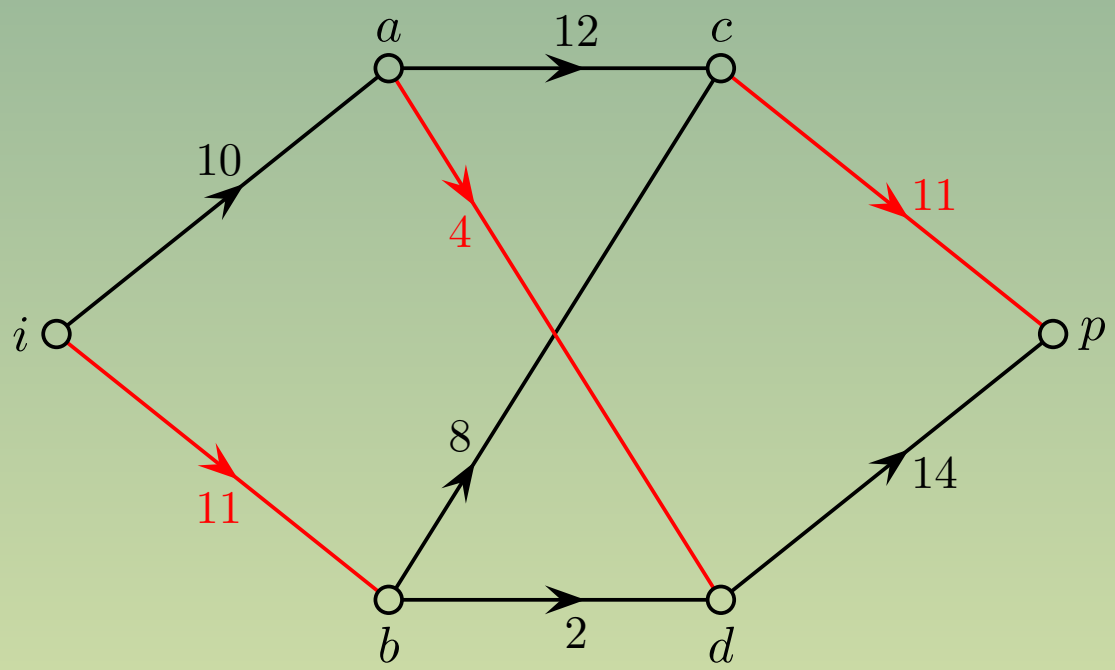
Uklonimo li sve lukove iz ovog (i, p) reza, bit će prekinuti svaki protok od izvora do ponora.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



(i, p) rez: $\{S, T\}$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



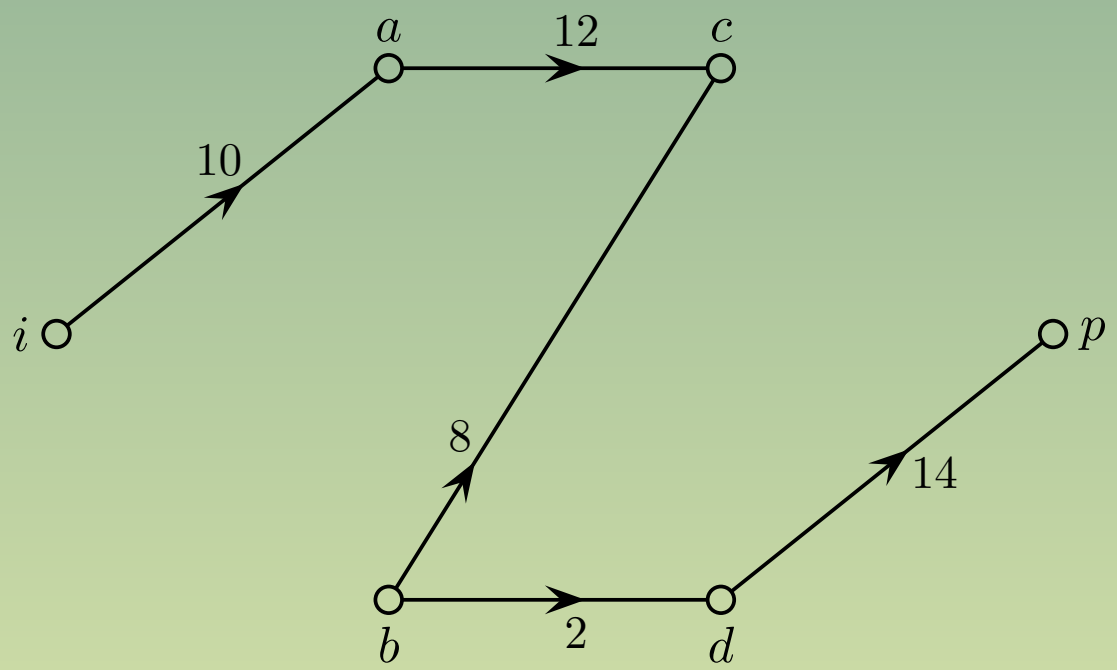
(i, p) rez: $\{S, T\}$

$S = \{i, a, c\}, \quad T = \{b, d, p\}$

lukovi iz S u T: ib, ad, cp

$\text{cap}(S, T) = c_{ib} + c_{ad} + c_{cp} = 11 + 4 + 11 = 26$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



(i, p) rez: $\{S, T\}$

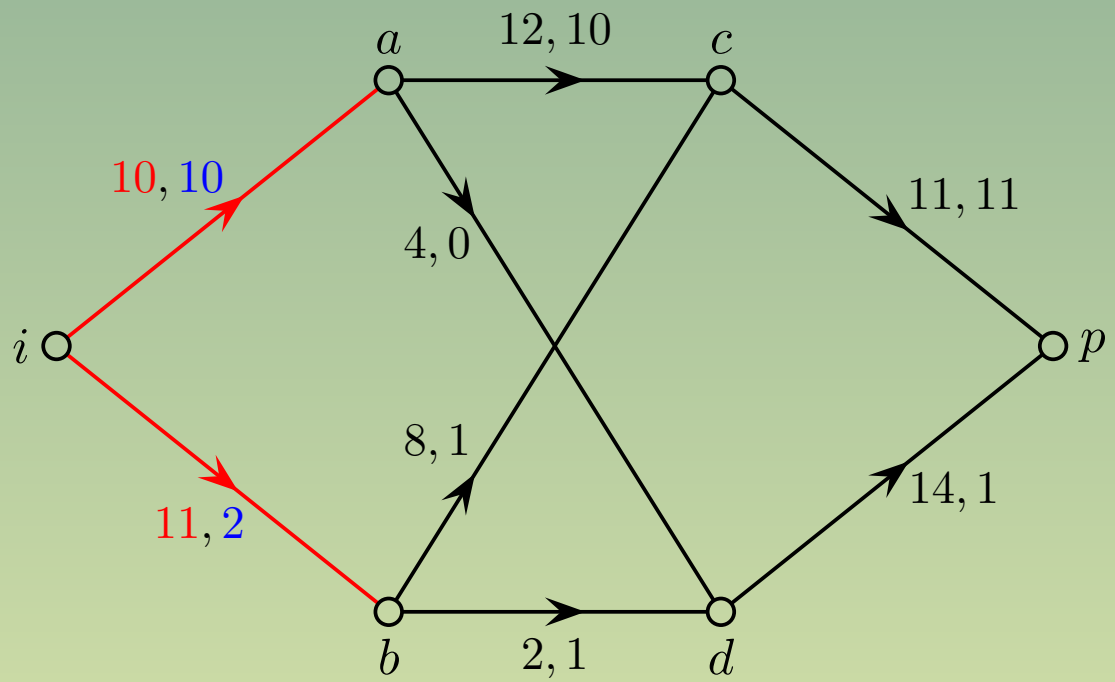
$S = \{i, a, c\}, \quad T = \{b, d, p\}$

lukovi iz S u T: ib, ad, cp

$\text{cap}(S, T) = c_{ib} + c_{ad} + c_{cp} = 11 + 4 + 11 = 26$

Uklonimo li sve lukove iz ovog (i, p) reza, bit će prekinuti svaki protok od izvora do ponora.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



(i,p) rez: $\{S,T\}$ protok: f

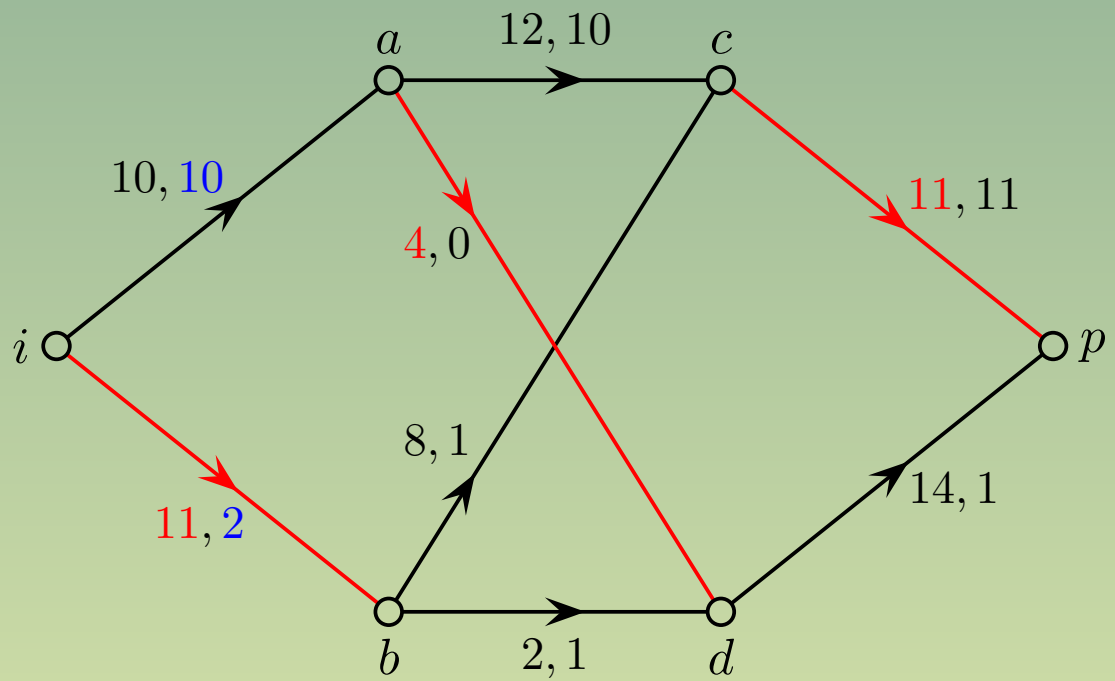
$S=\{i\}, \quad T=\{a,b,c,d,p\}$

$\text{cap}(S,T)=c_{ia}+c_{ib}=10+11=21$

$\text{val}(f)=f_{ia}+f_{ib}=10+2=12$

Vrijednost protoka f je manja od kapaciteta (i,p) reza $\{S,T\}$.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



(i,p) rez: $\{S,T\}$ protok: f

$S=\{i,a,c\}, \quad T=\{b,d,p\}$

$\text{cap}(S,T)=c_{ib}+c_{ad}+c_{cp}=11+4+11=26$

$\text{val}(f)=f_{ia}+f_{ib}=10+2=12$

Vrijednost protoka f je manja od kapaciteta (i,p) reza $\{S,T\}$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Napomena.

Općenito, ako je $\{S, T\}$ bilo koji (i, p) rez u transportnoj mreži, tada ako uklonimo sve lukove koji imaju početak u S, a kraj u T, bit će prekinuti svaki protok od izvora prema ponoru. Isto tako, vrijednost bilo kojeg protoka u transportnoj mreži je uvijek manja ili jednaka od kapaciteta bilo kojeg (i, p) reza. To ćemo sada i dokazati.

Teorem 9.11.

U bilo kojoj transportnoj mreži vrijednost bilo kojeg protoka je uvijek manja ili jednaka od kapaciteta bilo kojeg (i, p) reza.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dokaz.

Neka je $D = (V, A)$ transportna mreža. Nadalje, neka je f proizvoljni protok u D, a $\{S, T\}$ proizvoljni (i, p) rez u D. Zbog zakona očuvanja količine vrijedi da je $\text{ulaz}(u) = \text{izlaz}(u)$ za svaki vrh $u \in V \setminus \{i, p\}$, tj.

$$\sum_{v \in V} f_{uv} - \sum_{v \in V} f_{vu} = 0, \quad \forall u \in V \setminus \{i, p\}.$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned} \text{val}(f) &= \sum_{v \in V} f_{iv} = \sum_{u \in S} \left(\sum_{v \in V} f_{uv} - \sum_{v \in V} f_{vu} \right) \\ &= \sum_{\substack{u \in S \\ v \in V}} f_{uv} - \sum_{\substack{u \in S \\ v \in V}} f_{vu} \end{aligned}$$

Kako je $\{S, T\}$ particija od V, dalje dobivamo

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

$$\begin{aligned}\mathrm{val}(f) &= \sum_{\substack{u\in S\\ v\in V}} f_{uv} - \sum_{\substack{u\in S\\ v\in V}} f_{vu}\\ &= \sum_{\substack{u\in S\\ v\in S}} f_{uv} + \sum_{\substack{u\in S\\ v\in T}} f_{uv} - \sum_{\substack{u\in S\\ v\in S}} f_{vu} - \sum_{\substack{u\in S\\ v\in T}} f_{vu}\\ &= \underbrace{\sum_{\substack{u\in S\\ v\in S}} f_{uv} - \sum_{\substack{u\in S\\ v\in S}} f_{vu}}_{=0} + \sum_{\substack{u\in S\\ v\in T}} (f_{uv} - f_{vu})\end{aligned}$$

pa je

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{\substack{u\in S\\ v\in T}} (f_{uv} - f_{vu}).$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Znamo da je $f_{uv} \leqslant c_{uv}$ i $f_{uv} \geqslant 0$ za svaki $u, v \in V$ pa slijedi

$$f_{uv} - f_{vu} \leqslant c_{uv}, \quad \forall u, v \in V.$$

Konačno dobivamo da je

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} (f_{uv} - f_{vu}) \leqslant \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} c_{uv} = \mathrm{cap}(S, T).$$

Dakle, zaista je $\mathrm{val}(f) \leqslant \mathrm{cap}(S, T)$. ♡

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Iz dokaza prethodnog teorema slijedi

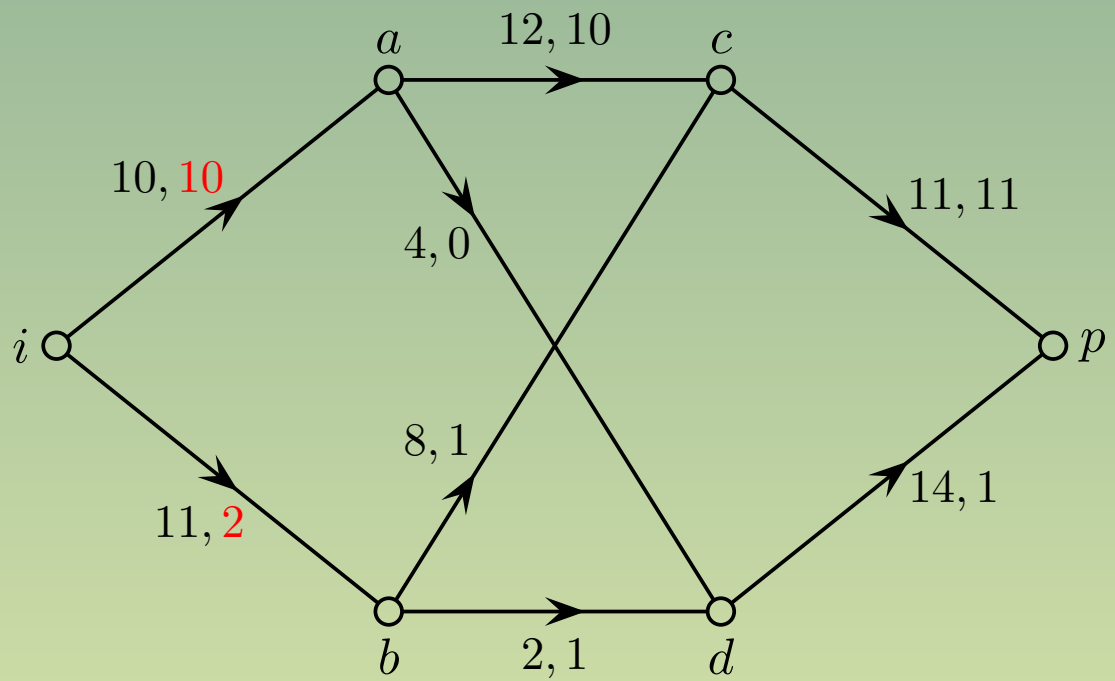
Korolar 9.3.

Ako je f bilo koji protok u transportnoj mreži $D = (V, A)$, a $\{S, T\}$ bilo koji (i, p) rez, tada je

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} (f_{uv} - f_{vu}).$$

Drugim riječima, vrijednost protoka pomoću nekog (i, p) reza $\{S, T\}$ možemo izračunati na sljedeći način. Najprije sumiramo protoke kroz sve lukove koji imaju početak u S i kraj u T, a zatim od te sume oduzmemo sumu protoka kroz sve lukove koji imaju početak u T i kraj u S.

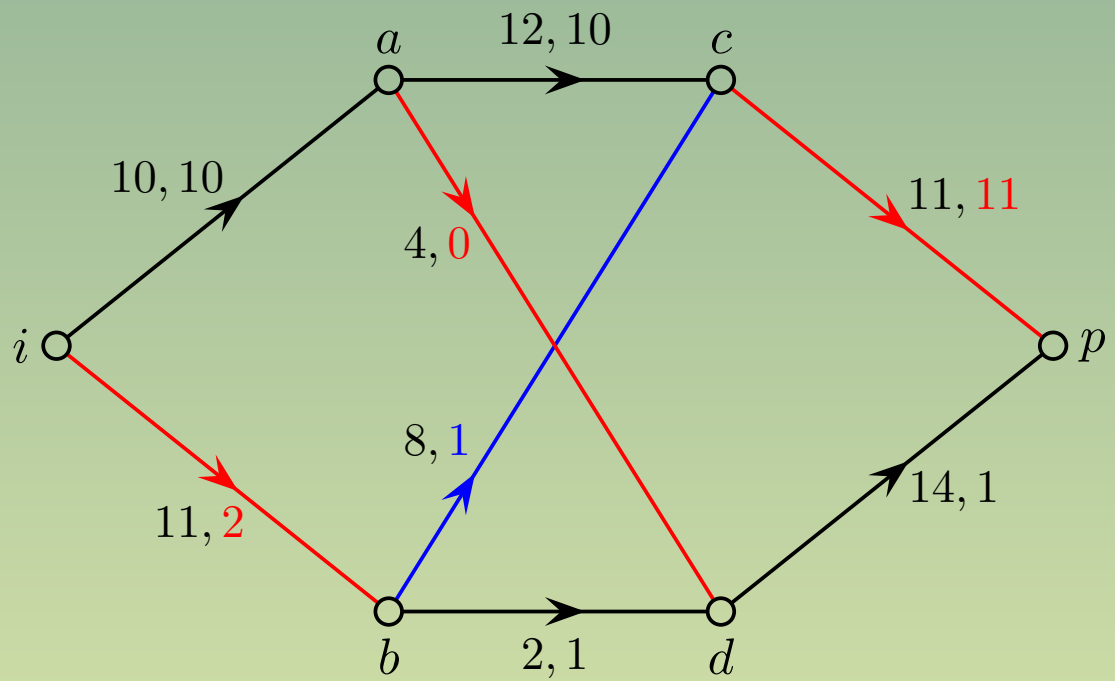
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Po definiciji:

$$\text{val}(f) = \text{izlaz}(i) = f_{ia} + f_{ib} = 10 + 2 = 12$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Po korolaru: (i,p) rez $\{S,T\}$, $\quad S=\{i,a,c\}$, $T=\{b,d,p\}$

$$\mathrm{val}(f)=\sum_{\substack{u\in S\\ v\in T}}(f_{uv}-f_{vu})=$$

$$=(f_{ib}+f_{ad}+f_{cp})-f_{bc}=$$

$$=(2+0+11)-1=12$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Korolar 9.4.

Pretpostavimo da postoje neki protok f i neki (i,p) rez $\{S,T\}$ u transportnoj mreži $D=(V,A)$ takvi da je $\mathrm{val}(f)=\mathrm{cap}(S,T)$. Tada je f maksimalni protok, a $\{S,T\}$ je (i,p) rez s minimalnim kapacitetom (svaki drugi (i,p) rez ima kapacitet veći ili jednak od $\mathrm{cap}(S,T)$).

Dokaz.

Neka je f_1 bilo koji drugi protok u D. Prema ◂ teoremu 9.11. je tada $\mathrm{val}(f_1)\leqslant\mathrm{cap}(S,T)$. Kako je $\mathrm{cap}(S,T)=\mathrm{val}(f)$, slijedi da je $\mathrm{val}(f_1)\leqslant\mathrm{val}(f)$ pa je f maksimalni protok u D.

Neka je $\{S_1,T_1\}$ bilo koji drugi (i,p) rez u D. Prema ◂ teoremu 9.11. je $\mathrm{val}(f)\leqslant\mathrm{cap}(S_1,T_1)$. Kako je $\mathrm{val}(f)=\mathrm{cap}(S,T)$, slijedi da je $\mathrm{cap}(S,T)\leqslant\mathrm{cap}(S_1,T_1)$ pa je $\{S,T\}$ (i,p) rez s najmanjim mogućim kapacitetom. ♡

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Pokazat ćemo da se pretpostavke prethodnog korolara uvijek mogu ispuniti. To je naš sljedeći zadatak.

Neka je $D = (V, A)$ transportna mreža, a f protok u D. Neka je

$$P = u_0 u_1 u_2 \cdots u_{k-1} u_k$$

(u_0, u_k)-put u pripadnom (neorijentiranom) grafu transportne mreže D. Brid $u_{i-1}u_i$ puta P zovemo **direktni luk** ako je $(u_{i-1}, u_i) \in A$, a u protivnom ga zovemo **obrnuti luk**. Za put P definiramo

$$\Delta(P) = \min_{e \in E(P)} \Delta(e)$$

gdje je

$$\Delta(e) = \begin{cases} c(e) - f(e), & \text{ako je } e \text{ direktni luk} \\ f(e), & \text{ako je } e \text{ obrnuti luk} \end{cases}$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

$\Delta(P)$ je zapravo najveći iznos za koji se protok f može povećati duž puta P tako da još uvijek vrijedi $f(u,v) \leqslant c(u,v)$. Kažemo da je put P f-**zasićen** ako je $\Delta(P) = 0$, a f-**nezasićen** ako je $\Delta(P) > 0$. Drugim riječima, f-nezasićeni put je onaj put koji nije iskorišten do punog kapaciteta.

f-**rastući** put je f-nezasićeni (i,p)-put. Dakle, (i,p)-put P je f-rastući ako i samo ako je $\Delta(P) > 0$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Lema 9.2.

Ako postoji f-rastući put u transportnoj mreži, tada f nije maksimalni protok.

Dokaz.

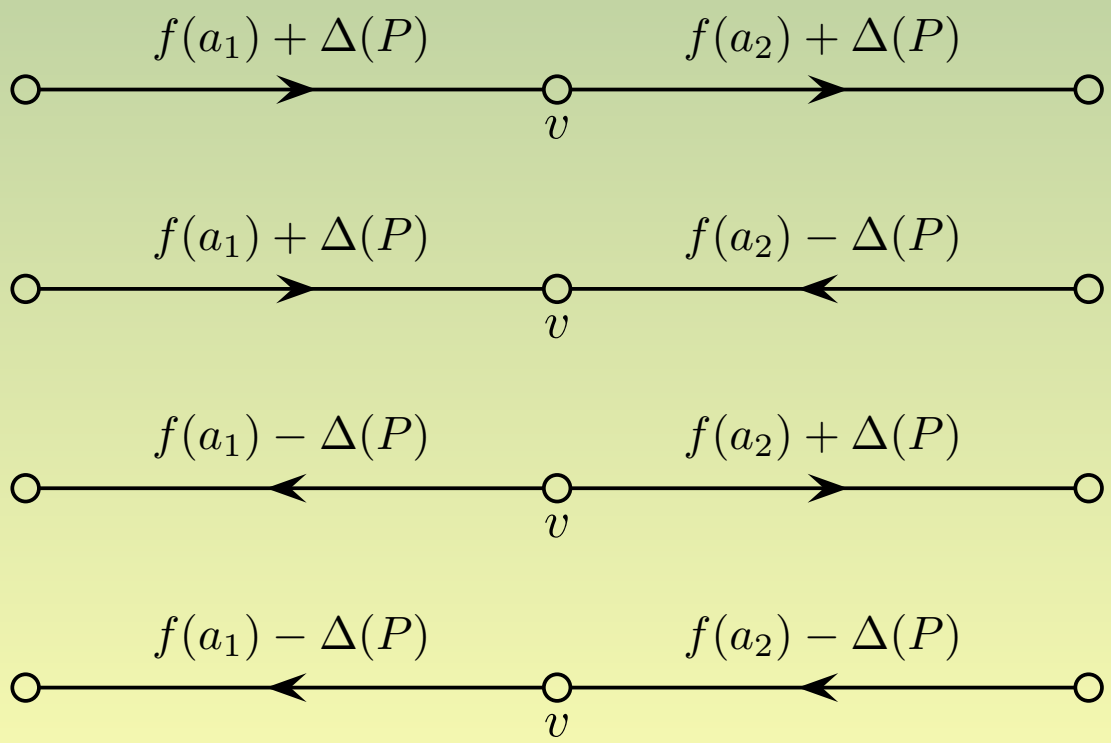
Neka je P f-rastući put. Definiramo novi protok f' formulom

$$f'(a) = \begin{cases} f(a) + \Delta(P), & \text{ako je } a \text{ direktni luk na } P \\ f(a) - \Delta(P), & \text{ako je } a \text{ obrnuti luk na } P \\ f(a), & \text{inače} \end{cases}$$

Dokažimo da je f' zaista protok. Iz definicije od $\Delta(P)$ slijedi da je $0 \leqslant f'(u,v) \leqslant c(u,v)$ za sve vrhove u i v pa je prvi uvjet za protok zadovoljen. Pogledajmo još da zakon očuvanja količine vrijedi za f'.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Jasno je da zakon očuvanja količine vrijedi za vrhove koji nisu na putu P jer se na tom dijelu f i f' podudaraju. Potrebno je samo vidjeti da to vrijedi i za vrhove na putu P. Neka je v neki vrh na putu P. Važno je uočiti da su moguće četiri situacije prikazane na slici.



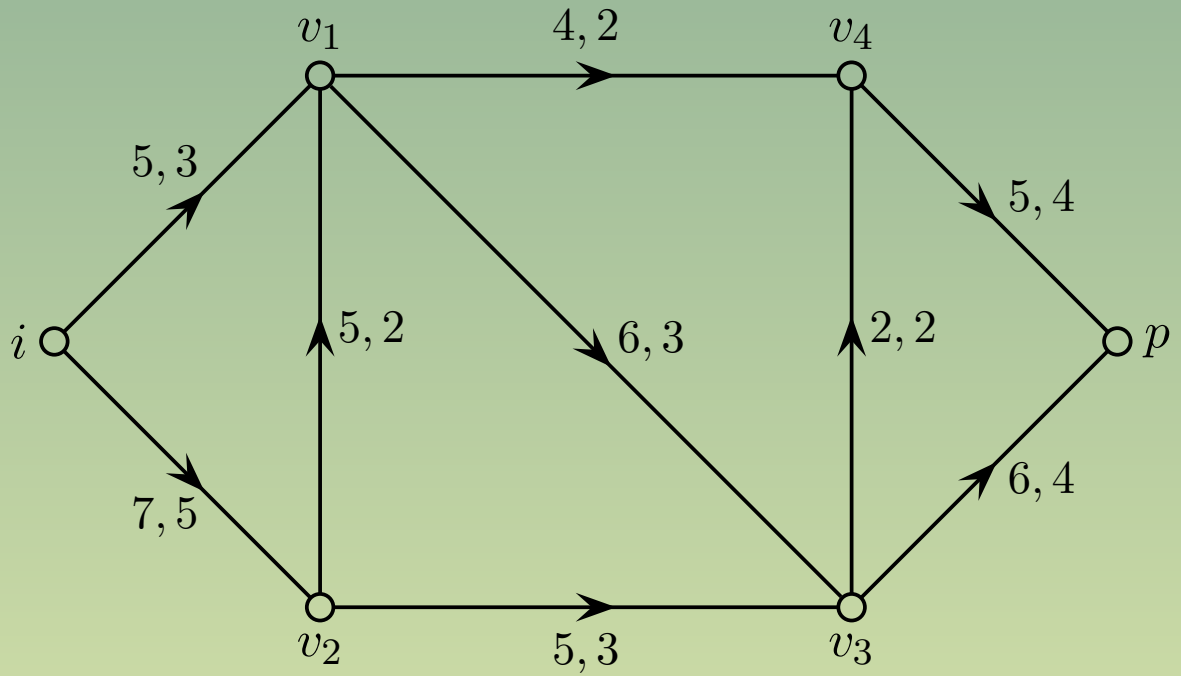
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Za svaku od ovih situacija je jasno da je zakon očuvanja količine očuvan u vrhu v. Stoga je zaista f' protok. No, iz definicije od $\Delta(P)$ slijedi da je

$$\mathrm{val}(f') = \mathrm{val}(f) + \Delta(P) > \mathrm{val}(f)$$

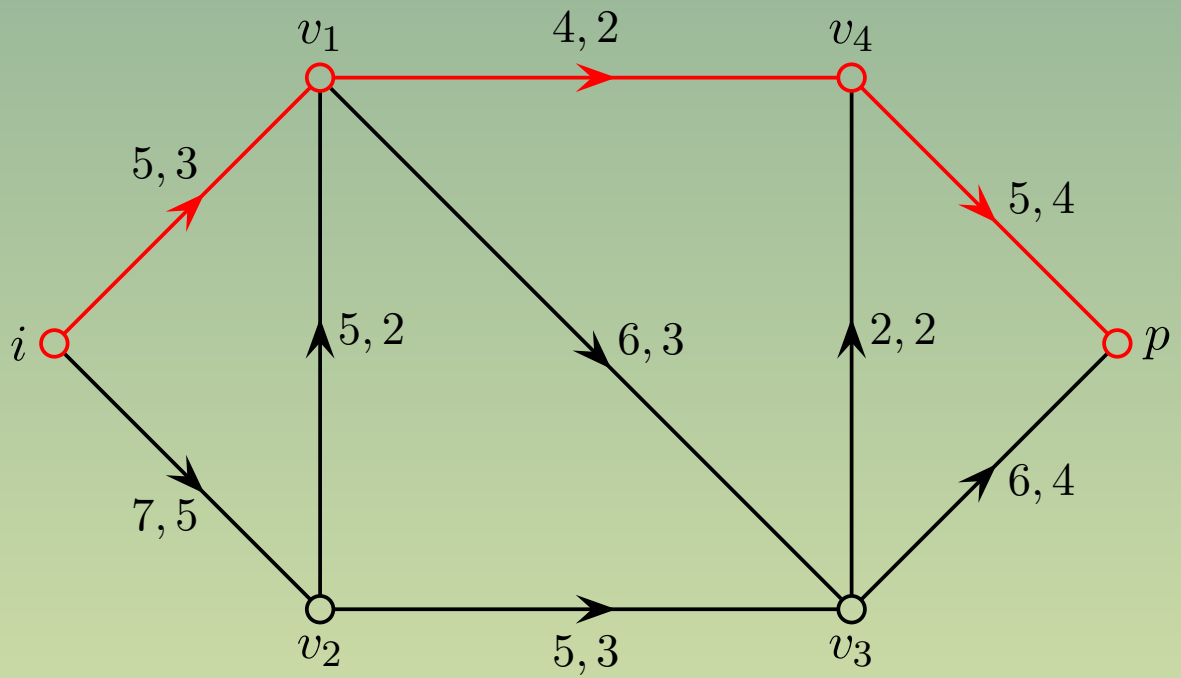
pa f nije maksimalni protok. ♡

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



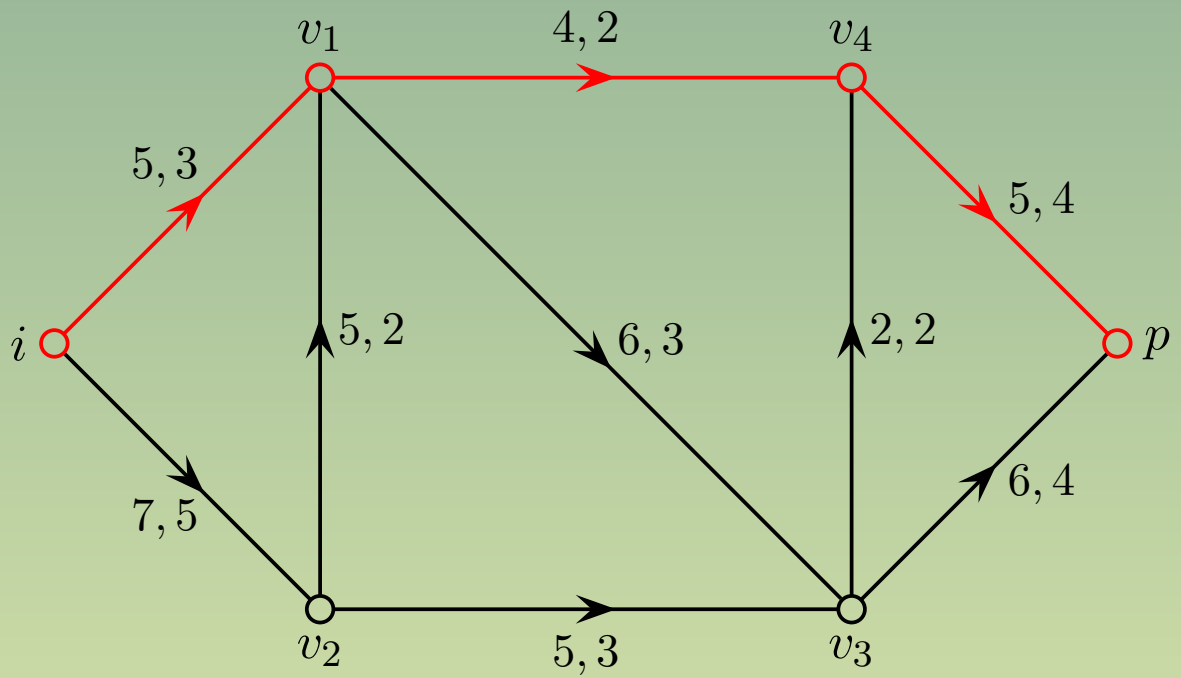
U zadanoj transportnoj mreži

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



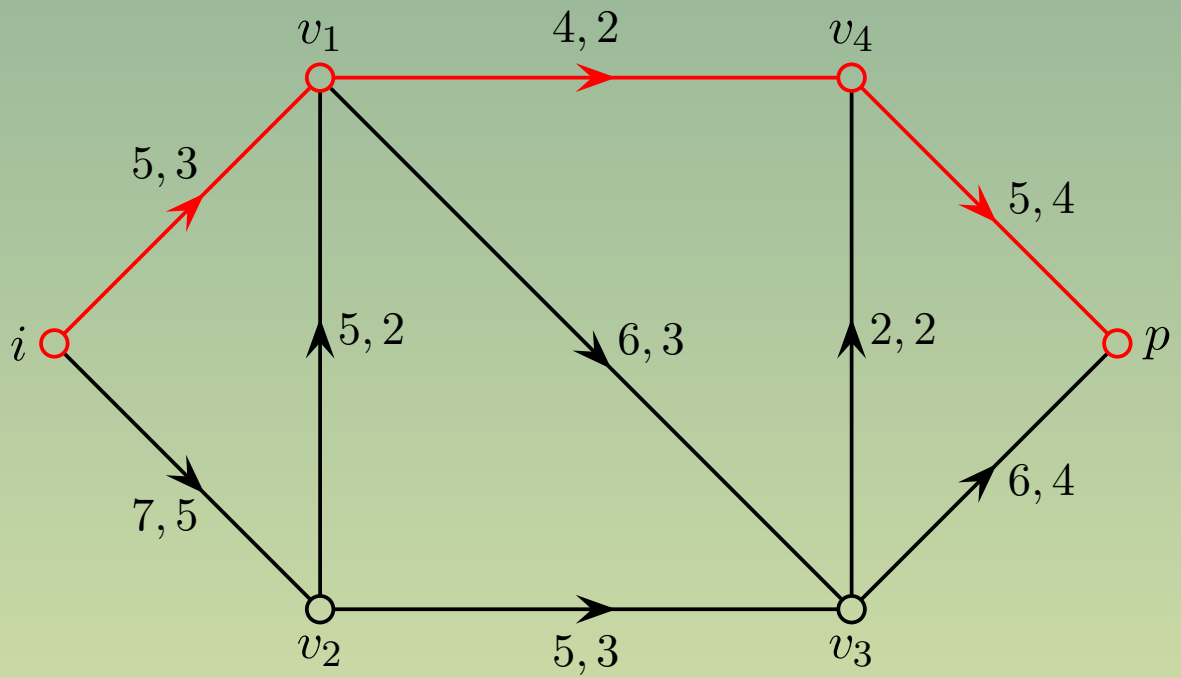
U zadanoj transportnoj mreži (neusmjereni) put $P = iv_1v_4p$ je f-rastući put.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



U zadanoj transportnoj mreži (neusmjereni) put $P = iv_1v_4p$ je f-rastući put. Direktni lukovi na putu P su iv_1, v_1v_4 i v_4p.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

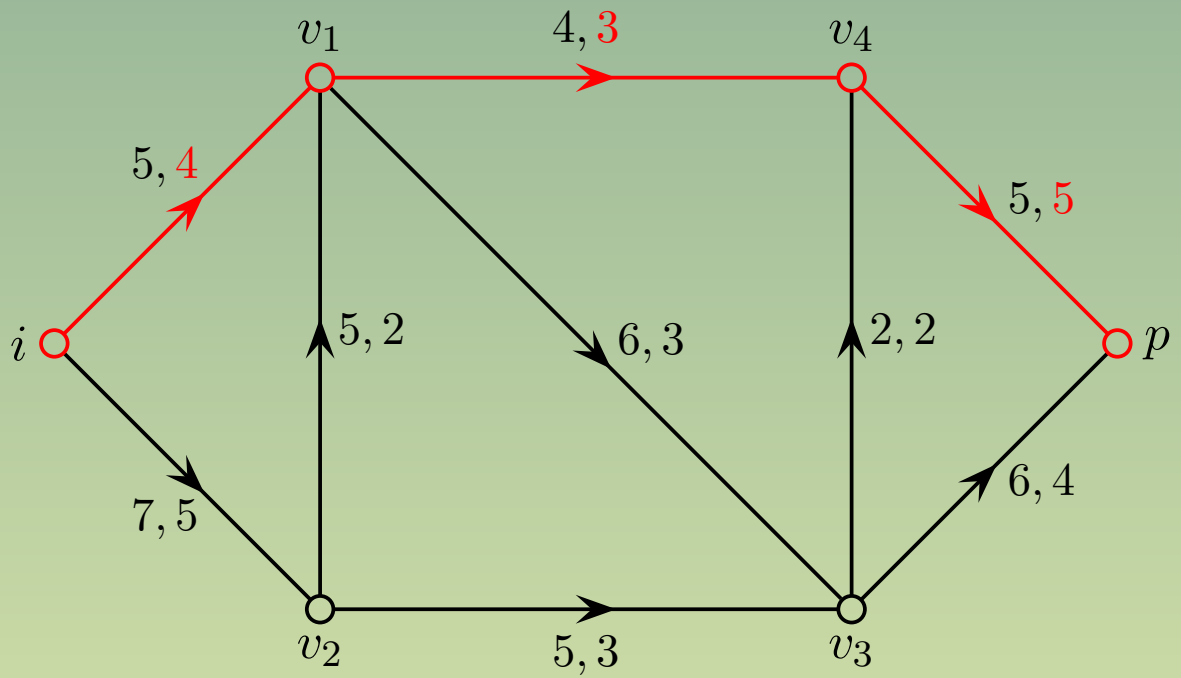


U zadanoj transportnoj mreži (neusmjereni) put $P = iv_1v_4p$ je f-rastući put. Direktni lukovi na putu P su iv_1, v_1v_4 i v_4p.

$$\Delta(iv_1) = 5 - 3 = 2, \quad \Delta(v_1v_4) = 4 - 2 = 2, \quad \Delta(v_4p) = 5 - 4 = 1$$

$$\Delta(P) = \min\{2, 2, 1\} = 1$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



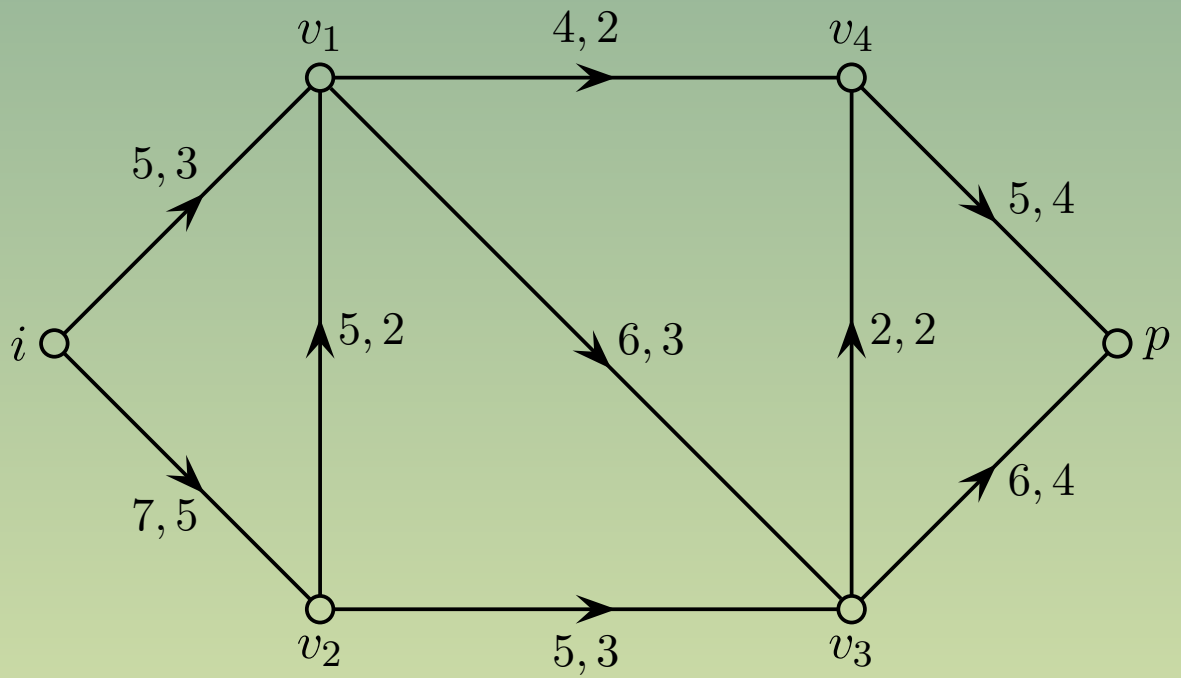
U zadanoj transportnoj mreži (neusmjereni) put $P = iv_1v_4p$ je f-rastući put. Direktni lukovi na putu P su iv_1, v_1v_4 i v_4p.

$$\Delta(iv_1) = 5 - 3 = 2, \quad \Delta(v_1v_4) = 4 - 2 = 2, \quad \Delta(v_4p) = 5 - 4 = 1$$

$$\Delta(P) = \min\{2, 2, 1\} = 1$$

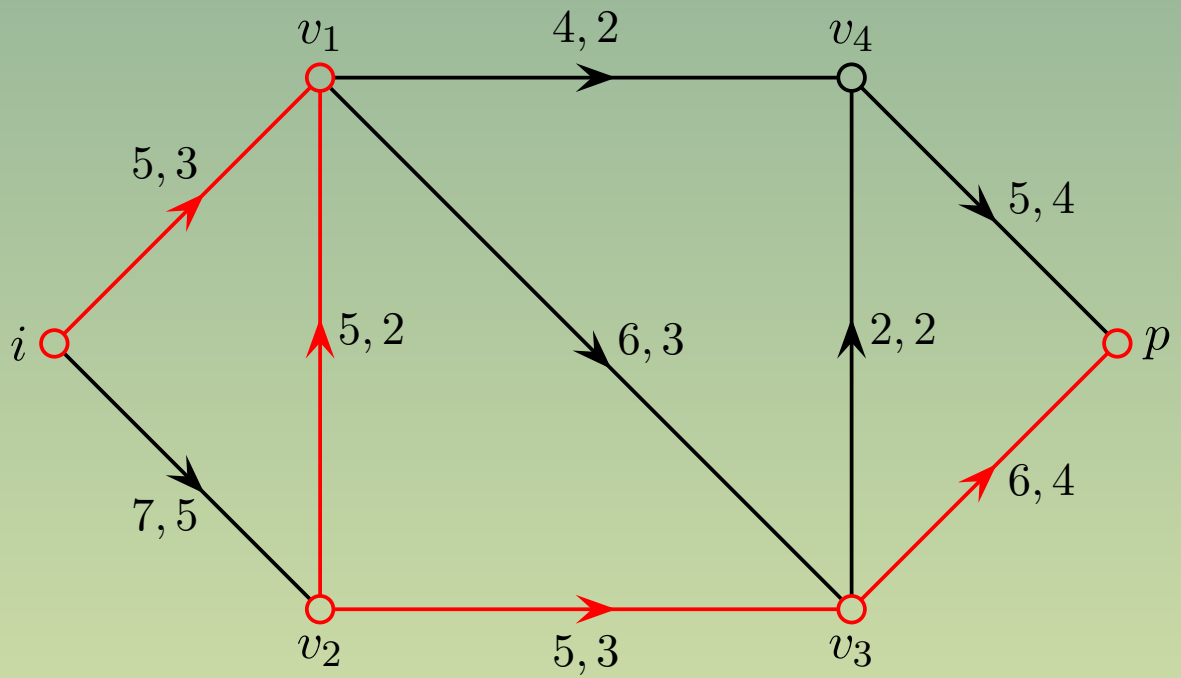
Povećamo li protoke kroz direktne lukove na putu P za $\Delta(P)$, dobivamo novi protok f' za koji je $\mathrm{val}(f') > \mathrm{val}(f)$, tj. $\mathrm{val}(f') = \mathrm{val}(f) + 1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



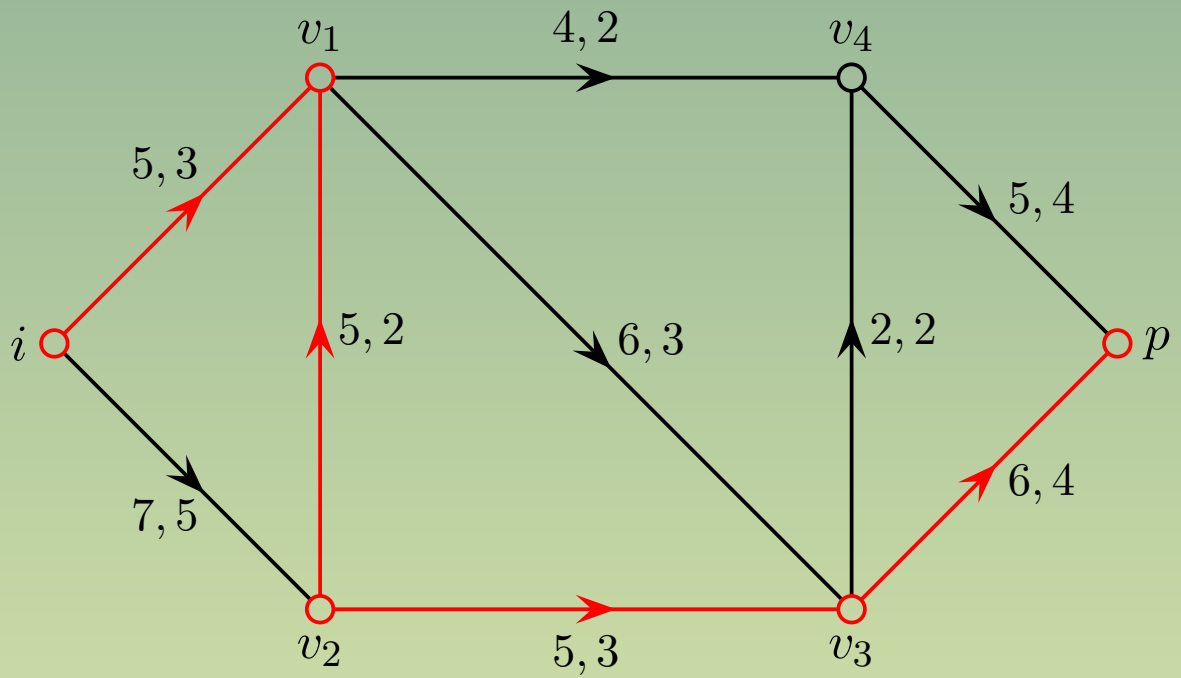
Vratimo se na početnu sliku i pogledajmo

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



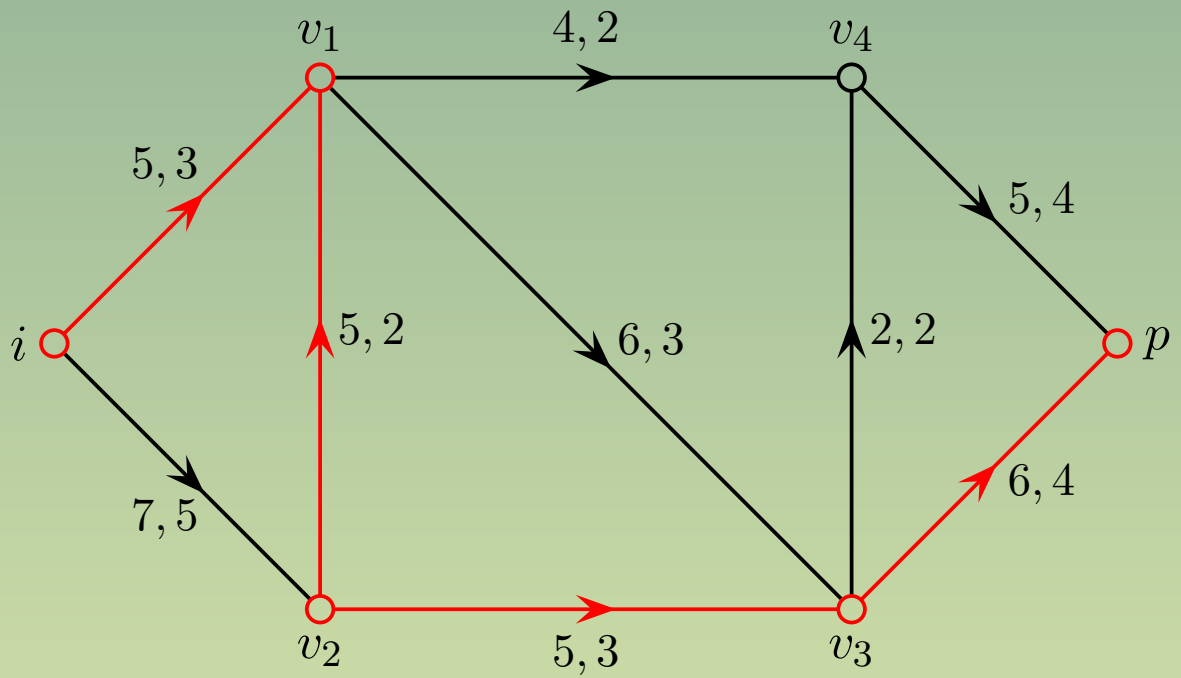
Vratimo se na početnu sliku i pogledajmo (neusmjereni) put $P = iv_1v_2v_3p$ koji je također f-rastući.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Vratimo se na početnu sliku i pogledajmo (neusmjereni) put $P = iv_1v_2v_3p$ koji je također f-rastući. Direktni lukovi na putu P su iv_1, v_2v_3 i v_3p, a obrnuti luk je v_1v_2.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

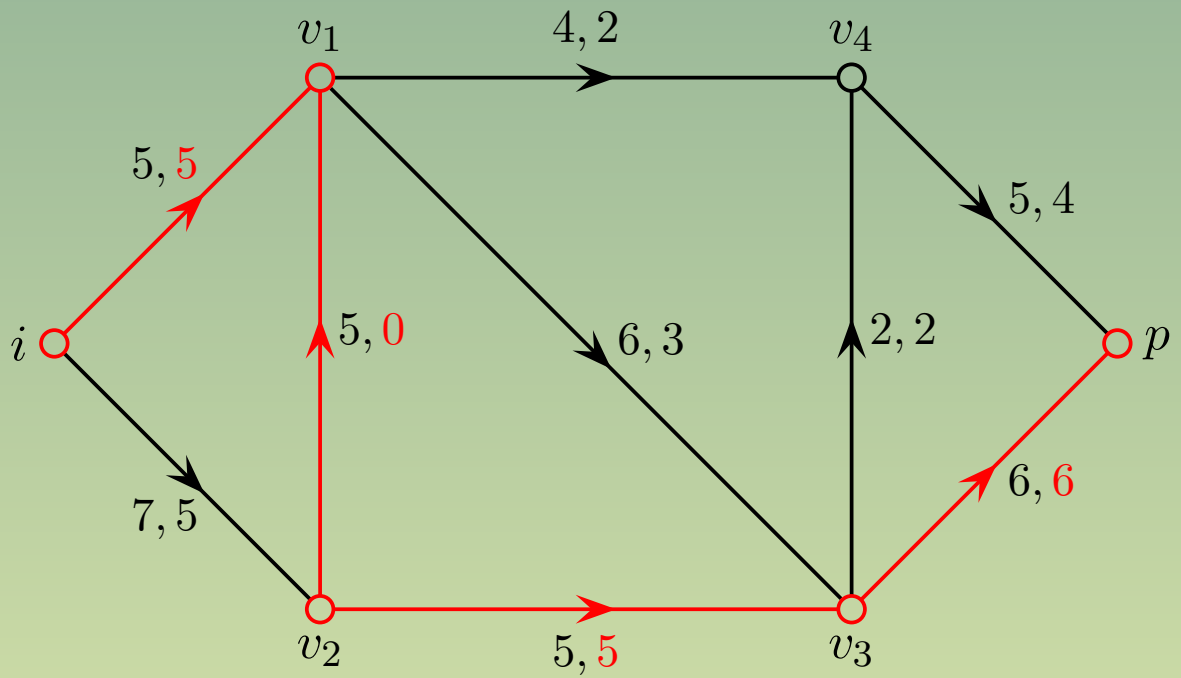


Vratimo se na početnu sliku i pogledajmo (neusmjereni) put $P = iv_1v_2v_3p$ koji je također f-rastući. Direktni lukovi na putu P su iv_1, v_2v_3 i v_3p, a obrnuti luk je v_1v_2.

$$\Delta(iv_1) = 5 - 3 = 2, \quad \Delta(v_1v_2) = 2, \quad \Delta(v_2v_3) = 5 - 3 = 2$$

$$\Delta(v_3p) = 6 - 4 = 2, \quad \Delta(P) = \min\{2, 2, 2, 2\} = 2$$

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Vratimo se na početnu sliku i pogledajmo (neusmjereni) put $P = iv_1v_2v_3p$ koji je također f-rastući. Direktni lukovi na putu P su iv_1, v_2v_3 i v_3p, a obrnuti luk je v_1v_2.

$$\Delta(iv_1) = 5 - 3 = 2, \quad \Delta(v_1v_2) = 2, \quad \Delta(v_2v_3) = 5 - 3 = 2$$
$$\Delta(v_3p) = 6 - 4 = 2, \quad \Delta(P) = \min\{2, 2, 2, 2\} = 2$$

Povećamo li protoke kroz direktne lukove na putu P za $\Delta(P)$, a kroz obrnute lukove smanjimo za $\Delta(P)$, dobivamo novi protok f' za koji je $\mathrm{val}(f') > \mathrm{val}(f)$, tj. $\mathrm{val}(f') = \mathrm{val}(f) + 2$.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Teorem 9.12.

Protok f transportne mreže $D = (V, A)$ je maksimalan akko D ne sadrži f-rastući put.

Dokaz.

$\Rightarrow$

Ovaj smjer je dokazan u ◂ lemi 9.2., tj. uzmemo kontrapoziciju te leme.

$\Leftarrow$

Pretpostavimo da D ne sadrži f-rastući put. Neka je $S \subseteq V$ skup vrhova do kojih se iz izvora i može doći f-nezasićenim putom. Tada je $i \in S$, a ponor $p \in \overline{S} = V \setminus S$ jer u D nema po pretpostavci f-rastućih putova. Stoga je $\{S, \overline{S}\}$ rez u D.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Tvrdimo da je $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(S, \overline{S})$ pa će time biti dokazano da je f maksimalni protok, a $\{S, \overline{S}\}$ minimalni rez. Neka je $a = uv \in \{S, \overline{S}\}$ luk. Kako je $u \in S$, slijedi da postoji f-nezasićeni (i, u)-put P. Luk a mora biti f-zasićen jer bismo inače s njime mogli proširiti P i dobiti f-nezasićeni (i, v)-put, što je nemoguće jer je $v \in \overline{S}$. Stoga je $f_{uv} = c_{uv}$. Ako pak je $a = uv \in \{\overline{S}, S\}$, tada zbog $v \in S$ slijedi da postoji f-nezasićeni (i, v)-put. Nadalje, zbog $u \in \overline{S}$ slijedi da je (i, u)-put f-zasićeni. Kada bi bilo $f_{uv} > 0$, tada bismo opet (i, v)-put koji je f-nezasićen mogli proširiti do (i, u)-puta koji bi bio f-nezasićen, što je nemoguće jer je $u \in \overline{S}$. Stoga je $f_{uv} = 0$ ako je $uv \in \{\overline{S}, S\}$. Dakle, pokazali smo da je

$$f_{uv} = \begin{cases} c_{uv}, & \text{ako je } uv \in \{S, \overline{S}\} \\ 0, & \text{ako je } uv \in \{\overline{S}, S\} \end{cases}$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Stoga je

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{\substack{u \in S \\ v \in \overline{S}}} (f_{uv} - f_{vu}) =$$

$$= \sum_{\substack{u \in S \\ v \in \overline{S}}} f_{uv} - \underbrace{\sum_{\substack{u \in S \\ v \in \overline{S}}} f_{vu}}_{=0} =$$

$$= \sum_{\substack{u \in S \\ v \in \overline{S}}} f_{uv} = \sum_{\substack{u \in S \\ v \in \overline{S}}} c_{uv} = \mathrm{cap}(S, \overline{S})$$

Iz toga slijedi da je f zaista maksimalni protok u D. ♡

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Sve dosadašnje dokazane tvrdnje daju prekrasni teorem iz 1956. godine. Uživajte u njemu na nekoliko trenutaka.

Teorem 9.13 ("max flow, min cut").

U svakoj transportnoj mreži je vrijednost maksimalnog protoka jednaka kapacitetu minimalnog reza.

Sada ćemo opisati Ford-Fulkersonov algoritam za traženje maksimalnog protoka u transportnoj mreži.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Ford-Fulkersonov algoritam

Ford-Fulkersonov algoritam pronalazi maksimalni protok u zadanoj transportnoj mreži. Algoritam se sastoji od dvije etape.

U prvoj se etapi pomoću metode označavanja, polazeći od protoka f, provjeri da li postoji f-rastući put. Ako takvog puta nema, tada je f maksimalni protok. U protivnom, prelazimo na drugu etapu u kojoj se, koristeći se oznakama iz prve etape, konstruira f-rastući put P i novi protok f' s obzirom na put P. Tada je $\mathrm{val}(f') > \mathrm{val}(f)$ pa se vratimo na prvu etapu.

U prvoj se etapi svakom vrhu v stavlja oznaka (l_v, L_v). Prvi simbol l_v označava vrh preko kojeg je v dobio oznaku. Označavanje može biti **direktno** i **obrnuto**. Ako vrh v dobiva oznaku, tada postoji f-nezasićeni (i, v)-put P i za njega je $\Delta(P) = L_v$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Prva etapa počinje označavanjem izvora s $(-, \infty)$. Tu je vrijednost l_i nebitna. Ostali se vrhovi označavaju poštujući sljedeća dva pravila. Pretpostavimo da je vrh u već označen, a vrh v nije. Neka su oni incidentni s lukom a.

Direktno označavanje. Ako je $a = (u, v)$, tada je direktno označavanje vrha v preko vrha u duž luka a moguće jedino ako je $c(a) > f(a)$. U tom slučaju vrh v dobiva oznaku (u^+, L_v), gdje je $L_v = \min\{L_u, c(a) - f(a)\}$.

Obrnuto označavanje. Ako je $a = (v, u)$, onda je obrnuto označavanje vrha v preko vrha u duž luka a moguće ako je $f(a) > 0$. U tom slučaju v dobiva oznaku (u^-, L_v), gdje je $L_v = \min\{L_u, f(a)\}$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

U prvoj etapi se vrhovi označavaju samo jednom. Ta se etapa završava ako se dogodi jedan od dva slučaja:

- vrh p dobiva oznaku,
- vrh p nije označen i nijedan se vrh više ne može označiti.

Ako je vrh p označen u prvoj etapi, onda iz pravila označavanja slijedi da postoji f-rastući put P i $\Delta(P) = L_p$. U drugoj se etapi put P prolazi u obrnutom smjeru pomoću simbola l_v i konstruira se novi protok f' s obzirom na put P. Nakon toga se opet primijeni prva etapa na protok f'. Ako prva etapa završi, a da ponor p nije označen, onda to znači da ne postoji f-rastući put pa je trenutni protok maksimalan.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Ford-Fulkersonov algoritam

ULAZ: Transportna mreža $D = (V, A)$
IZLAZ: Maksimalni protok na D

1: Odaberi neki protok f na D, npr. $f(a) = 0$ za svaki $a \in A$.

2: Počinje prva etapa. Označi izvor i s $(-, \infty)$.

3: Ako postoji neoznačeni vrh koji se može označiti direktnim ili obrnutim označavanjem, onda odaberi takav vrh v, označi ga i prijeđi na 4. korak. U protivnom se algoritam zaustavlja jer je trenutni protok maksimalan.

4: Ako je $v = p$, prijeđi na 5. korak i time je prva etapa završena. U protivnom, prijeđi na 3. korak.

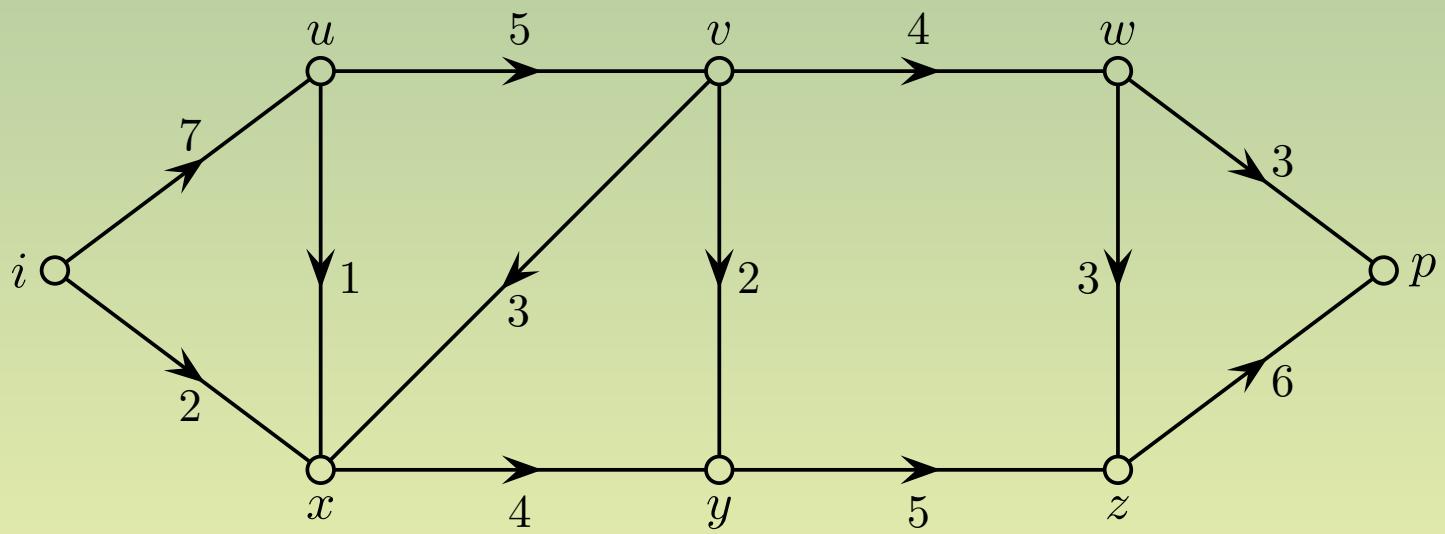
5: Počinje druga etapa. Neka je (l_v, L_v) oznaka vrha v. Ako je $l_v = u^+$, zamijeni $f(u, v)$ sa $f(u, v) + L_p$. Ako je $l_v = u^-$, zamijeni $f(v, u)$ sa $f(v, u) - L_p$.

6: Ako je $u = i$, izbriši sve oznake vrhova (završena je druga etapa) i prijeđi na 2. korak. Ako je $u \neq i$, tada zamijeni v sa u i prijeđi na 5. korak.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

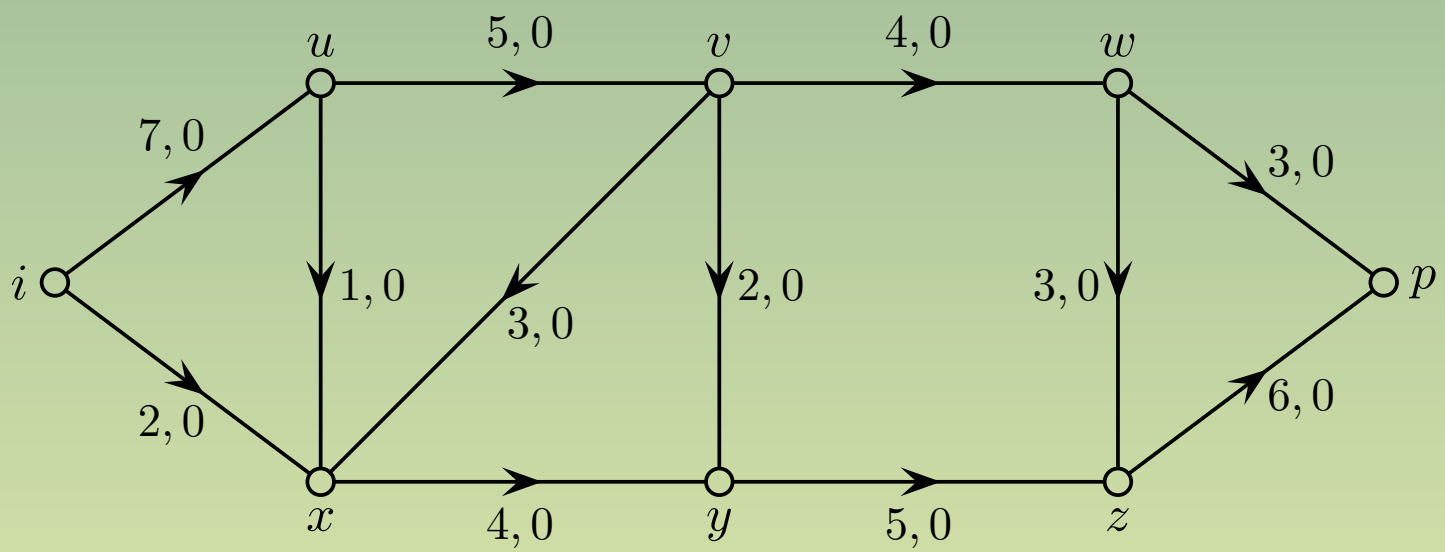
Primjer 9.41.

Pomoću Ford-Fulkersonovog algoritma pronađite maksimalni protok u transportnoj mreži



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



Krenemo od nekog protoka f, npr. $f(a, b) = 0$ za svaki luk (a, b).

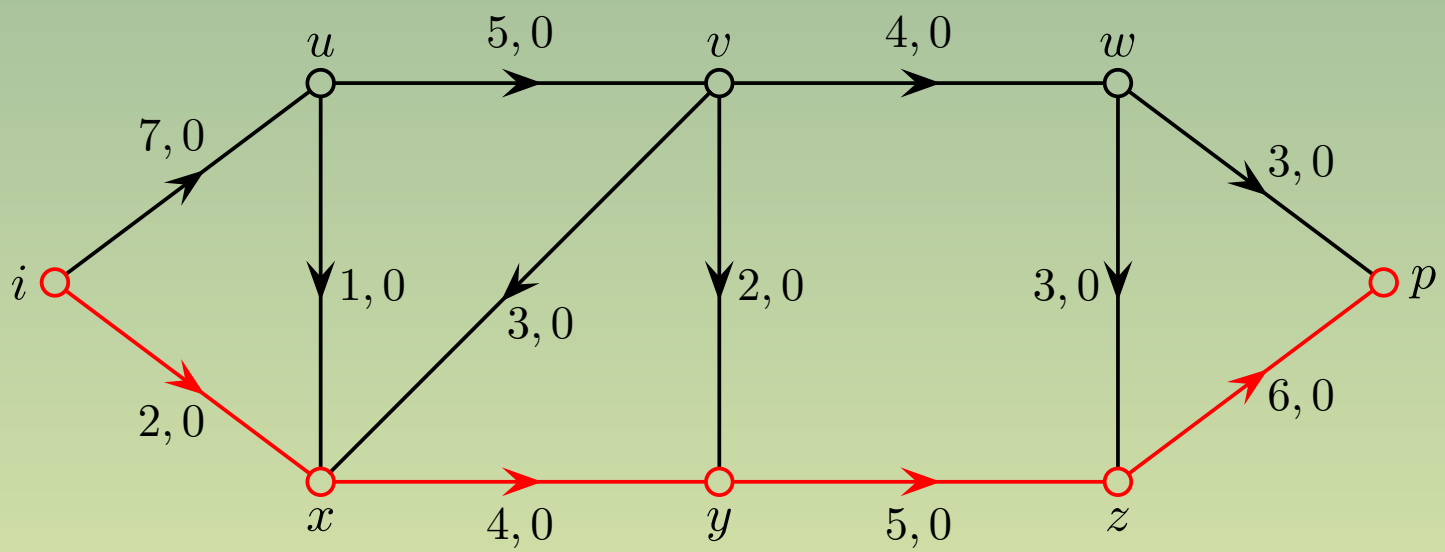
konačno rješenje

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



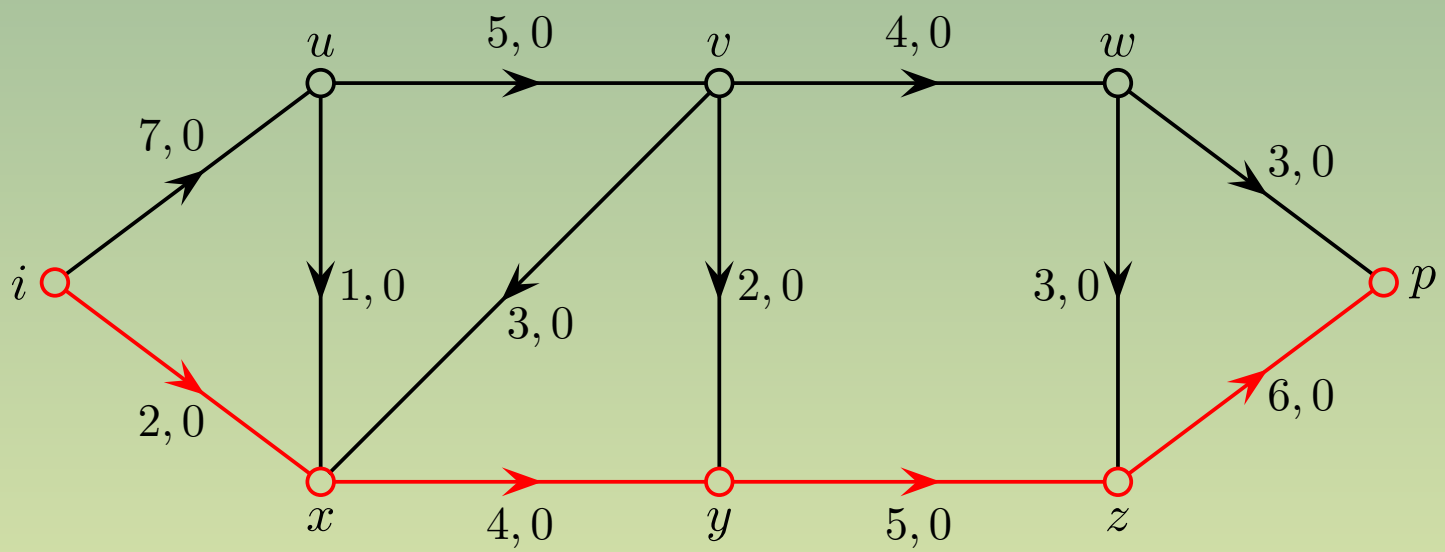
Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = ixyzp$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = ixyzp$.

Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

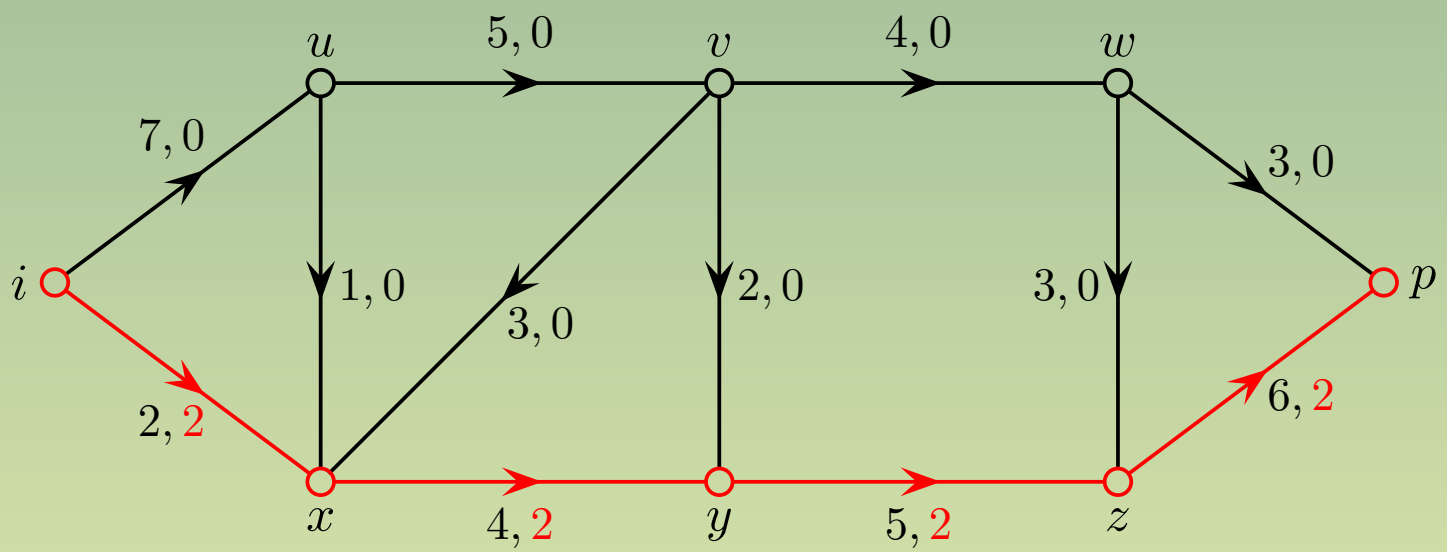
$$i(-, \infty),\ x(i^+, 2),\ y(x^+, 2),\ z(y^+, 2),\ p(z^+, 2).$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = ixyzp$. Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

$$i(-, \infty),\ x(i^+, 2),\ y(x^+, 2),\ z(y^+, 2),\ p(z^+, 2).$$

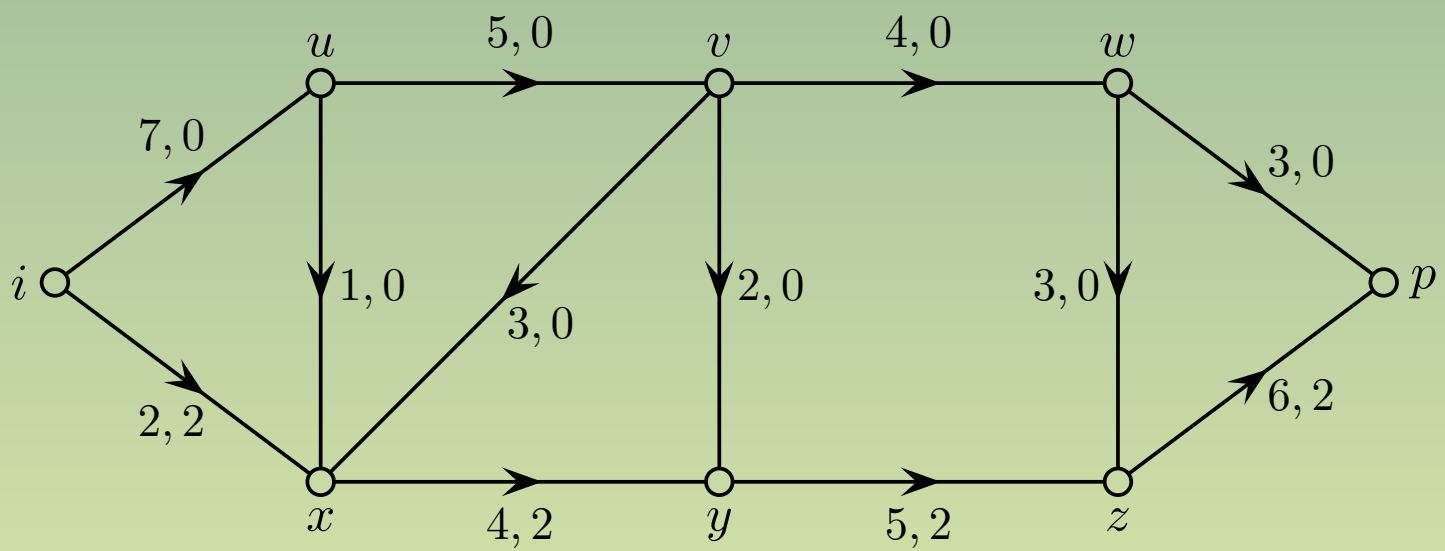
Svi lukovi na putu P su direktni pa protoke kroz te lukove povećamo za $L_p = 2$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

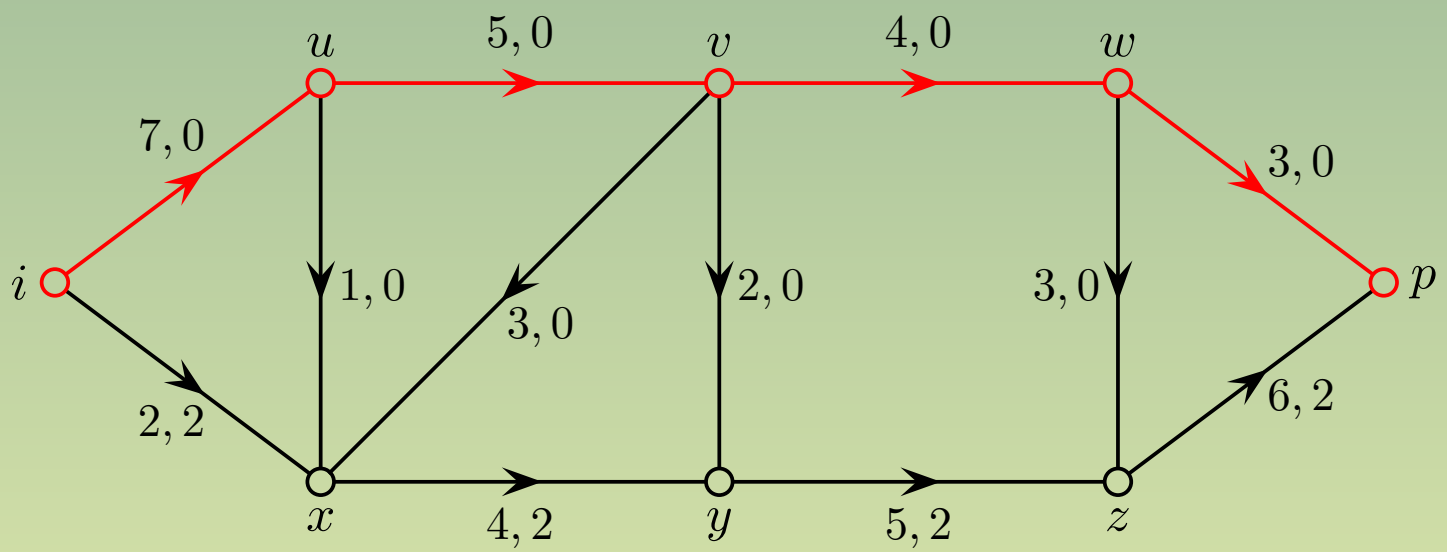
Rješenje.



Trenutni protok nije maksimalni

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



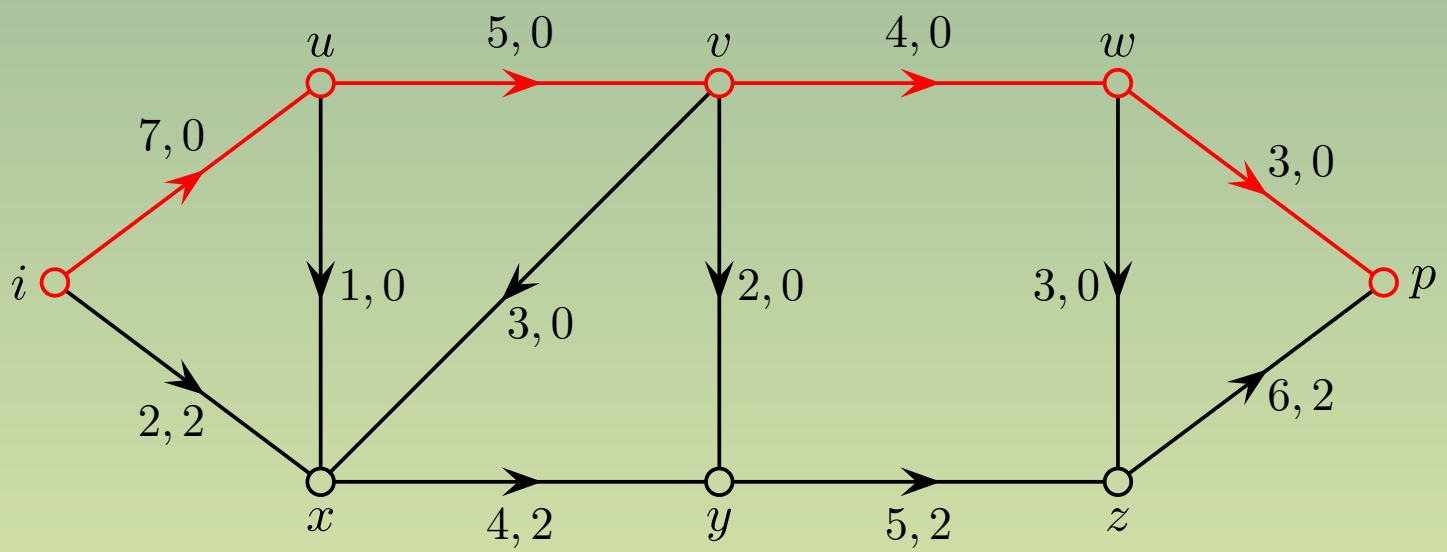
Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iuvwp$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iuvwp$.

Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

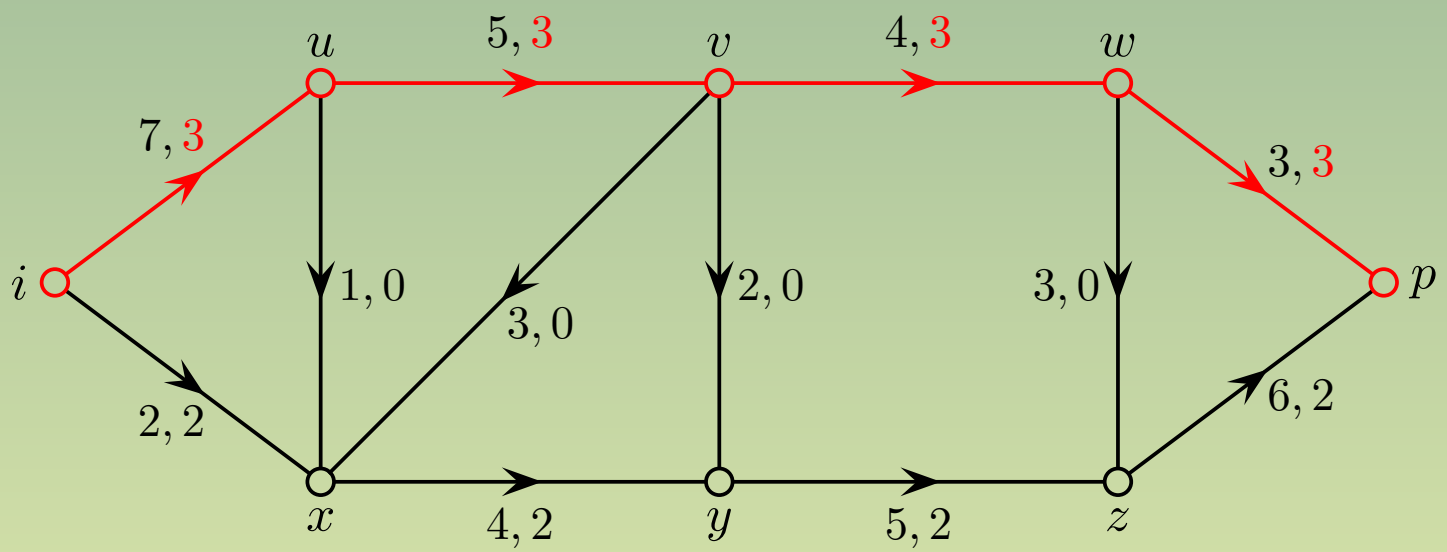
$$i(-, \infty),\ u(i^+, 7),\ v(u^+, 5),\ w(v^+, 4),\ p(w^+, 3).$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iuvwp$.
Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

$$i(-, \infty),\ u(i^+, 7),\ v(u^+, 5),\ w(v^+, 4),\ p(w^+, 3).$$

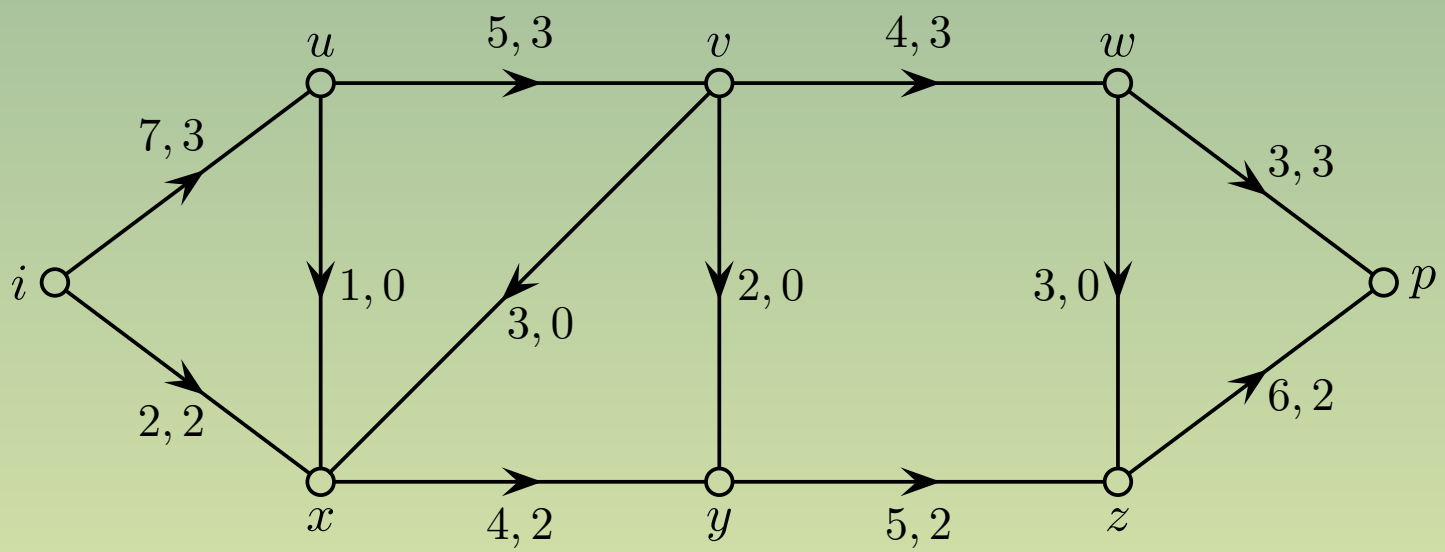
Svi lukovi na putu P su direktni pa protoke kroz te lukove povećamo za $L_p = 3$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

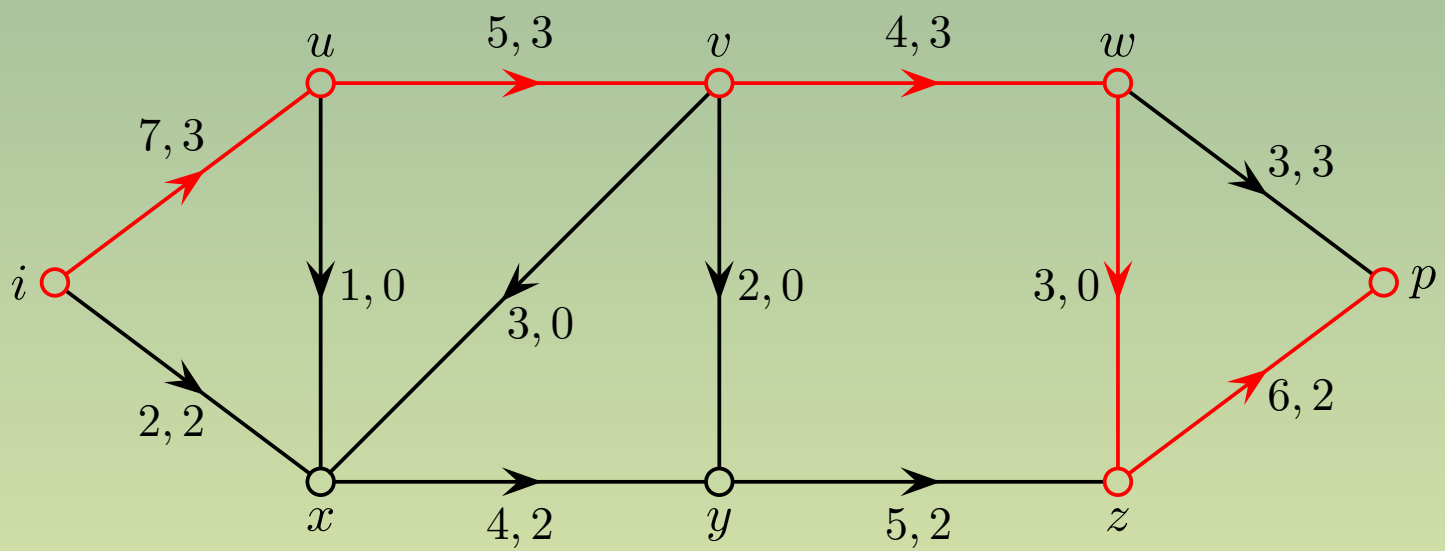
Rješenje.



Trenutni protok nije maksimalni

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



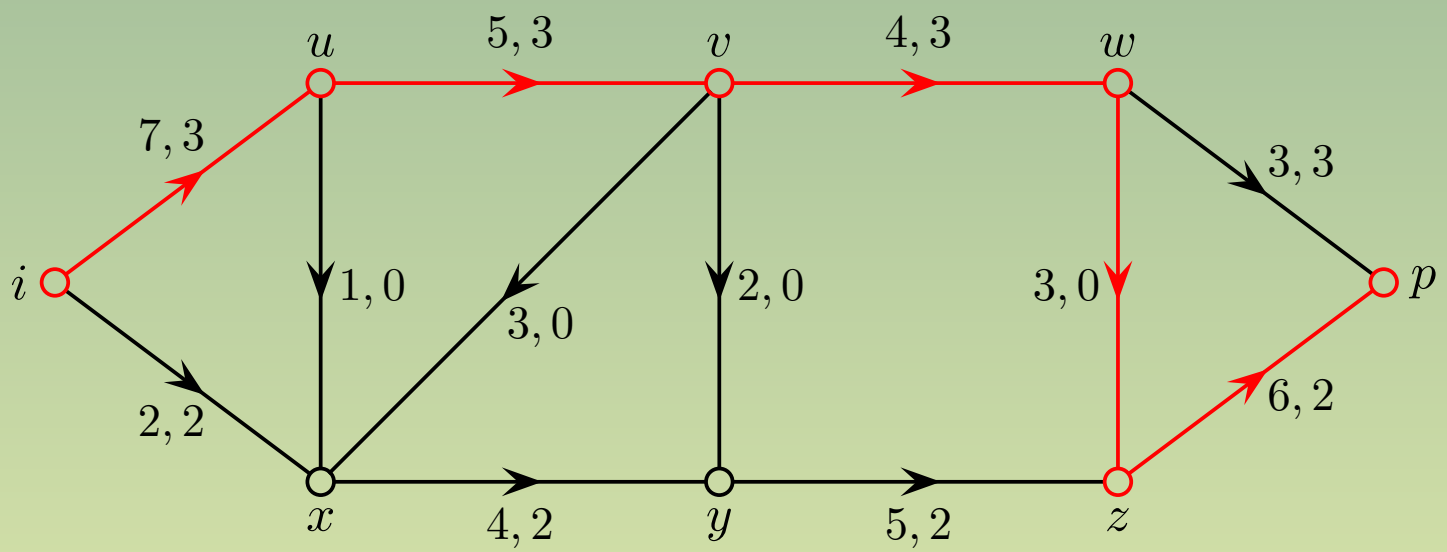
Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iuvwzp$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iuvwzp$.

Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

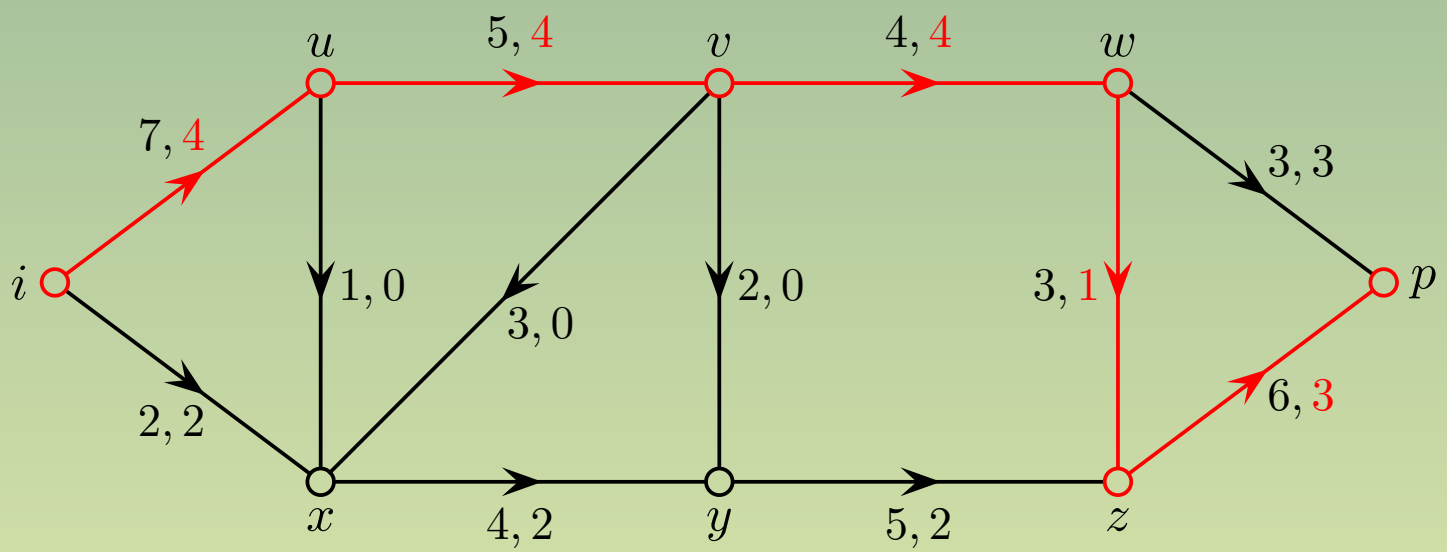
$$i(-, \infty),\ u(i^+, 4),\ v(u^+, 2),\ w(v^+, 1),\ z(w^+, 1),\ p(z^+, 1).$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iuvwzp$.
Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

$$i(-, \infty),\ u(i^+, 4),\ v(u^+, 2),\ w(v^+, 1),\ z(w^+, 1),\ p(z^+, 1).$$

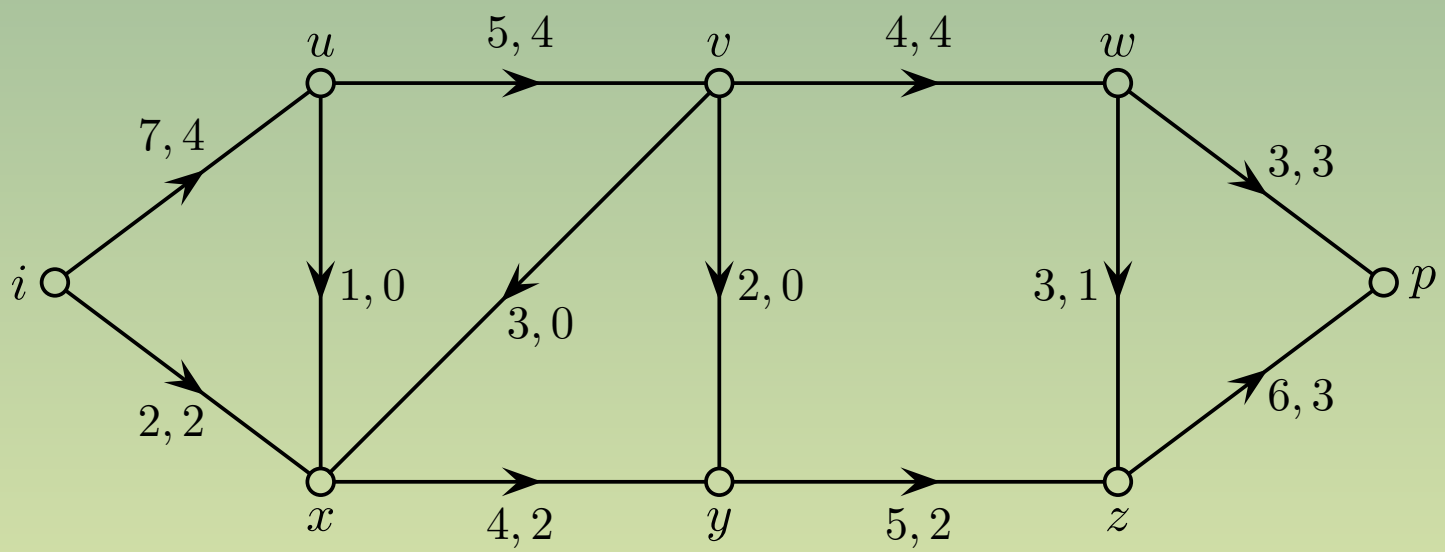
Svi lukovi na putu P su direktni pa protoke kroz te lukove povećamo za $L_p = 1$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



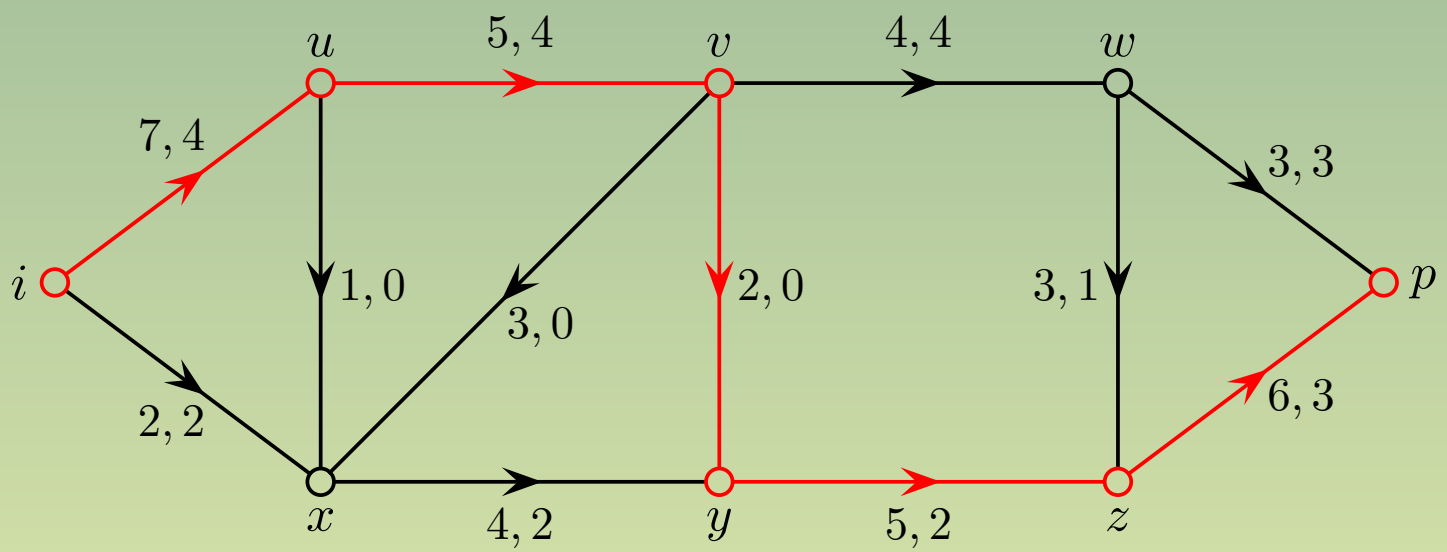
Trenutni protok nije maksimalni

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



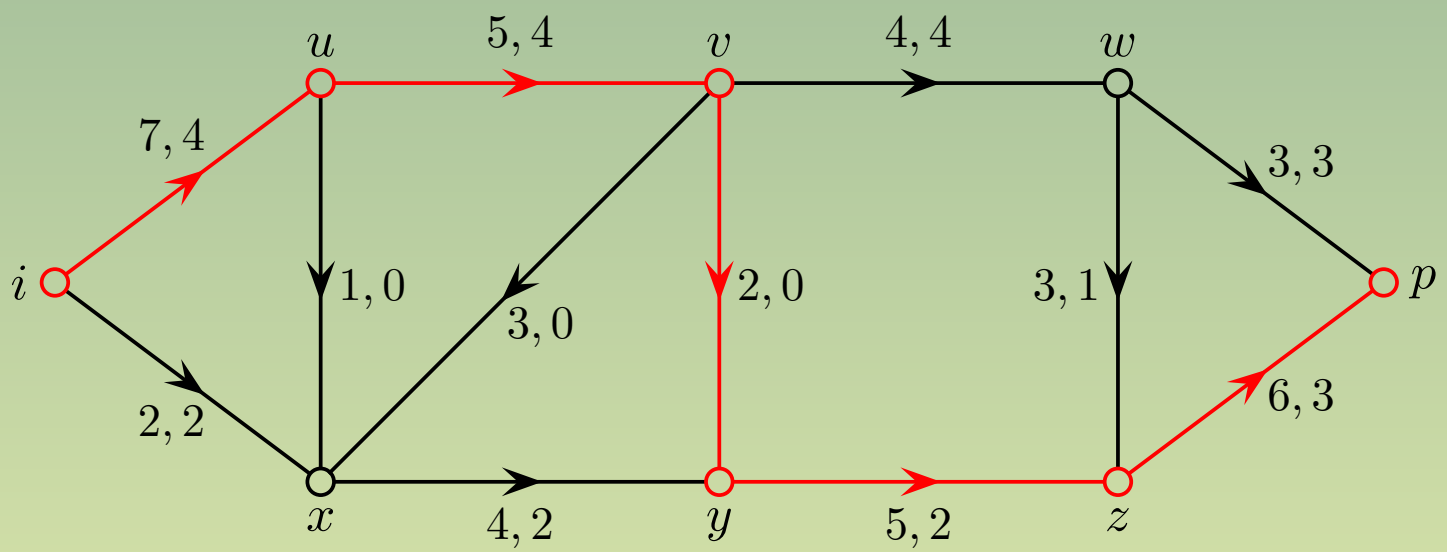
Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iuvyzp$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



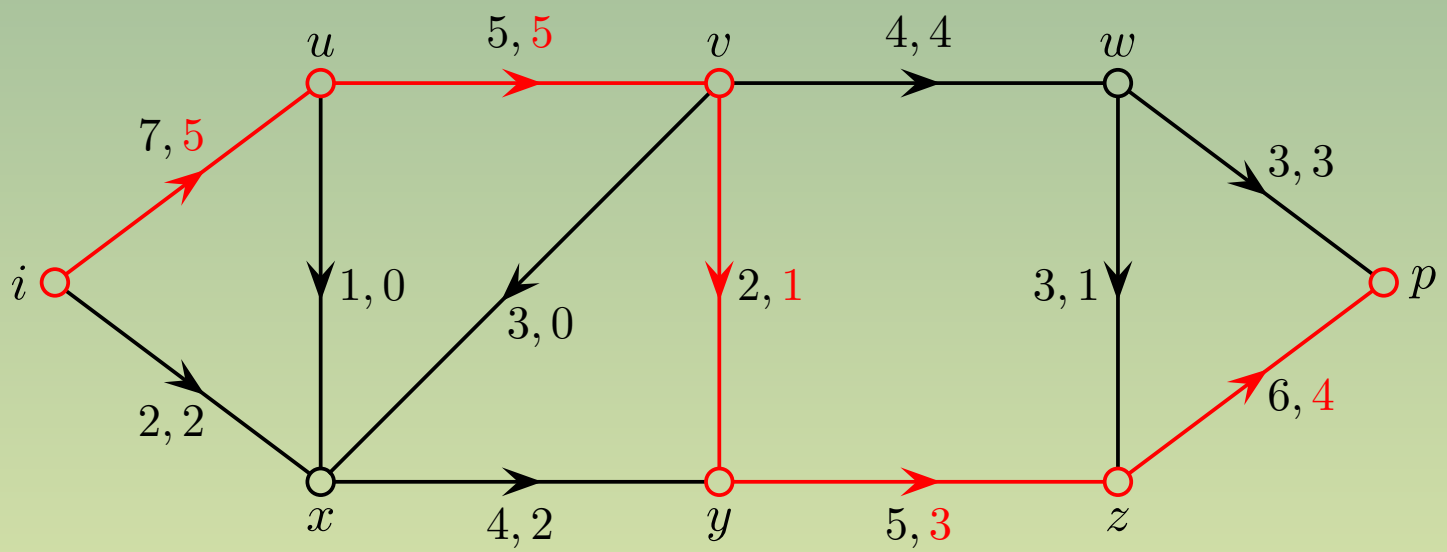
Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iuvyzp$.

Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

$$i(-,\infty),\ u(i^+,3),\ v(u^+,1),\ y(v^+,1),\ z(y^+,1),\ p(z^+,1).$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iuvyzp$.
Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

$$i(-, \infty),\ u(i^+, 3),\ v(u^+, 1),\ y(v^+, 1),\ z(y^+, 1),\ p(z^+, 1).$$

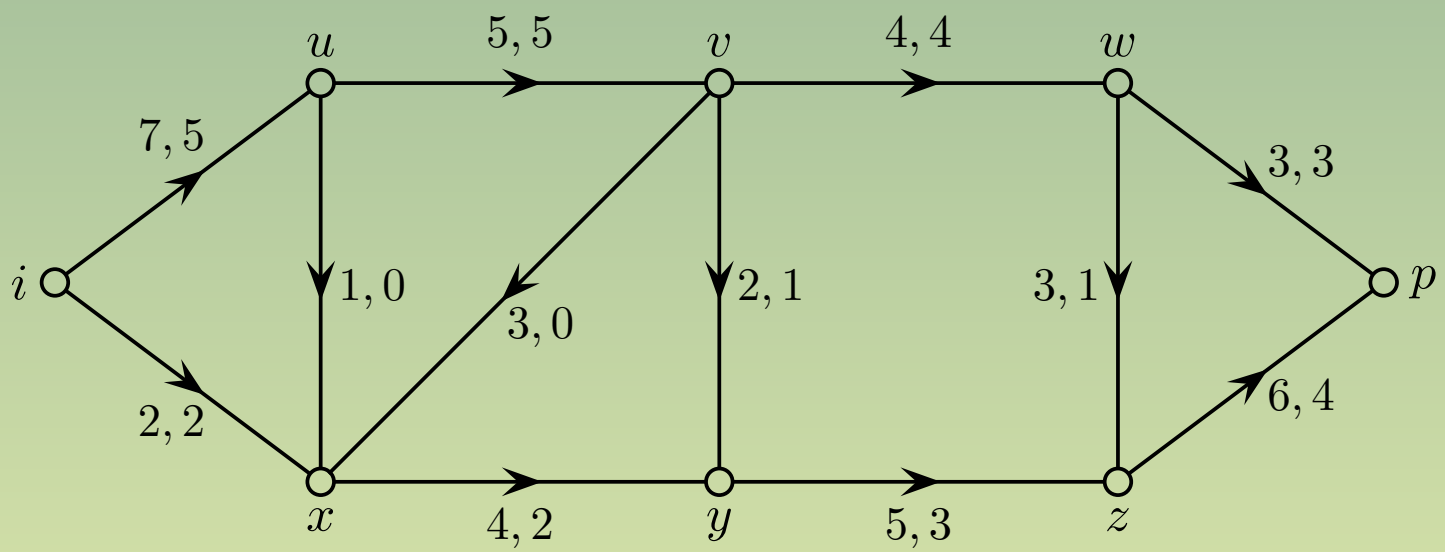
Svi lukovi na putu P su direktni pa protoke kroz te lukove povećamo za $L_p = 1$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

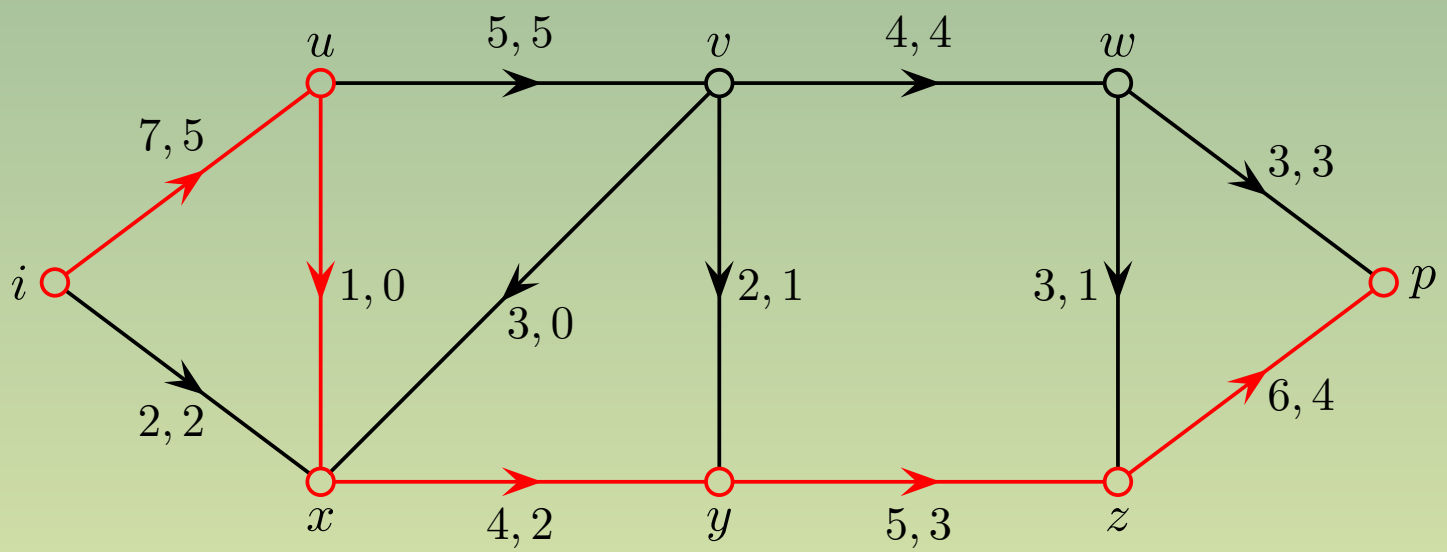
Rješenje.



Trenutni protok nije maksimalni

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

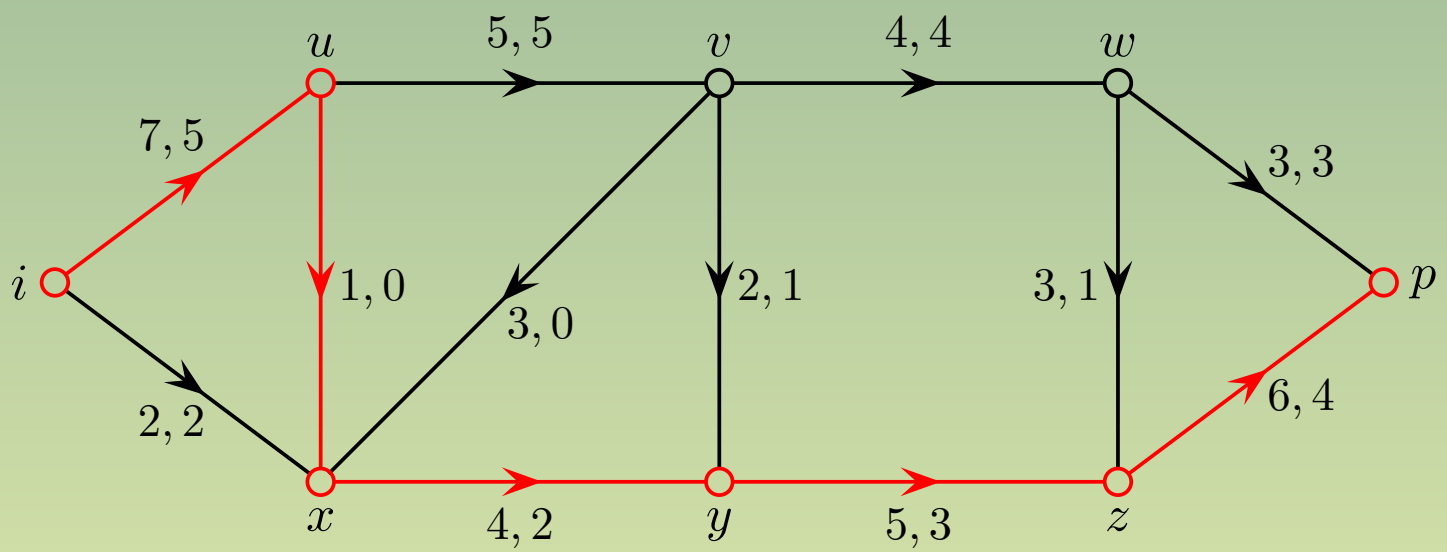
Rješenje.



Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iuxyzp$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



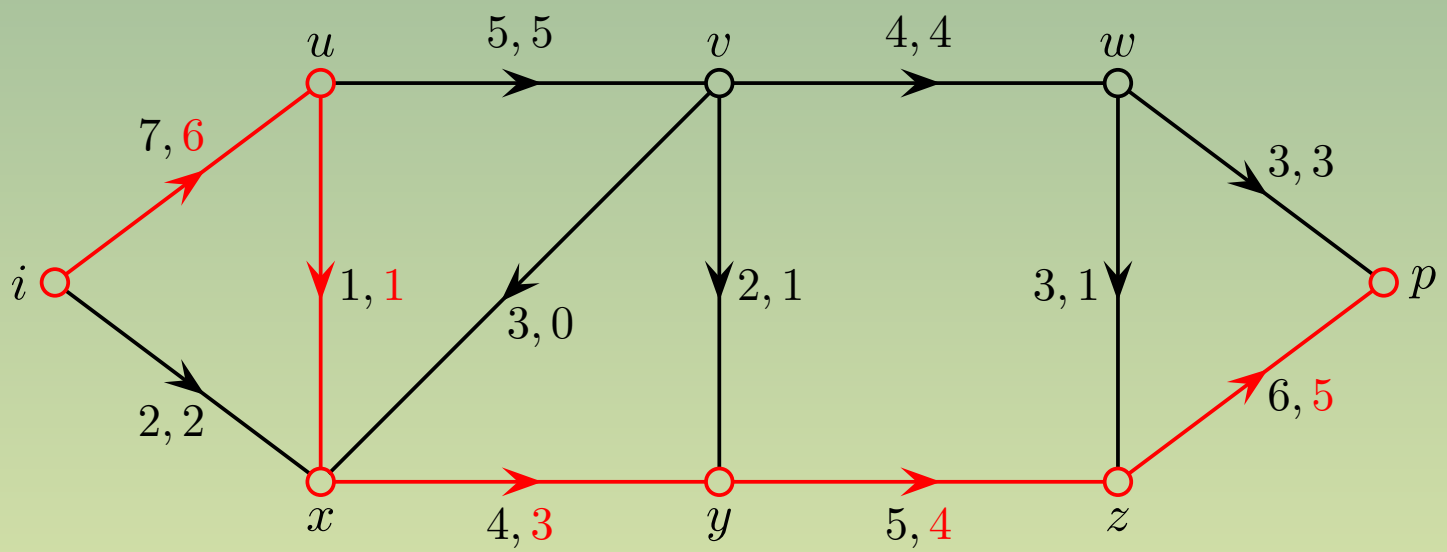
Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iuxyzp$.

Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

$$i(-, \infty),\ u(i^+, 2),\ x(u^+, 1),\ y(x^+, 1),\ z(y^+, 1),\ p(z^+, 1).$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iuxyzp$. Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

$$i(-,\infty),\ u(i^+,2),\ x(u^+,1),\ y(x^+,1),\ z(y^+,1),\ p(z^+,1).$$

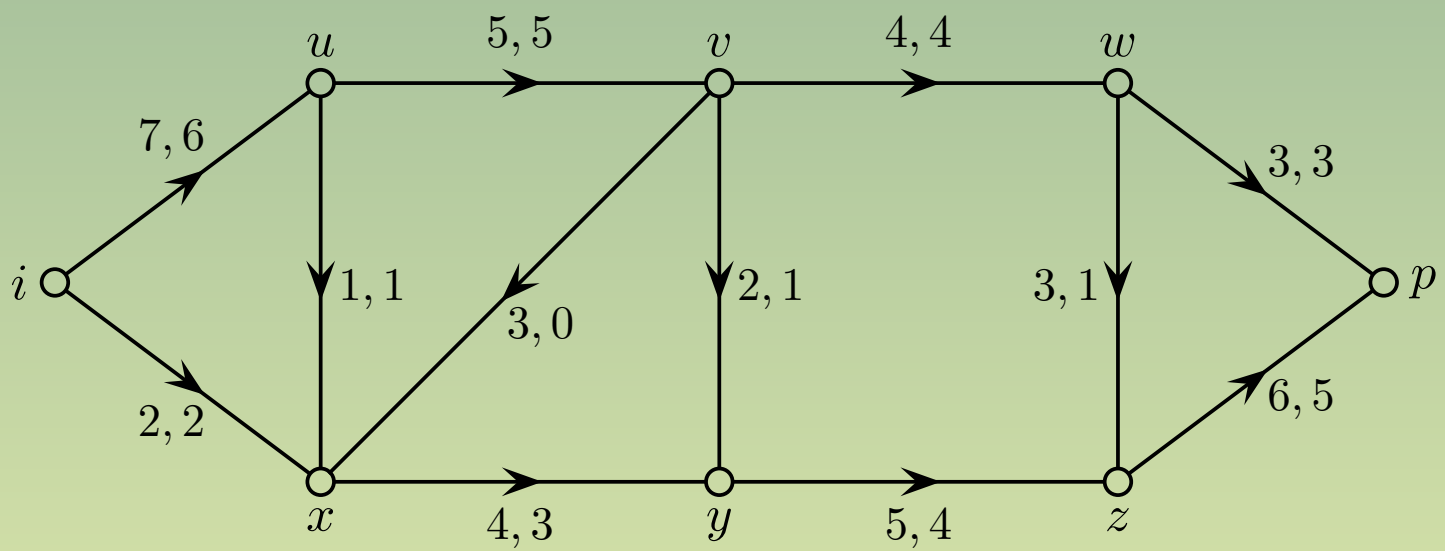
Svi lukovi na putu P su direktni pa protoke kroz te lukove povećamo za $L_p = 1$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



Jedini vrhovi koji se mogu označiti su $i(-, \infty)$ i $u(i^+, 1)$. Kako vrh p nije označen i ne mogu se više ostali vrhovi označiti, dobiveni protok je maksimalni protok u zadanoj transportnoj mreži.

◂ objasni postupak

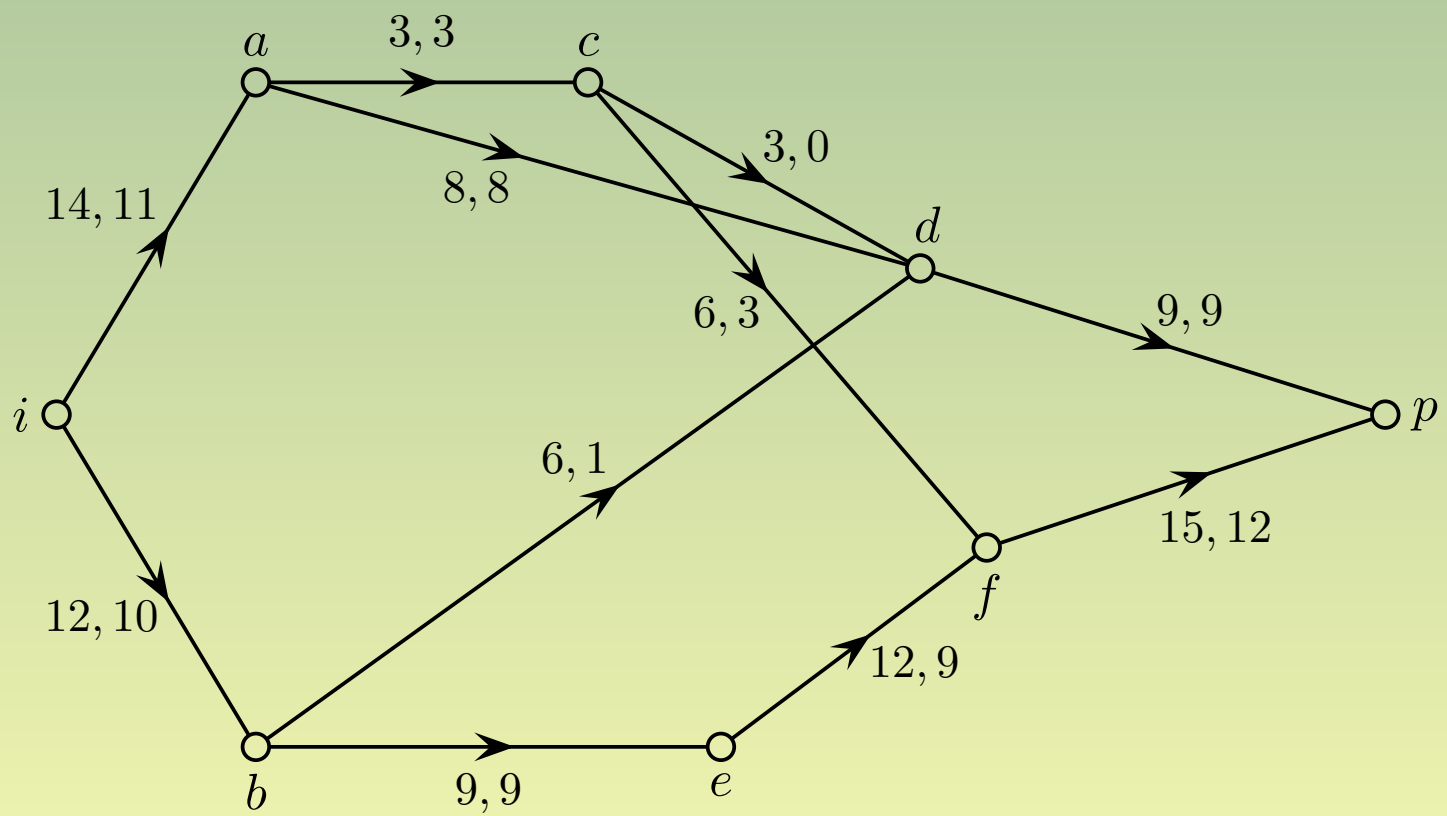
Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.42.

Zadana je transportna mreža



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

a. *Provjerite zakon očuvanja količine u vrhovima a, c i d.*

b. *Pronađite vrijednost zadanog protoka $\mathcal{F}$.*

c. *Pronađite kapacitet (i, p) reza $\{S, T\}$ definiranog s $S = \{i, a, b, d\}$, $T = \{c, e, f, p\}$.*

d. *Da li je zadani protok $\mathcal{F}$ maksimalan? Objasnite!*

e. *Odredite vrijednost protoka $\mathcal{F}$ pomoću (i, p) reza $\{S, T\}$.*

f. *Navedite sve zasićene lukove.*

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

a. *Provjerite zakon očuvanja količine u vrhovima a, c i d.*

b. *Pronađite vrijednost zadanog protoka $\mathcal{F}$.*

c. *Pronađite kapacitet (i, p) reza $\{S, T\}$ definiranog s $S = \{i, a, b, d\}$, $T = \{c, e, f, p\}$.*

d. *Da li je zadani protok $\mathcal{F}$ maksimalan? Objasnite!*

e. *Odredite vrijednost protoka $\mathcal{F}$ pomoću (i, p) reza $\{S, T\}$.*

f. *Navedite sve zasićene lukove.*

Rješenje.

a. Zakoni očuvanja količine vrijede u vrhovima a, c i d jer

$$\text{ulaz}(a) = 11, \qquad \text{izlaz}(a) = 3 + 8 = 11$$
$$\text{ulaz}(c) = 3, \qquad \text{izlaz}(c) = 0 + 3 = 3$$
$$\text{ulaz}(d) = 0 + 8 + 1 = 9, \qquad \text{izlaz}(d) = 9$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

b. Vrijednost protoka $\mathcal{F}$ je $\mathrm{val}(\mathcal{F}) = \mathrm{izlaz}(i) = 11 + 10 = 21$.

c. Kapacitet zadanog (i, p) reza $\{S, T\}$ je

$$\mathrm{cap}(S, T) = c_{ac} + c_{be} + c_{dp} = 3 + 9 + 9 = 21.$$

d. Zadani protok $\mathcal{F}$ je maksimalan jer je $\mathrm{val}\,\mathcal{F} = \mathrm{cap}(S, T)$.

e. Pomoću (i, p) reza $\{S, T\}$ za vrijednost protoka $\mathcal{F}$ se opet dobije

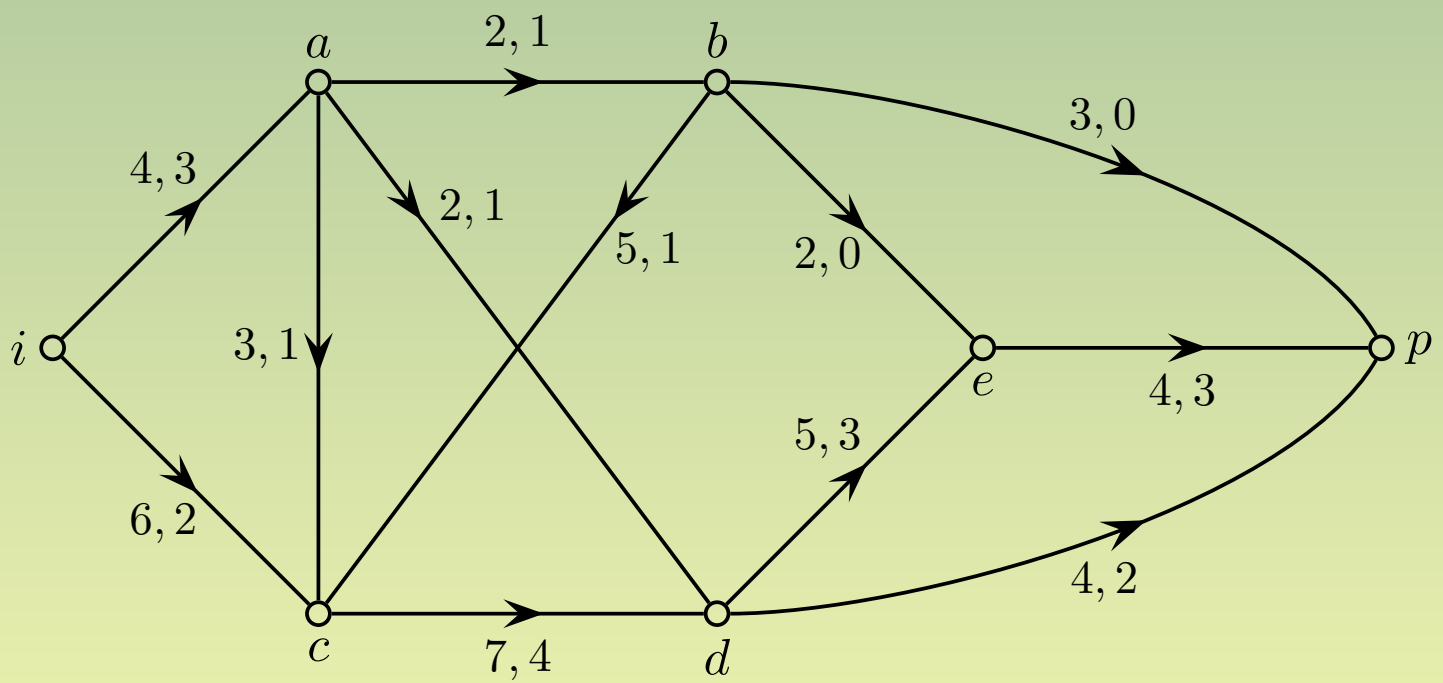
$$\begin{aligned}\mathrm{val}(\mathcal{F}) &= \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} (\mathcal{F}_{uv} - \mathcal{F}_{vu}) \\ &= \mathcal{F}_{ac} + \mathcal{F}_{be} + \mathcal{F}_{dp} - \mathcal{F}_{cd} = 3 + 9 + 9 - 0 = 21\end{aligned}$$

f. Zasićeni lukovi su: ac, dp, ad, be.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Primjer 9.43.

Zadana je transportna mreža



a. *Provjerite zakon očuvanja količine u vrhovima a, b i e.*

b. *Pronađite vrijednost zadanog protoka $\mathcal{F}$.*

c. *Pronađite kapacitet (i, p) reza $\{S, T\}$ definiranog s $S = \{i, a, c, d\}$, $T = \{b, e, p\}$.*

d. *Može li se protok $\mathcal{F}$ povećati duž puta $iadp$? Može li se protok $\mathcal{F}$ povećati duž puta $icdp$?*

e. *Da li je $\mathcal{F}$ maksimalni protok? Objasnite!*

f. *Izračunajte vrijednost protoka pomoću (i, p) reza $\{S, T\}$.*

g. *Pomoću protoka $\mathcal{F}$ pronađite maksimalni protok.*

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.

a. Zakoni očuvanja količine vrijede u vrhovima a, b i e jer

$$\begin{aligned} \text{ulaz}(a) &= 3, & \text{izlaz}(a) &= 1+1+1 = 3 \\ \text{ulaz}(b) &= 1, & \text{izlaz}(b) &= 1+0+0 = 1 \\ \text{ulaz}(e) &= 0+3 = 3, & \text{izlaz}(e) &= 3 \end{aligned}$$

b. Vrijednost protoka $\mathcal{F}$ je $\text{val}(\mathcal{F}) = \text{izlaz}(i) = 2+3 = 5$.

c. Kapacitet zadanog (i,p) reza $\{S,T\}$ je

$$\text{cap}(S,T) = c_{ab} + c_{de} + c_{dp} = 2+5+4 = 11.$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

- Neka je $P_1 = iadp$. Tada je

$$\Delta(ia) = 4 - 3 = 1,\ \Delta(ad) = 2 - 1 = 1,\ \Delta(dp) = 4 - 2 = 2$$

$$\Delta(P_1) = \min\{1, 1, 2\} = 1$$

Kako je $\Delta(P_1) > 0$, slijedi da je P_1 $\mathcal{F}$-rastući put i protok $\mathcal{F}$ se duž puta P_1 može povećati za 1.

Neka je $P_2 = icdp$. Tada je

$$\Delta(ic) = 6 - 2 = 4,\ \Delta(cd) = 7 - 4 = 3,\ \Delta(dp) = 4 - 2 = 2$$

$$\Delta(P_2) = \min\{4, 3, 2\} = 2$$

Kako je $\Delta(P_2) > 0$, slijedi da je P_2 $\mathcal{F}$-rastući put i protok $\mathcal{F}$ se duž puta P_2 može povećati za 2.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

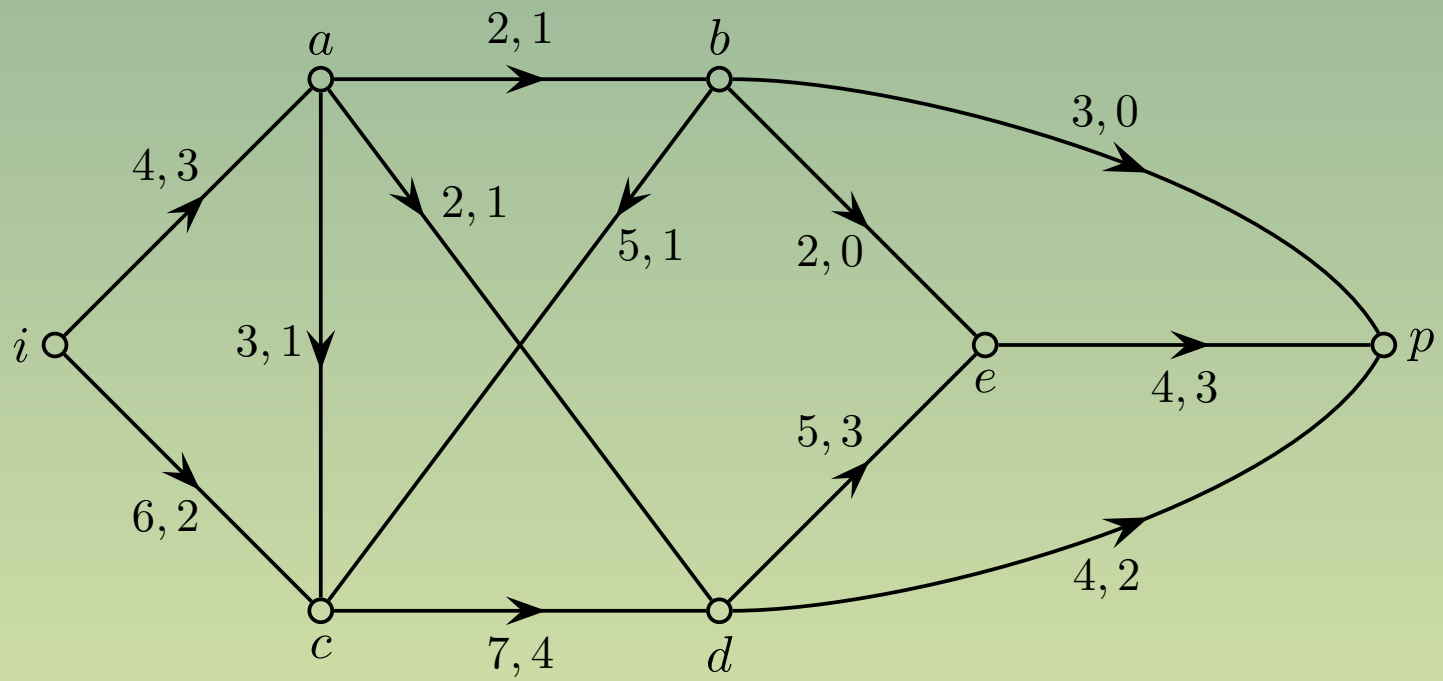
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

e. $\mathcal{F}$ nije maksimalni protok jer postoje $\mathcal{F}$-rastući putovi, npr. putovi $P_1 = iadp$ i $P_2 = icdp$.

f. Pomoću (i, p) reza $\{S, T\}$ za vrijednost protoka $\mathcal{F}$ se opet dobije

$$\begin{aligned} \mathrm{val}(\mathcal{F}) &= \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} (\mathcal{F}_{uv} - \mathcal{F}_{vu}) \\ &= \mathcal{F}_{ab} + \mathcal{F}_{de} + \mathcal{F}_{dp} - \mathcal{F}_{bc} = 1 + 3 + 2 - 1 = 5 \end{aligned}$$

g. Pomoću Ford-Fulkersonovog algoritma ćemo pronaći maksimalni protok u zadanoj transportnoj mreži. Nećemo početi od nulprotoka, nego ćemo krenuti od zadanog protoka $\mathcal{F}$ za koji smo vidjeli da nije maksimalni i njega ćemo proširiti do maksimalnog protoka.



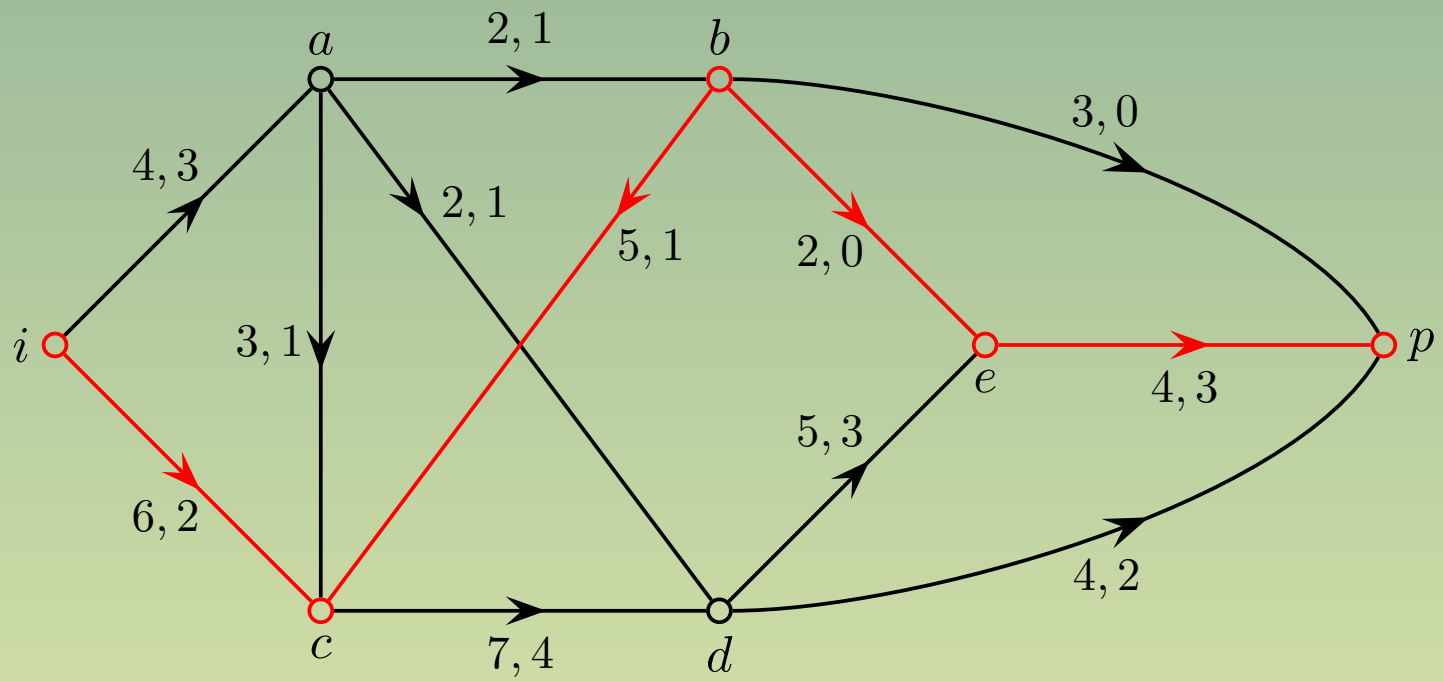
Krenemo od zadanog protoka $\mathcal{F}$.

konačno rješenje

Diskretne strukture s teorijom grafova

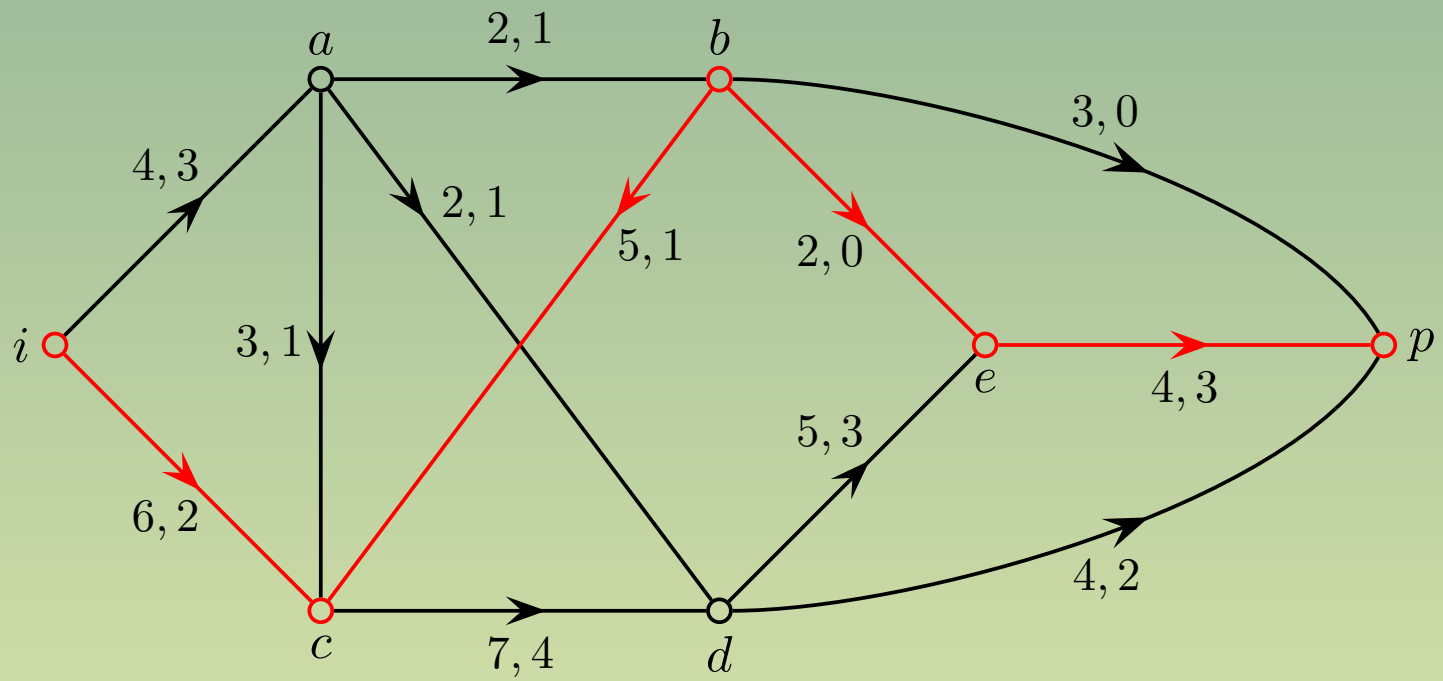
prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Trenutni protok nije maksimalni jer postoji $\mathcal{F}$-rastući put $P = icbep$.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

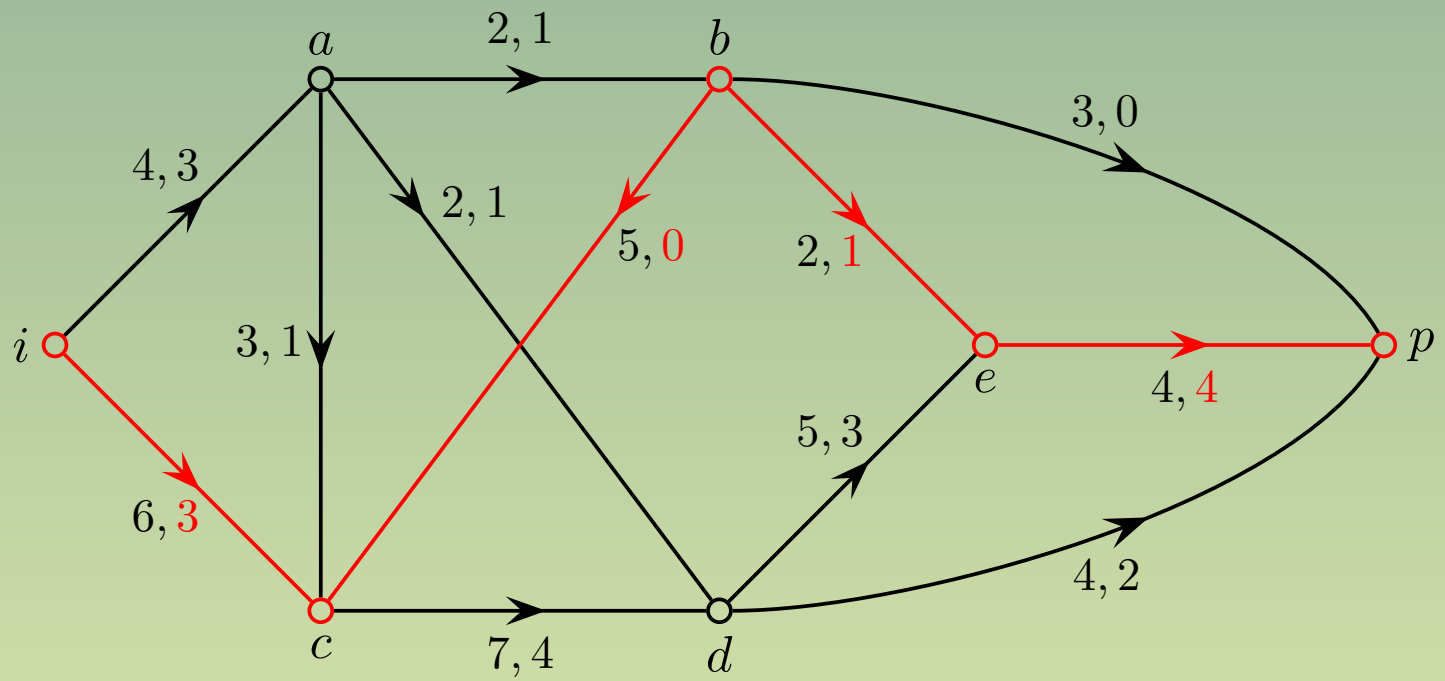


Trenutni protok nije maksimalni jer postoji $\mathcal{F}$-rastući put $P = icbep$.

Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

$$i(-, \infty),\ c(i^+, 4),\ b(c^-, 1),\ e(b^+, 1),\ p(e^+, 1).$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

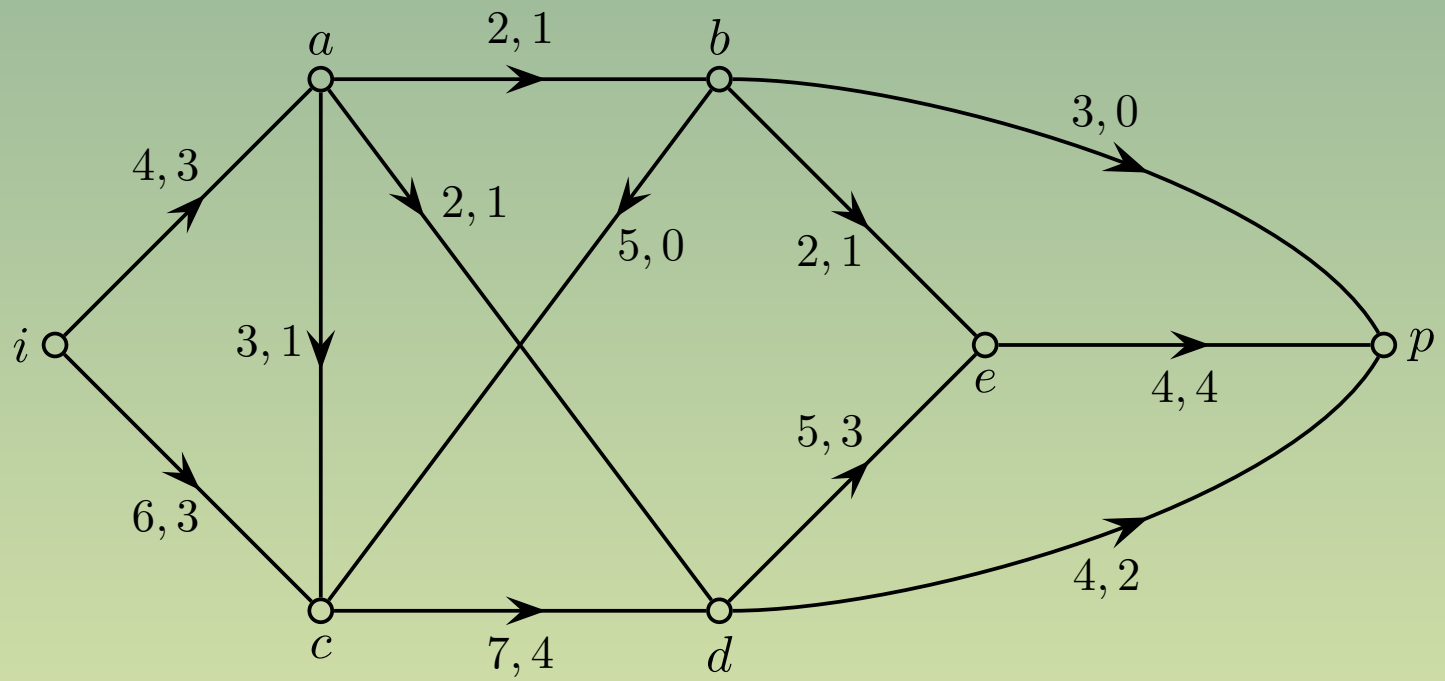


Trenutni protok nije maksimalni jer postoji $\mathcal{F}$-rastući put $P = icbep$. Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

$$i(-, \infty),\ c(i^+, 4),\ b(c^-, 1),\ e(b^+, 1),\ p(e^+, 1).$$

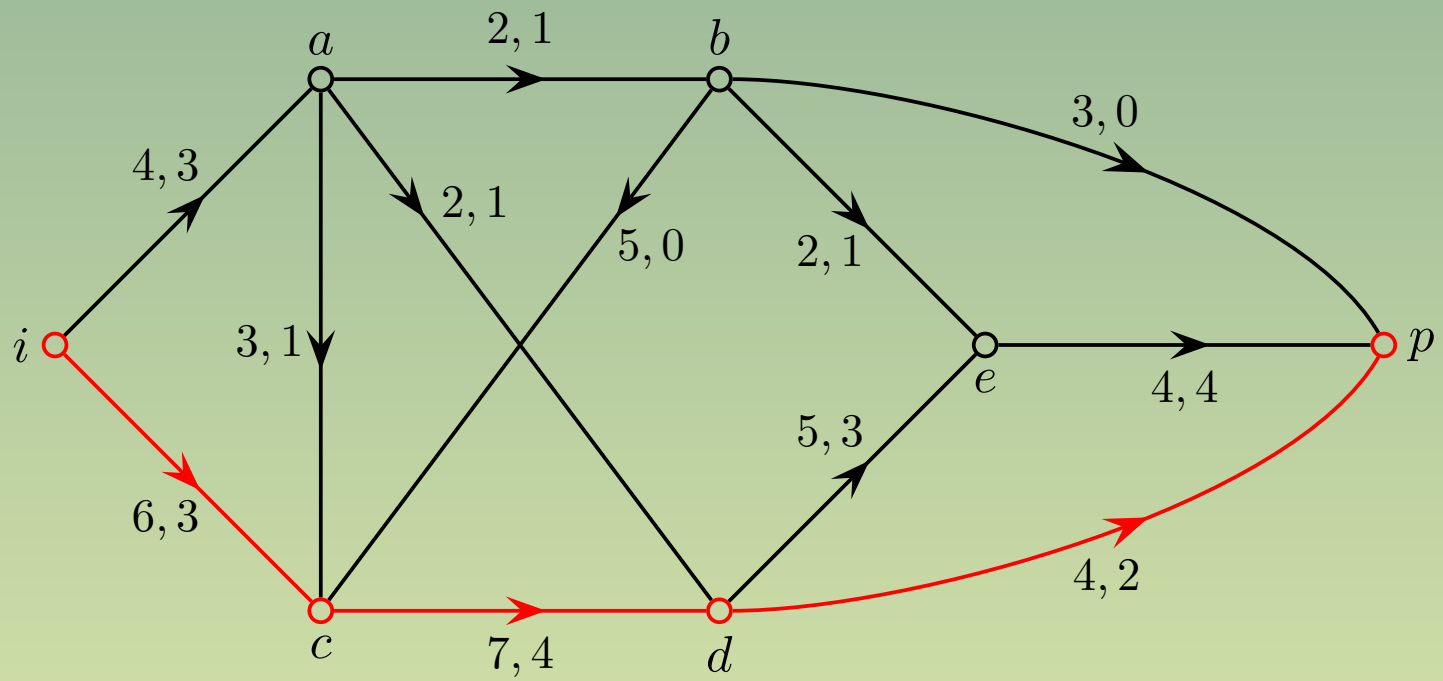
Kroz direktne lukove na putu P povećamo protok za $L_p = 1$, a kroz obrnute lukove na P (to je ovdje jedino cb) smanjimo protok za $L_p = 1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Trenutni protok nije maksimalni

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

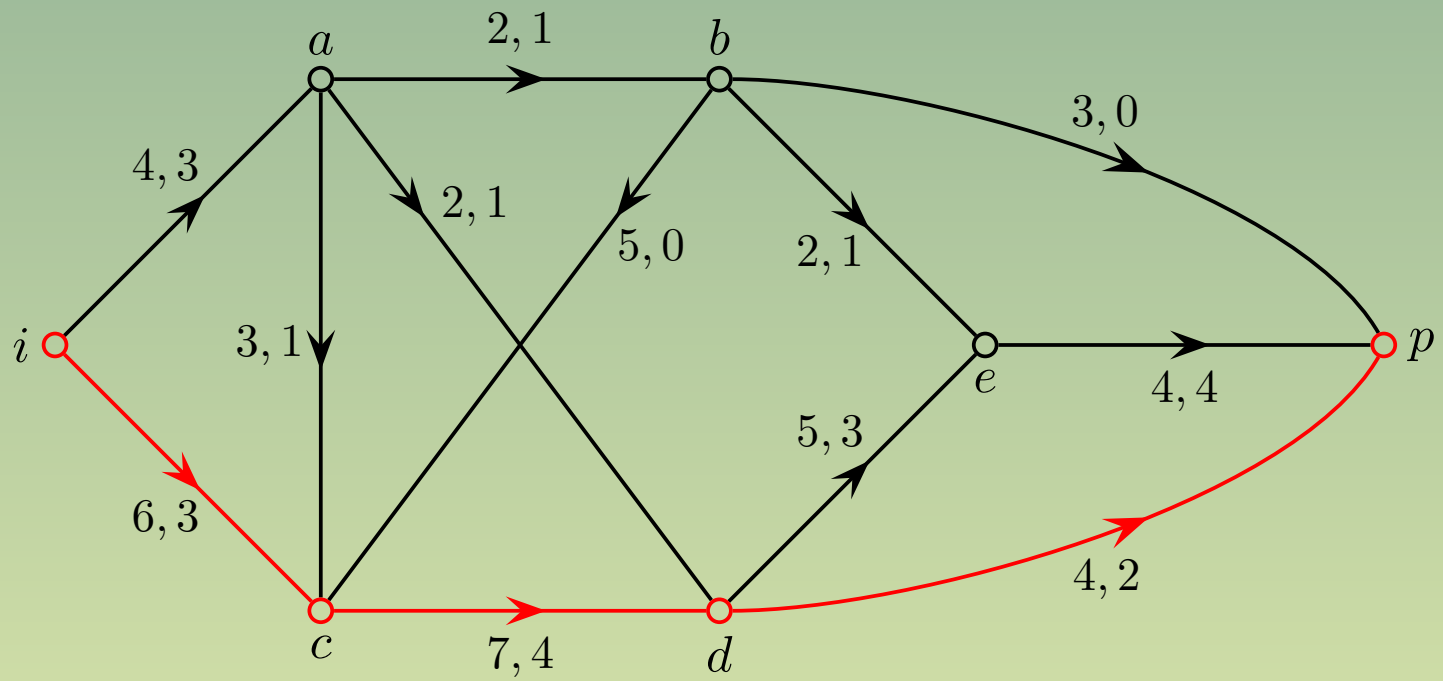


Trenutni protok nije maksimalni jer postoji $\mathcal{F}$-rastući put $P = icdp$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

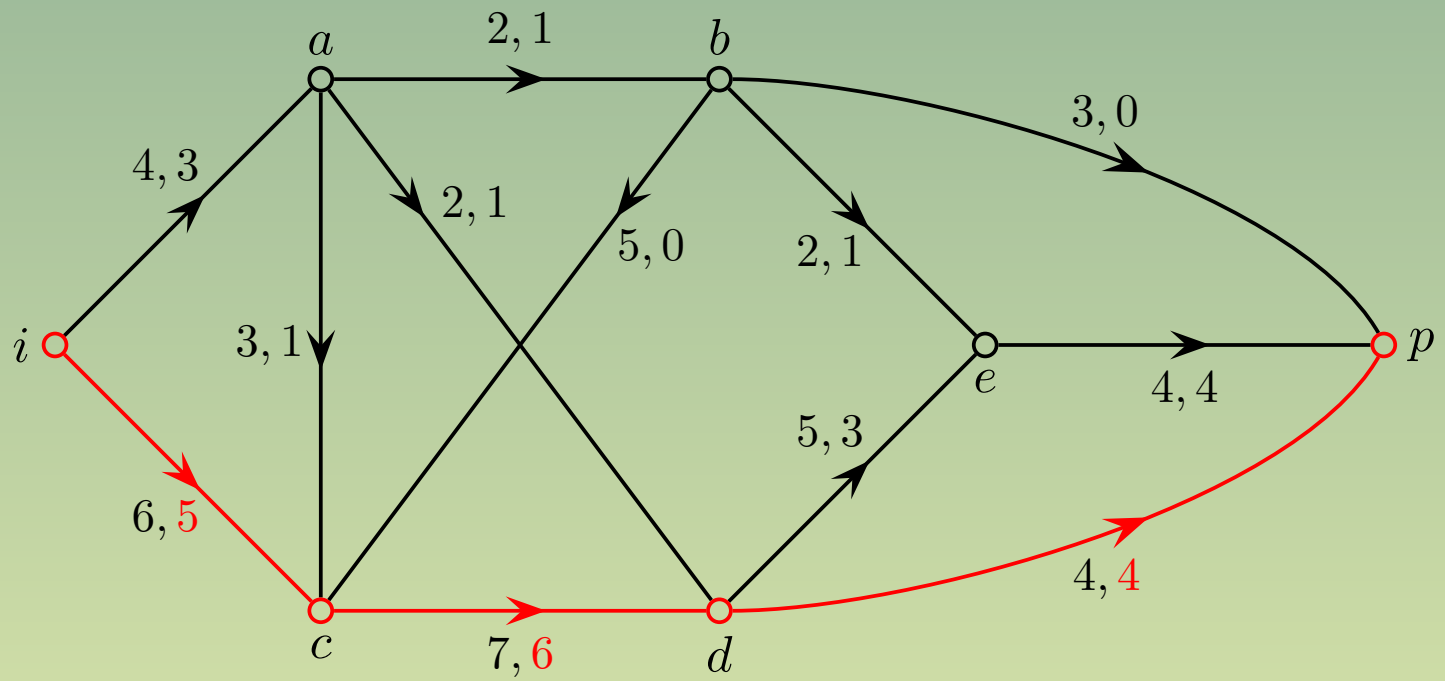


Trenutni protok nije maksimalni jer postoji $\mathcal{F}$-rastući put $P = icdp$.

Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

$$i(-, \infty),\ c(i^+, 3),\ d(c^+, 3),\ p(d^+, 2).$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

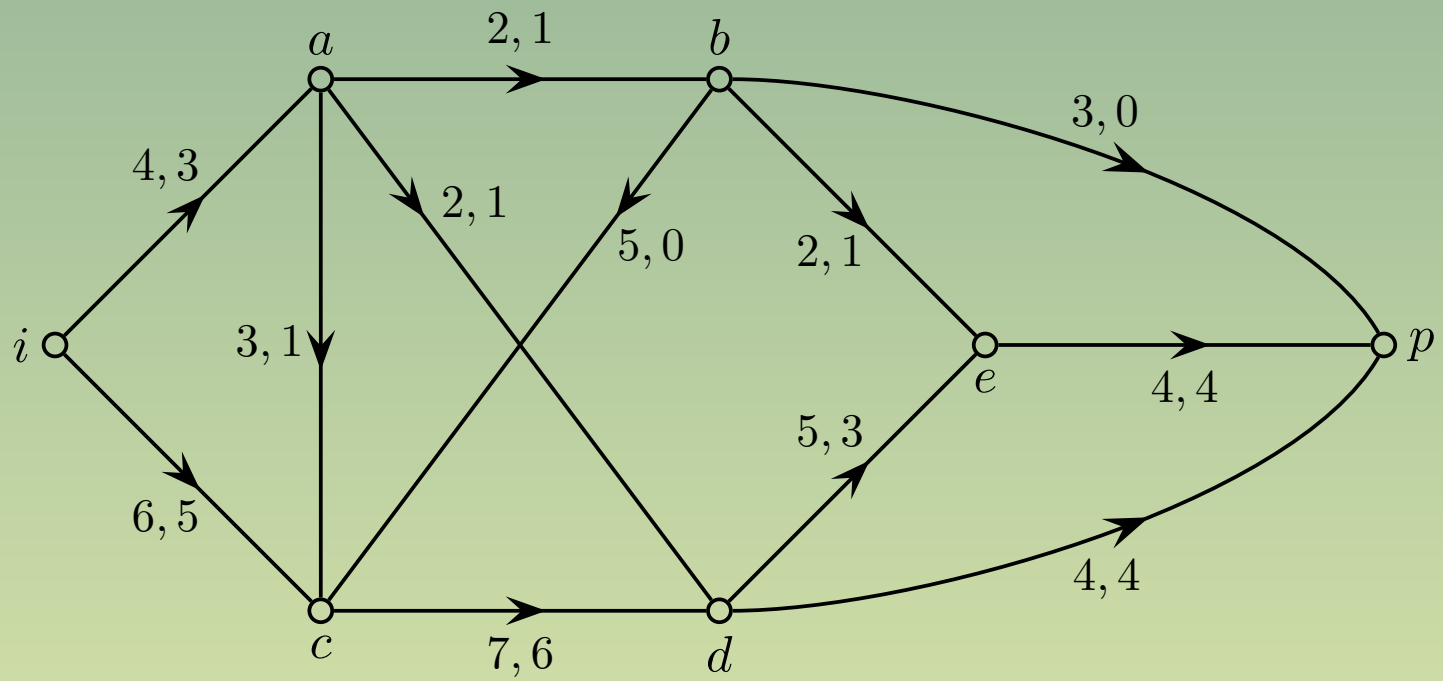


Trenutni protok nije maksimalni jer postoji $\mathcal{F}$-rastući put $P = icdp$. Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

$$i(-, \infty),\ c(i^+, 3),\ d(c^+, 3),\ p(d^+, 2).$$

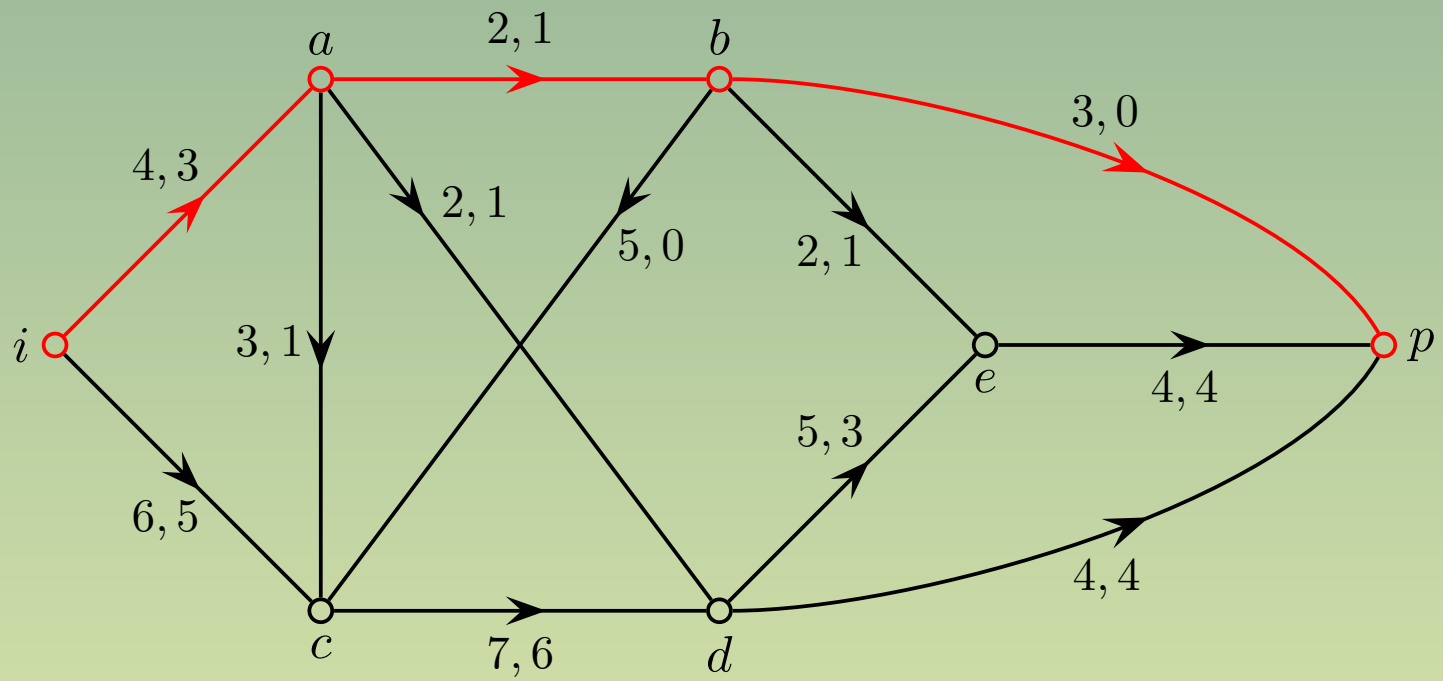
Svi lukovi na putu P su direktni pa protoke kroz te lukove povećamo za $L_p = 2$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



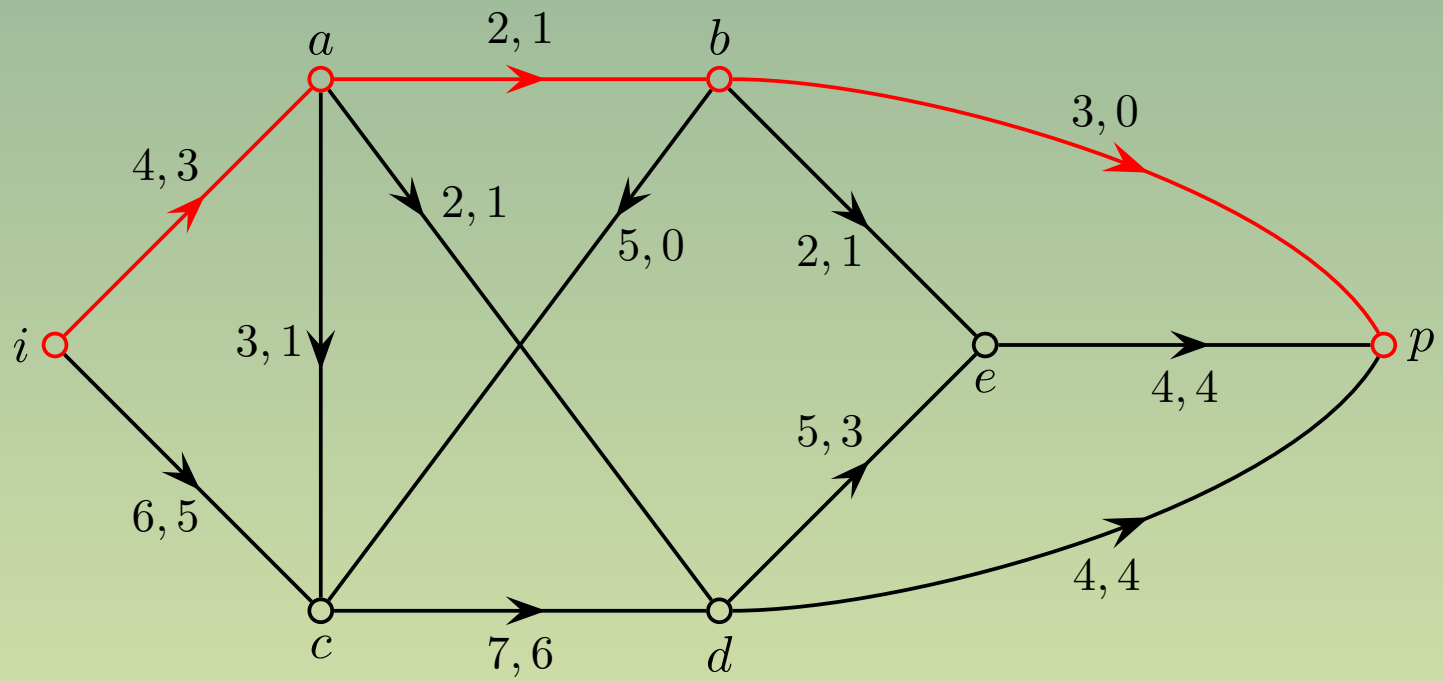
Trenutni protok nije maksimalni

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Trenutni protok nije maksimalni jer postoji $\mathcal{F}$-rastući put $P = iabp$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Trenutni protok nije maksimalni jer postoji $\mathcal{F}$-rastući put $P = iabp$.

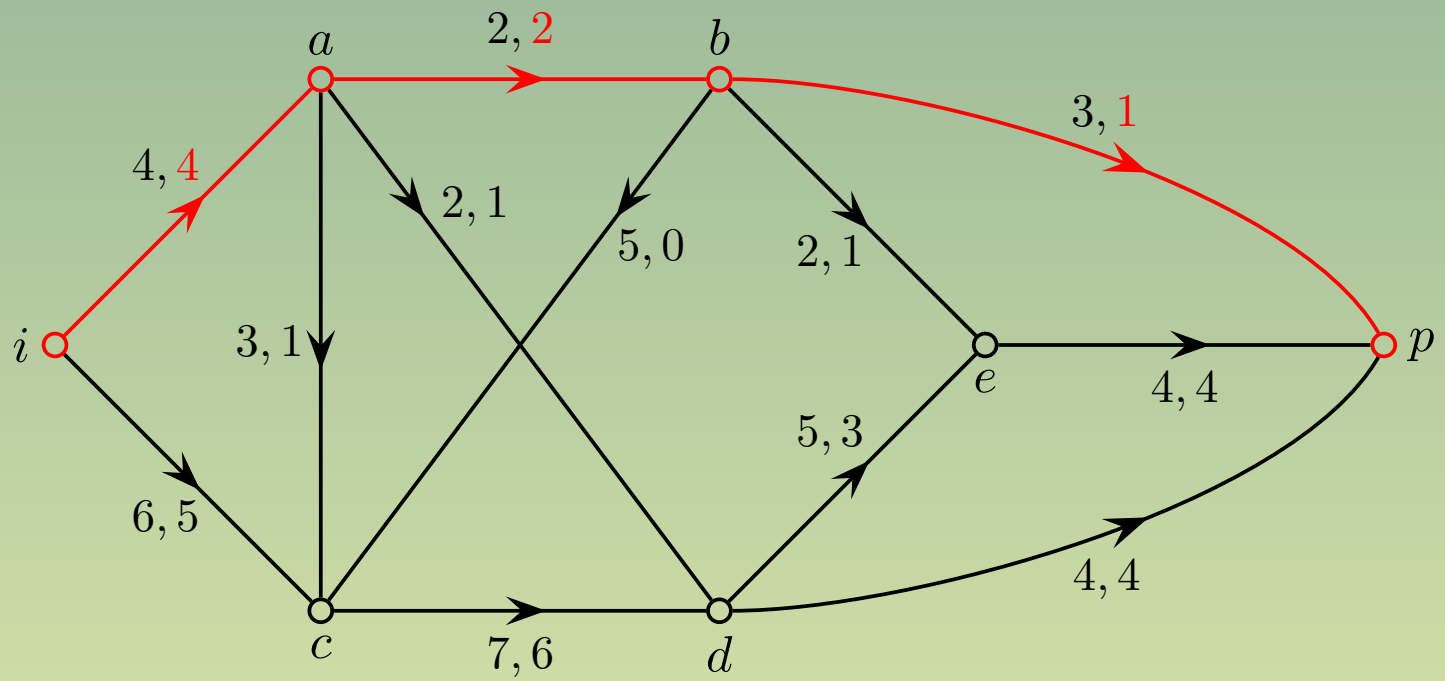
Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

$$i(-, \infty),\ a(i^+, 1),\ b(a^+, 1),\ p(b^+, 1).$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

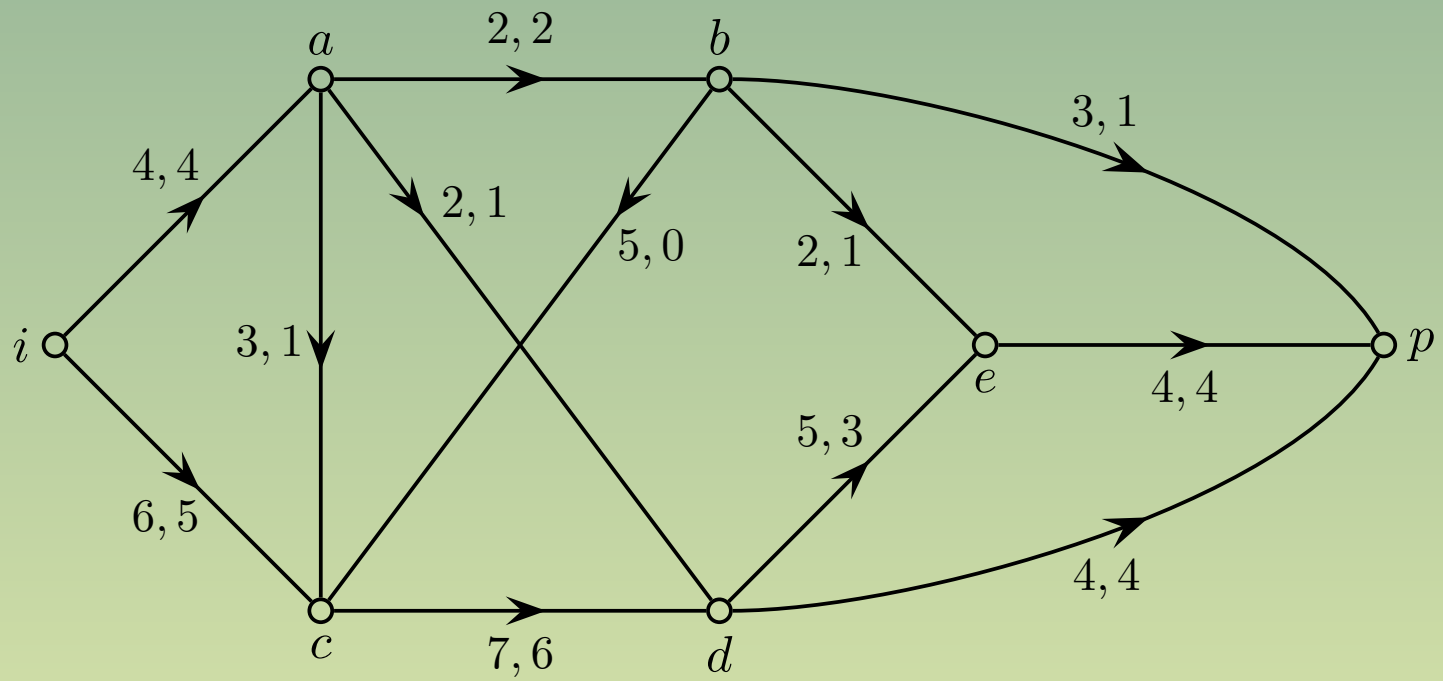


Trenutni protok nije maksimalni jer postoji $\mathcal{F}$-rastući put $P = iabp$. Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

$$i(-, \infty),\ a(i^+, 1),\ b(a^+, 1),\ p(b^+, 1).$$

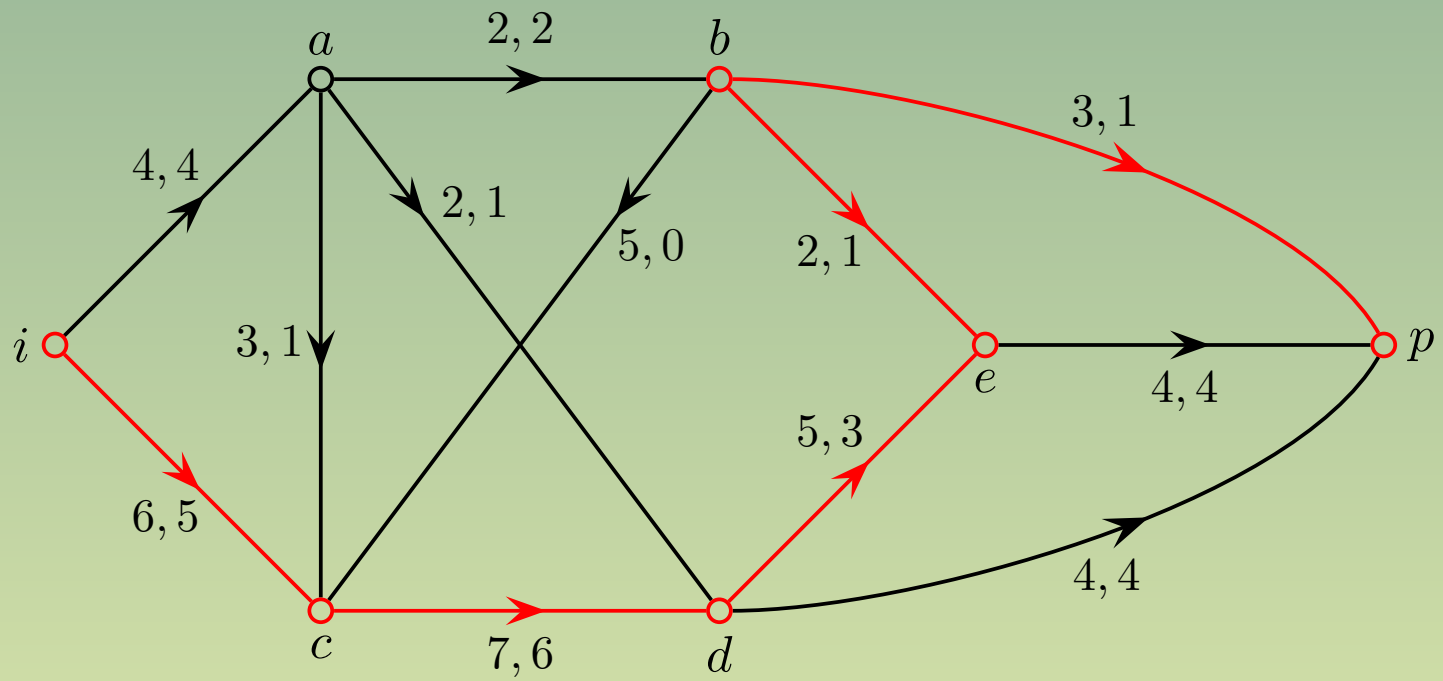
Svi lukovi na putu P su direktni pa protoke kroz te lukove povećamo za $L_p = 1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



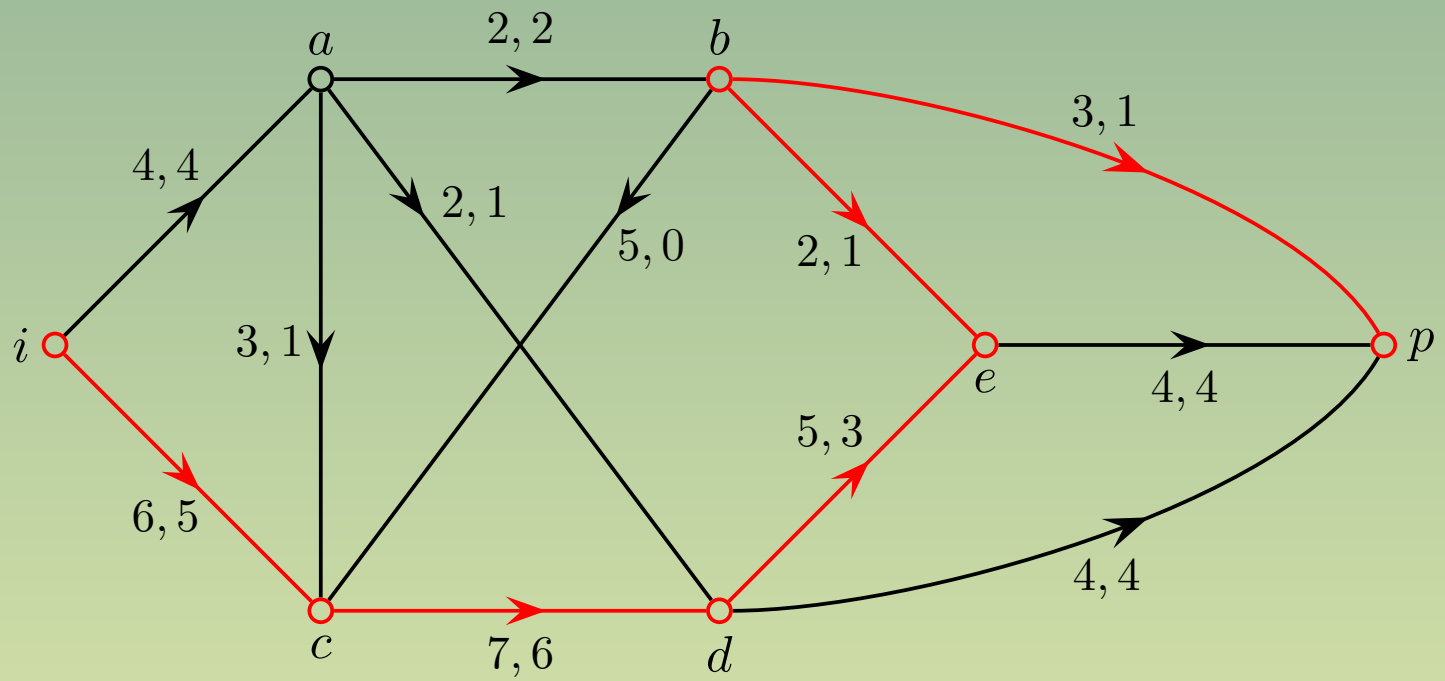
Trenutni protok nije maksimalni

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Trenutni protok nije maksimalni jer postoji $\mathcal{F}$-rastući put $P = icdebp$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

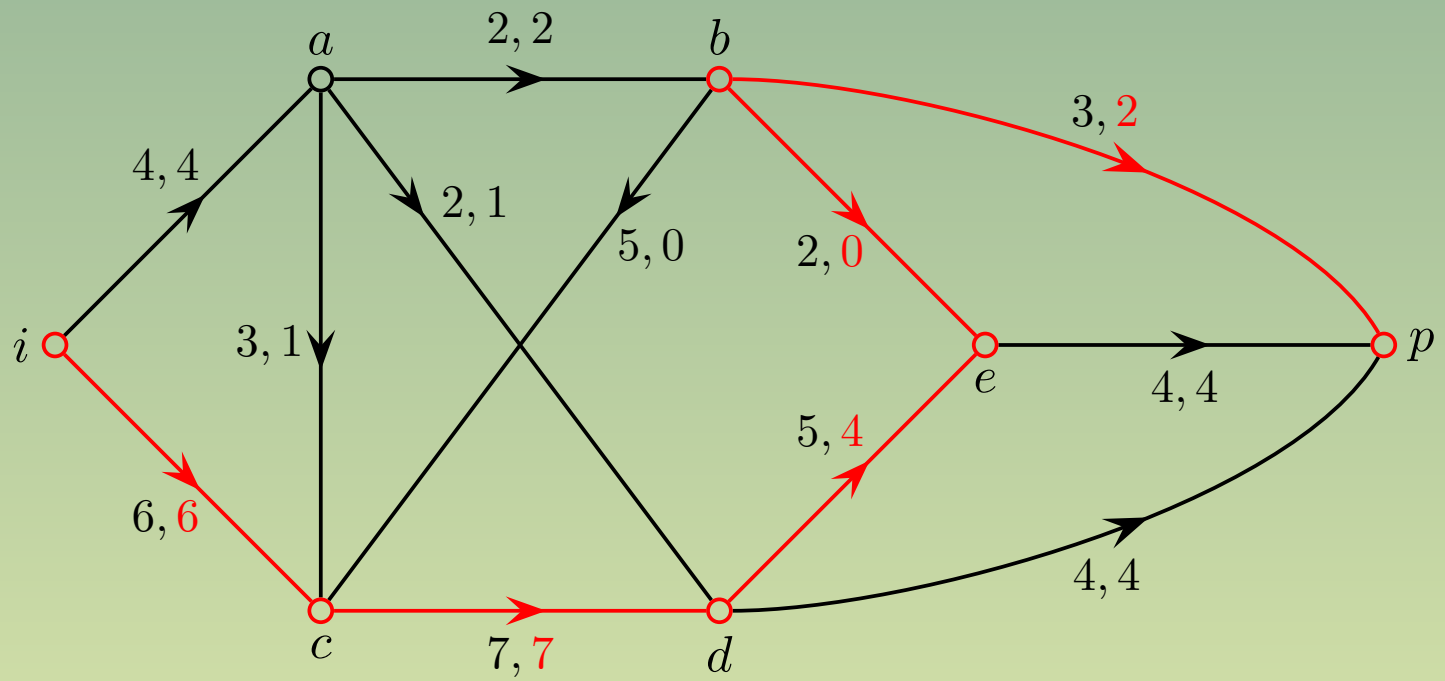


Trenutni protok nije maksimalni jer postoji $\mathcal{F}$-rastući put $P = icdebp$.

Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

$$i(-, \infty),\ c(i^+, 1),\ d(c^+, 1),\ e(d^+, 1),\ b(e^-, 1),\ p(b^+, 1).$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

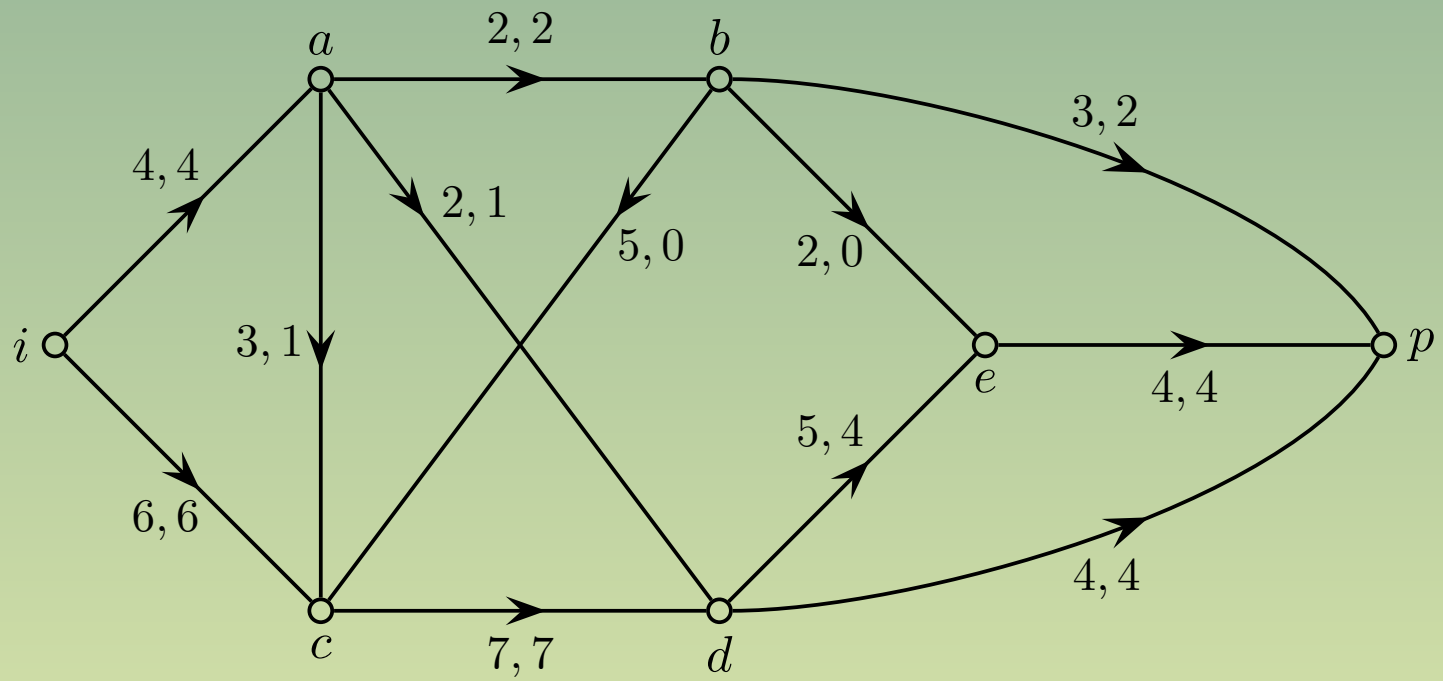


Trenutni protok nije maksimalni jer postoji $\mathcal{F}$-rastući put $P = icdebp$. Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

$$i(-, \infty),\ c(i^+, 1),\ d(c^+, 1),\ e(d^+, 1),\ b(e^-, 1),\ p(b^+, 1).$$

Kroz direktne lukove na putu P povećamo protok za $L_p = 1$, a kroz obrnute lukove na P (to je ovdje jedino eb) smanjimo protok za $L_p = 1$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson



Jedino se može označiti vrh $i(-, \infty)$.

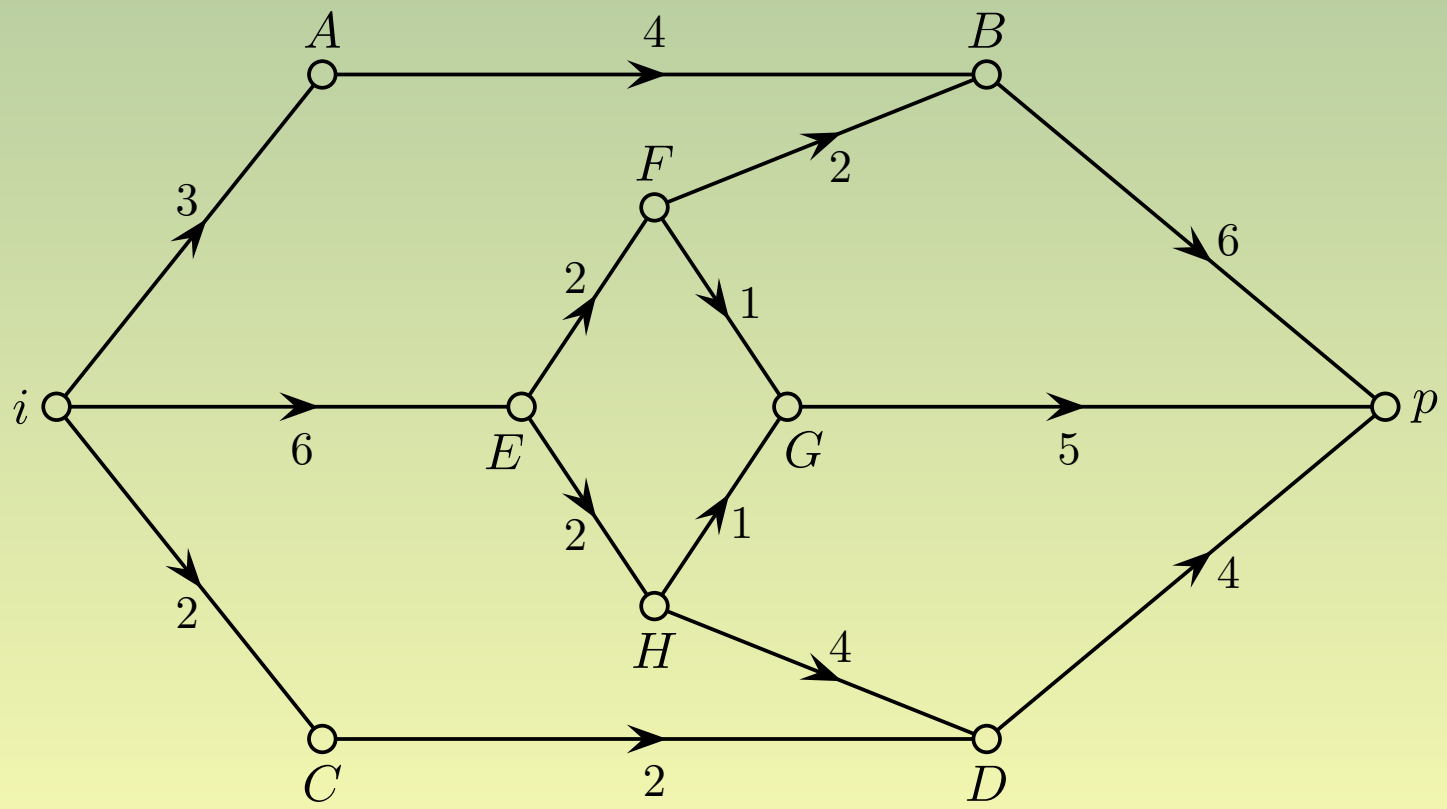
Kako vrh p nije označen i ne mogu se više ostali vrhovi označiti, dobiveni protok je maksimalni protok u zadanoj transportnoj mreži i $\mathrm{val}(\mathcal{F}_{\max}) = 10$.

◂ objasni postupak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

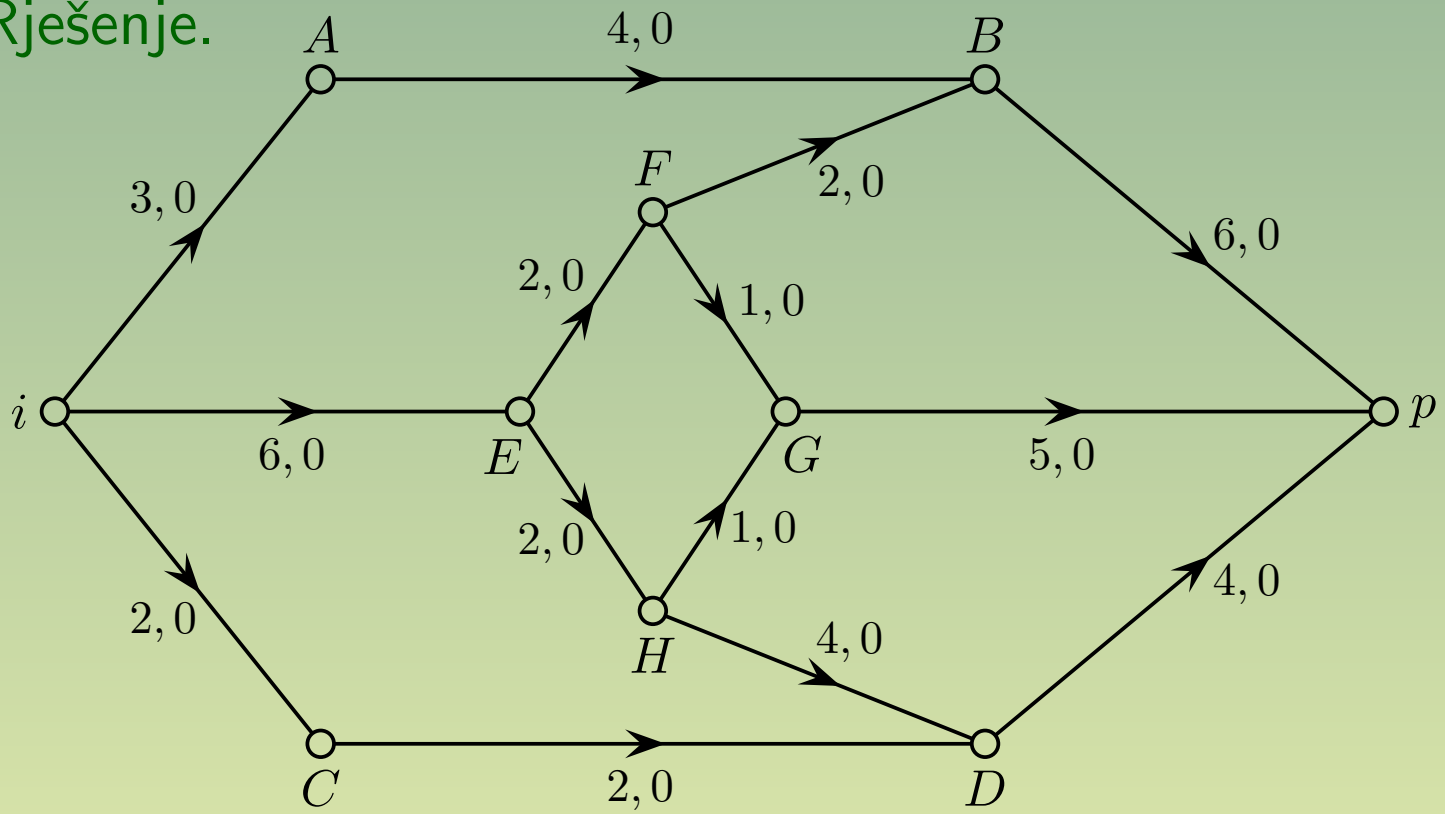
Primjer 9.44.

Pronađite maksimalni protok u transportnoj mreži i pomoću (i, p) reza provjerite njegovu maksimalnost.



Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



Krenemo od nekog protoka f, npr. $f(a, b) = 0$ za svaki luk (a, b).

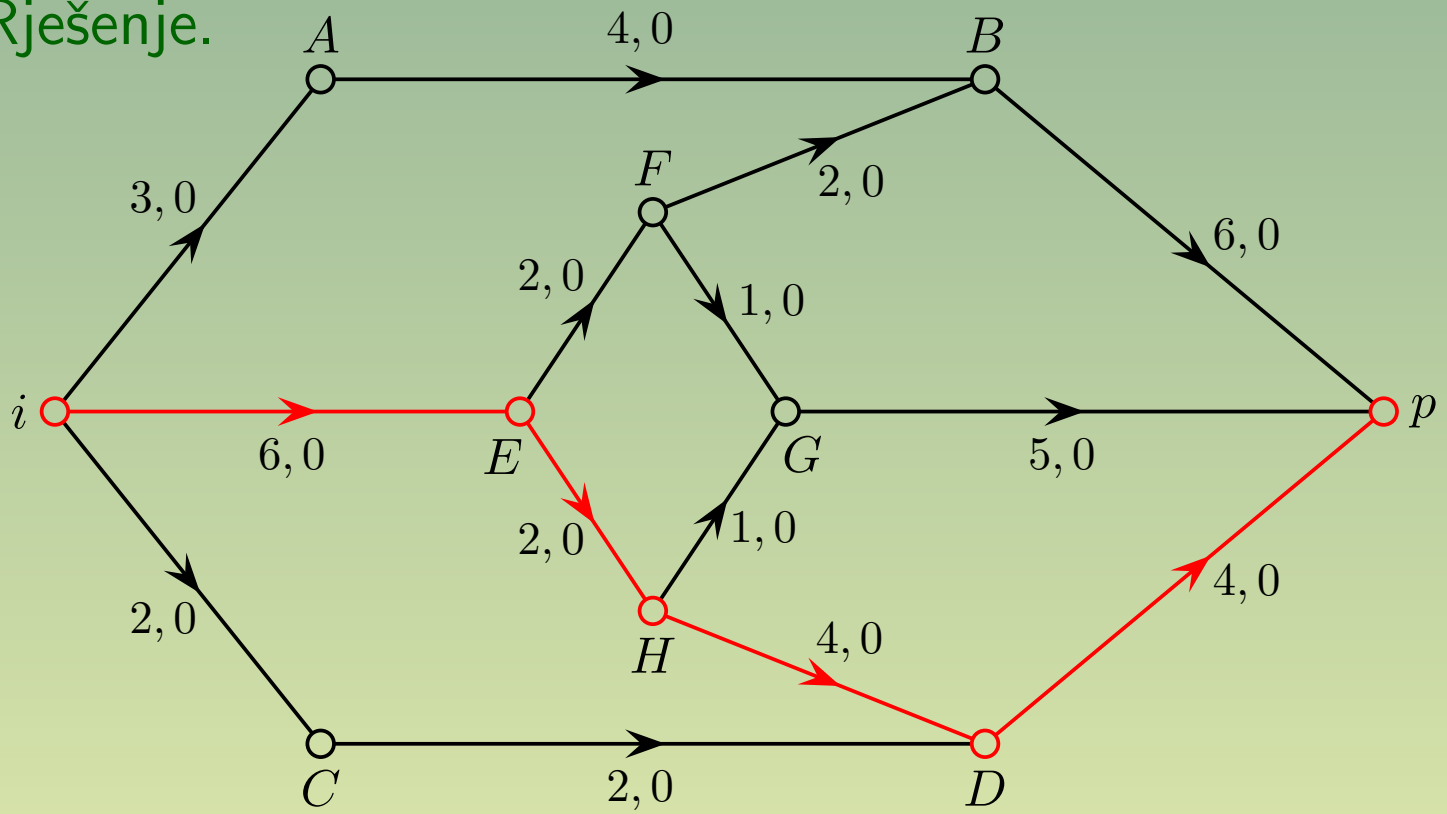
konačno rješenje

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



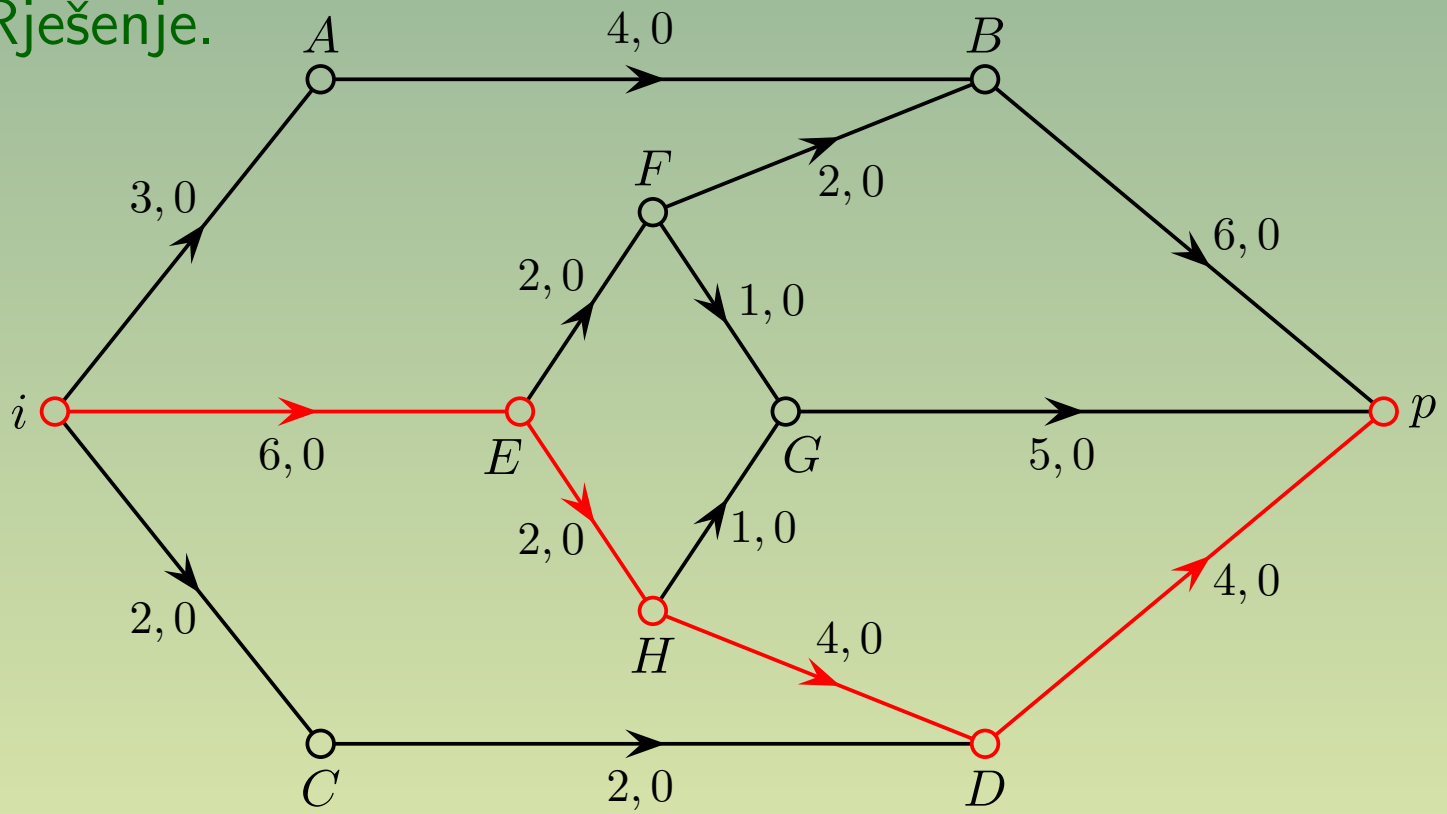
Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iEHDp$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



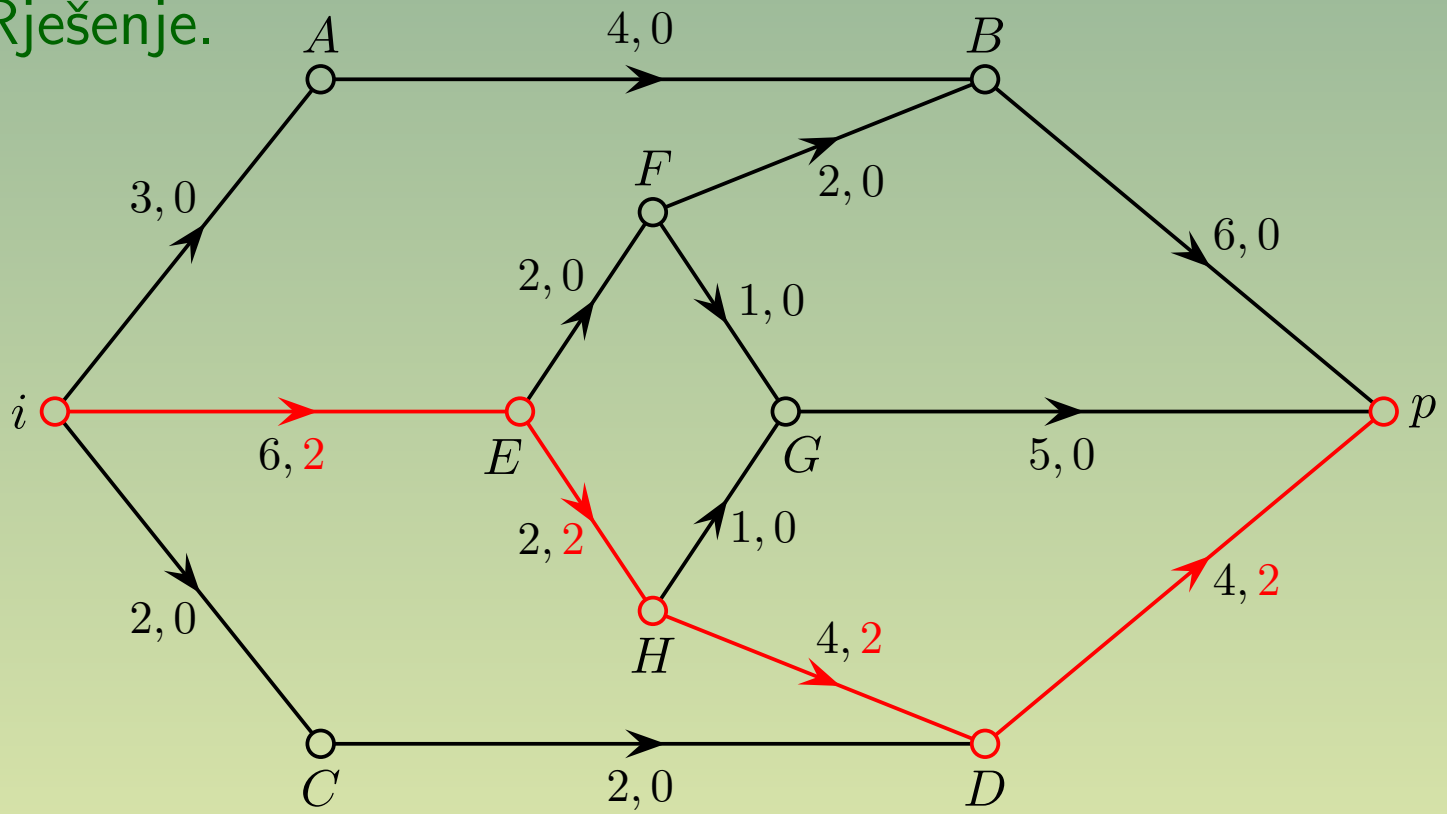
Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iEHDp$.

Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

$$i(-, \infty),\ E(i^+, 6),\ H(E^+, 2),\ D(H^+, 2),\ p(D^+, 2).$$

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



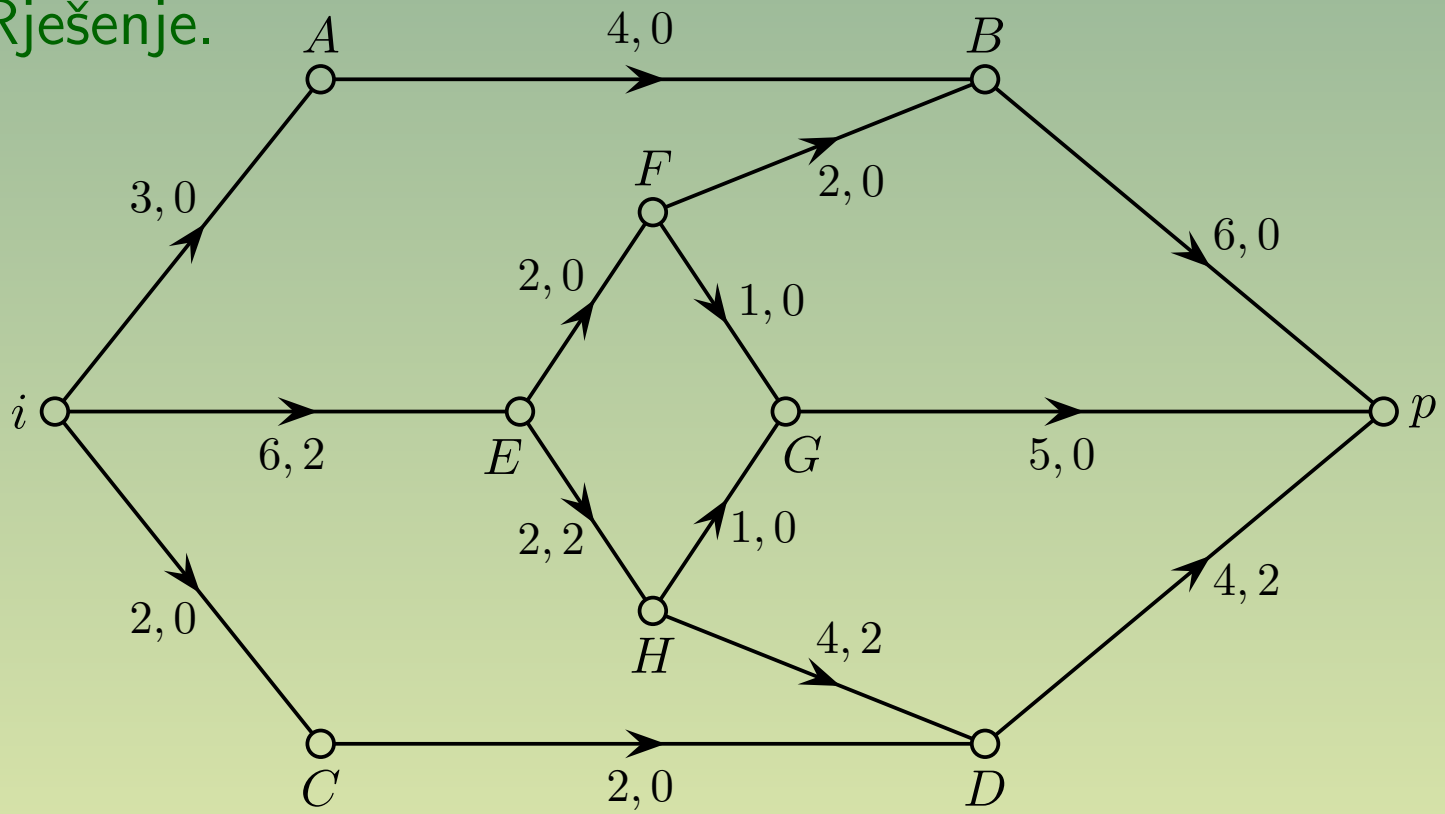
Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iEHDp$.
Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

$$i(-, \infty),\ E(i^+, 6),\ H(E^+, 2),\ D(H^+, 2),\ p(D^+, 2).$$

Svi lukovi na putu P su direktni pa protoke kroz te lukove povećamo za $L_p = 2$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

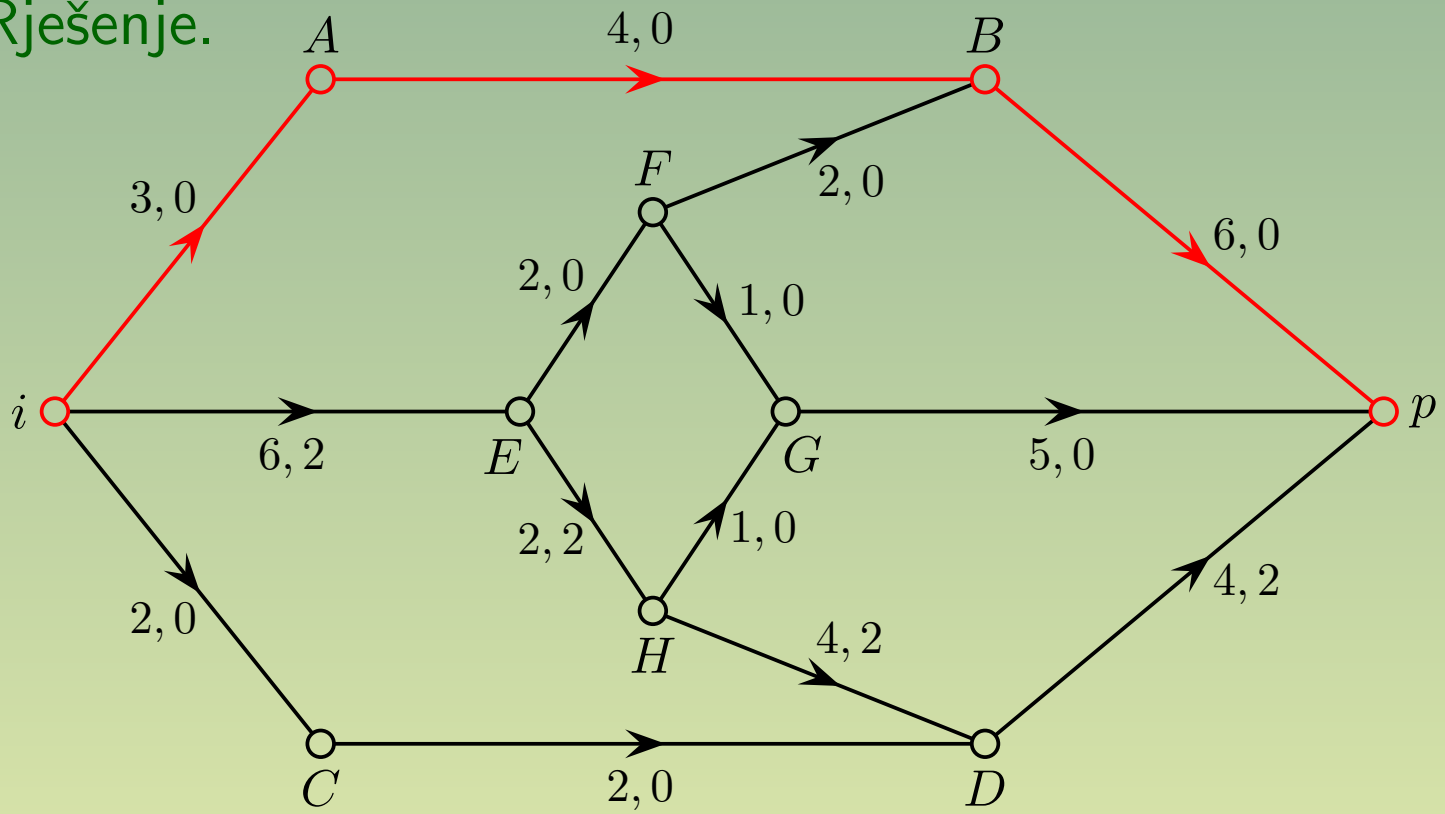
Rješenje.



Trenutni protok nije maksimalni

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

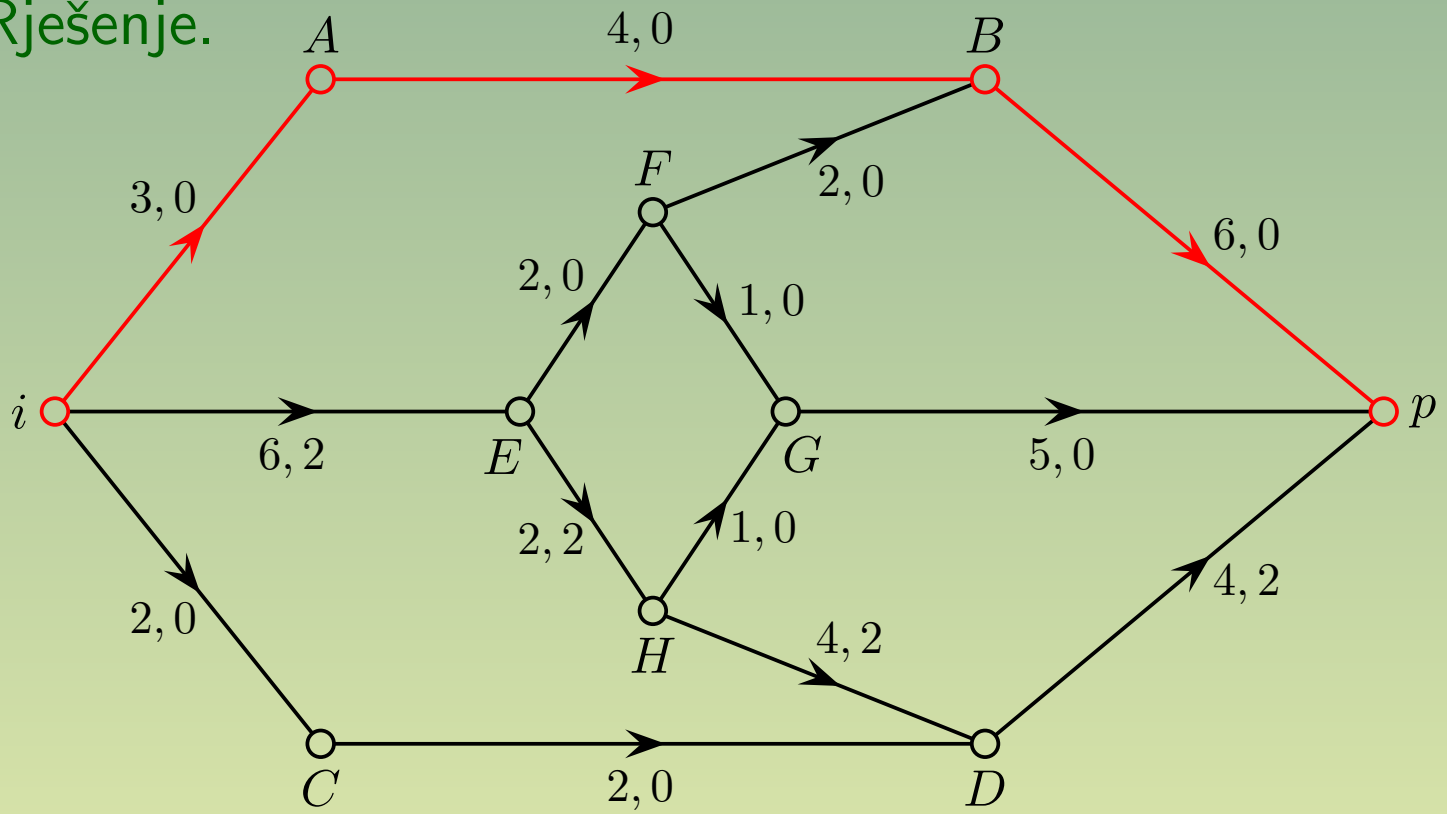
Rješenje.



Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iABp$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iABp$.

Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

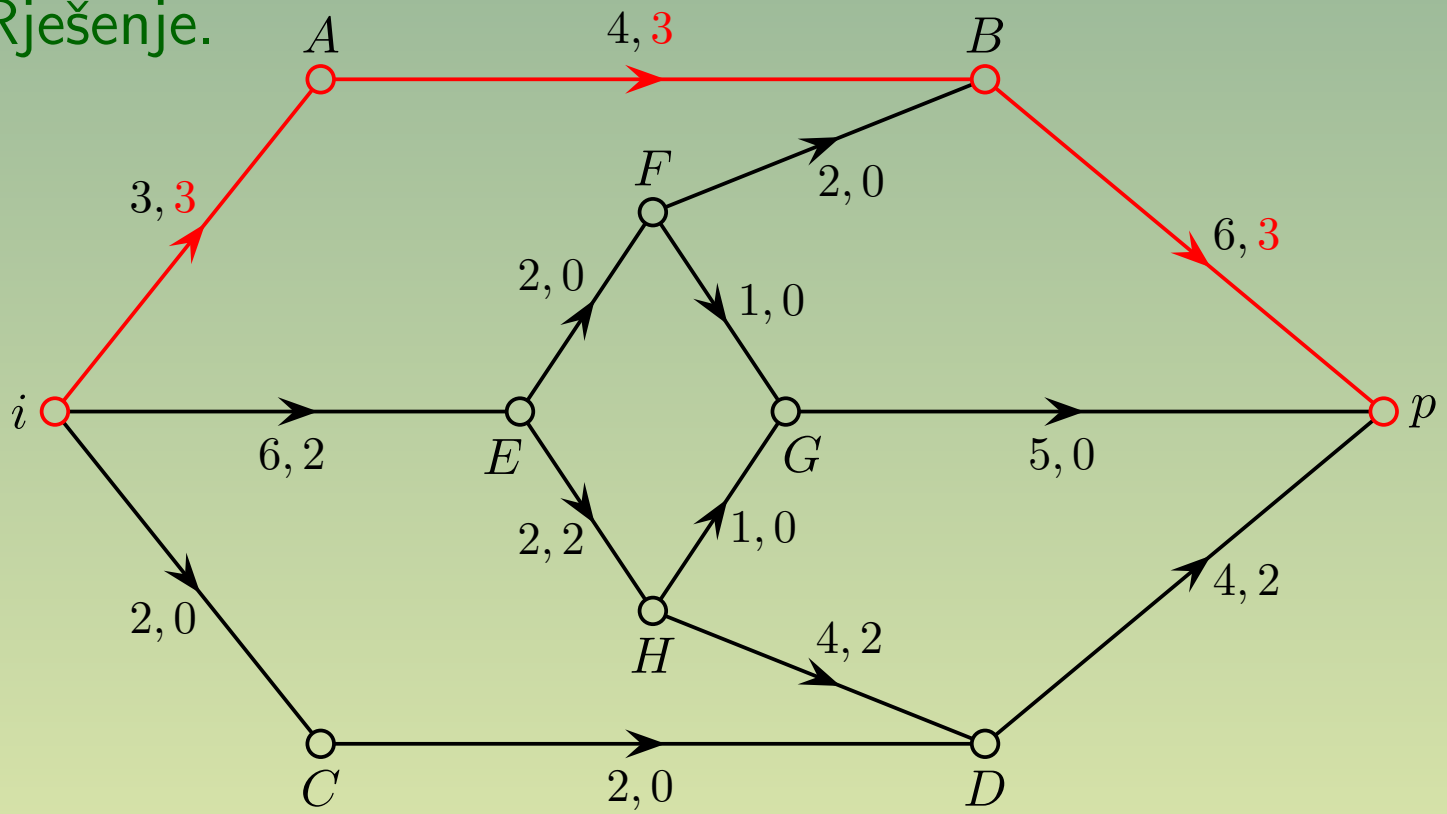
$$i(-, \infty),\ A(i^+, 3),\ B(A^+, 3),\ p(B^+, 3).$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



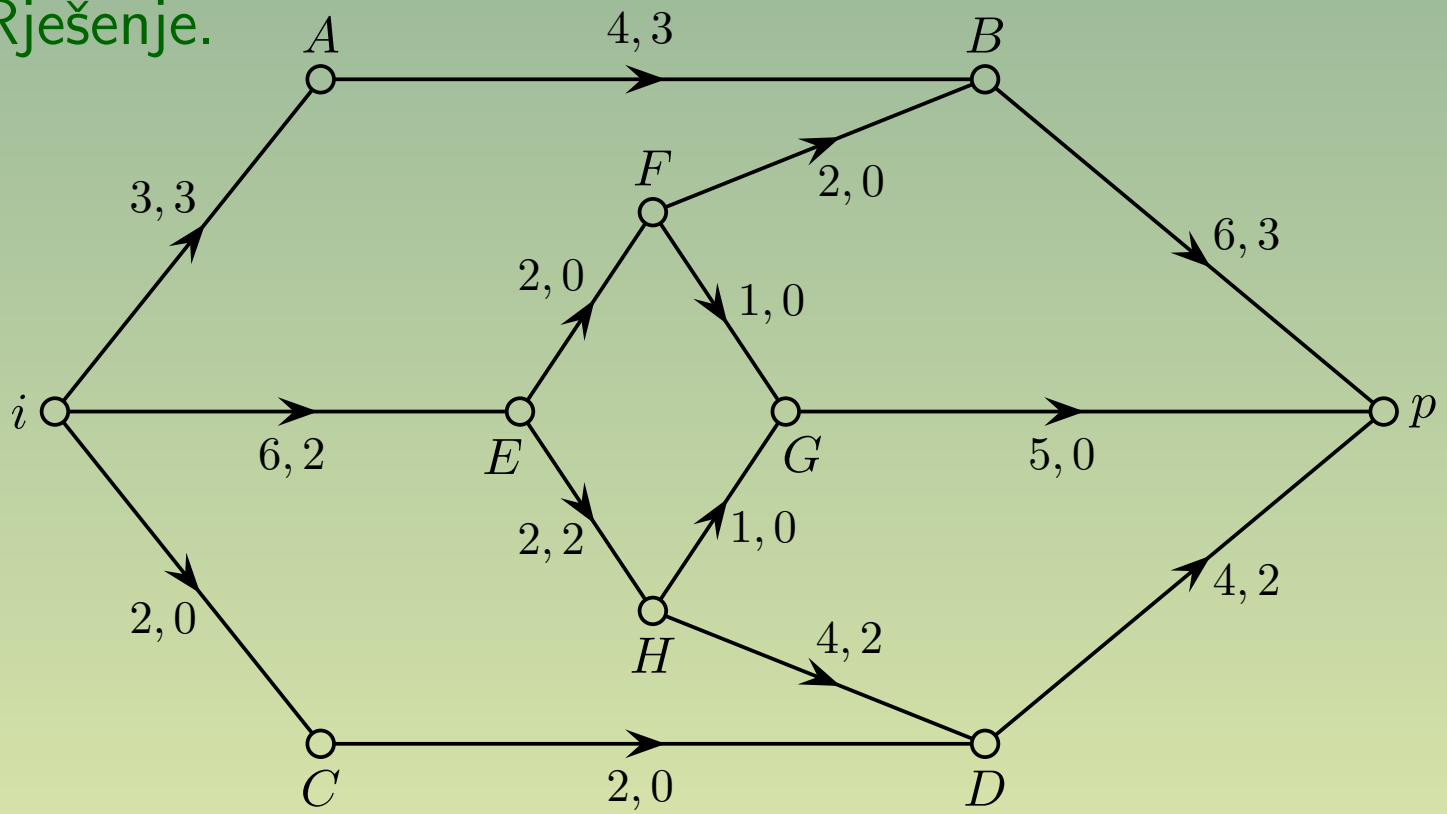
Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iABp$.
Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

$$i(-, \infty),\ A(i^+, 3),\ B(A^+, 3),\ p(B^+, 3).$$

Svi lukovi na putu P su direktni pa protoke kroz te lukove povećamo za $L_p = 3$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

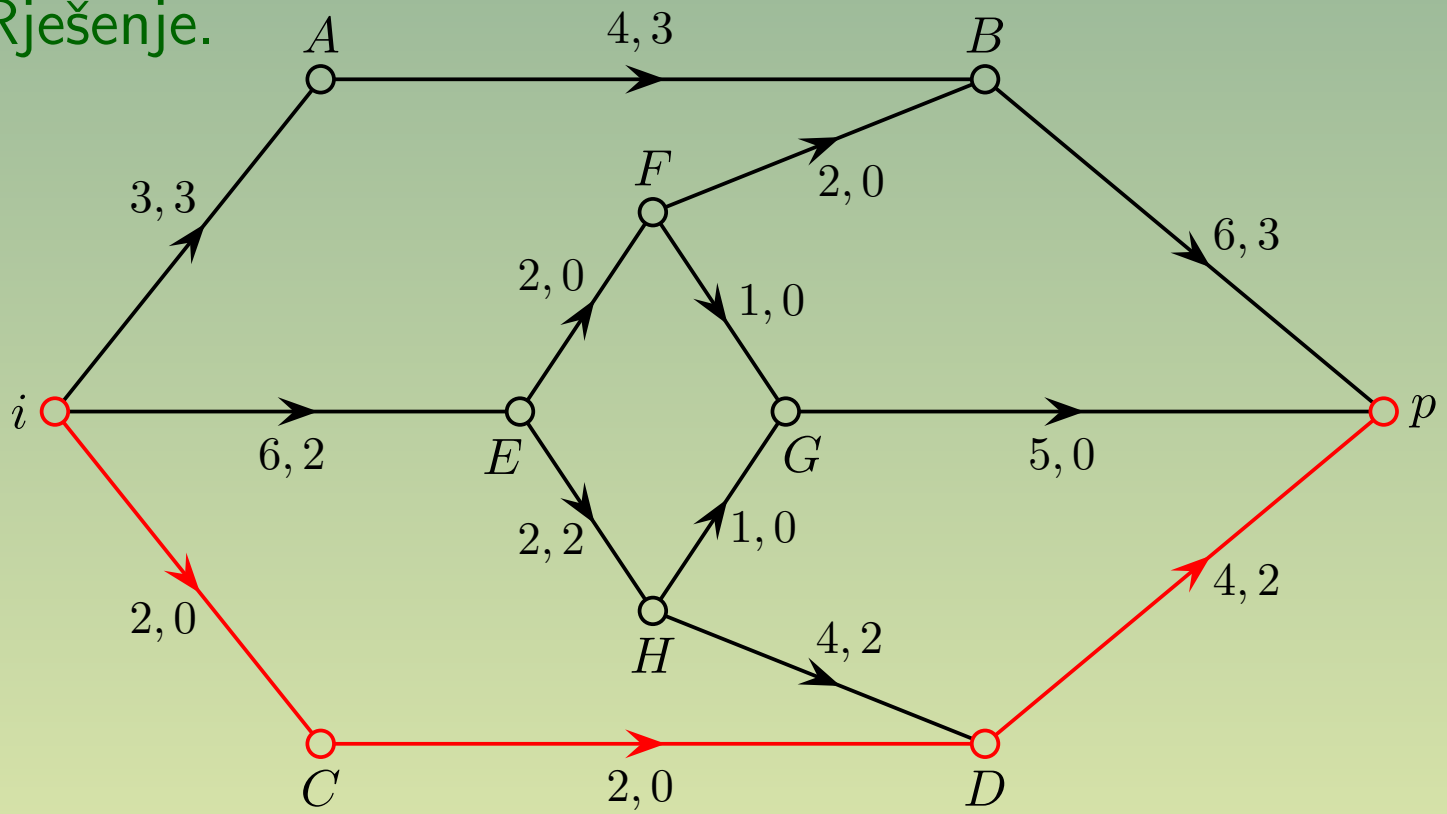
Rješenje.



Trenutni protok nije maksimalni

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

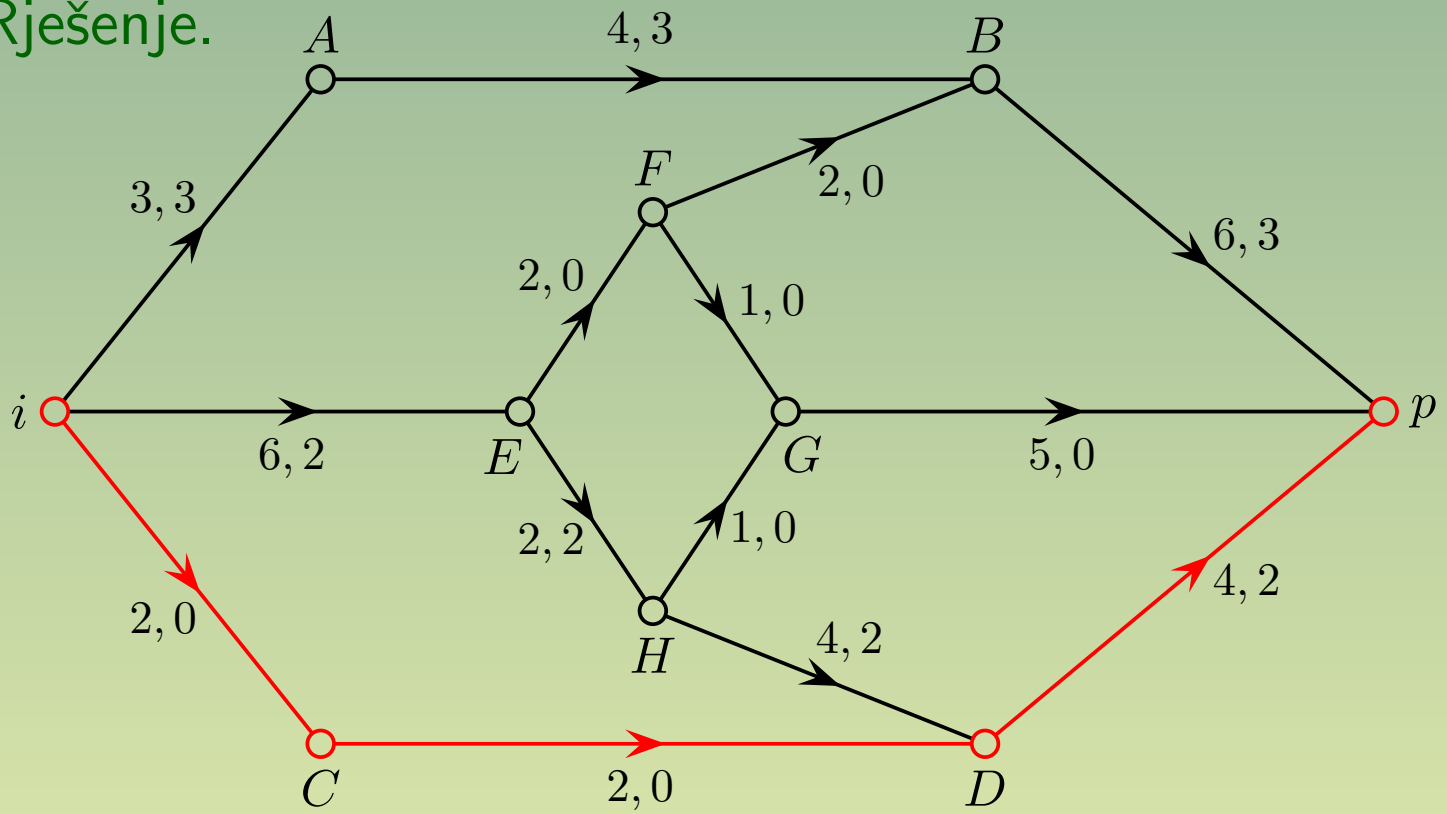
Rješenje.



Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iCDp$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iCDp$.

Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

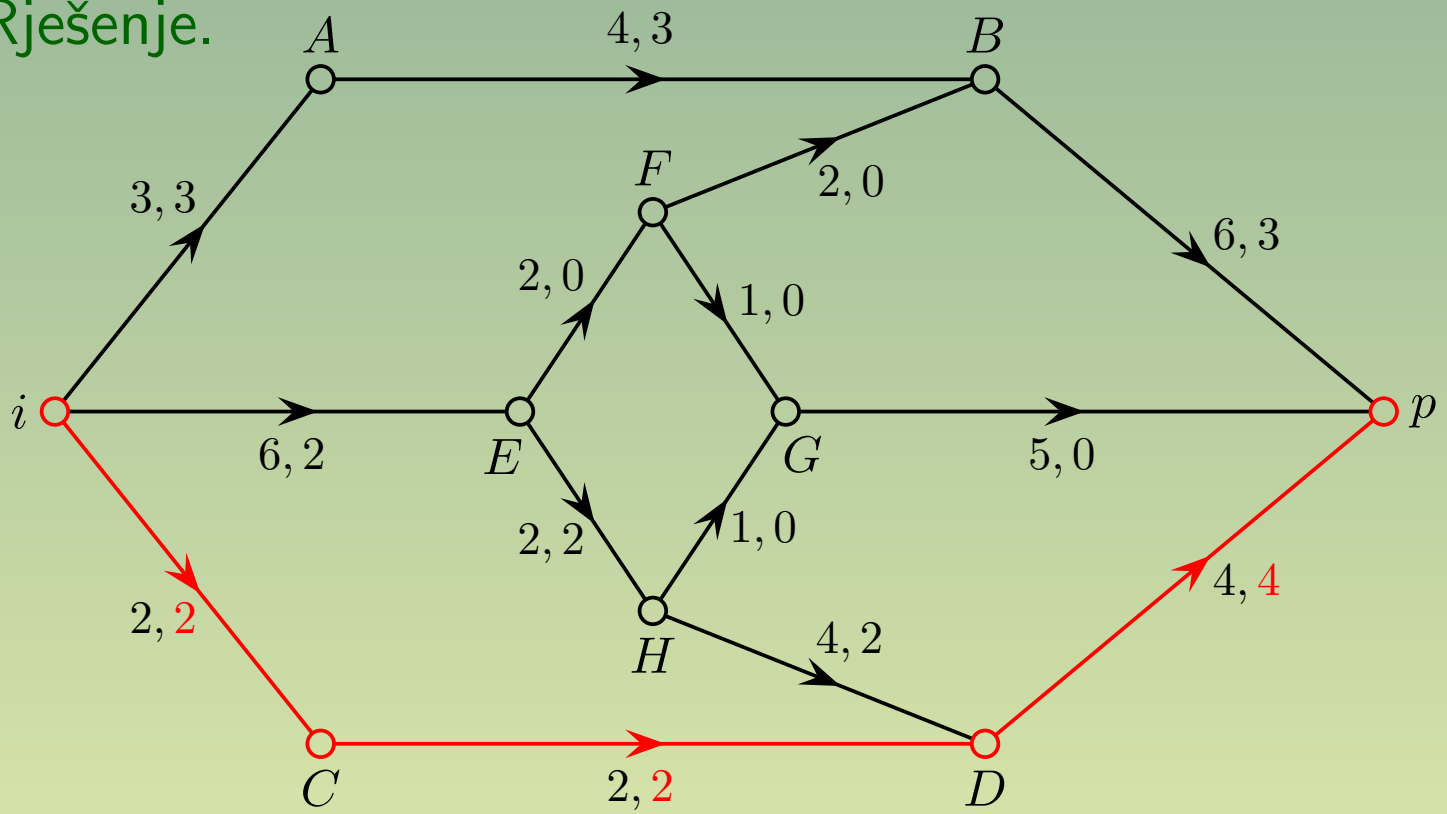
$$i(-, \infty),\ C(i^+, 2),\ D(C^+, 2),\ p(D^+, 2).$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



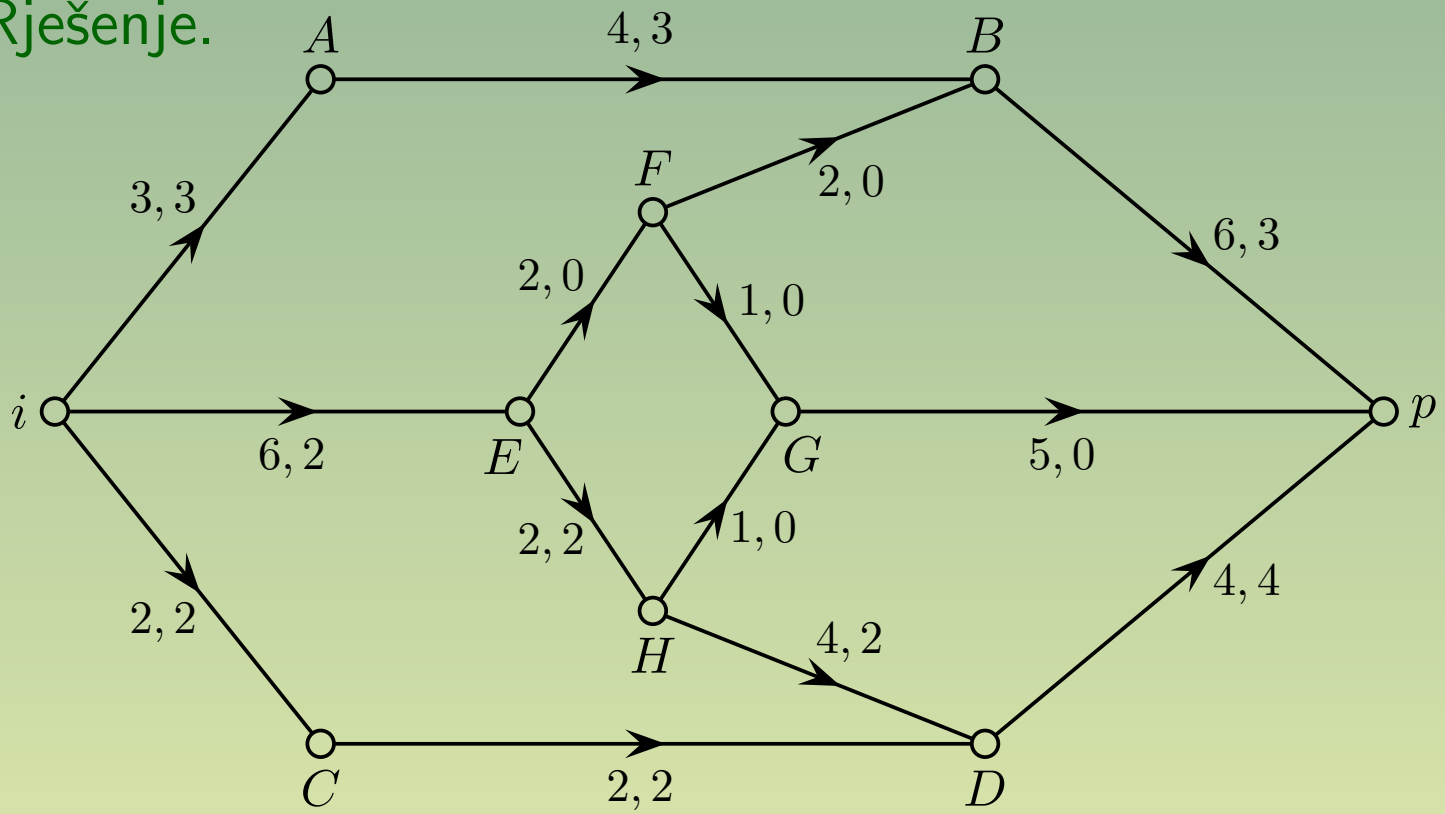
Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iCDp$. Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

$$i(-, \infty),\ C(i^+, 2),\ D(C^+, 2),\ p(D^+, 2).$$

Svi lukovi na putu P su direktni pa protoke kroz te lukove povećamo za $L_p = 2$.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

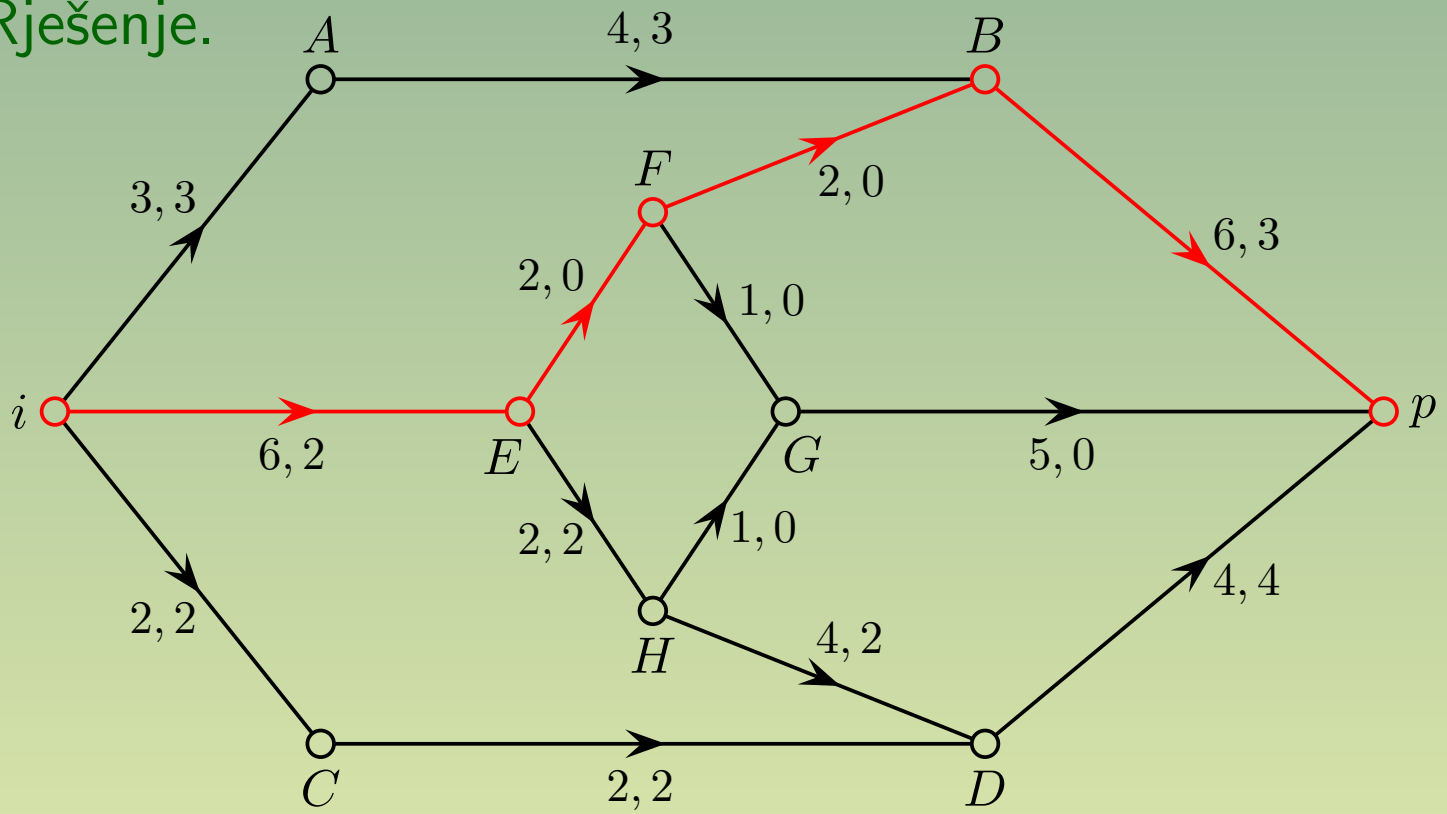
Rješenje.



Trenutni protok nije maksimalni

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



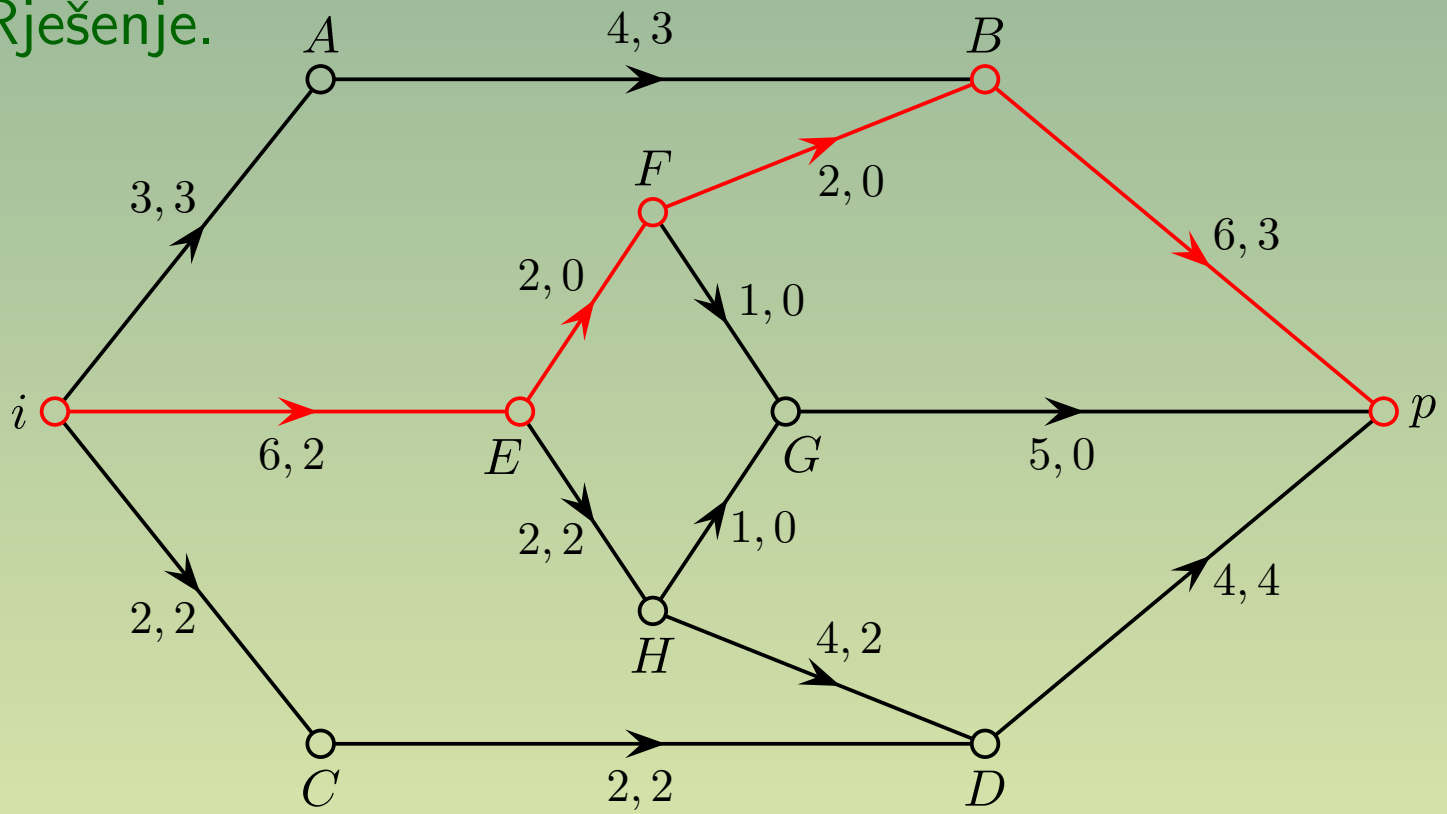
Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iEFBp$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iEFBp$.

Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

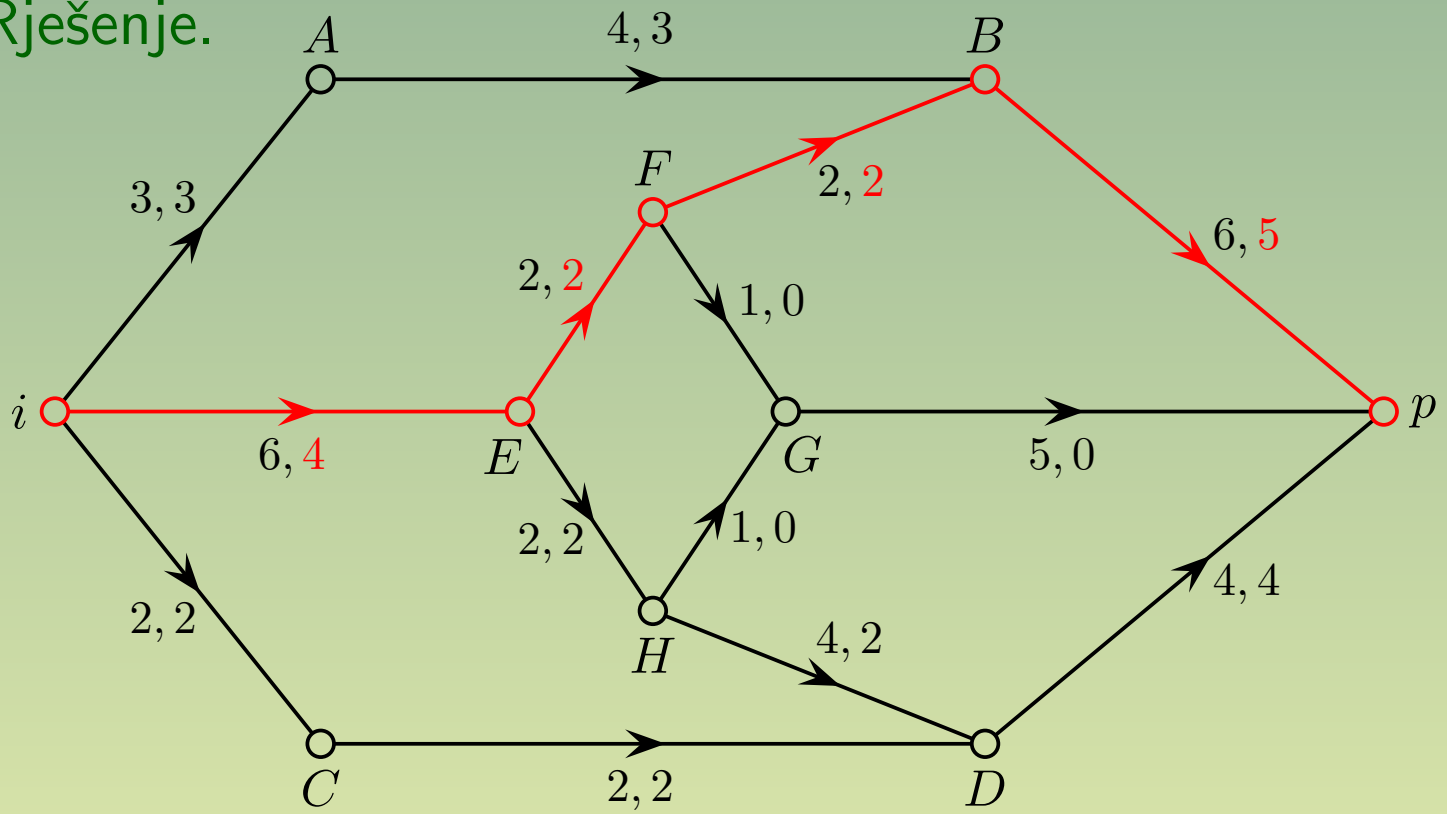
$$i(-, \infty),\ E(i^+, 4),\ F(E^+, 2),\ B(F^+, 2),\ p(B^+, 2).$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



Trenutni protok nije maksimalni jer postoji f-rastući put $P = iEFBp$.
Vrhovi na tom putu dobivaju oznake

$$i(-, \infty),\ E(i^+, 4),\ F(E^+, 2),\ B(F^+, 2),\ p(B^+, 2).$$

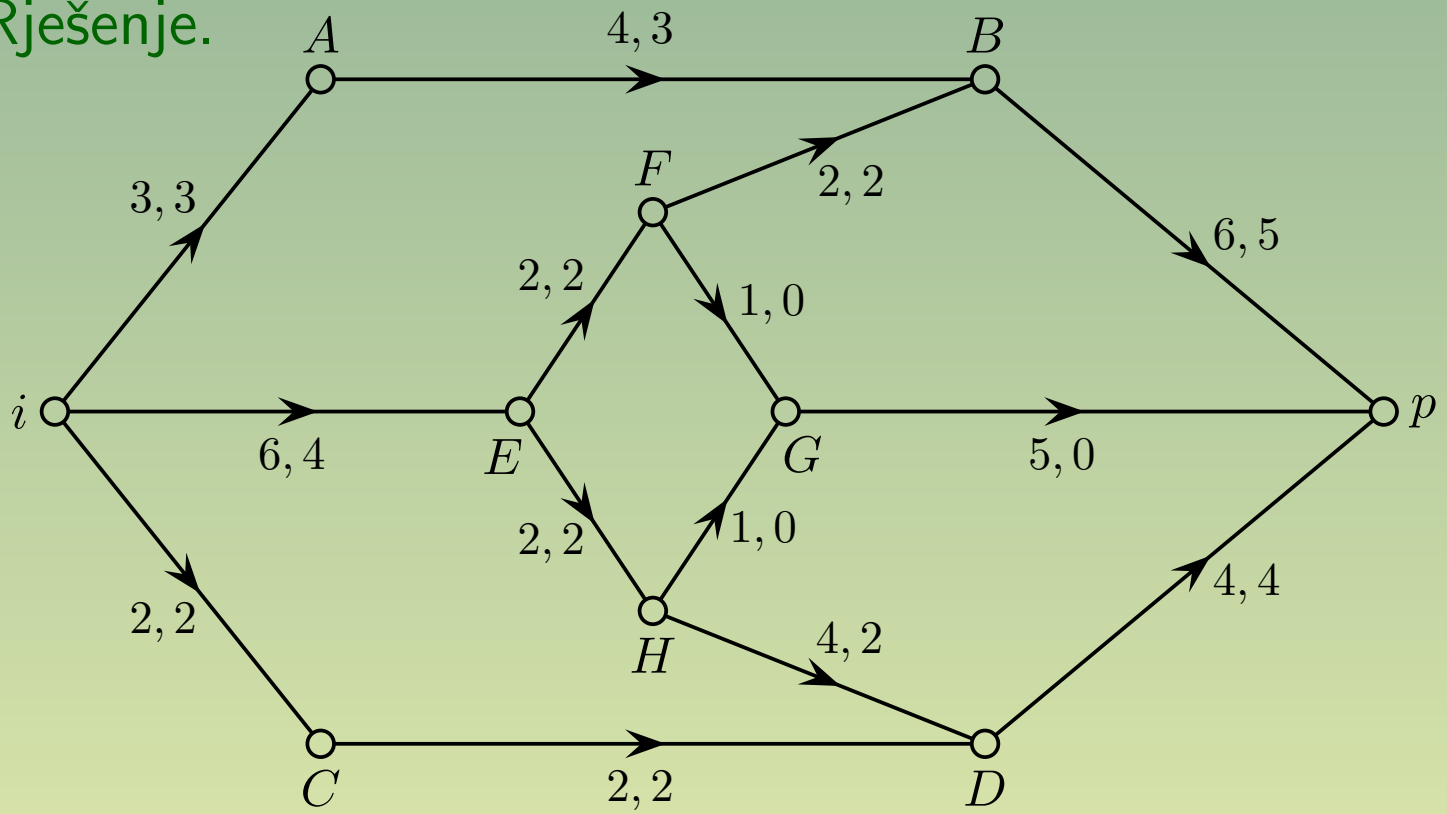
Svi lukovi na putu P su direktni pa protoke kroz te lukove povećamo za $L_p = 2$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Rješenje.



Jedini vrhovi koji se mogu označiti su $i(-, \infty)$ i $E(i^+, 2)$. Kako vrh p nije označen i ne mogu se više ostali vrhovi označiti, dobiveni protok je maksimalni protok u zadanoj transportnoj mreži i $\mathrm{val}(f_{\max}) = 9$.

◂ objasni postupak

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Uzmemo li (i, p) rez $\{S, T\}$, gdje je

$$S = \{i, E\}, \quad T = \{p, A, B, C, D, F, G, H\}$$

dobivamo da je tada

$$\begin{aligned} \operatorname{cap}(S, T) &= \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} c_{uv} = c_{iA} + c_{iC} + c_{EF} + c_{EH} \\ &= 3 + 2 + 2 + 2 = 9 \end{aligned}$$

Kako je $\operatorname{cap}(S, T) = \operatorname{val}(f_{\max})$, slijedi da je $\{S, T\}$ minimalni rez, a $f_{\max}$ je maksimalni protok.

Da li postoji maksimalni protok u zadanoj transportnoj mreži u kojemu bi lukovi FG i HG bili zasićeni? Pronađite takav maksimalni protok, ukoliko on postoji.

Usmjereni grafovi
Definicija digrafa
Izomorfizam digrafova
Šetnje u digrafu
Matrica susjedstva digrafa
Turnir
Tranzitivni turnir
Dipovezani turnir
Rangiranje
Bellman-Fordov algoritam
Opis Bellman-Fordovog algoritma
Bellman-Ford error
Aciklički digraf
Topološko sortiranje
Bellmanov algoritam
Problem rasporeda – 1. tip
Problem rasporeda – 2. tip
Problem jednosmjernih ulica
Transportne mreže
Ford-Fulkerson

Dio X

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Sadržaj

- Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
  - Planarni grafovi
  - Riješeni primjeri
  - Homeomorfizam grafova
  - Teorem Kuratowskog
  - Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritam
  - Bojanje vrhova grafa
  - Riješeni primjeri
  - Pohlepno bojanje vrhova grafa
  - Pohlepno bojanje – slučajni raspored vrhova
  - Welsh-Powellov algoritam
  - Brèlazov algoritam
  - Bojanje bridova grafa
  - Tipični primjeri
  - Algoritmi za bojanje bridova
  - Sparivanje u grafu
  - Sparivanje u bipartitnom grafu
  - Modificirani DFS i BFS algoritam
  - Alternirajuća stabla
  - Edmondsov algoritam
  - Savršena sparivanja

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

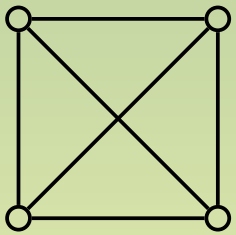
Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

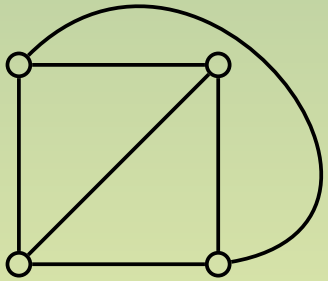
Savršena sparivanja

Planarni grafovi

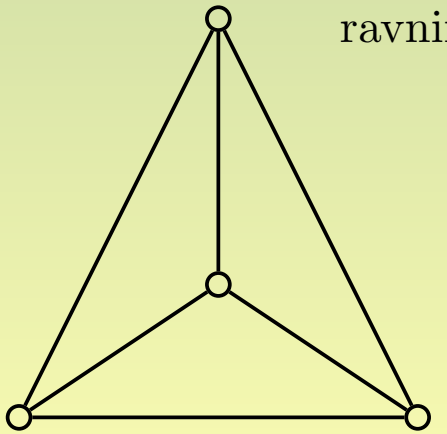
Kažemo da je graf G **planarni** ili **ravninski** ako se može nacrtati u ravnini tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima. Takva realizacija grafa se zove **ravninsko smještenje**. Na donjoj slici je prikazan graf K_4 i dva njegova ravninska smještenja.



K_4



ravninsko smještenje od K_4



ravninsko smještenje od K_4

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

U ovom dijelu ćemo navesti neka osnovna svojstva planarnih grafova koja će nam omogućiti da za zadani graf G odgovorimo na pitanje "Da li je graf G planarni?". Također, opisat ćemo jedan jednostavni algoritam iz 1964. godine koji ispituje planarnost grafa i daje njegovo ravninsko smještenje ukoliko je graf planarni. Složenost tog algoritma je $O(\nu^2)$. Postoje razni drugi algoritmi koji ispituju planarnost grafa i čija je složenost $O(\nu)$, međutim za njihovo potpuno razumijevanje bi bilo potrebno dublje ulaziti u teoriju u što se ovdje nećemo upuštati. Na webu postoji dosta dostupnih materijala na tu temu ukoliko nekog više zanimaju teorija i algoritmi vezani za ovo područje.

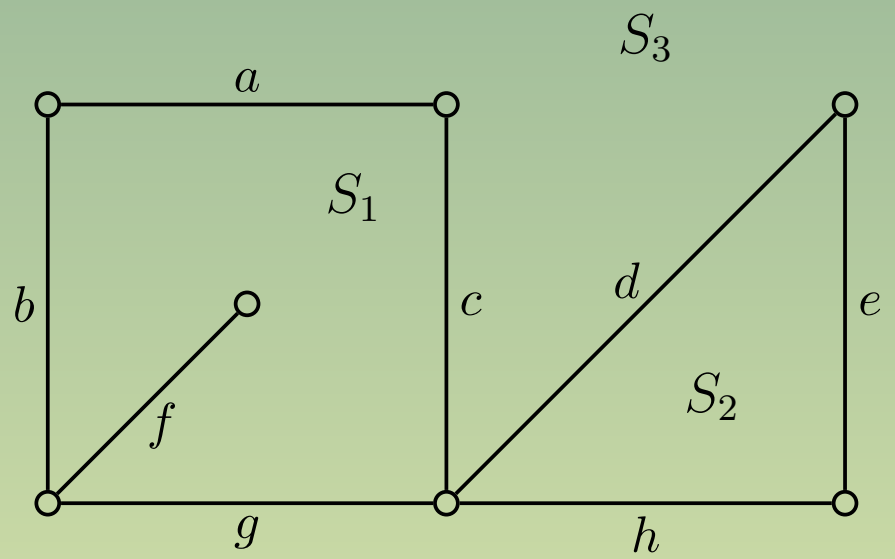
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Planarni graf G (preciznije, njegovo ravninsko smještenje) dijeli ravninu na neka područja koja zovemo **stranama**. Svaka strana planarnog grafa je omeđena nekim bridovima tog grafa koji određuju **rub** te strane. Pritom zahtijevamo da je svaki brid rub neke, barem jedne, strane. Svaki planarni graf ima točno jednu neomeđenu stranu koja se zove **vanjska strana**.

Skup svih strana planarnog grafa G označavat ćemo s $F(G)$, a ukupni broj strana s $\phi(G)$. Ukoliko će iz konteksta biti jasno o kojemu se grafu radi, tada ćemo često umjesto $F(G)$ i $\phi(G)$ kratko samo pisati F i ϕ.

Uočite da broj strana planarnog grafa ne ovisi o njegovom ravninskom smještenju, tj. sva moguća ravninska smještenja planarnog grafa imaju isti broj strana.

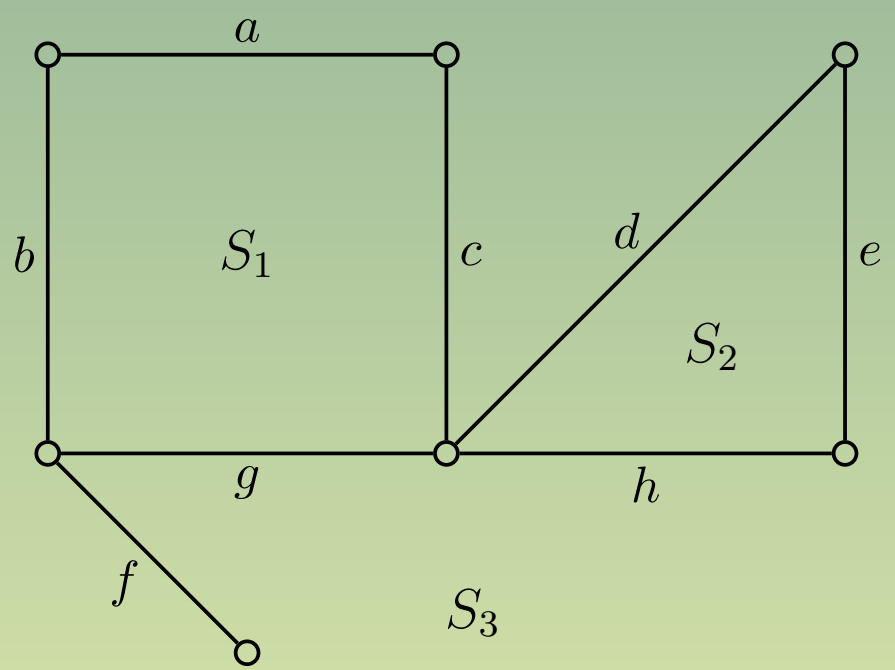
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Zadani planarni graf ima ukupno tri strane S_1, S_2 i S_3. Strana S_3 je vanjska strana. Strana S_1 je određena bridovima a, b, c, f, g. Strana S_2 je određena bridovima d, e, h. Strana S_3 je određena bridovima a, b, c, d, e, g, h. Dakle, u ovom slučaju brid f pripada rubu strane S_1. Nadalje, uočimo da vrijedi

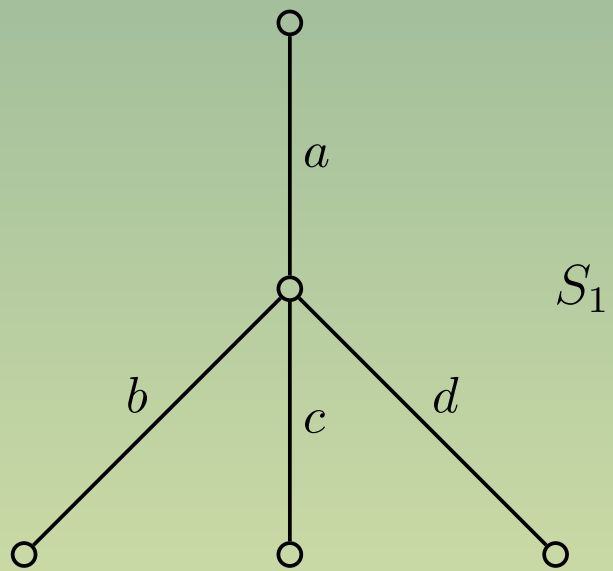
$$\nu = 7, \quad \varepsilon = 8, \quad \phi = 3, \qquad \nu - \varepsilon + \phi = 2.$$

Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Zadani planarni graf ima ukupno tri strane S_1, S_2 i S_3. Strana S_3 je vanjska strana. Strana S_1 je određena bridovima a, b, c, g. Strana S_2 je određena bridovima d, e, h. Strana S_3 je određena bridovima a, b, c, d, e, f, g, h. Dakle, u ovom slučaju brid f pripada rubu strane S_3. Nadalje, uočimo da vrijedi

$$\nu = 7, \quad \varepsilon = 8, \quad \phi = 3, \qquad \nu - \varepsilon + \phi = 2.$$



Zadani planarni graf ima samo jednu stranu S_1. Strana S_1 je ujedno i vanjska strana, a određena je bridovima a, b, c, d. Nadalje, uočimo da vrijedi

$$\nu = 5, \quad \varepsilon = 4, \quad \phi = 1, \qquad \nu - \varepsilon + \phi = 2.$$

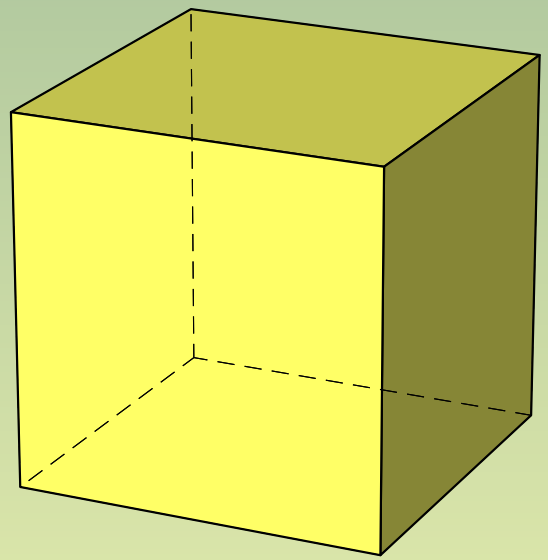
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

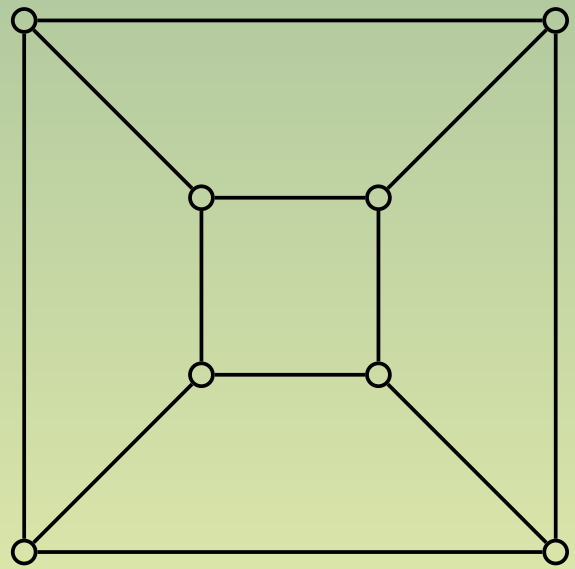
Platonova tijela

Svakom se konveksnom poliedru može pridružiti pripadni planarni graf. Vrhovi tog grafa odgovaraju vrhovima poliedra, bridovi tog grafa odgovaraju bridovima poliedra, a strane tog grafa odgovaraju stranama poliedra. Intuitivno možemo razmišljati na sljedeći način. Stranu poliedra na kojoj on leži rastežemo tako dugo dok svi vrhovi poliedra ne dođu u jednu ravninu. U tom trenutku dobivamo ravninski graf, a strana koju smo rastezali je "prešla" u vanjsku (neomeđenu) stranu dobivenog planarnog grafa, dok su se preostale strane poliedra smjestile unutar rastegnute baze poliedra. Radi ilustracije, na sljedećim slajdovima ćemo pogledati pripadne ravninske grafove pravilnih poliedara, tzv. Platonovih tijela. Znamo da postoji ukupno pet pravilnih poliedara: kocka, tetraedar, oktaedar, dodekaedar i ikozaedar.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Kocka

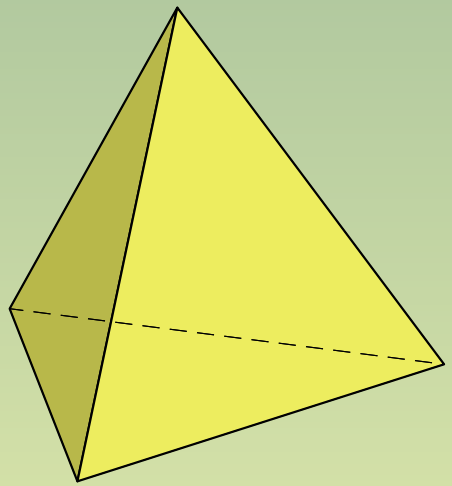


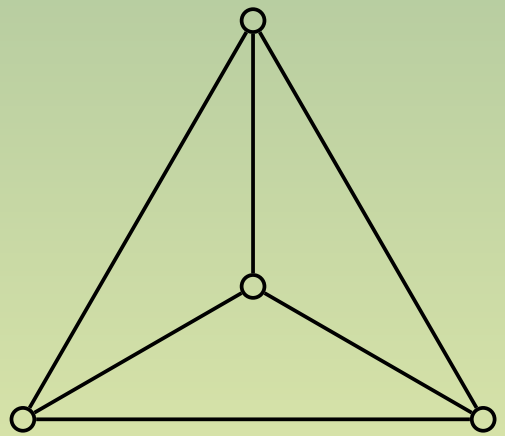


$$\nu = 8, \quad \varepsilon = 12, \quad \phi = 6, \qquad \nu - \varepsilon + \phi = 2.$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Tetraedar

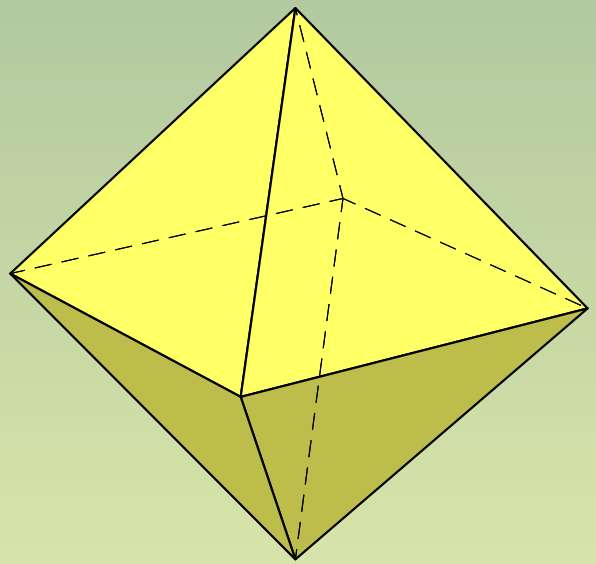


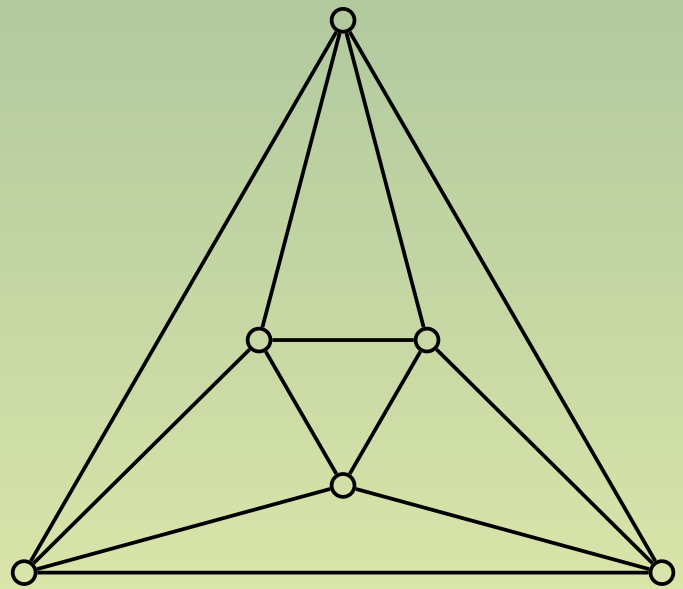


$$\nu = 4, \quad \varepsilon = 6, \quad \phi = 4, \qquad \nu - \varepsilon + \phi = 2.$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Oktaedar

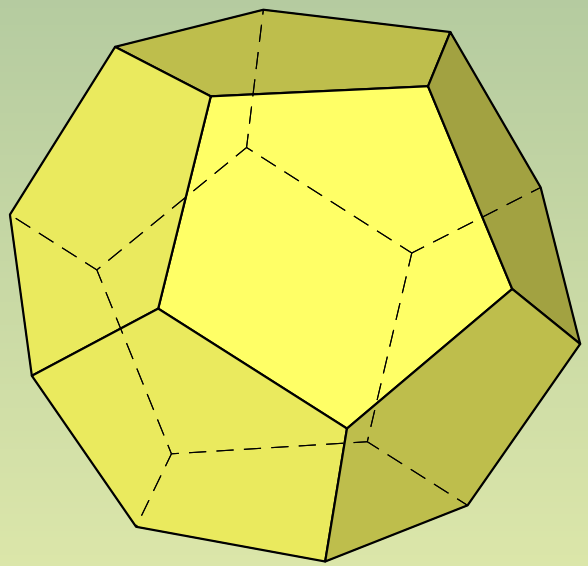


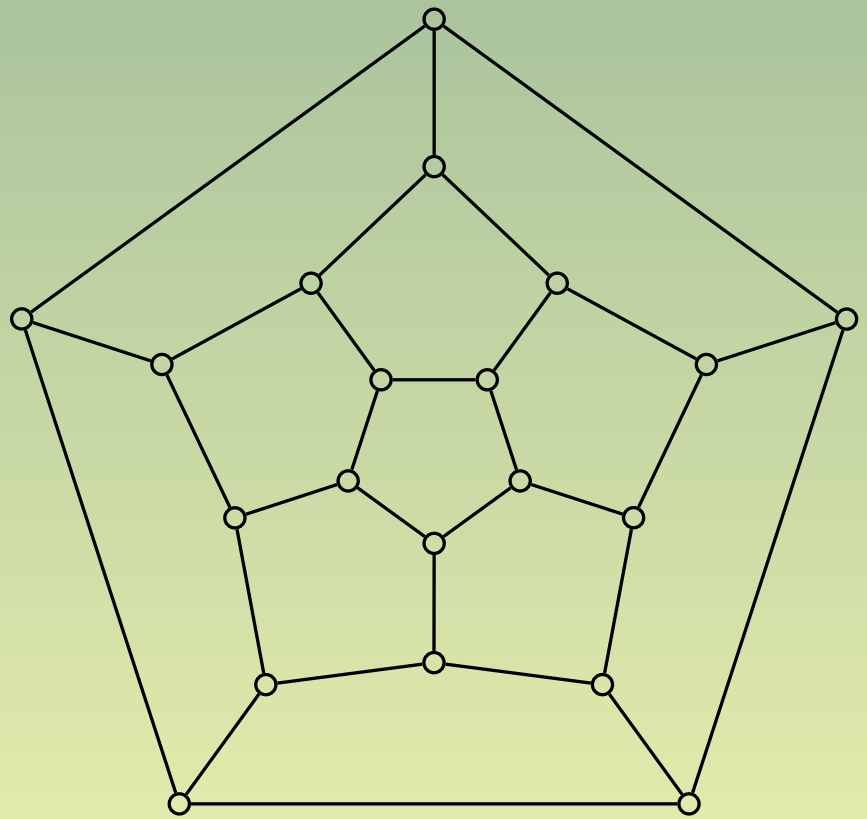


$$\nu = 6, \quad \varepsilon = 12, \quad \phi = 8, \qquad \nu - \varepsilon + \phi = 2.$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Dodekaedar

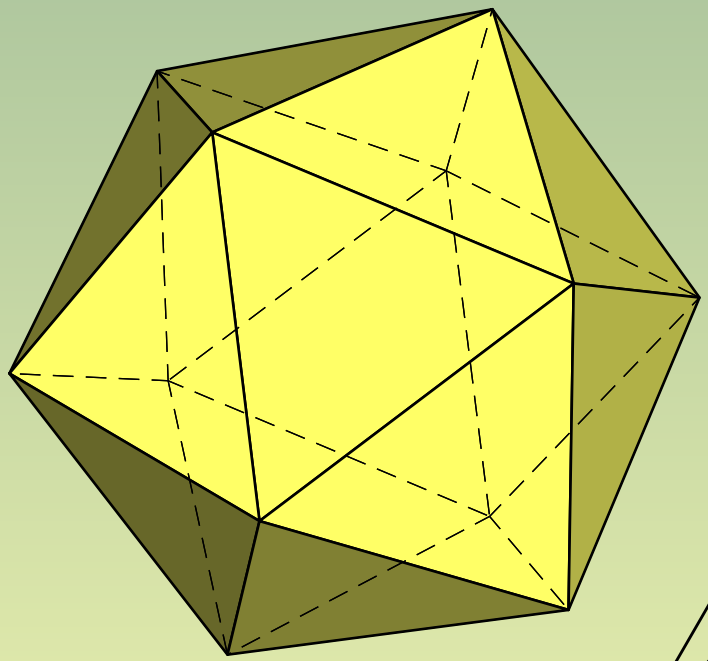


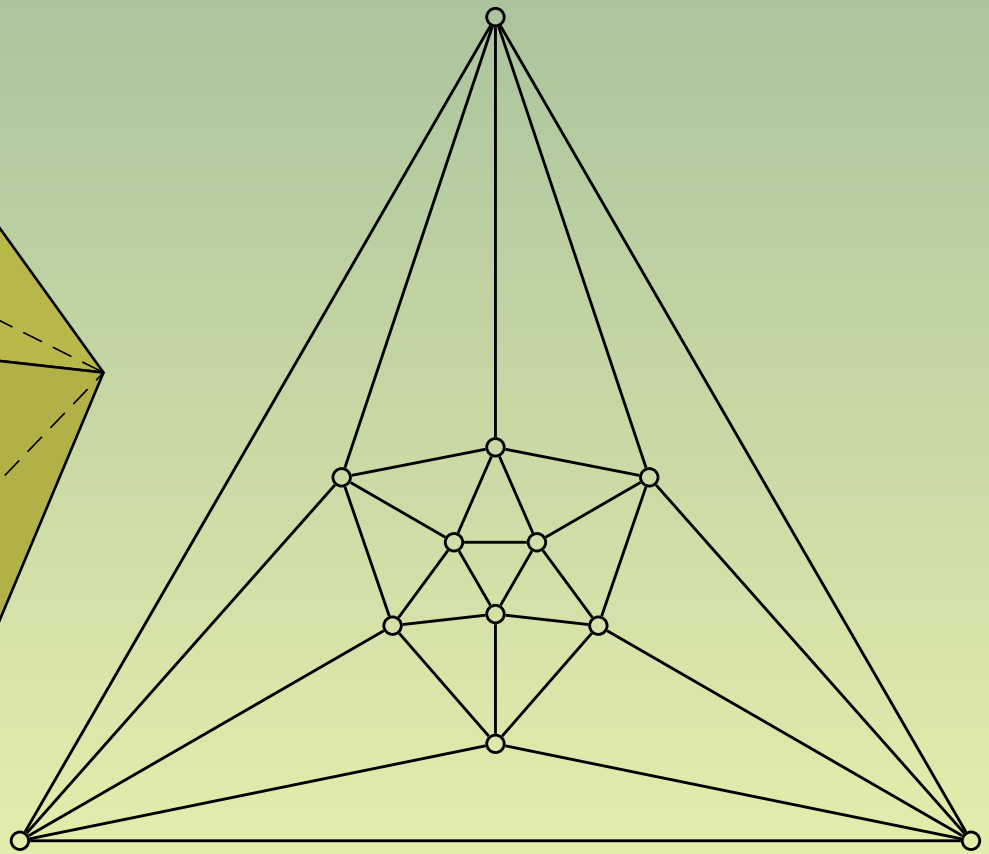


$$\nu = 20, \quad \varepsilon = 30, \quad \phi = 12, \qquad \nu - \varepsilon + \phi = 2.$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Ikozaedar





$$\nu = 12, \quad \varepsilon = 30, \quad \phi = 20, \qquad \nu - \varepsilon + \phi = 2.$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Teorem 10.1.

Neka je G povezani planarni graf. Tada je $\nu - \varepsilon + \phi = 2$.

Dokaz.

Dokaz provodimo indukcijom po broju bridova grafa. Ako je $\varepsilon = 0$, tada je $\nu = \phi = 1$ jer je G povezani graf pa je navedena formula istinita u ovom slučaju. Pretpostavimo da formula vrijedi za sve povezane planarne grafove s $\varepsilon - 1$ bridova, pri čemu je $\varepsilon \geqslant 1$. Neka je G povezani planarni graf s ν vrhova, ε bridova i ϕ strana. Ako je G stablo, tada znamo da je $\varepsilon = \nu - 1$ i $\phi = 1$ pa je $\nu - \varepsilon + \phi = 2$. Ako G nije stablo, tada sadrži barem jedan ciklus $\mathcal{C}$. Neka je e neki brid iz ciklusa $\mathcal{C}$. Tada je graf $G - e$ povezan (e nije rezni brid jer je dio ciklusa $\mathcal{C}$) i ima ν vrhova, $\varepsilon - 1$ bridova i $\phi - 1$ strana. Po pretpostavci indukcije za njega vrijedi $\nu - (\varepsilon - 1) + (\phi - 1) = 2$ iz čega slijedi $\nu - \varepsilon + \phi = 2$. ♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.1.

Pokažite protuprimjerom da za nepovezani planarni graf ne mora vrijediti jednakost $\nu - \varepsilon + \phi = 2$.

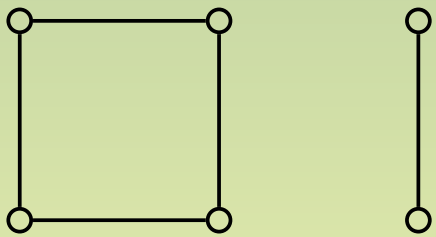
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.1.

Pokažite protuprimjerom da za nepovezani planarni graf ne mora vrijediti jednakost $\nu - \varepsilon + \phi = 2$.

Rješenje.

Na primjer, za nepovezani planarni graf



navedena jednakost ne vrijedi jer je $\nu = 6$, $\varepsilon = 5$, $\phi = 2$ iz čega slijedi da je $\nu - \varepsilon + \phi = 3$. Pitamo se, da li možda ipak za neki nepovezani planarni graf vrijedi jednakost $\nu - \varepsilon + \phi = 2$?
Odgovor je ne, a o tome preciznije govori sljedeći teorem.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Teorem 10.2.

Neka je G planarni graf s ω komponenata povezanosti. Tada je $\nu - \varepsilon + \phi = 1 + \omega$.

Dokaz.

Neka su $G_1, G_2, \ldots, G_\omega$ komponente povezanosti planarnog grafa G. Neka je $\nu_i = \nu(G_i)$, $\varepsilon_i = \varepsilon(G_i)$ i $\phi_i = \phi(G_i)$ za $i = 1, 2, \ldots, \omega$. Svaka komponenta povezanosti G_i je povezani planarni graf pa prema prethodnom teoremu vrijedi

$$\nu_i - \varepsilon_i + \phi_i = 2, \quad i = 1, 2, \ldots, \omega.$$

Zbrajanjem svih jednakosti dobivamo

$$\sum_{i=1}^{\omega} \nu_i - \sum_{i=1}^{\omega} \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{\omega} \phi_i = 2\omega. \qquad (\spadesuit)$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Jasno je da vrijedi $\sum_{i=1}^{\omega} \nu_i = \nu$, $\sum_{i=1}^{\omega} \varepsilon_i = \varepsilon$. Nadalje,

$$\sum_{i=1}^{\omega} \phi_i = \phi + (\omega - 1)$$

jer je vanjska strana planarnog grafa G zapravo ujedno i vanjska strana svake komponente povezanosti. Uvrstimo li dobivene relacije u (♠), dobivamo

$$\nu - \varepsilon + \phi + (\omega - 1) = 2\omega,$$

odnosno

$$\nu - \varepsilon + \phi = 1 + \omega.$$

♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Korolar 10.1.

Sva ravninska smještenja bilo kojeg planarnog grafa imaju isti broj strana.

Dokaz.

Neka su G_1 i G_2 ravninska smještenja planarnog grafa G. Prema ◂ teoremu 10.2. vrijedi

$$\nu_1 - \varepsilon_1 + \phi_1 = 1 + \omega_1$$
$$\nu_2 - \varepsilon_2 + \phi_2 = 1 + \omega_2$$

Međutim, G_1 i G_2 su izomorfni grafovi jer ravninsko smještenje čuva unutrašnju strukturu grafa. Kako izomorfni grafovi imaju jednaki broj vrhova, bridova i komponenata povezanosti, slijedi da je $\nu_1 = \nu_2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ i $\omega_1 = \omega_2$. Tada iz gornjih jednakosti dobivamo

$$\phi_1 = 1 + \omega_1 - \nu_1 + \varepsilon_1 = 1 + \omega_2 - \nu_2 + \varepsilon_2 = \phi_2. \qquad \heartsuit$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Korolar 10.2.

$K_{3,3}$ nije planarni graf.

Dokaz.

Pretpostavimo da je $K_{3,3}$ planarni graf. Kako je on povezan, tada za njega vrijedi $\nu - \varepsilon + \phi = 2$. Znamo da je $\nu = 6$ i $\varepsilon = 9$ pa mora biti $\phi = 5$. Pobrojimo sada za svaku stranu broj bridova koji ju omeđuje i sumirajmo sve te brojeve. Neka je dobivena suma jednaka N. Kako je $K_{3,3}$ bipartitni graf, on ne sadrži cikluse neparnih duljina pa slijedi da svaka strana od $K_{3,3}$ sadrži barem 4 brida. Stoga mora biti $N \geqslant 4\phi = 20$. S druge strane, kod broja N je svaki brid brojan najviše dvaput pa je $N \leqslant 2\varepsilon = 18$. Sada smo dobili da je $N \geqslant 20$ i $N \leqslant 18$, što je nemoguće. Dakle, $K_{3,3}$ nije planarni graf. ♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Teorem 10.3.

Neka je G jednostavni planarni graf s barem tri vrha. Tada je $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$.

Dokaz.

Dokažimo najprije tvrdnju u slučaju da je G povezani graf. Ako je $\nu = 3$, tada je $\varepsilon \leqslant 3$ jer je G po pretpostavci jednostavni graf pa u ovom slučaju tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo stoga da je $\nu > 3$. Prebrojimo sada za svaku stranu od G bridove koji ju omeđuju i sumirajmo sve te brojeve. Neka je dobivena suma jednaka N. Kako je u tom brojanju svaki brid brojan najviše dvaput, slijedi da je $N \leqslant 2\varepsilon$. Kako je G jednostavni i povezani graf, svaka strana je omeđena s barem tri brida pa je $N \geqslant 3\phi$. Slijedi da je $3\phi \leqslant 2\varepsilon$. Kako je G povezani planarni graf, tada je $\nu - \varepsilon + \phi = 2$ iz čega zbog $3\phi \leqslant 2\varepsilon$ dobivamo

$$6 = 3\nu - 3\varepsilon + 3\phi \leqslant 3\nu - 3\varepsilon + 2\varepsilon = 3\nu - \varepsilon,$$

odnosno $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$.

Preostaje nam da tvrdnju još dokažemo u slučaju da je graf G nepovezan. Jasno je da se svaki nepovezani jednostavni graf s ν vrhova može dodavanjem bridova nadopuniti do nekog jednostavnog povezanog grafa s ν vrhova. Stoga, ako je G nepovezani jednostavni planarni graf s barem tri vrha, tada ga možemo dodavanjem bridova nadopuniti do povezanog jednostavnog planarnog grafa G'. Tada je $\varepsilon < \varepsilon'$ i $\nu' = \nu$. Prema već dokazanom vrijedi $\varepsilon' \leqslant 3\nu' - 6$ pa dobivamo

$$\varepsilon < \varepsilon' \leqslant 3\nu' - 6 = 3\nu - 6,$$

iz čega slijedi da je $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$. ♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Korolar 10.3.

K_5 nije planarni graf.

Dokaz.

Kod grafa K_5 je $\nu = 5$ i $\varepsilon = \binom{5}{2} = 10$. Međutim, za njega ne vrijedi relacija $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$ pa prema kontrapoziciji prethodnog teorema K_5 nije planarni graf. ♡

Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Korolar 10.4.

Ako je G jednostavni planarni graf, tada je $\delta(G) \leqslant 5$.

Dokaz.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $d(v) \geqslant 6$ za svaki $v \in V(G)$.

Prema ◂ propoziciji 6.1. znamo da vrijedi

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2\varepsilon$$

iz čega slijedi da je tada $2\varepsilon \geqslant 6\nu$, odnosno

$$\varepsilon \geqslant 3\nu > 3\nu - 6,$$

što je kontradikcija s ◂ teoremom 10.3.. ♡

Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.2.

Dokažite da svaki jednostavni planarni graf s barem dva vrha ima barem dva vrha stupnja $\leqslant 5$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.2.

Dokažite da svaki jednostavni planarni graf s barem dva vrha ima barem dva vrha stupnja $\leqslant 5$.

Rješenje.

Jasno je da tvrdnja vrijedi ako je $\nu = 2$. Pretpostavimo stoga da je $\nu \geqslant 3$ i da postoji samo jedan vrh stupnja najviše 5. Tada je

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) \geqslant 6(\nu - 1) = 6\nu - 6. \qquad (\clubsuit)$$

S druge strane je zbog ◂ teorema 10.3.

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2\varepsilon \leqslant 2(3\nu - 6). \qquad (\spadesuit)$$

Iz $(\clubsuit)$ i $(\spadesuit)$ dobivamo da mora biti $\varepsilon \geqslant 3\nu - 3$ i $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$, što je nemoguće. Dakle, moraju postojati barem dva vrha stupnja najviše 5 u jednostavnom planarnom grafu s barem dva vrha.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.3.

Dokažite da svaki jednostavni planarni graf s barem tri vrha ima barem tri vrha stupnja $\leqslant 5$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.3.

Dokažite da svaki jednostavni planarni graf s barem tri vrha ima barem tri vrha stupnja $\leqslant 5$.

Rješenje.

Razlikujemo dva slučaja u ovisnosti o broju komponenata povezanosti grafa G.

- 1. slučaj: $\omega(G) \geqslant 3$

Svaka komponenta povezanosti jednostavnog planarnog grafa je također jednostavni planarni graf pa prema ◂ korolaru 10.4. svaka od tih komponenata ima barem jedan vrh stupnja najviše 5 pa promatrani graf G ima barem tri vrha stupnja najviše 5.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

- 2. slučaj: $\omega(G) \leqslant 2$

Pretpostavimo suprotno, tj. da graf G ima samo dva vrha v_1 i v_2 stupnja najviše 5. Tada svaki od preostalih $\nu - 2$ vrhova ima stupanj barem 6. S druge strane, kako je $\omega(G) \leqslant 2$ i $\nu(G) \geqslant 3$, ne mogu oba vrha v_1 i v_2 biti stupnja 0 pa je $d(v_1) + d(v_2) \geqslant 1$. Stoga dobivamo da je

$$2\varepsilon = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geqslant 6(\nu - 2) + 1,$$

odnosno $\varepsilon \geqslant 3\nu - 6 + \frac{1}{2}$. Kako je broj bridova prirodan broj ili 0, slijedi da mora biti $\varepsilon \geqslant 3\nu - 5$. Zbog ◂ teorema 10.3. slijedi da mora biti $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$. Sada smo dobili da je $\varepsilon \geqslant 3\nu - 5$ i $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$, što je nemoguće.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.4.

a. *Navedite primjer jednostavnog povezanog planarnog grafa za koji vrijedi* $\varepsilon = 3\nu - 6$.

b. *Neka je* G *jednostavni povezani planarni graf za koji vrijedi* $\varepsilon = 3\nu - 6$. *Dokažite da je svaka strana od* G *omeđena s tri brida.*

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

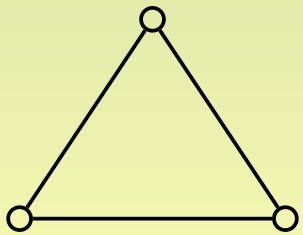
Primjer 10.4.

a) *Navedite primjer jednostavnog povezanog planarnog grafa za koji vrijedi* $\varepsilon = 3\nu - 6$.

b) *Neka je* G *jednostavni povezani planarni graf za koji vrijedi* $\varepsilon = 3\nu - 6$. *Dokažite da je svaka strana od* G *omeđena s tri brida.*

Rješenje.

a) Jedan primjer takvog grafa je potpuni graf s tri vrha, tj. graf K_3.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

- Neka je G jednostavni povezani planarni graf za koji vrijedi $\varepsilon = 3\nu - 6$. Ako je $\nu = 3$, tada je $G = K_3$ i tvrdnja slijedi. Pretpostavimo da je $\nu > 3$. Iz ◂ teorema 10.1. tada dobivamo

$$\nu - \varepsilon + \phi = 2$$
$$\nu - (3\nu - 6) + \phi = 2$$
$$\phi = 2\nu - 4$$

Prebrojimo sada za svaku stranu od G bridove koji ju omeđuju i sumirajmo sve te brojeve. Neka je dobivena suma jednaka N. Kako je G jednostavni i povezani graf s barem 4 vrha, svaka strana je omeđena s barem tri brida. Pretpostavimo da je barem jedna strana omeđena s više od tri brida, tj. s barem četiri brida. Tada je

$$N \geqslant 3(\phi - 1) + 4$$
$$N \geqslant 3\big((2\nu - 4) - 1\big) + 4$$
$$N \geqslant 6\nu - 11$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

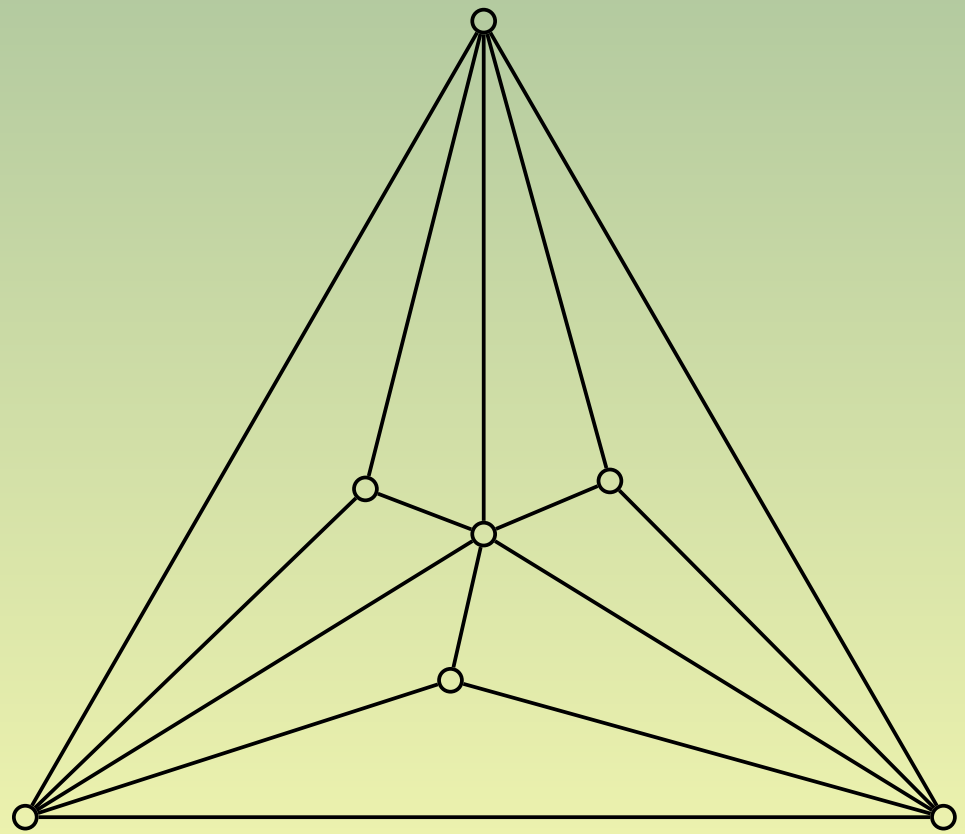
Nadalje, iz definicije broja N slijedi da je svaki brid brojan najviše dvaput pa je $N \leqslant 2\varepsilon$. Uzmemo li u obzir da je $\varepsilon = 3\nu - 6$, dobivamo

$$N \leqslant 2\varepsilon$$
$$N \leqslant 2(3\nu - 6)$$
$$N \leqslant 6\nu - 12$$

Sada imamo da mora vrijediti $N \geqslant 6\nu - 11$ i $N \leqslant 6\nu - 12$, što je kontradikcija. Dakle, u svakom jednostavnom povezanom planarnom grafu za kojeg vrijedi $\varepsilon = 3\nu - 6$, svaka je strana omeđena s točno tri brida. Nadalje, uočite da u takvom grafu svaki vrh ima stupanj barem 3 ukoliko graf ima barem 4 vrha. Pogledajte grafove ◂ tetraedra, ◂ oktaedra i ◂ ikozaedra i uočite da su to jednostavni povezani planarni grafovi za koje vrijedi $\varepsilon = 3\nu - 6$, svaka strana im je omeđena s 3 brida i stupanj svakog vrha je barem 3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Na donjoj slici je primjer jednostavnog povezanog planarnog grafa sa 7 vrhova za kojeg vrijedi $\varepsilon = 3\nu - 6$ i uočite da je $\delta = 3$.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Zadatak 10.1.

Navedite primjer jednostavnog povezanog planarnog grafa sa 6 vrhova za kojeg vrijedi $\varepsilon = 3\nu - 6$ *i* $\delta = 4$.

Zadatak 10.2.

Navedite primjer jednostavnog povezanog planarnog grafa sa 6 vrhova za kojeg vrijedi $\varepsilon = 3\nu - 6$ *i* $\delta = 3$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.5.

a. *Navedite dva primjera jednostavnih povezanih planarnih grafova za koje vrijedi* $\varepsilon = 3\nu - 7$.

b. *Neka je* G *jednostavni povezani planarni graf za koji vrijedi* $\varepsilon = 3\nu - 7$. *Dokažite da je jedna strana od* G *omeđena s četiri brida, a sve ostale strane su omeđene s tri brida.*

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

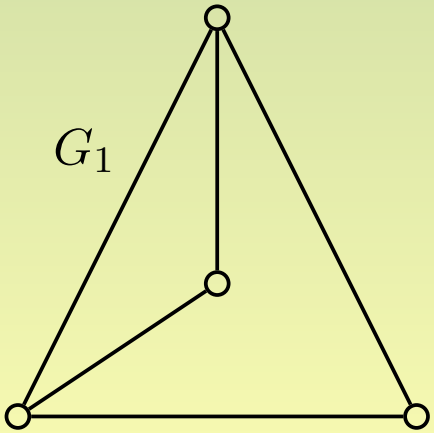
Primjer 10.5.

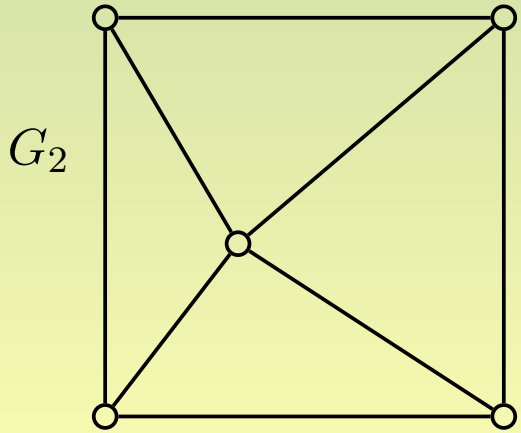
a) *Navedite dva primjera jednostavnih povezanih planarnih grafova za koje vrijedi* $\varepsilon = 3\nu - 7$.

b) *Neka je* G *jednostavni povezani planarni graf za koji vrijedi* $\varepsilon = 3\nu - 7$. *Dokažite da je jedna strana od* G *omeđena s četiri brida, a sve ostale strane su omeđene s tri brida.*

Rješenje.

a) Na primjer, G_1 i G_2 su dva primjera traženih grafova.





Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

- Neka je G jednostavni povezani planarni graf za koji vrijedi $\varepsilon = 3\nu - 7$. Očito je $\nu > 3$. Iz ◂ teorema 10.1. tada dobivamo

$$\nu - \varepsilon + \phi = 2$$
$$\nu - (3\nu - 7) + \phi = 2$$
$$\phi = 2\nu - 5$$

Prebrojimo sada za svaku stranu od G bridove koji ju omeđuju i sumirajmo sve te brojeve. Neka je dobivena suma jednaka N. Kako je G jednostavni i povezani graf s barem 4 vrha, svaka strana je omeđena s barem tri brida. Pretpostavimo da su barem dvije strane omeđene s više od tri brida, tj. s barem četiri brida. Tada je

$$N \geqslant 3(\phi - 2) + 4 + 4$$
$$N \geqslant 3\big((2\nu - 5) - 2\big) + 8$$
$$N \geqslant 6\nu - 13$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Nadalje, iz definicije broja N slijedi da je svaki brid brojan najviše dvaput pa je $N \leqslant 2\varepsilon$. Uzmemo li u obzir da je $\varepsilon = 3\nu - 7$, dobivamo

$$N \leqslant 2\varepsilon$$
$$N \leqslant 2(3\nu - 7)$$
$$N \leqslant 6\nu - 14$$

Sada imamo da mora vrijediti $N \geqslant 6\nu - 13$ i $N \leqslant 6\nu - 14$, što je kontradikcija. Dakle, najviše je jedna strana omeđena s više od tri brida. Neka je ta strana omeđena s k bridova. Želimo pokazati da mora biti $k = 4$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Kako je jedna strana omeđena s k bridova, a sve ostale strane su omeđene s 3 brida, dobivamo

$$N = k + 3(\phi - 1)$$
$$N = 3\phi + k - 3$$
$$N = 3(2\nu - 5) + k - 3$$
$$N = 6\nu + k - 18$$

S druge strane, zbog $N \leqslant 2\varepsilon$ dobivamo da je $N \leqslant 6\nu - 14$ pa mora biti

$$6\nu + k - 18 \leqslant 6\nu - 14$$

iz čega slijedi da je $k \leqslant 4$. Kako se radi o jednostavnom planarnom grafu, svaka strana je omeđena s barem 3 brida. Stoga mora biti $k = 3$ ili $k = 4$. Kada bi bilo $k = 3$, tada bi bilo $N = 3\phi$ pa bi svaka strana bila omeđena s tri brida. U tom slučaju ne bi bilo reznih bridova pa bi vrijedilo $N = 2\varepsilon$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Iz toga bi dalje slijedilo

$$3\phi = 2\varepsilon$$
$$3(2\nu - 5) = 2(3\nu - 7)$$
$$6\nu - 15 = 6\nu - 14$$
$$15 = 14$$

što je kontradikcija. Stoga mora biti $k = 4$. Dakle, u svakom jednostavnom povezanom planarnom grafu u kojemu vrijedi $\varepsilon = 3\nu - 7$ jedna njegova strana je omeđena s 4 brida, a sve ostale strane su omeđene s 3 brida.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Zadatak 10.3.

Navedite primjer jednostavnog povezanog planarnog grafa u kojemu nije svaka strana omeđena s barem tri brida. Koliko ima takvih međusobno neizomorfnih grafova?

Zadatak 10.4.

Navedite primjer jednostavnog nepovezanog planarnog grafa u kojemu nije svaka strana omeđena s barem tri brida. Koliko ima takvih međusobno neizomorfnih grafova? Opišite općenito strukturu takvih grafova.

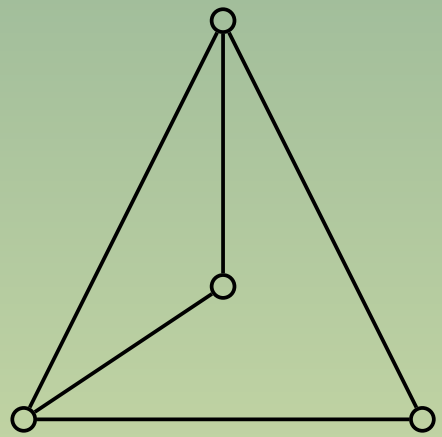
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Napomena.

Neka je G jednostavni povezani planarni graf s ν vrhova u kojemu je $\varepsilon = 3\nu - 7$. Tada iz dosadašnjih razmatranja znamo da on ima jednu stranu S koja je omeđena s 4 brida, a sve ostale strane su omeđene s 3 brida. Ako grafu G dodamo još jedan brid koji povezuje neka dva nesusjedna vrha na strani S, dobit ćemo jednostavni povezani planarni graf G_1 s ν vrhova i $\varepsilon_1 = 3\nu - 6$ bridova u kojemu je svaka strana omeđena s tri brida. Znamo da u grafu G_1 svaki vrh ima stupanj barem 3, što povlači da u grafu G mogu biti najviše dva vrha stupnja 2, a ostali vrhovi moraju imati stupanj barem 3.

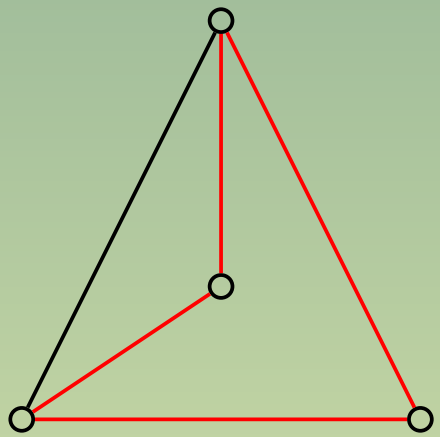
Obrnuto, ako povezanom planarnom grafu s ν vrhova u kojemu je $\varepsilon = 3\nu - 6$ izbrišemo jedan (bilo koji) brid, dobit ćemo jednostavni povezani planarni graf s ν vrhova u kojemu je $\varepsilon = 3\nu - 7$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



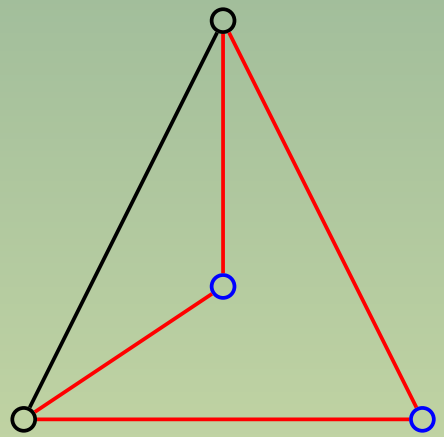
Zadan je jednostavni povezani planarni graf s 4 vrha u kojemu vrijedi $\varepsilon = 3\nu - 7$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



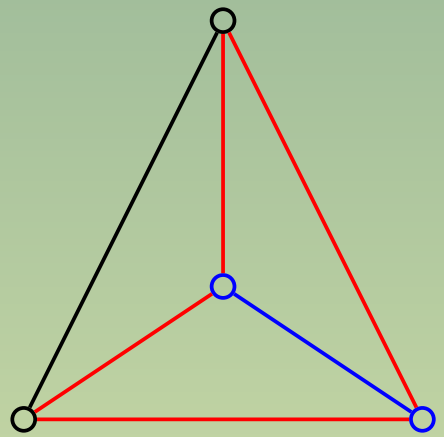
Zadan je jednostavni povezani planarni graf s 4 vrha u kojemu vrijedi $\varepsilon = 3\nu - 7$. Uočavamo da on ima jednu stranu omeđenu s 4 brida (crveni bridovi), a ostale strane su omeđene s 3 brida.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



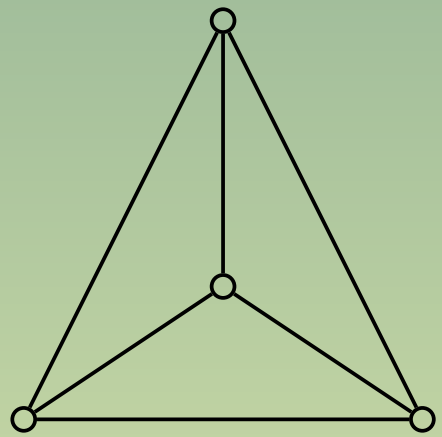
Zadan je jednostavni povezani planarni graf s 4 vrha u kojemu vrijedi $\varepsilon = 3\nu - 7$. Uočavamo da on ima jednu stranu omeđenu s 4 brida (crveni bridovi), a ostale strane su omeđene s 3 brida. Nadalje, na toj strani postoje točno dva nesusjedna vrha (plavi vrhovi) i oba su stupnja dva u ovom slučaju.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



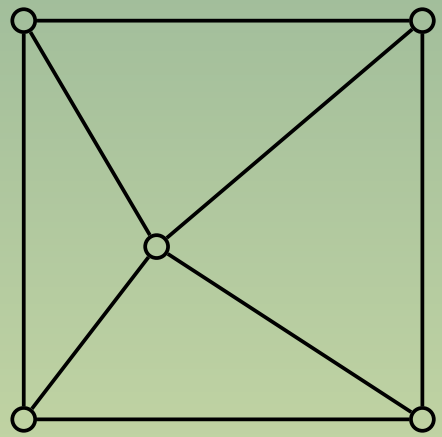
Zadan je jednostavni povezani planarni graf s 4 vrha u kojemu vrijedi $\varepsilon = 3\nu - 7$. Uočavamo da on ima jednu stranu omeđenu s 4 brida (crveni bridovi), a ostale strane su omeđene s 3 brida. Nadalje, na toj strani postoje točno dva nesusjedna vrha (plavi vrhovi) i oba su stupnja dva u ovom slučaju. Spojimo li ta dva vrha bridom

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



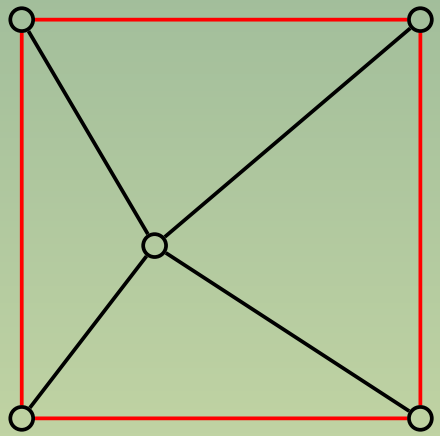
Zadan je jednostavni povezani planarni graf s 4 vrha u kojemu vrijedi $\varepsilon = 3\nu - 7$. Uočavamo da on ima jednu stranu omeđenu s 4 brida (crveni bridovi), a ostale strane su omeđene s 3 brida. Nadalje, na toj strani postoje točno dva nesusjedna vrha (plavi vrhovi) i oba su stupnja dva u ovom slučaju. Spojimo li ta dva vrha bridom, dobivamo jednostavni povezani planarni graf s 4 vrha u kojemu vrijedi $\varepsilon = 3\nu - 6$ i sve strane su omeđene s tri brida.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



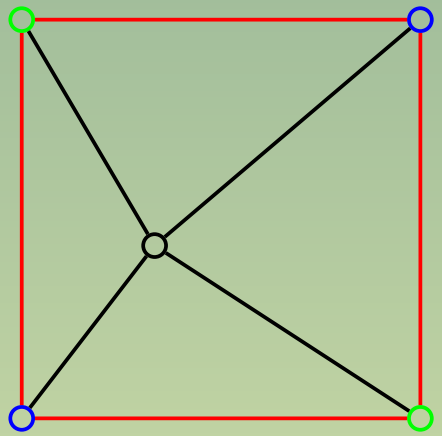
Zadan je jednostavni povezani planarni graf s 5 vrhova u kojemu vrijedi $\varepsilon = 3\nu - 7$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



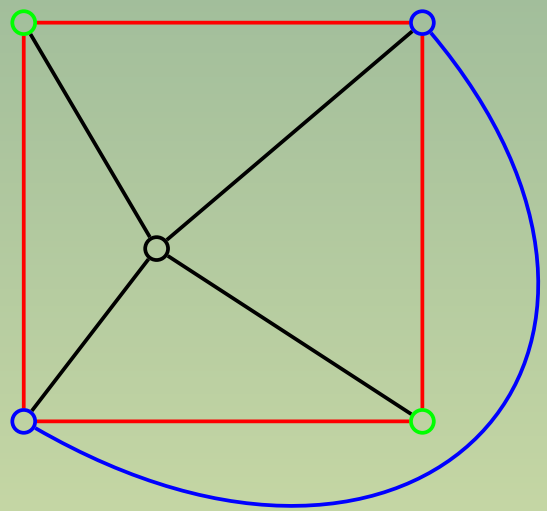
Zadan je jednostavni povezani planarni graf s 5 vrhova u kojemu vrijedi $\varepsilon = 3\nu - 7$. Uočavamo da on ima jednu stranu omeđenu s 4 brida (crveni bridovi koji omeđu vanjsku stranu), a ostale strane su omeđene s 3 brida.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



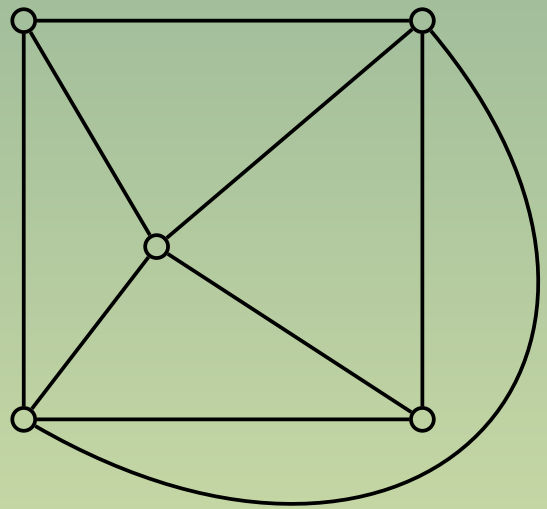
Zadan je jednostavni povezani planarni graf s 5 vrhova u kojemu vrijedi $\varepsilon = 3\nu - 7$. Uočavamo da on ima jednu stranu omeđenu s 4 brida (crveni bridovi koji omeđu vanjsku stranu), a ostale strane su omeđene s 3 brida. Nadalje, na toj strani postoje dva para nesusjednih vrhova (plavi par i zeleni par) i svaki vrh u grafu je barem stupnja 3 (nema vrhova stupnja 2).

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Zadan je jednostavni povezani planarni graf s 5 vrhova u kojemu vrijedi $\varepsilon = 3\nu - 7$. Uočavamo da on ima jednu stranu omeđenu s 4 brida (crveni bridovi koji omeđu vanjsku stranu), a ostale strane su omeđene s 3 brida. Nadalje, na toj strani postoje dva para nesusjednih vrhova (plavi par i zeleni par) i svaki vrh u grafu je barem stupnja 3 (nema vrhova stupnja 2). Odaberemo, npr. plavi par nesusjednih vrhova i spojimo li ih bridom

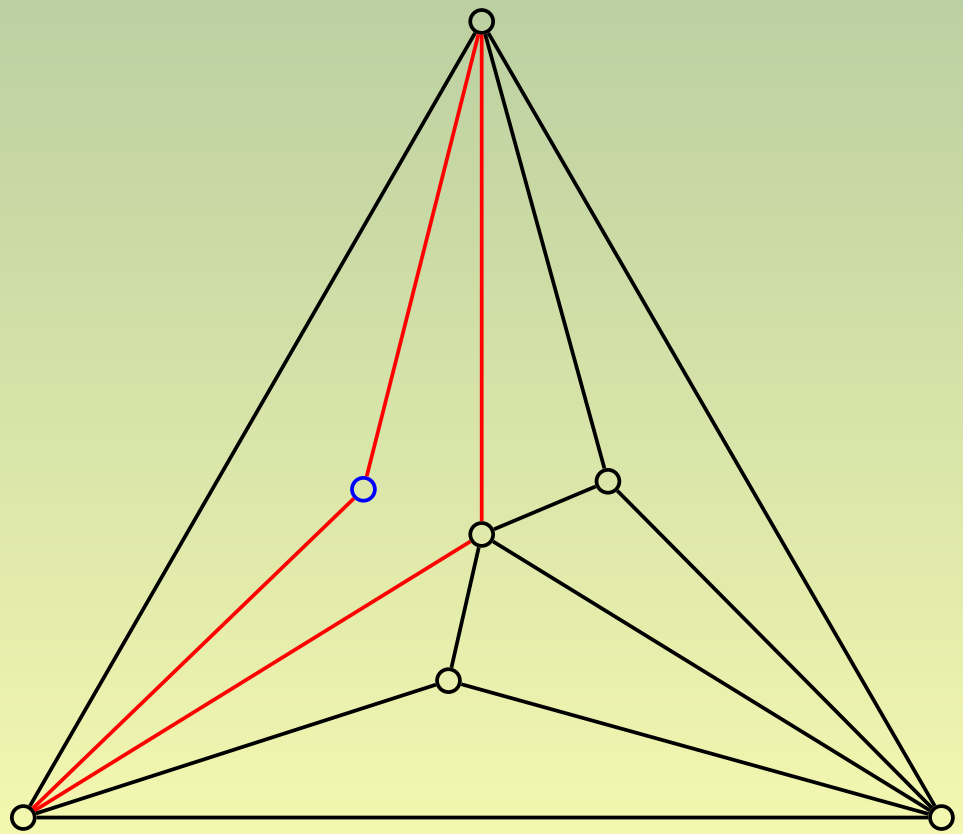
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Zadan je jednostavni povezani planarni graf s 5 vrhova u kojemu vrijedi $\varepsilon = 3\nu - 7$. Uočavamo da on ima jednu stranu omeđenu s 4 brida (crveni bridovi koji omeđu vanjsku stranu), a ostale strane su omeđene s 3 brida. Nadalje, na toj strani postoje dva para nesusjednih vrhova (plavi par i zeleni par) i svaki vrh u grafu je barem stupnja 3 (nema vrhova stupnja 2). Odaberemo, npr. plavi par nesusjednih vrhova i spojimo li ih bridom, dobivamo jednostavni povezani planarni graf s 5 vrhova u kojemu vrijedi $\varepsilon = 3\nu - 6$ i sve strane su omeđene s tri brida.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Na donjoj slici je primjer jednostavnog povezanog planarnog grafa sa 7 vrhova za kojeg vrijedi $\varepsilon = 3\nu - 7$. Crvenom bojom je označena strana omeđena s 4 brida. Uočite da postoji samo jedan vrh stupnja 2 koji je označen plavom bojom.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.6.

Dokažite da svaki jednostavni planarni graf s barem četiri vrha ima barem četiri vrha stupnja $\leqslant 5$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.6.

Dokažite da svaki jednostavni planarni graf s barem četiri vrha ima barem četiri vrha stupnja $\leqslant 5$.

Rješenje.

Mogli bismo i ovdje provoditi dokaz tako da gledamo više slučajeva u ovisnosti o broju komponenata povezanosti grafa, slično kako smo to napravili u primjeru 10.3. Međutim, ovdje ćemo pokazati jedan drugi način razmišljanja kojeg smo mogli primijeniti i u primjeru 10.3, a koji se razlikuje jedino u početnom pristupu koji nam omogućuje da je tvrdnju dovoljno pokazati samo za povezane grafove.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Svaki jednostavni nepovezani graf možemo dobiti brisanjem određenog broja bridova iz nekog jednostavnog povezanog grafa s istim skupom vrhova. Drugim riječima, svaki jednostavni nepovezani graf je razapinjući podgraf nekog jednostavnog povezanog grafa. Stoga, ako tvrdnju dokažemo za povezane grafove, tada će ta tvrdnja vrijediti i za nepovezane grafove jer se brisanjem bridova ne povećavaju stupnjevi vrhova, nego se samo smanjuju.

Neka je G jednostavni povezani planarni graf s barem 4 vrha. Pretpostavimo da u grafu G postoje najviše tri vrha v_1, v_2 i v_3 stupnja $\leqslant 5$. Kako je G povezan graf, svaki od vrhova v_1, v_2 i v_3 je barem stupnja 1. Svaki od preostalih $\nu - 3$ vrhova je tada stupnja barem 6.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Stoga je

$$2\varepsilon = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geqslant 3 + 6(\nu - 3)$$

iz čega dobivamo $\varepsilon \geqslant 3\nu - \frac{15}{2}$. Kako je broj bridova prirodni broj ili nula, slijedi da mora biti $\varepsilon \geqslant 3\nu - 7$. Zbog ◂ teorema 10.3. mora biti $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$. Iz $\varepsilon \geqslant 3\nu - 7$ i $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$ zaključujemo da je $\varepsilon = 3\nu - 7$ ili $\varepsilon = 3\nu - 6$.

Ako bi bilo $\varepsilon = 3\nu - 6$, tada prema ◂ primjeru 10.4. znamo da je svaka strana grafa G omeđena s tri brida pa je stupanj svakog vrha barem 3. Stoga svaki od vrhova v_1, v_2 i v_3 ima stupanj barem 3 pa je

$$2\varepsilon = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geqslant 9 + 6(\nu - 3),$$

odnosno $\varepsilon \geqslant 3\nu - 4$, a to je kontradikcija s pretpostavkom da je $\varepsilon = 3\nu - 6$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Ako bi bilo $\varepsilon = 3\nu - 7$, tada prema primjeru 10.5. znamo da je jedna strana grafa G omeđena s četiri brida, a sve ostale strane s tri brida. U takvom grafu su najviše dva vrha stupnja 2, a svi ostali vrhovi imaju stupanj barem 3. Stoga je

$$d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) \geqslant 7$$

pa dobivamo

$$2\varepsilon = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geqslant 7 + 6(\nu - 3),$$

odnosno $\varepsilon \geqslant 3\nu - 5$, a to je kontradikcija s pretpostavkom da je $\varepsilon = 3\nu - 7$.

U svakom slučaju smo dobili kontradikciju pa je naša početna pretpostavka da u grafu G postoje najviše tri vrha stupnja $\leqslant 5$ bila pogrešna. Stoga u grafu G moraju postojati barem četiri vrha stupnja $\leqslant 5$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.7.

Neka je G povezani planarni graf u kojemu je svaka strana omeđena s barem pet bridova. Dokažite da je $3\varepsilon \leqslant 5\nu - 10$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.7.

Neka je G povezani planarni graf u kojemu je svaka strana omeđena s barem pet bridova. Dokažite da je $3\varepsilon \leqslant 5\nu - 10$.

Rješenje.

Pobrojimo za svaku stranu broj bridova koji ju omeđuju i sumirajmo sve te brojeve. Neka je dobivena suma jednaka N. Kako je u tom brojanju svaki brid brojan najviše dvaput, slijedi da je $N \leqslant 2\varepsilon$. Nadalje, kako je svaka strana po pretpostavci omeđena s barem 5 bridova, slijedi da je $N \geqslant 5\phi$. Zaključujemo da mora biti $5\phi \leqslant 2\varepsilon$. Množenjem relacije $\nu - \varepsilon + \phi = 2$ s brojem 5 i korištenjem nejednakosti $5\phi \leqslant 2\varepsilon$, dobivamo

$$5\varepsilon = 5\nu + 5\phi - 10 \leqslant 5\nu + 2\varepsilon - 10$$

iz čega slijedi $3\varepsilon \leqslant 5\nu - 10$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.8.

Neka je G jednostavni povezani planarni graf s barem tri vrha. Dokažite da je $\phi \leqslant 2\nu - 4$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.8.

Neka je G jednostavni povezani planarni graf s barem tri vrha. Dokažite da je $\phi \leqslant 2\nu - 4$.

Rješenje.

Kako je G povezani planarni graf, za njega vrijedi $\nu - \varepsilon + \phi = 2$ pa je $\phi = 2 - \nu + \varepsilon$. Iz ◂ teorema 10.3. znamo da vrijedi $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$ pa slijedi

$$\phi = 2 - \nu + \varepsilon \leqslant 2 - \nu + (3\nu - 6),$$

odnosno $\phi \leqslant 2\nu - 4$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.9.

Napišite obrat ◂ teorema 10.3. *i dokažite da taj obrat ne vrijedi.*

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.9.

Napišite obrat ◂ teorema 10.3. *i dokažite da taj obrat ne vrijedi.*

Rješenje.

Obrat teorema 10.3 glasi: Ako je G jednostavni graf s barem tri vrha za koji vrijedi $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$, tada je G planarni graf. Da bismo dokazali da ovaj obrat ne vrijedi, trebamo pronaći jednostavni neplanarni graf s barem tri vrha za koji vrijedi $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$. Primjer takvog grafa je $K_{3,3}$. Taj graf ima 6 vrhova, 9 bridova i za njega vrijedi relacija $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$, ali taj graf nije planarni prema ◂ korolaru 10.2..

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.10.

Neka je G jednostavni planarni graf s 20 vrhova. Dokažite da G ima najviše 54 brida.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.10.

Neka je G jednostavni planarni graf s 20 vrhova. Dokažite da G ima najviše 54 brida.

Rješenje.

Graf G zadovoljava pretpostavke ◂ teorema 10.3. pa mora biti $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$. Kako je u našem slučaju $\nu = 20$, slijedi

$$\varepsilon \leqslant 3 \cdot 20 - 6 = 54.$$

Dakle, graf G ima najviše 54 brida.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.11.

Neka je G jednostavni povezani planarni graf s 20 vrhova u kojemu je 7 vrhova stupnja 1. Dokažite da G ima najviše 40 bridova.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.11.

Neka je G jednostavni povezani planarni graf s 20 vrhova u kojemu je 7 vrhova stupnja 1. Dokažite da G ima najviše 40 bridova.

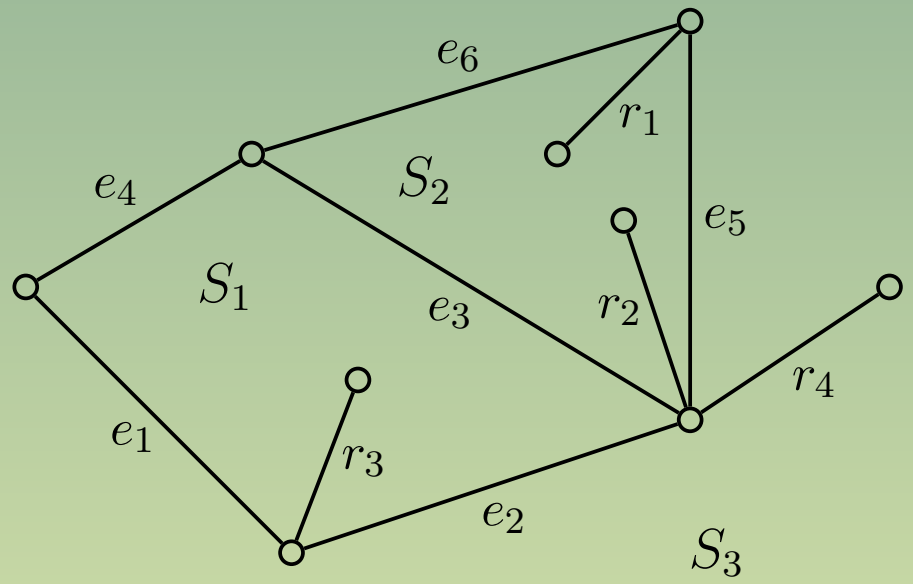
Rješenje.

Pobrojimo za svaku stranu broj bridova koji ju omeđuju i sumirajmo sve te brojeve. Neka je dobivena suma jednaka N. U tom brojanju je svaki brid brojan najviše dvaput. Preciznije, ukoliko brid nije rezni, tada je on zajednički brid točno dviju strana pa je brojan dvaput, a ukoliko se radi o reznom bridu, tada je on na rubu samo jedne strane pa je brojan jedanput. Kako u grafu postoji 7 vrhova stupnja 1, tada taj graf ima barem 7 reznih bridova. Stoga je $N \leqslant 2\varepsilon - 7$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

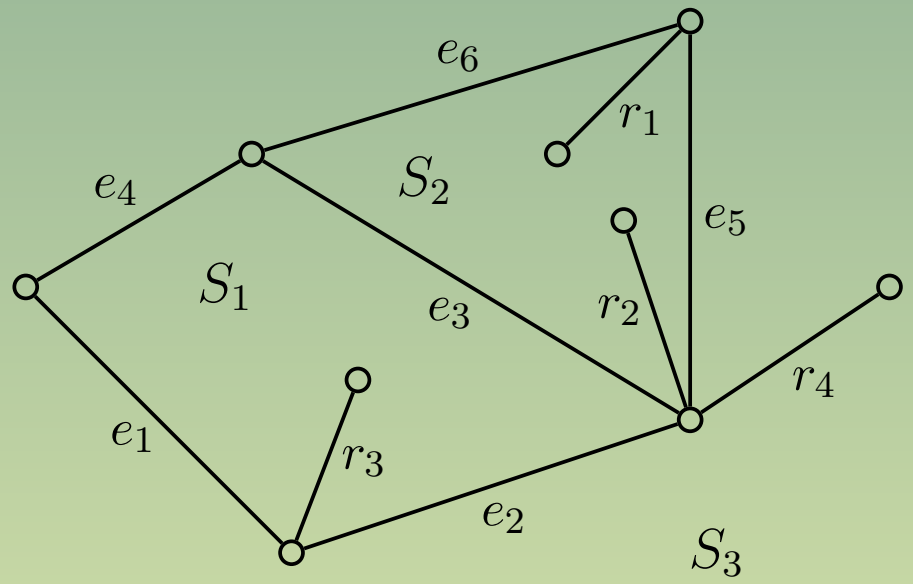
Kako je graf G povezan i jednostavni i ima više od tri vrha, svaka je strana omeđena s barem tri brida. Pritom, spomenutih 7 reznih bridova koji spajaju vrhove stupnja 1 ne utječu na određenost pojedine strane jer oni, ako i pripadaju rubu neke strane, zapravo se nalaze unutar te strane pa je i bez njih ta strana u potpunosti određena. Stoga iz definicije broja N slijedi da je $N \geqslant 3\phi + 7$. Pogledajmo na jednom konkretnom primjeru gornju raspravu tako da nam bude jasnije o čemu se zapravo radi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Rubu strane S_1 pripadaju bridovi e_1, e_2, e_3, e_4 i r_3. Međutim, strana S_1 je u potpunosti određena s bridovima e_1, e_2, e_3 i e_4, tj. omeđena je s barem tri brida pri čemu u ta tri brida nije uračunati rezni brid r_3 koji je susjedan s vrhom stupnja 1. Rezni brid r_3 po definiciji pripada rubu te strane jer želimo da svaki brid u grafu pripada rubu barem jedne strane, ali on intuitivno ne utječe na određenost te strane, tj. na površinu koju omeđuje ta strana. Dapače, baš je obrnuto, brid r_3 se nalazi unutar strane S_1 pa zato pripada njezinom rubu.

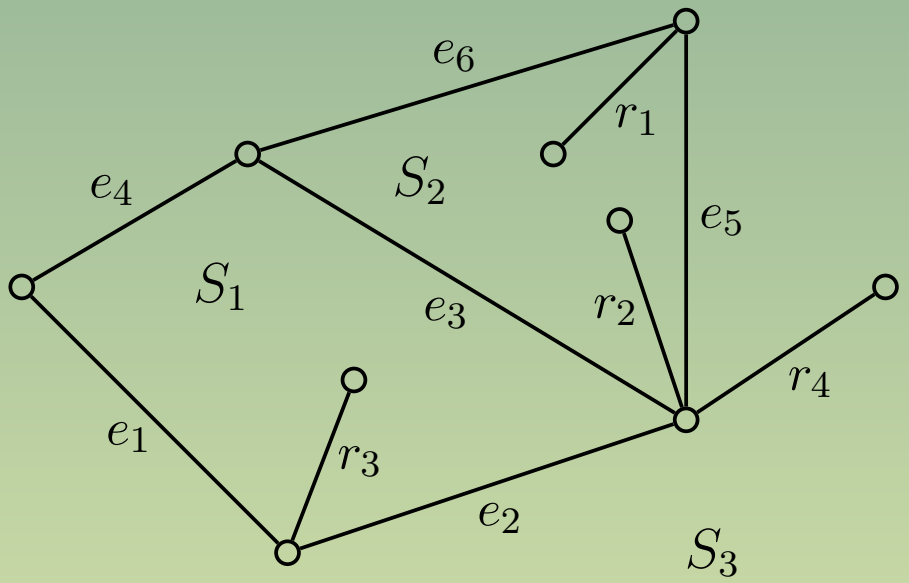
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Analogno, rubu strane S_2 pripadaju bridovi e_3, e_5, e_6, r_1 i r_2. Međutim, strana S_2 je u potpunosti određena s bridovima e_3, e_5 i e_6, tj. omeđena je s barem tri brida pri čemu u ta tri brida nisu uračunati rezni bridovi r_1 i r_2 koji su susjedni s vrhovima stupnja 1.

Rubu strane S_3 pripadaju bridovi e_1, e_2, e_4, e_5, e_6 i r_4. Međutim, strana S_3 je u potpunosti određena s bridovima e_1, e_2, e_4, e_5 i e_6, tj. omeđena je s barem tri brida pri čemu u ta tri brida nije uračunati rezni brid r_4 koji je susjedan s vrhom stupnja 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Dakle, u jednostavnom povezanom planarnom grafu koji ima barem 4 vrha je svaka strana omeđena s barem tri brida, ne računajući pritom rezne bridove koji su susjedni s vrhovima stupnja 1. Zbog toga je opravdan naš zaključak da mora biti $N \geqslant 3\phi + 7$ jer naš graf iz zadatka ima 7 takvih reznih bridova. Vratimo se sada dalje rješavanju zadatka.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Dobili smo da je $N \leqslant 2\varepsilon - 7$ i $N \geqslant 3\phi + 7$. Stoga mora biti

$$3\phi + 7 \leqslant 2\varepsilon - 7. \qquad (\star)$$

Graf G je povezani i $\nu = 20$ pa imamo

$$\begin{aligned} \nu - \varepsilon + \phi &= 2 \\ 20 - \varepsilon + \phi &= 2 \\ \phi &= \varepsilon - 18 \end{aligned}$$

Uvrstimo li $\phi = \varepsilon - 18$ u $(\star)$, dobivamo

$$\begin{aligned} 3(\varepsilon - 18) + 7 &\leqslant 2\varepsilon - 7 \\ \varepsilon &\leqslant 40 \end{aligned}$$

pa graf G ima najviše 40 bridova.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Poopćenje ◂ teorema 10.3. je sljedeći teorem.

Teorem 10.4.

Neka je G planarni graf čiji struk je jednak k, $k \geqslant 3$. Tada je $\varepsilon \leqslant \frac{k}{k-2}(\nu - 2)$.

Dokaz.

Prisjetimo se, struk grafa G jednak je duljini najkraćeg ciklusa u grafu G. Ako u grafu nema ciklusa, njegov struk je jednak ∞. Pobrojimo za svaku stranu broj bridova koji ju omeđuju i sumirajmo sve te brojeve. Neka je dobivena suma jednaka N. U tom brojanju je svaki brid brojan najviše dvaput pa je $N \geqslant 2\varepsilon$. Kako je struk grafa G jednak k, svaka strana od G je omeđena s barem k bridova pa je $N \geqslant k\phi$. Iz $N \leqslant 2\varepsilon$ i $N \geqslant k\phi$ slijedi da mora biti $k\phi \leqslant 2\varepsilon$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Prema ◂ teoremu 10.2. vrijedi $\nu - \varepsilon + \phi = 1 + \omega$. Iskoristimo li činjenicu da je $k\phi \leqslant 2\varepsilon$, dobivamo

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \nu + \phi - 1 - \omega \,/ \cdot k \\ k\varepsilon &= k\nu + k\phi - k - k\omega \\ k\varepsilon &\leqslant k\nu + 2\varepsilon - k - k\omega \\ k\varepsilon &\leqslant \tfrac{k}{k-2}\big(\nu - 1 - \omega\big) \end{aligned}$$

Kako je $\omega \geqslant 1$, slijedi da je

$$\varepsilon \leqslant \frac{k}{k-2}\,(\nu - 2)\,.$$

♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.12.

Neka je G jednostavni planarni bipartitni graf s barem tri vrha. Dokažite da tada vrijedi $\varepsilon \leqslant 2\nu - 4$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.12.

Neka je G jednostavni planarni bipartitni graf s barem tri vrha. Dokažite da tada vrijedi $\varepsilon \leqslant 2\nu - 4$.

Rješenje.

Ako je G šuma, tada je prema primjeru 8.9. $\varepsilon = \nu - \omega$, gdje ω broj komponenata povezanosti grafa G. Nadalje,

$$\nu - \omega \leqslant 2\nu - 4 \Leftrightarrow \nu \geqslant 4 - \omega.$$

Kako je $\omega \geqslant 1$, slijedi

$$\nu - \omega \leqslant 2\nu - 4 \Leftrightarrow \nu \geqslant 3$$

pa zbog pretpostavke da G ima barem tri vrha, tvrdnja vrijedi u ovom slučaju. Ako G nije šuma, tada sadrži barem jedan ciklus.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

No, G je bipartitni graf pa prema ◂ teoremu 7.1. ne sadrži cikluse neparnih duljina. Kako je G jednostavni graf, njegov struk je tada jednak barem 4. Prema prethodnom ◂ teoremu 10.4. vrijedi

$$\varepsilon \leqslant \frac{k}{k-2}\,(\nu - 2)\,,$$

gdje je k struk grafa G. Kako je u našem slučaju $k \geqslant 4$, slijedi da je $\frac{k}{k-2} \leqslant 2$. Naime, kako je $k \geqslant 4$ vrijedi

$$\frac{k}{k-2} \leqslant 2 \;\Leftrightarrow\; k \leqslant 2(k-2) \;\Leftrightarrow\; k \geqslant 4.$$

Stoga je

$$\varepsilon \leqslant \frac{k}{k-2}\,(\nu - 2) \leqslant 2(\nu - 2)$$

iz čega slijedi da je $\varepsilon \leqslant 2\nu - 4$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.13.

Neka je G jednostavni graf s barem 11 vrhova. Dokažite da tada barem jedan od grafova G i G^c nije planarni. ◂ G^c

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.13.

Neka je G jednostavni graf s barem 11 vrhova. Dokažite da tada barem jedan od grafova G i G^c nije planarni. ◂ G^c

Rješenje.

Jednostavni graf s ν vrhova može imati maksimalno $\binom{\nu}{2}$ bridova. Iz definicije komplementarnog grafa slijedi da barem jedan od grafova G i G^c mora imati barem $\frac{1}{2}\binom{\nu}{2}$ bridova, tj. za barem jednog od njih mora vrijediti $\varepsilon \geqslant \frac{1}{2}\binom{\nu}{2}$. Tvrdimo da u tom slučaju taj graf nije planarni. Da bismo to pokazali, dovoljno je dokazati da je $\frac{1}{2}\binom{\nu}{2} > 3\nu - 6$ jer će tada slijediti da je $\varepsilon > 3\nu - 6$, a prema kontrapoziciji ◂ teorema 10.3. promatrani graf neće biti planarni.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

$$\frac{1}{2}\binom{\nu}{2} > 3\nu - 6 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\nu(\nu-1)}{4} > 3\nu - 6 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4}\nu^2 - \frac{13}{4}\nu + 6 > 0$$

Rješavanjem kvadratne nejednadžbe dobivamo da mora biti

$$\nu \in \left\langle -\infty, \frac{13-\sqrt{73}}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{13+\sqrt{73}}{2}, +\infty \right\rangle.$$

Kako je $\nu \in \mathbb{N}$, slijedi da mora biti $\nu \geqslant 11$. Dakle, ako jednostavni graf G ima barem 11 vrhova, tada barem jedan od grafova G i G^c nije planarni.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.14.

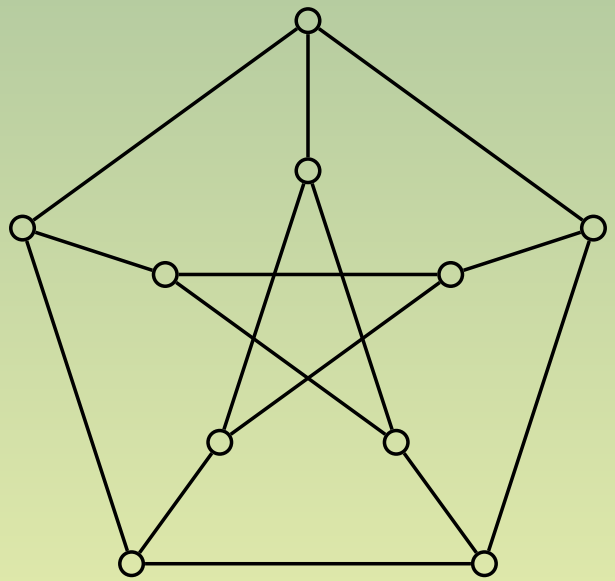
Dokažite da Petersenov graf nije planarni graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.14.

Dokažite da Petersenov graf nije planarni graf.

Rješenje.



Kod Petersenovog grafa je $\nu = 10$, $\varepsilon = 15$ i $k = 5$, gdje je k struk Petersenovog grafa. Međutim, tada je $\varepsilon > \frac{k}{k-2}(\nu - 2)$ pa Petersenov graf nije planarni graf prema kontrapoziciji

◂ teorema 10.4..

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.15.

Za koje $n \in \mathbb{N}$ je graf K_n planarni?

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.15.

Za koje $n \in \mathbb{N}$ je graf K_n planarni?

Rješenje.

Očito je da su K_1, K_2, K_3 i K_4 planarni grafovi. U ◂ korolaru 10.3. smo pokazali da K_5 nije planarni graf. Nadalje, jasno je da ako graf G sadrži podgraf izomorfan s neplanarnim grafom, tada G nije planarni graf. Za $n \geqslant 6$ graf K_n sadrži podgraf izomorfan s K_5 pa u tom slučaju K_n ne može biti planarni graf. Dakle, K_n je planarni graf jedino za $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.16.

Za koje $m, n \in \mathbb{N}$ je graf $K_{m,n}$ planarni?

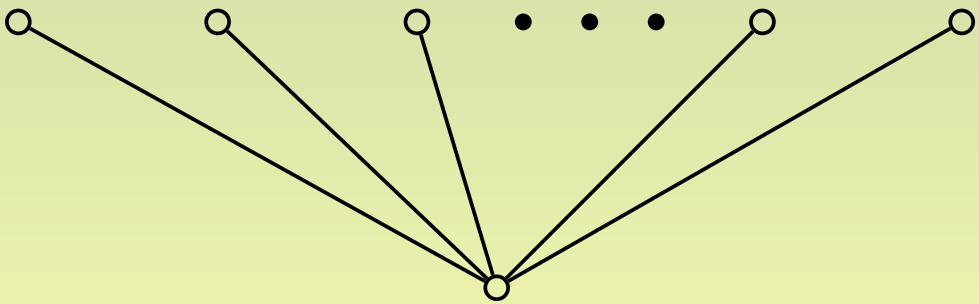
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.16.

Za koje $m, n \in \mathbb{N}$ je graf $K_{m,n}$ planarni?

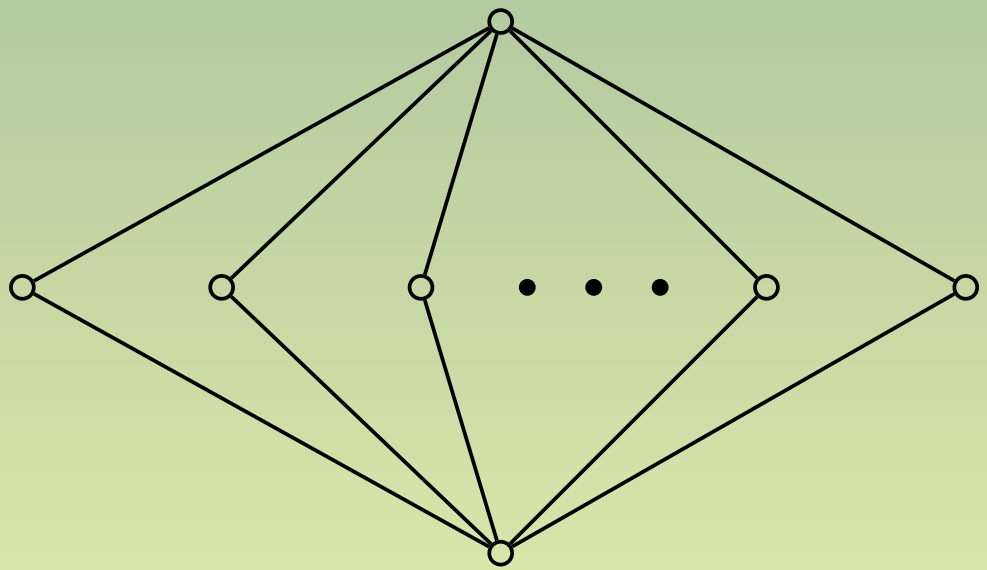
Rješenje.

U ◂ korolaru 10.2. smo dokazali da $K_{3,3}$ nije planarni graf. Stoga, ako je $m \geqslant 3$ i $n \geqslant 3$, tada $K_{m,n}$ sadrži podgraf izomorfan s $K_{3,3}$ pa u tom slučaju $K_{m,n}$ nije planarni graf. Grafovi $K_{m,1}$ i $K_{1,n}$ su planarni jer su to grafovi oblika



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Grafovi $K_{m,2}$ i $K_{2,n}$ su također planarni jer su to grafovi oblika



Dakle, $K_{m,n}$ je planarni graf jedino ako je $m \leqslant 2$ ili $n \leqslant 2$, tj. ako je barem jedan od brojeva m i n manji ili jednak od 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Napomena.

Znamo da grafovi K_5 i $K_{3,3}$ nisu planarni grafovi. Isto tako nam je jasno, ako neki graf G sadrži podgraf izomorfan s K_5 ili $K_{3,3}$, tada G nije planarni graf. Postavlja se pitanje da li vrijedi obrat, tj. da li neplanarni graf mora sadržavati podgraf izomorfan s K_5 ili $K_{3,3}$? Općenito to nije istina, ali s druge strane nije niti jako daleko od prave istine ako riječ "izomorfan" zamijenimo s riječju "homeomorfan". Stoga nam je sljedeći zadatak da objasnimo pojam homeomorfizma grafova kako bismo bili u stanju izreći teorem koji daje nužne i dovoljne uvjete za planarnost grafova.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Homeomorfni grafovi

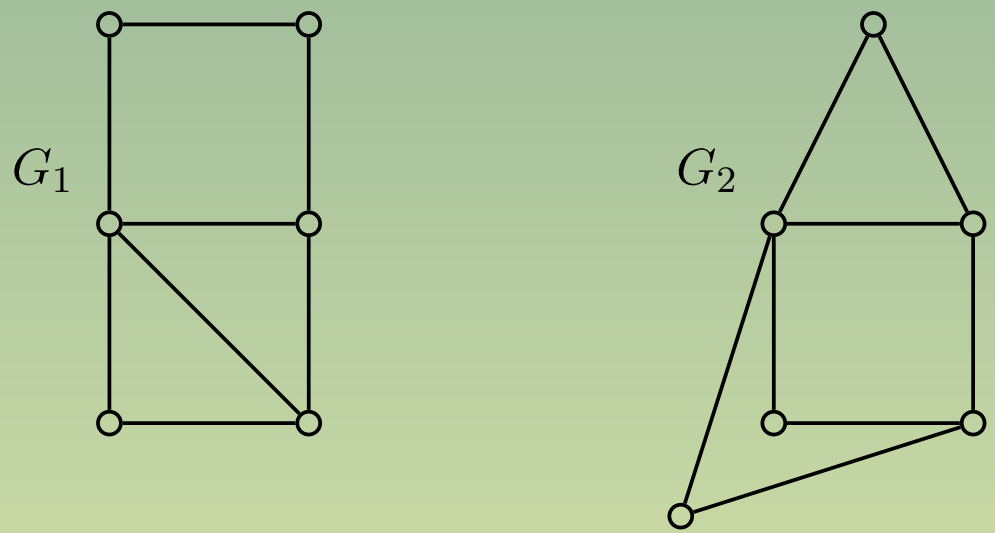
Za dva grafa kažemo da su **homeomorfni** ako se jedan iz drugog mogu dobiti uklanjanjem ili umetanjem vrhova stupnja 2.

Pod uklanjanjem vrhova stupnja dva podrazumijevamo da određeni vrh stupnja 2 obrišemo iz grafa, a dva brida koji su s njim bili susjedni spojimo u jedan brid. Analogno, pod umetanjem vrha stupnja dva podrazumijevamo da na određeni brid u grafu dodamo novi vrh i na taj način taj brid podijelimo na dva nova brida.

Uočite da gornje operacije ne utječu na planarnost grafa, tj. ako na planarnom grafu izvršimo konačni broj gornjih operacija, opet će dobiveni graf biti planarni.

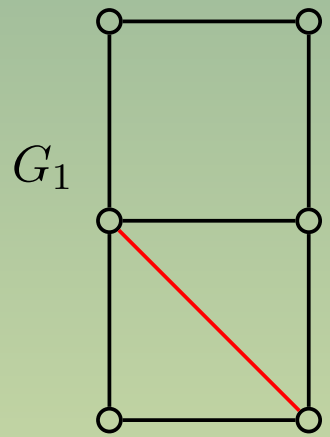
Ilustrirajmo na nekoliko primjera opisane operacije da nam bude jasnije o čemu se zapravo radi.

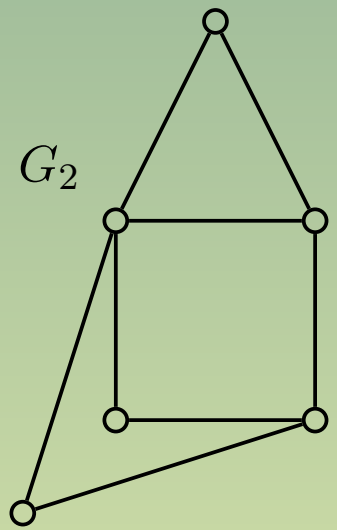
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Grafovi G_1 i G_2 nisu izomorfni jer graf G_1 ima dva ciklusa duljine 3, a graf G_2 ima samo jedan takav ciklus. Međutim, grafovi G_1 i G_2 su homeomorfni. Da bismo to dokazali, moramo vidjeti da se jedan od ta dva grafa može dobiti iz onog drugog samo uklanjanjem i umetanjem vrhova stupnja 2. Pogledajmo da se na taj način graf G_2 može dobiti iz grafa G_1.

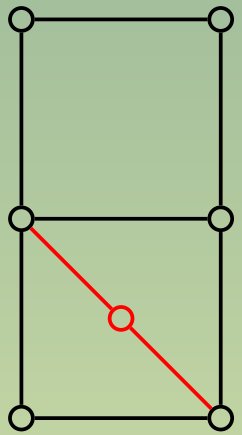
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

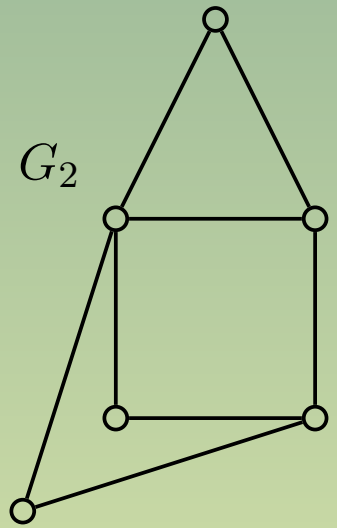




Odaberimo crveni brid na grafu G_1.

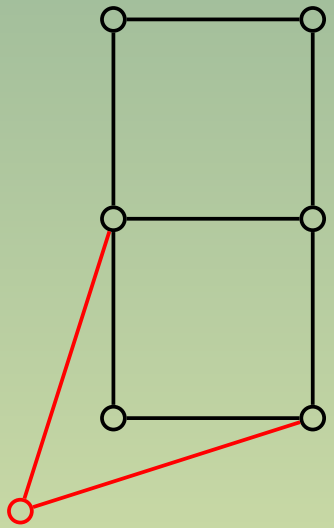
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

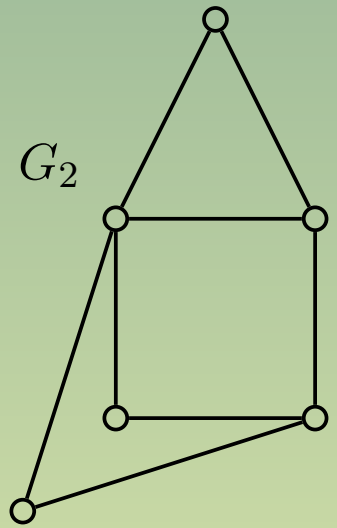




Odaberimo crveni brid na grafu G_1. Na taj brid umetnemo vrh stupnja 2 i na taj način od jednog brida dobijemo dva brida.

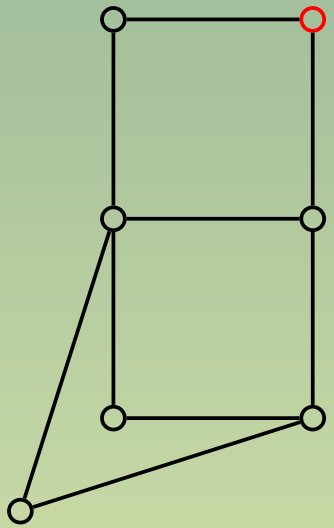
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

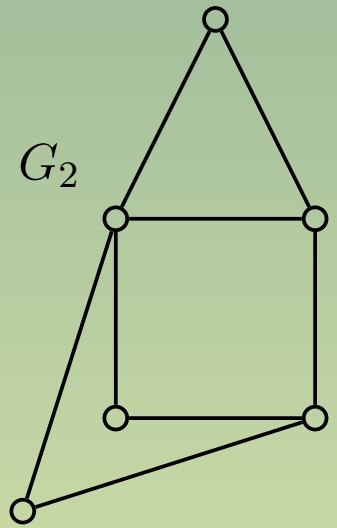




Odaberimo crveni brid na grafu G_1. Na taj brid umetnemo vrh stupnja 2 i na taj način od jednog brida dobijemo dva brida. Možemo taj vrh pomaknuti na neko drugo mjesto tako da trenutni graf bude što sličniji grafu G_2.

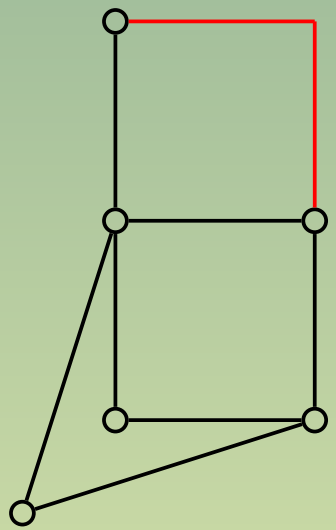
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

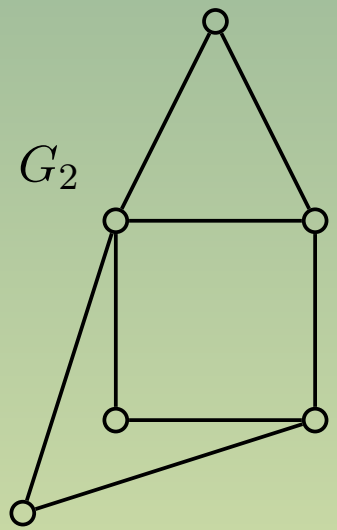




Pogledajmo sada crveni vrh. Taj vrh je stupnja 2.

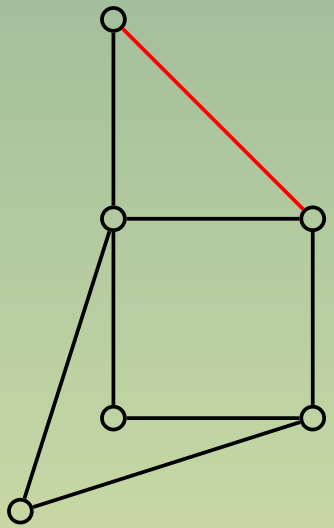
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

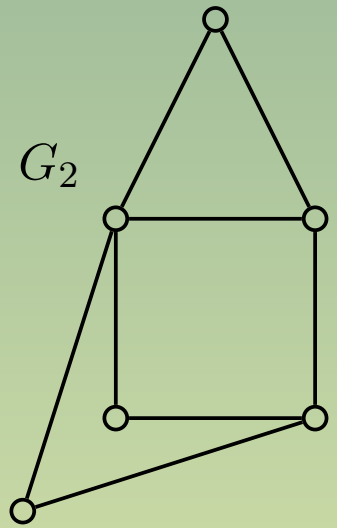




Pogledajmo sada crveni vrh. Taj vrh je stupnja 2. Uklonimo li taj vrh, od dva brida dobijemo samo jedan crveni brid

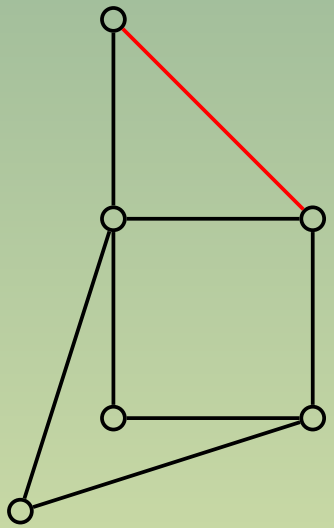
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

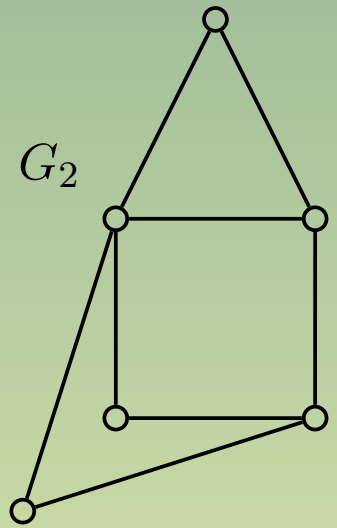




Pogledajmo sada crveni vrh. Taj vrh je stupnja 2. Uklonimo li taj vrh, od dva brida dobijemo samo jedan crveni brid kojeg možemo nacrtati kao dužinu (kako i najčešće crtamo bridove grafa).

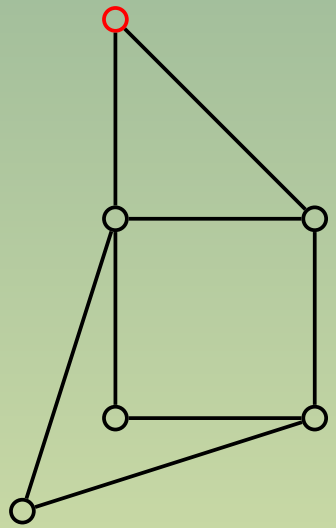
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

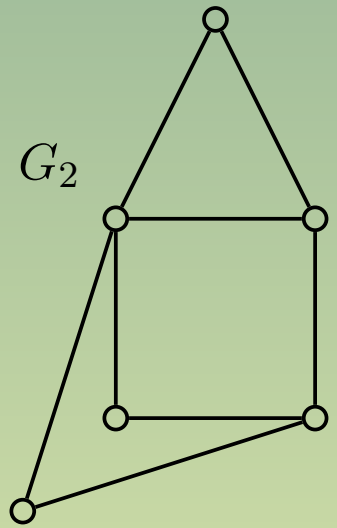




Pogledajmo sada crveni vrh. Taj vrh je stupnja 2. Uklonimo li taj vrh, od dva brida dobijemo samo jedan crveni brid kojeg možemo nacrtati kao dužinu (kako i najčešće crtamo bridove grafa). Uočavamo već sada da smo zapravo dobili graf G_2.

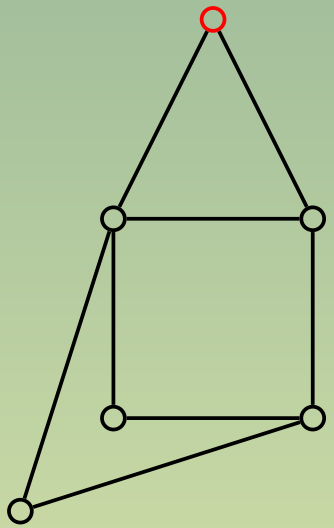
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

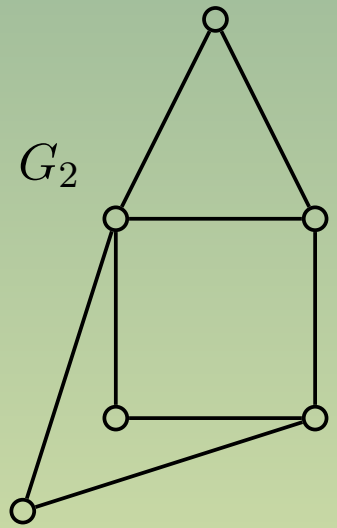




Pogledajmo sada crveni vrh. Taj vrh je stupnja 2. Uklonimo li taj vrh, od dva brida dobijemo samo jedan crveni brid kojeg možemo nacrtati kao dužinu (kako i najčešće crtamo bridove grafa). Uočavamo već sada da smo zapravo dobili graf G_2. No, možemo crveni vrh

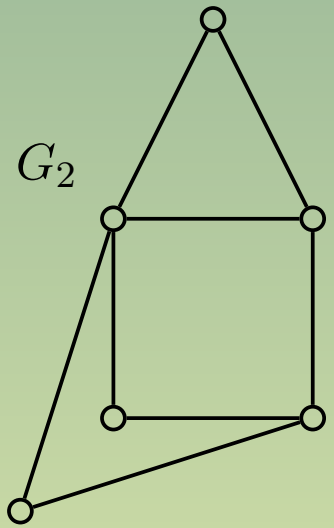
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

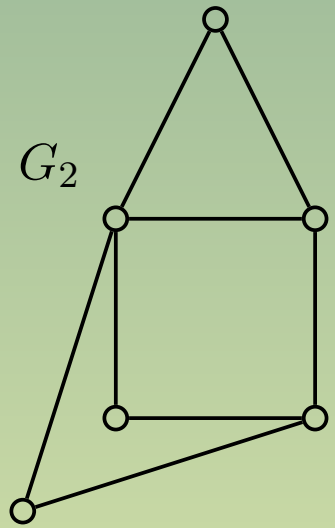




Pogledajmo sada crveni vrh. Taj vrh je stupnja 2. Uklonimo li taj vrh, od dva brida dobijemo samo jedan crveni brid kojeg možemo nacrtati kao dužinu (kako i najčešće crtamo bridove grafa). Uočavamo već sada da smo zapravo dobili graf G_2. No, možemo crveni vrh malo pomaknuti udesno

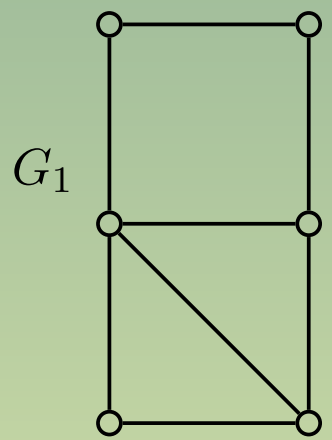
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

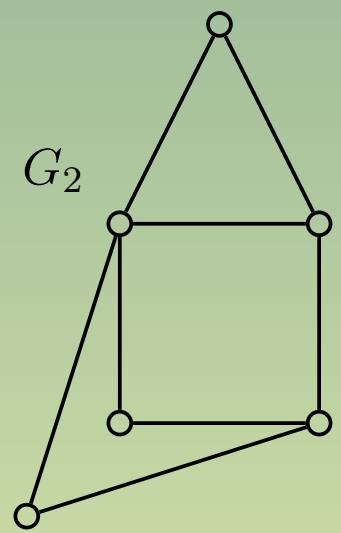




Pogledajmo sada crveni vrh. Taj vrh je stupnja 2. Uklonimo li taj vrh, od dva brida dobijemo samo jedan crveni brid kojeg možemo nacrtati kao dužinu (kako i najčešće crtamo bridove grafa). Uočavamo već sada da smo zapravo dobili graf G_2. No, možemo crveni vrh malo pomaknuti udesno i više nema nikakve sumnje, dobiven je graf G_2.

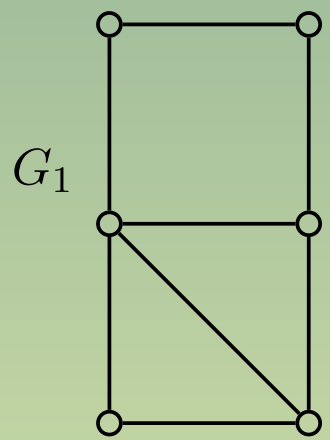
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

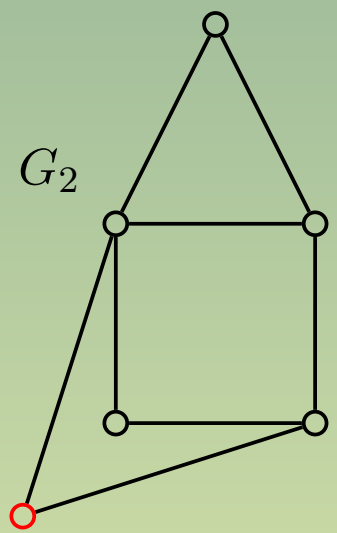




Dakle, graf G_2 se može dobiti iz grafa G_1 uklanjanjem i umetanjem vrhova stupnja 2, a to po definiciji znači da su grafovi G_1 i G_2 homeomorfni. No, "biti homeomorfan" je simetrična relacija pa je moguće i graf G_1 dobiti iz grafa G_2 uklanjanjem i umetanjem vrhova stupnja 2. Pokažimo i taj postupak.

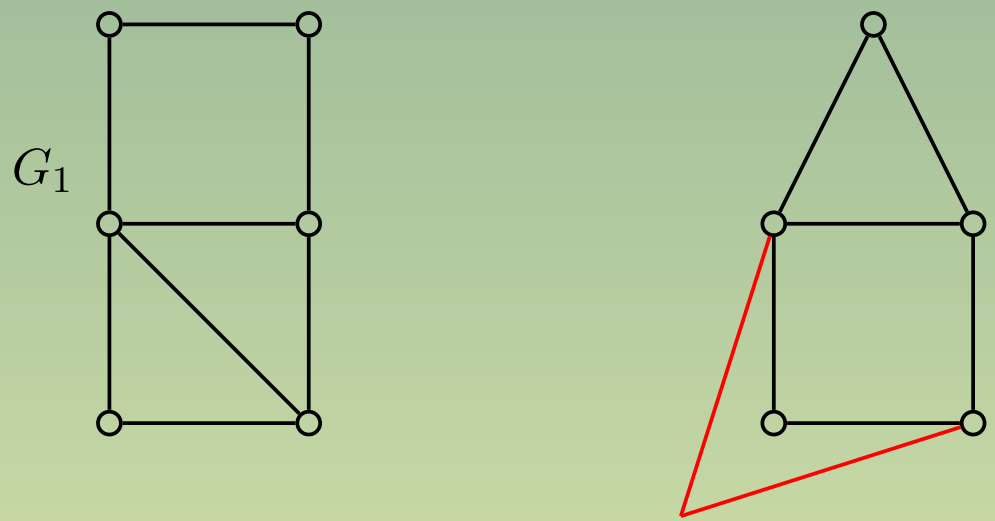
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





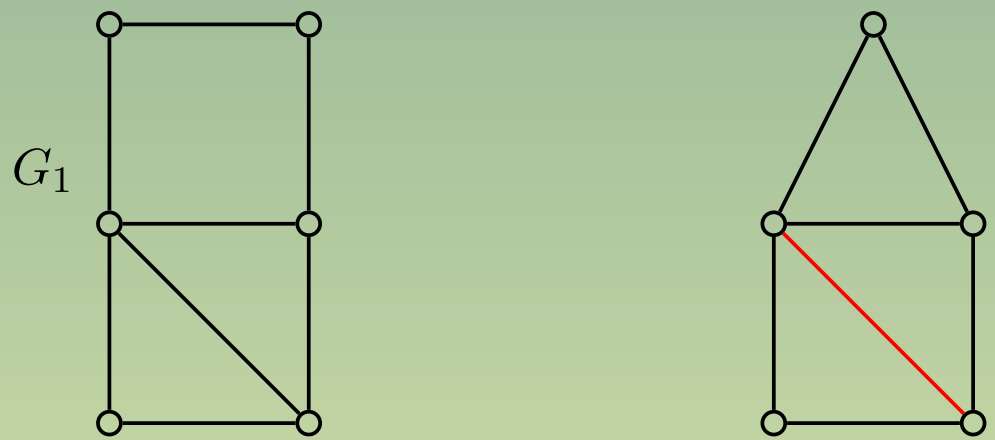
Pogledajmo crveni vrh. To je vrh stupnja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



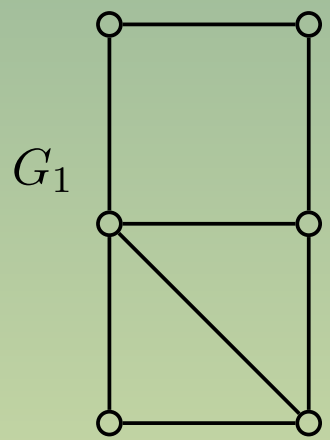
Pogledajmo crveni vrh. To je vrh stupnja 2. Uklonimo li taj vrh, od dva brida dobijemo samo jedan crveni brid

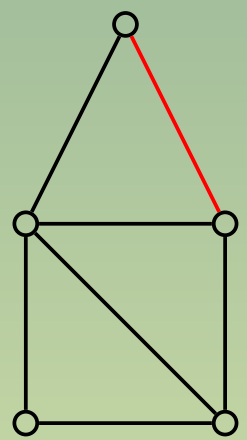
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Pogledajmo crveni vrh. To je vrh stupnja 2. Uklonimo li taj vrh, od dva brida dobijemo samo jedan crveni brid kojeg možemo nacrtati kao dužinu.

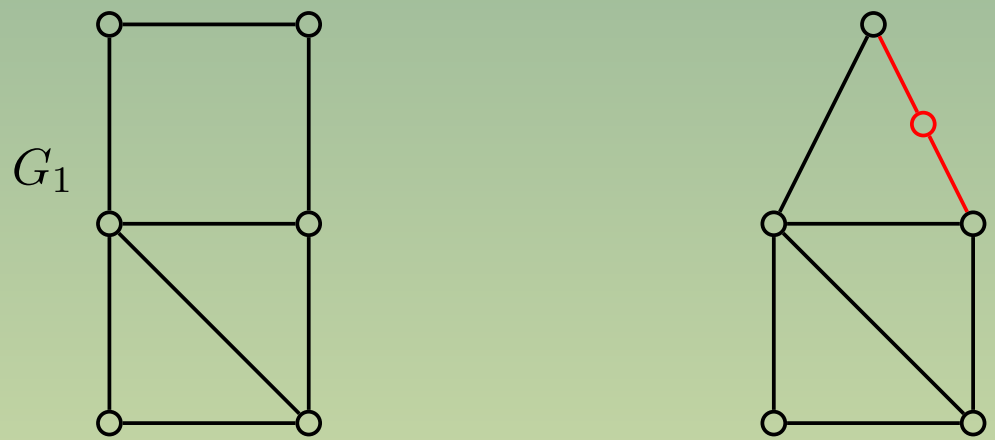
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





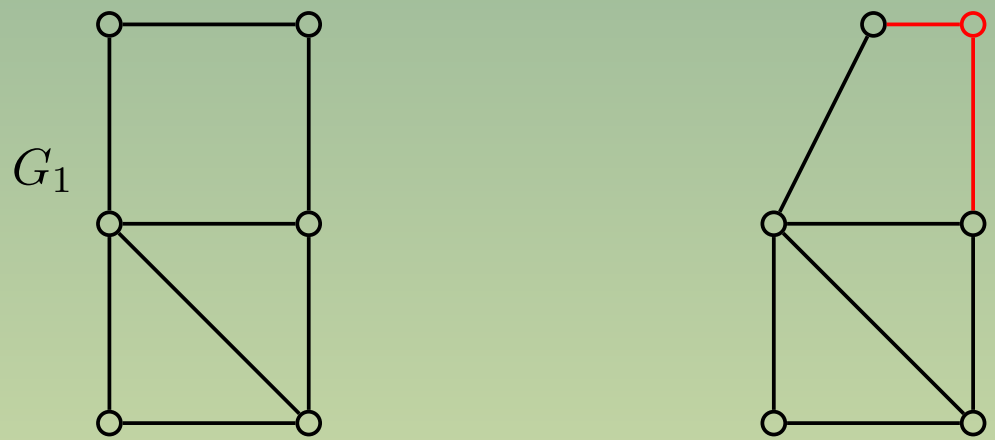
Na crveno obojani brid

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



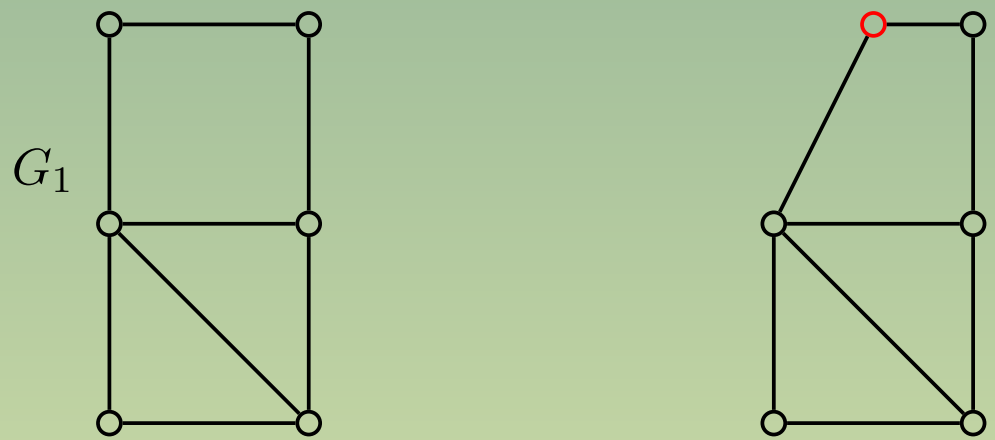
Na crveno obojani brid umetnemo vrh stupnja 2 i na taj način od jednog brida dobijemo dva brida.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



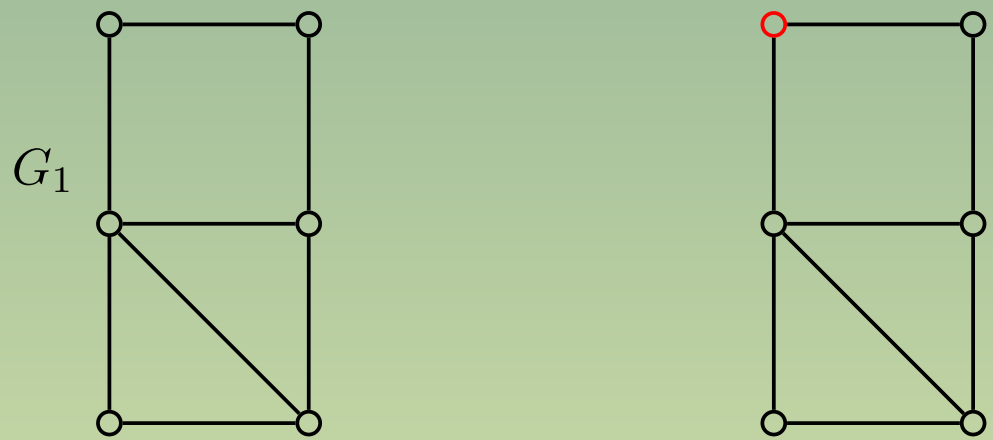
Na crveno obojani brid umetnemo vrh stupnja 2 i na taj način od jednog brida dobijemo dva brida. Taj novi vrh možemo pomaknuti na drugo mjesto.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



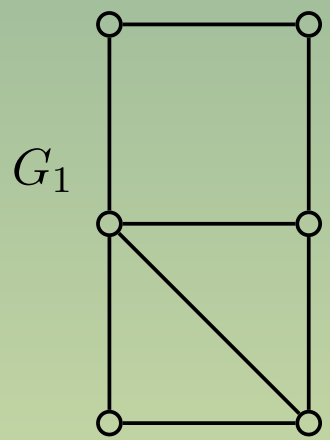
Na crveno obojani brid umetnemo vrh stupnja 2 i na taj način od jednog brida dobijemo dva brida. Taj novi vrh možemo pomaknuti na drugo mjesto. Ako još crveno označeni vrh

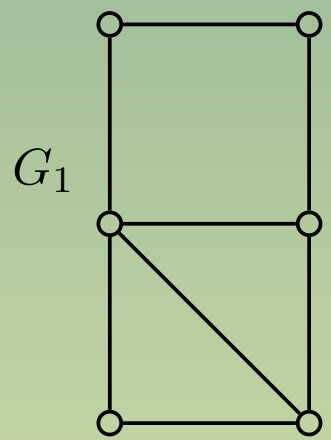
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na crveno obojani brid umetnemo vrh stupnja 2 i na taj način od jednog brida dobijemo dva brida. Taj novi vrh možemo pomaknuti na drugo mjesto. Ako još crveno označeni vrh pomaknemo ulijevo,

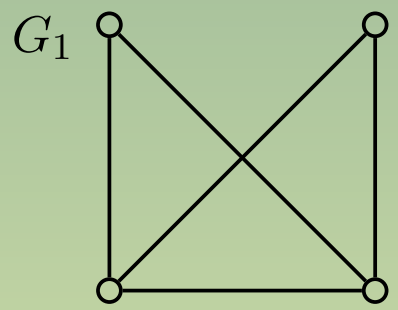
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

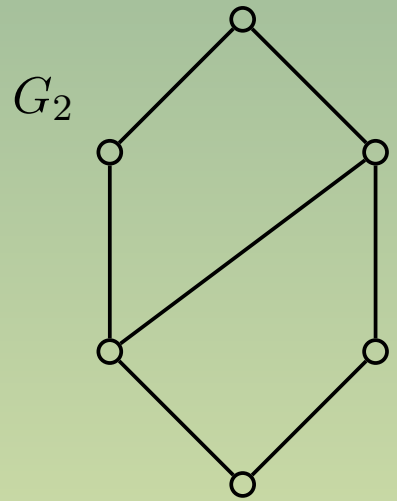




Na crveno obojani brid umetnemo vrh stupnja 2 i na taj način od jednog brida dobijemo dva brida. Taj novi vrh možemo pomaknuti na drugo mjesto. Ako još crveno označeni vrh pomaknemo ulijevo, dobivamo graf G_1.

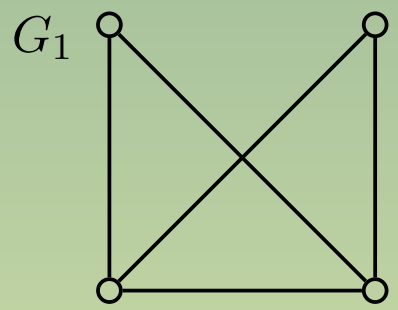
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

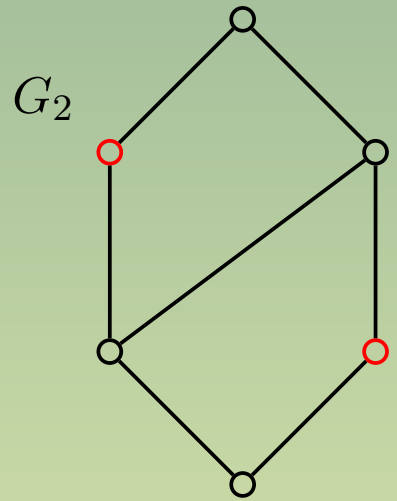




Pogledajmo još jedan primjer. Grafovi G_1 i G_2 nisu izomorfni jer nemaju, npr. jednak broj vrhova, također niti jednak broj bridova. Međutim, G_1 i G_2 su homeomorfni grafovi. Uvjerimo se u to.

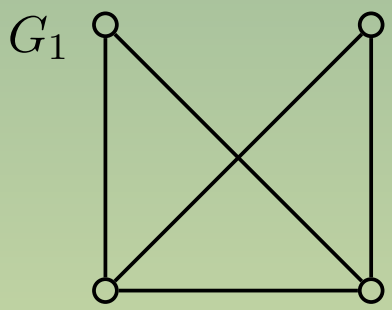
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

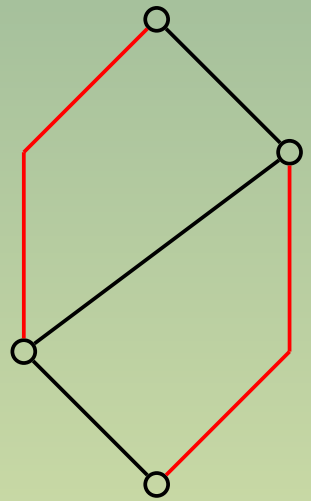




Uočimo crveno označene vrhove na grafu G_2. To su vrhovi stupnja 2.

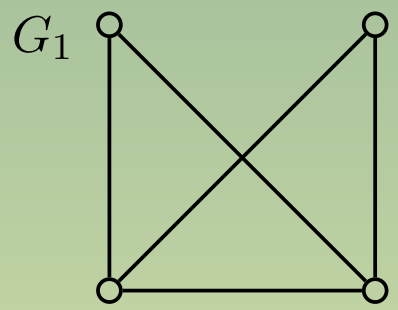
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

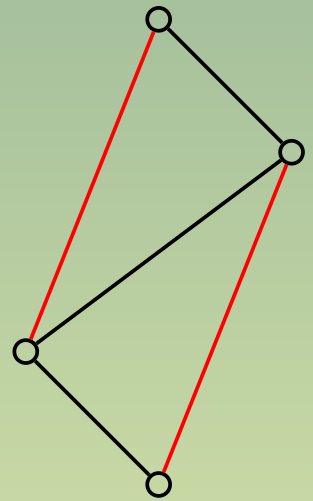




Uočimo crveno označene vrhove na grafu G_2. To su vrhovi stupnja 2. Uklonimo li te vrhove, od četiri stara brida dobivamo nova dva crvena brida.

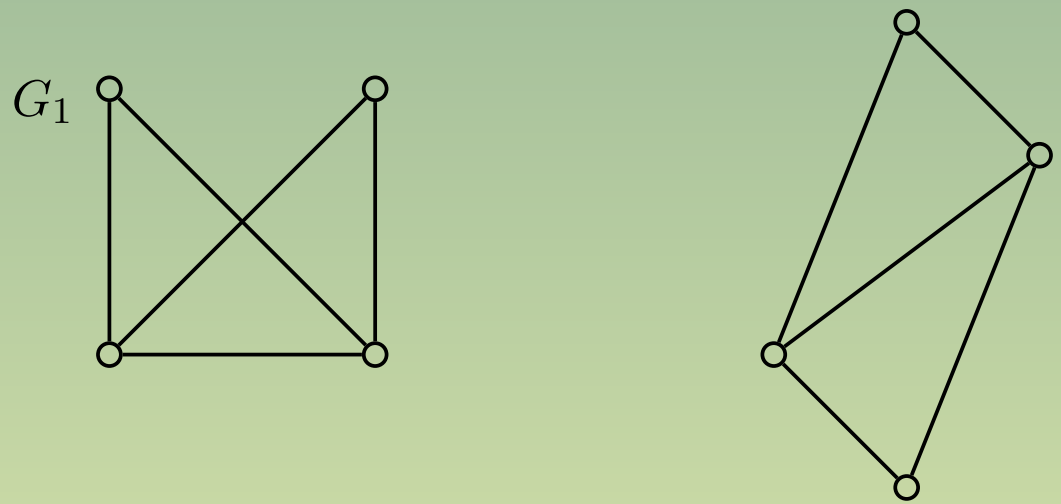
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





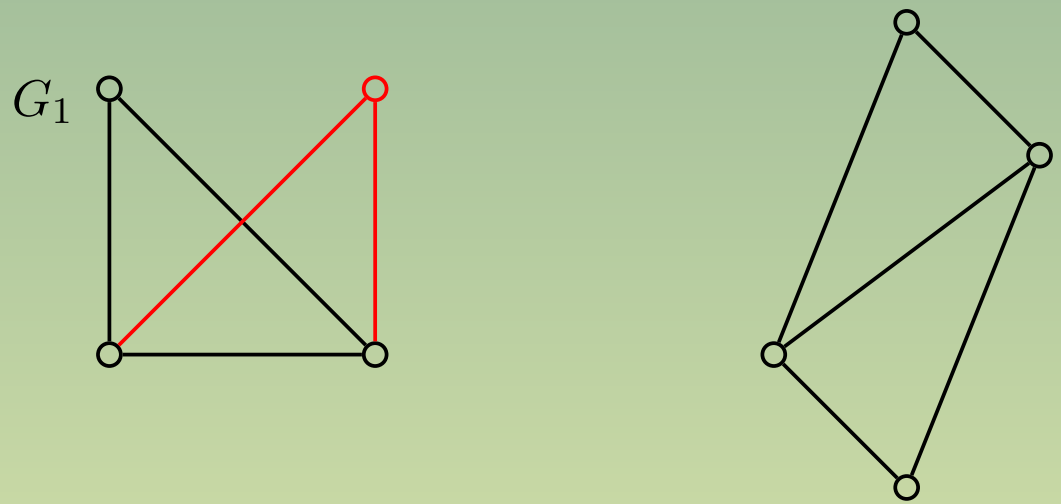
Uočimo crveno označene vrhove na grafu G_2. To su vrhovi stupnja 2. Uklonimo li te vrhove, od četiri stara brida dobivamo nova dva crvena brida. Njih možemo nacrtati u obliku dužina kako i najčešće crtamo bridove.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



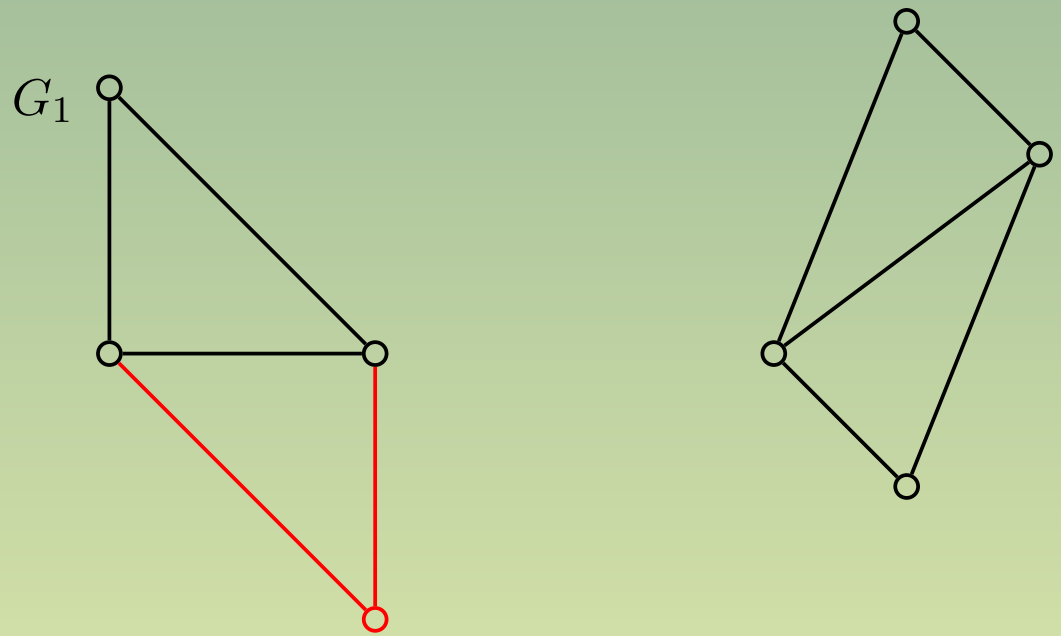
Dobiveni graf je zapravo izomorfan s grafom G_1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



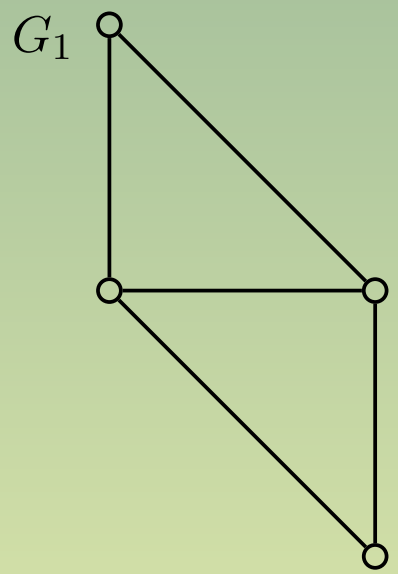
Dobiveni graf je zapravo izomorfan s grafom G_1. Da bismo se u to uvjerili, pogledajmo na grafu G_1 crveni vrh zajedno s njegovim susjednim (crvenim) bridovima

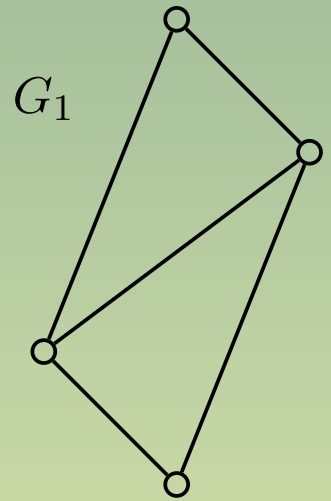
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Dobiveni graf je zapravo izomorfan s grafom G_1. Da bismo se u to uvjerili, pogledajmo na grafu G_1 crveni vrh zajedno s njegovim susjednim (crvenim) bridovima i prebacimo ih na drugu stranu.

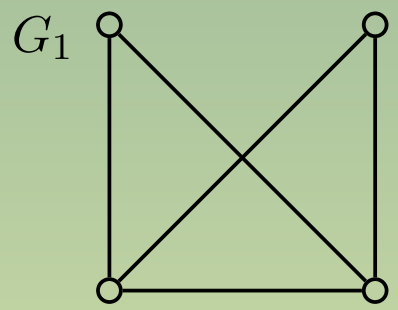
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

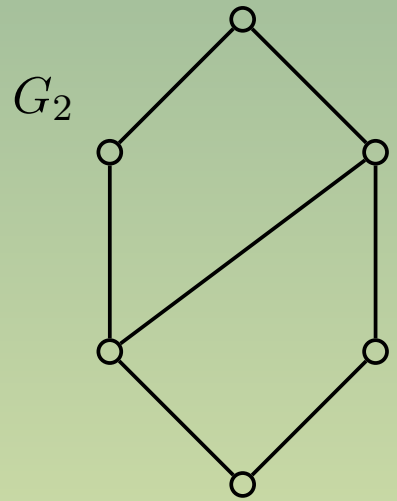




Dobiveni graf je zapravo izomorfan s grafom G_1. Da bismo se u to uvjerili, pogledajmo na grafu G_1 crveni vrh zajedno s njegovim susjednim (crvenim) bridovima i prebacimo ih na drugu stranu. Sada je jasno da se radi o istim grafovima, samo što su kod crtanja tih grafova njihovi vrhovi drukčije raspoređeni.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





Dakle, uspjeli smo graf G_1 dobiti iz grafa G_2 umetanjem i uklanjanjem vrhova stupnja 2. Iz toga slijedi da su G_1 i G_2 homeomorfni grafovi. Za vježbu napravite postupak dobivanja grafa G_2 iz grafa G_1 umetanjem i uklanjanjem vrhova stupnja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Napomena.

O homeomorfnim grafovima možemo intuitivno razmišljati kao o "skoro izomorfnim" grafovima u sljedećem smislu. Iz definicije homeomorfnih grafova zapravo slijedi da se homeomorfni grafovi, što se tiče broja vrhova, razlikuju jedino u različitom broju vrhova stupnja 2. Ako su dva grafa homeomorfna, tada oni imaju jednak broj vrhova stupnja k za $k \neq 2$, a imaju eventualno različiti broj vrhova stupnja 2. Na prethodna dva primjera smo upravo imali takve grafove koji su imali različiti broj vrhova stupnja 2, a isti broj vrhova stupnja k za svaki $k \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$.

Kada dva grafa nisu homeomorfni?

Ako za neki $k \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ dva grafa imaju različiti broj vrhova stupnja k, tada oni nisu homeomorfni.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Zadatak 10.5.

Dokažite da je "biti homeomorfan" relacija ekvivalencije na grafovima.

Zadatak 10.6.

Da li su svaka dva ciklusa homeomorfna? Obrazložite svoju tvrdnju.

Zadatak 10.7.

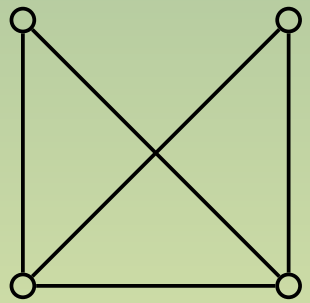
Neka su G_1 i G_2 grafovi koji imaju isti broj vrhova stupnja k za svaki $k \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$. Da li su tada G_1 i G_2 homeomorfni grafovi? Dokažite svoju tvrdnju.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

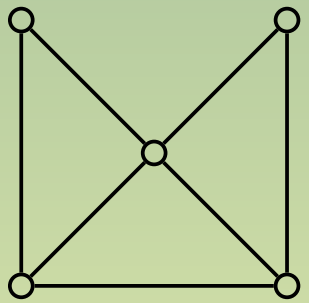
Primjer 10.17.

Da li su grafovi G_1 i G_2 homeomorfni? Obrazložite svoju tvrdnju.

G_1



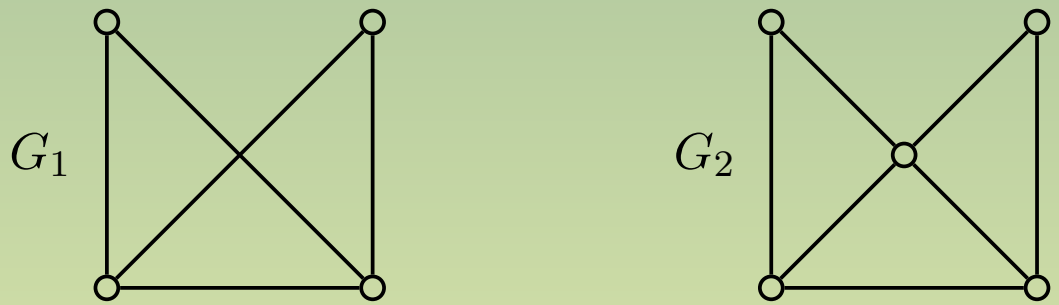
G_2



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.17.

Da li su grafovi G_1 i G_2 homeomorfni? Obrazložite svoju tvrdnju.



Rješenje.

Graf G_1 ima nula vrhova stupnja 4, a graf G_2 ima jedan vrh stupnja 4. Kako grafovi G_1 i G_2 imaju različiti broj vrhova stupnja 4, zaključujemo da G_1 i G_2 nisu homeomorfni grafovi, tj. ne mogu se jedan iz drugoga dobiti uklanjanjem i umetanjem vrhova stupnja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.18.

Dokažite da su $K_{2,2}$ i K_3 homeomorfni grafovi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.18.

Dokažite da su $K_{2,2}$ i K_3 homeomorfni grafovi.

Rješenje.



Pokazat ćemo da se K_3 može dobiti iz $K_{2,2}$ umetanjem i uklanjanjem vrhova stupnja 2 iz čega će po definiciji slijediti da su $K_{2,2}$ i K_3 homeomorfni grafovi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.18.

Dokažite da su $K_{2,2}$ i K_3 homeomorfni grafovi.

Rješenje.



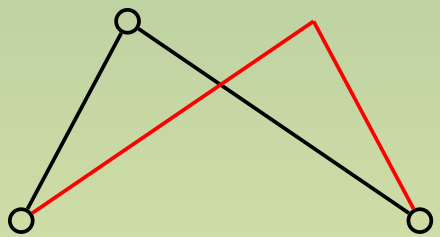
Uočimo crveni vrh na $K_{2,2}$. To je vrh stupnja 2.

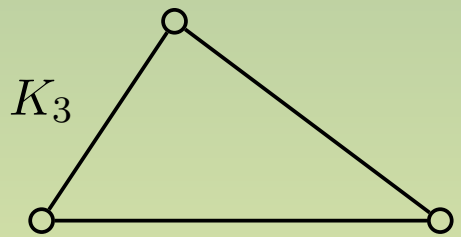
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.18.

Dokažite da su $K_{2,2}$ i K_3 homeomorfni grafovi.

Rješenje.





Uočimo crveni vrh na $K_{2,2}$. To je vrh stupnja 2. Uklonimo li taj vrh, od dva stara brida dobivamo samo jedan crveni brid

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.18.

Dokažite da su $K_{2,2}$ i K_3 homeomorfni grafovi.

Rješenje.



Uočimo crveni vrh na $K_{2,2}$. To je vrh stupnja 2. Uklonimo li taj vrh, od dva stara brida dobivamo samo jedan crveni brid kojeg možemo nacrtati u obliku dužine.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.18.

Dokažite da su $K_{2,2}$ i K_3 homeomorfni grafovi.

Rješenje.



Uočimo crveni vrh na $K_{2,2}$. To je vrh stupnja 2. Uklonimo li taj vrh, od dva stara brida dobivamo samo jedan crveni brid kojeg možemo nacrtati u obliku dužine. Uočavamo da smo dobili zapravo K_3 iz čega slijedi da su $K_{2,2}$ i K_3 homeomorfni grafovi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.19.

Neka je H graf dobiven iz grafa G dodavanjem jednog vrha stupnja 1 nekom vrhu od G. Da li je moguće da su G i H homeomorfni grafovi? Da li je moguće da G i H nisu homeomorfni grafovi? Obrazložite svoje tvrdnje.

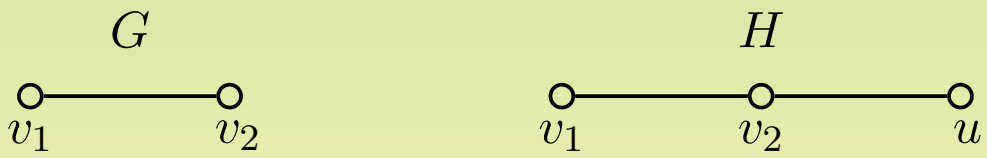
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.19.

Neka je H graf dobiven iz grafa G dodavanjem jednog vrha stupnja 1 nekom vrhu od G. Da li je moguće da su G i H homeomorfni grafovi? Da li je moguće da G i H nisu homeomorfni grafovi? Obrazložite svoje tvrdnje.

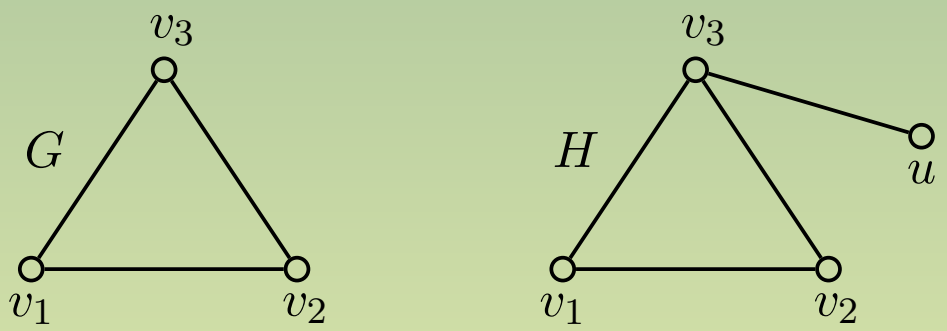
Rješenje.

Moguće su obje situacije. Kao prvo, moguće je da su G i H homeomorfni grafovi, što pokazuje donji primjer jer uklanjanjem vrha v_2 stupnja 2 iz grafa H dobivamo graf G.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Isto tako, moguće je da G i H nisu homeomorfni grafovi. Primjer takvih grafova su grafovi



Grafovi G i H nisu homeomorfni jer nemaju, npr. isti broj vrhova stupnja 3. Graf G nema niti jedan vrh stupnja 3, a graf H ima jedan vrh stupnja 3. Stoga se oni ne mogu dobiti jedan iz drugog uklanjanjem i umetanjem vrhova stupnja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.20.

Neka je G Eulerov graf i neka je graf H homeomorfan s G. Da li je H Eulerov graf? Obrazložite svoju tvrdnju.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.20.

Neka je G Eulerov graf i neka je graf H homeomorfan s G. Da li je H Eulerov graf? Obrazložite svoju tvrdnju.

Rješenje.

Sjetimo se, graf je Eulerov ako i samo ako je povezan i svi vrhovi su mu parnog stupnja. Kako je G Eulerov graf, tada je on povezan i svi njegovi vrhovi su parnog stupnja. Nadalje, H je homeomorfan s G pa ta dva grafa za svaki $k \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ moraju imati isti broj vrhova stupnja k. Kako graf G nema niti jedan vrh neparnog stupnja, tada niti graf H nema niti jedan vrh neparnog stupnja iz čega slijedi da je H Eulerov graf (H je također povezan jer je homeomorfan s povezanim grafom G). Dakle, homeomorfizam grafova čuva Eulerove grafove.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.21.

Neka je G Hamiltonov graf i neka je graf H homeomorfan s G. Da li je H Hamiltonov graf? Obrazložite svoju tvrdnju.

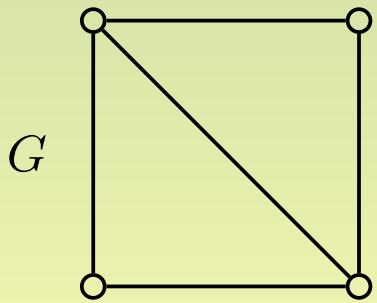
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

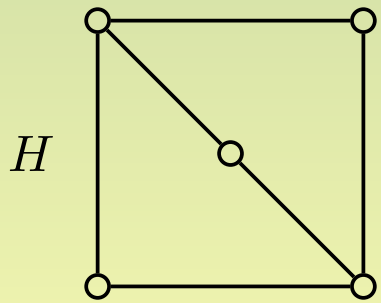
Primjer 10.21.

Neka je G Hamiltonov graf i neka je graf H homeomorfan s G. Da li je H Hamiltonov graf? Obrazložite svoju tvrdnju.

Rješenje.

Graf H općenito ne mora biti Hamiltonov graf. Na donjoj slici su prikazana dva homeomorfna grafa G i H pri čemu G jest Hamiltonov graf, a H nije Hamiltonov graf. Dakle, homeomorfizam grafova ne čuva Hamiltonove grafove.





Sada konačno možemo izreći jednu karakterizaciju planarnih grafova koja se temelji na pojmu homeomorfnih grafova. Kao što smo već rekli, ako graf ima podgraf izomorfan s K_5 ili $K_{3,3}$, tada taj graf sigurno nije planarni. Međutim, obrat ne vrijedi. Ako graf nije planarni, tada on ne mora sadržavati podgraf izomorfan s K_5 ili $K_{3,3}$, ali sigurno sadrži podgraf homeomorfan s nekim od ta dva grafa. O tome govori sljedeći fantastični teorem kojeg navodimo bez dokaza.

Teorem 10.5 (Kuratowski, 1930.).

Graf G je planarni akko ne sadrži podgraf homeomorfan s K_5 ili $K_{3,3}$.

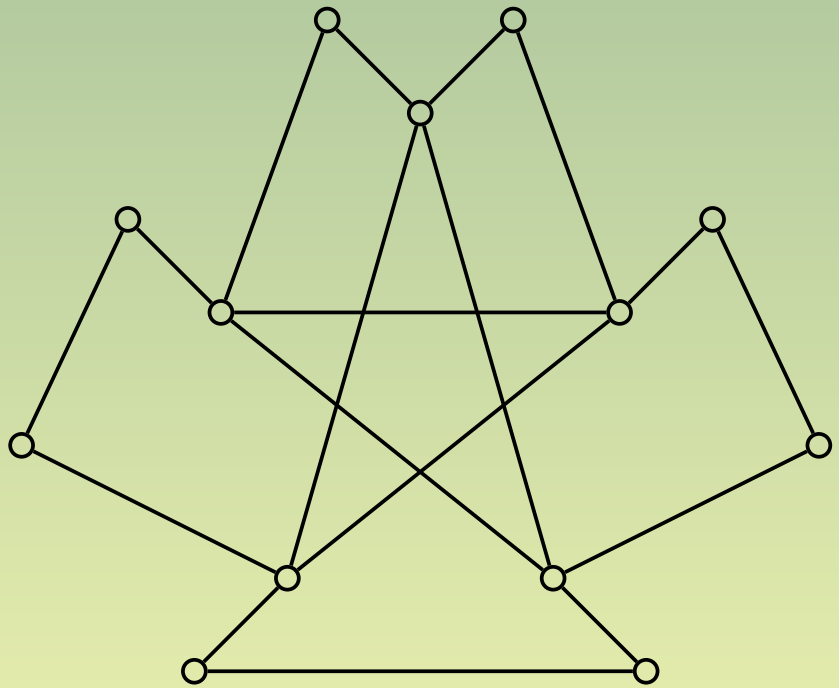
Ostanite nekoliko minuta na ovom slajdu i uživajte u ovom divnom teoremu.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.22.

Da li je graf G planarni? Dokažite svoju tvrdnju.

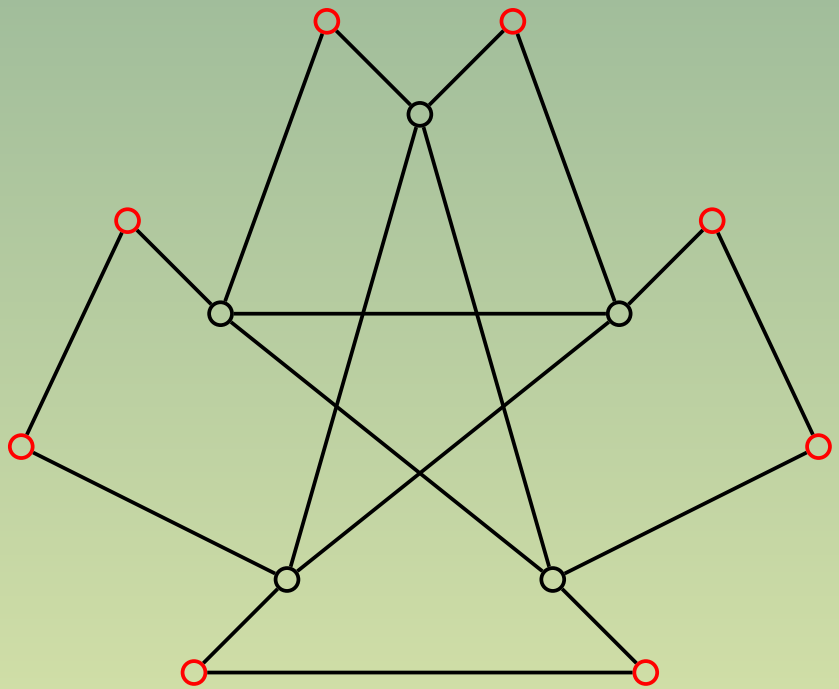


Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Rješenje.

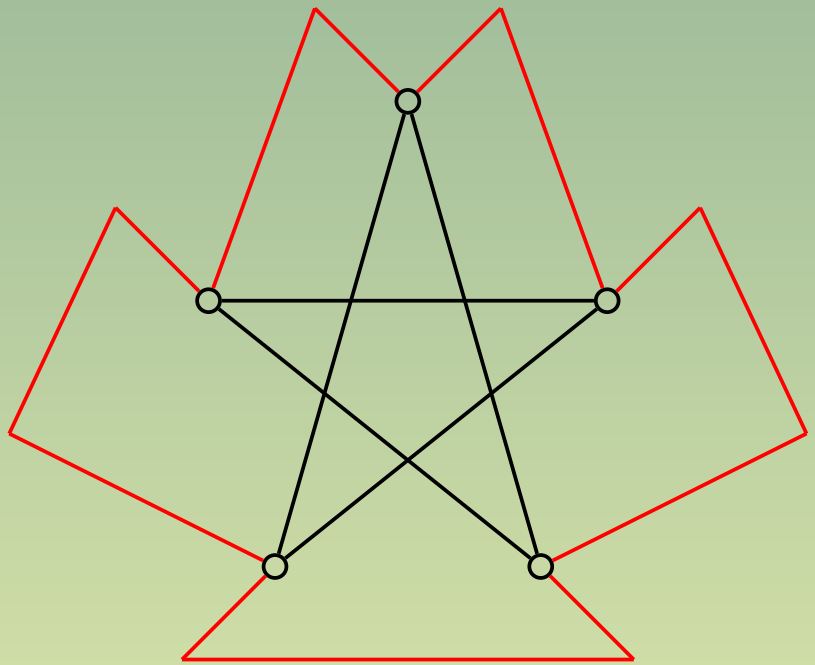
Tvrdimo da graf G nije planarni, a da bismo to dokazali, koristit ćemo ◂ teorem Kuratowskog. Prema tom teoremu dovoljno je dokazati da graf G sadrži podgraf koji je homeomorfan s K_5 ili $K_{3,3}$. Pokazat ćemo da graf G sadrži podgraf homeomorfan s K_5, a taj podgraf će zapravo biti čitav graf G. Drugim riječima, pokazat ćemo da je graf G homeomorfan s K_5 iz čega će onda slijediti da G nije planarni graf. Uočite da graf G, iako nije planarni, ne sadrži podgraf izomorfan s K_5 ili $K_{3,3}$, ali sadrži podgraf homeomorfan s K_5.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



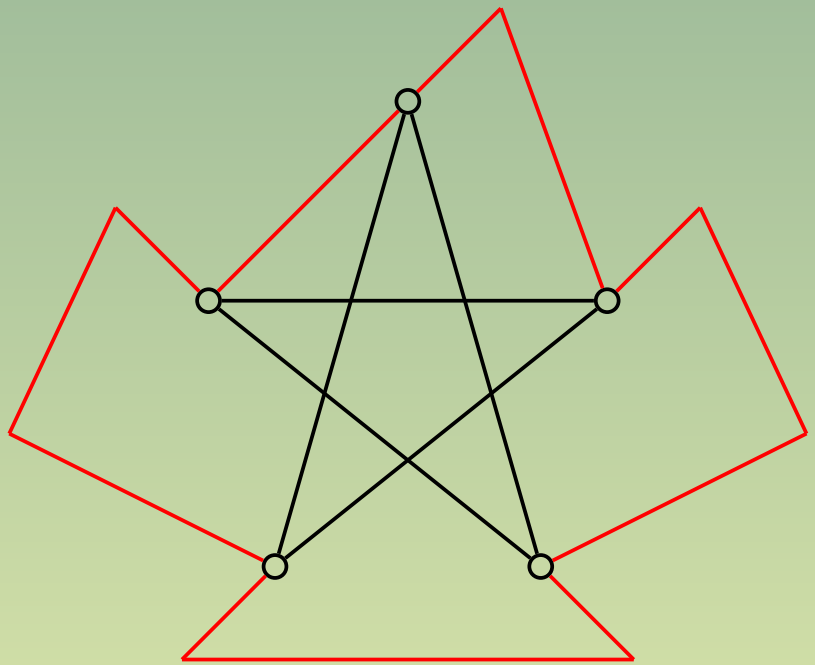
Pogledajmo crvene vrhove na grafu G. To su vrhovi stupnja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



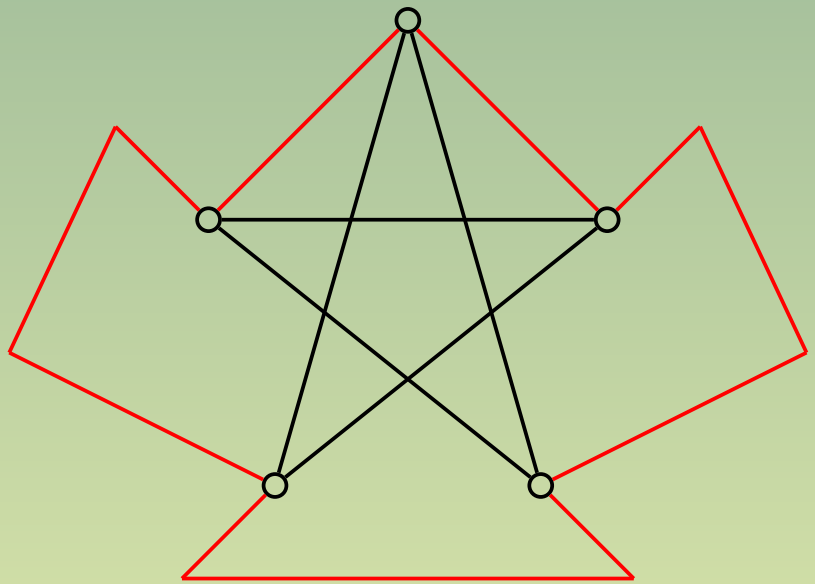
Pogledajmo crvene vrhove na grafu G. To su vrhovi stupnja 2. Uklonimo li te vrhove, dobivamo pet crvenih bridova koje možemo nacrtati u obliku dužina.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



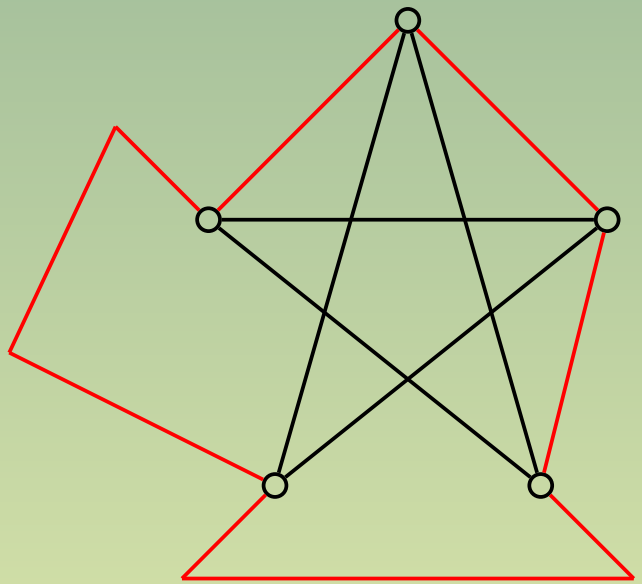
Pogledajmo crvene vrhove na grafu G. To su vrhovi stupnja 2. Uklonimo li te vrhove, dobivamo pet crvenih bridova koje možemo nacrtati u obliku dužina.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



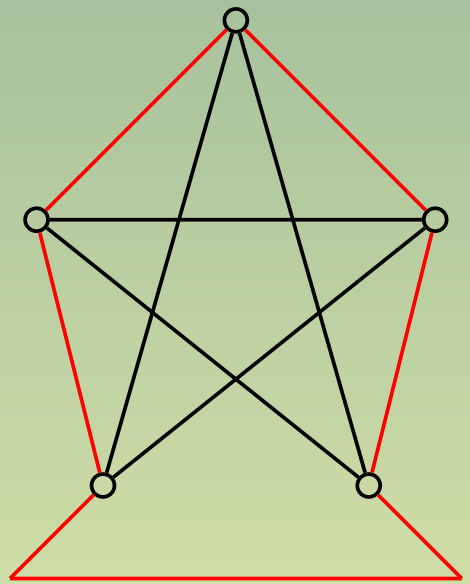
Pogledajmo crvene vrhove na grafu G. To su vrhovi stupnja 2. Uklonimo li te vrhove, dobivamo pet crvenih bridova koje možemo nacrtati u obliku dužina.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



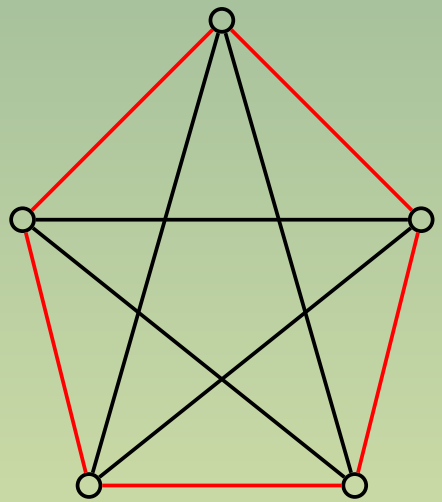
Pogledajmo crvene vrhove na grafu G. To su vrhovi stupnja 2. Uklonimo li te vrhove, dobivamo pet crvenih bridova koje možemo nacrtati u obliku dužina.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



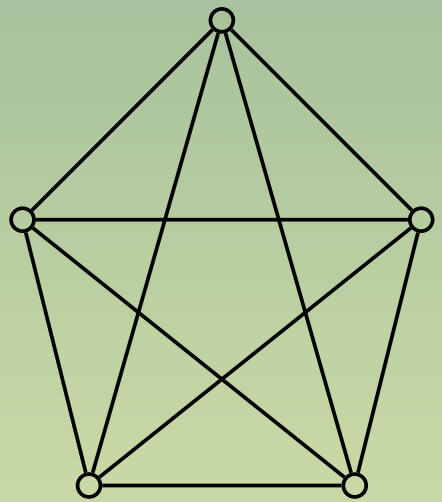
Pogledajmo crvene vrhove na grafu G. To su vrhovi stupnja 2. Uklonimo li te vrhove, dobivamo pet crvenih bridova koje možemo nacrtati u obliku dužina.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Pogledajmo crvene vrhove na grafu G. To su vrhovi stupnja 2. Uklonimo li te vrhove, dobivamo pet crvenih bridova koje možemo nacrtati u obliku dužina.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

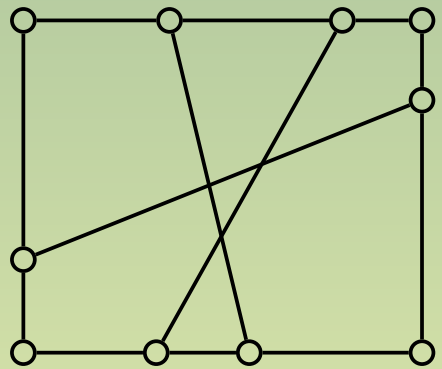


Pogledajmo crvene vrhove na grafu G. To su vrhovi stupnja 2. Uklonimo li te vrhove, dobivamo pet crvenih bridova koje možemo nacrtati u obliku dužina. Uočavamo da smo dobili potpuni graf K_5. Dakle, G je homeomorfan s K_5 pa stoga G nije planarni graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.23.

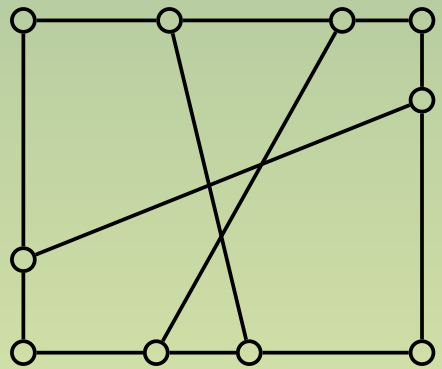
Da li je graf G planarni? Dokažite svoju tvrdnju.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.23.

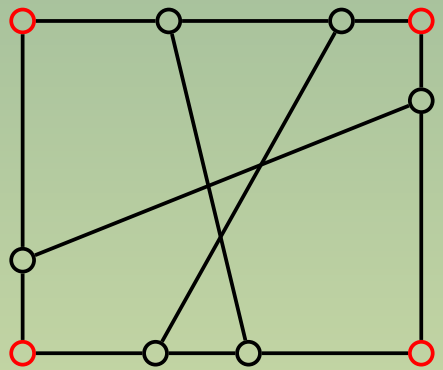
Da li je graf G planarni? Dokažite svoju tvrdnju.



Rješenje.

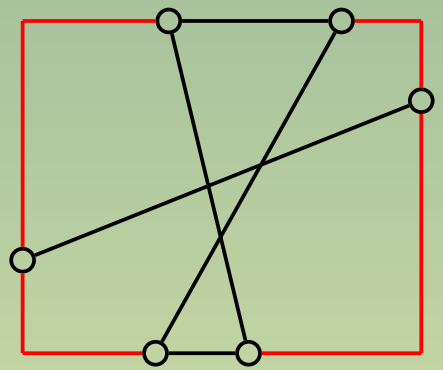
Dokazat ćemo da je graf G homeomorfan s $K_{3,3}$, iz čega će prema ◂ teoremu Kuratowskog slijediti da G nije planarni graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



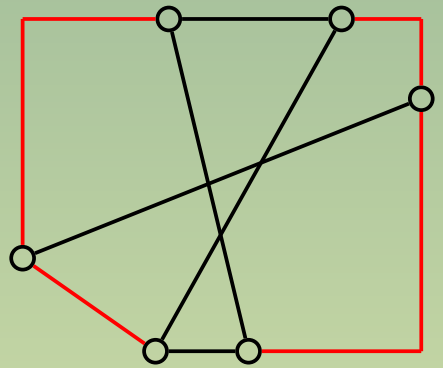
Pogledajmo crvene vrhove na grafu G. To su vrhovi stupnja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



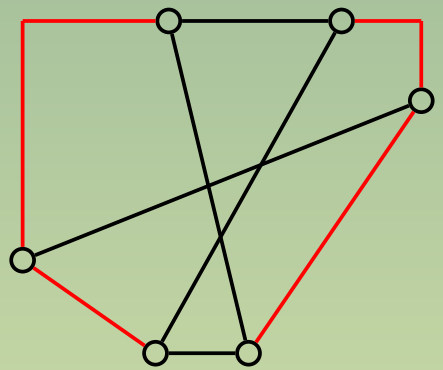
Pogledajmo crvene vrhove na grafu G. To su vrhovi stupnja 2. Uklonimo li te vrhove, dobivamo četiri crvena brida koje možemo nacrtati u obliku dužina.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



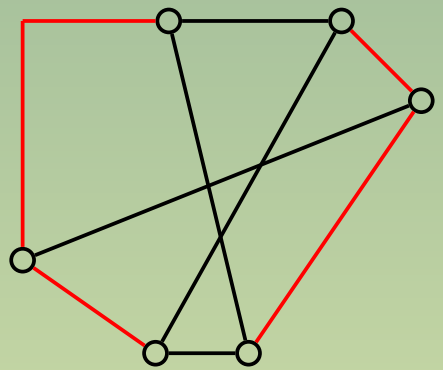
Pogledajmo crvene vrhove na grafu G. To su vrhovi stupnja 2. Uklonimo li te vrhove, dobivamo četiri crvena brida koje možemo nacrtati u obliku dužina.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



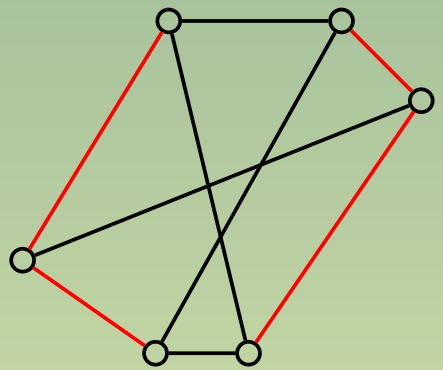
Pogledajmo crvene vrhove na grafu G. To su vrhovi stupnja 2. Uklonimo li te vrhove, dobivamo četiri crvena brida koje možemo nacrtati u obliku dužina.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



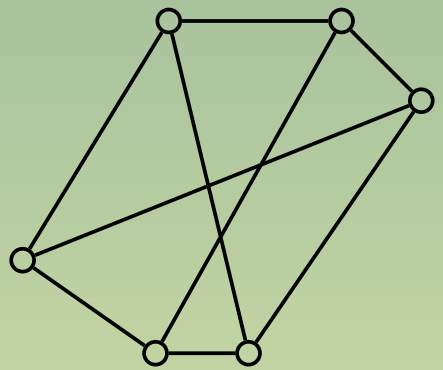
Pogledajmo crvene vrhove na grafu G. To su vrhovi stupnja 2. Uklonimo li te vrhove, dobivamo četiri crvena brida koje možemo nacrtati u obliku dužina.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



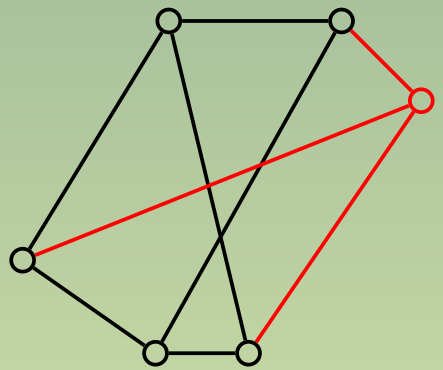
Pogledajmo crvene vrhove na grafu G. To su vrhovi stupnja 2. Uklonimo li te vrhove, dobivamo četiri crvena brida koje možemo nacrtati u obliku dužina.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



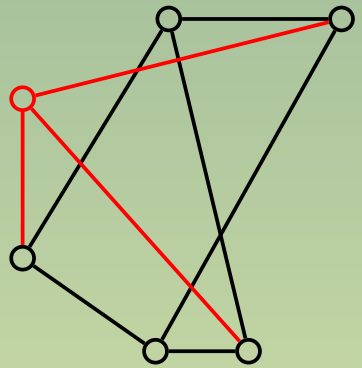
Pogledajmo crvene vrhove na grafu G. To su vrhovi stupnja 2. Uklonimo li te vrhove, dobivamo četiri crvena brida koje možemo nacrtati u obliku dužina. Dobili smo zapravo graf $K_{3,3}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



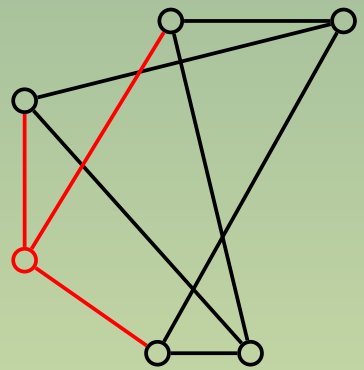
Da bismo se u to uvjerili, pomaknimo crveni vrh

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



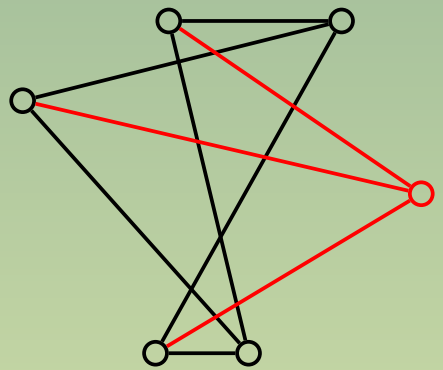
Da bismo se u to uvjerili, pomaknimo crveni vrh na lijevu stranu.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



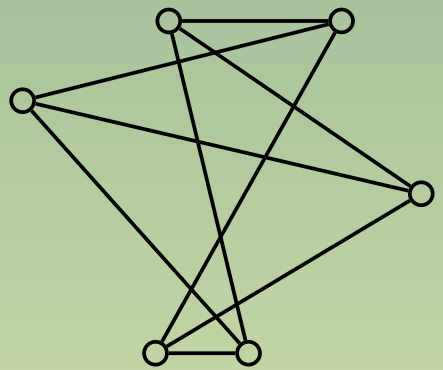
Nadalje, sljedeći crveno označeni vrh

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



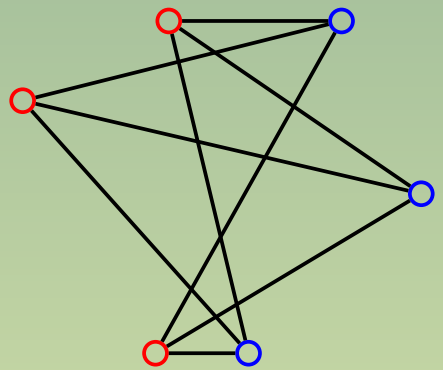
Nadalje, sljedeći crveno označeni vrh pomaknimo na desnu stranu.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



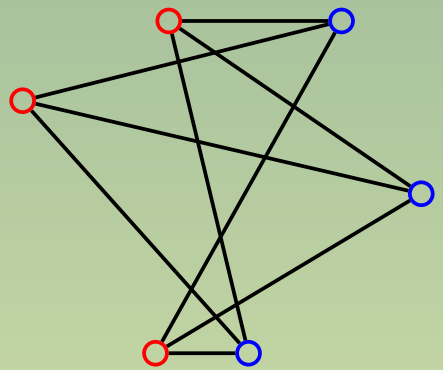
Sada se jasno vidi da je dobiveni graf zaista $K_{3,3}$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Sada se jasno vidi da je dobiveni graf zaista $K_{3,3}$ jer crveni vrhovi pripadaju jednom skupu, a plavi drugom skupu biparticije i svaki od vrhova je stupnja 3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

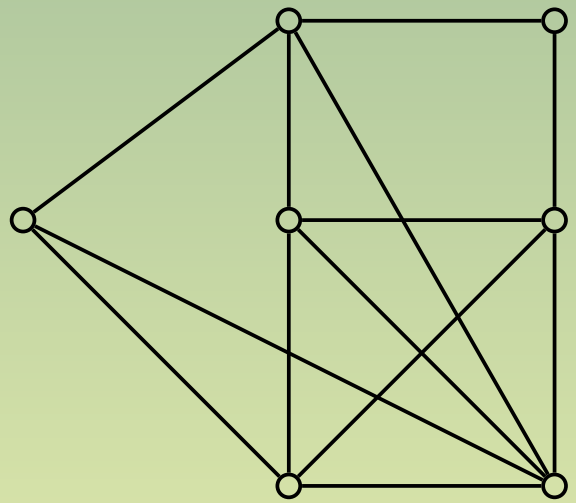


Sada se jasno vidi da je dobiveni graf zaista $K_{3,3}$ jer crveni vrhovi pripadaju jednom skupu, a plavi drugom skupu biparticije i svaki od vrhova je stupnja 3. Dakle, zadani graf G je homeomorfan s $K_{3,3}$ pa prema teoremu Kuratowskog G nije planarni graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.24.

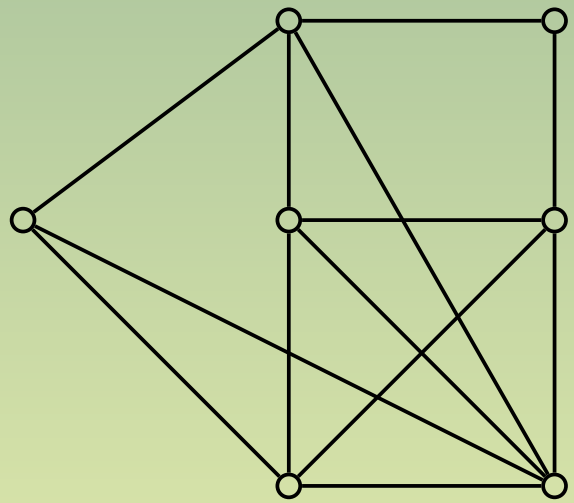
Da li je graf G planarni? Dokažite svoju tvrdnju.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.24.

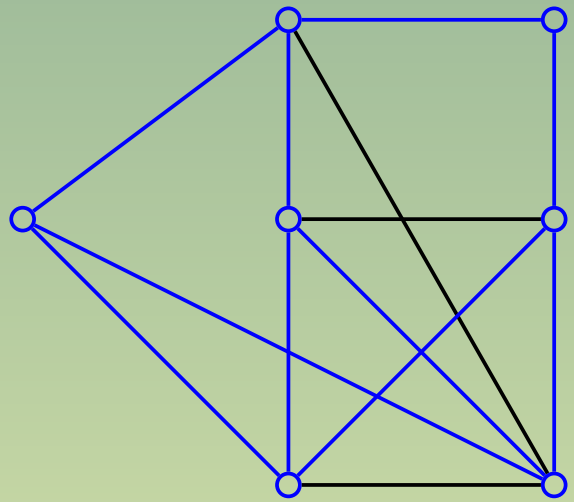
Da li je graf G planarni? Dokažite svoju tvrdnju.



Rješenje.

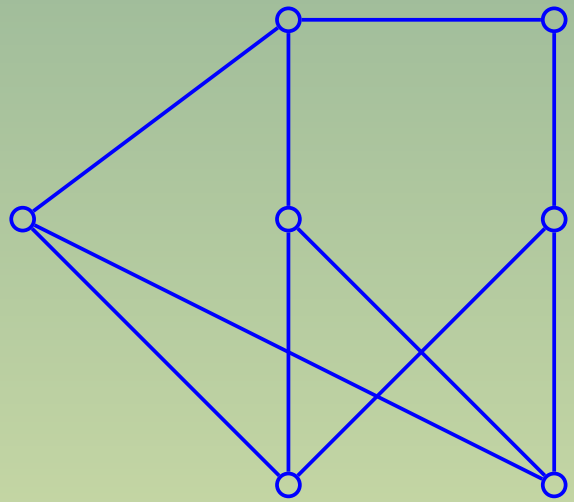
Dokazat ćemo da graf G sadrži podgraf homeomorfan s $K_{3,3}$, iz čega će prema ◂ teoremu Kuratowskog slijediti da G nije planarni graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



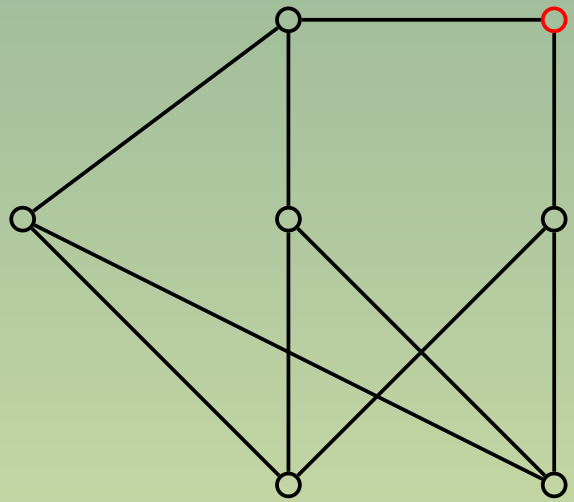
Uočimo podgraf od G čiji su vrhovi i bridovi obojani plavom bojom.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



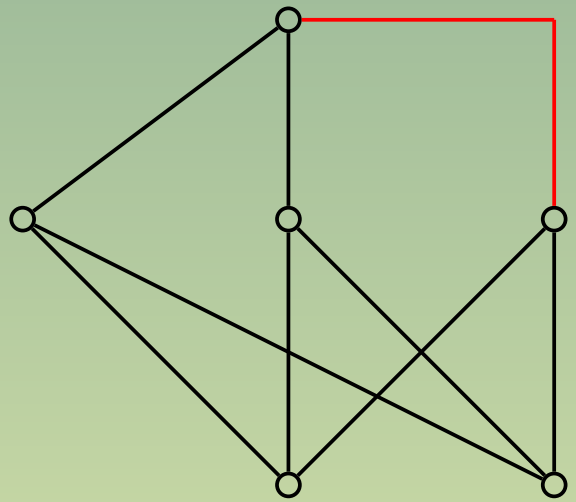
Uočimo podgraf od G čiji su vrhovi i bridovi obojani plavom bojom. Pokazat ćemo da je taj podgraf homeomorfan s $K_{3,3}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



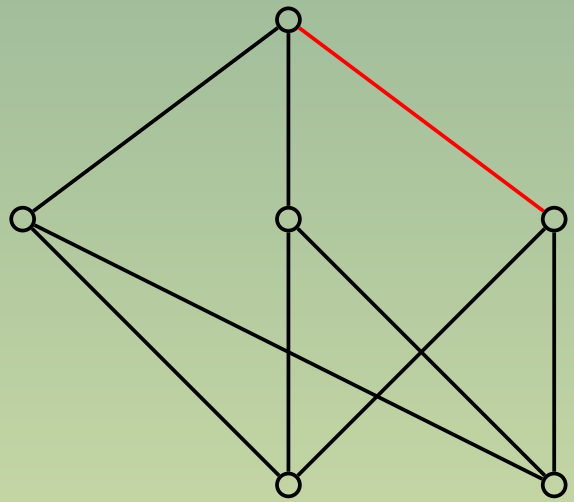
Pogledajmo crveni vrh na promatranom podgrafu. To je vrh stupnja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



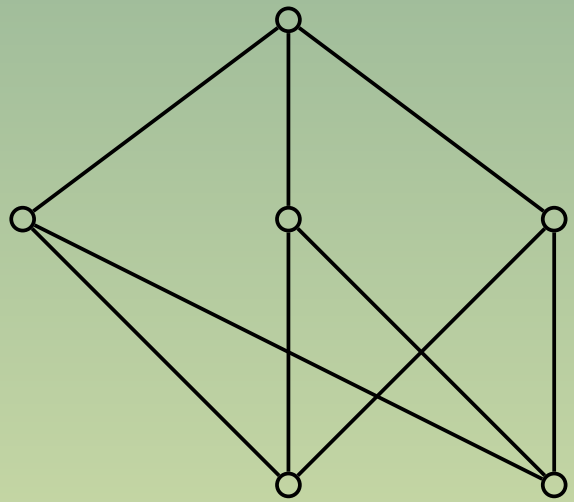
Pogledajmo crveni vrh na promatranom podgrafu. To je vrh stupnja 2. Uklonimo li taj vrh, dobiveni crveni brid

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



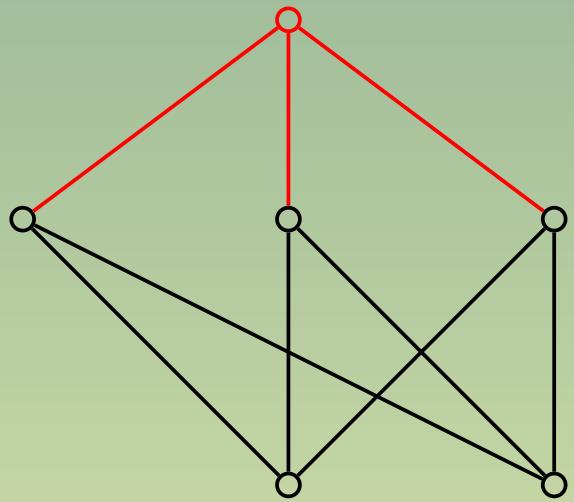
Pogledajmo crveni vrh na promatranom podgrafu. To je vrh stupnja 2. Uklonimo li taj vrh, dobiveni crveni brid možemo nacrtati u obliku dužine.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



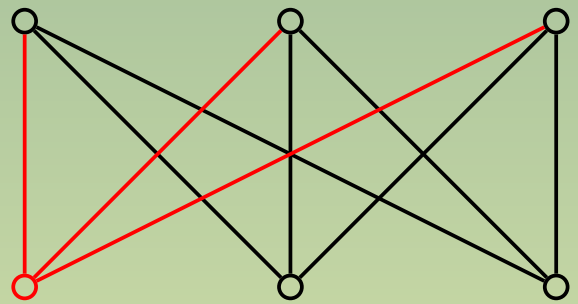
Pogledajmo crveni vrh na promatranom podgrafu. To je vrh stupnja 2. Uklonimo li taj vrh, dobiveni crveni brid možemo nacrtati u obliku dužine. Na taj način smo dobili graf $K_{3,3}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



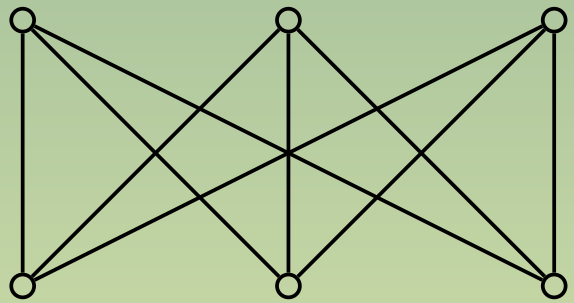
Da bismo se u to bolje uvjerili, pomaknimo crveno označeni vrh

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



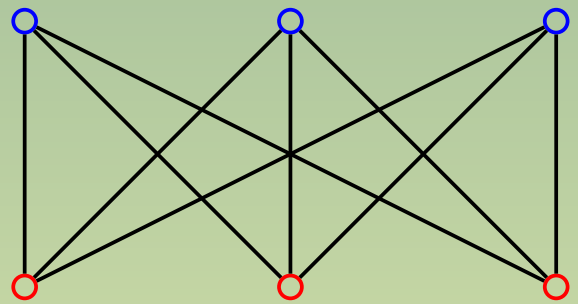
Da bismo se u to bolje uvjerili, pomaknimo crveno označeni vrh lijevo prema dolje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



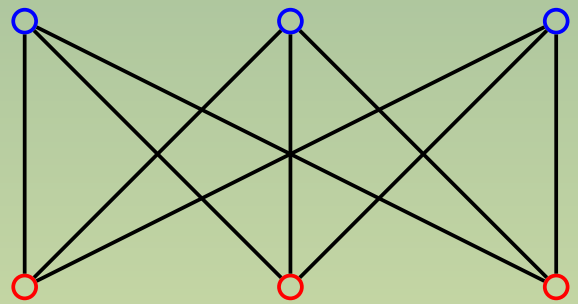
Sada nam je puno jasnije da se zaista radi o grafu $K_{3,3}$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Sada nam je puno jasnije da se zaista radi o grafu $K_{3,3}$ jer crveni vrhovi pripadaju jednom skupu, a plavi drugom skupu biparticije i svaki od vrhova je stupnja 3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

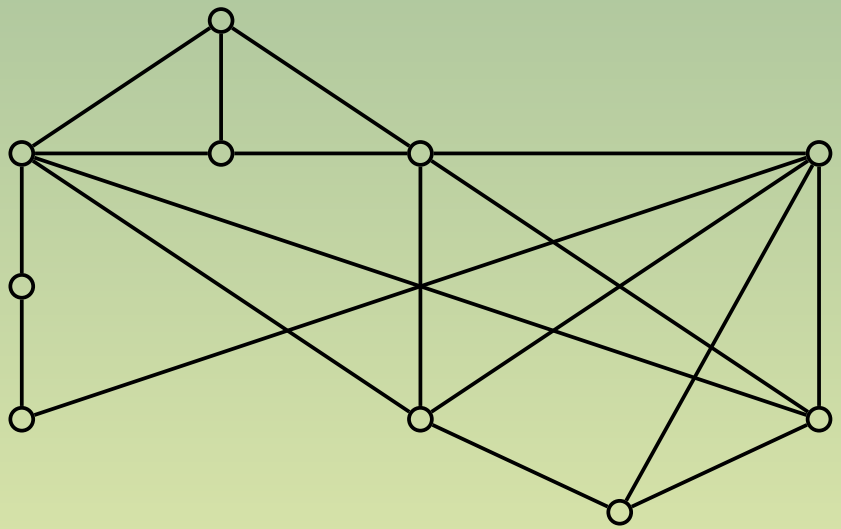


Sada nam je puno jasnije da se zaista radi o grafu $K_{3,3}$ jer crveni vrhovi pripadaju jednom skupu, a plavi drugom skupu biparticije i svaki od vrhova je stupnja 3. Dakle, zadani graf G sadrži podgraf homeomorfan s $K_{3,3}$ pa prema teoremu Kuratowskog graf G nije planarni graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.25.

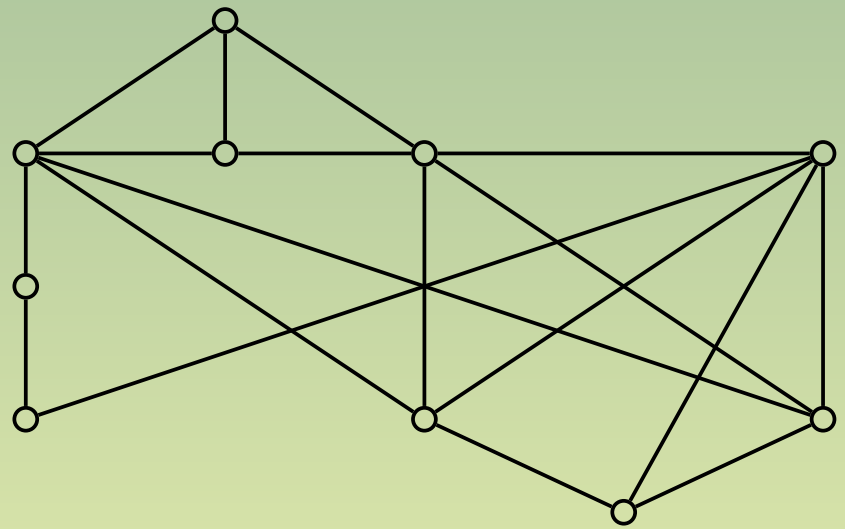
Da li je graf G planarni? Dokažite svoju tvrdnju.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.25.

Da li je graf G planarni? Dokažite svoju tvrdnju.



Rješenje.

Dokazat ćemo da graf G sadrži podgraf homeomorfan s K_5, iz čega će prema ◂ teoremu Kuratowskog slijediti da G nije planarni graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

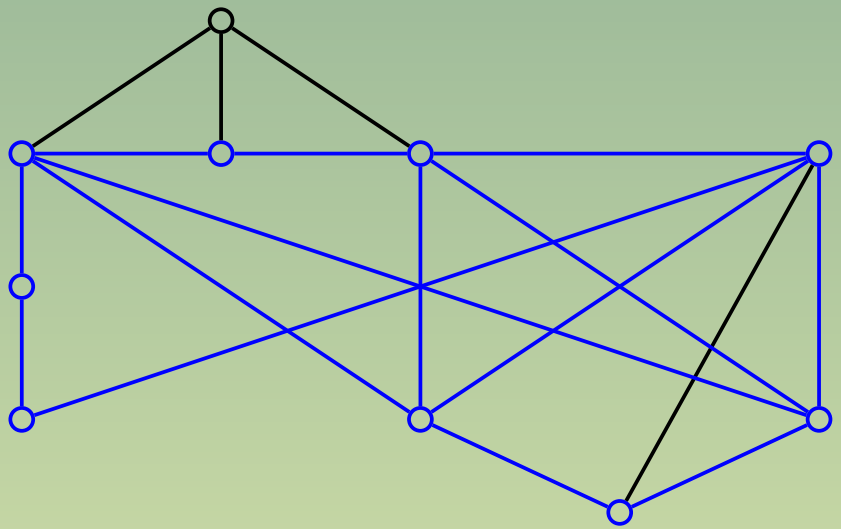
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

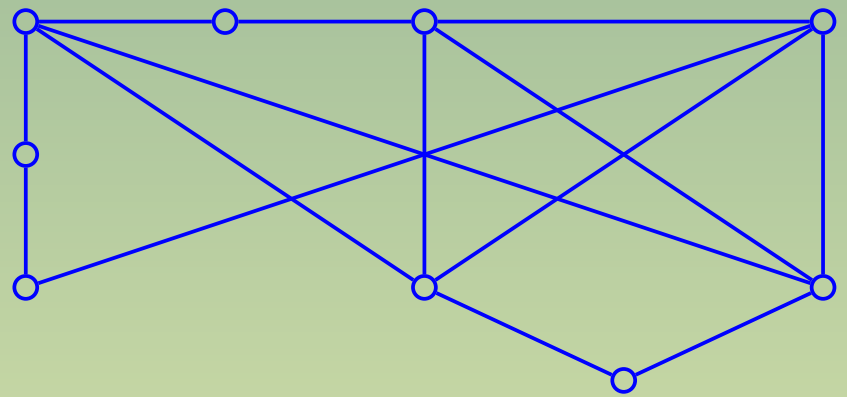
Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



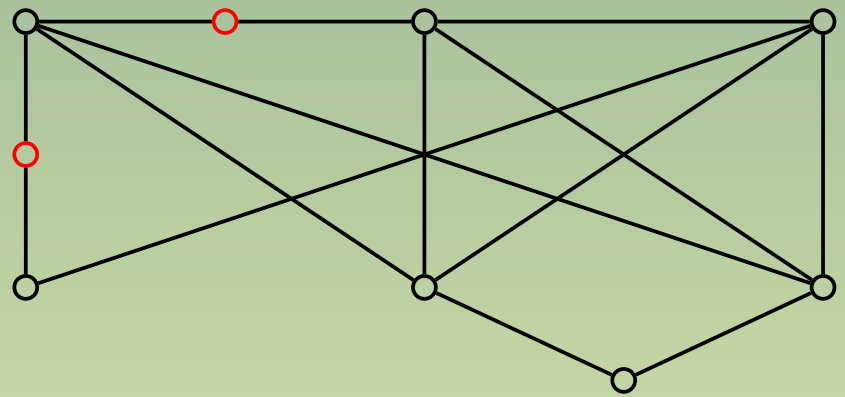
Uočimo podgraf od G čiji su vrhovi i bridovi obojani plavom bojom.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



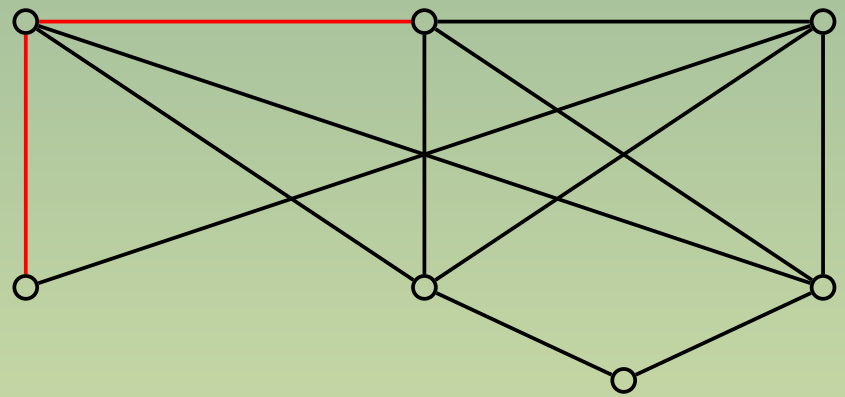
Uočimo podgraf od G čiji su vrhovi i bridovi obojani plavom bojom. Pokazat ćemo da je taj podgraf homeomorfan s K_5.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



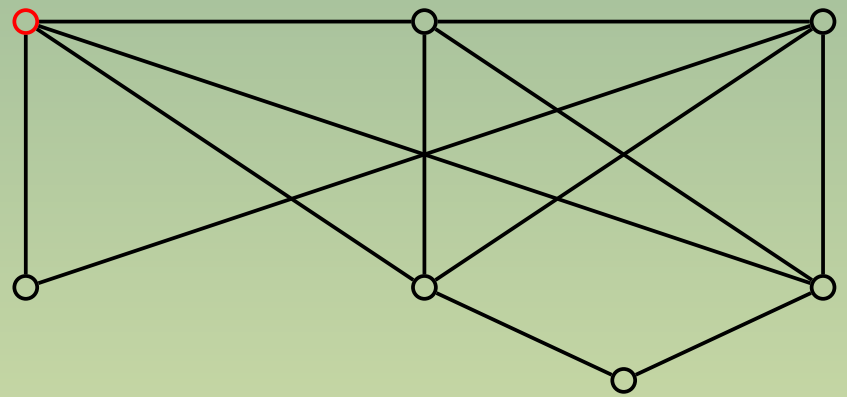
Krenimo polako. Uočimo najprije dva crveno označena vrha u promatranom podgrafu koji su stupnja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



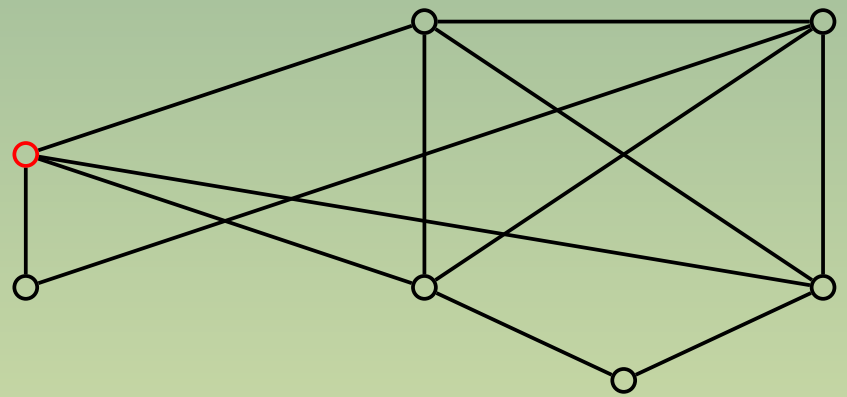
Krenimo polako. Uočimo najprije dva crveno označena vrha u promatranom podgrafu koji su stupnja 2. Uklonimo li ta dva vrha, od četiri stara brida dobivamo samo dva nova crvena brida.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



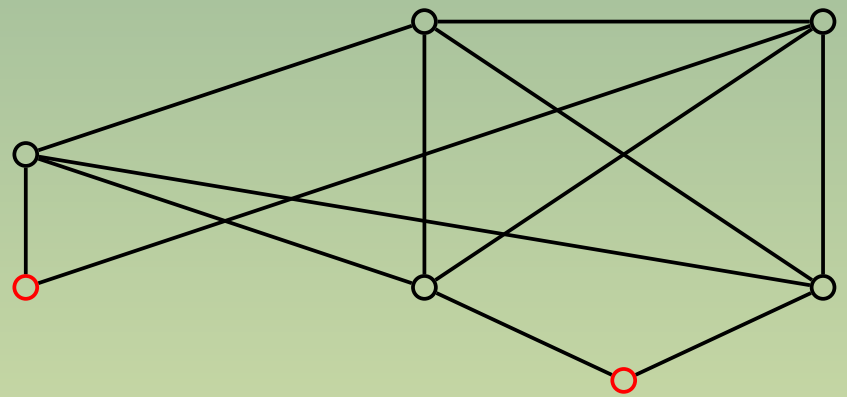
Prije nego krenemo dalje, pomaknimo crveno označeni vrh

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



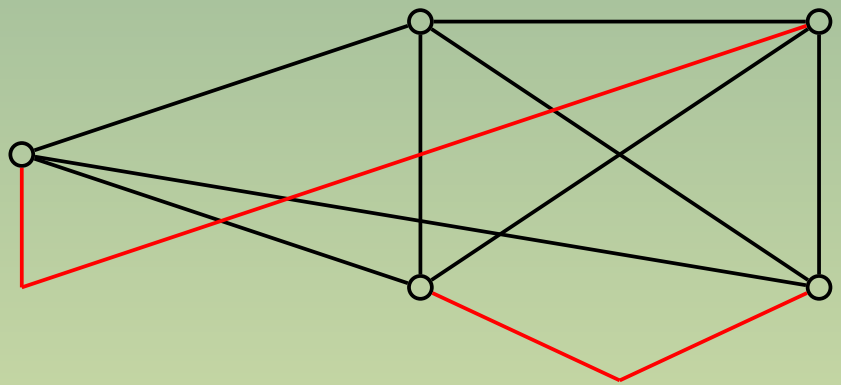
Prije nego krenemo dalje, pomaknimo crveno označeni vrh malo prema dolje kako bismo u kasnijim koracima lakše nacrtali neke bridove.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



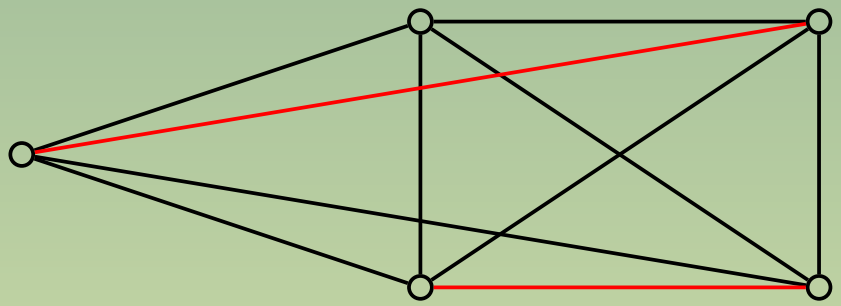
Uočimo opet dva crveno označena vrha u promatranom podgrafu. To su vrhovi stupnja 2 u tom podgrafu.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



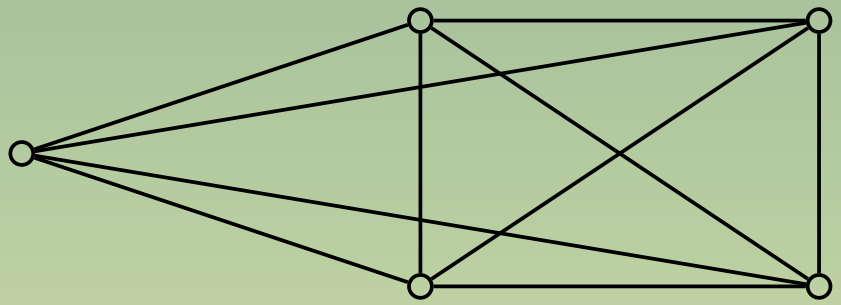
Uočimo opet dva crveno označena vrha u promatranom podgrafu. To su vrhovi stupnja 2 u tom podgrafu. Uklonimo li ta dva vrha, novonastale crvene bridove

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



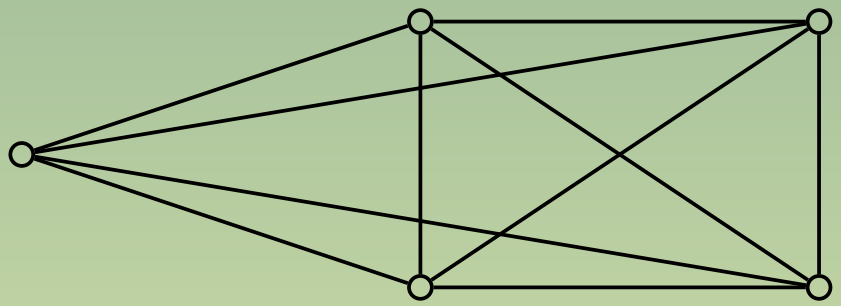
Uočimo opet dva crveno označena vrha u promatranom podgrafu. To su vrhovi stupnja 2 u tom podgrafu. Uklonimo li ta dva vrha, novonastale crvene bridove možemo nacrtati u obliku dužina.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Dobiveni graf ima 5 vrhova i svaki vrh je susjedan s preostalim vrhovima, što zapravo znači da smo dobili graf K_5.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

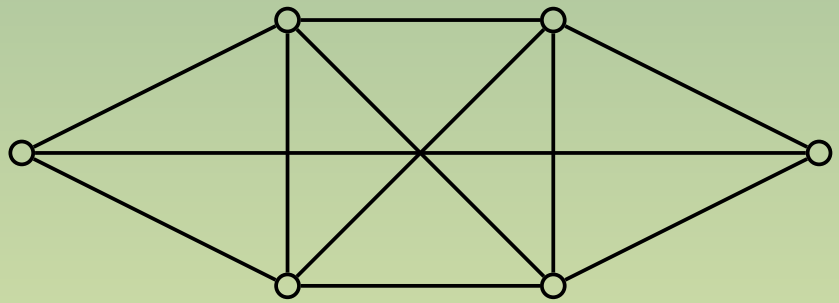


Dobiveni graf ima 5 vrhova i svaki vrh je susjedan s preostalim vrhovima, što zapravo znači da smo dobili graf K_5. Dakle, zadani graf G sadrži podgraf koji je homeomorfan s K_5 pa prema teoremu Kuratowskog G nije planarni graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.26.

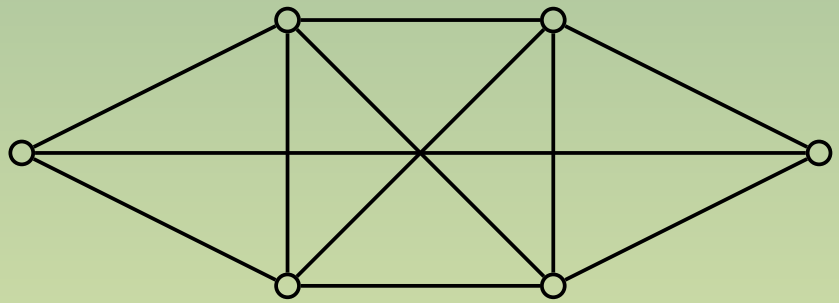
Da li je graf G planarni? Dokažite svoju tvrdnju.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.26.

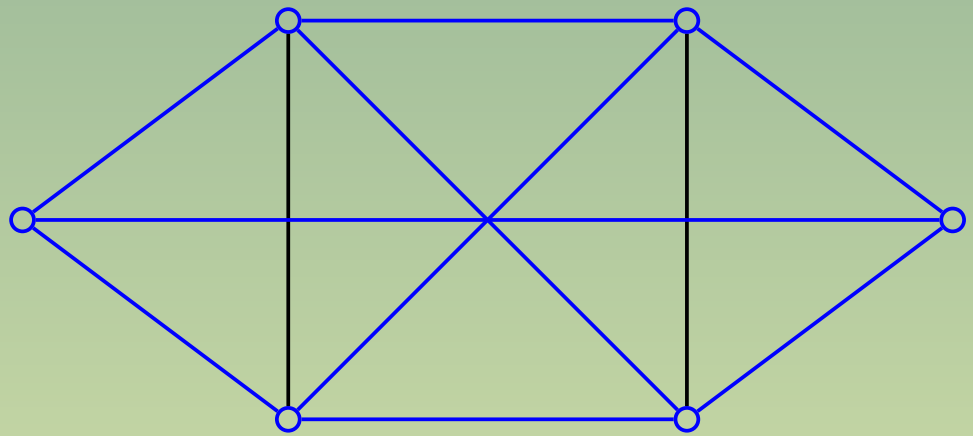
Da li je graf G planarni? Dokažite svoju tvrdnju.



Rješenje.

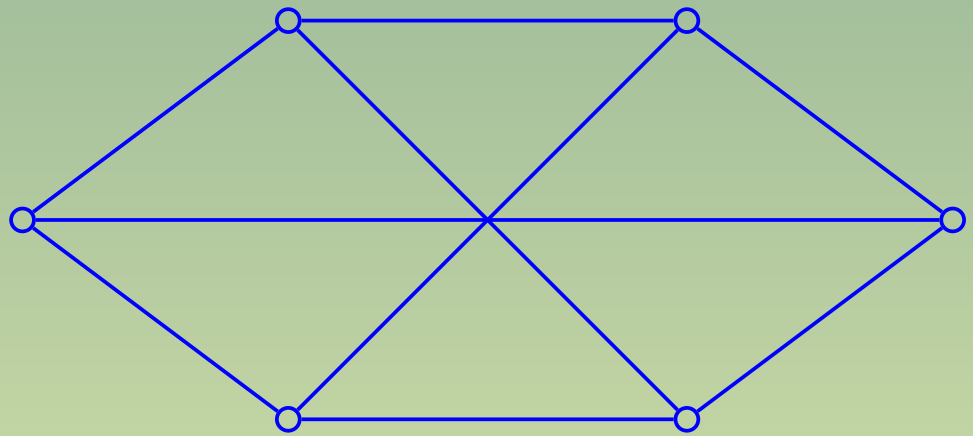
U ovom slučaju ćemo vidjeti da graf G sadrži podgraf izomorfan s $K_{3,3}$, iz čega će prema ◂ teoremu Kuratowskog slijediti da G nije planarni graf (izomorfni grafovi su također i homeomorfni, ali obrnuto ne vrijedi).

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



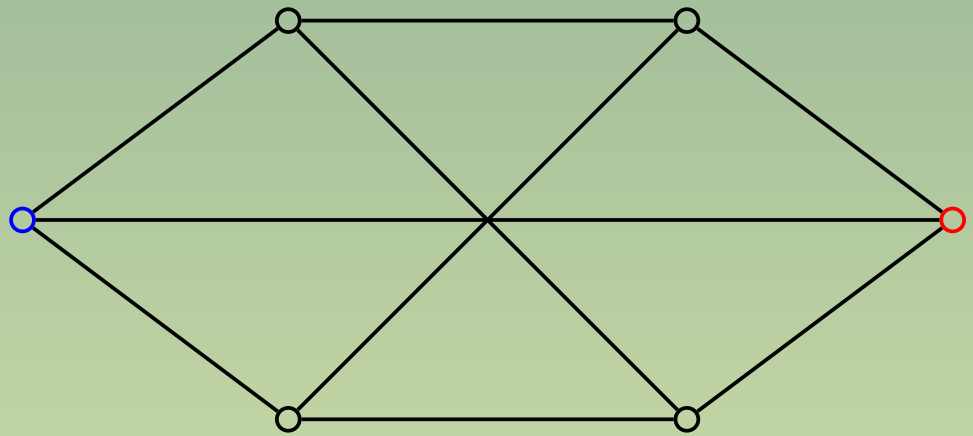
Uočimo podgraf od G čiji su vrhovi i bridovi obojani plavom bojom.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



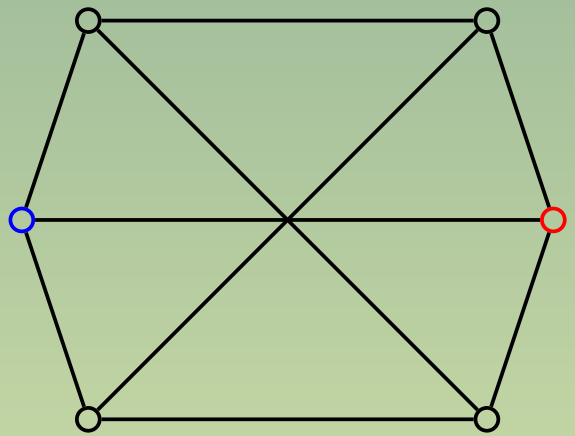
Uočimo podgraf od G čiji su vrhovi i bridovi obojani plavom bojom. Tvrdimo da je taj podgraf izomorfan s $K_{3,3}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



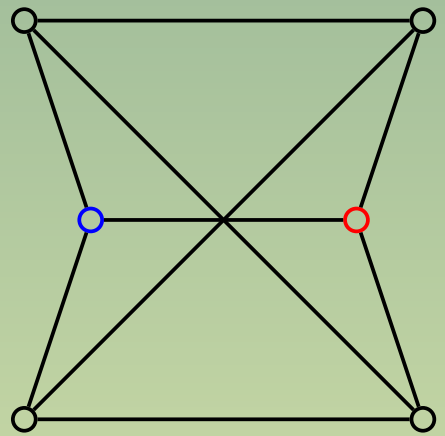
Da bismo se u to uvjerili, pomaknimo plavi vrh na desnu stranu, a crveni vrh na lijevu stranu.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



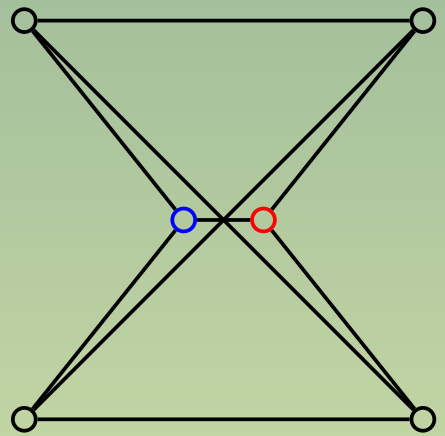
Da bismo se u to uvjerili, pomaknimo plavi vrh na desnu stranu, a crveni vrh na lijevu stranu.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



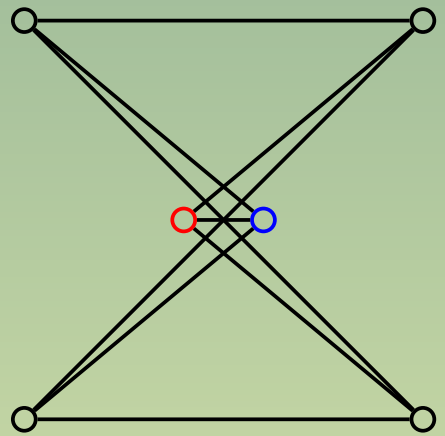
Da bismo se u to uvjerili, pomaknimo plavi vrh na desnu stranu, a crveni vrh na lijevu stranu.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



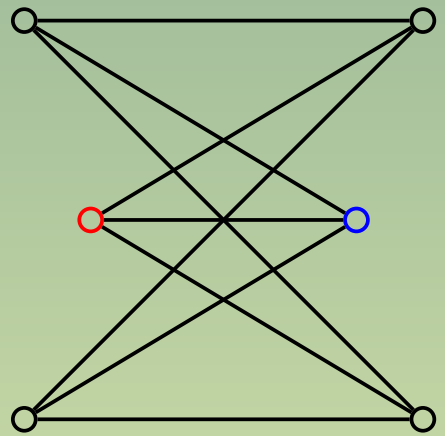
Da bismo se u to uvjerili, pomaknimo plavi vrh na desnu stranu, a crveni vrh na lijevu stranu.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



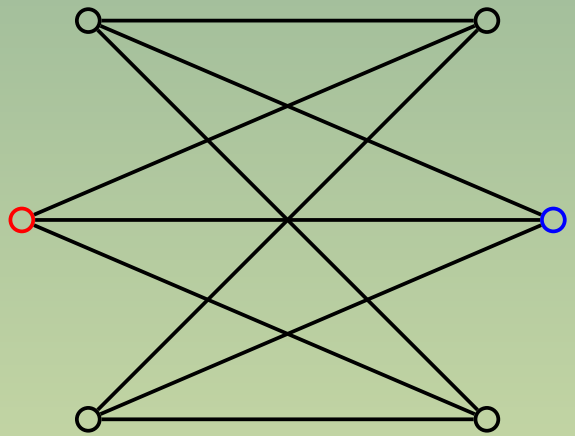
Da bismo se u to uvjerili, pomaknimo plavi vrh na desnu stranu, a crveni vrh na lijevu stranu.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



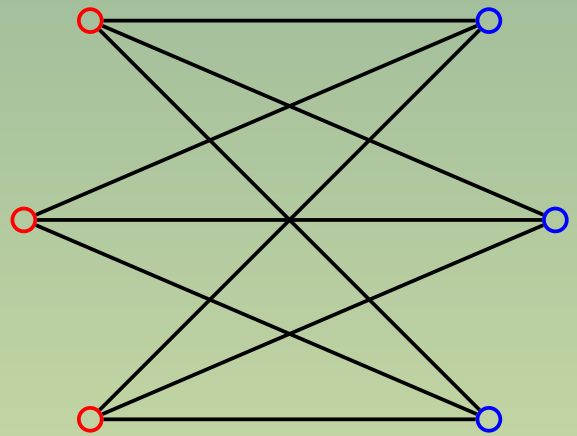
Da bismo se u to uvjerili, pomaknimo plavi vrh na desnu stranu, a crveni vrh na lijevu stranu.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



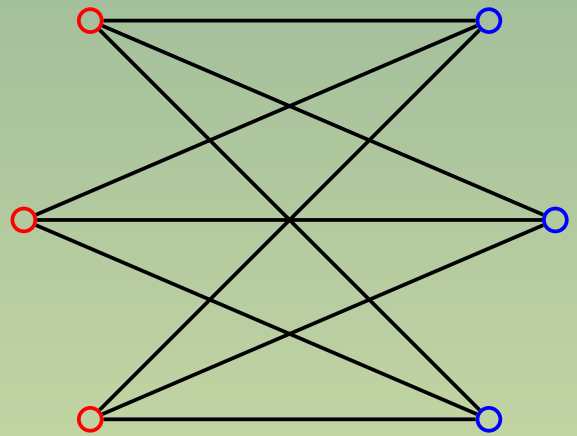
Da bismo se u to uvjerili, pomaknimo plavi vrh na desnu stranu, a crveni vrh na lijevu stranu.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Sada je jasno da se zaista radi o grafu $K_{3,3}$ jer crveni vrhovi pripadaju jednom skupu, a plavi vrhovi drugom skupu biparticije i svaki od vrhova je stupnja 3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Sada je jasno da se zaista radi o grafu $K_{3,3}$ jer crveni vrhovi pripadaju jednom skupu, a plavi vrhovi drugom skupu biparticije i svaki od vrhova je stupnja 3. Dakle, zadani graf G sadrži podgraf izomorfan s $K_{3,3}$ pa prema teoremu Kuratowskog G nije planarni graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.27.

Dokažite da Petersenov graf nije planarni graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

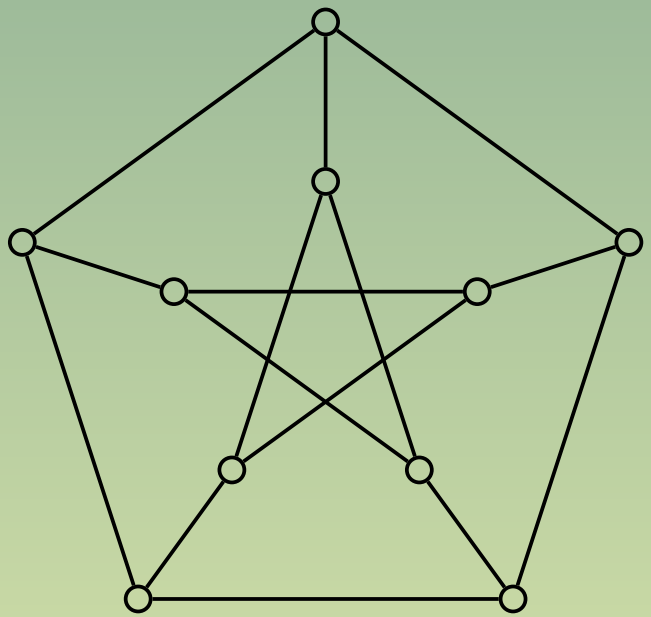
Primjer 10.27.

Dokažite da Petersenov graf nije planarni graf.

Rješenje.

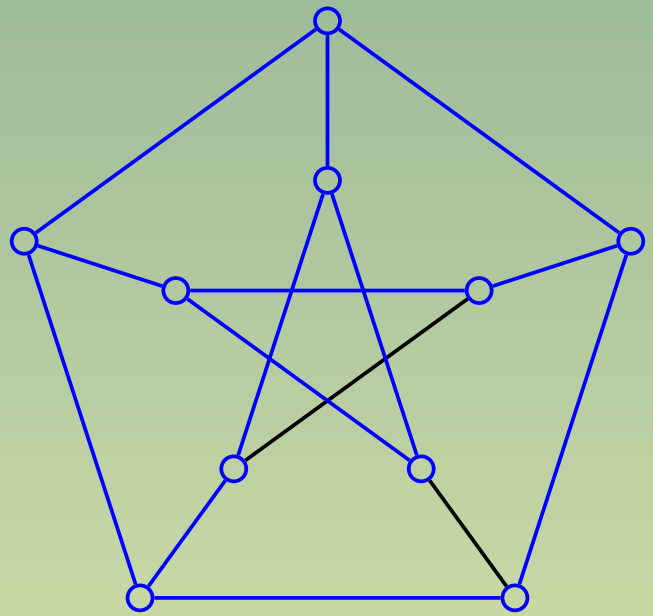
Već smo ranije pokazali u ◂ primjeru 10.14. da Petersenov graf nije planarni. Sada ćemo to pokazati na još jedan način u kojemu ćemo koristiti ◂ teorem Kuratowskog. Naime, pokazat ćemo da Petersenov graf sadrži podgraf homeomorfan s $K_{3,3}$ iz čega će slijediti da on nije planarni graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



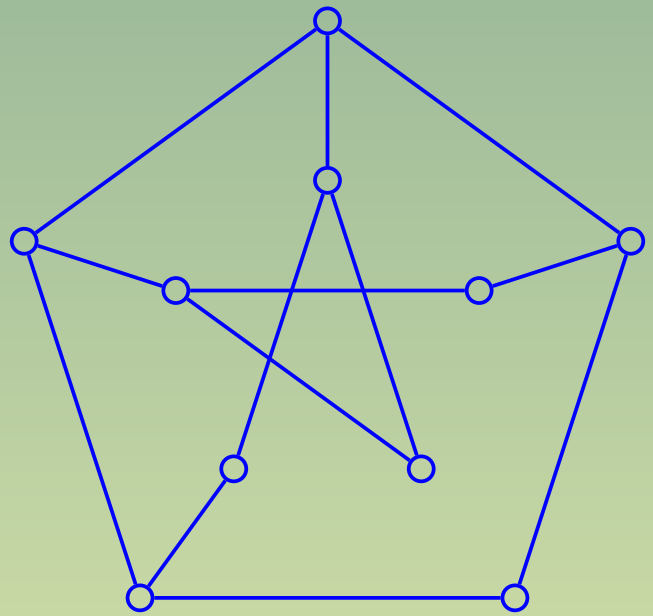
Na Petersenovom grafu

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



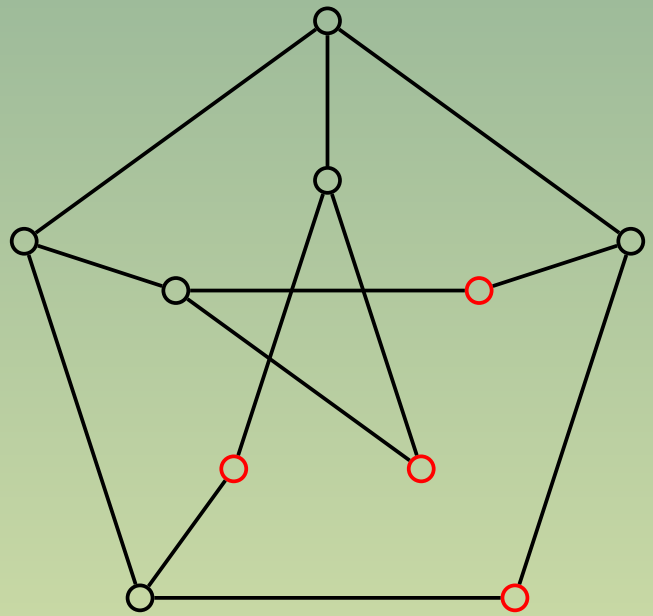
Na Petersenovom grafu uočimo podgraf čiji su vrhovi i bridovi obojani plavom bojom.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



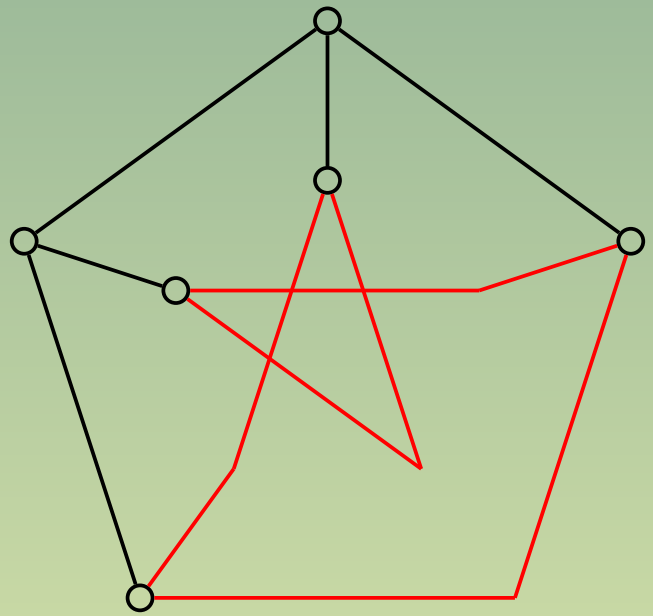
Na Petersenovom grafu uočimo podgraf čiji su vrhovi i bridovi obojani plavom bojom. Tvrdimo da je taj podgraf homeomorfan s $K_{3,3}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



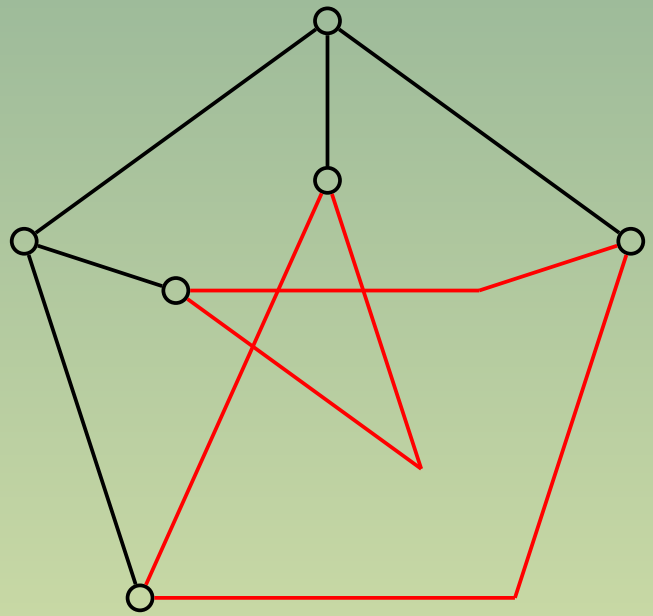
Pogledajmo crvene vrhove na promatranom podgrafu. To su vrhovi stupnja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



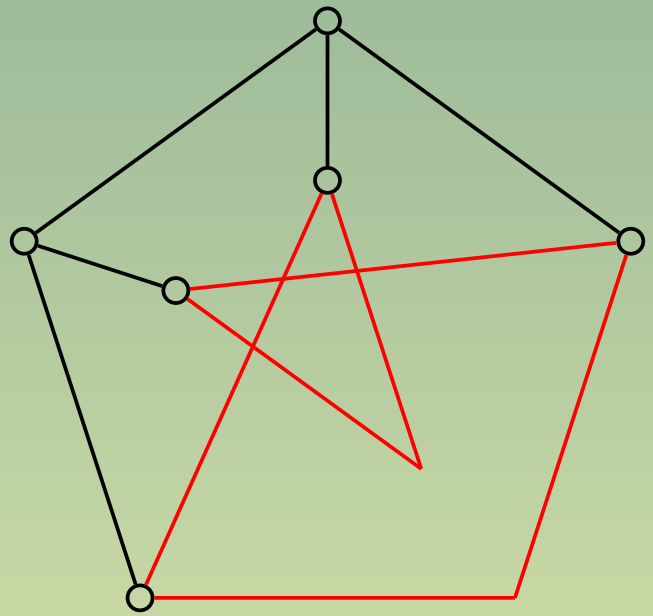
Pogledajmo crvene vrhove na promatranom podgrafu. To su vrhovi stupnja 2. Uklonimo li te vrhove, dobivene crvene bridove možemo nacrtati u obliku dužina.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



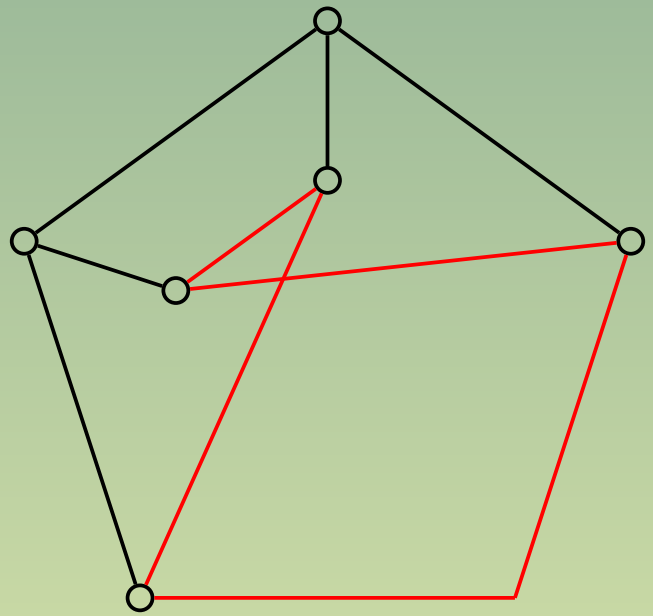
Pogledajmo crvene vrhove na promatranom podgrafu. To su vrhovi stupnja 2. Uklonimo li te vrhove, dobivene crvene bridove možemo nacrtati u obliku dužina.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



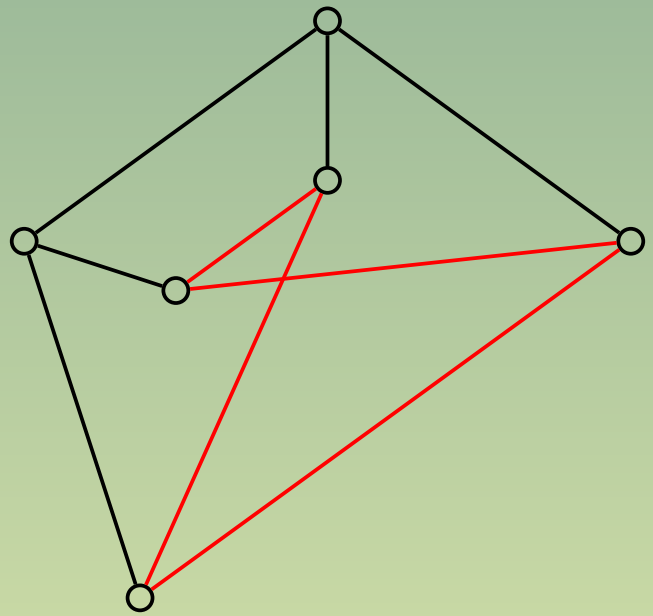
Pogledajmo crvene vrhove na promatranom podgrafu. To su vrhovi stupnja 2. Uklonimo li te vrhove, dobivene crvene bridove možemo nacrtati u obliku dužina.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



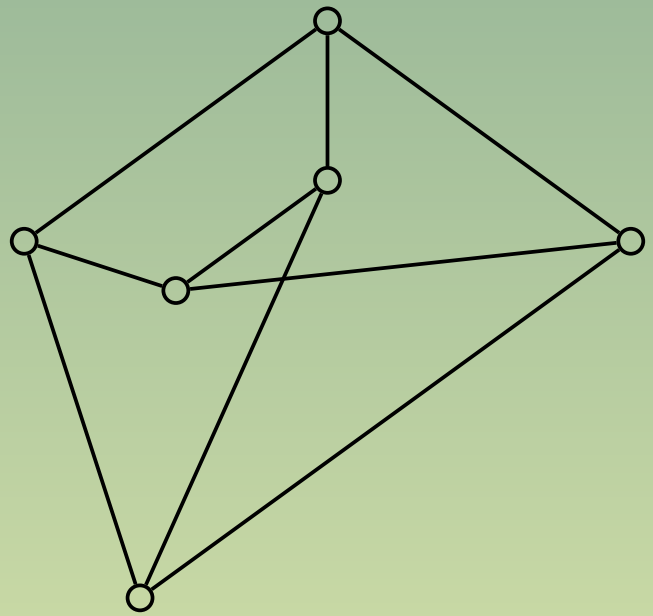
Pogledajmo crvene vrhove na promatranom podgrafu. To su vrhovi stupnja 2. Uklonimo li te vrhove, dobivene crvene bridove možemo nacrtati u obliku dužina.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



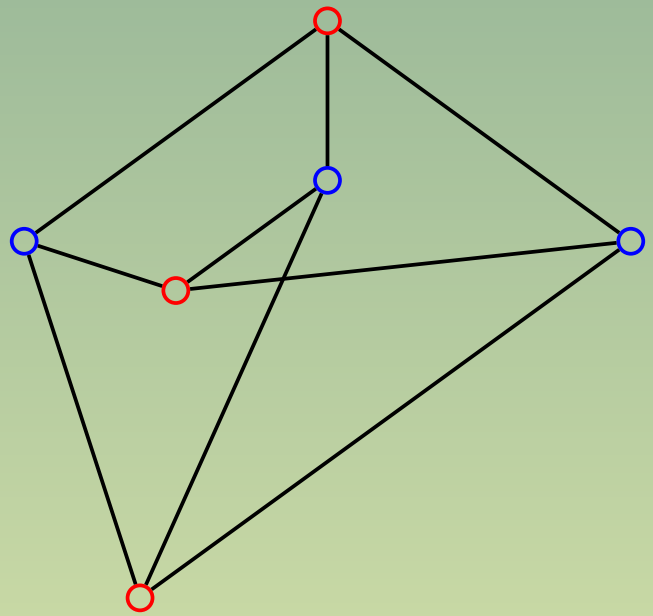
Pogledajmo crvene vrhove na promatranom podgrafu. To su vrhovi stupnja 2. Uklonimo li te vrhove, dobivene crvene bridove možemo nacrtati u obliku dužina.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



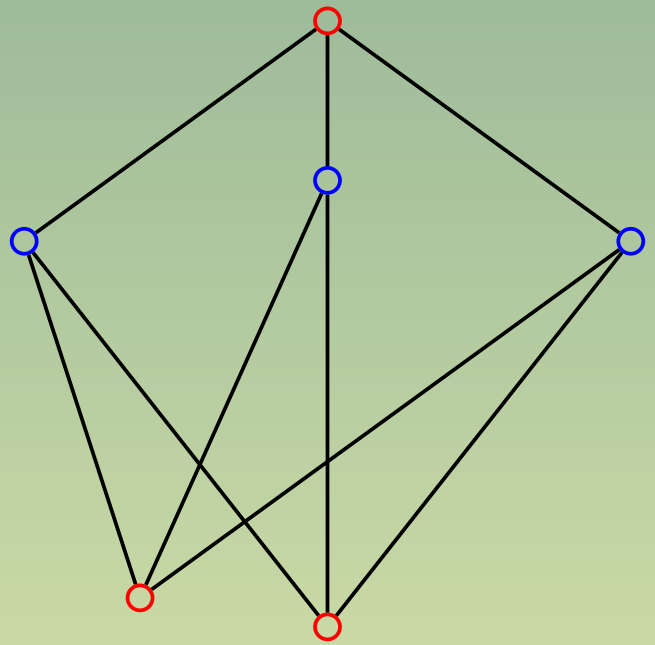
Pogledajmo crvene vrhove na promatranom podgrafu. To su vrhovi stupnja 2. Uklonimo li te vrhove, dobivene crvene bridove možemo nacrtati u obliku dužina. Dobiveni graf je $K_{3,3}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



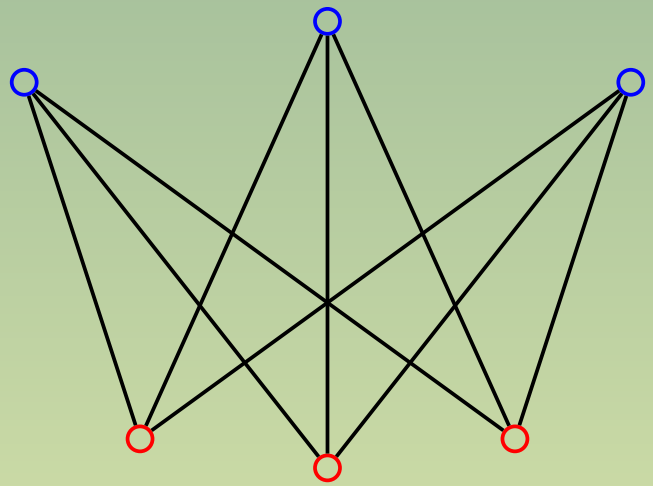
Da bismo se u to uvjerili, pomaknimo dva gornja crvena vrha prema dolje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



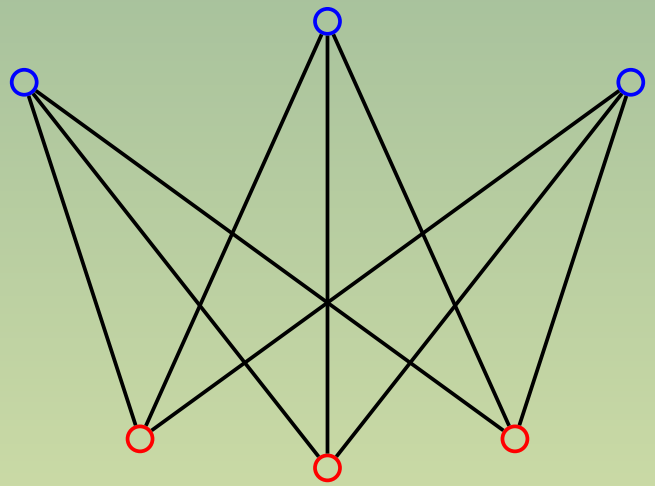
Da bismo se u to uvjerili, pomaknimo dva gornja crvena vrha prema dolje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Da bismo se u to uvjerili, pomaknimo dva gornja crvena vrha prema dolje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

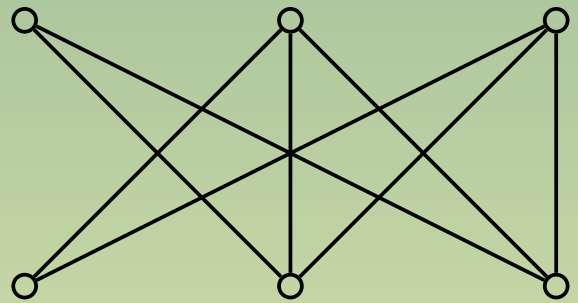


Sada nam je jasno da se radi o grafu $K_{3,3}$. Crveni vrhovi pripadaju jednom skupu, a plavi vrhovi drugom skupu biparticije. Dakle, Petersonov graf sadrži podgraf homeomorfan s $K_{3,3}$ pa prema teoremu Kuratowskog nije planarni graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.28.

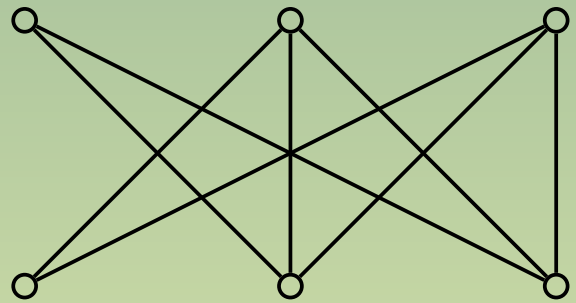
Dokažite da je graf G na donjoj slici planarni graf.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.28.

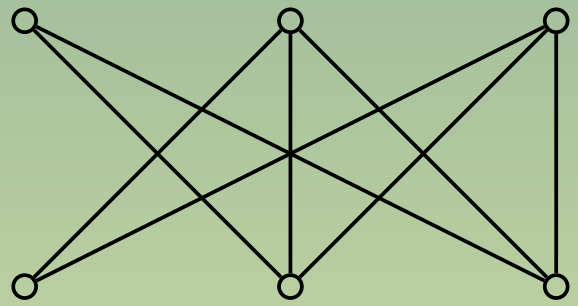
Dokažite da je graf G na donjoj slici planarni graf.



Rješenje.

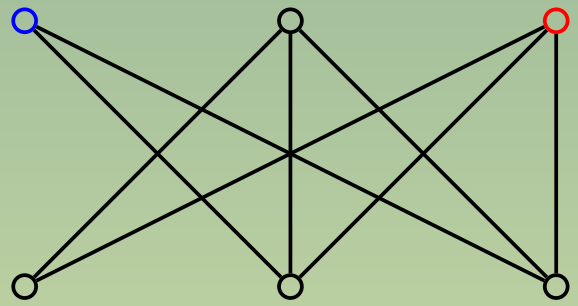
Uočite da je graf G zapravo $K_{3,3}$ bez jednog svojeg brida. Da bismo pokazali da je G planarni graf, moramo ga moći nacrtati tako da mu se bridovi ne sijeku, osim eventualno u vrhovima grafa. Ukoliko bi G bio planarni graf, možemo saznati i bez njegovog ravninskog smješenja koliko bi morao imati strana. Naime, kako je G povezani graf u kojemu je $\nu = 6$ i $\varepsilon = 8$, tada iz ◂ teorema 10.1. slijedi da je $\phi = 2 - \nu + \varepsilon = 4$, tj. G bi trebao imati 4 strane.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



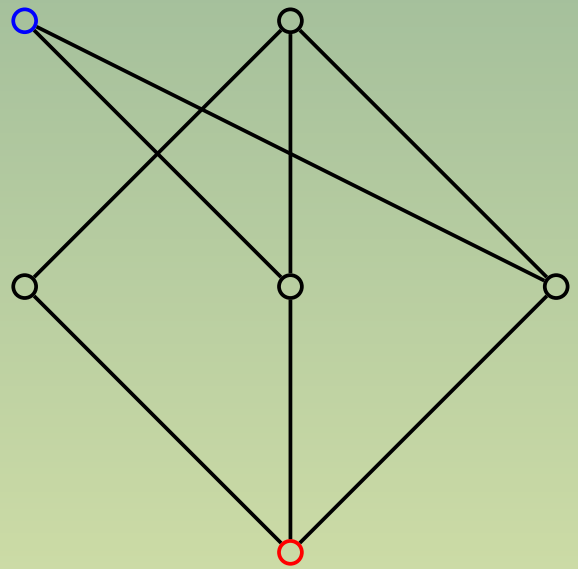
Pokažimo da je G planarni graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



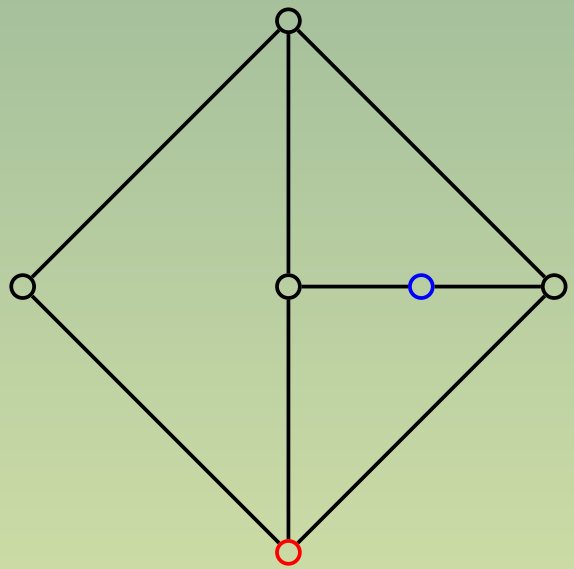
Pokažimo da je G planarni graf. U tu svrhu, bit će dovoljno pomaknuti crveni i plavi vrh na neka druga mjesta na sljedeći način.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



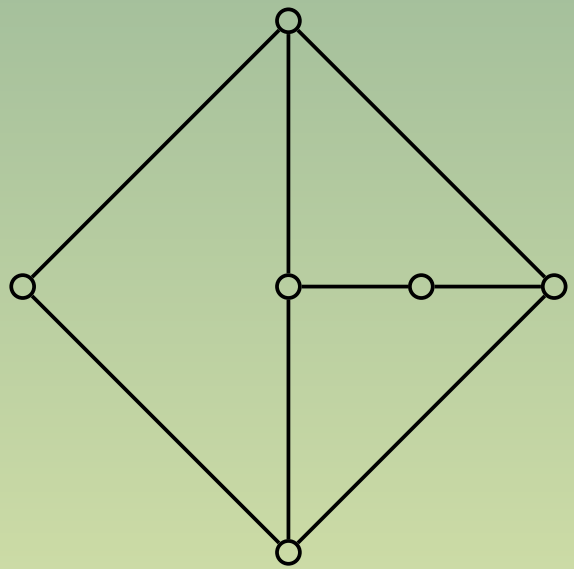
Pokažimo da je G planarni graf. U tu svrhu, bit će dovoljno pomaknuti crveni i plavi vrh na neka druga mjesta na sljedeći način.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



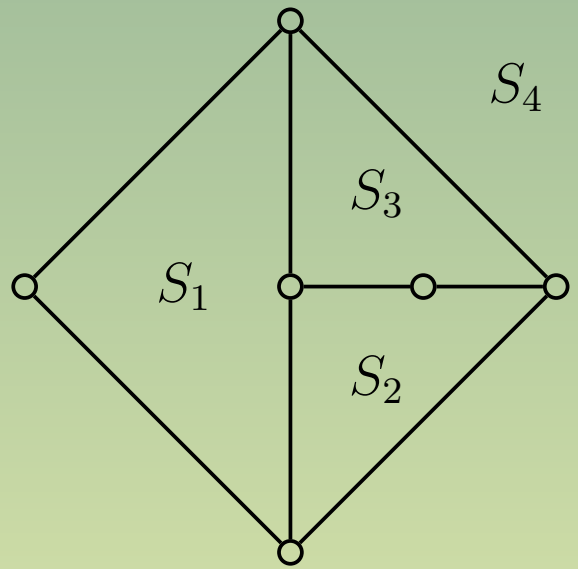
Pokažimo da je G planarni graf. U tu svrhu, bit će dovoljno pomaknuti crveni i plavi vrh na neka druga mjesta na sljedeći način.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Uspjeli smo nacrtati graf G tako da mu se bridovi ne sijeku, osim eventualno u vrhovima grafa. Stoga je G planarni graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

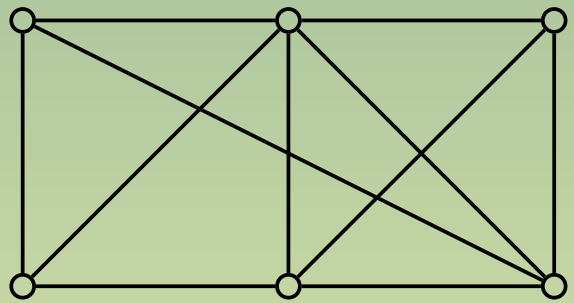


Uspjeli smo nacrtati graf G tako da mu se bridovi ne sijeku, osim eventualno u vrhovima grafa. Stoga je G planarni graf. Uočite da G zaista ima 4 strane S_1, S_2, S_3, S_4 i da je svaka strana omeđena s 4 brida.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.29.

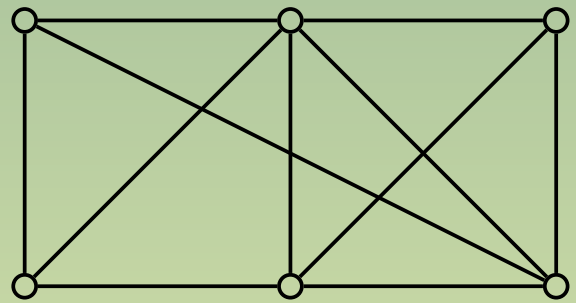
Dokažite da je graf G na donjoj slici planarni graf.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.29.

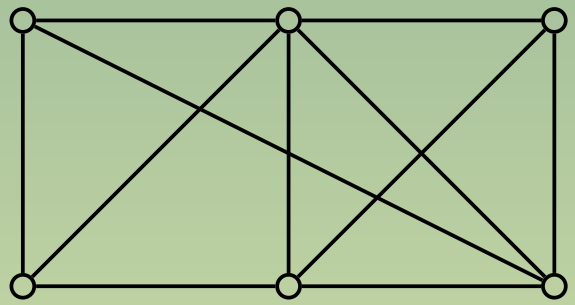
Dokažite da je graf G na donjoj slici planarni graf.



Rješenje.

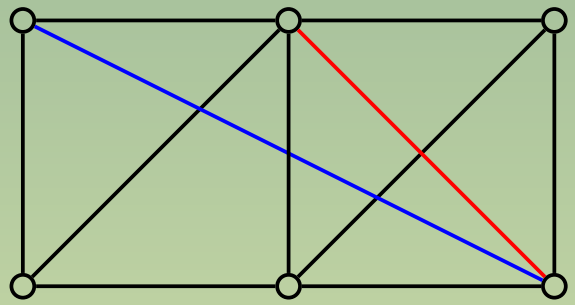
Da bismo pokazali da je G planarni graf, moramo ga moći nacrtati tako da mu se bridovi ne sijeku, osim eventualno u vrhovima grafa. Ukoliko bi G bio planarni graf, možemo saznati i bez njegovog ravninskog smješenja koliko bi morao imati strana. Naime, kako je G povezani graf u kojemu je $\nu = 6$ i $\varepsilon = 11$, tada iz ◂ teorema 10.1. slijedi da je $\phi = 2 - \nu + \varepsilon = 7$, tj. G bi trebao imati 7 strana.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



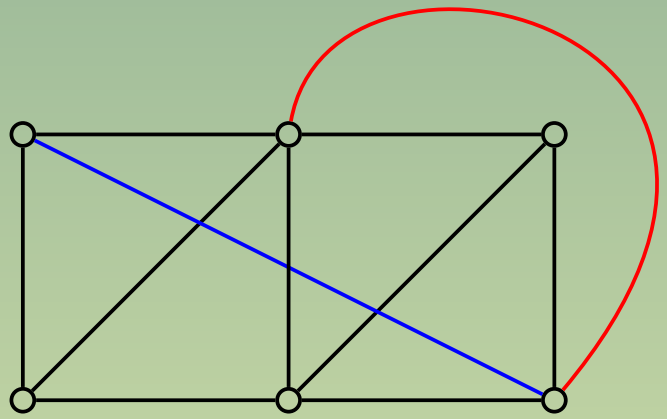
Pokažimo da je G planarni graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



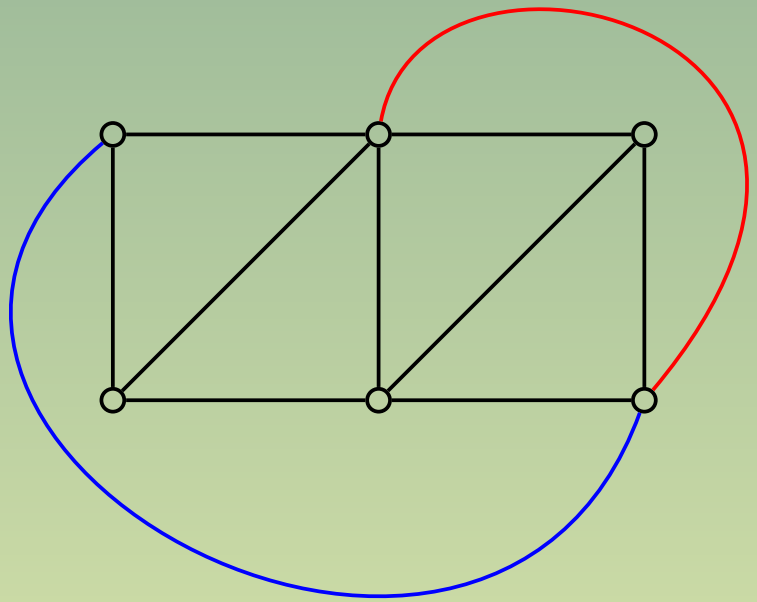
Pokažimo da je G planarni graf. U tu svrhu, bit će dovoljno crveni i plavi brid malo drukčije nacrtati. Pogledajmo jednu takvu mogućnost.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



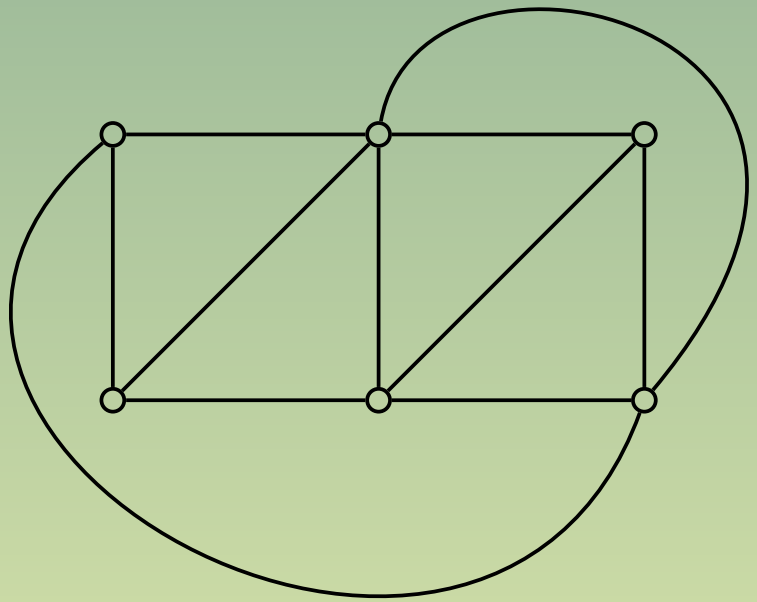
Pokažimo da je G planarni graf. U tu svrhu, bit će dovoljno crveni i plavi brid malo drukčije nacrtati. Pogledajmo jednu takvu mogućnost.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



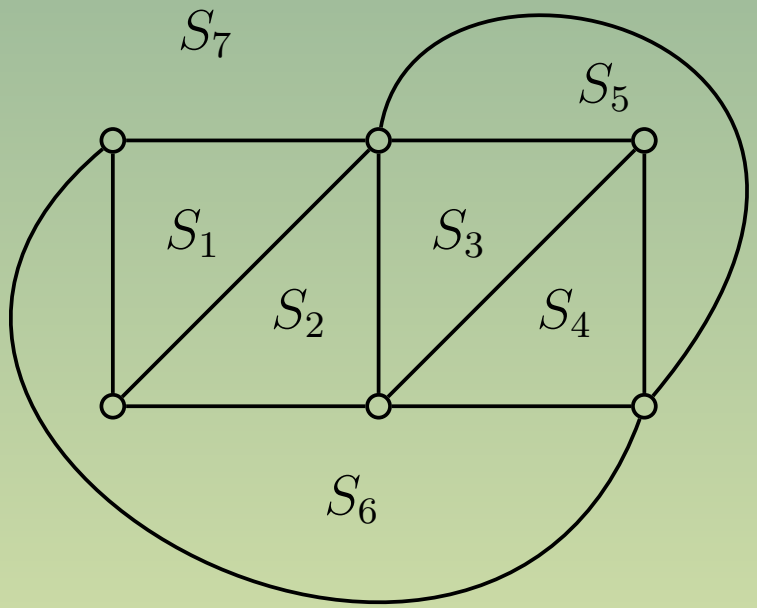
Pokažimo da je G planarni graf. U tu svrhu, bit će dovoljno crveni i plavi brid malo drukčije nacrtati. Pogledajmo jednu takvu mogućnost.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



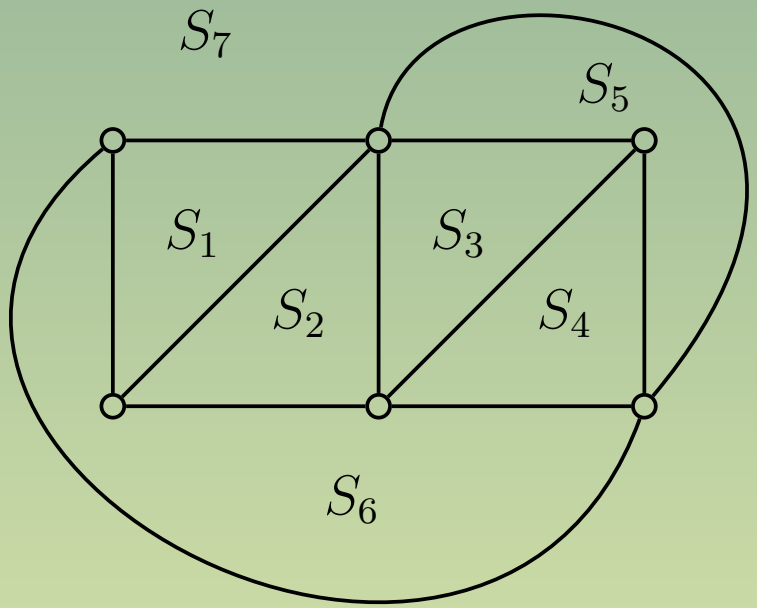
Uspjeli smo nacrtati graf G tako da mu se bridovi ne sijeku, osim eventualno u vrhovima grafa. Stoga je G planarni graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



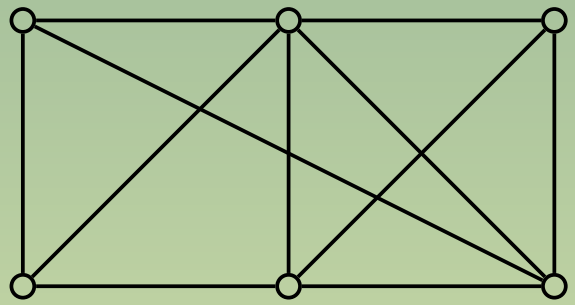
Uspjeli smo nacrtati graf G tako da mu se bridovi ne sijeku, osim eventualno u vrhovima grafa. Stoga je G planarni graf. Uočite da G zaista ima 7 strana S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 i S_7.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



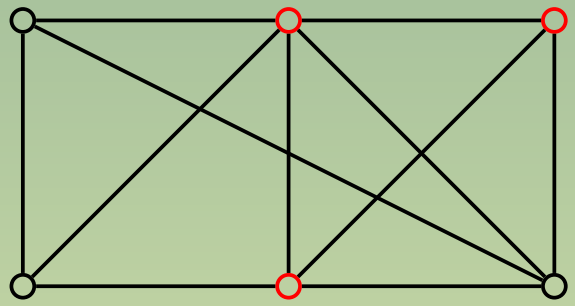
U ovom trenutku možemo postaviti još jedno pitanje. Da li postoji ravninsko smještenje grafa G u kojemu bi svi bridovi bili nacrtani u obliku dužina? Ravninsko smještenje grafa G koje smo mi naveli nije takvo jer postoje dva brida koji nisu nacrtani u obliku dužina. Pokažimo da postoji ravninsko smještenje grafa G u kojemu su svi bridovi nacrtani u obliku dužina.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



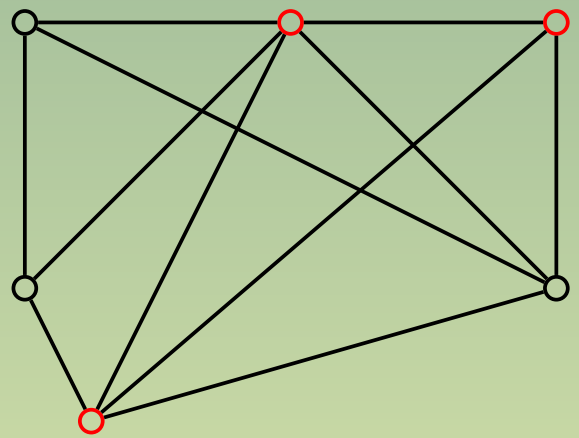
Krenimo ponovo od grafa G kakav je bio nacrtan na početku.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



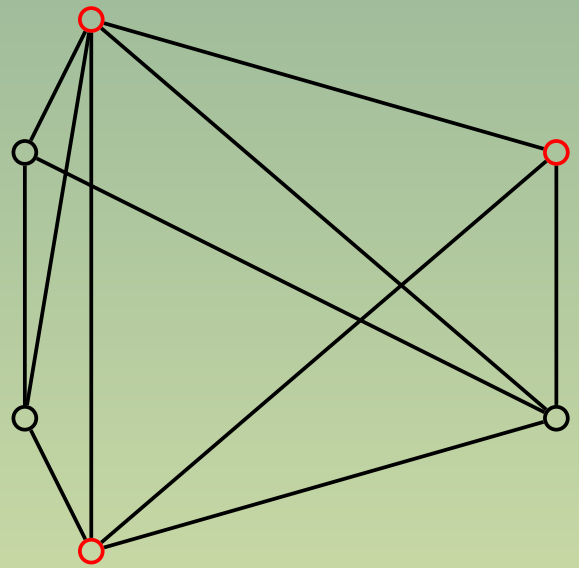
Krenimo ponovo od grafa G kakav je bio nacrtan na početku. Crveno označene vrhove ćemo malo razvući tako da budu na većim udaljenostima jedan od drugoga.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



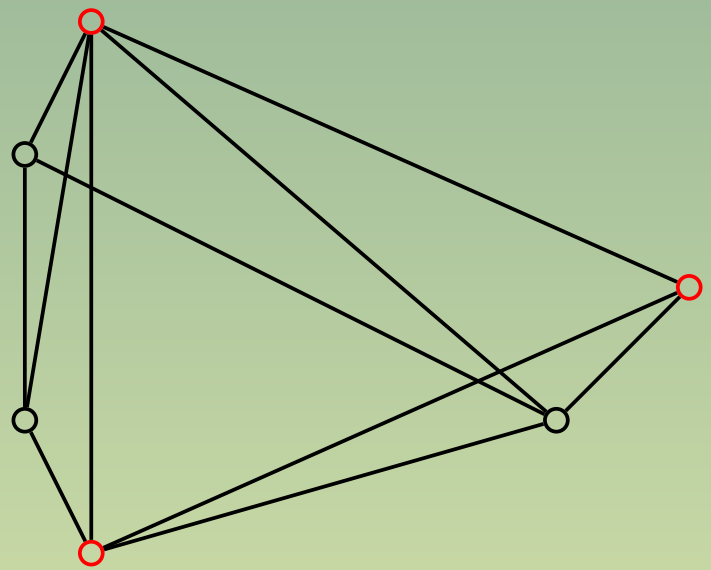
Krenimo ponovo od grafa G kakav je bio nacrtan na početku. Crveno označene vrhove ćemo malo razvući tako da budu na većim udaljenostima jedan od drugoga.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



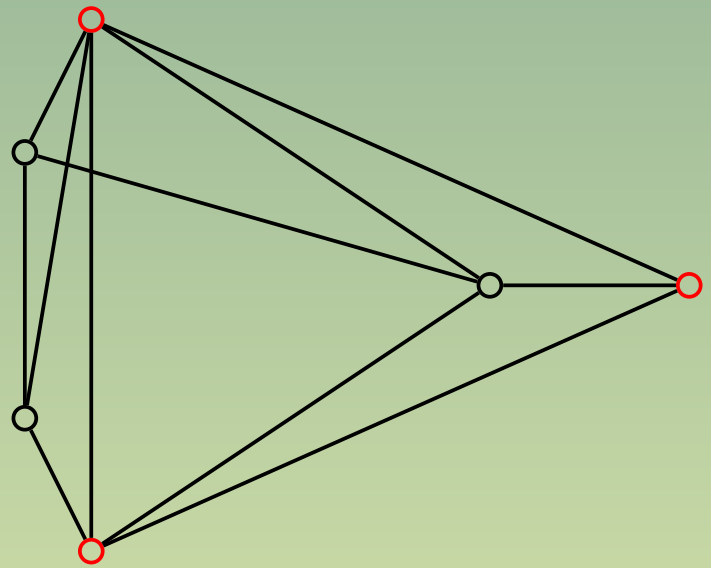
Krenimo ponovo od grafa G kakav je bio nacrtan na početku. Crveno označene vrhove ćemo malo razvući tako da budu na većim udaljenostima jedan od drugoga.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



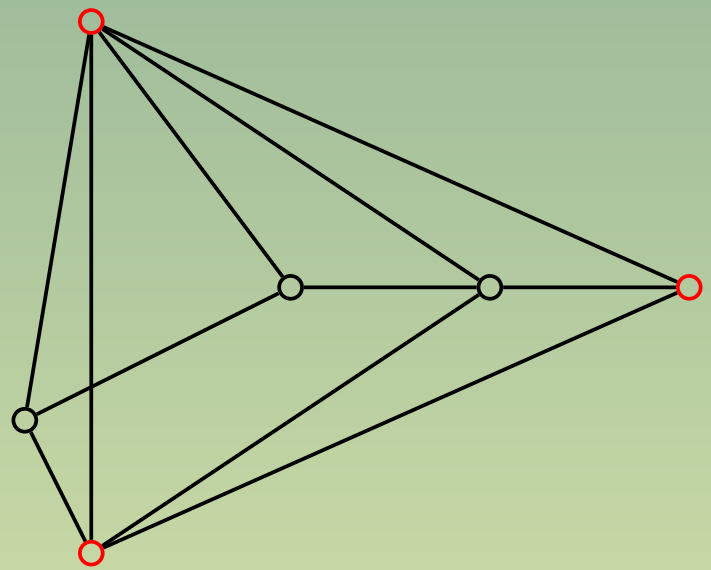
Krenimo ponovo od grafa G kakav je bio nacrtan na početku. Crveno označene vrhove ćemo malo razvući tako da budu na većim udaljenostima jedan od drugoga. Preostale vrhove smjestimo na odgovarajući način unutar trokuta određenog s crvenim vrhovima.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



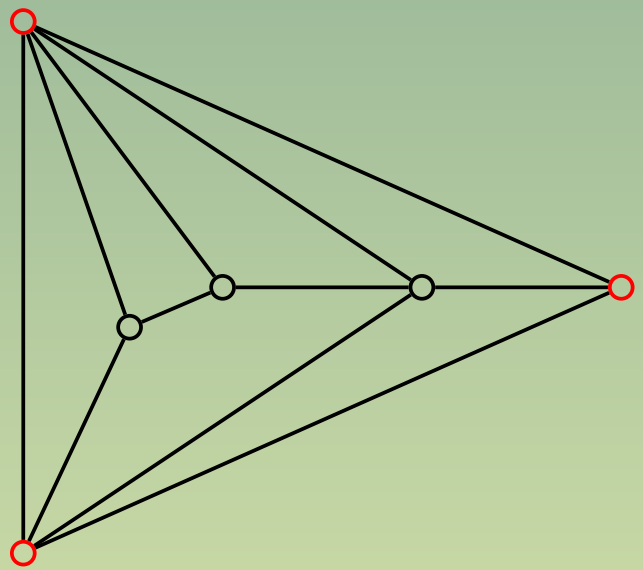
Krenimo ponovo od grafa G kakav je bio nacrtan na početku. Crveno označene vrhove ćemo malo razvući tako da budu na većim udaljenostima jedan od drugoga. Preostale vrhove smjestimo na odgovarajući način unutar trokuta određenog s crvenim vrhovima.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



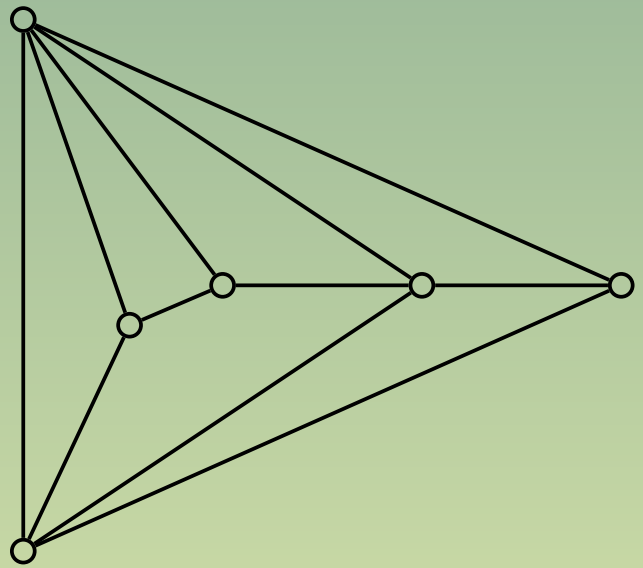
Krenimo ponovo od grafa G kakav je bio nacrtan na početku. Crveno označene vrhove ćemo malo razvući tako da budu na većim udaljenostima jedan od drugoga. Preostale vrhove smjestimo na odgovarajući način unutar trokuta određenog s crvenim vrhovima.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Krenimo ponovo od grafa G kakav je bio nacrtan na početku. Crveno označene vrhove ćemo malo razvući tako da budu na većim udaljenostima jedan od drugoga. Preostale vrhove smjestimo na odgovarajući način unutar trokuta određenog s crvenim vrhovima.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Dobilo smo ravninsko smještenje grafa G u kojemu su svi bridovi nacrtani u obliku dužina. Naravno, ovo ravninsko smještenje također ima 7 strana jer broj strana planarnog grafa ne ovisi o njegovom ravninskom smještenju. ◂ korolar 10.1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Motivirani prethodnim dvama primjerima, razumno je postaviti sljedeće pitanje. Da li za svaki jednostavni planarni graf postoji ravninsko smještenje u kojemu su svi bridovi nacrtani u obliku dužina? Drugim riječima, da li je moguće svaki jednostavni planarni graf nacrtati tako da su mu svi bridovi dužine i da se ne sijeku, osim eventualno u vrhovima grafa. Pitanje nije tako trivijalno kako se može na prvi pogled učiniti, ali na svu sreću postoji odgovor na njega. O tome govori sljedeći prekrasni teorem.

Teorem 10.6 (Farý, 1948.).

Za svaki jednostavni planarni graf postoji ravninsko smještenje u kojemu su svi bridovi dužine.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Zadatak 10.8.

Objasnite zašto za planarni graf G koji nije jednostavni ne postoji ravninsko smještenje u kojemu bi svi bridovi bili nacrtani u obliku dužina?

Zadatak 10.9.

Neka je G povezani graf za koji vrijedi $\varepsilon = \nu + 3$. Da li je G planarni graf? Dokažite svoju tvrdnju.

Zadatak 10.10.

Neka je G povezani graf za koji vrijedi $\varepsilon \leqslant \nu + 2$. Da li je G planarni graf? Dokažite svoju tvrdnju.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritam

Do sada smo naveli osnovna svojstva planarnih grafova i teorem Kuratowskog koji daje nužne i dovoljne uvjete da li je neki graf planarni. S teoretskog stajališta time možemo biti i više nego zadovoljni. Međutim, u praksi želimo za konkretni graf G u što je moguće kraćem vremenu odgovoriti na pitanje "Da li je graf G planarni?". Ako bismo direktno primijenili teorem Kuratowskog, morali bismo provjeriti za svaki podgraf grafa G da nije homeomorfan s $K_{3,3}$ ili K_5. Ako graf G ima puno vrhova i bridova, takav pristup očito nije efikasan.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Mi smo na nekim manjim grafovima pomoću teorema Kuratowskog dokazivali da oni nisu planarni tako što smo pronašli podgraf koji je bio homeomorfan s $K_{3,3}$ ili K_5. Mogli ste uočiti da već i na primjerima malih grafova nije bilo tako jednostavno doći do takvog podgrafa. Ipak je trebalo malo dulje promatrati taj graf i metodom pokušaja i pogrešaka nekako otkriti traženi podgraf. Sjetite se, npr. Petersenovog grafa i njegovog podgrafa homeomorfnog s $K_{3,3}$. Sve je lagano izgledalo kad je u rješenju taj podgraf već bio ponuđen, ali da ste sami trebali otkriti taj podgraf, ipak biste malo više vremena potrošili na promatranje strukture tog grafa kako biste otkrili podgraf homeomorfan s $K_{3,3}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Nadalje, u primjerima u kojima smo htjeli pokazati da je neki graf planarni, izbjegavali smo teorem Kuratowskog jer bismo morali za svaki podgraf provjeriti da nije homeomorfan s $K_{3,3}$ ili K_5. Radije smo ad hoc metodama pokušali raspoređivati vrhove i crtati po potrebi bridove u obliku krivulja kako bismo uspjeli dobiti neko ravninsko smještenje promatranog grafa, čime smo odmah i dokazali da je taj graf planarni. Važno je napomenuti da smo sve to radili na grafovima s malim brojem vrhova i bridova. Na grafovima s velikim brojem vrhova i bridova takve ad hoc metode ne bi bile od neke velike koristi. S druge strane, računalo nema sposobnost uočavanja i kreativnog razmišljanja, ono nema sposobnost promatranja strukture grafa pa zbog toga trebamo neki algoritam kojeg će moći izvoditi i računalo, a koji se neće temeljiti na spomenutim ad hoc metodama.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

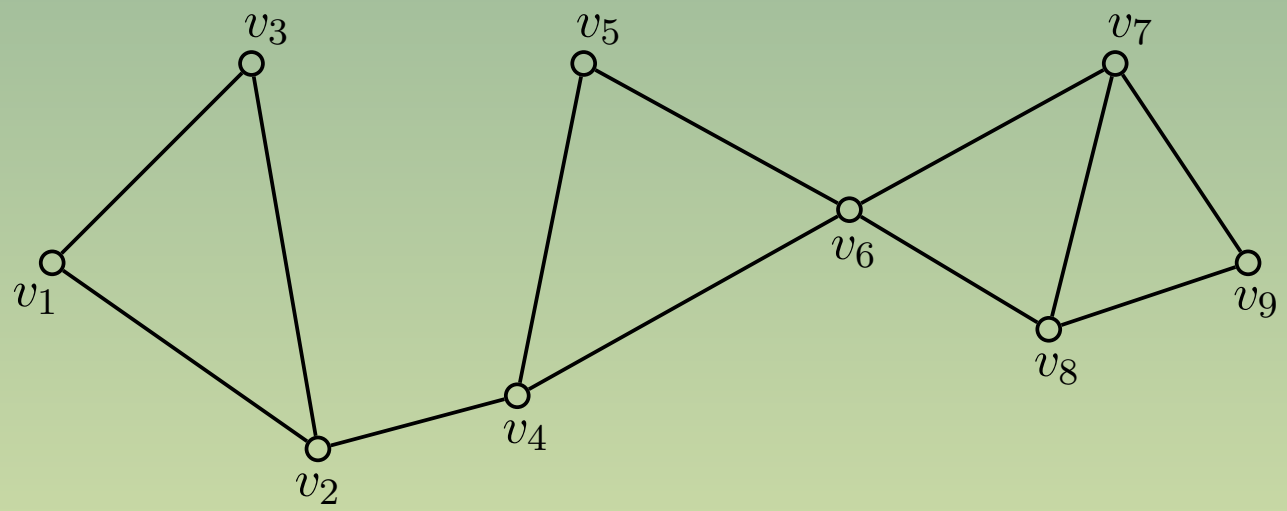
Objasnit ćemo jedan takav algoritam iz 1964. godine od Demoucrona, Malgrangea i Pertuiseta. Taj algoritam, korak po korak, određuje ravninsko smještenje zadanog grafa G.
Algoritam počinje od jednog ravninskog smještenja nekog ciklusa G' u grafu G (svaki ciklus je planarni graf), a zatim postepeno u svakom koraku dodaje određeni broj bridova i vrhova u određenu stranu od G' tako da novonastali G' i dalje bude ravninsko smještenje nekog podgrafa od G. Ukoliko u nekom trenutku više nije moguće dodati nove bridove iz G u trenutni graf G' tako da novonastali G' i dalje bude ravninsko smještenje nekog podgrafa iz G, algoritam se prekida i zaključuje da graf G nije planarni. Ukoliko algoritam uspije proći kroz sve vrhove i bridove grafa G, tada je G planarni graf, a G' je jedno njegovo ravninsko smještenje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Da bismo mogli detaljno objasniti svaki korak tog algoritma, potrebni su nam neki novi pojmovi koje ćemo sada postepeno uvoditi i svakog od njih detaljno pojasniti. Važno je da razumijete te pojmove jer oni su kasnije ključni za razumijevanje spomenutog algoritma.

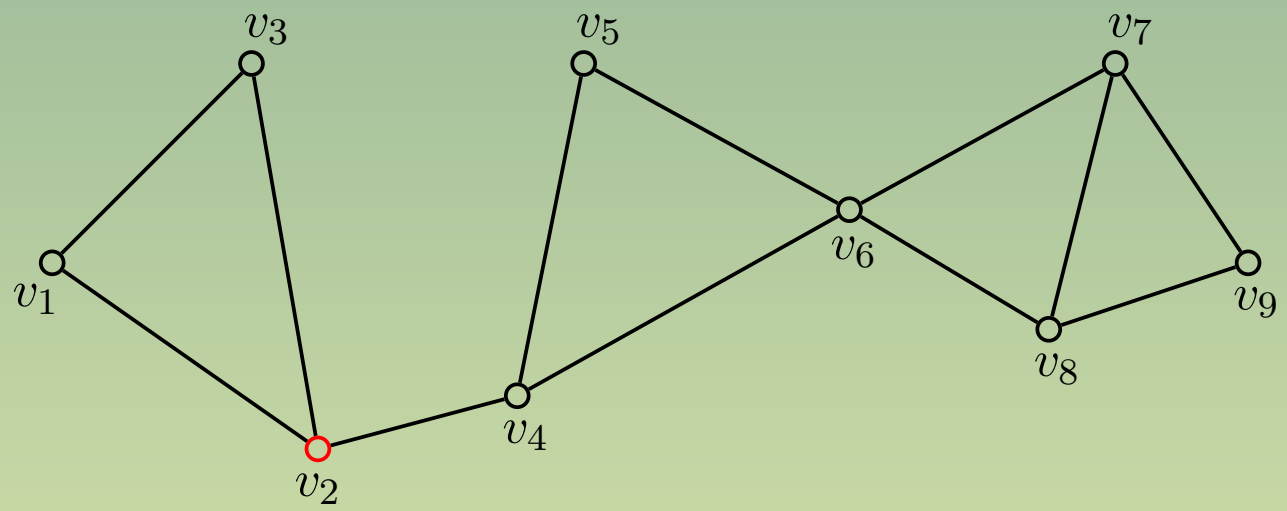
Neka je G netrivijalni graf. Kažemo da je $v \in V(G)$ **rezni vrh** grafa G ako vrijedi $\omega(G - v) > \omega(G)$. Jednostavnije rečeno, rezni vrh u grafu G je svaki onaj vrh čije odstranjivanje iz grafa povećava broj komponenata povezanosti. Specijalno, rezni vrh u povezanom grafu je svaki onaj vrh čijim odstranjivanjem dobivamo nepovezani graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



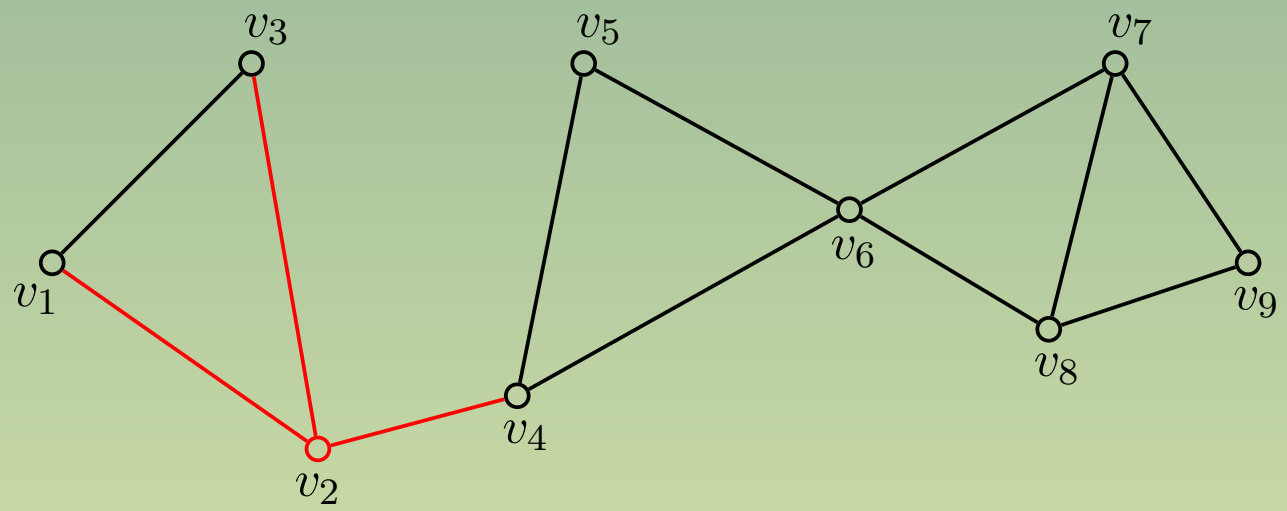
U zadanom grafu vrhovi v_2, v_4 i v_6 su rezni vrhovi. Objasnimo malo detaljnije ove činjenice.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



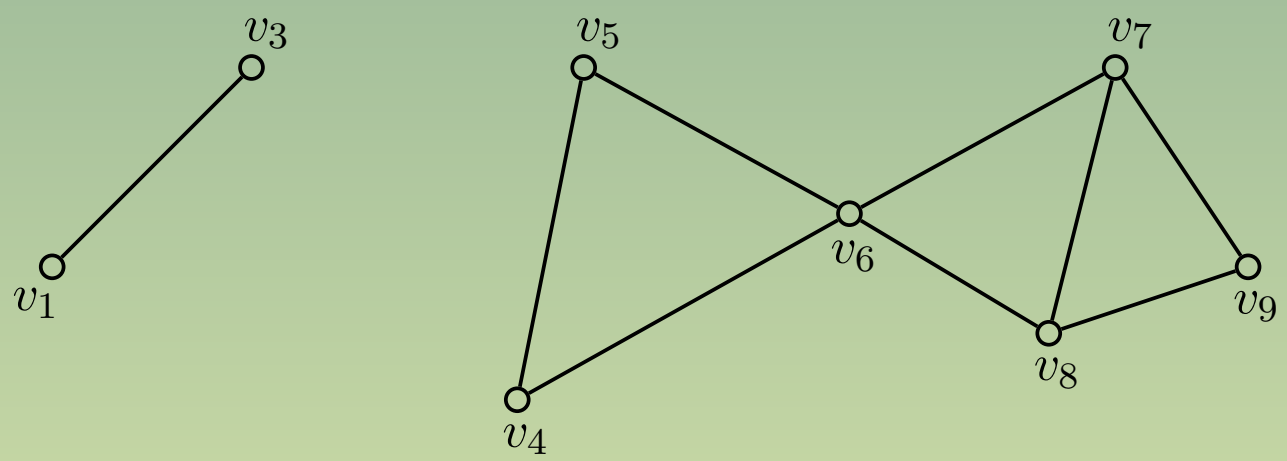
Pogledajmo vrh v_2. Odstranimo li taj vrh iz zadanog grafa

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



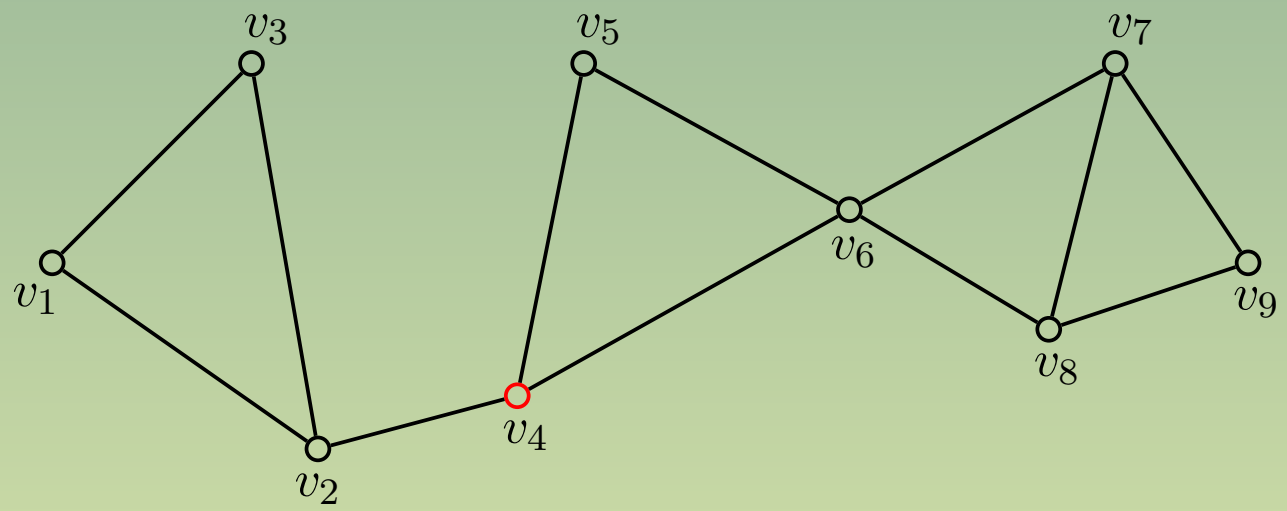
Pogledajmo vrh v_2. Odstranimo li taj vrh iz zadanog grafa, pritom moramo odstraniti i sve njegove susjedne bridove,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



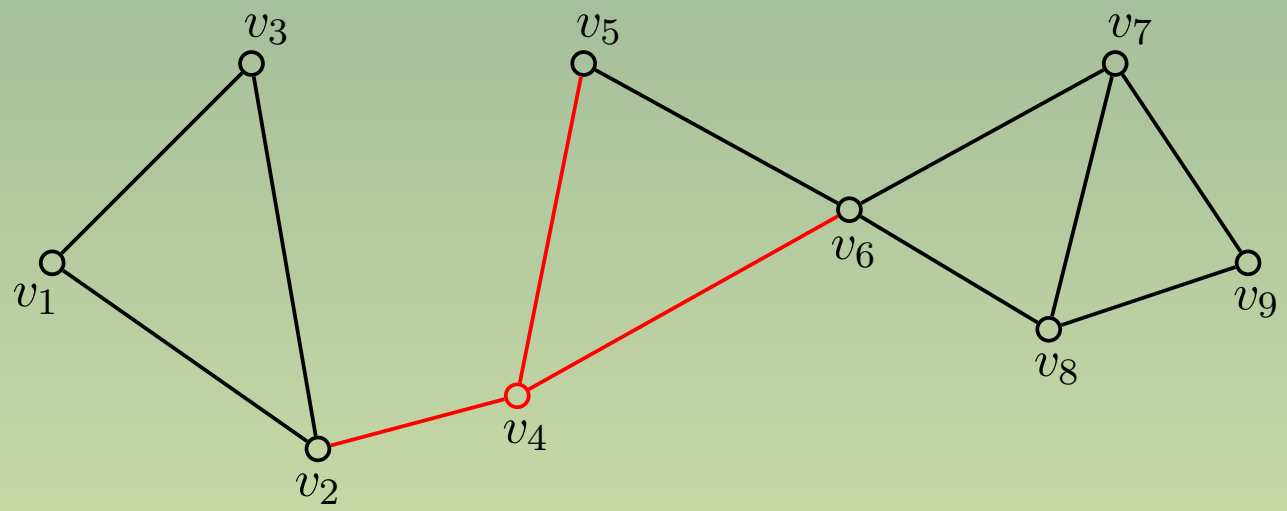
Pogledajmo vrh v_2. Odstranimo li taj vrh iz zadanog grafa, pritom moramo odstraniti i sve njegove susjedne bridove, dobivamo nepovezani graf. Zbog toga je v_2 rezni vrh.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



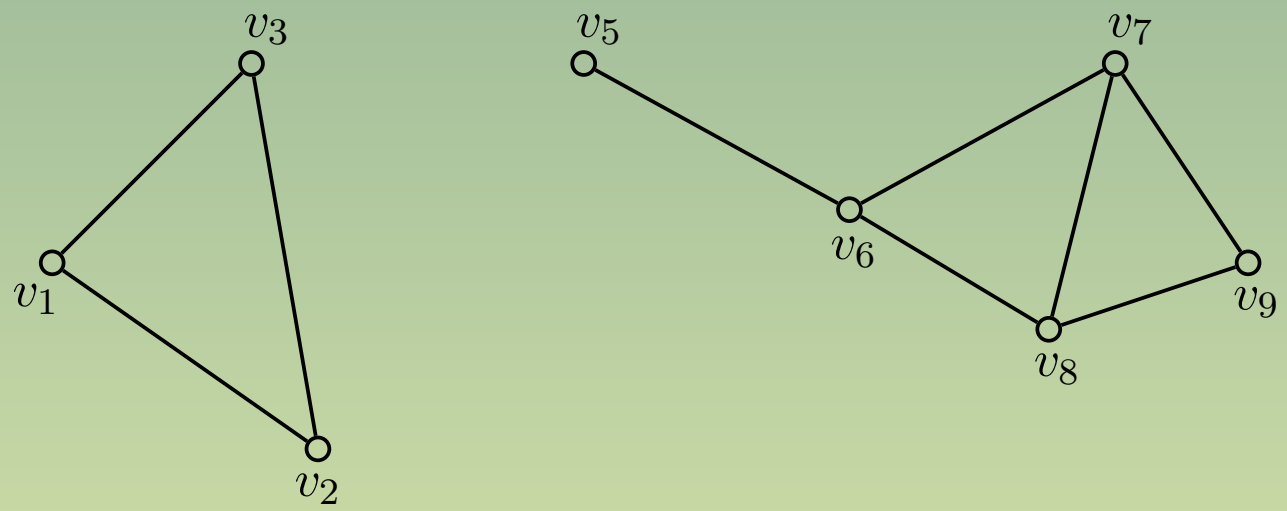
Vratimo se na početni graf i pogledajmo vrh v_4. Odstranimo li taj vrh iz zadanog grafa

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



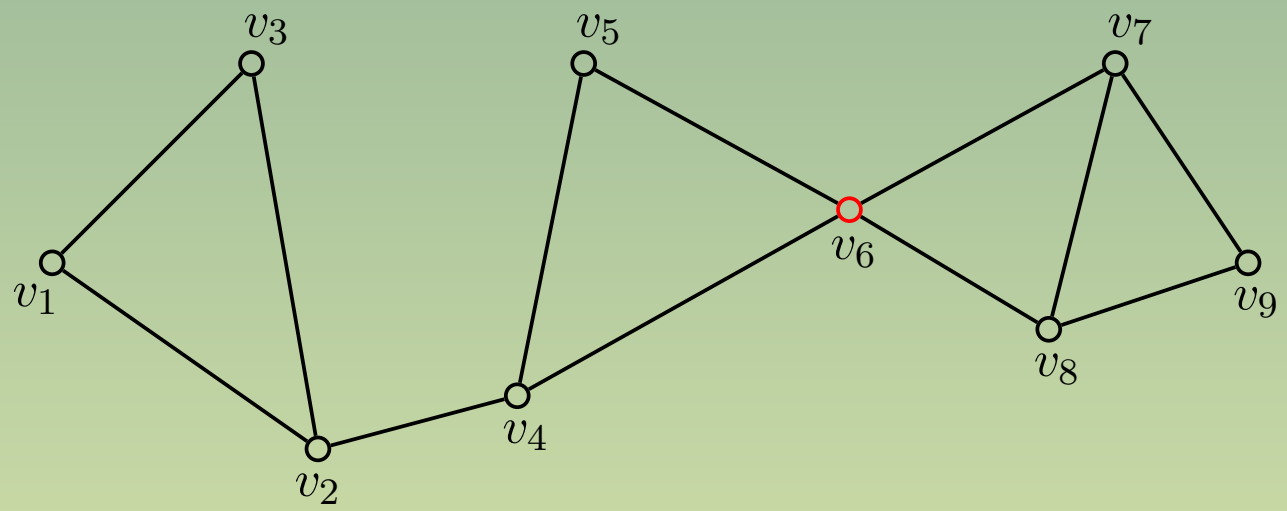
Vratimo se na početni graf i pogledajmo vrh v_4. Odstranimo li taj vrh iz zadanog grafa, pritom moramo odstraniti i sve njegove susjedne bridove,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



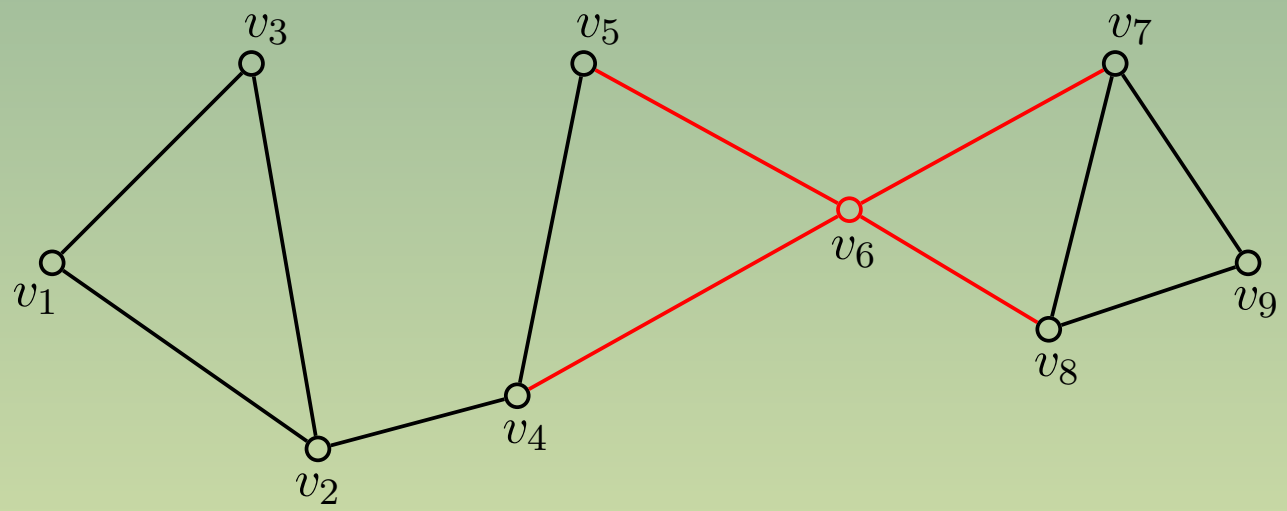
Vratimo se na početni graf i pogledajmo vrh v_4. Odstranimo li taj vrh iz zadanog grafa, pritom moramo odstraniti i sve njegove susjedne bridove, dobivamo nepovezani graf. Zbog toga je v_4 rezni vrh.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



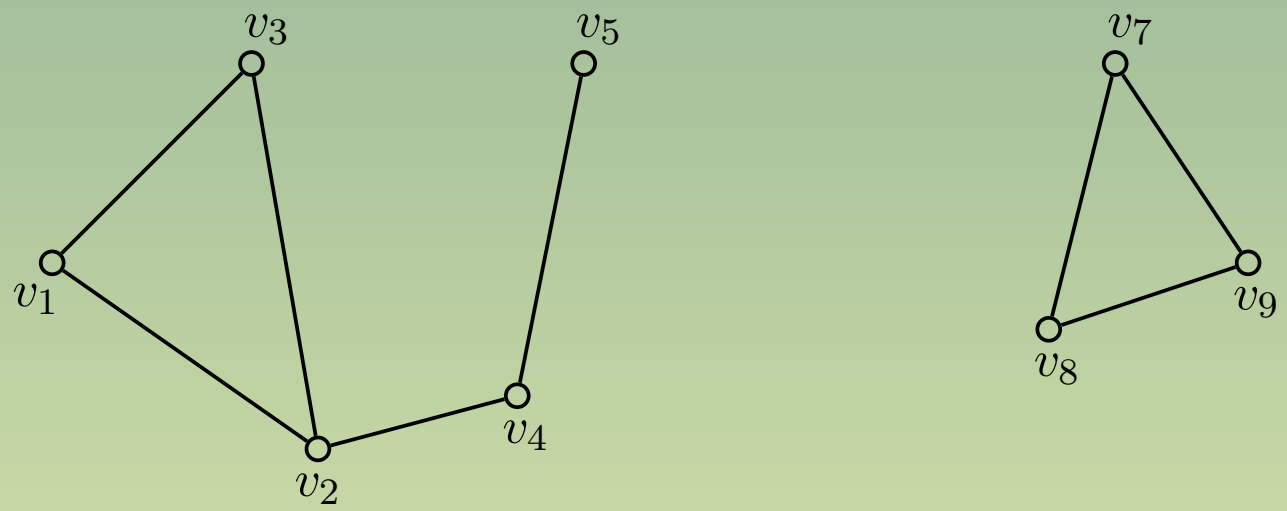
Vratimo se na početni graf i pogledajmo vrh v_6. Odstranimo li taj vrh iz zadanog grafa

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



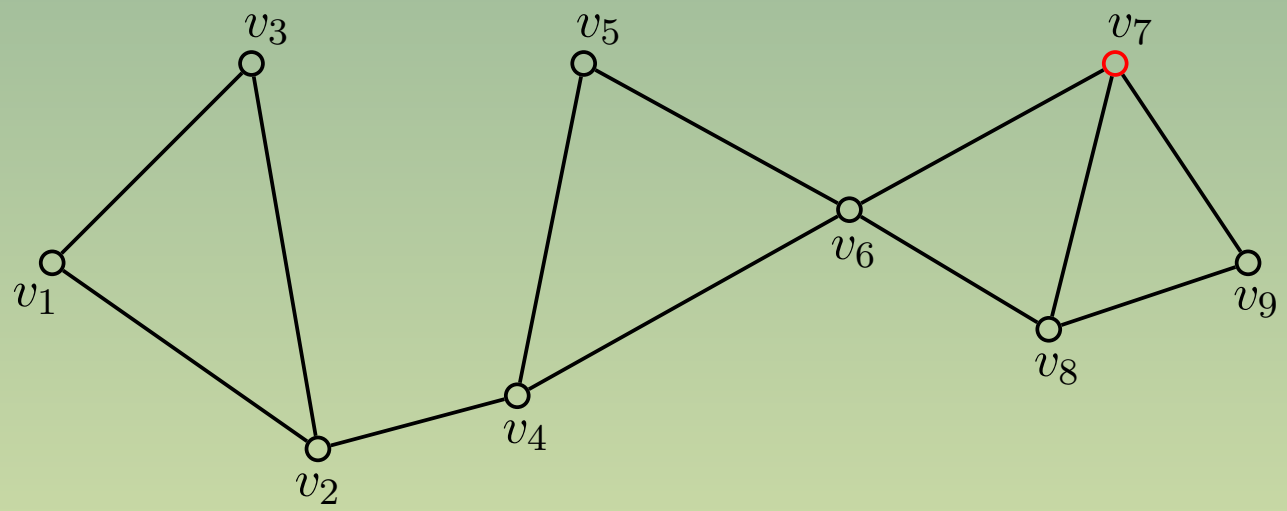
Vratimo se na početni graf i pogledajmo vrh v_6. Odstranimo li taj vrh iz zadanog grafa, pritom moramo odstraniti i sve njegove susjedne bridove,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



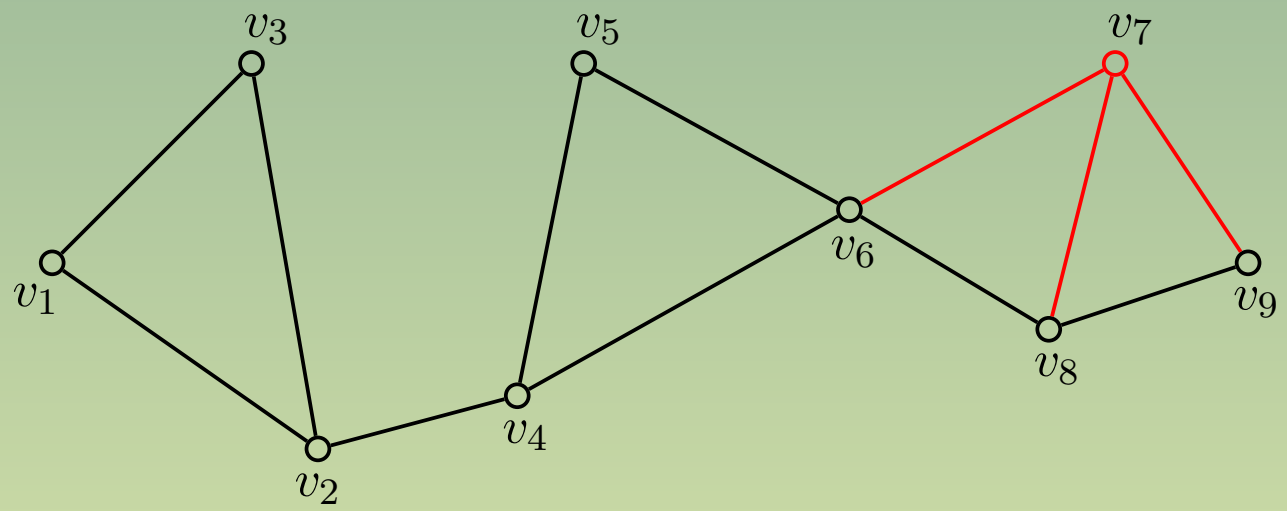
Vratimo se na početni graf i pogledajmo vrh v_6. Odstranimo li taj vrh iz zadanog grafa, pritom moramo odstraniti i sve njegove susjedne bridove, dobivamo nepovezani graf. Zbog toga je v_6 rezni vrh.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



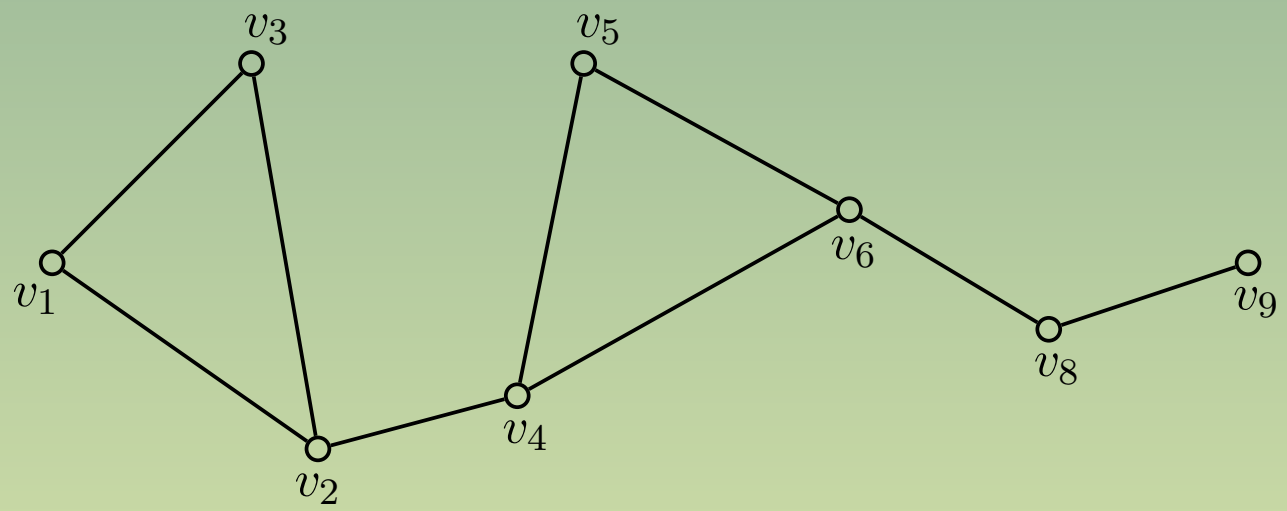
Vratimo se na početni graf i objasnimo zašto vrh v_7 nije rezni vrh.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



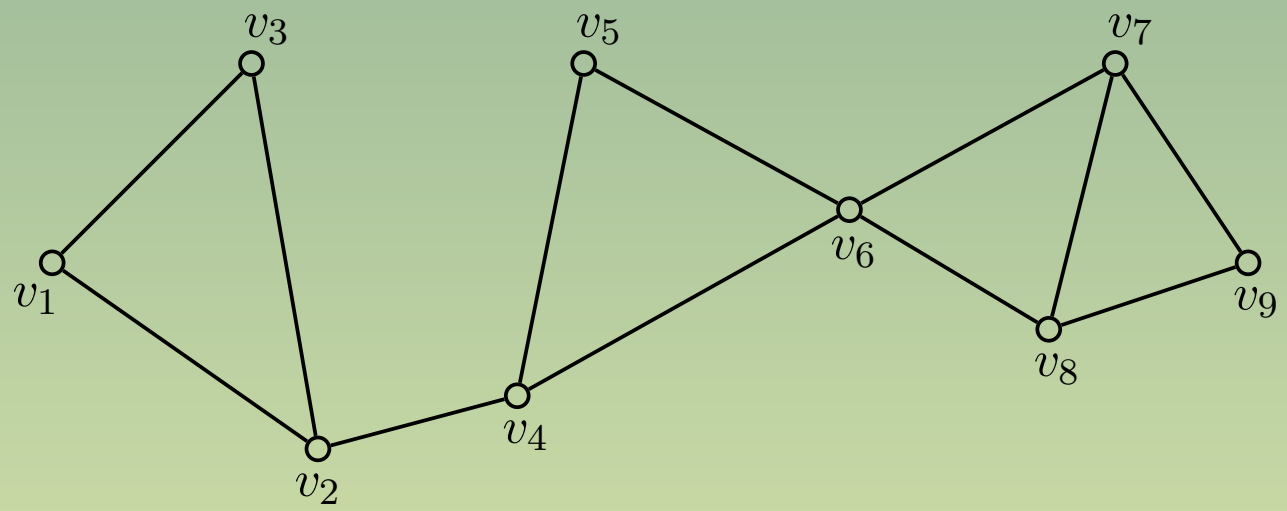
Vratimo se na početni graf i objasnimo zašto vrh v_7 nije rezni vrh. Odstranimo li taj vrh iz grafa (zajedno s njegovim susjednim bridovima),

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



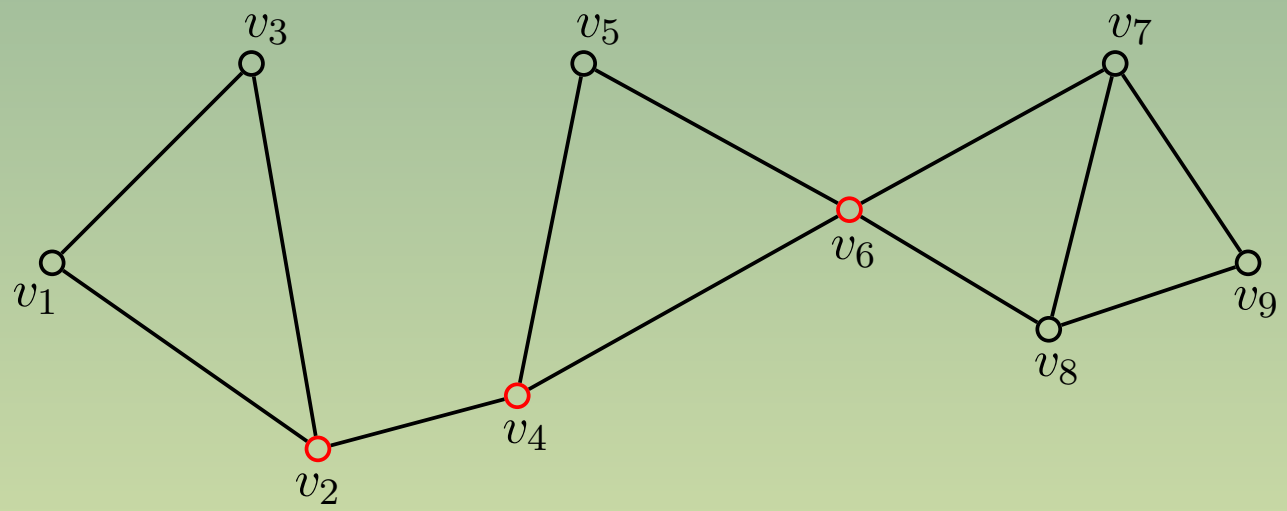
Vratimo se na početni graf i objasnimo zašto vrh v_7 nije rezni vrh. Odstranimo li taj vrh iz grafa (zajedno s njegovim susjednim bridovima), dobiveni graf i dalje ostaje povezan. Zbog toga vrh v_7 nije rezni vrh.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Vratimo se na početni graf i objasnimo zašto vrh v_7 nije rezni vrh. Odstranimo li taj vrh iz grafa (zajedno s njegovim susjednim bridovima), dobiveni graf i dalje ostaje povezan. Zbog toga vrh v_7 nije rezni vrh. Iz istog razloga preostali vrhovi v_1, v_3, v_5, v_8 i v_9 nisu rezni vrhovi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Dakle, zadani graf ima tri rezna vrha v_2, v_4 i v_6.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Zadatak 10.11.

a. *Da li postoji graf koji nema reznih vrhova, a ima reznih bridova?*

b. *Navedite nekoliko primjera grafova koji imaju rezne vrhove, a nemaju reznih bridova.*

c. *Neka su u i v rezni vrhovi u grafu G i neka je $e = uv$ brid koji ih povezuje. Da li e mora biti rezni brid grafa G?*

d. *Neka je G graf s barem tri vrha, a e rezni brid od G. Da li je moguće da oba kraja brida e nisu rezni vrhovi u grafu G? Da li oba kraja brida e moraju biti rezni vrhovi?*

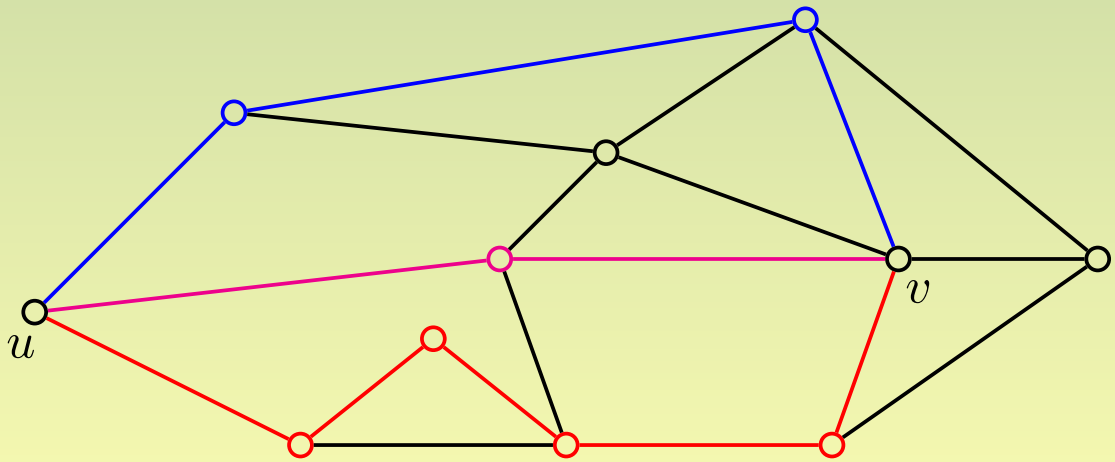
Sve svoje tvrdnje obrazložite.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Za graf G kažemo da je **bipovezan** ili **2-povezan** ako nema reznih vrhova i reznih bridova.

Neka su $u, v \in V(G)$ dva vrha u grafu G, a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ (u, v)-putovi u G. Kažemo da su (u, v)-putovi $P_1, P_2, \ldots, P_n$ **unutarnje disjunktni putovi** ukoliko nikoja dva od njih nemaju zajedničkih unutarnjih vrhova.

Na donjoj slici su različitim bojama prikazana tri unutarnje disjunktna (u, v)-puta u grafu G.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Naziv "2-povezani graf" opravdava sljedeći teorem.

Teorem 10.7 (Whitney, 1932.).

Graf G s barem dva vrha je 2-povezan akko između svaka dva različita vrha u G postoje barem dva unutarnje disjunktna puta.

Dokaz.

$\Leftarrow$

Pretpostavimo da u grafu G između svaka dva vrha postoje barem dva unutarnje disjunktna puta. Iz te pretpostavke slijedi da je G povezani graf. Tvrdimo da G nema reznih vrhova i reznih bridova. Pretpostavimo da je e rezni brid u grafu G. Tada je $G - e$ nepovezani graf. Iz toga bi slijedilo da postoje vrhovi $u, v \in V(G)$ takvi da svi (u, v)-putovi u G sadrže brid e.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

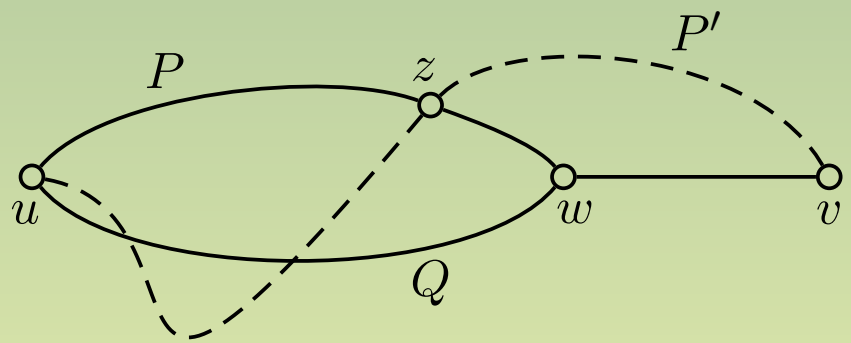
U tom slučaju u grafu G između vrhova u i v ne bi postojala dva unutarnje disjunktna puta, što je kontradikcija s pretpostavkom. Dakle, G nema reznih bridova. Na potpuno analogni način zaključujemo da G nema niti reznih vrhova pa je G bipovezan graf.

$\Rightarrow$

Pretpostavimo da je G bipovezani graf. Neka su $u, v \in V(G)$ bilo koja dva vrha. Tvrdimo da između njih postoje barem 2 unutarnje disjunktna puta u grafu G. Dokaz provodimo indukcijom po udaljenosti vrhova. Neka je $d(u, v) = 1$. Kako je G bipovezan, brid $e = uv$ nije rezni brid pa je sadržan u nekom ciklusu $\mathcal{C}$. Stoga se vrhovi u i v mogu spojiti s dva unutarnje disjunktna puta e i $\mathcal{C} - e$. Pretpostavimo da između svaka dva vrha u i v za koje vrijedi $d(u, v) < k$ postoje barem dva unutarnje disjunktna puta u grafu G. Neka su $u, v \in V(G)$ takvi da je $d(u, v) = k > 1$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

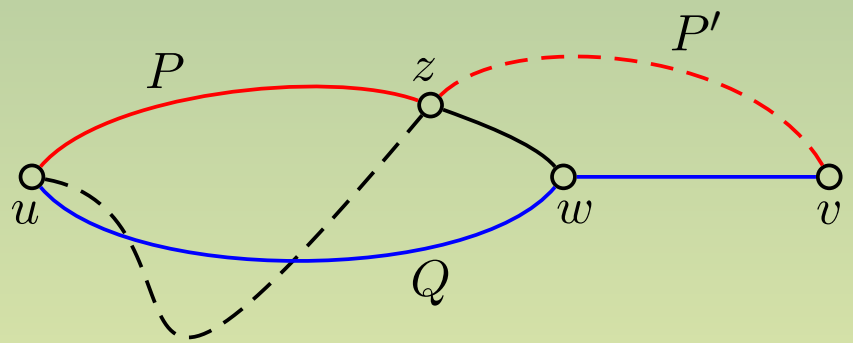
Tada postoji (u, v)-put duljine k i neka je w posljednji unutarnji vrh na tom putu. Tada je $d(u, w) = k - 1$ pa prema pretpostavci indukcije postoje unutarnje disjunktni (u, w)-putovi P i Q u grafu G. Kako je G bipovezan graf, $G - w$ je povezani graf pa postoji (u, v)-put P' u $G - w$.



Neka je z posljednji vrh od P' koji je zajednički s nekim od putova P i Q. Takav vrh sigurno postoji jer u krajnjem slučaju moguće je da je $z = u$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $z \in P$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Tada postoji (u, v)-put duljine k i neka je w posljednji unutarnji vrh na tom putu. Tada je $d(u, w) = k - 1$ pa prema pretpostavci indukcije postoje unutarnje disjunktni (u, w)-putovi P i Q u grafu G. Kako je G bipovezan graf, $G - w$ je povezani graf pa postoji (u, v)-put P' u $G - w$.



Neka je z posljednji vrh od P' koji je zajednički s nekim od putova P i Q. Takav vrh sigurno postoji jer u krajnjem slučaju moguće je da je $z = u$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $z \in P$. Tada su (u, z)-dio puta P zajedno s (z, v)-dijelom puta P' (crveni put) i $Q \cup wv$ (plavi put) dva unutarnje disjunktna (u, v)-puta u grafu G. ♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Neka je G graf. Kažemo da je $H \subseteq G$ **bikomponenta** grafa G ako je

- H maksimalni bipovezani podgraf od G (svaki drugi podgraf od G koji sadrži H nije bipovezan), ili
- H se sastoji od reznog brida grafa G i njegovih susjednih vrhova

Iz definicije bikomponente slijede sljedeće činjenice:

- Svaki brid u grafu pripada točno jednoj bikomponenti.
- Svaki vrh koji nije rezni pripada točno jednoj bikomponenti u grafu.
- Svaki rezni vrh u grafu pripada barem dvjema bikomponentama.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Napomena.

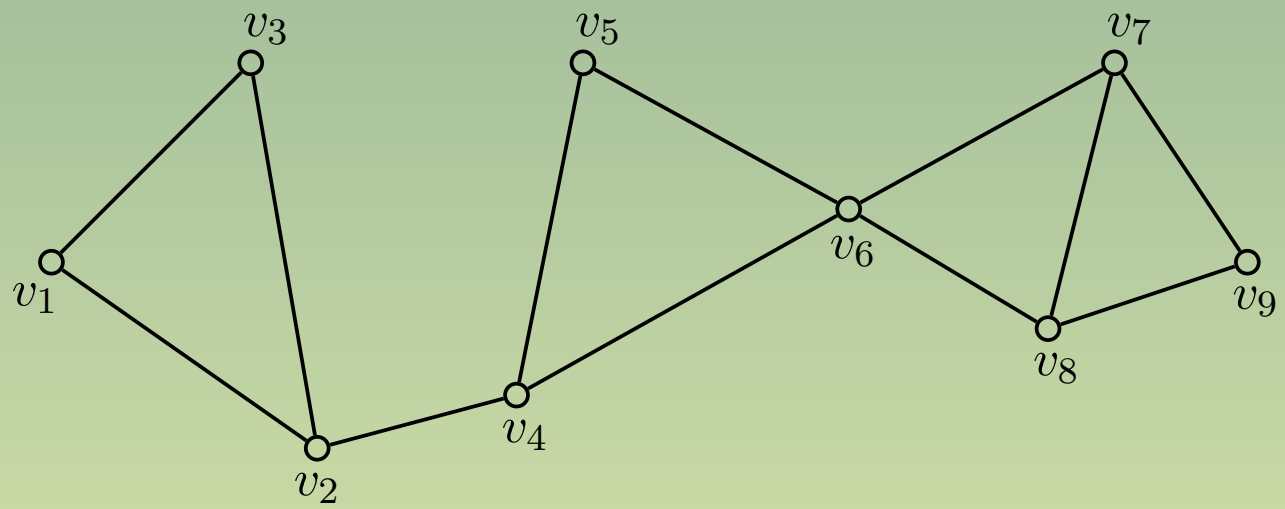
Pojam bikomponente se može definirati i preko relacije ekvivalencije. Naime, neka je $G = (V, E)$ graf. Na skupu bridova E definiramo relaciju $\sim$ na sljedeći način. Za dva brida e i f kažemo da su ekvivalentni, pišemo $e \sim f$, ako je $e = f$ ili postoji ciklus u grafu G koji sadrži bridove e i f. Lako se pokaže da je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu E (napravite to za vježbu), a podgrafovi od G inducirani klasama ekvivalencije od te relacije su upravo bikomponente grafa G. Uočite da svaki graf G s barem tri vrha je 2-povezan akko ima samo jednu bikomponentu.

Zadatak 10.12.

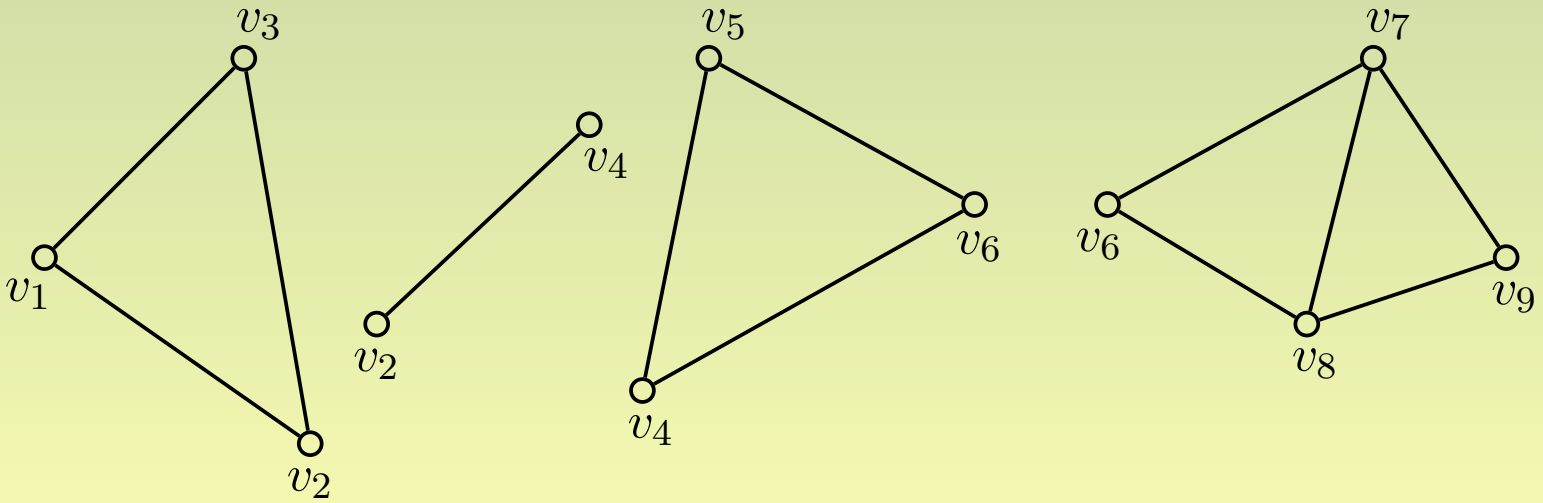
Navedite primjer grafa koji ima samo jednu bikomponentu, a nije 2-povezan.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Graf



nije 2-povezan i ima četiri bikomponente



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

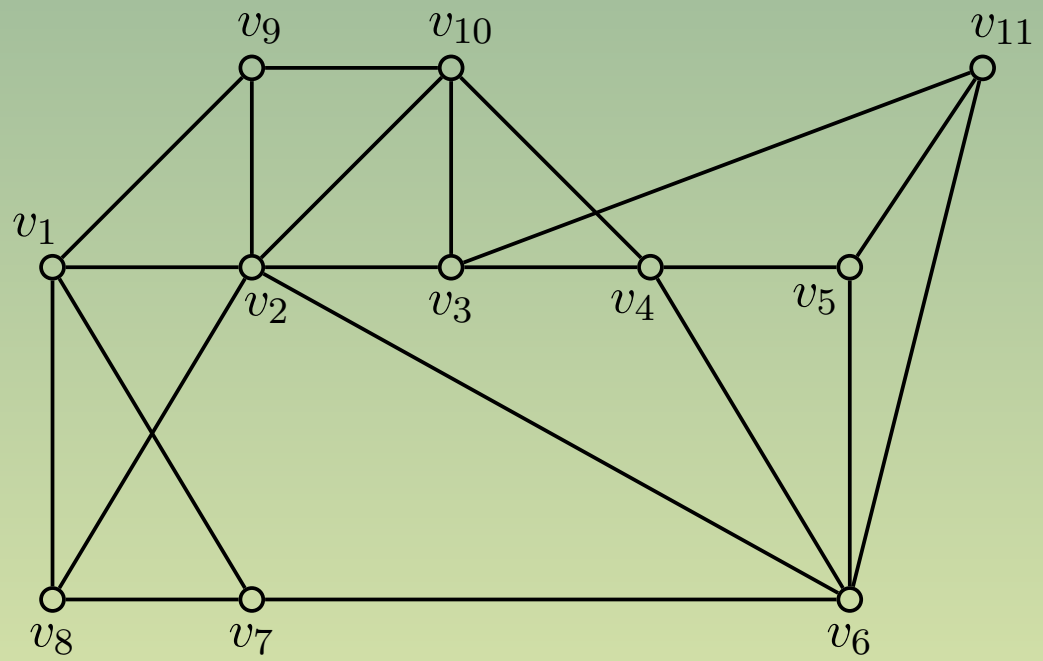
Savršena sparivanja

Neka je $G = (V, E)$ graf, a $G' = (V', E')$ podgraf od G.
Fragment od G s obzirom na G' je svaki podgraf $\mathcal{F}$ grafa G koji zadovoljava neki od sljedeća dva uvjeta:

- $\mathcal{F}$ se sastoji od točno jednog brida koji ne pripada podgrafu G', ali oba njegova kraja pripadaju podgrafu G'.
- $\mathcal{F}$ je povezana komponenta od $G[V \setminus V']$ kojoj su još dodani svi bridovi iz G kojima je jedan kraj u $\mathcal{F}$, a drugi kraj u G' (jasno, taj drugi kraj iz G' također pripada podgrafu $\mathcal{F}$).

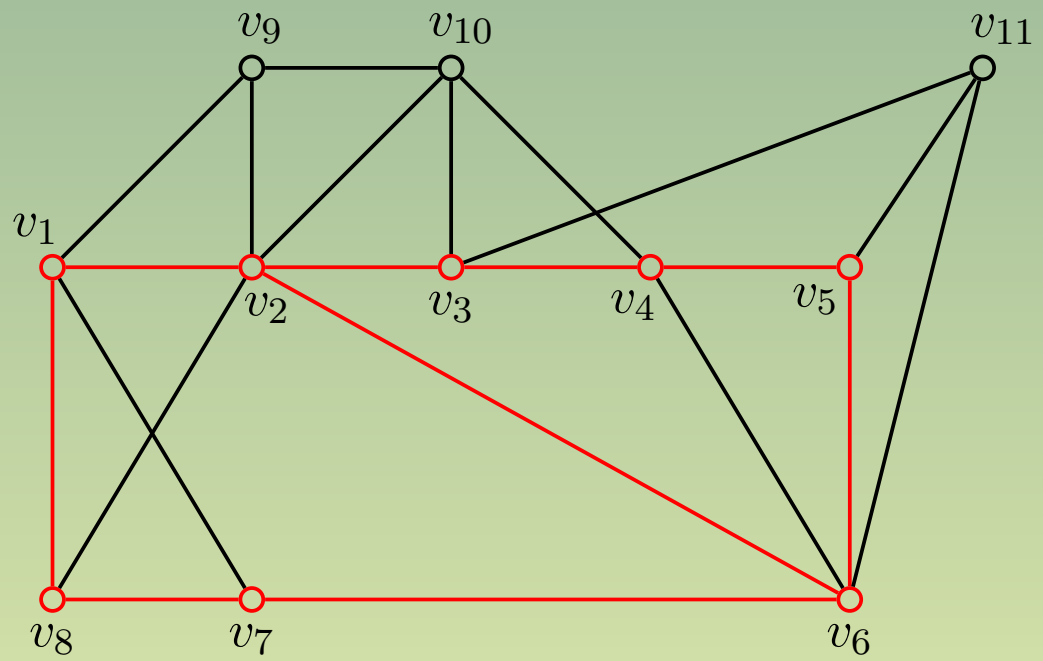
Za vrh $v \in V(\mathcal{F})$ kažemo da je **kontaktni vrh** ako je $v \in V'$.
Ukoliko je G' planarni graf, tada je **dopustiva strana** fragmenta $\mathcal{F}$ svaka ona strana od G' koja sadrži sve kontaktne vrhove od $\mathcal{F}$. Skup svih dopustivih strana fragmenta $\mathcal{F}$ označavat ćemo s $S(\mathcal{F})$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



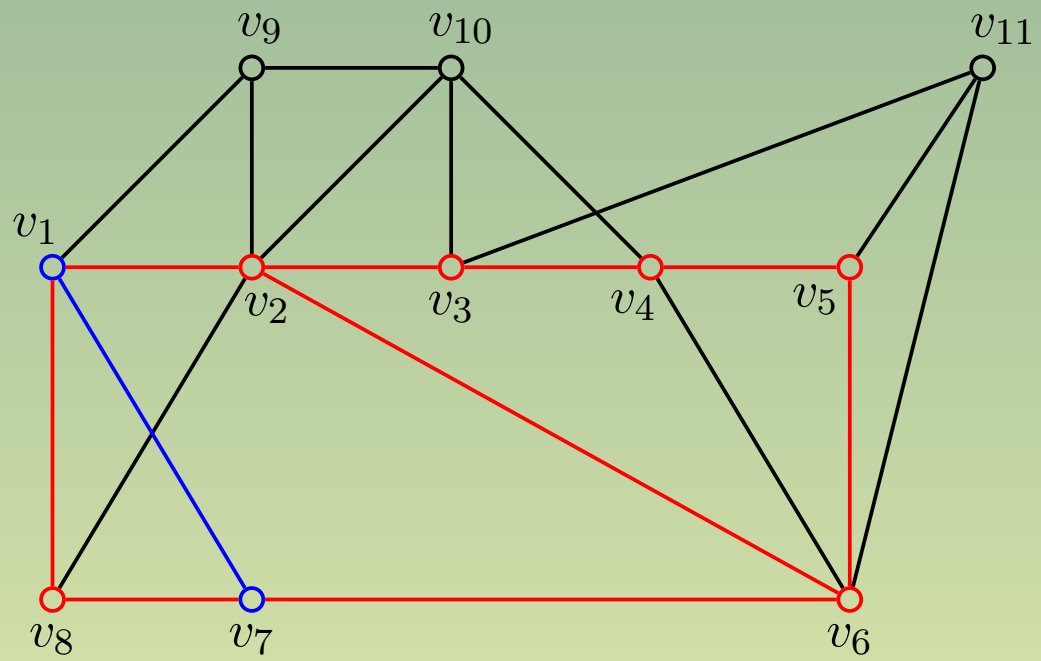
Na zadanom grafu $G = (V, E)$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



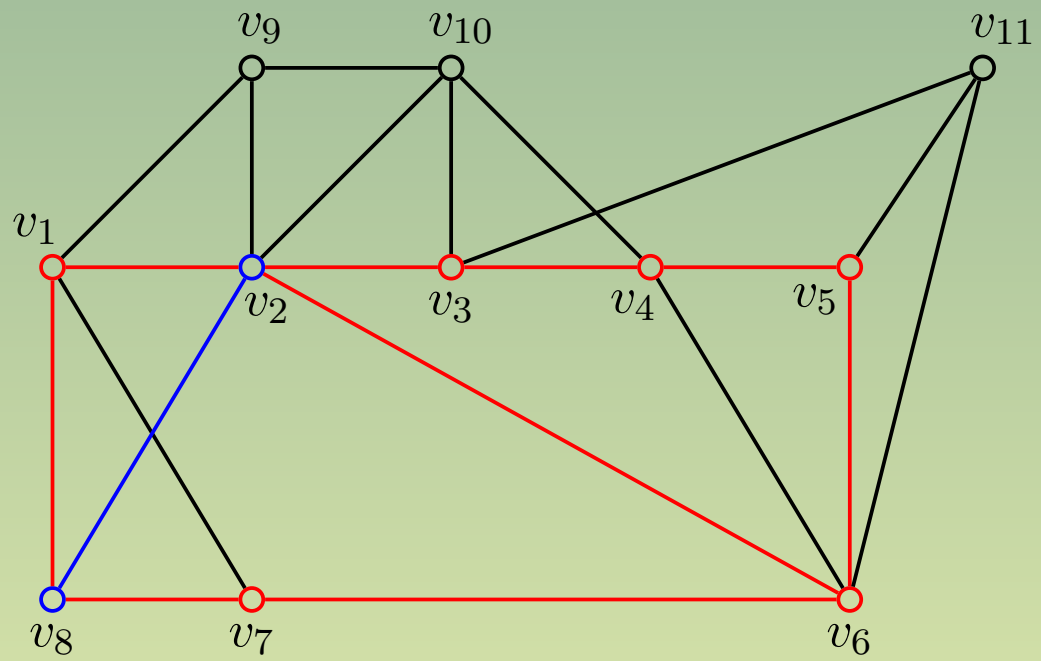
Na zadanom grafu $G = (V, E)$ uočimo crveni podgraf $G' = (V', E')$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



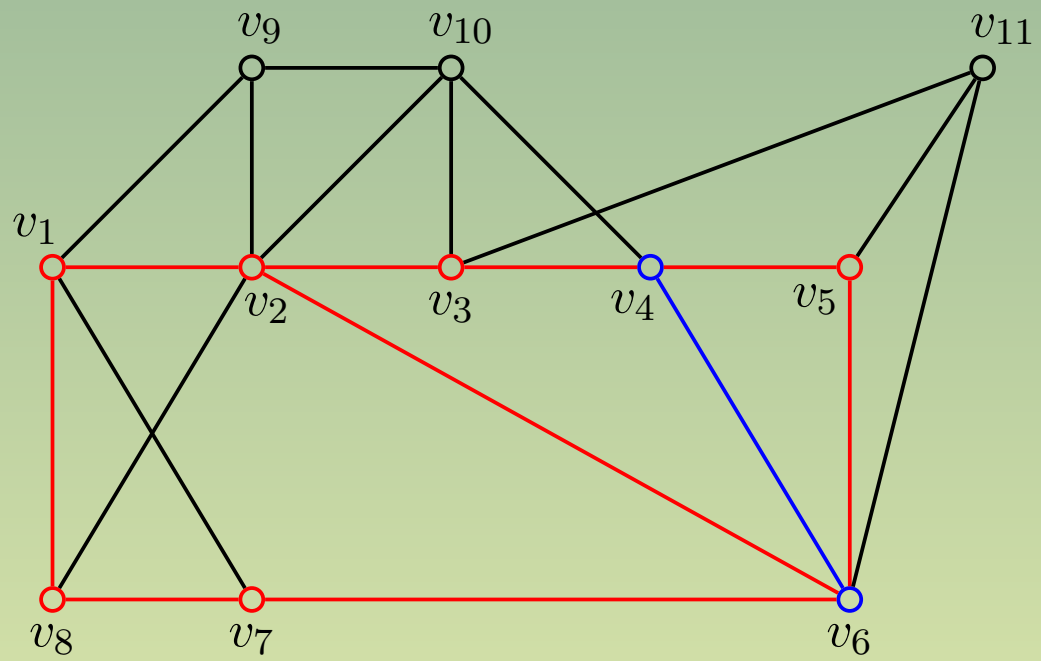
Na zadanom grafu $G = (V, E)$ uočimo crveni podgraf $G' = (V', E')$. Plavi podgraf $\mathcal{F}_1$ je fragment od G s obzirom na G' jer se sastoji od samo jednog brida koji ne pripada podgrafu G', a njegovi krajevi v_1 i v_7 pripadaju podgrafu G'. Kontaktni vrhovi fragmenta $\mathcal{F}_1$ su v_1 i v_7.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



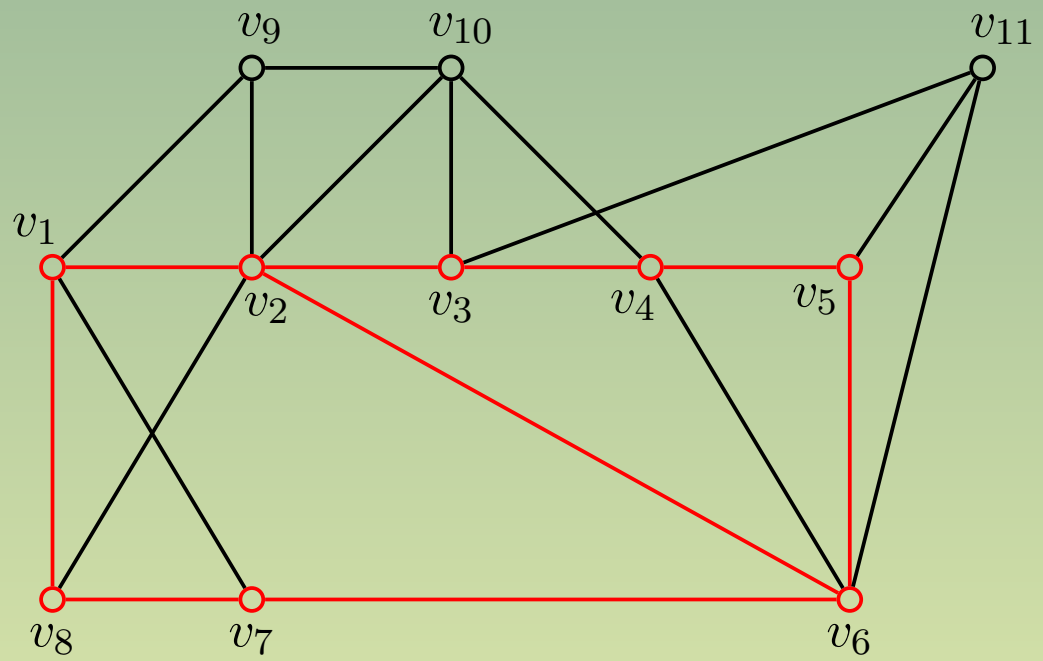
Na zadanom grafu $G = (V, E)$ uočimo crveni podgraf $G' = (V', E')$. Plavi podgraf $\mathcal{F}_2$ je fragment od G s obzirom na G' jer se sastoji od samo jednog brida koji ne pripada podgrafu G', a njegovi krajevi v_2 i v_8 pripadaju podgrafu G'. Kontaktni vrhovi fragmenta $\mathcal{F}_2$ su v_2 i v_8.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



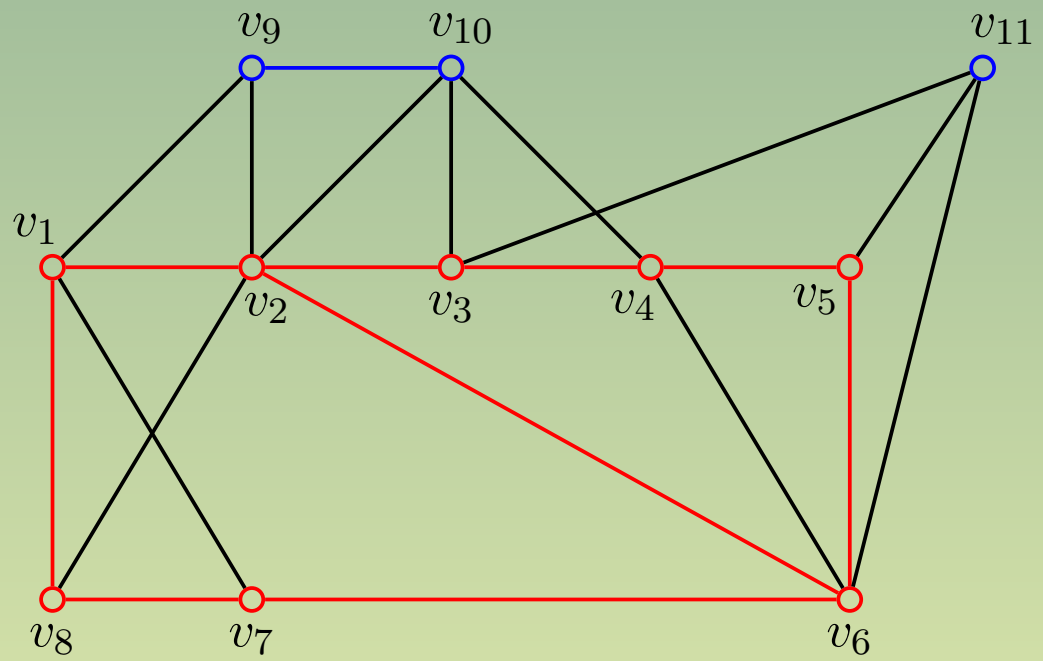
Na zadanom grafu $G = (V, E)$ uočimo crveni podgraf $G' = (V', E')$. Plavi podgraf $\mathcal{F}_3$ je fragment od G s obzirom na G' jer se sastoji od samo jednog brida koji ne pripada podgrafu G', a njegovi krajevi v_4 i v_6 pripadaju podgrafu G'. Kontaktni vrhovi fragmenta $\mathcal{F}_3$ su v_4 i v_6.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



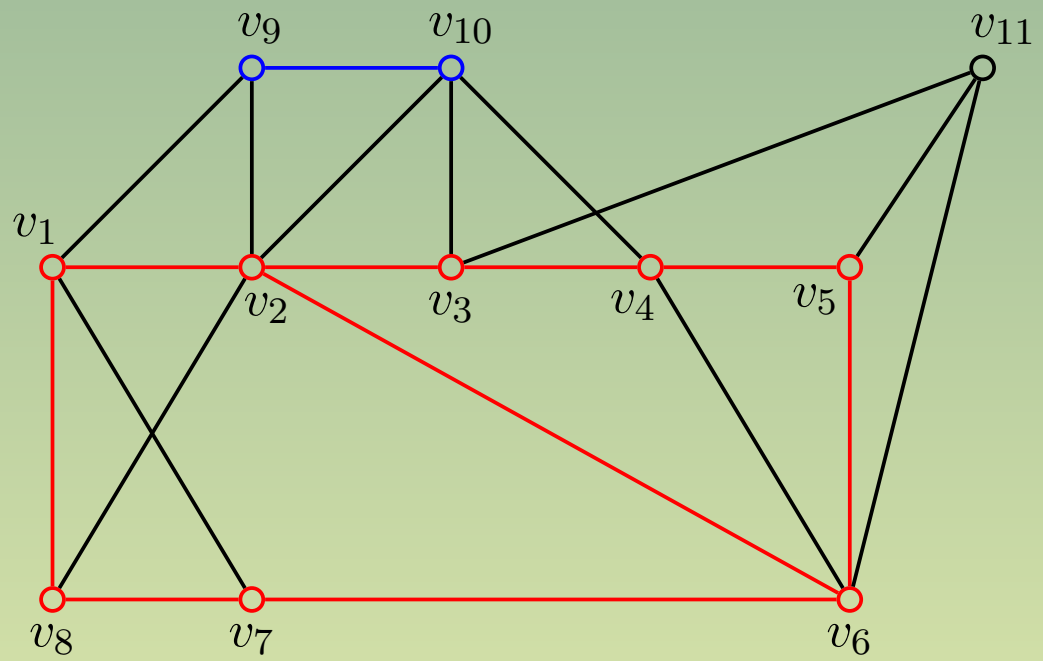
Na zadanom grafu $G = (V, E)$ uočimo crveni podgraf $G' = (V', E')$. Preostale fragmente od G s obzirom na G' odredit ćemo tako da pogledamo komponente povezanosti od $G[V \setminus V']$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



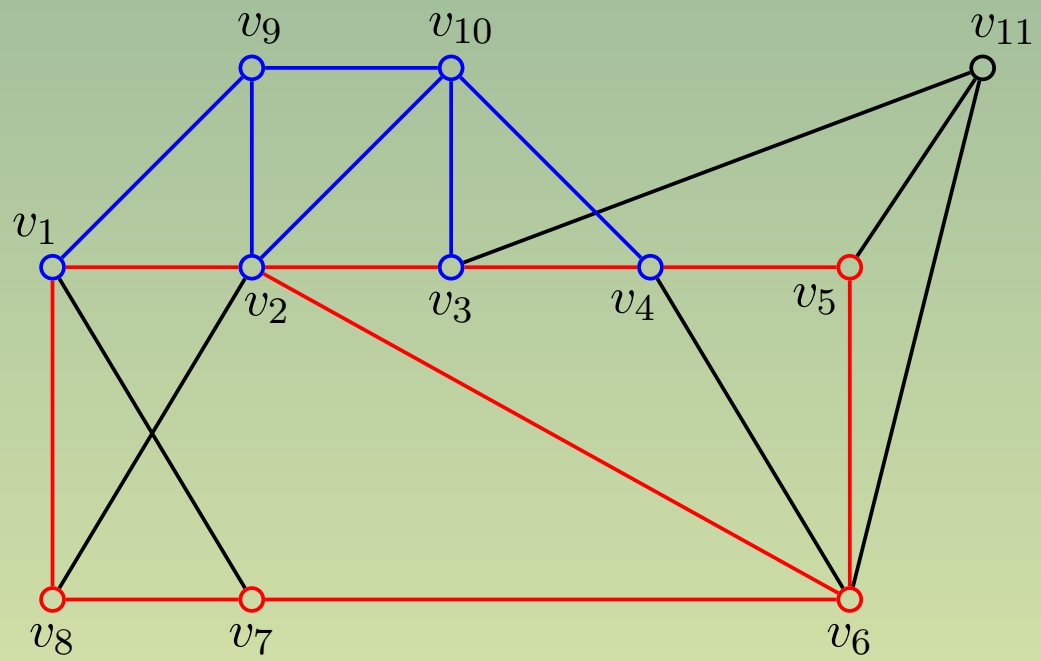
Na zadanom grafu $G = (V, E)$ uočimo crveni podgraf $G' = (V', E')$. Preostale fragmente od G s obzirom na G' odredit ćemo tako da pogledamo komponente povezanosti od $G[V \setminus V']$. Postoje ukupno dvije takve komponente. Jedna od njih se sastoji od vrhova v_9, v_{10} i brida v_9v_{10}, a druga se sastoji samo od vrha v_{11}.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



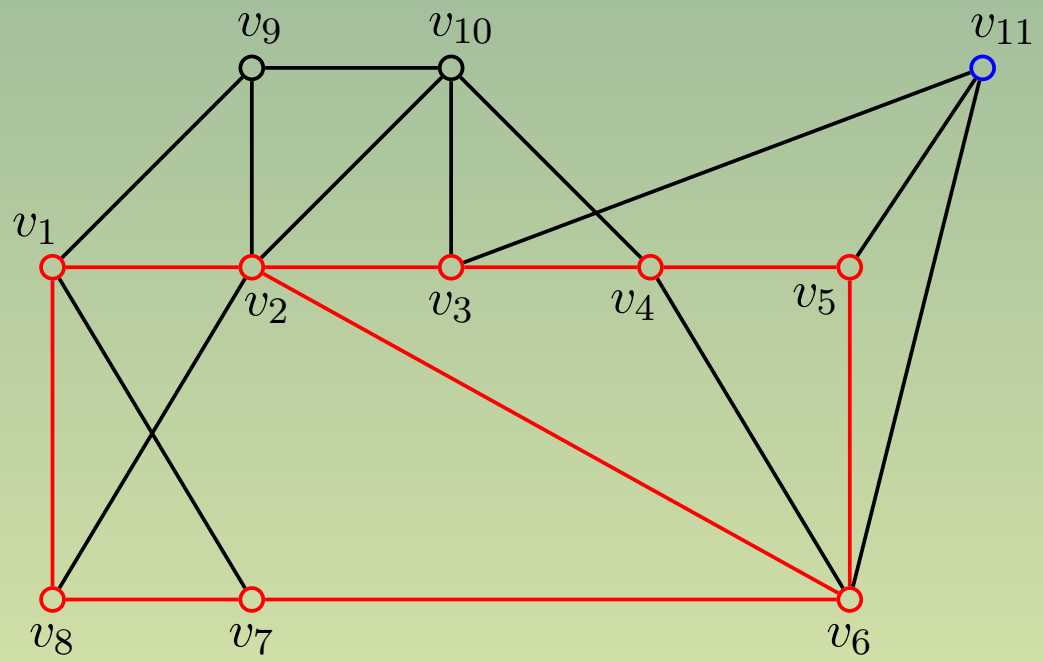
Na zadanom grafu $G = (V, E)$ uočimo crveni podgraf $G' = (V', E')$. Pogledajmo najprije komponentu koja se sastoji od vrhova v_9, v_{10} i brida v_9v_{10}.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na zadanom grafu $G = (V, E)$ uočimo crveni podgraf $G' = (V', E')$. Pogledajmo najprije komponentu koja se sastoji od vrhova v_9, v_{10} i brida v_9v_{10}. Ako toj komponenti dodamo sve bridove kojima je jedan kraj u toj komponenti, a drugi kraj u G', dobivamo opet novi fragment $\mathcal{F}_4$ od G s obzirom na G'. Kontaktni vrhovi fragmenta $\mathcal{F}_4$ su v_1, v_2, v_3 i v_4.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na zadanom grafu $G = (V, E)$ uočimo crveni podgraf $G' = (V', E')$. Pogledajmo još komponentu koja se sastoji od vrha v_{11}.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

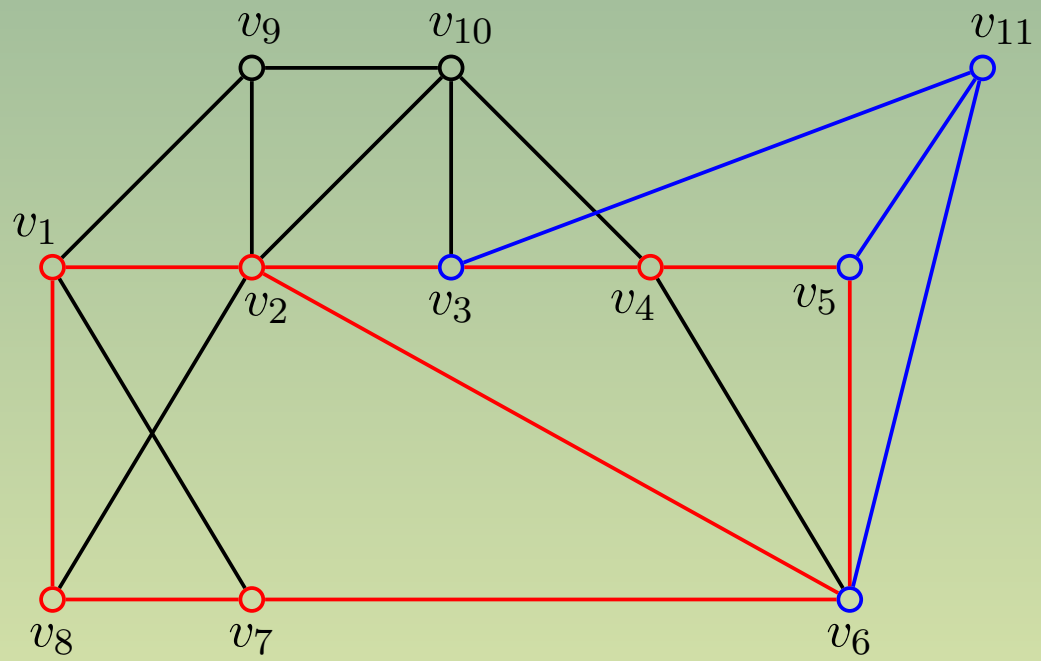
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

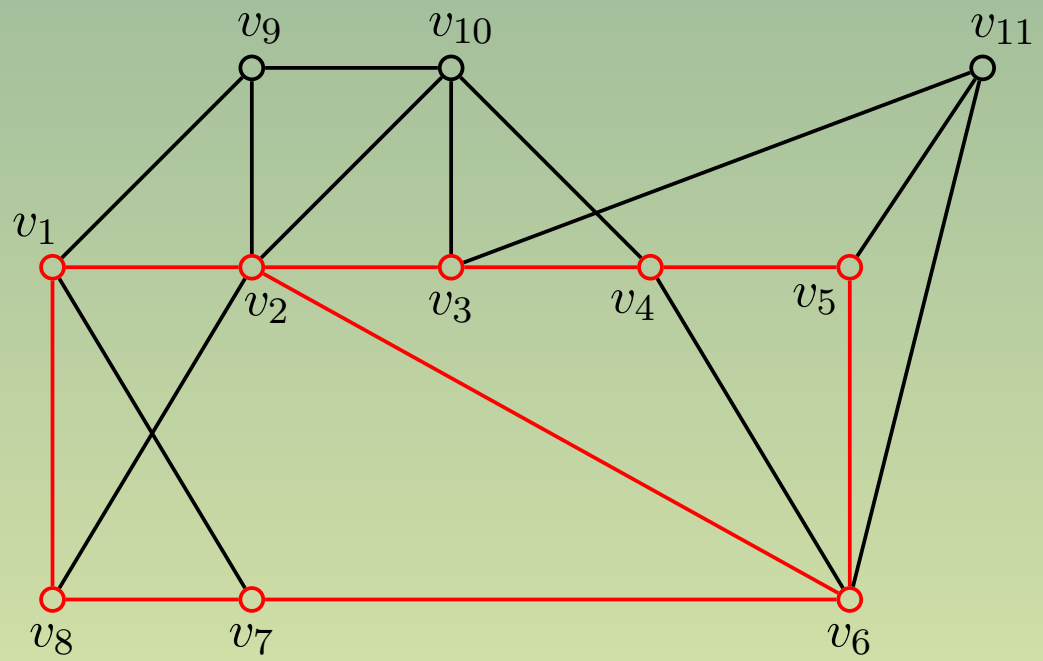
Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



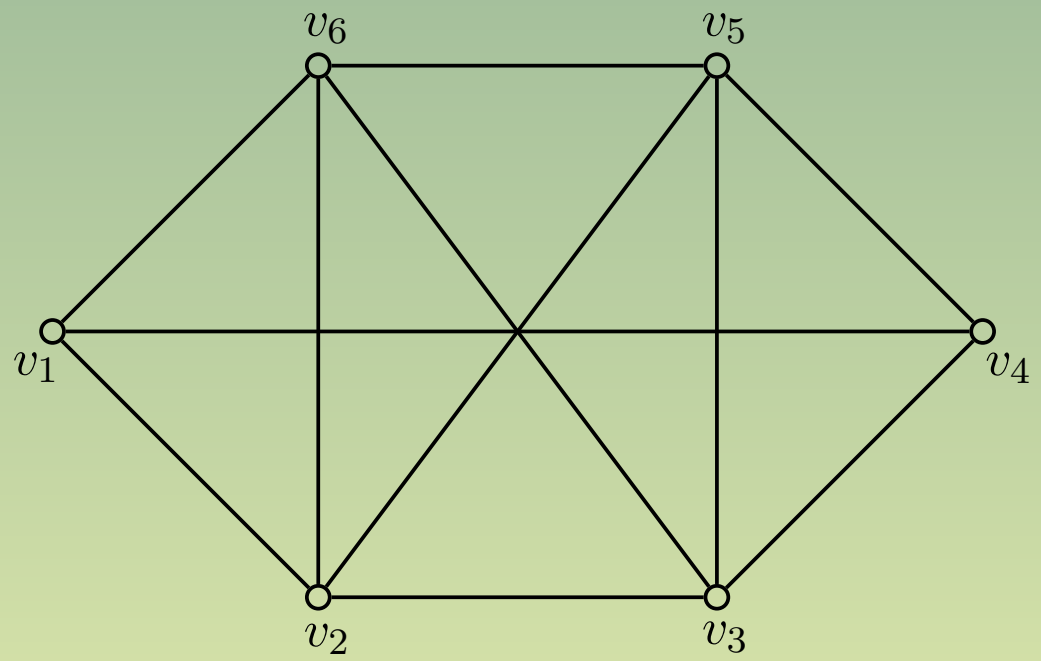
Na zadanom grafu $G = (V, E)$ uočimo crveni podgraf $G' = (V', E')$. Pogledajmo još komponentu koja se sastoji od vrha v_{11}. Ako toj komponenti dodamo sve bridove kojima je jedan kraj u toj komponenti, a drugi kraj u G', dobivamo još jedan fragment $\mathcal{F}_5$ od G s obzirom na G'. Kontaktni vrhovi fragmenta $\mathcal{F}_5$ su v_3, v_5 i v_6.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



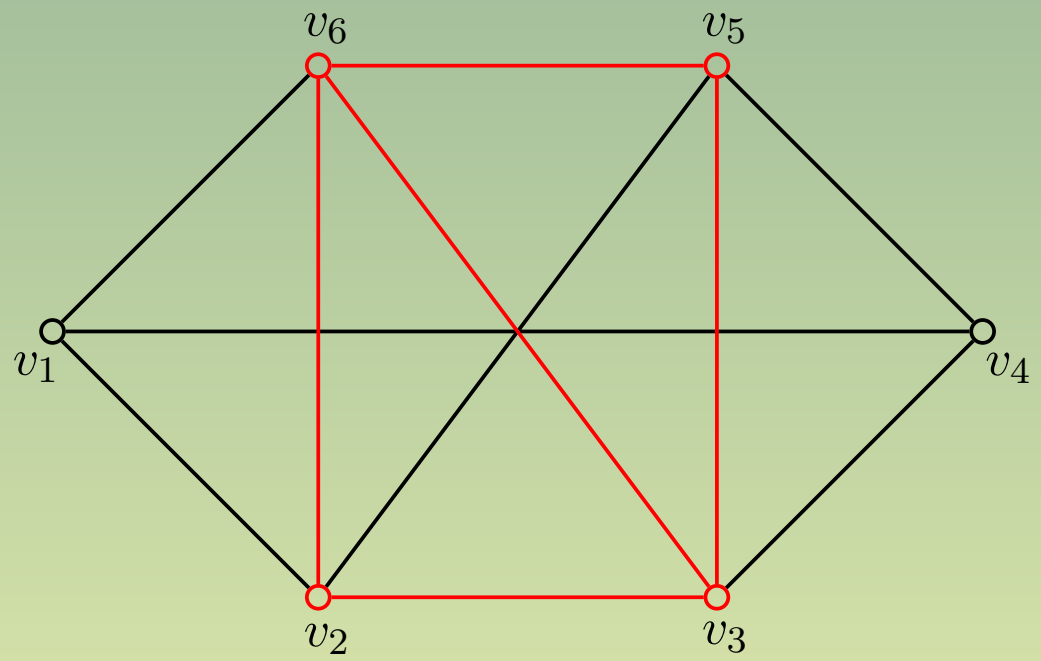
Na zadanom grafu $G = (V, E)$ uočimo crveni podgraf $G' = (V', E')$. Dakle, postoji ukupno pet fragmenata grafa G s obzirom na podgraf G'.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



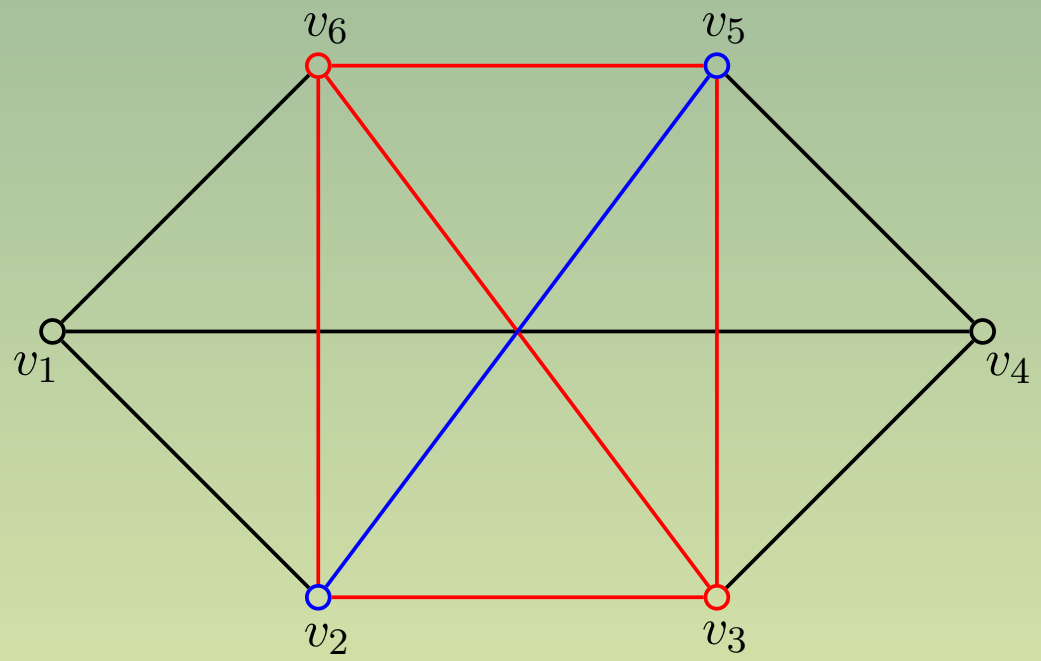
Na zadanom grafu $G = (V, E)$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na zadanom grafu $G = (V, E)$ uočimo crveni podgraf $G' = (V', E')$ i pronađimo sve fragmente od G s obzirom na G'.

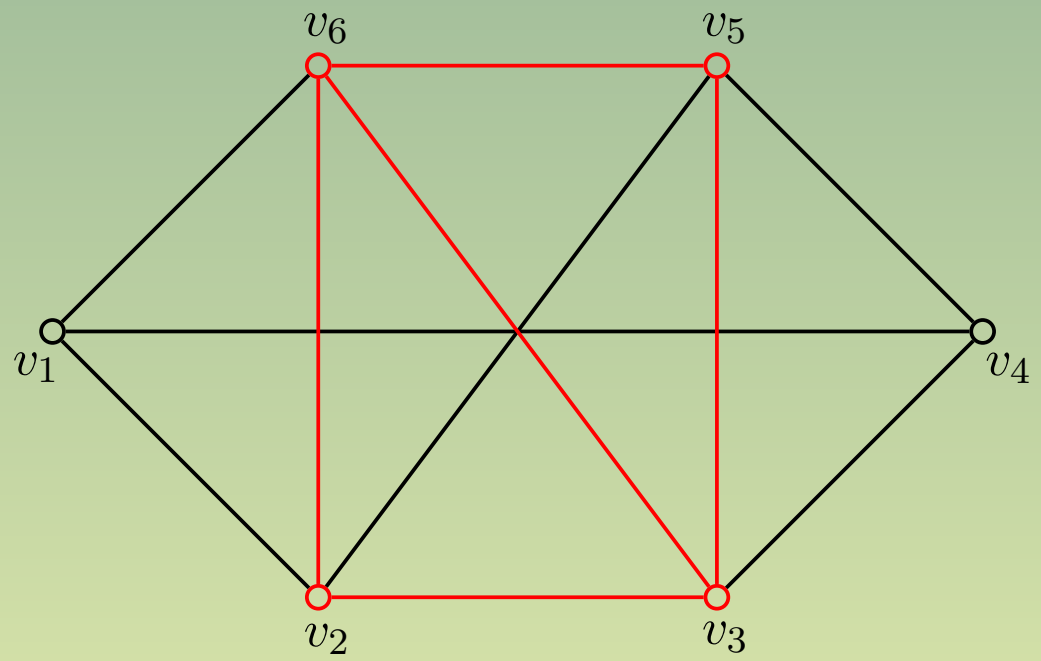
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na zadanom grafu $G = (V, E)$ uočimo crveni podgraf $G' = (V', E')$ i pronađimo sve fragmente od G s obzirom na G'.

Plavi podgraf $\mathcal{F}_1$ je fragment od G s obzirom na G' jer se sastoji od samo jednog brida koji ne pripada podgrafu G', a njegovi krajevi v_2 i v_5 pripadaju podgrafu G'. Kontaktni vrhovi fragmenta $\mathcal{F}_1$ su v_2 i v_5.

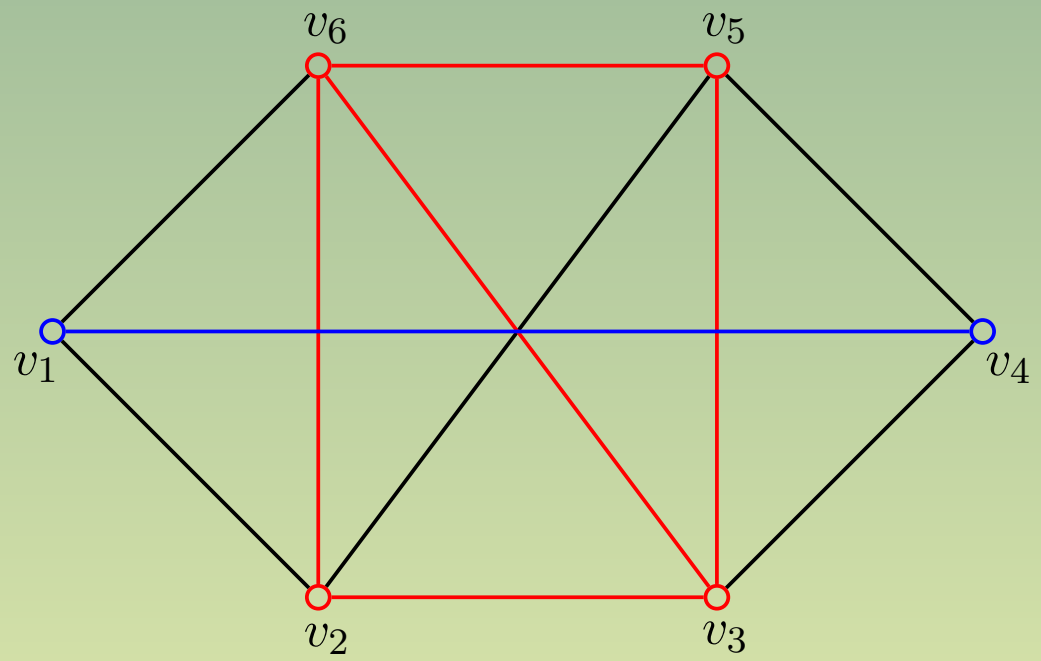
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na zadanom grafu $G = (V, E)$ uočimo crveni podgraf $G' = (V', E')$ i pronađimo sve fragmente od G s obzirom na G'.

Preostale fragmente od G s obzirom na G' odredit ćemo tako da pogledamo komponente povezanosti od $G[V \setminus V']$.

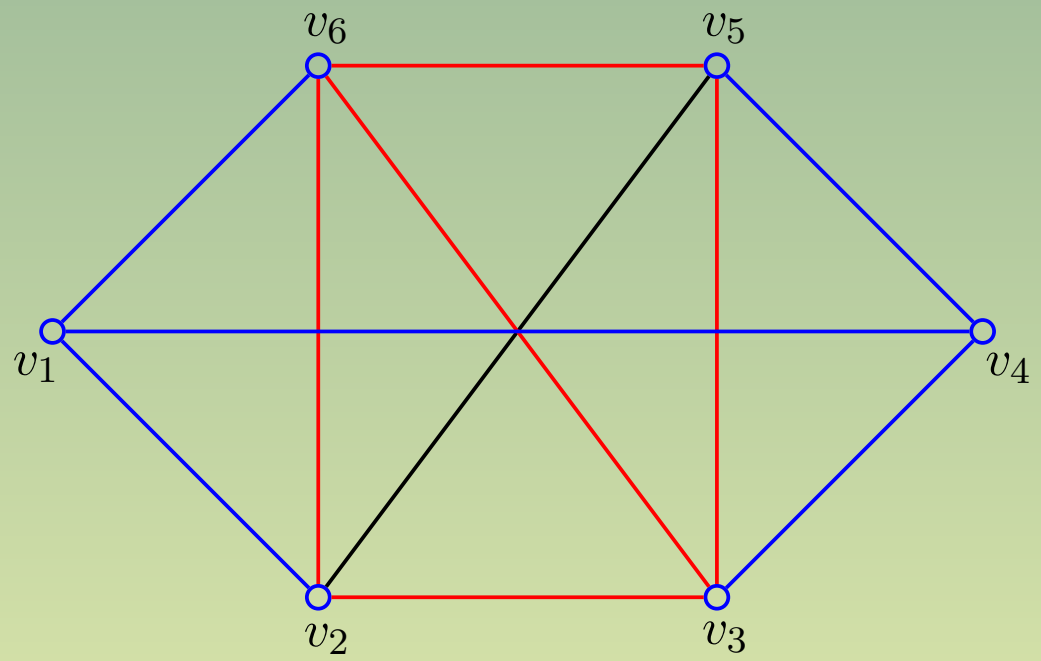
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na zadanom grafu $G = (V, E)$ uočimo crveni podgraf $G' = (V', E')$ i pronađimo sve fragmente od G s obzirom na G'.

Preostale fragmente od G s obzirom na G' odredit ćemo tako da pogledamo komponente povezanosti od $G[V \setminus V']$. Postoji samo jedna takva plavo označena komponenta.

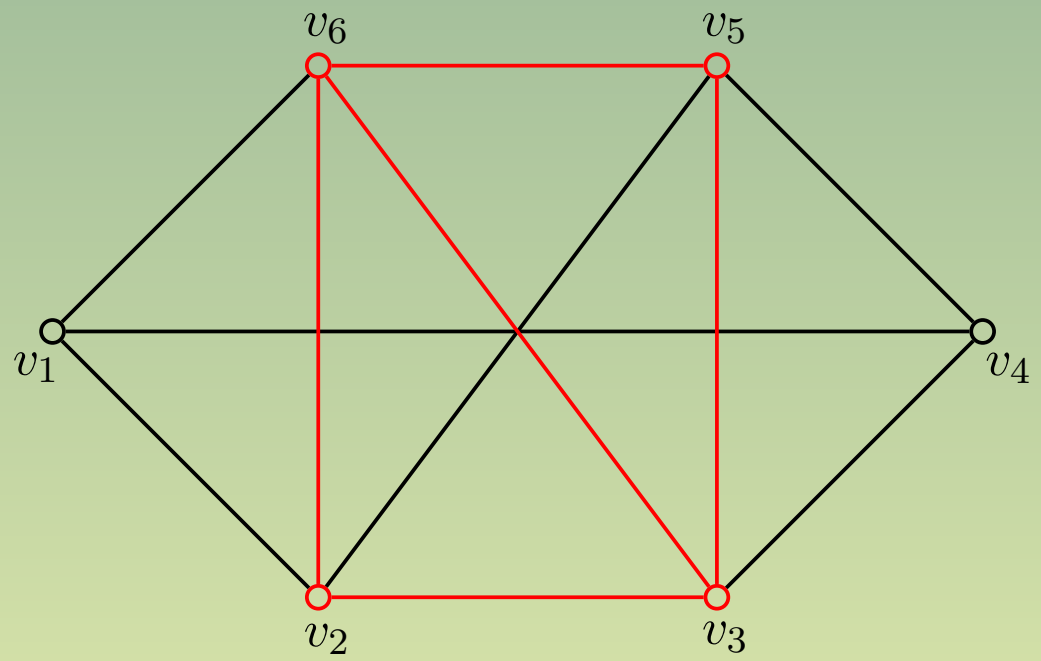
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na zadanom grafu $G = (V, E)$ uočimo crveni podgraf $G' = (V', E')$ i pronađimo sve fragmente od G s obzirom na G'.

Ako toj komponenti dodamo sve bridove kojima je jedan kraj u toj komponenti, a drugi kraj u G', dobivamo još jedan fragment $\mathcal{F}_2$ od G s obzirom na G'. Kontaktni vrhovi fragmenta $\mathcal{F}_2$ su v_2, v_3, v_5 i v_6.

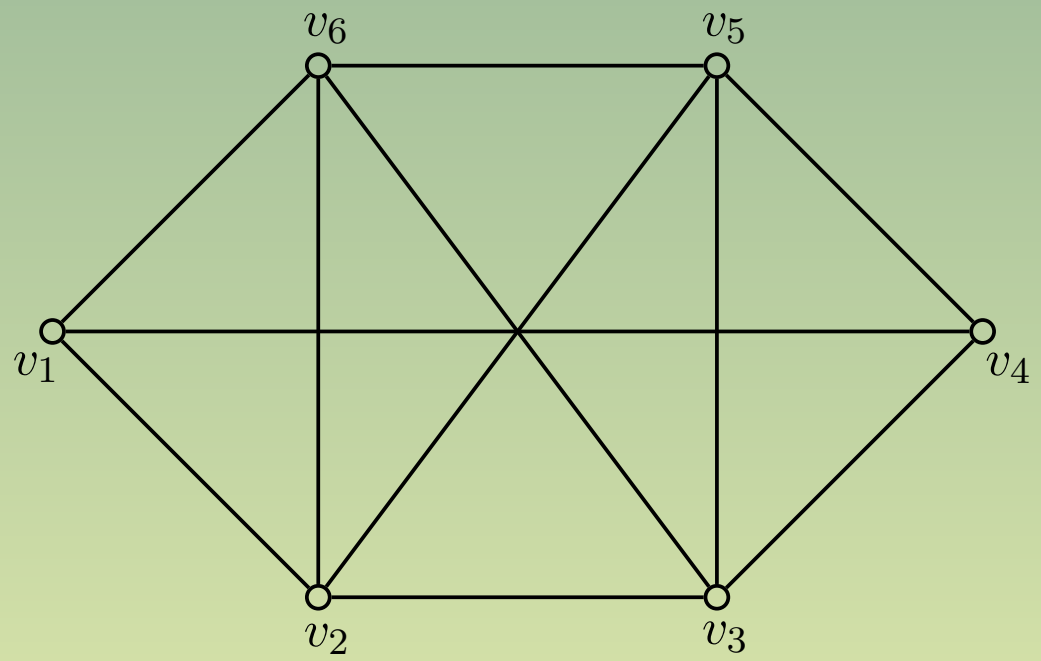
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na zadanom grafu $G = (V, E)$ uočimo crveni podgraf $G' = (V', E')$ i pronađimo sve fragmente od G s obzirom na G'.

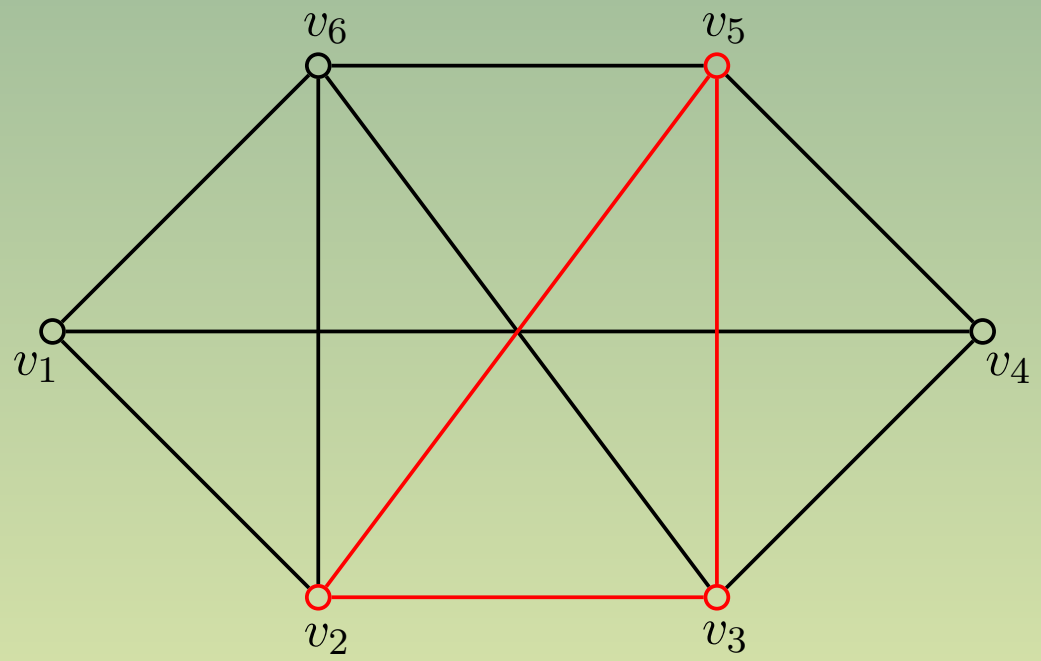
Dakle, postoje ukupno dva fragmenta $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ grafa G s obzirom na podgraf G'.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



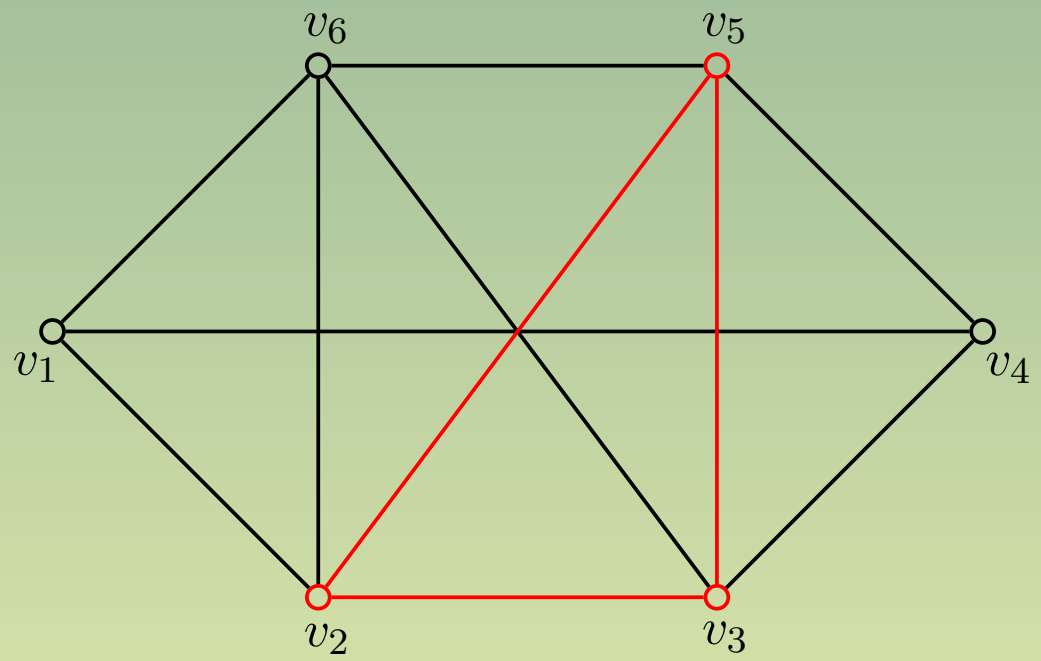
Na zadanom grafu $G = (V, E)$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na zadanom grafu $G = (V, E)$ uočimo crveni podgraf $G' = (V', E')$ i pronađimo sve fragmente od G s obzirom na G'.

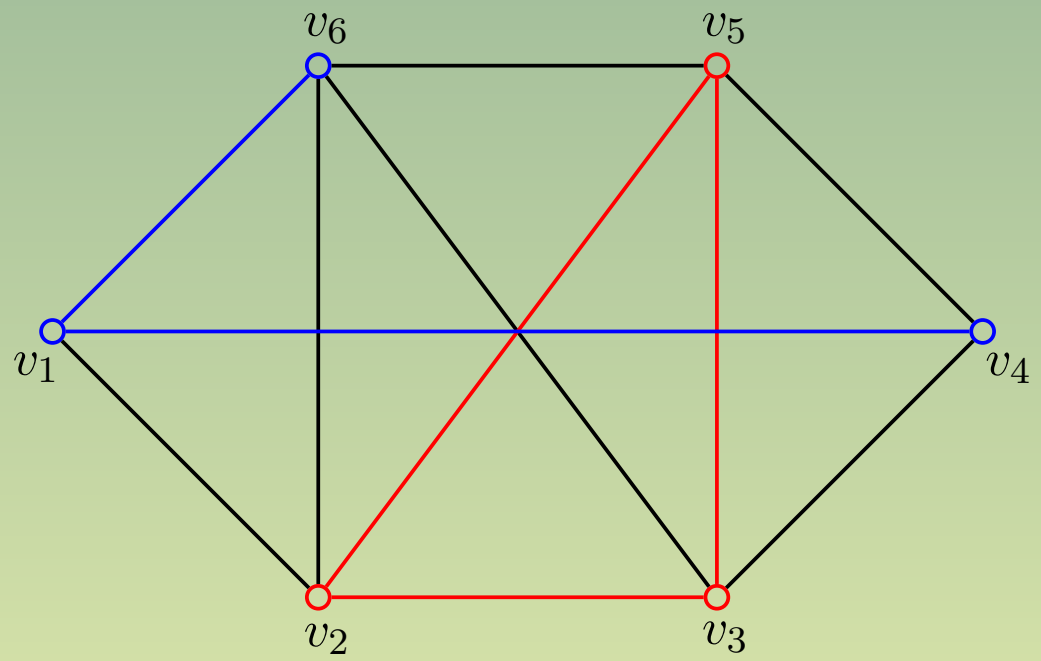
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na zadanom grafu $G = (V, E)$ uočimo crveni podgraf $G' = (V', E')$ i pronađimo sve fragmente od G s obzirom na G'.

Kako nema bridova iz $E \setminus E'$ kojima oba kraja pripadaju podgrafu G', tražimo odmah komponente povezanosti od $G[V \setminus V']$.

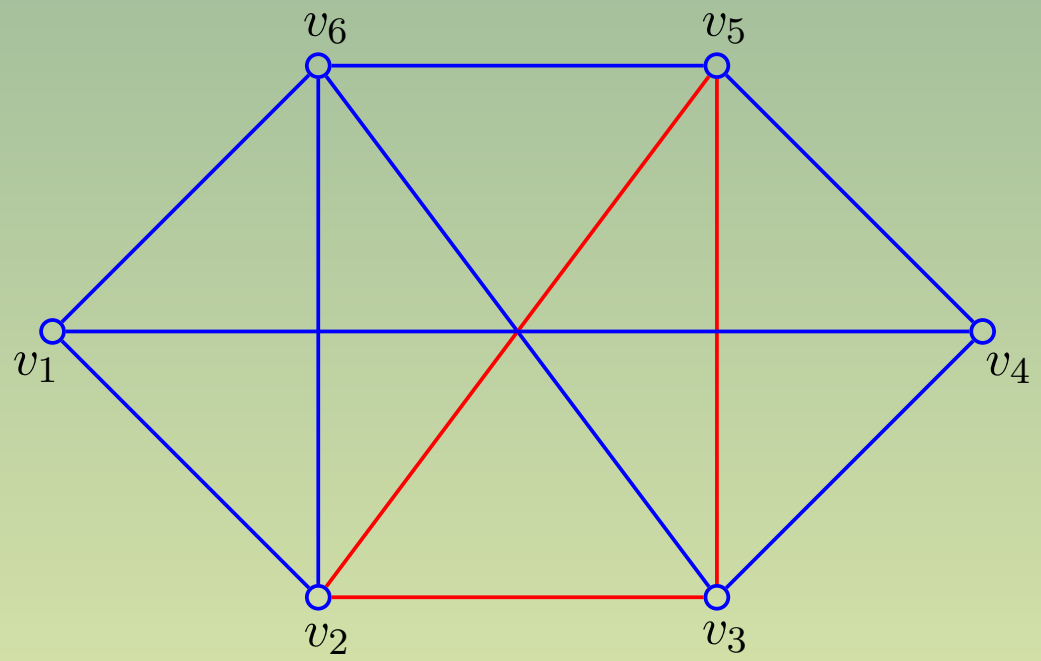
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na zadanom grafu $G = (V, E)$ uočimo crveni podgraf $G' = (V', E')$ i pronađimo sve fragmente od G s obzirom na G'.

Kako nema bridova iz $E \setminus E'$ kojima oba kraja pripadaju podgrafu G', tražimo odmah komponente povezanosti od $G[V \setminus V']$. Postoji samo jedna takva plavo označena komponenta.

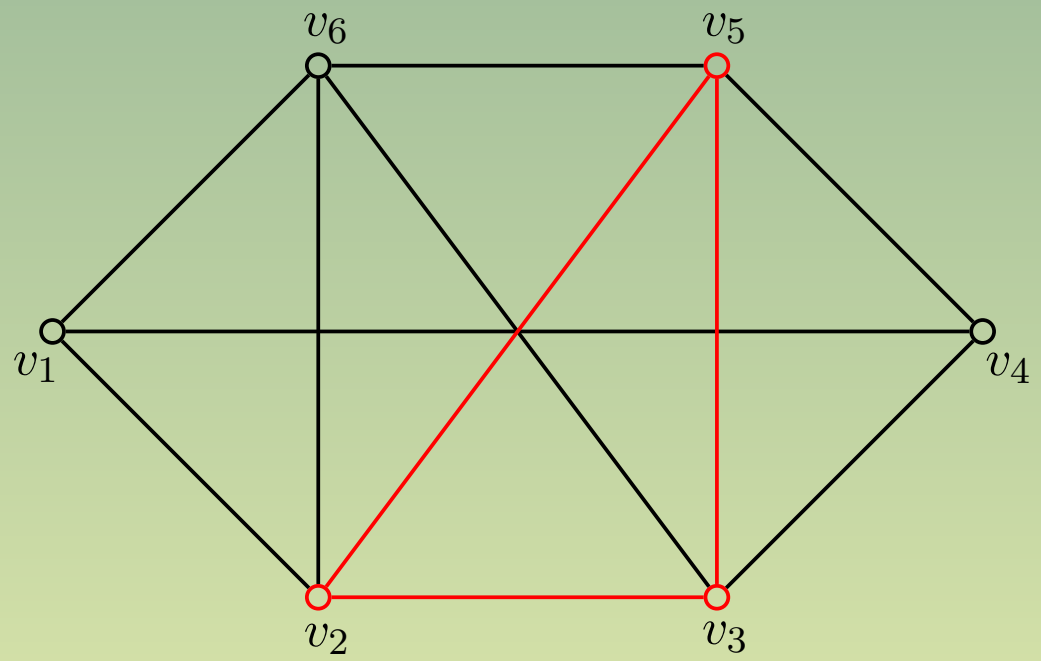
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na zadanom grafu $G = (V, E)$ uočimo crveni podgraf $G' = (V', E')$ i pronađimo sve fragmente od G s obzirom na G'.

Ako toj komponenti dodamo sve bridove kojima je jedan kraj u toj komponenti, a drugi kraj u G', dobivamo fragment $\mathcal{F}_1$ od G s obzirom na G'. Kontaktni vrhovi fragmenta $\mathcal{F}_1$ su v_2, v_3 i v_5.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na zadanom grafu $G = (V, E)$ uočimo crveni podgraf $G' = (V', E')$ i pronađimo sve fragmente od G s obzirom na G'.

Zaključujemo da postoji samo jedan fragment grafa G s obzirom na podgraf G'.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

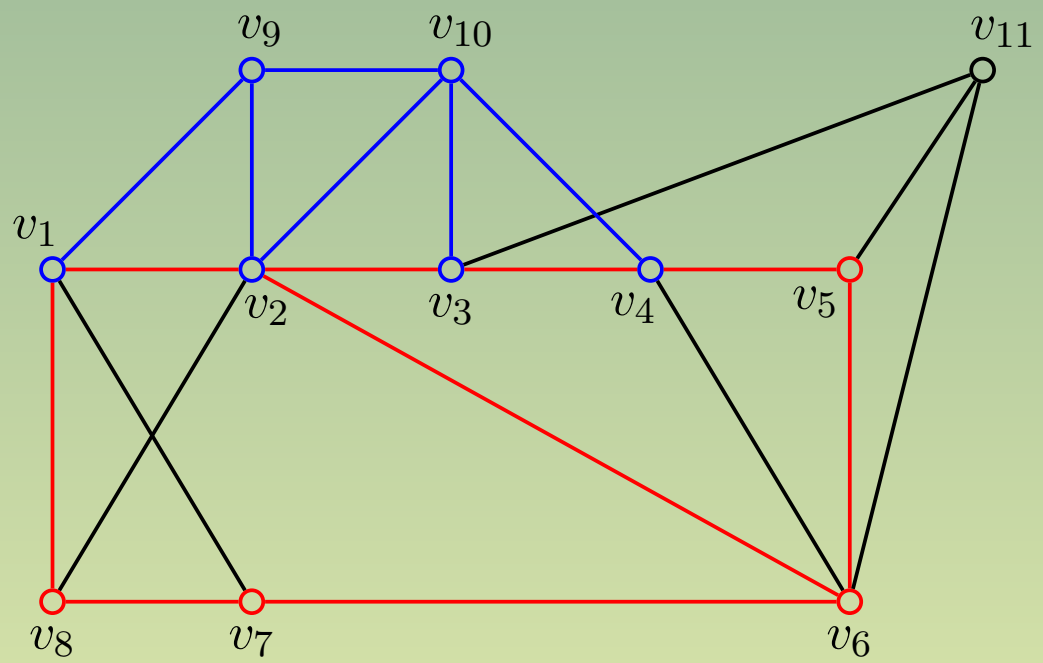
Neka je G graf, a G' podgraf od G. Neka je $\mathcal{F}$ fragment od G s obzirom na G'. **α-put** u fragmentu $\mathcal{F}$ je svaki put $P \subseteq \mathcal{F}$ u kojemu su početni i završni vrh jedini kontaktni vrhovi na putu P.

Neka je G graf, a G' podgraf od G. Neka su $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ fragmenti od G s obzirom na G'. Kažemo da su $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ **natjecateljski fragmenti** ako su zadovoljena sljedeća dva uvjeta:

i. $S(\mathcal{F}_1) \cap S(\mathcal{F}_2) \neq \emptyset$, tj. fragmenti $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ imaju zajedničkih dopustivih strana.

ii. Za svaku stranu iz $S(\mathcal{F}_1) \cap S(\mathcal{F}_2)$ postoje α-putovi $P_1 \subseteq \mathcal{F}_1$ i $P_2 \subseteq \mathcal{F}_2$ koji se ne mogu istovremeno smjestiti u tu zajedničku stranu tako da se pritom ne sijeku niti na jednom mjestu unutar bridova.

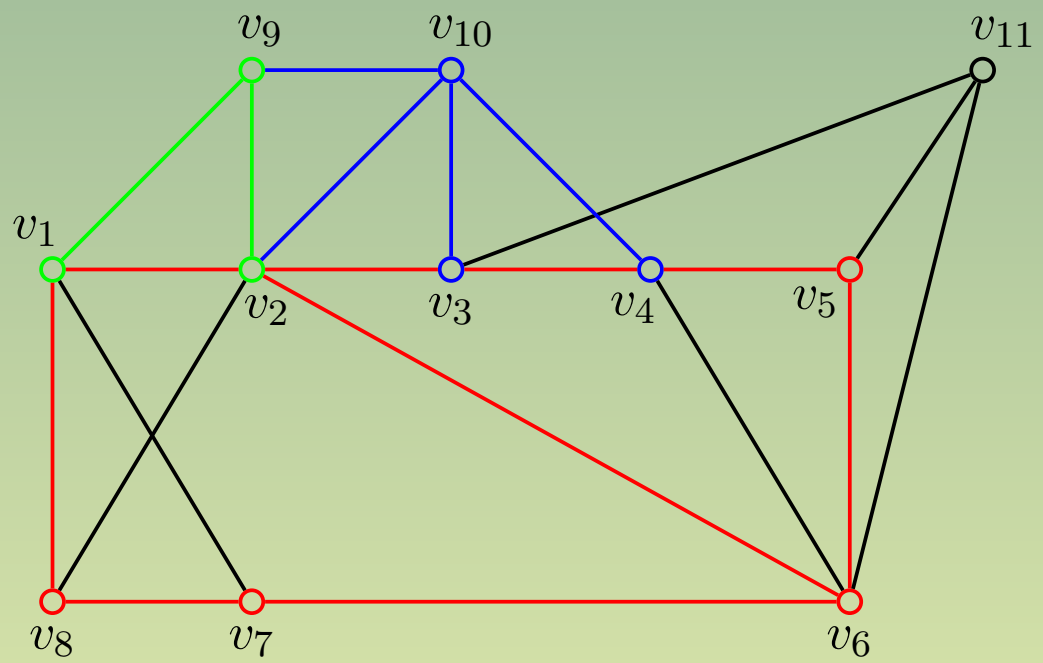
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Plavi podgraf $\mathcal{F}$ je fragment od G s obzirom na crveni podgraf G'.

Kontaktni vrhovi promatranog fragmenta su v_1, v_2, v_3 i v_4.

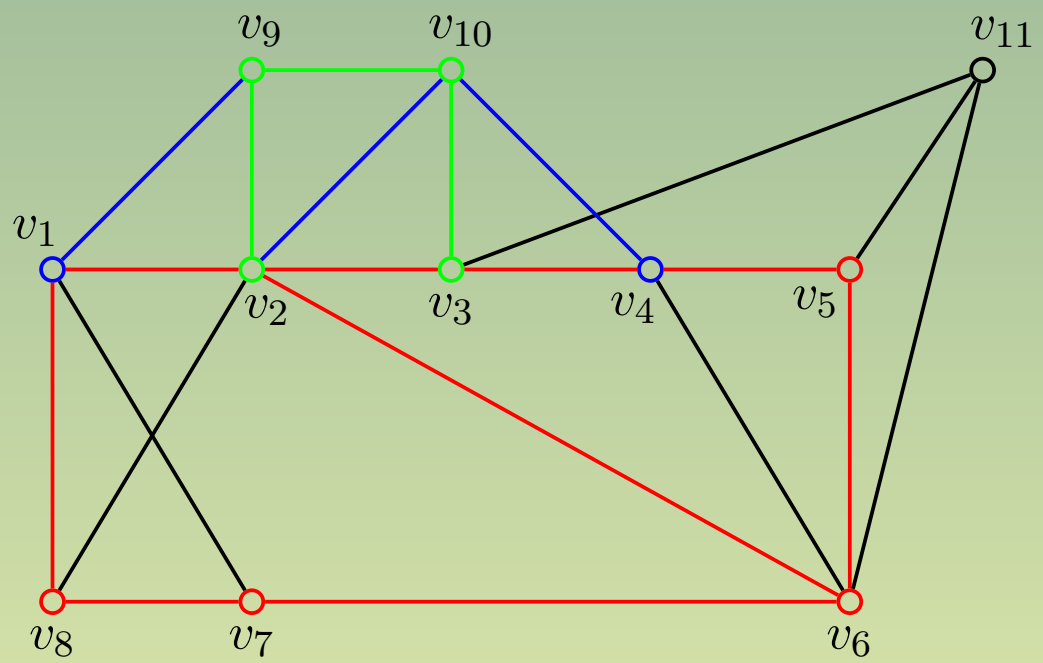
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Plavi podgraf $\mathcal{F}$ je fragment od G s obzirom na crveni podgraf G'. Kontaktni vrhovi promatranog fragmenta su v_1, v_2, v_3 i v_4.

Put $v_1v_9v_2$ je α-put u $\mathcal{F}$ jer su početni i završni vrh jedini kontaktni vrhovi na tom putu.

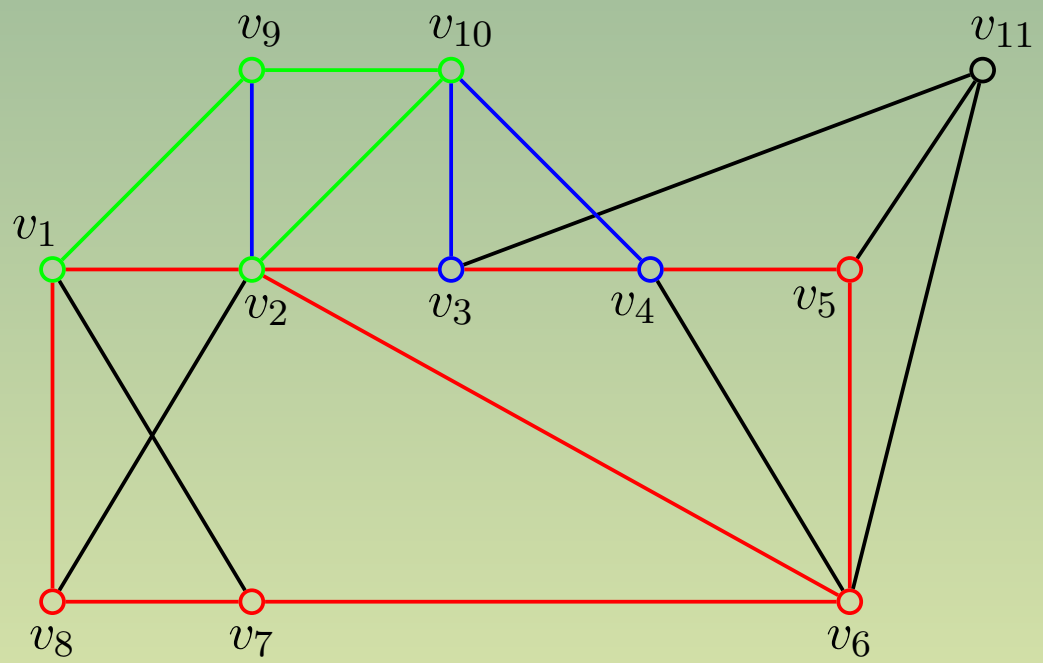
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Plavi podgraf $\mathcal{F}$ je fragment od G s obzirom na crveni podgraf G'. Kontaktni vrhovi promatranog fragmenta su v_1, v_2, v_3 i v_4.

Put $v_2v_9v_{10}v_3$ je α-put u $\mathcal{F}$ jer su početni i završni vrh jedini kontaktni vrhovi na tom putu.

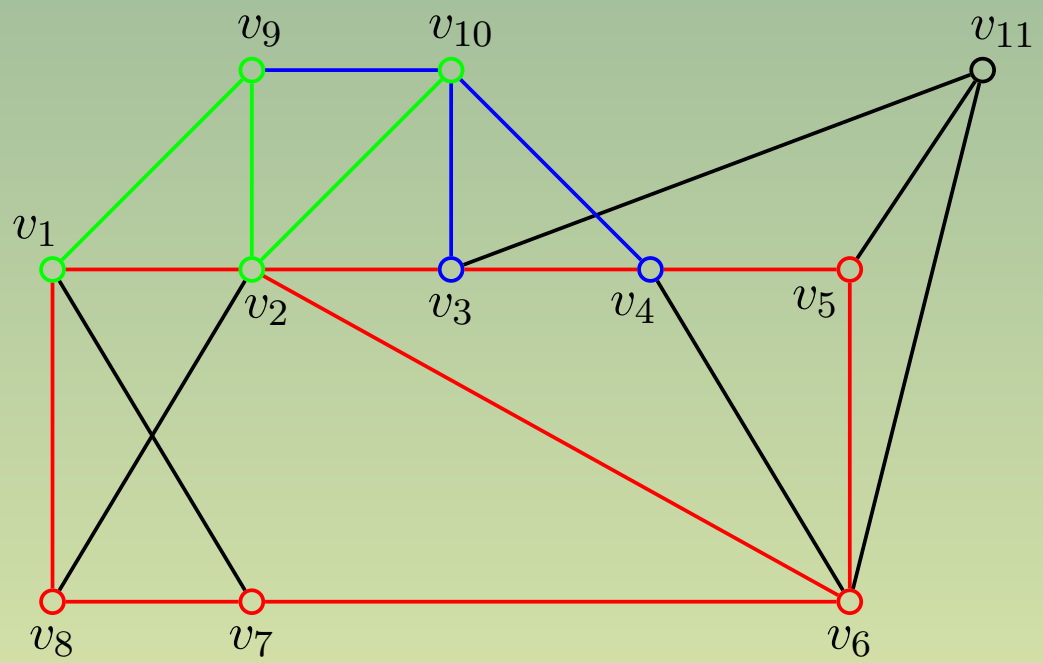
Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Plavi podgraf $\mathcal{F}$ je fragment od G s obzirom na crveni podgraf G'. Kontaktni vrhovi promatranog fragmenta su v_1, v_2, v_3 i v_4.

Put $v_1v_9v_{10}v_2$ je α-put u $\mathcal{F}$ jer su početni i završni vrh jedini kontaktni vrhovi na tom putu.

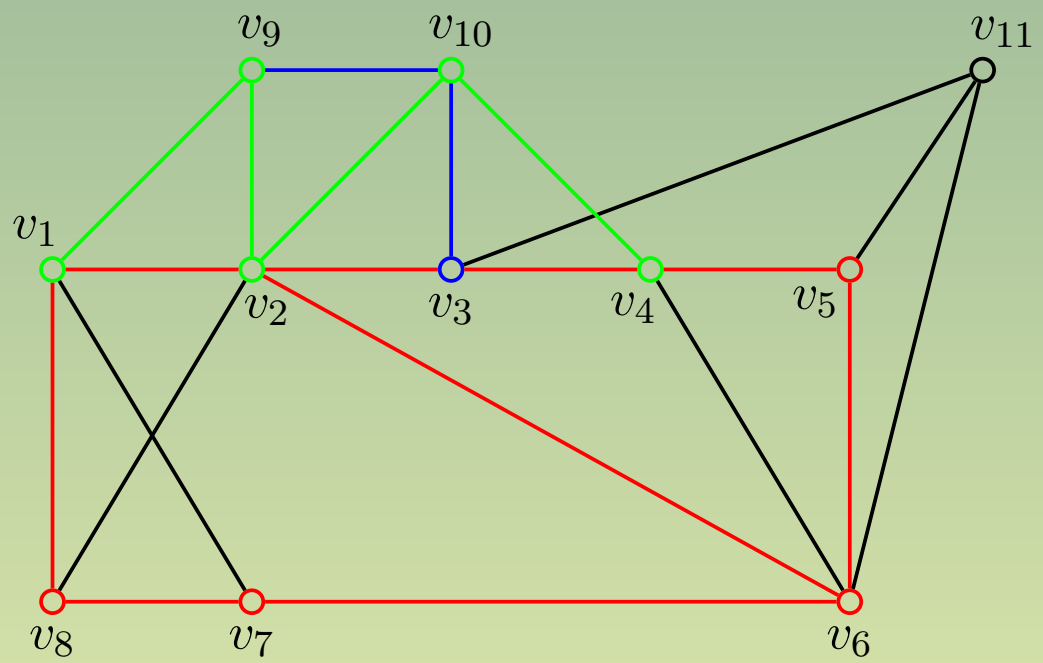
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Plavi podgraf $\mathcal{F}$ je fragment od G s obzirom na crveni podgraf G'. Kontaktni vrhovi promatranog fragmenta su v_1, v_2, v_3 i v_4.

Put $v_1v_9v_2v_{10}$ nije α-put u $\mathcal{F}$ jer završni vrh v_{10} nije kontaktni vrh i još je k tome unutarnji vrh v_2 kontaktni vrh.

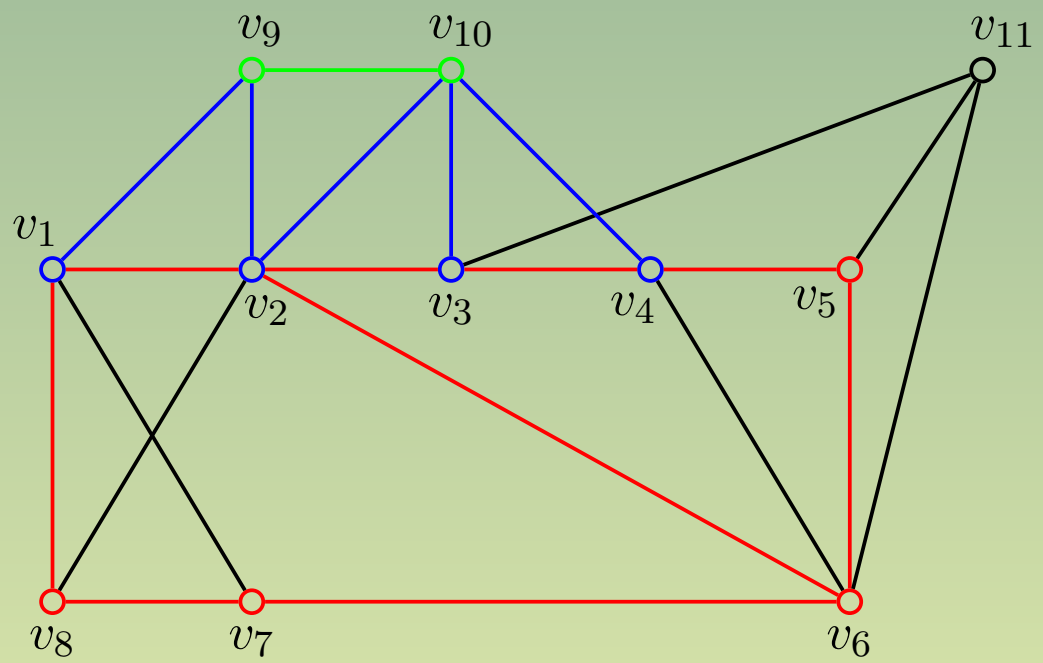
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Plavi podgraf $\mathcal{F}$ je fragment od G s obzirom na crveni podgraf G'. Kontaktni vrhovi promatranog fragmenta su v_1, v_2, v_3 i v_4.

Put $v_1v_9v_2v_{10}v_4$ nije α-put u $\mathcal{F}$ jer početni i završni vrh nisu jedini kontaktni vrhovi na tom putu. Naime, unutarnji vrh v_2 je također kontaktni vrh.

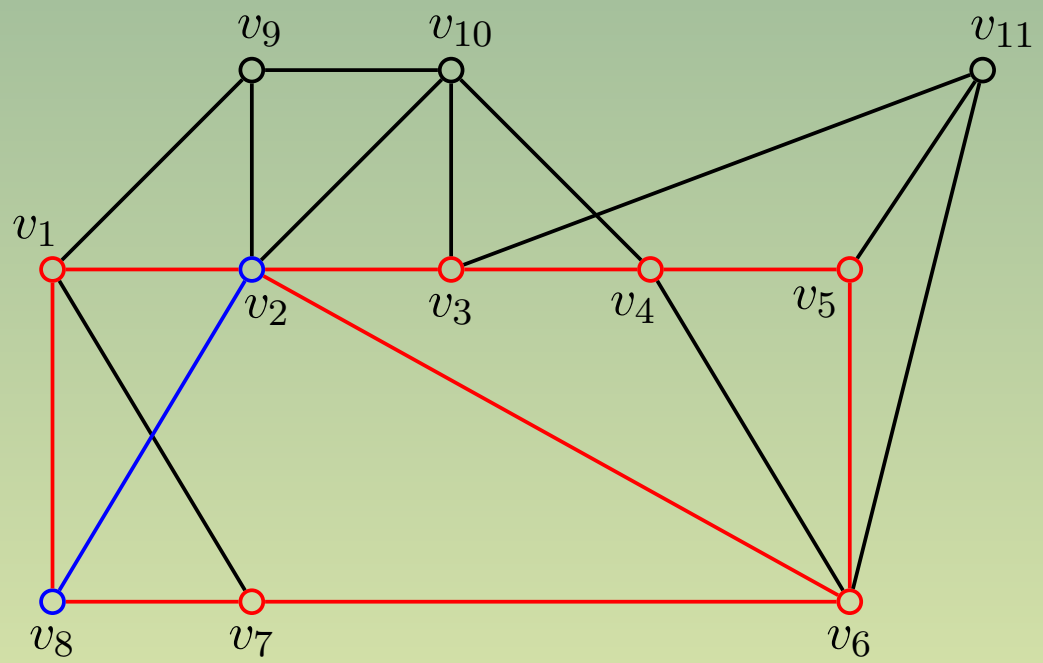
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Plavi podgraf $\mathcal{F}$ je fragment od G s obzirom na crveni podgraf G'. Kontaktni vrhovi promatranog fragmenta su v_1, v_2, v_3 i v_4.

Put v_9v_{10} nije α-put u $\mathcal{F}$ jer početni i završni vrh nisu kontaktni vrhovi.

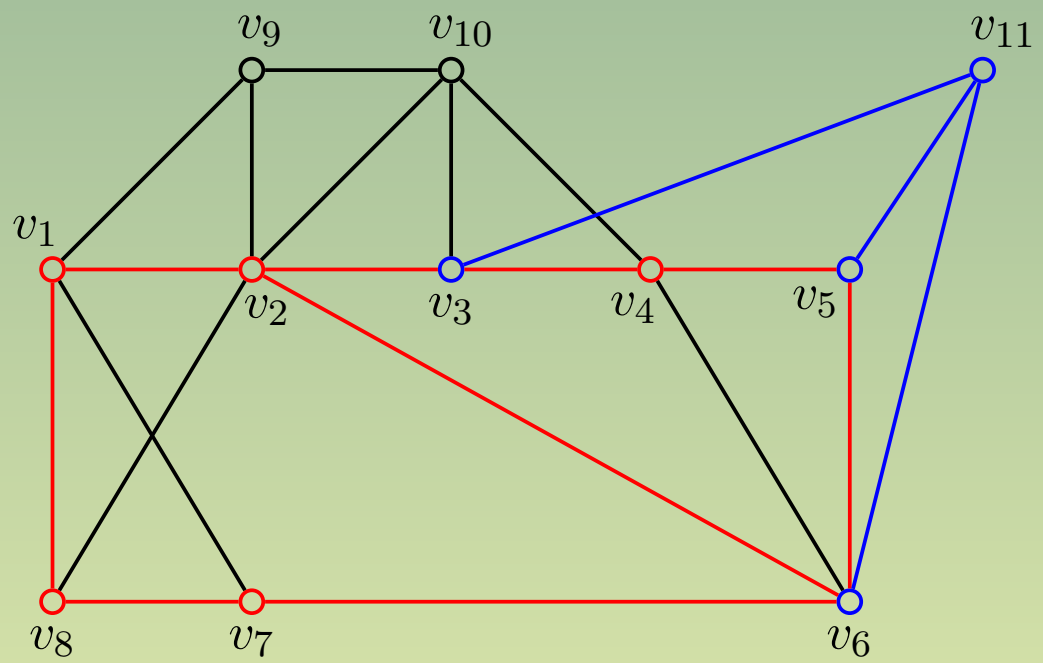
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Plavi podgraf $\mathcal{F}$ je fragment od G s obzirom na crveni podgraf G'.
Kontaktni vrhovi promatranog fragmenta su v_2 i v_8.

Put v_2v_8 je jedini α-put u $\mathcal{F}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

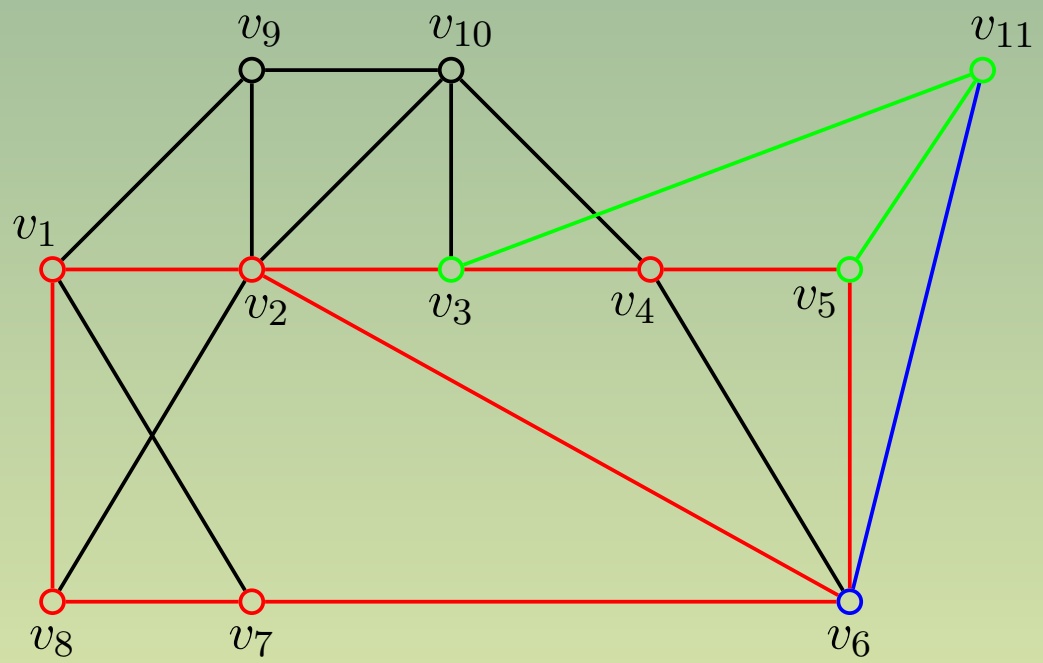


Plavi podgraf $\mathcal{F}$ je fragment od G s obzirom na crveni podgraf G'.

Kontaktni vrhovi promatranog fragmenta su v_3, v_5 i v_6.

Postoje ukupno tri α-puta u $\mathcal{F}$:

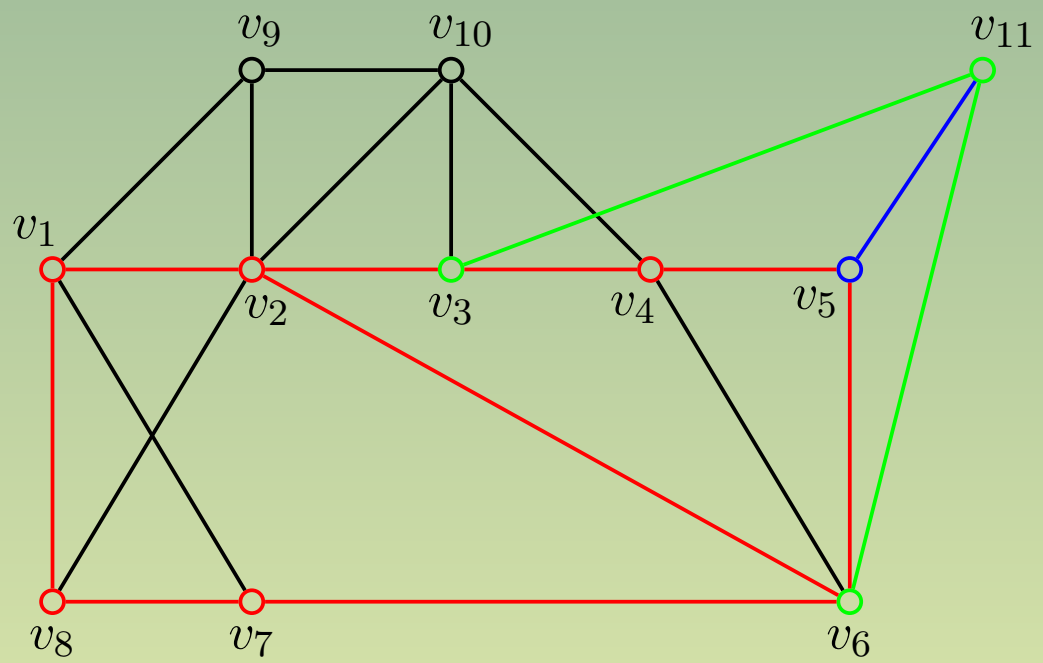
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Plavi podgraf $\mathcal{F}$ je fragment od G s obzirom na crveni podgraf G'.

Kontaktni vrhovi promatranog fragmenta su v_3, v_5 i v_6.

Postoje ukupno tri α-puta u $\mathcal{F}$: $v_3v_{11}v_5$



Plavi podgraf $\mathcal{F}$ je fragment od G s obzirom na crveni podgraf G'.

Kontaktni vrhovi promatranog fragmenta su v_3, v_5 i v_6.

Postoje ukupno tri α-puta u $\mathcal{F}$: $v_3v_{11}v_5$, $v_3v_{11}v_6$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

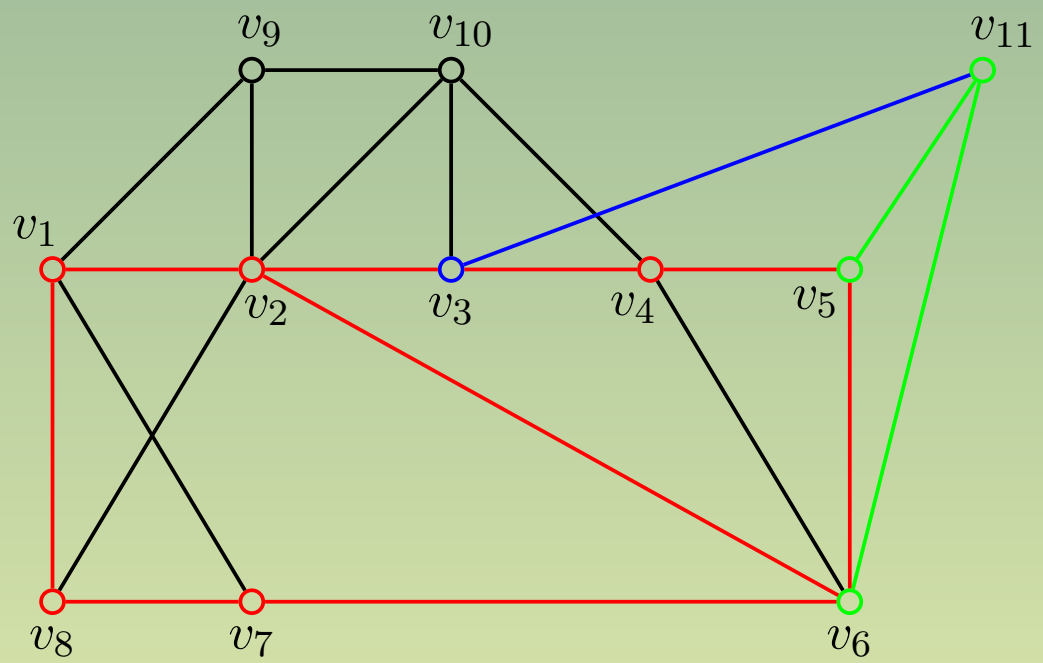
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

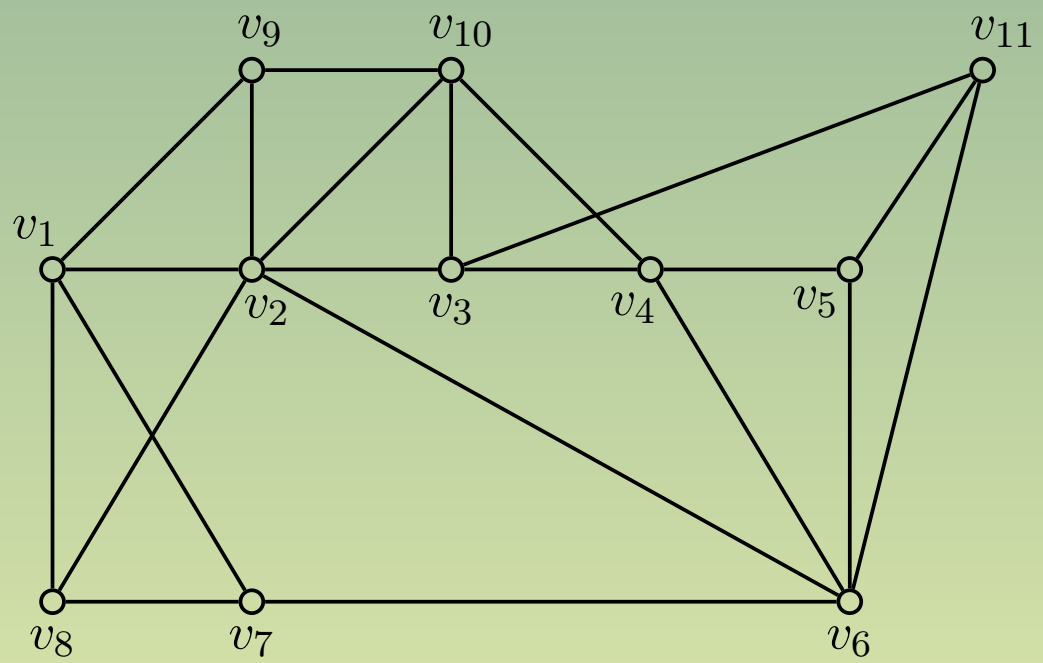
Savršena sparivanja



Plavi podgraf $\mathcal{F}$ je fragment od G s obzirom na crveni podgraf G'.

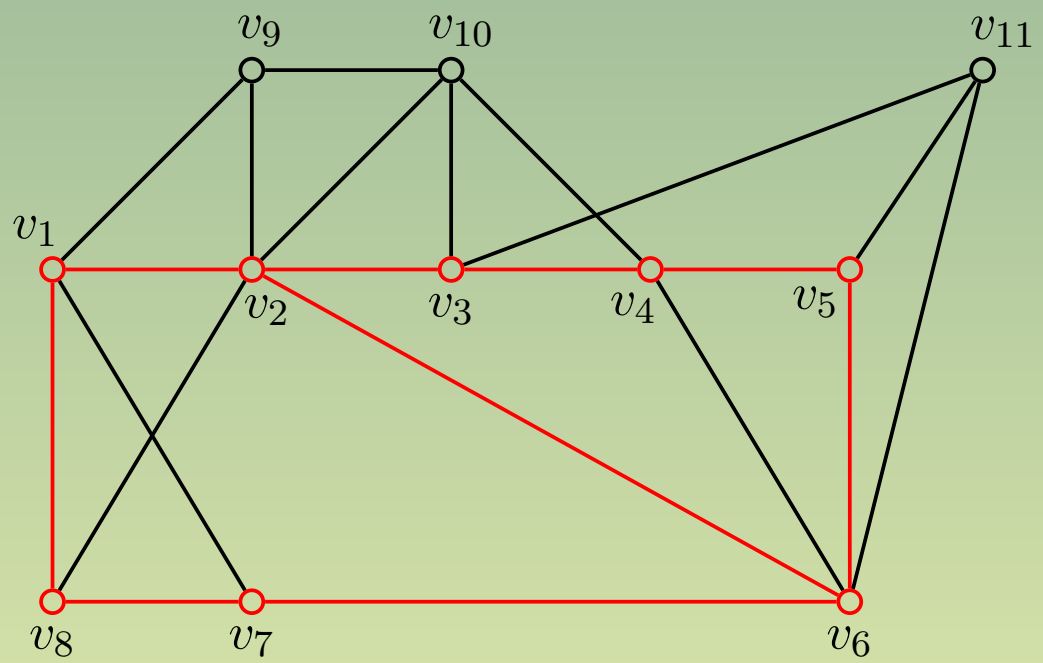
Kontaktni vrhovi promatranog fragmenta su v_3, v_5 i v_6.

Postoje ukupno tri α-puta u $\mathcal{F}$: $v_3v_{11}v_5$, $v_3v_{11}v_6$, $v_5v_{11}v_6$



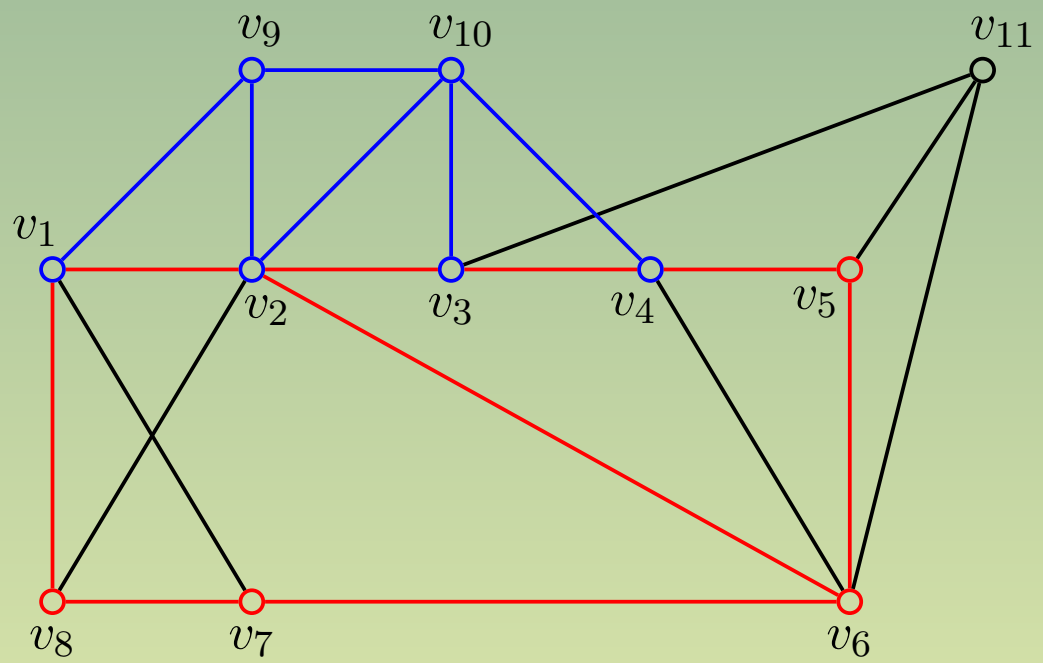
Objasnimo konačno i pojam natjecateljskih fragmenata na konkretnom primjeru.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Objasnimo konačno i pojam natjecateljskih fragmenata na konkretnom primjeru. U tu svrhu uočimo crveni podgraf G' i dva fragmenta od G s obzirom na G'.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Objasnimo konačno i pojam natjecateljskih fragmenata na konkretnom primjeru. U tu svrhu uočimo crveni podgraf G' i dva fragmenta od G s obzirom na G'. Fragment $\mathcal{F}_1$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

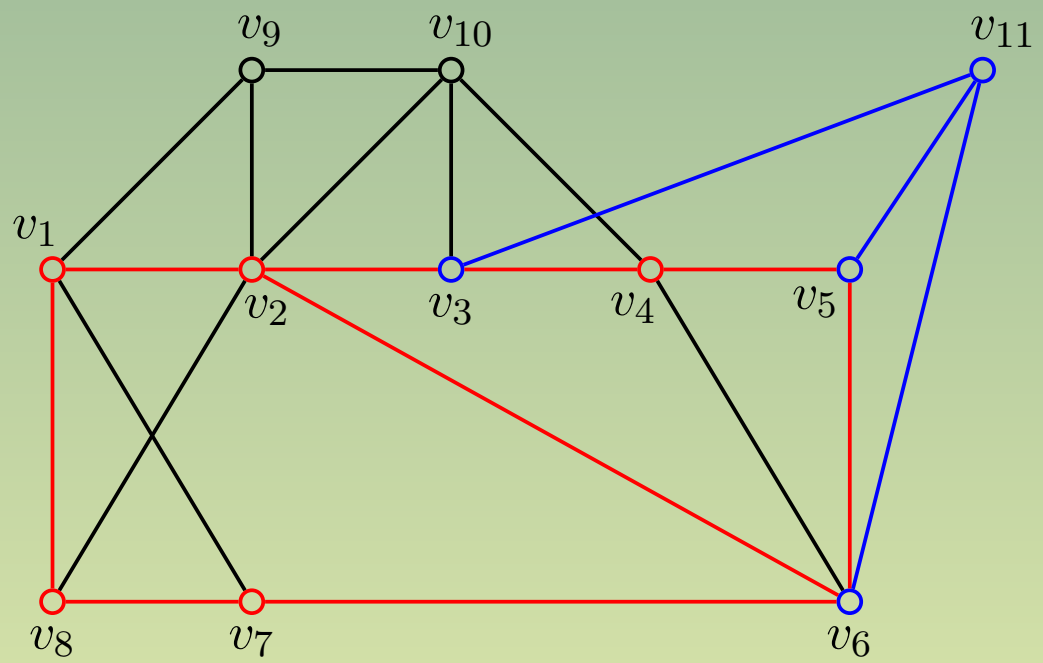
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



Objasnimo konačno i pojam natjecateljskih fragmenata na konkretnom primjeru. U tu svrhu uočimo crveni podgraf G' i dva fragmenta od G s obzirom na G'. Fragment $\mathcal{F}_1$ i fragment $\mathcal{F}_2$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

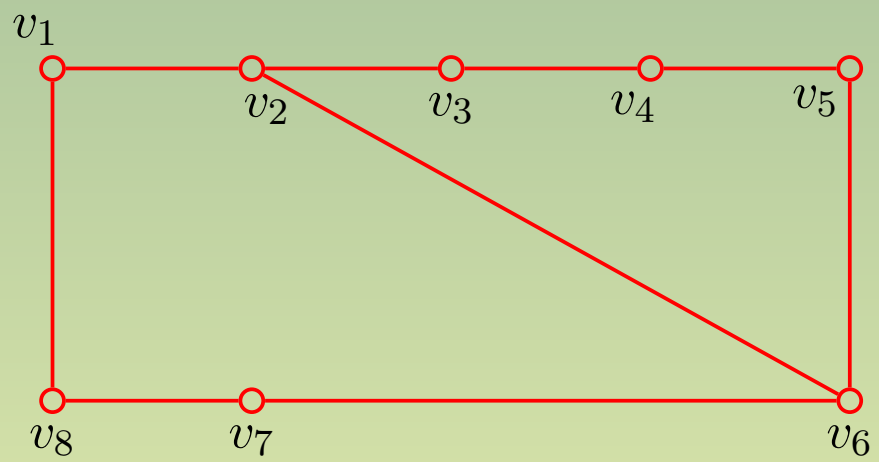
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

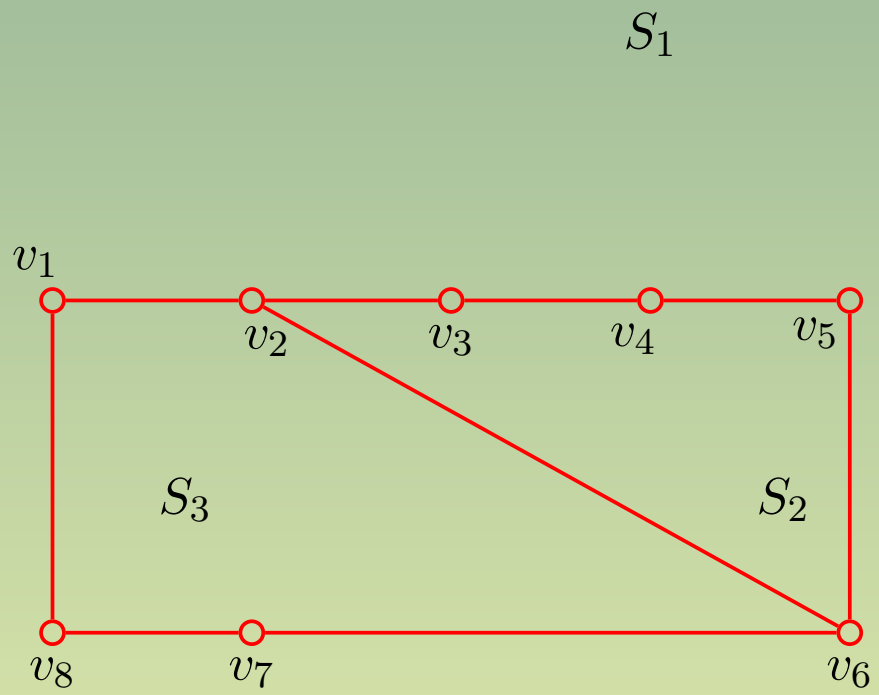
Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



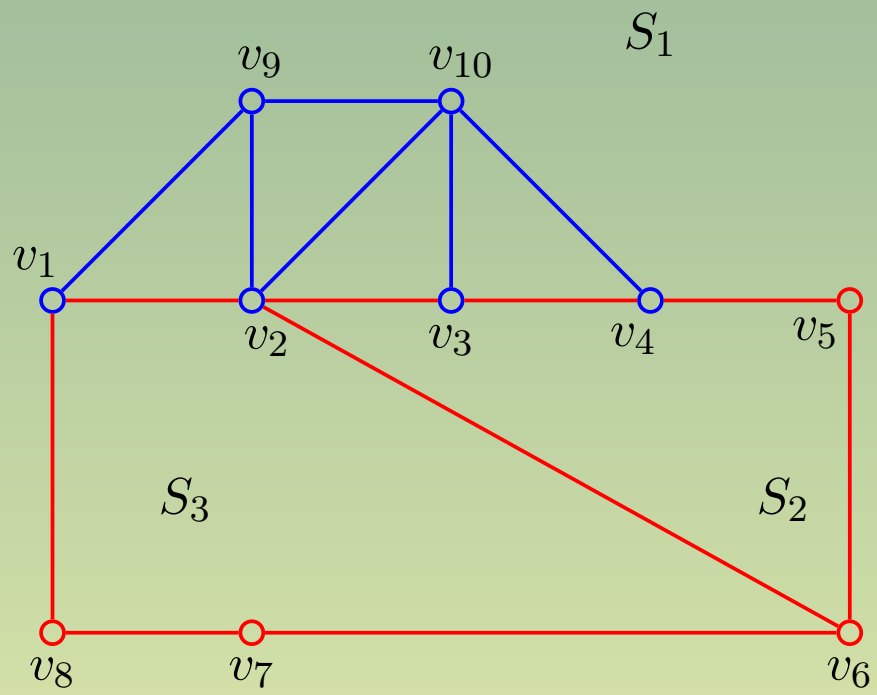
Podgraf G' je planarni graf

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



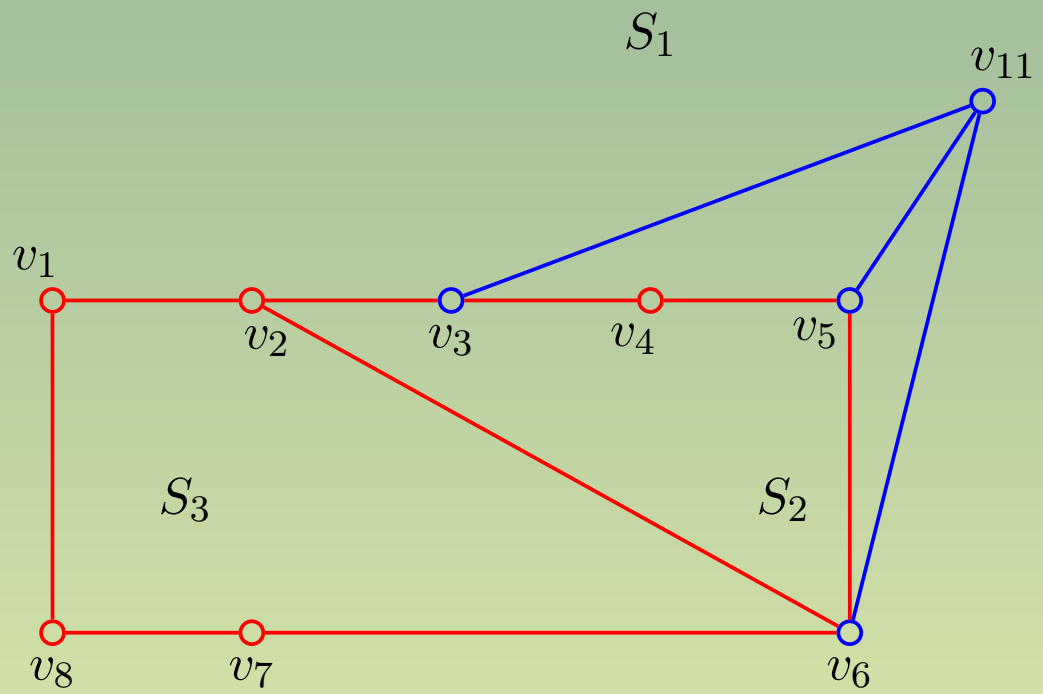
Podgraf G' je planarni graf koji ima tri strane S_1, S_2 i S_3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Strana S_1 je jedina dopustiva strana za fragment $\mathcal{F}_1$ jer samo ona sadrži sve njegove kontaktne vrhove. Dakle, $S(\mathcal{F}_1) = \{S_1\}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Strana S_1 je jedina dopustiva strana za fragment $\mathcal{F}_1$ jer samo ona sadrži sve njegove kontaktne vrhove. Dakle, $S(\mathcal{F}_1) = \{S_1\}$.

Fragment $\mathcal{F}_2$ ima dvije dopustive strane, S_1 i S_2, jer svaka od njih sadrži sve kontaktne vrhove od $\mathcal{F}_2$. Dakle, $S(\mathcal{F}_2) = \{S_1, S_2\}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

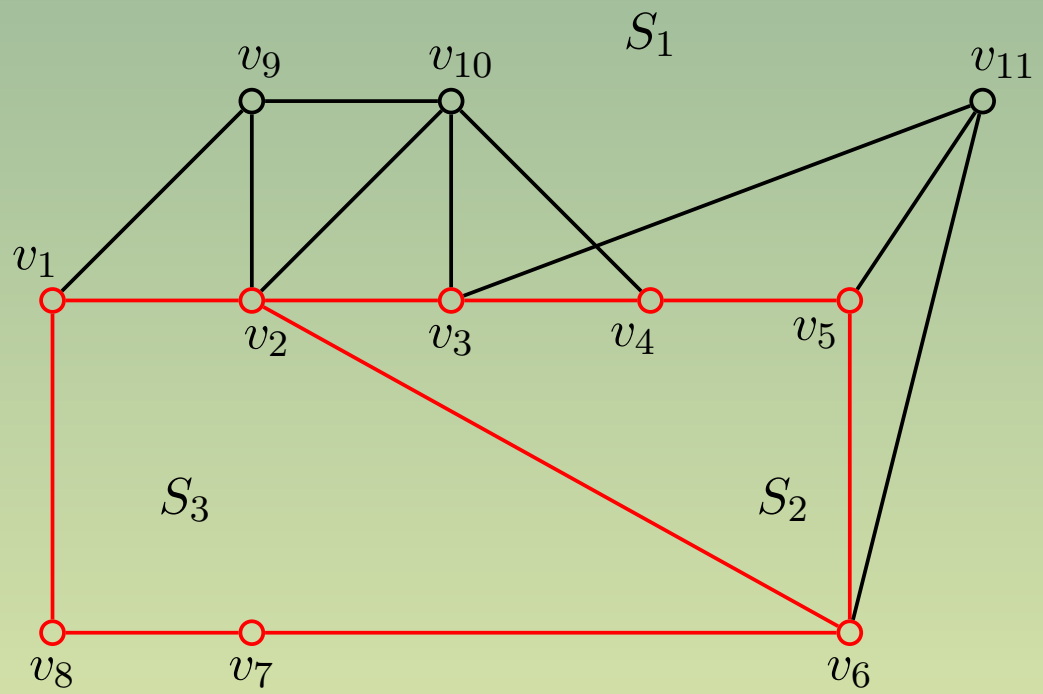
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



Zaključujemo da je $S(\mathcal{F}_1) \cap S(\mathcal{F}_2) = \{S_1\}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

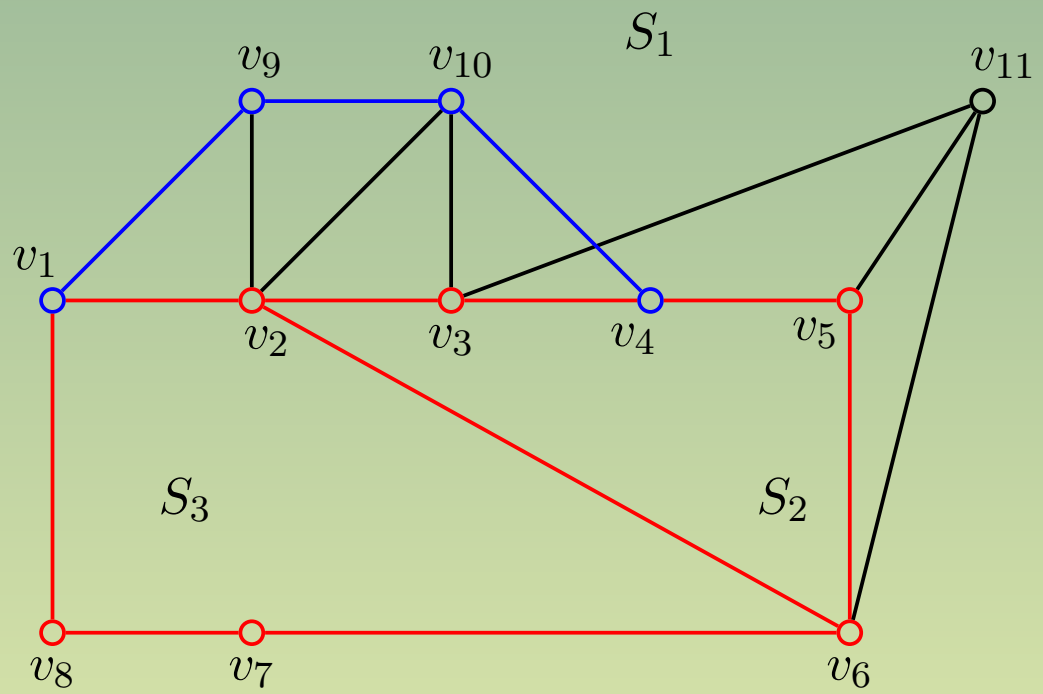
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



Zaključujemo da je $S(\mathcal{F}_1) \cap S(\mathcal{F}_2) = \{S_1\}$.

Međutim, $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ su natjecateljski fragmenti jer u $\mathcal{F}_1$ postoji α-put $v_1 v_9 v_{10} v_4$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

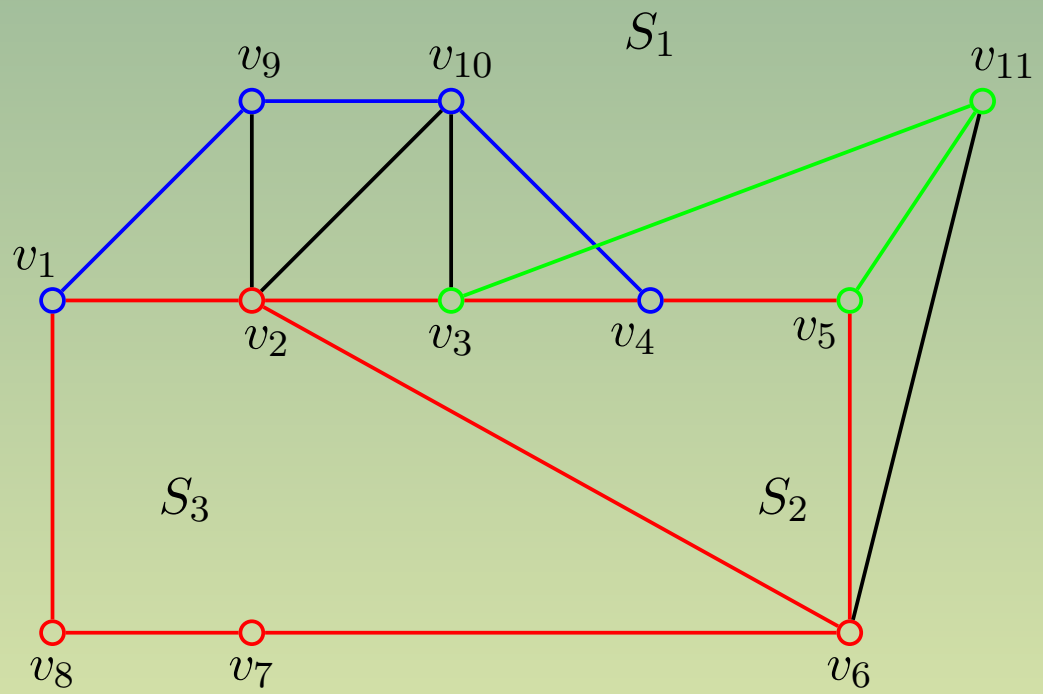
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



Zaključujemo da je $S(\mathcal{F}_1) \cap S(\mathcal{F}_2) = \{S_1\}$.

Međutim, $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ su natjecateljski fragmenti jer u $\mathcal{F}_1$ postoji α-put $v_1v_9v_{10}v_4$, a u $\mathcal{F}_2$ postoji α-put $v_3v_{11}v_5$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

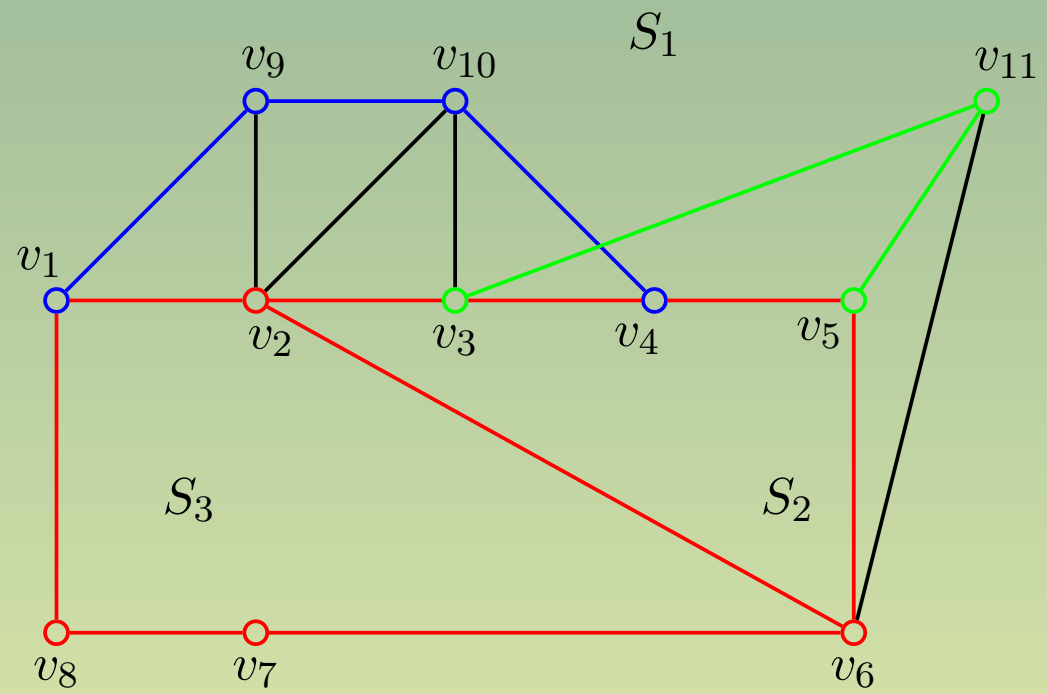
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



Zaključujemo da je $S(\mathcal{F}_1) \cap S(\mathcal{F}_2) = \{S_1\}$.

Međutim, $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ su natjecateljski fragmenti jer u $\mathcal{F}_1$ postoji α-put $v_1v_9v_{10}v_4$, a u $\mathcal{F}_2$ postoji α-put $v_3v_{11}v_5$ koji se ne mogu smjestiti u jedinu zajedničku dopustivu stranu S_1 tako da se ne sijeku unutar bridova.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja

Sada konačno možemo detaljnije objasniti kako funkcionira Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritam. Kao što smo već rekli, algoritam počinje od jednog ravninskog smještenja G' nekog ciklusa u promatranom grafu G. Ukoliko graf G nema ciklusa, tada je G šuma pa je prema teoremu Kuratowskog G planarni graf. Ugrubo rečeno, u svakom se koraku određuju fragmenti i njihove dopustive strane od grafa G s obzirom na ravninsko smještenje trenutnog podgrafa G'. Ukoliko nema više fragmenata, algoritam se prekida i zaključujemo da je graf G planarni graf, a G' je jedno njegovo ravninsko smještenje. Ukoliko postoji fragment koji nema niti jednu dopustivu stranu, graf G nije planarni i algoritam završava. U protivnom se bira neki fragment i u njemu jedan α-put koji se smješta u neku od dopustivih strana tog fragmenta. Na taj način dobivamo novi G' s kojim dalje ponavljamo opisani postupak.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Jedna od važnih pretpostavki u Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritmu je da početni graf mora biti bipovezan. To je važno zbog toga jer jedino u tom slučaju svaki fragment ima barem dva kontaktna vrha, što nam osigurava egzistenciju α-putova. Ukoliko početni graf nije bipovezan, tada algoritam provodimo zasebno na svakoj njegovoj bikomponenti, a u slučaju da su sve bikomponente planarni grafovi, natrag ih spajamo na odgovarajućim reznim vrhovima i na taj način dobivamo ravninsko smještenje početnog grafa.

Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritam je precizno opisan na sljedećem slajdu.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritam

ULAZ: Bipovezani graf G

IZLAZ: Odgovor na pitanje "Da li je G planarni graf?" i njegovo ravninsko smještenje ako je G planarni graf.

1: Odaberi neki ciklus G' u grafu G i napravi njegovo ravninsko smještenje. Ako G nema ciklusa, tada je gotovo jer je G stablo pa je G planarni graf.

2: Odredi sve strane od G'.

3: Odredi sve fragmente od G s obzirom na G'.

4: Ako nema niti jednog fragmenta, tada je gotovo. Graf G je planarni graf, a G' je jedno njegovo ravninsko smještenje.

5: Odredi dopustive strane svih fragmenata.

6: Ako postoji fragment koji nema niti jednu dopustivu stranu, tada je gotovo. Graf G nije planarni graf.

7: Ako postoji fragment $\mathcal{F}$ sa samo jednom dopustivom stranom, idi na korak 9.

8: Odaberi neki fragment $\mathcal{F}$ koji ima barem dvije dopustive strane.

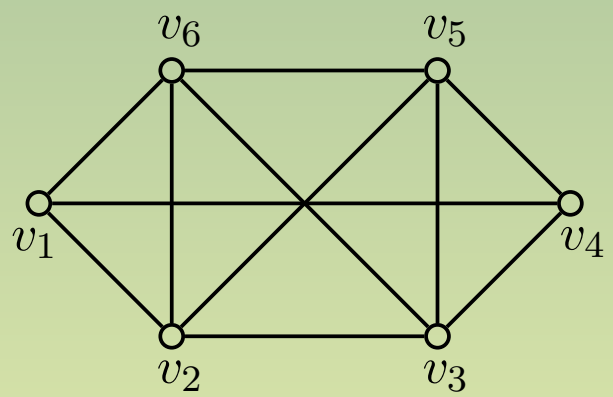
9: Odaberi α-put u fragmentu $\mathcal{F}$ i smjesti ga u neku dopustivu stranu od $\mathcal{F}$. Na taj način dobivamo novi G' i otiđi na korak 2.

Ako G nije bipovezan, tada algoritam provodimo na svakoj njegovoj bikomponenti. Graf G je planarni akko su planarne sve njegove bikomponente.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.30.

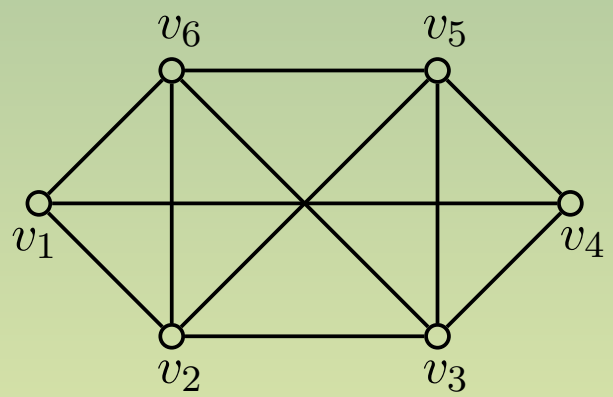
Pomoću Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritma ispitajte da li je zadani graf G planarni.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.30.

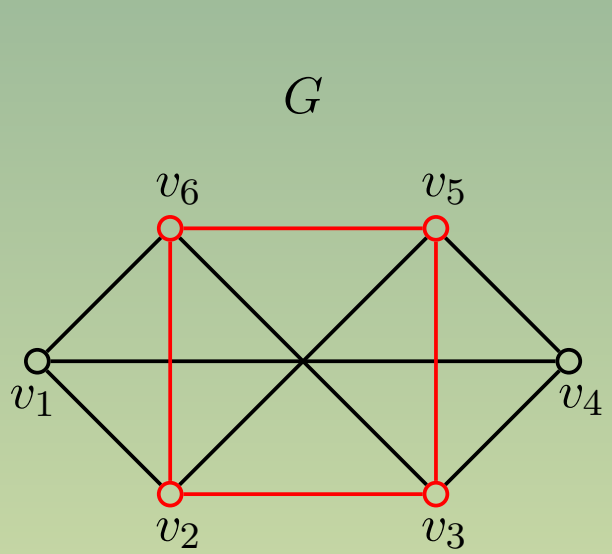
Pomoću Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritma ispitajte da li je zadani graf G planarni.

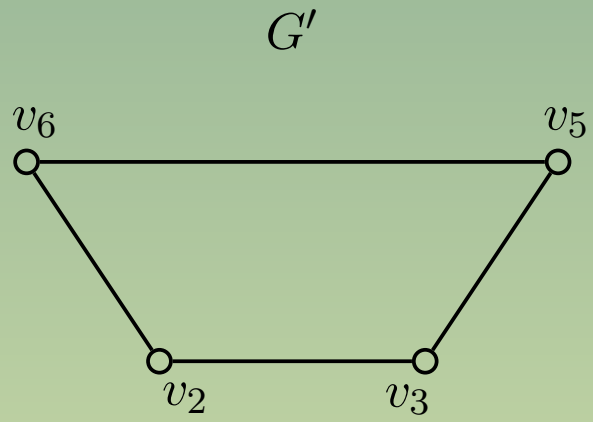


Rješenje.

U primjeru 10.26. smo pokazali da zadani graf G nije planarni graf, gdje smo koristili teorem Kuratowskog. Ovdje ćemo korak po korak pomoću Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritma doći do istog zaključka.

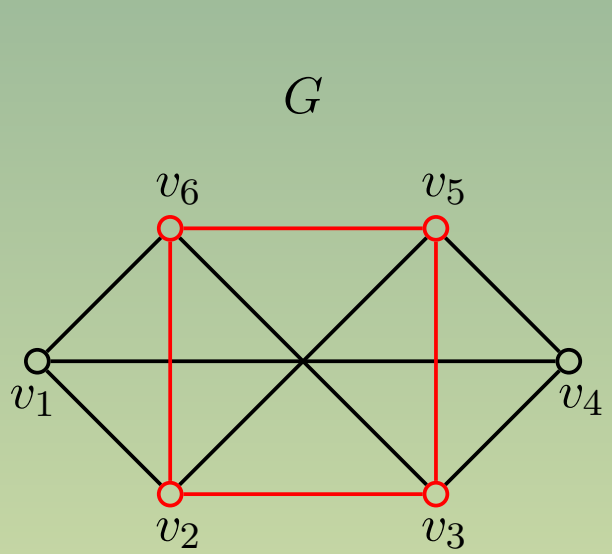
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

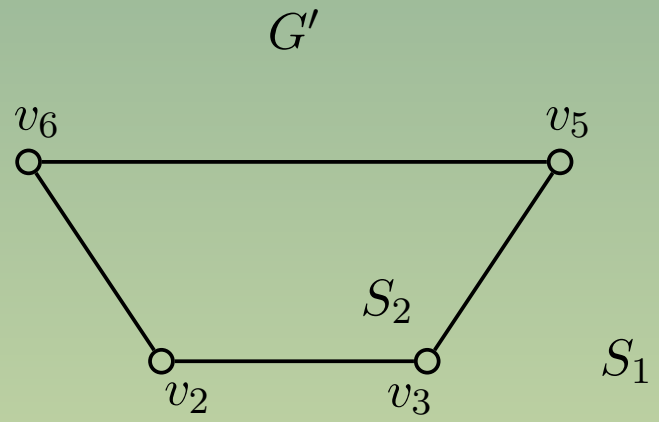




Odaberemo neki ciklus G' u grafu G, npr. $v_2v_3v_5v_6v_2$ i odredimo neko njegovo ravninsko smještenje.

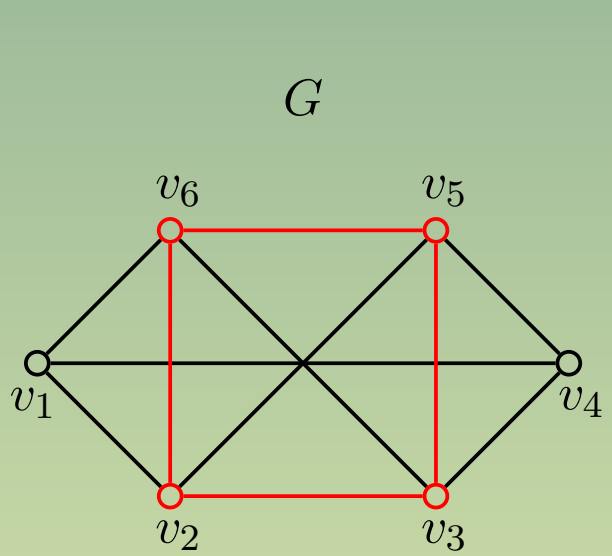
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

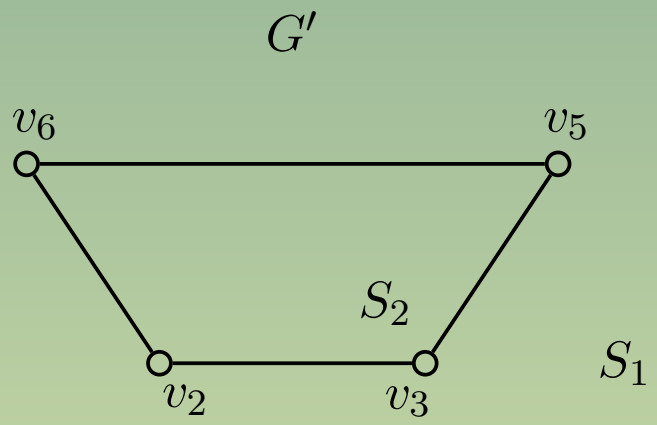




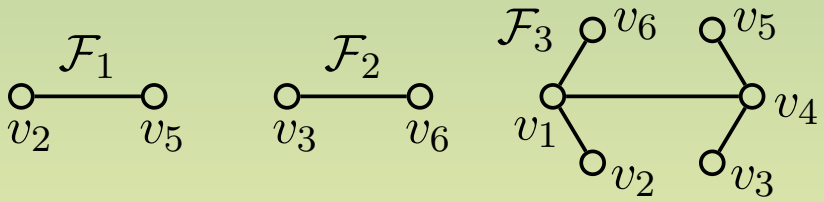
Odaberemo neki ciklus G' u grafu G, npr. $v_2v_3v_5v_6v_2$ i odredimo neko njegovo ravninsko smještenje. Ravninsko smještenje od G' ima ukupno dvije strane S_1 i S_2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





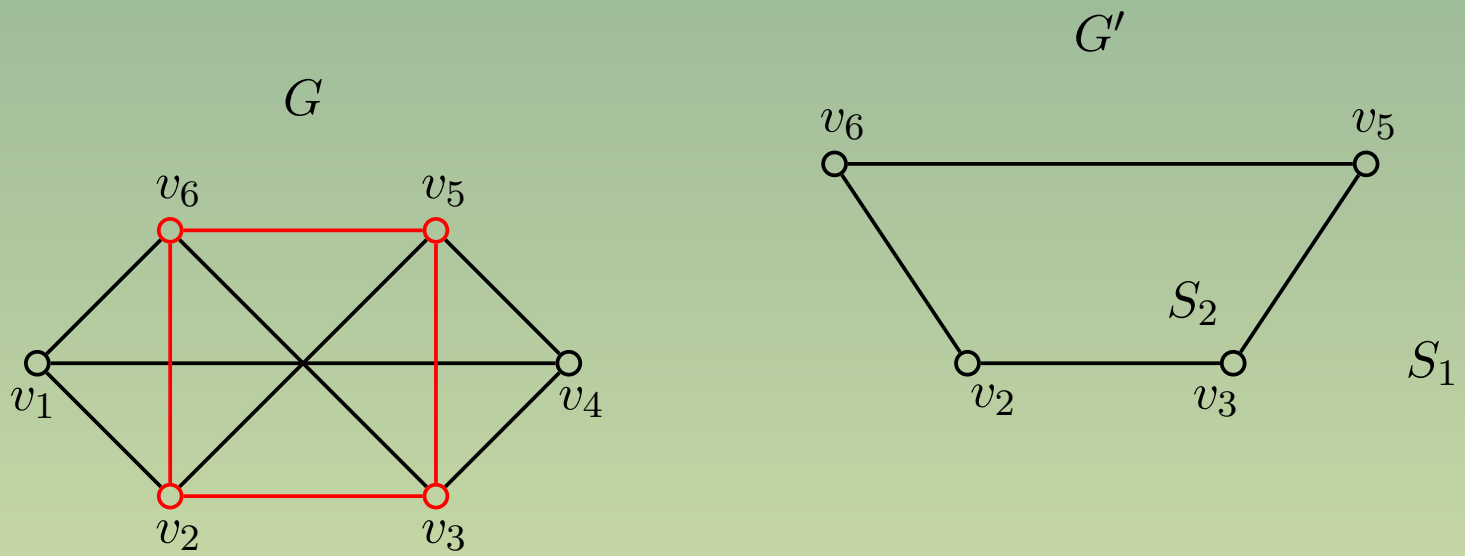
fragmenti od G s obzirom na G'



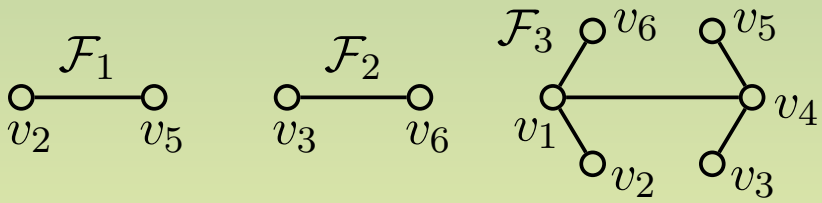
Odaberemo neki ciklus G' u grafu G, npr. $v_2v_3v_5v_6v_2$ i odredimo neko njegovo ravninsko smještenje. Ravninsko smještenje od G' ima ukupno dvije strane S_1 i S_2. Zatim odredimo sve fragmente od G s obzirom na G' i njihove dopustive strane.

$$S(\mathcal{F}_1) = \{S_1, S_2\}, \quad S(\mathcal{F}_2) = \{S_1, S_2\}, \quad S(\mathcal{F}_3) = \{S_1, S_2\}$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



fragmenti od G s obzirom na G'



Kako svaki fragment ima više od jedne dopustive strane, odaberemo po volji neki od fragmenata $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$. Na primjer, odaberimo fragment $\mathcal{F}_3$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

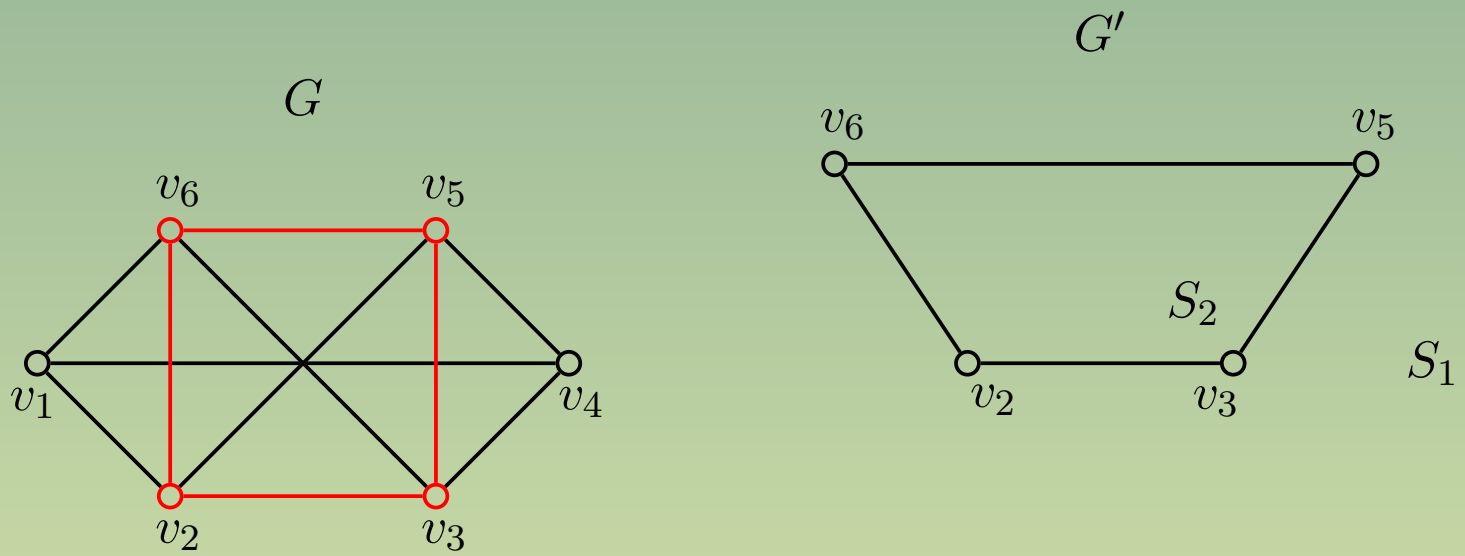
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

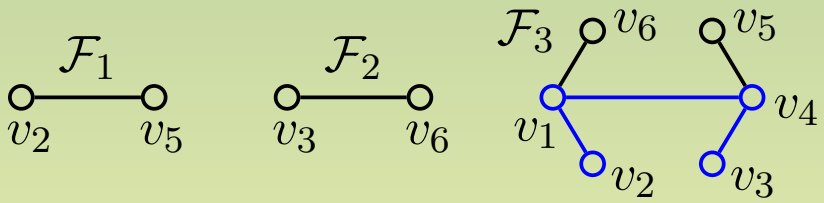
Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



fragmenti od G s obzirom na G'



Kako svaki fragment ima više od jedne dopustive strane, odaberemo po volji neki od fragmenata $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$. Na primjer, odaberimo fragment $\mathcal{F}_3$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_3$ odaberemo jedan α-put, npr. $v_2v_1v_4v_3$. Uočite da u $\mathcal{F}_3$ ima čak šest različitih α-putova.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

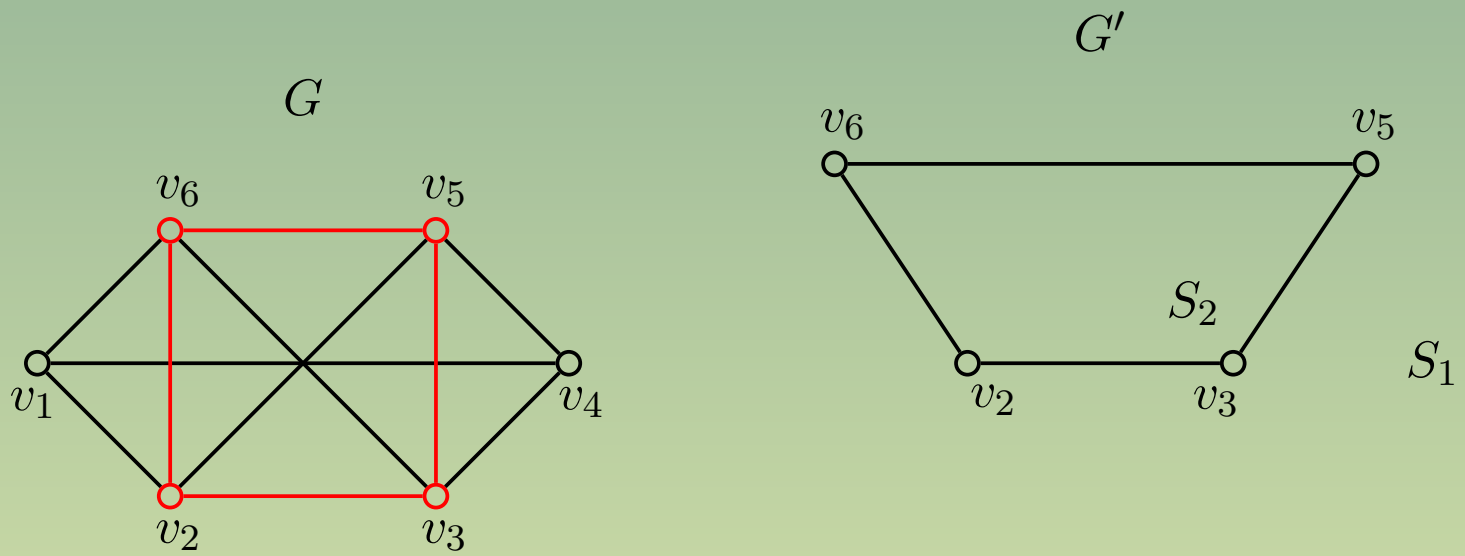
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

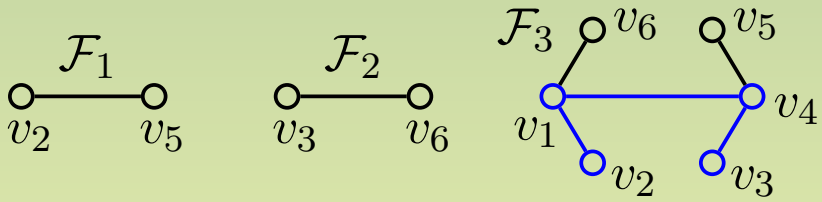
Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



fragmenti od G s obzirom na G'

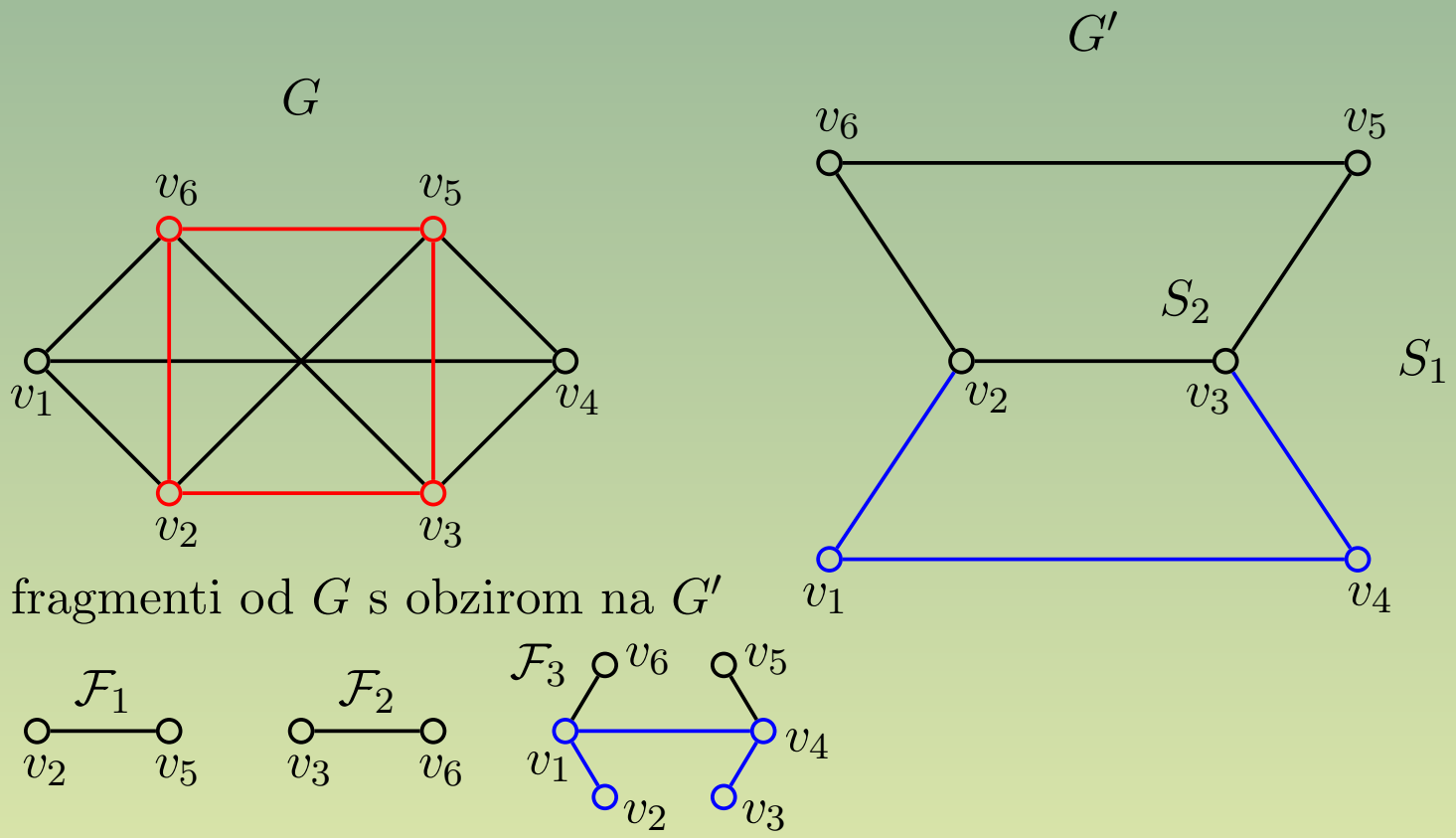


Odabrani α-put u $\mathcal{F}_3$ smjestimo u neku dopustivu stranu od $\mathcal{F}_3$. Kako je $S(\mathcal{F}_3) = \{S_1, S_2\}$, biramo jednu od strana S_1 i S_2.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



fragmenti od G s obzirom na G'

Odabrani α-put u $\mathcal{F}_3$ smjestimo u neku dopustivu stranu od $\mathcal{F}_3$. Kako je $S(\mathcal{F}_3) = \{S_1, S_2\}$, biramo jednu od strana S_1 i S_2. Na primjer, odaberimo stranu S_1 i u nju smjestimo odabrani α-put.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

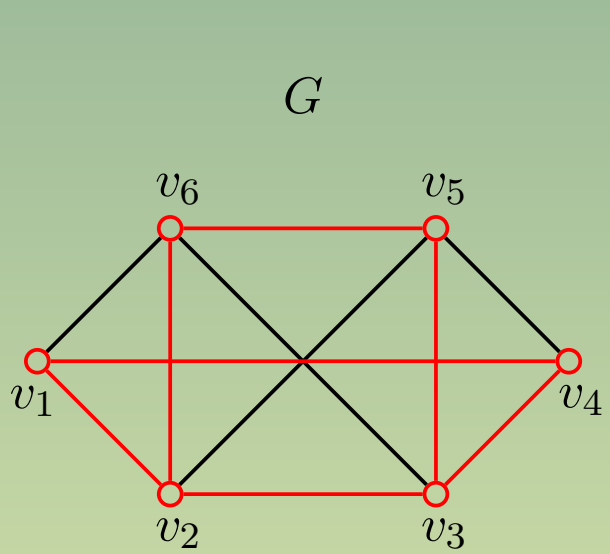
Sparivanje u bipartitnom grafu

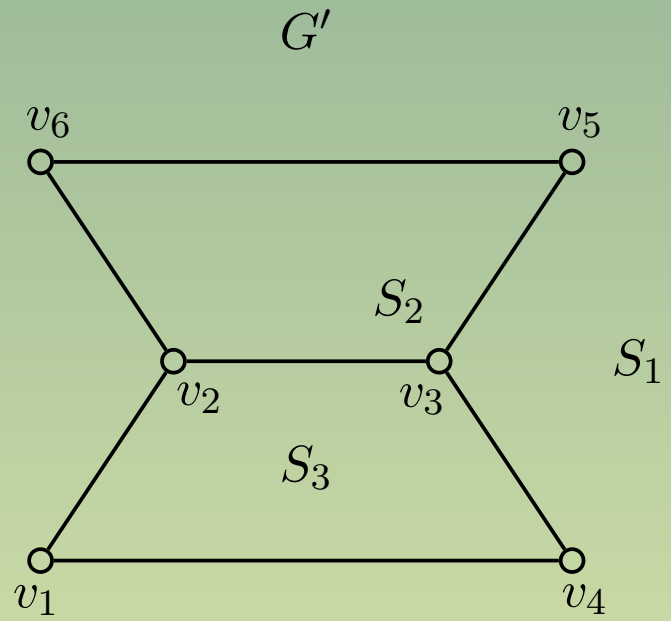
Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

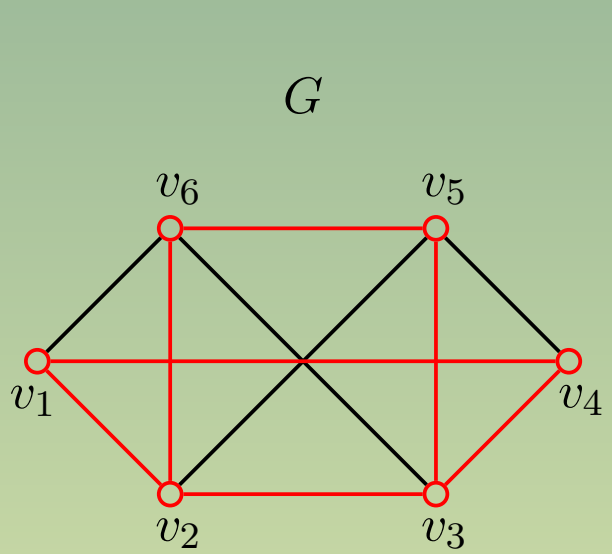
Savršena sparivanja

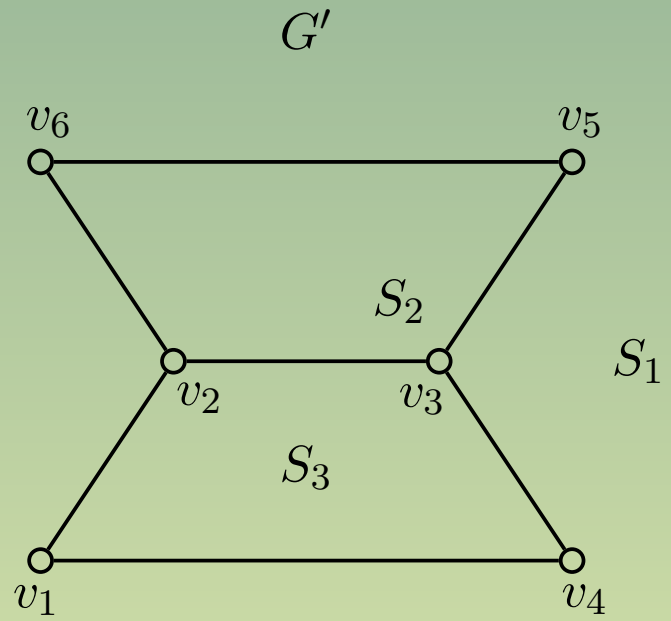




Odabrani α-put u $\mathcal{F}_3$ smjestimo u neku dopustivu stranu od $\mathcal{F}_3$. Kako je $S(\mathcal{F}_3) = \{S_1, S_2\}$, biramo jednu od strana S_1 i S_2. Na primjer, odaberimo stranu S_1 i u nju smjestimo odabrani α-put. Na taj način dobivamo novi podgraf G' i neko njegovo ravninsko smještenje koje ima tri strane S_1, S_2 i S_3.

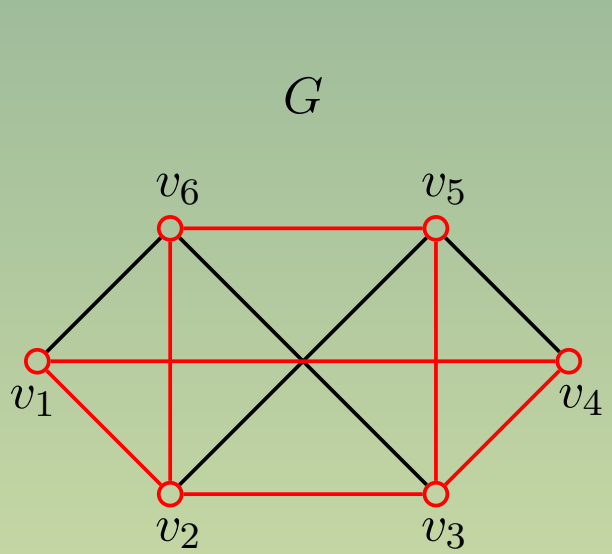
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

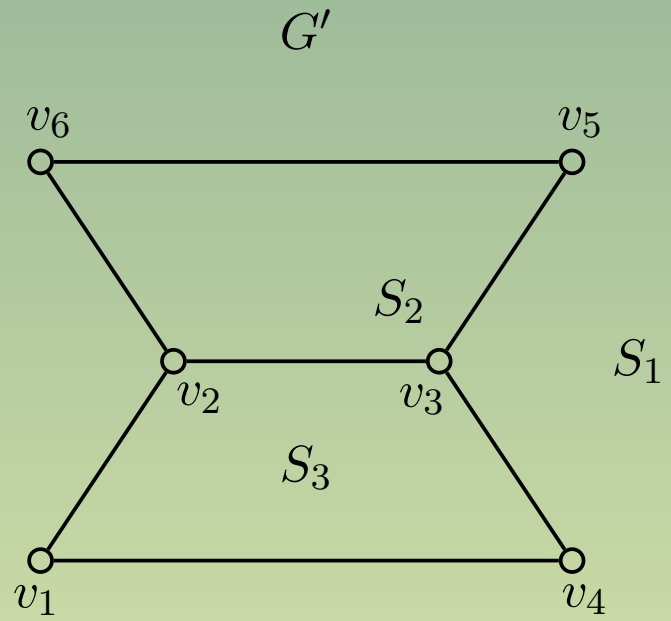




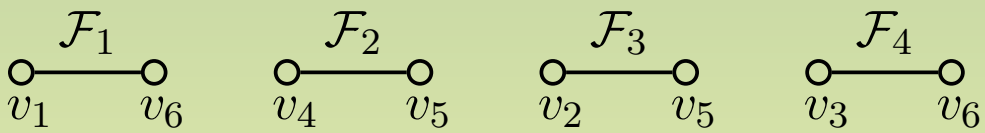
Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





fragmenti od G s obzirom na G'



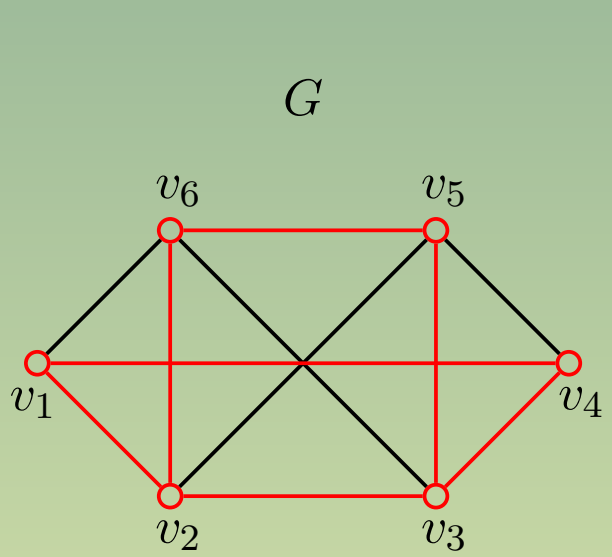
Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'. Najprije odredimo sve fragmente od G s obzirom na G' i njihove dopustive strane.

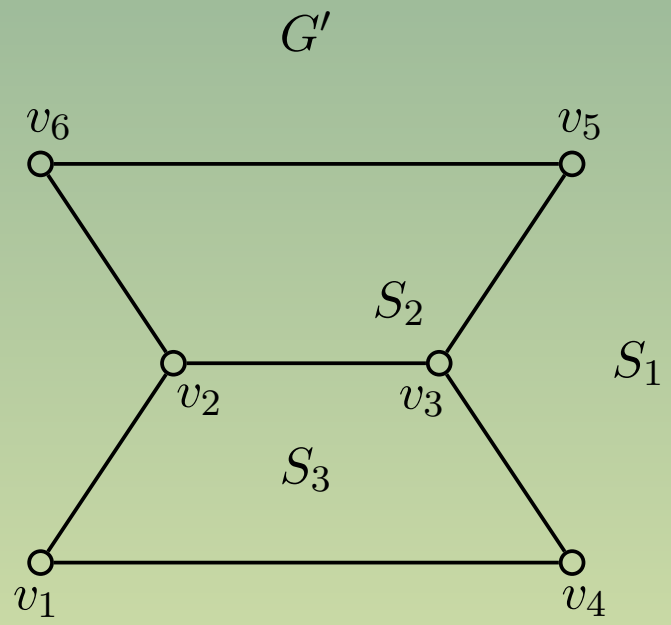
$$S(\mathcal{F}_1) = \{S_1\},\ S(\mathcal{F}_2) = \{S_1\},\ S(\mathcal{F}_3) = \{S_1, S_2\},\ S(\mathcal{F}_4) = \{S_1, S_2\}$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

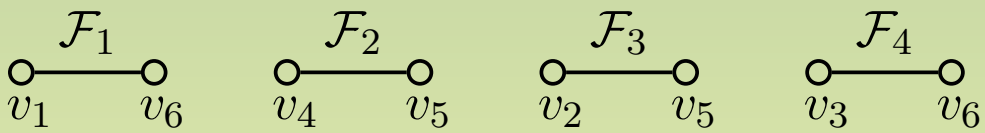
prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



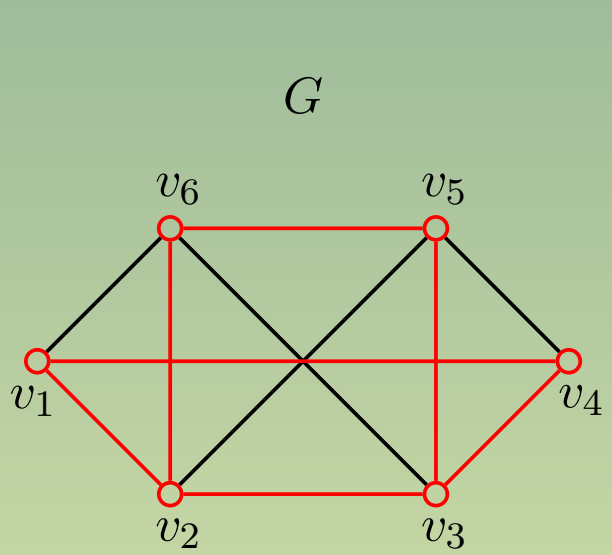


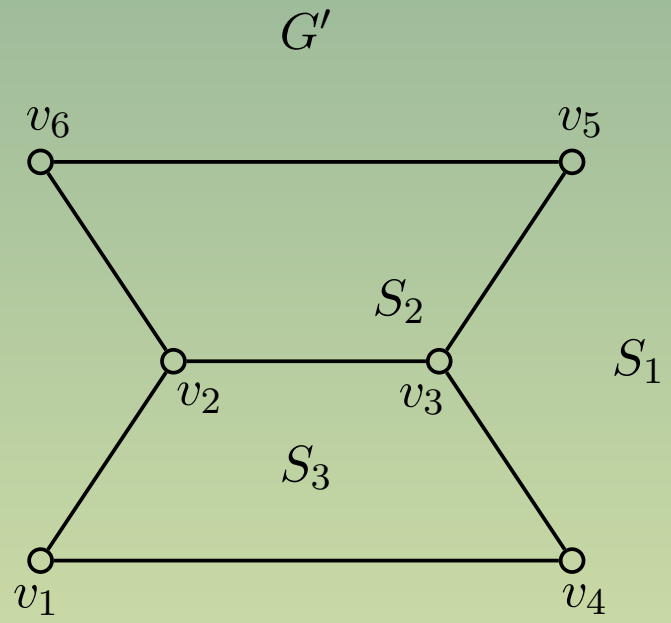
fragmenti od G s obzirom na G'



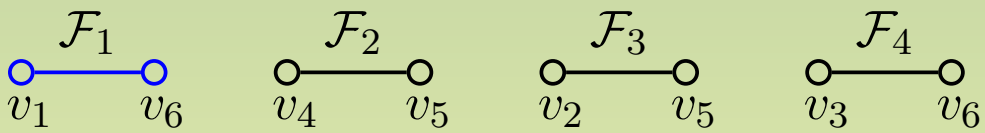
Kako svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu, moramo odabrati jednog od ta dva fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_1$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



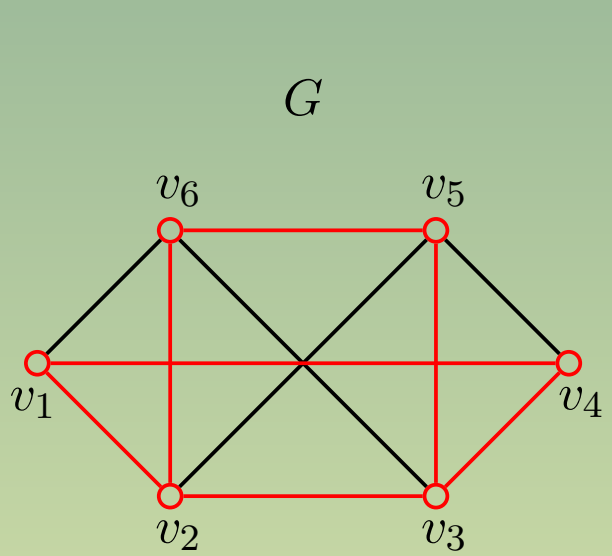


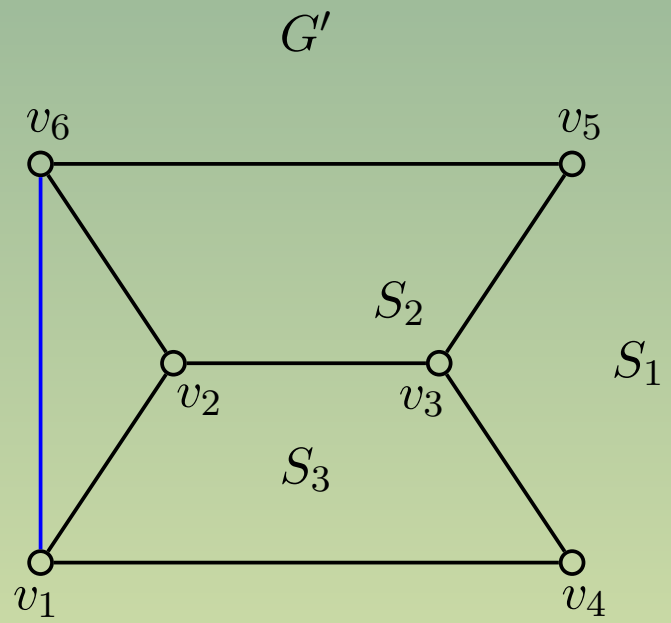
fragmenti od G s obzirom na G'



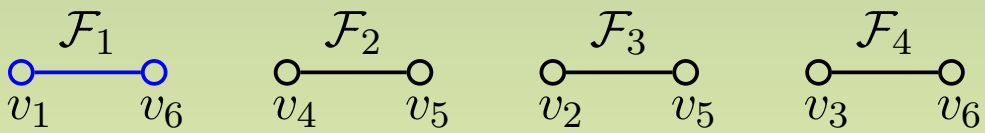
Kako svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu, moramo odabrati jednog od ta dva fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_1$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put v_1v_6 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_1$)

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



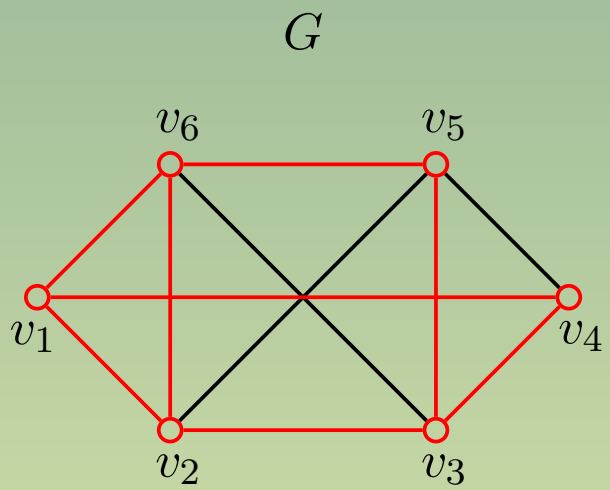


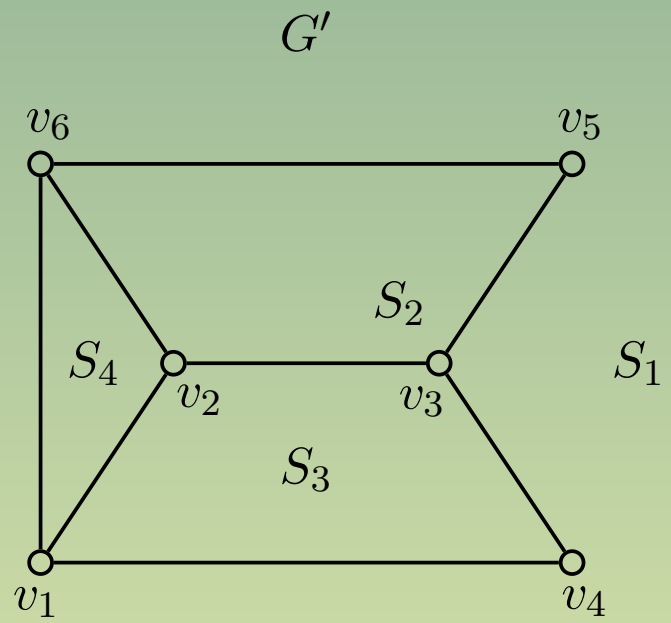
fragmenti od G s obzirom na G'



Kako svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu, moramo odabrati jednog od ta dva fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_1$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put v_1v_6 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_1$) i njega smjestimo u jedinu dopustivu stranu S_1 od $\mathcal{F}_1$.

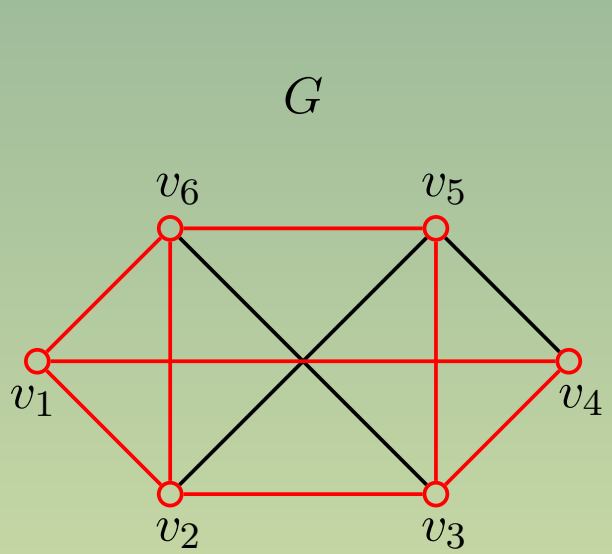
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

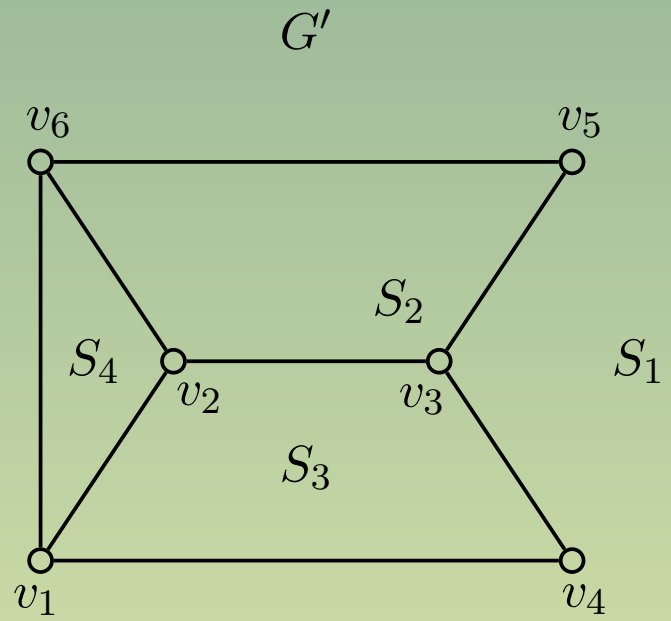




Kako svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu, moramo odabrati jednog od ta dva fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_1$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put v_1v_6 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_1$) i njega smjestimo u jedinu dopustivu stranu S_1 od $\mathcal{F}_1$. Na taj način dobivamo novi podgraf G' i neko njegovo ravninsko smještenje koje ima 4 strane S_1, S_2, S_3 i S_4.

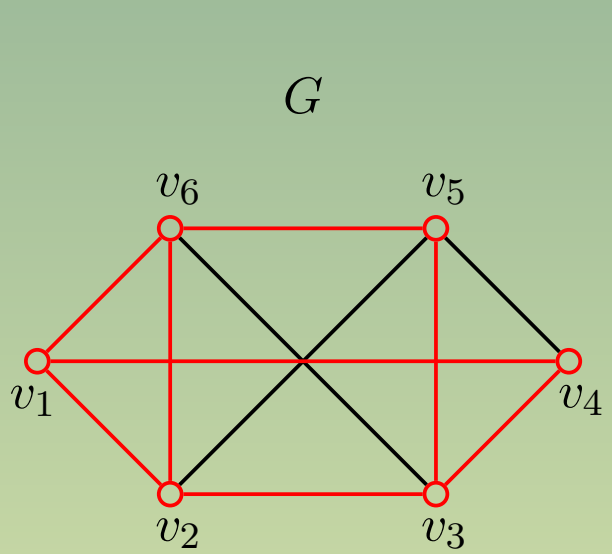
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

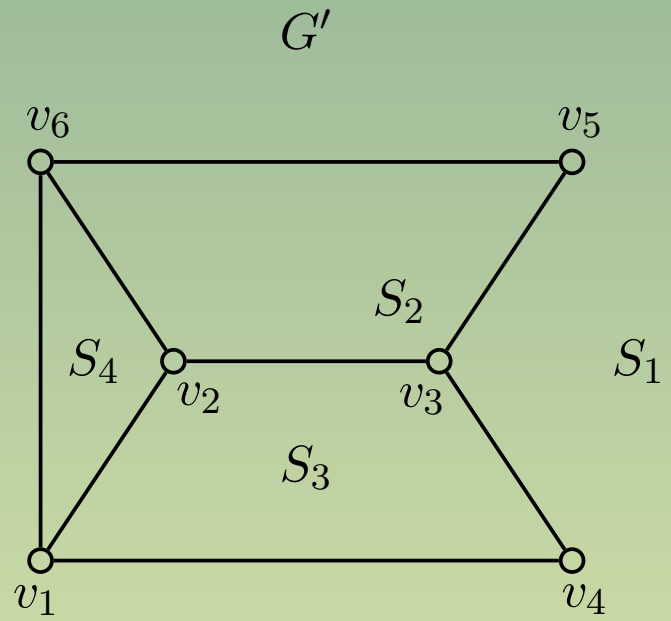




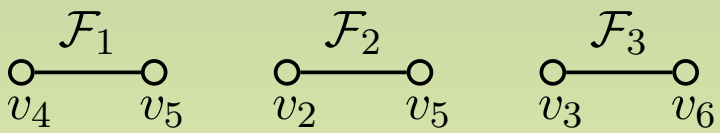
Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





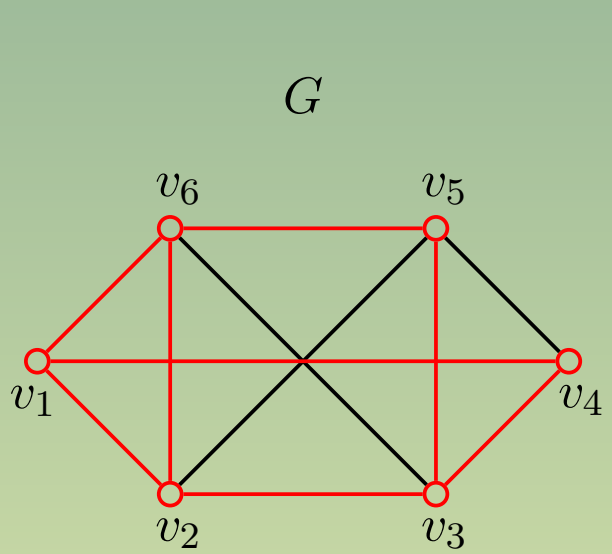
fragmenti od G s obzirom na G'

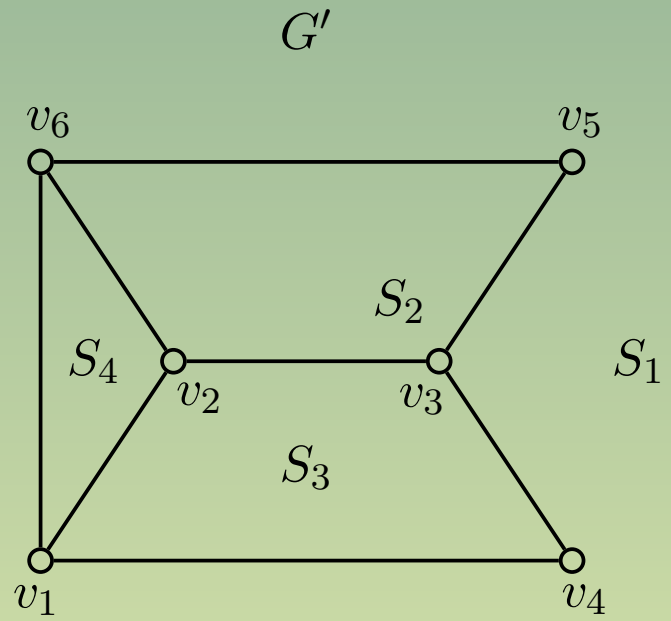


Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'. Najprije odredimo sve fragmente od G s obzirom na G' i njihove dopustive strane.

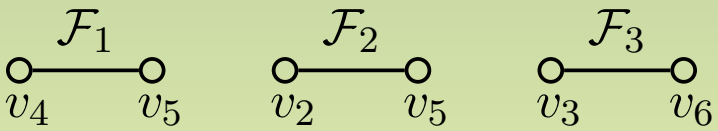
$$S(\mathcal{F}_1) = \{S_1\}, \quad S(\mathcal{F}_2) = \{S_2\}, \quad S(\mathcal{F}_3) = \{S_1, S_2\}$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



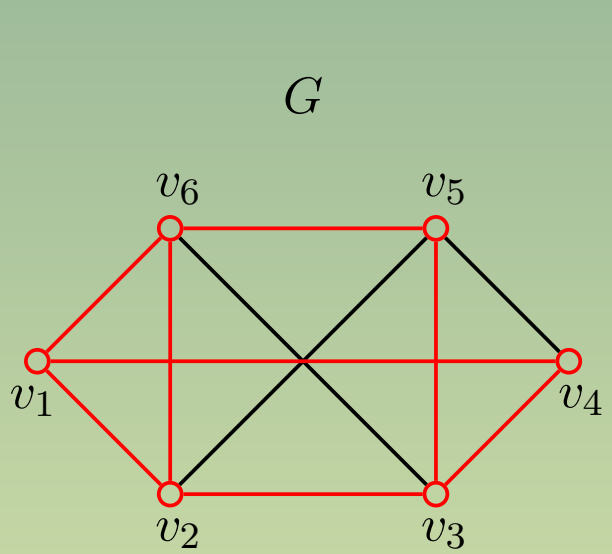


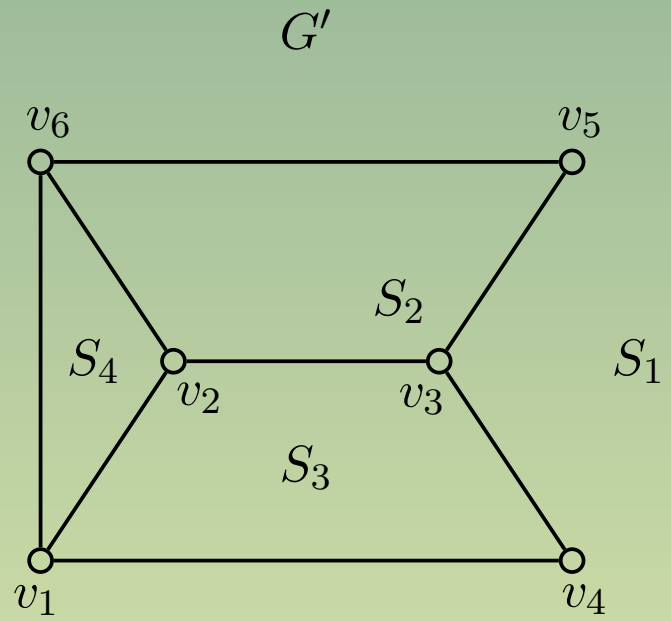
fragmenti od G s obzirom na G'



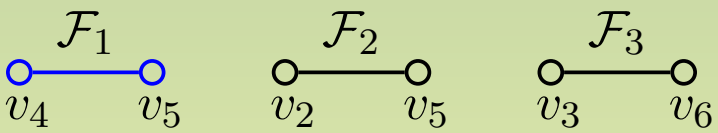
Kako svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu, moramo odabrati jednog od ta dva fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_1$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



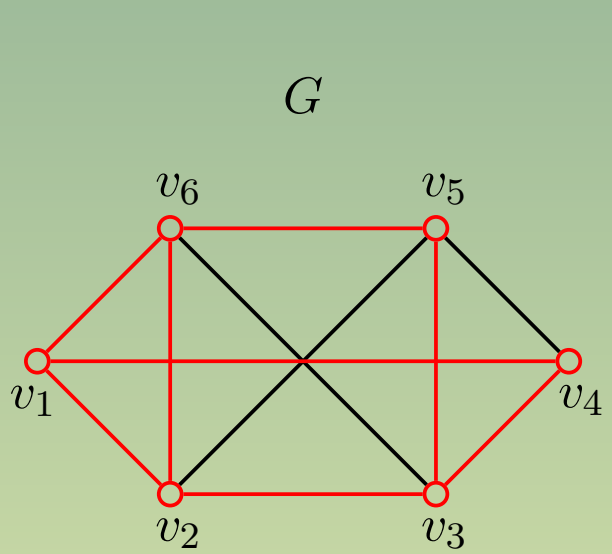


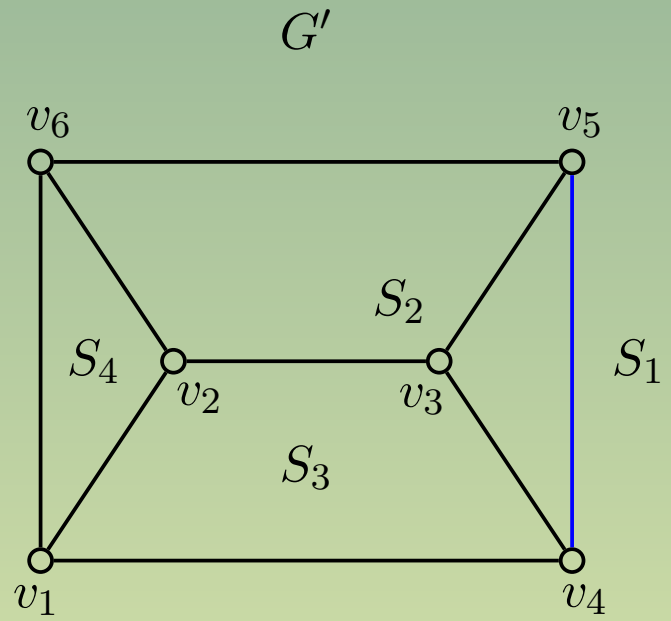
fragmenti od G s obzirom na G'



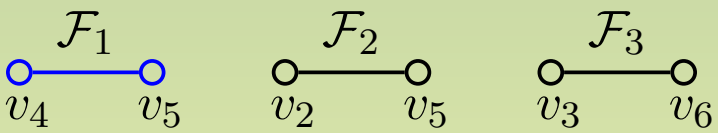
Kako svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu, moramo odabrati jednog od ta dva fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_1$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put v_4v_5 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_1$)

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



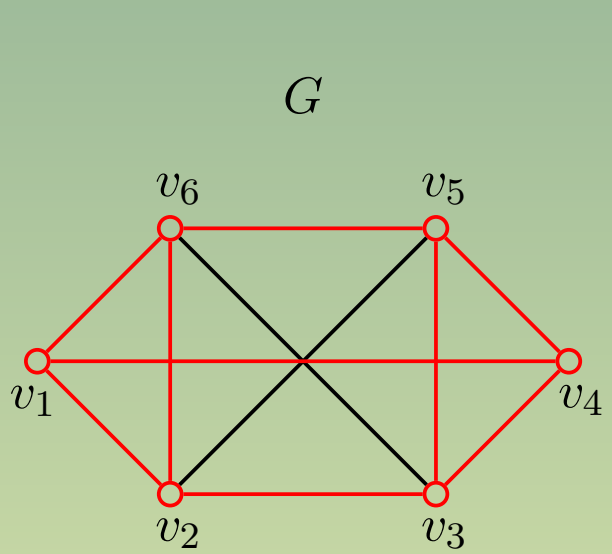


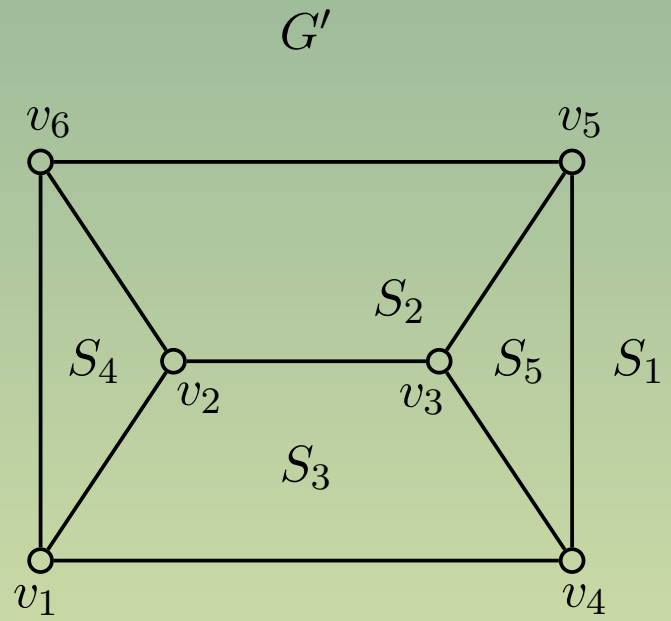
fragmenti od G s obzirom na G'



Kako svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu, moramo odabrati jednog od ta dva fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_1$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put v_4v_5 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_1$) i njega smjestimo u jedinu dopustivu stranu S_1 od $\mathcal{F}_1$.

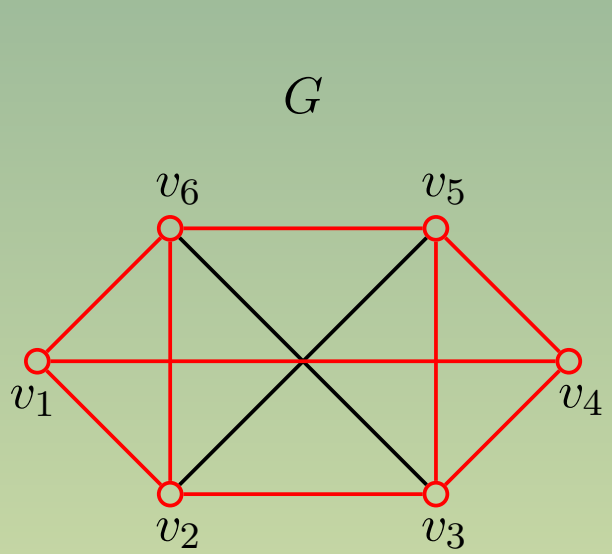
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

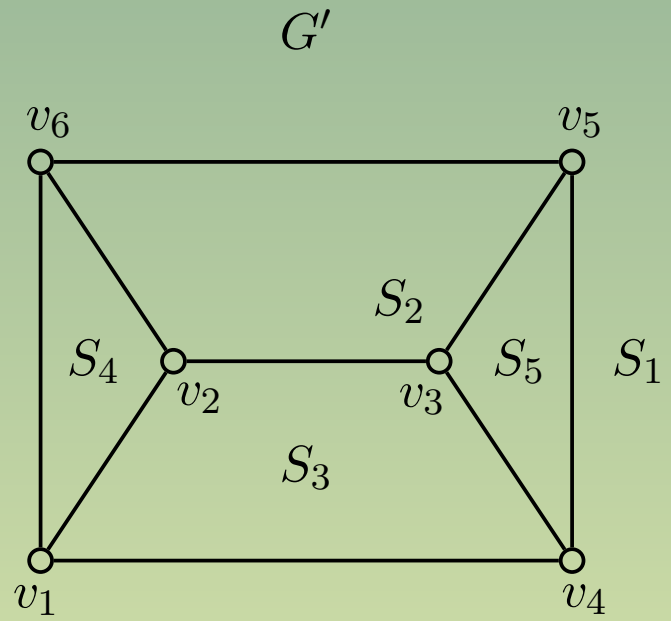




Kako svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu, moramo odabrati jednog od ta dva fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_1$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put v_4v_5 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_1$) i njega smjestimo u jedinu dopustivu stranu S_1 od $\mathcal{F}_1$. Dobivamo novi podgraf G' i neko njegovo ravninsko smještenje koje ima 5 strana S_1, S_2, S_3, S_4 i S_5.

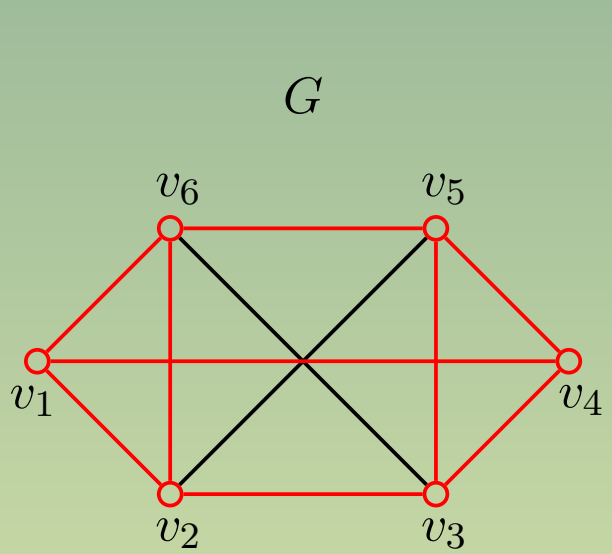
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

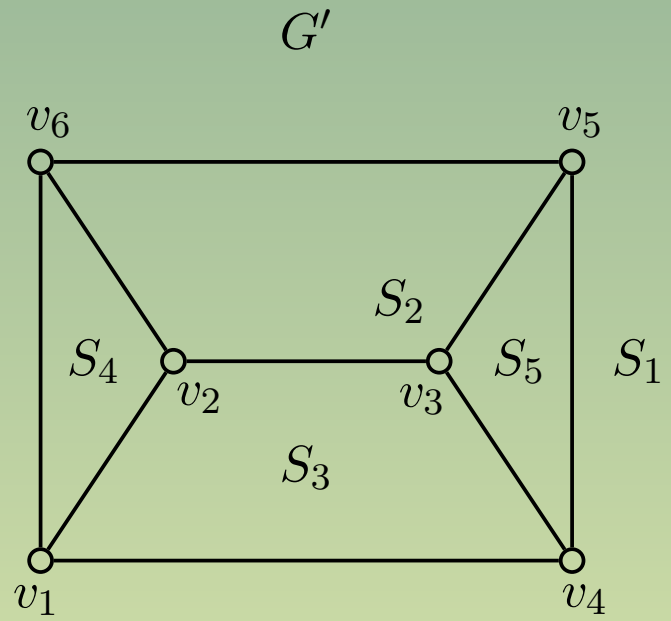




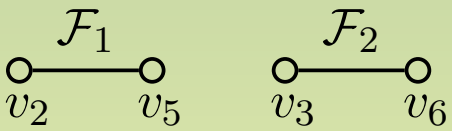
Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





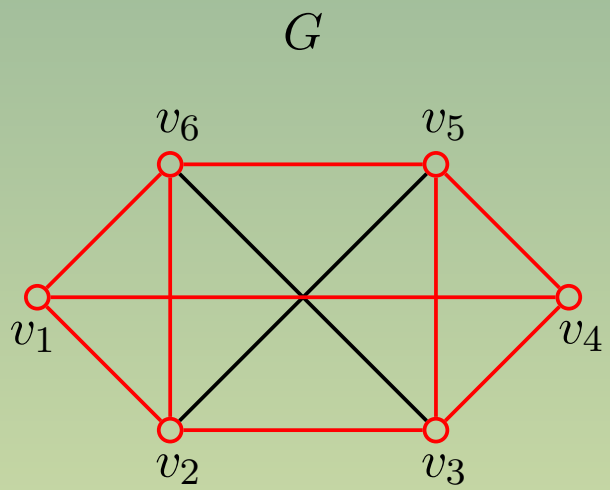
fragmenti od G s obzirom na G'

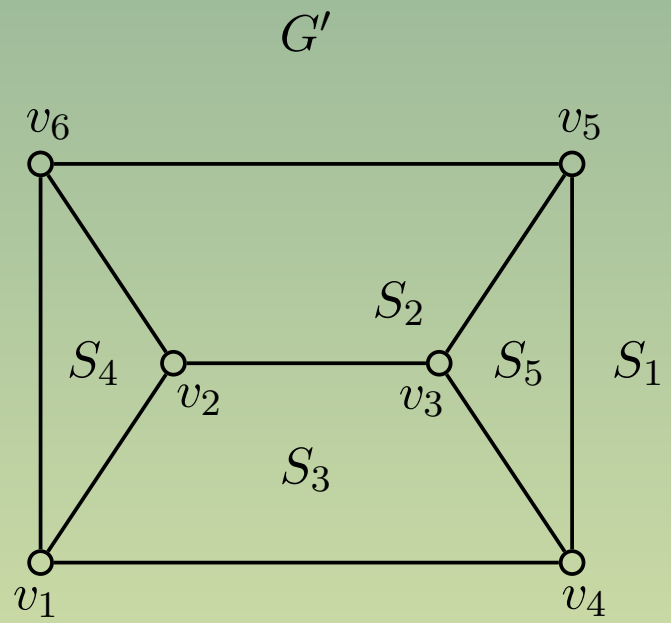


Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'. Najprije odredimo sve fragmente od G s obzirom na G' i njihove dopustive strane.

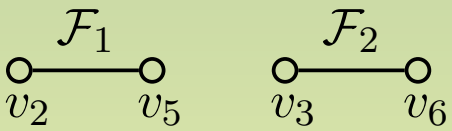
$$S(\mathcal{F}_1) = \{S_2\}, \quad S(\mathcal{F}_2) = \{S_2\}$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



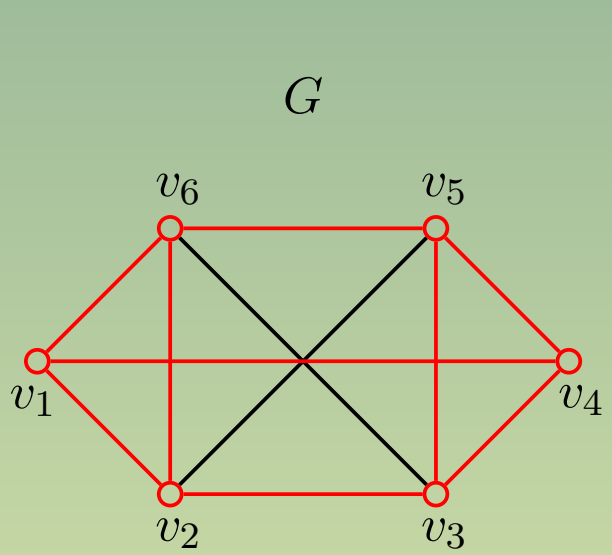


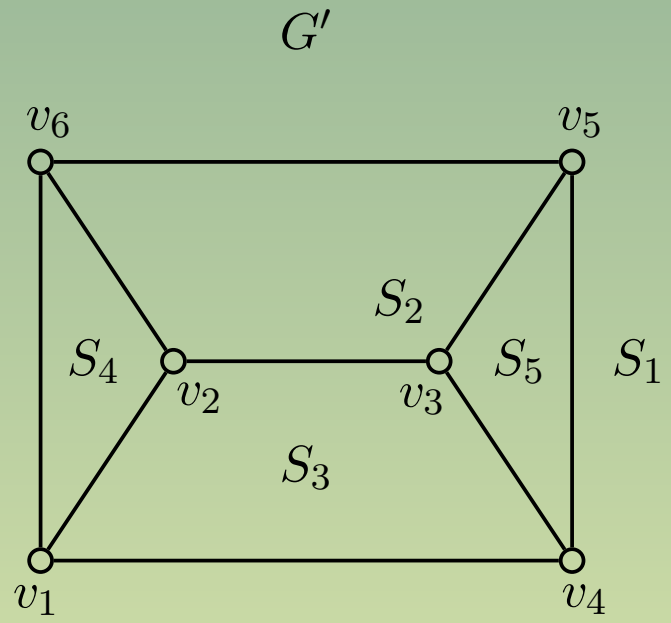
fragmenti od G s obzirom na G'



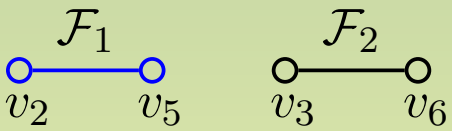
Svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu pa biramo jednog od ta dva fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_1$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



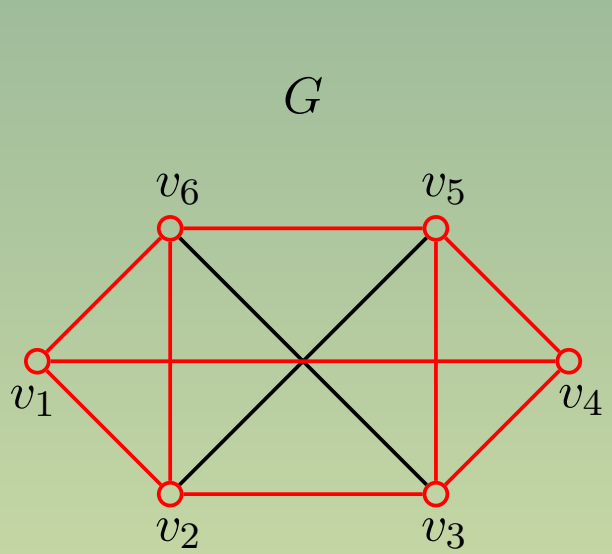


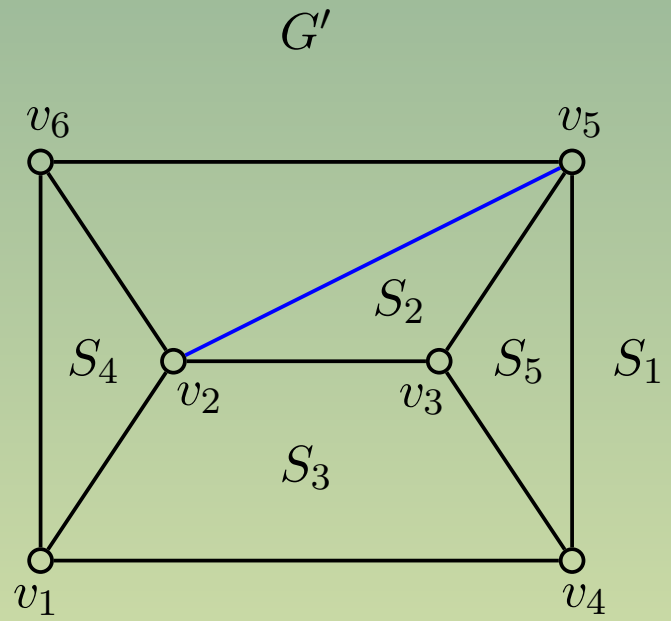
fragmenti od G s obzirom na G'



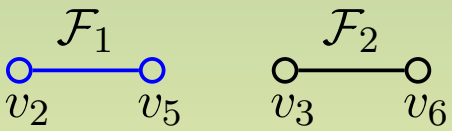
Svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu pa biramo jednog od ta dva fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_1$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put v_2v_5 (to je zapravo jedini α-put u $\mathcal{F}_1$)

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



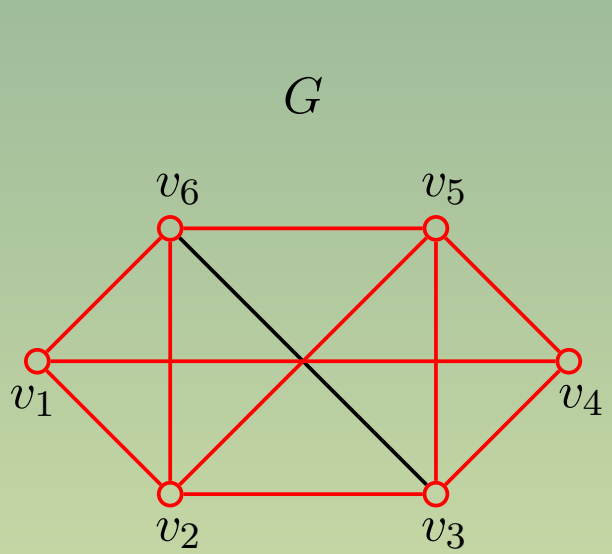


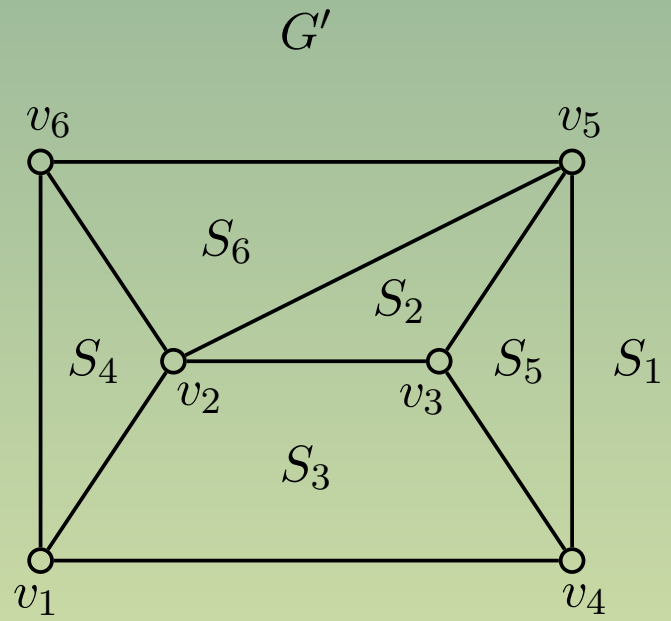
fragmenti od G s obzirom na G'



Svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu pa biramo jednog od ta dva fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_1$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put v_2v_5 (to je zapravo jedini α-put u $\mathcal{F}_1$) i njega smjestimo u jedinu dopustivu stranu S_2 od $\mathcal{F}_1$.

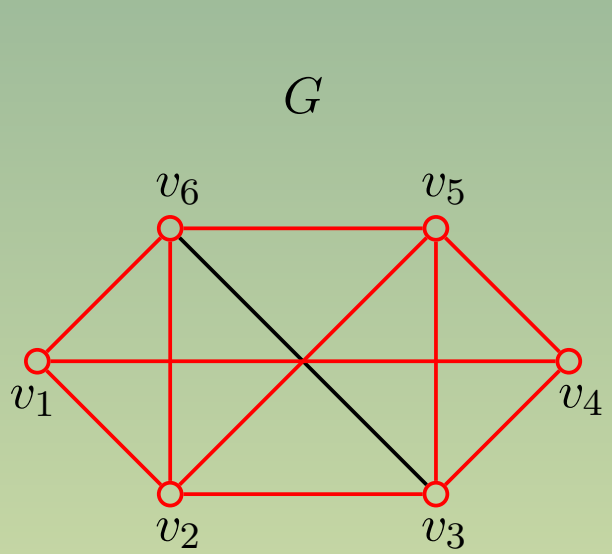
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

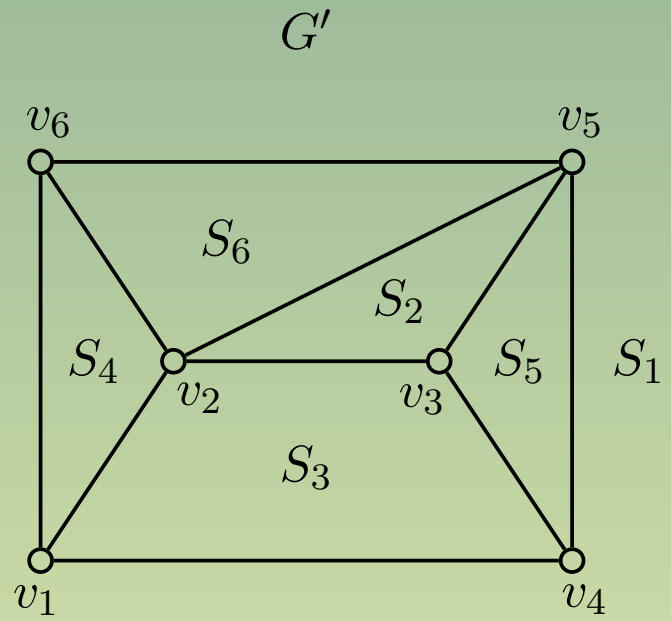




Svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu pa biramo jednog od ta dva fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_1$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put v_2v_5 (to je zapravo jedini α-put u $\mathcal{F}_1$) i njega smjestimo u jedinu dopustivu stranu S_2 od $\mathcal{F}_1$. Dobivamo novi podgraf G' i neko njegovo ravninsko smještenje koje ima 6 strana S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 i S_6.

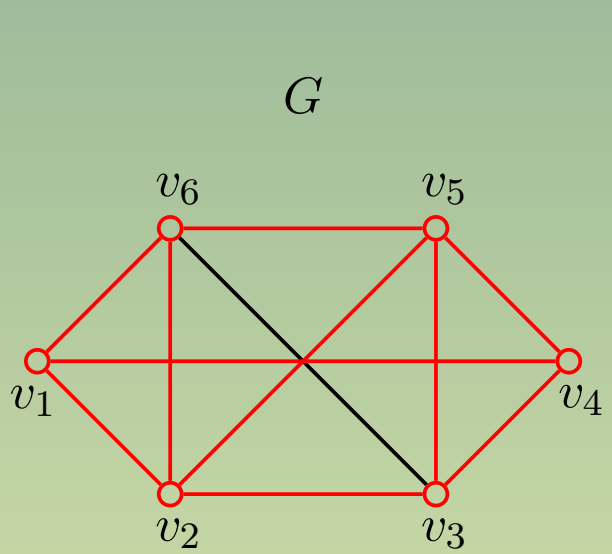
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

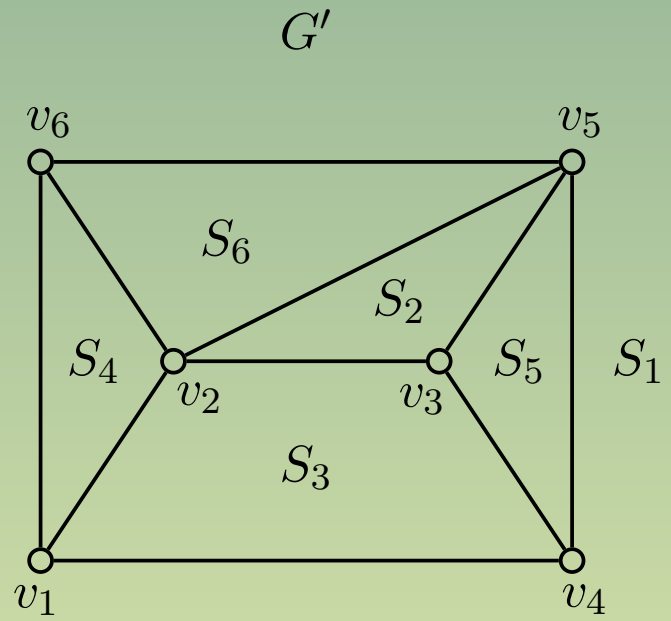




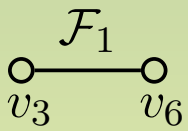
Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





fragmenti od G s obzirom na G'

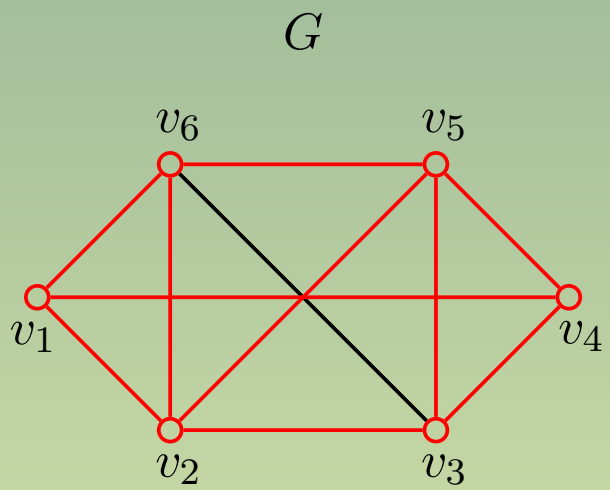


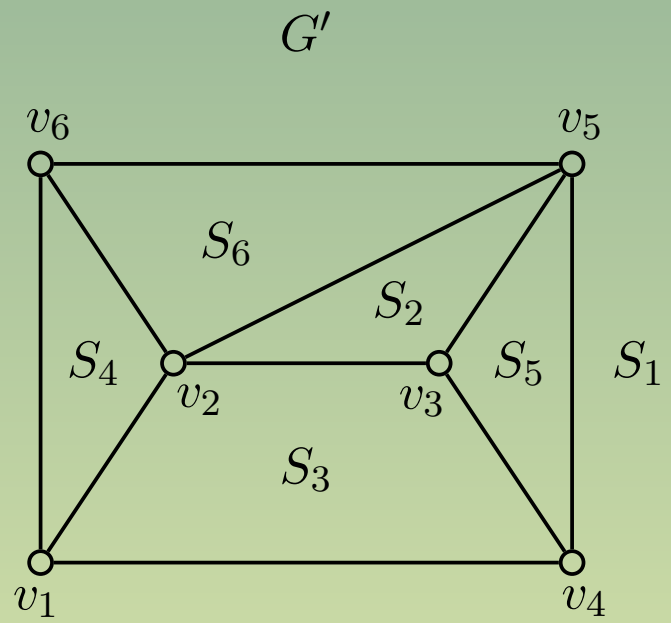
Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'. Najprije odredimo sve fragmente od G s obzirom na G' i njihove dopustive strane $S(\mathcal{F}_1) = \emptyset$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

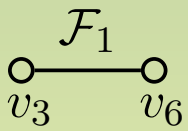
prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





fragmenti od G s obzirom na G'



Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'. Najprije odredimo sve fragmente od G s obzirom na G' i njihove dopustive strane $S(\mathcal{F}_1) = \emptyset$. Kako fragment $\mathcal{F}_1$ nema niti jednu dopustivu stranu, algoritam se zaustavlja i zaključujemo da zadani graf G nije planarni graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Vidjeli smo da u Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritmu u pojedinim koracima imamo dosta slobode kod biranja fragmenata i α-putova u tim fragmentima, biranja dopustive strane u koju ćemo smjestiti odabrani α-put. Stoga se postavlja sljedeće razumno pitanje. Da li ćemo svaki put doći do istog zaključka bez obzira na toliko slobode u pojedinim koracima? Odgovor na to pitanje je potvrdan i zato je Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritam korektan, što ćemo uskoro i dokazati. Dakle, odgovor na pitanje "Da li je graf G planarni?" ne ovisi o načinu biranja fragmenata, α-putova i biranju dopustive strane u koju će se smjestiti α-put.

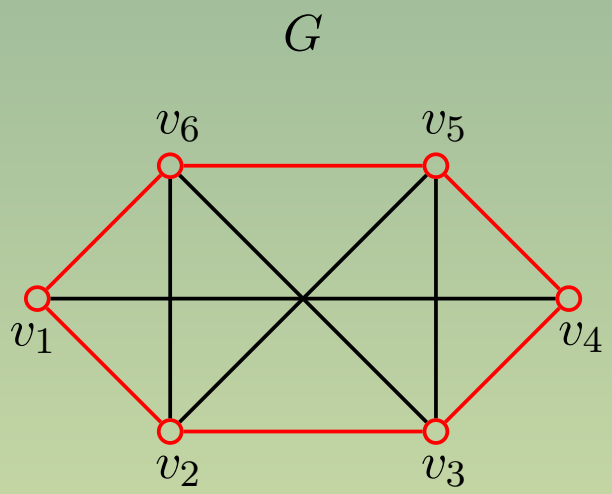
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

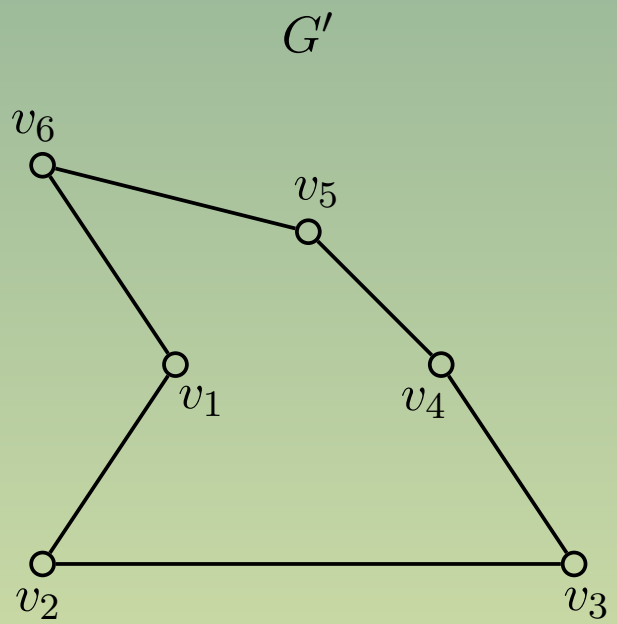
Jedino što se može promijeniti je ravninsko smještenje grafa G ukoliko je on planarni, ali to nije nikakvo iznenađenje jer znamo da ravninsko smještenje planarnog grafa nije jedinstveno i da sva ravninska smještenja planarnog grafa imaju isti broj strana.

◂ korolar 10.1.

Ilustrirajmo navedena razmatranja na prethodnom primjeru tako da ponovo provedemo Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritam s time da počnemo s nekim drugim ciklusom. Vidjet ćemo da će se pojedini koraci razlikovati od onih u prvom načinu provođenja tog algoritma na istom grafu, ali će krajnji zaključak ostati nepromijenjen.

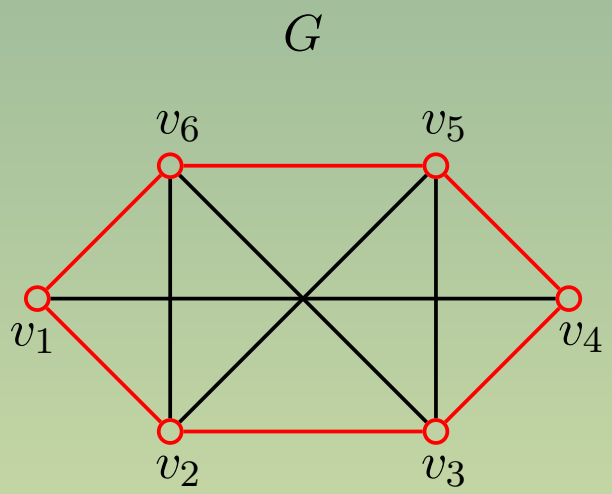
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

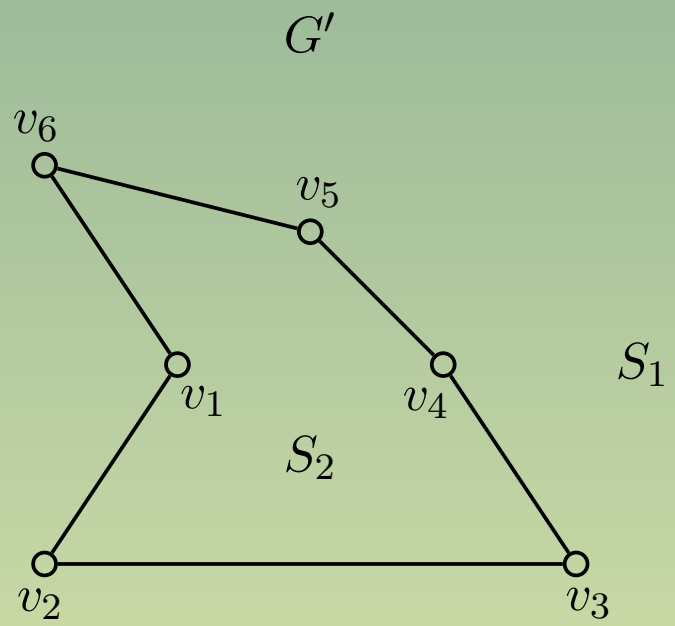




Odaberemo neki ciklus G' u grafu G, npr. $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_1$ i odredimo neko njegovo ravninsko smještenje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





Odaberemo neki ciklus G' u grafu G, npr. $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_1$ i odredimo neko njegovo ravninsko smještenje. Ravninsko smještenje od G' ima ukupno dvije strane S_1 i S_2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

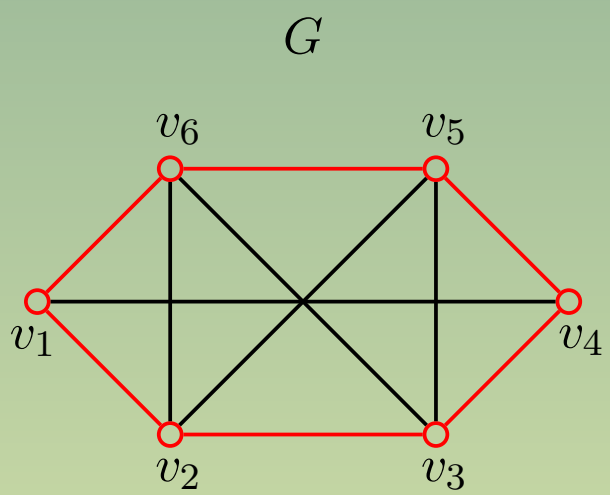
Sparivanje u bipartitnom grafu

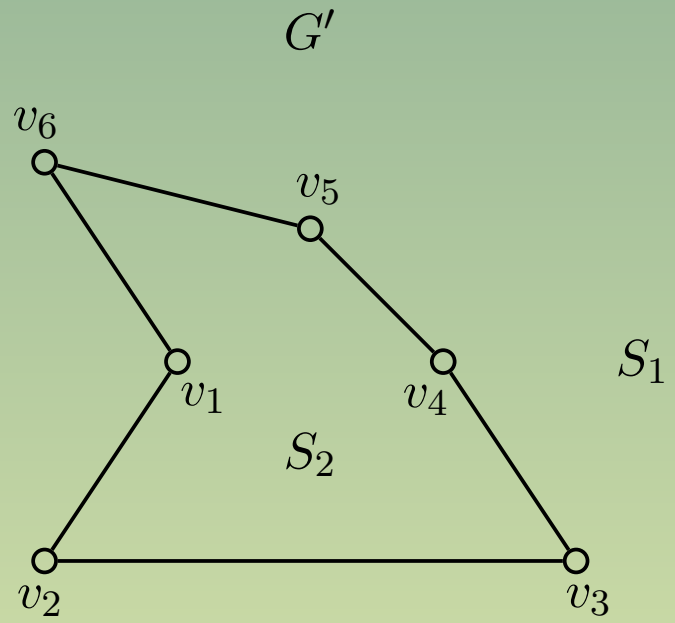
Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

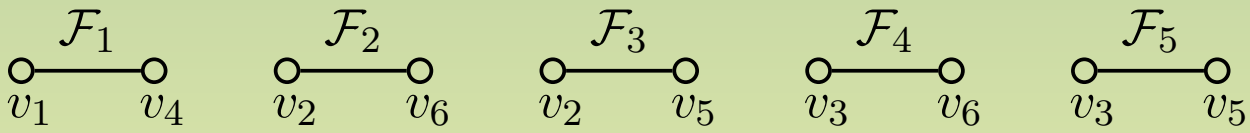
Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja





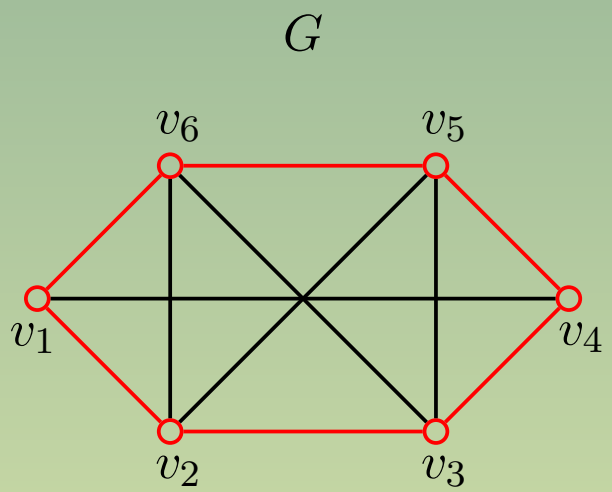
fragmenti od G s obzirom na G'

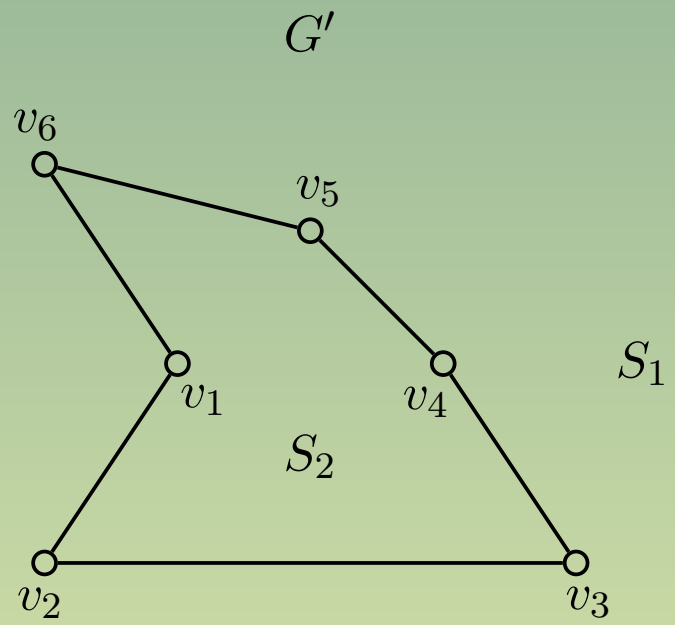


Odaberemo neki ciklus G' u grafu G, npr. $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_1$ i odredimo neko njegovo ravninsko smještenje. Ravninsko smještenje od G' ima ukupno dvije strane S_1 i S_2. Zatim odredimo sve fragmente od G s obzirom na G' i njihove dopustive strane.

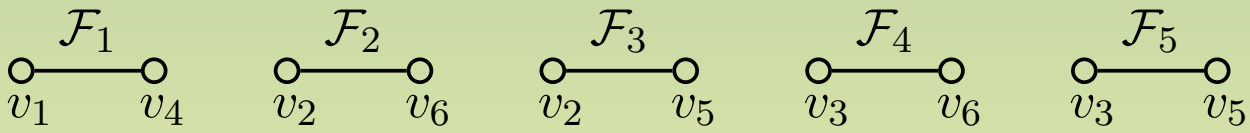
$$S(\mathcal{F}_1) = \{S_1, S_2\}, \quad S(\mathcal{F}_2) = \{S_1, S_2\}, \quad S(\mathcal{F}_3) = \{S_1, S_2\},$$
$$S(\mathcal{F}_4) = \{S_1, S_2\}, \quad S(\mathcal{F}_5) = \{S_1, S_2\}$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



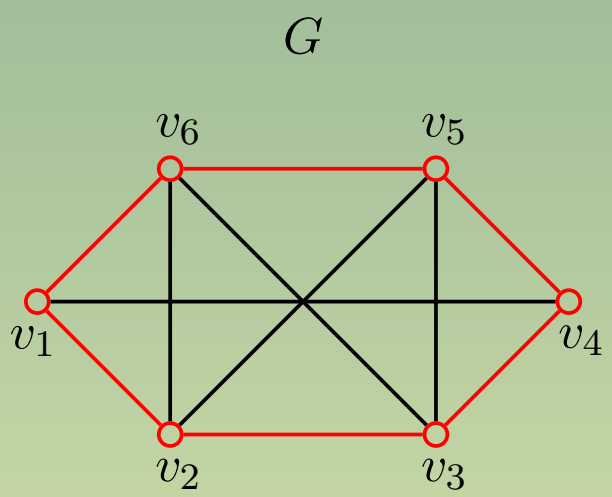


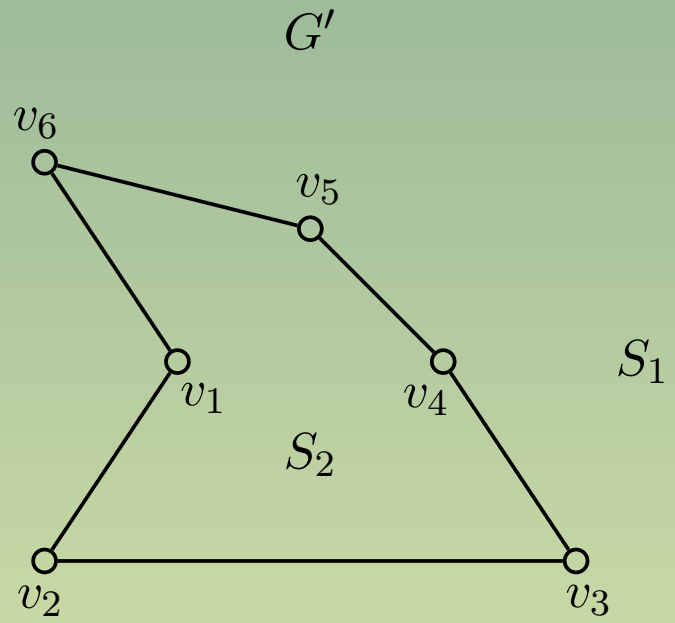
fragmenti od G s obzirom na G'



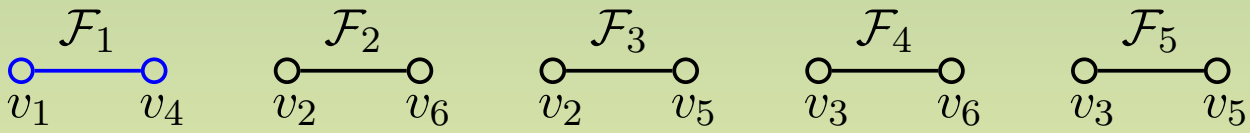
Kako svaki fragment ima više od jedne dopustive strane, odaberemo po volji neki od fragmenata $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_4$ i $\mathcal{F}_5$. Na primjer, odaberimo fragment $\mathcal{F}_1$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



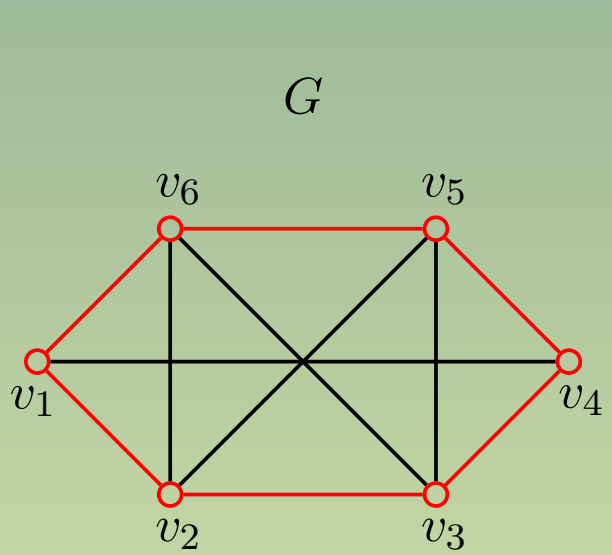


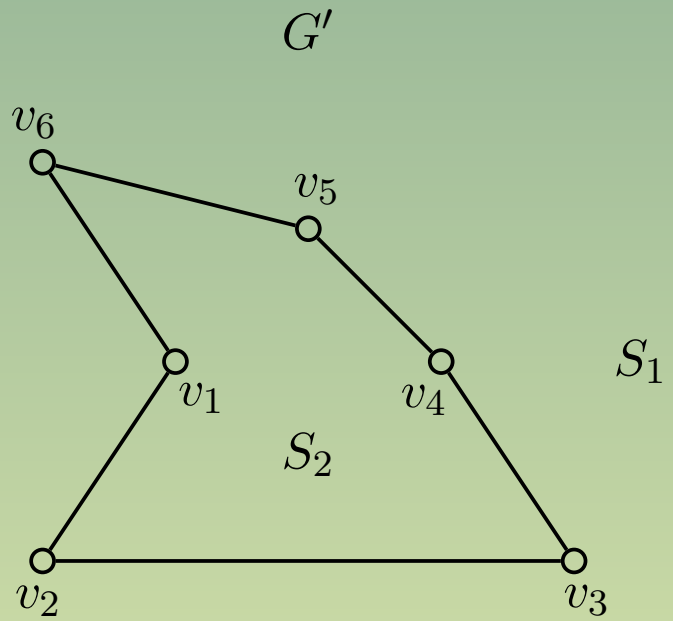
fragmenti od G s obzirom na G'



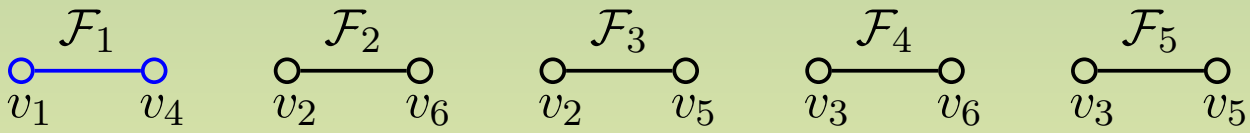
Kako svaki fragment ima više od jedne dopustive strane, odaberemo po volji neki od fragmenata $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_4$ i $\mathcal{F}_5$. Na primjer, odaberimo fragment $\mathcal{F}_1$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put v_1v_4 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_1$).

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



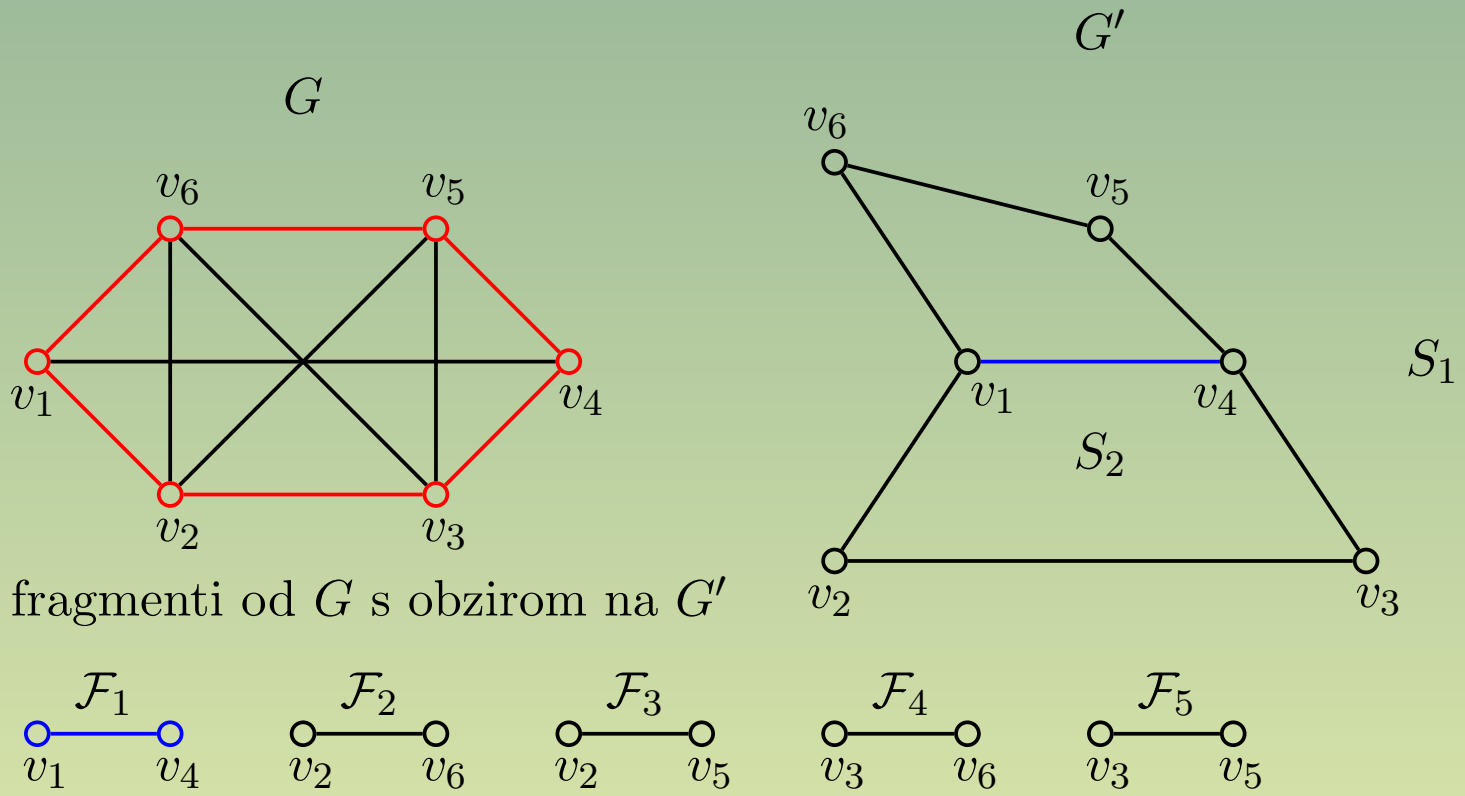


fragmenti od G s obzirom na G'



Odabrani α-put u $\mathcal{F}_1$ smjestimo u neku dopustivu stranu od $\mathcal{F}_1$. Kako je $S(\mathcal{F}_1) = \{S_1, S_2\}$, biramo jednu od strana S_1 i S_2.

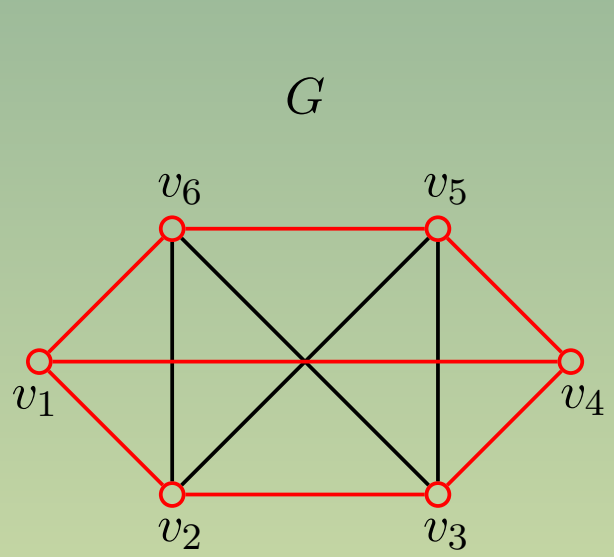
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

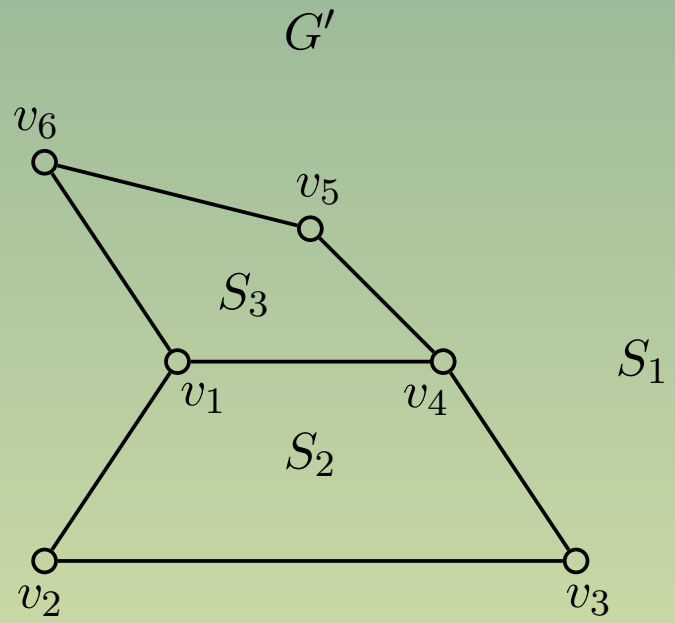


fragmenti od G s obzirom na G'

Odabrani α-put u $\mathcal{F}_1$ smjestimo u neku dopustivu stranu od $\mathcal{F}_1$. Kako je $S(\mathcal{F}_1) = \{S_1, S_2\}$, biramo jednu od strana S_1 i S_2. Na primjer, odaberimo stranu S_2 i u nju smjestimo odabrani α-put.

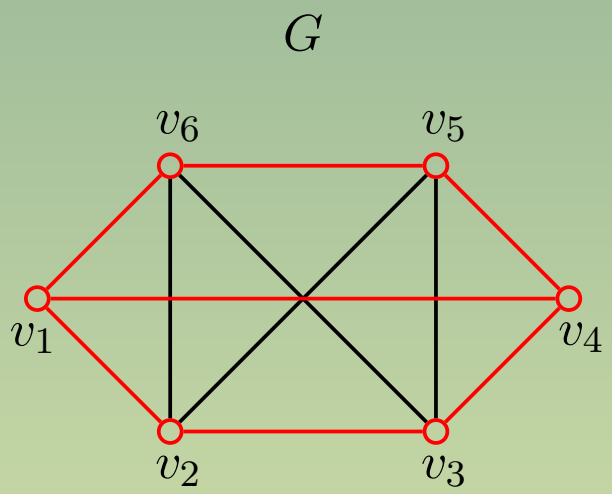
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

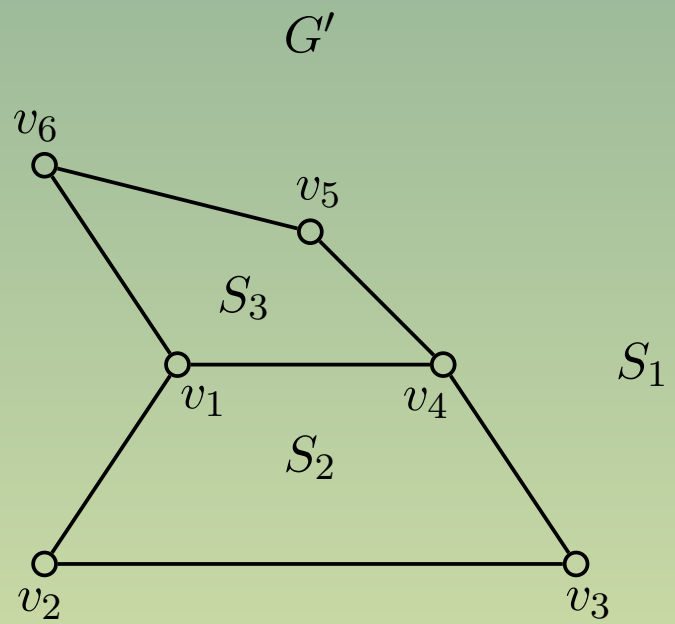




Odabrani α-put u $\mathcal{F}_1$ smjestimo u neku dopustivu stranu od $\mathcal{F}_1$. Kako je $S(\mathcal{F}_1) = \{S_1, S_2\}$, biramo jednu od strana S_1 i S_2. Na primjer, odaberimo stranu S_2 i u nju smjestimo odabrani α-put. Na taj način dobivamo novi podgraf G' i neko njegovo ravninsko smještenje koje ima tri strane S_1, S_2 i S_3.

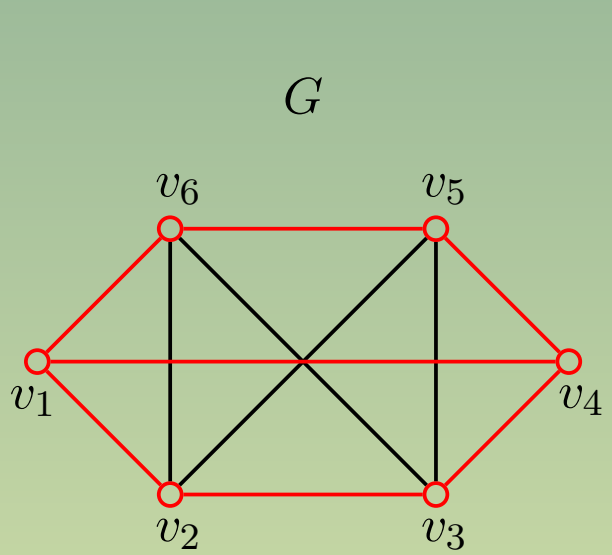
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

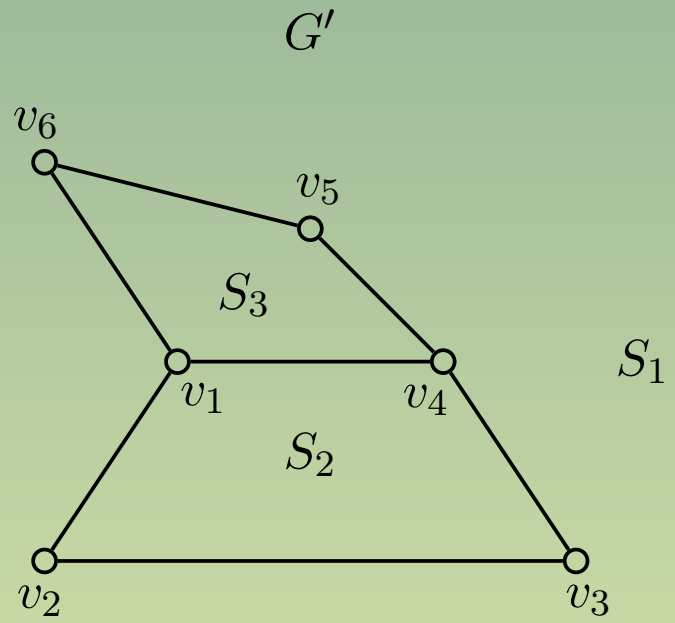




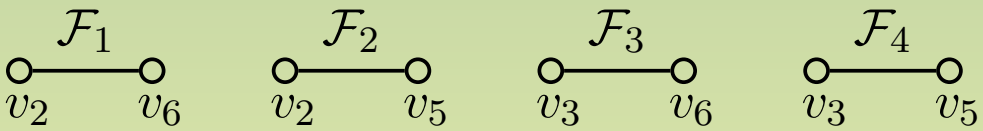
Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





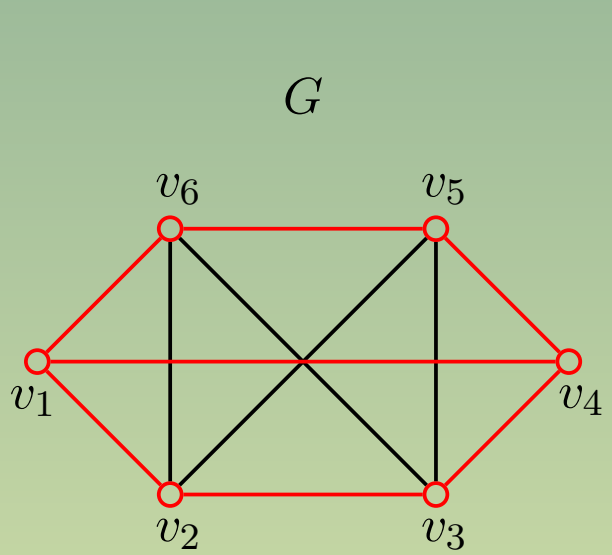
fragmenti od G s obzirom na G'

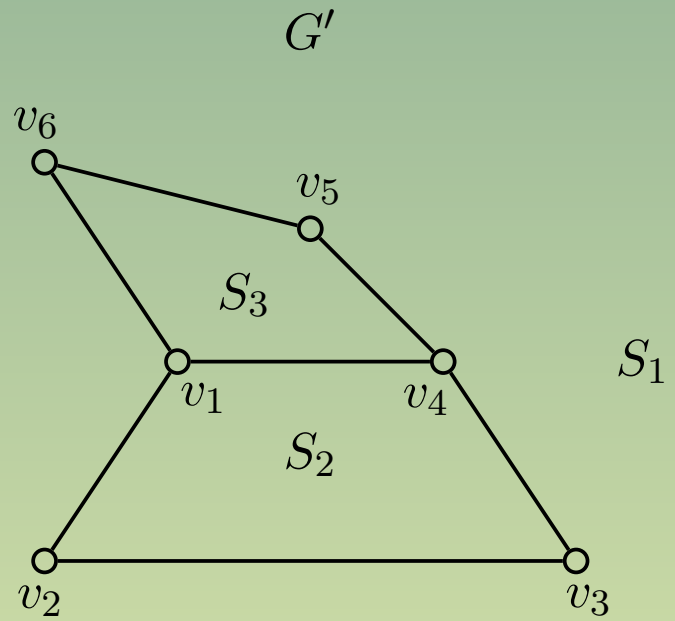


Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'. Najprije odredimo sve fragmente od G s obzirom na G' i njihove dopustive strane.

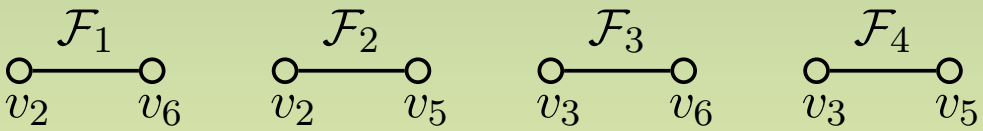
$$S(\mathcal{F}_1) = \{S_1\},\ S(\mathcal{F}_2) = \{S_1\},\ S(\mathcal{F}_3) = \{S_1\},\ S(\mathcal{F}_4) = \{S_1\}$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



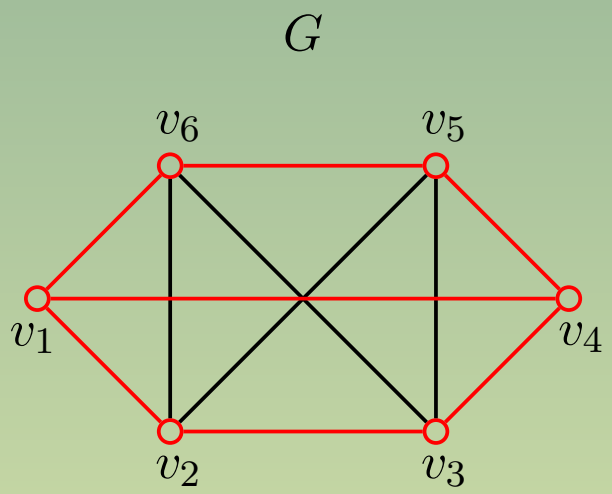


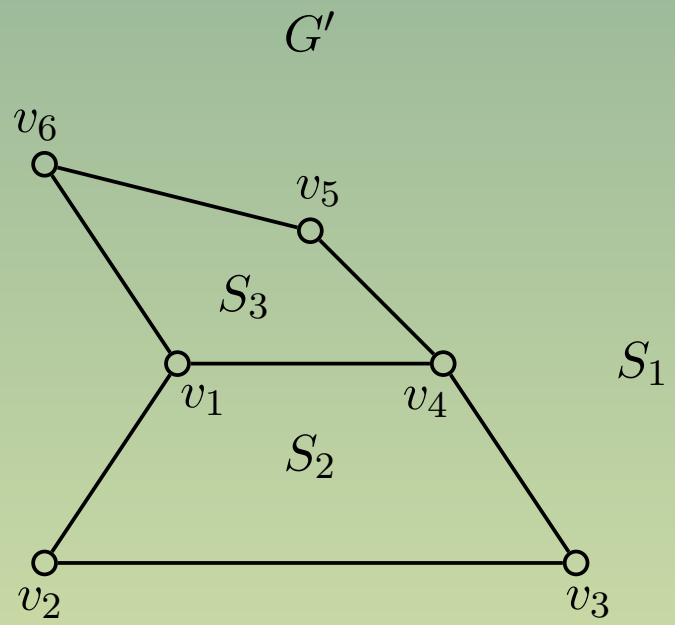
fragmenti od G s obzirom na G'



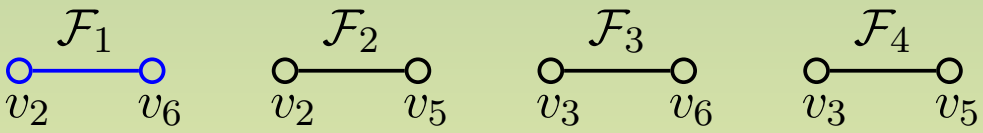
Kako svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ i $\mathcal{F}_4$ ima samo jednu dopustivu stranu, biramo nekog od ta četiri fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_1$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

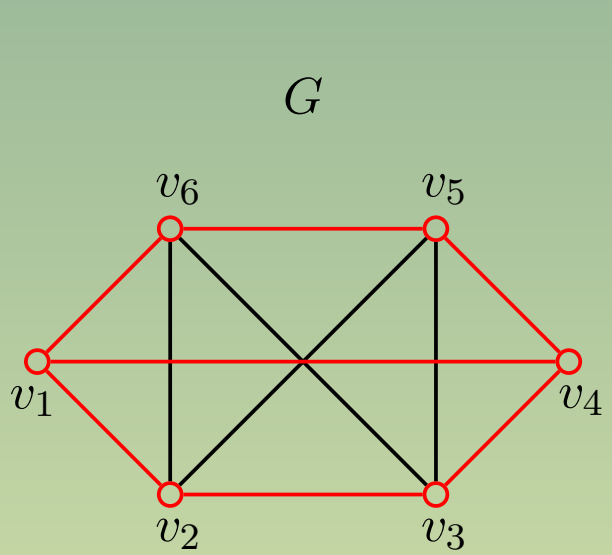


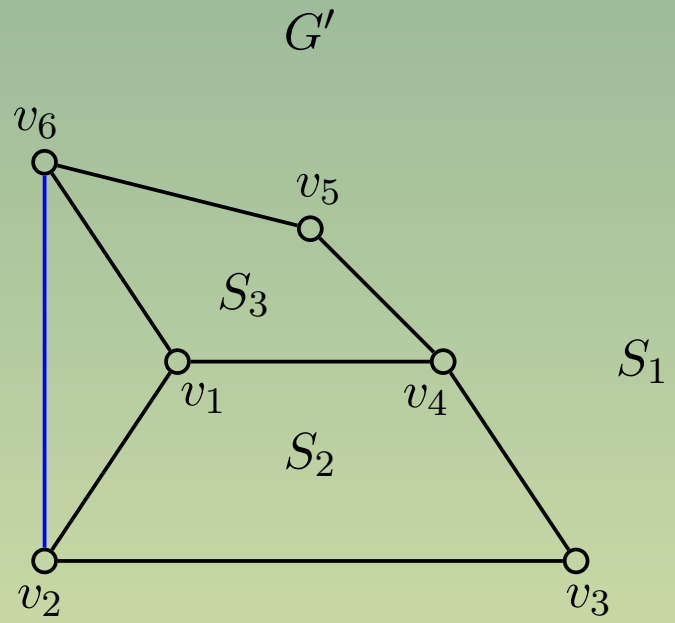


fragmenti od G s obzirom na G'

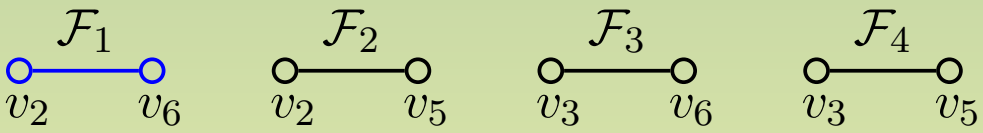


Kako svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ i $\mathcal{F}_4$ ima samo jednu dopustivu stranu, biramo nekog od ta četiri fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_1$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put v_2v_6 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_1$)



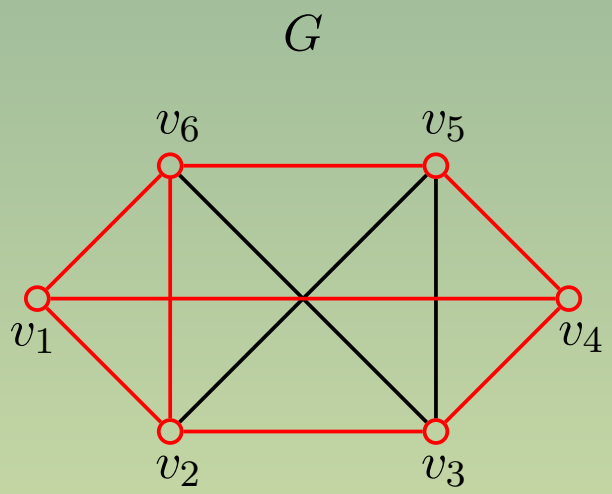


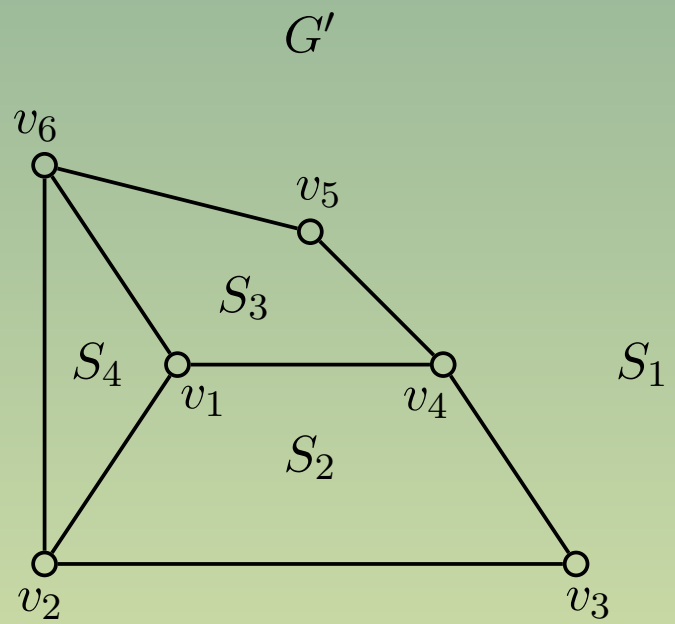
fragmenti od G s obzirom na G'



Kako svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ i $\mathcal{F}_4$ ima samo jednu dopustivu stranu, biramo nekog od ta četiri fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_1$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put v_2v_6 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_1$) i njega smjestimo u jedinu dopustivu stranu S_1 od $\mathcal{F}_1$.

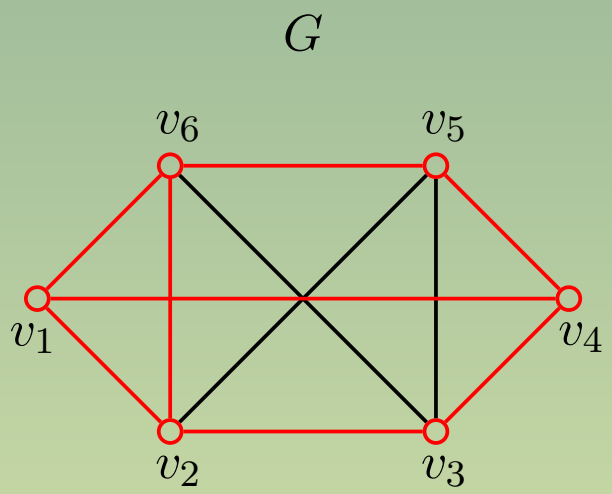
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

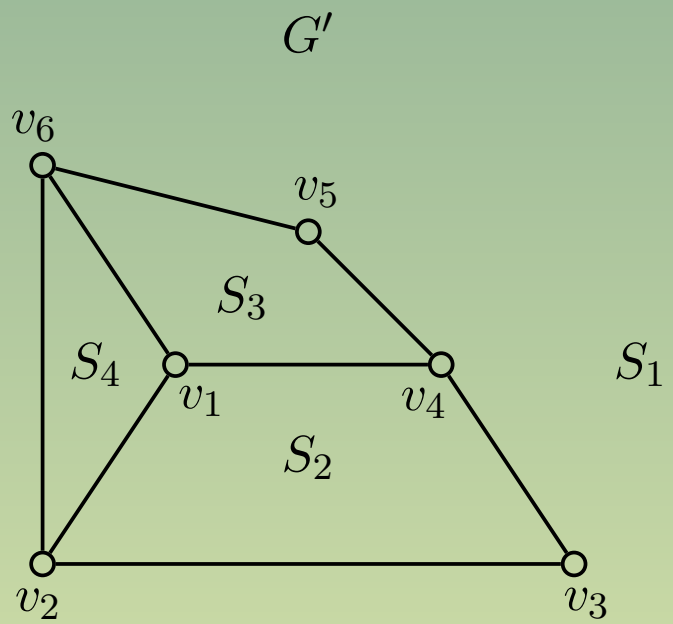




Kako svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ i $\mathcal{F}_4$ ima samo jednu dopustivu stranu, biramo nekog od ta četiri fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_1$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put v_2v_6 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_1$) i njega smjestimo u jedinu dopustivu stranu S_1 od $\mathcal{F}_1$. Na taj način dobivamo novi podgraf G' i neko njegovo ravninsko smještenje koje ima 4 strane S_1, S_2, S_3 i S_4.

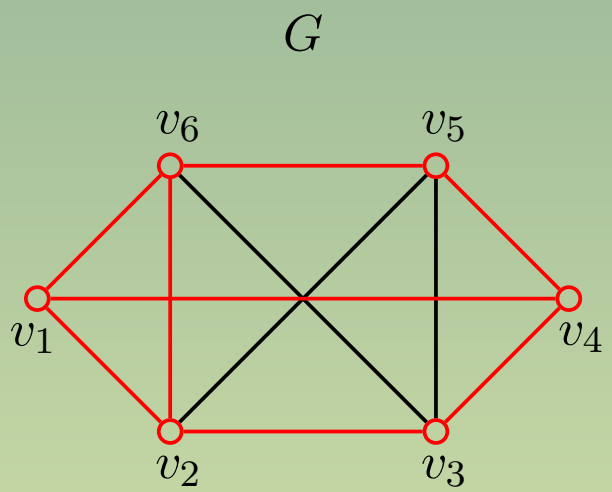
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

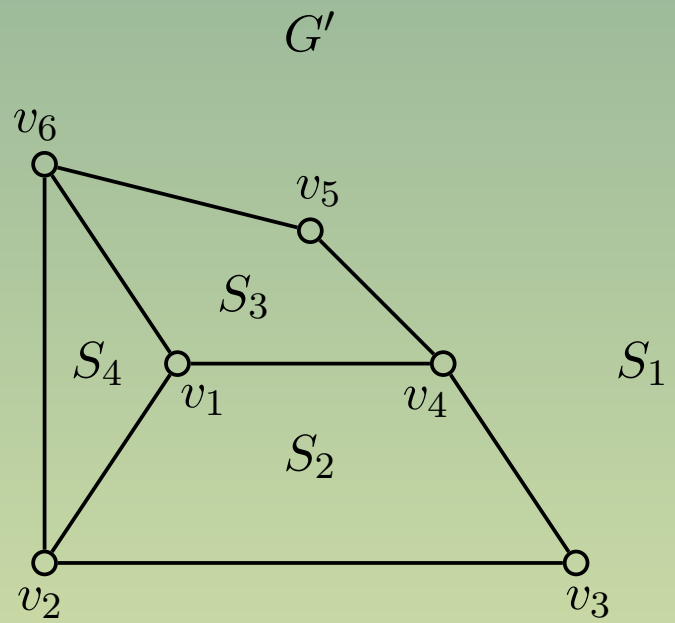




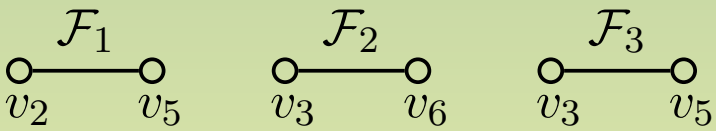
Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





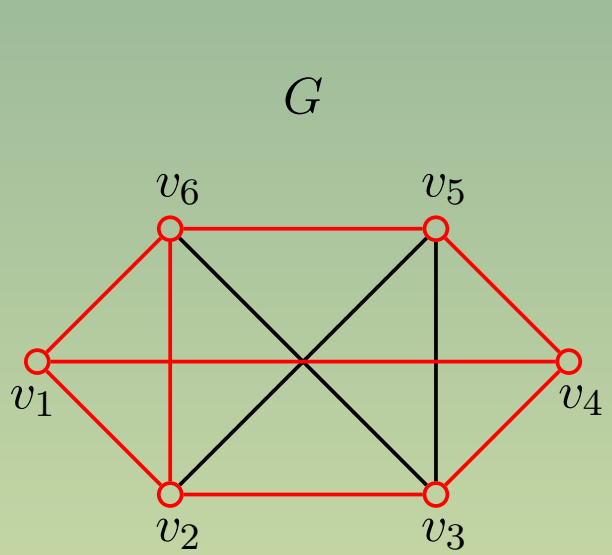
fragmenti od G s obzirom na G'

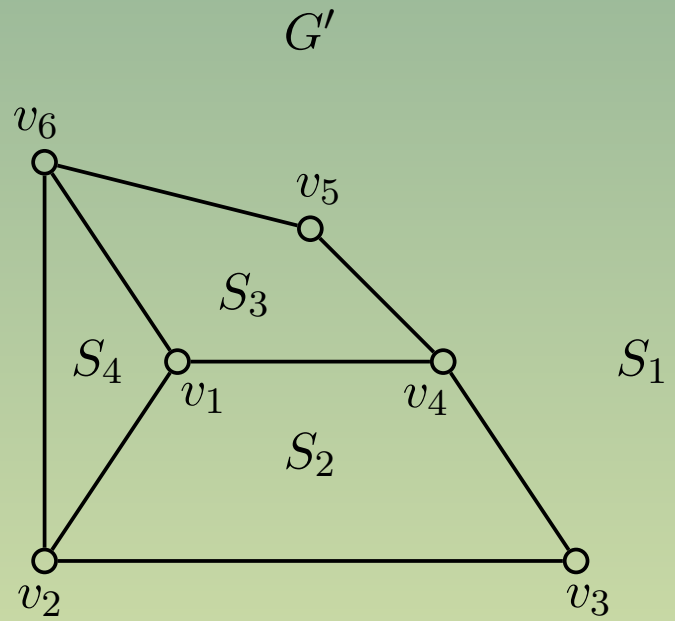


Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'. Najprije odredimo sve fragmente od G s obzirom na G' i njihove dopustive strane.

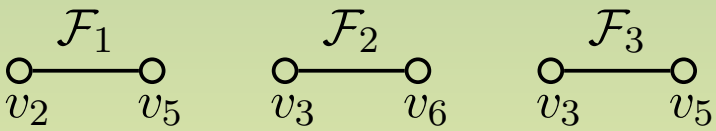
$$S(\mathcal{F}_1) = \{S_1\}, \quad S(\mathcal{F}_2) = \{S_1\}, \quad S(\mathcal{F}_3) = \{S_1\}$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



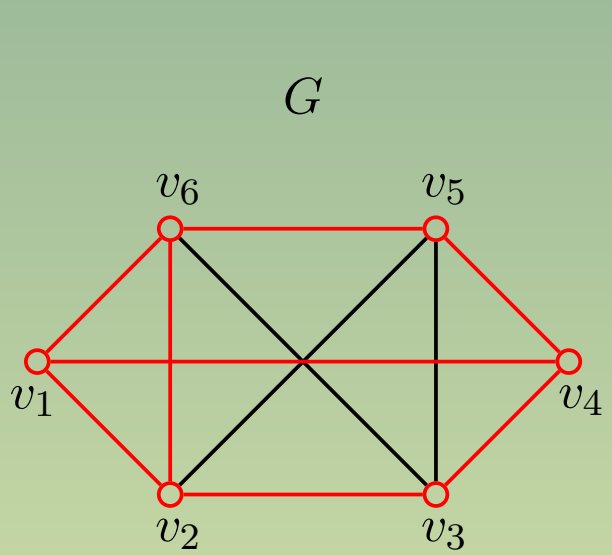


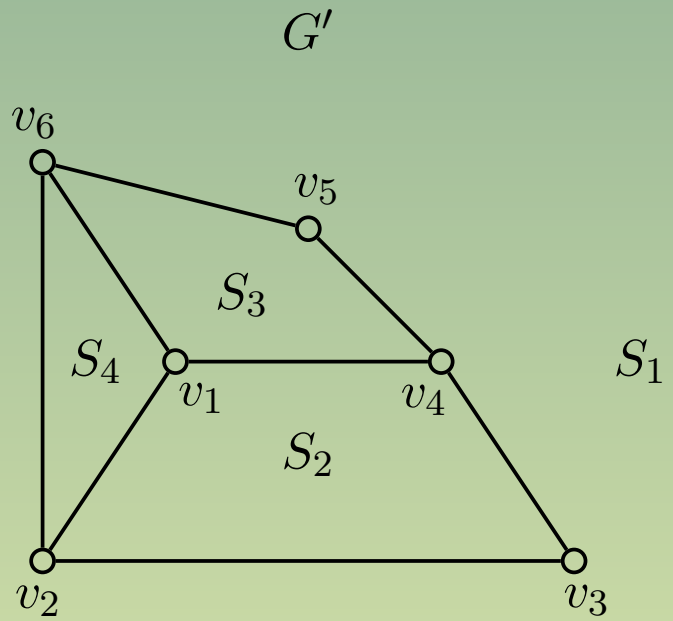
fragmenti od G s obzirom na G'



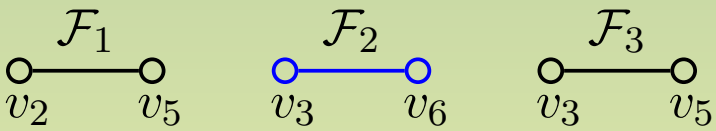
Kako svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ i $\mathcal{F}_3$ ima samo jednu dopustivu stranu, biramo nekog od ta tri fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_2$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



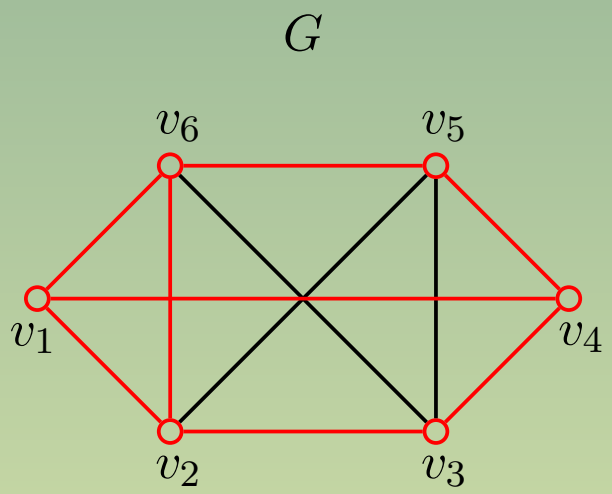


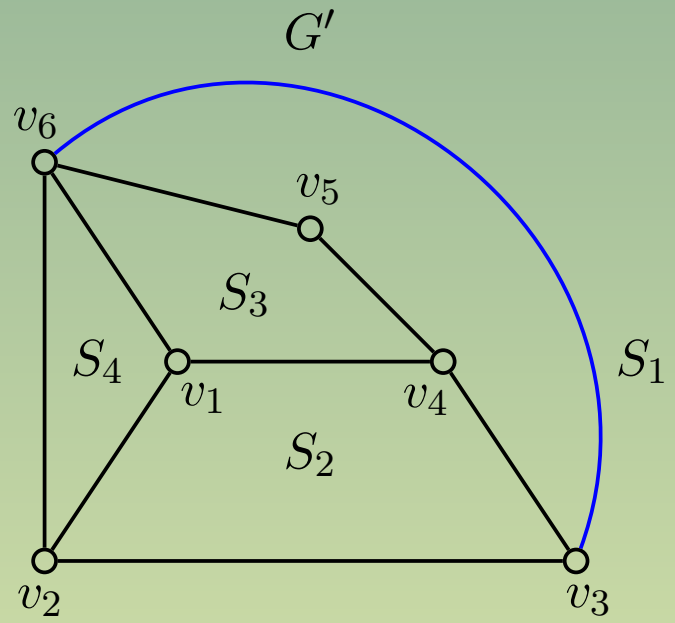
fragmenti od G s obzirom na G'



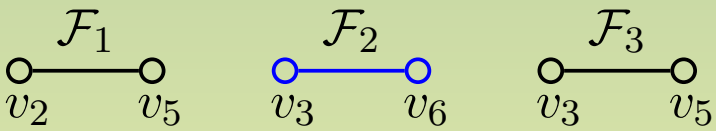
Kako svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ i $\mathcal{F}_3$ ima samo jednu dopustivu stranu, biramo nekog od ta tri fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_2$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_2$ odaberemo jedan α-put v_3v_6 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_2$)

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



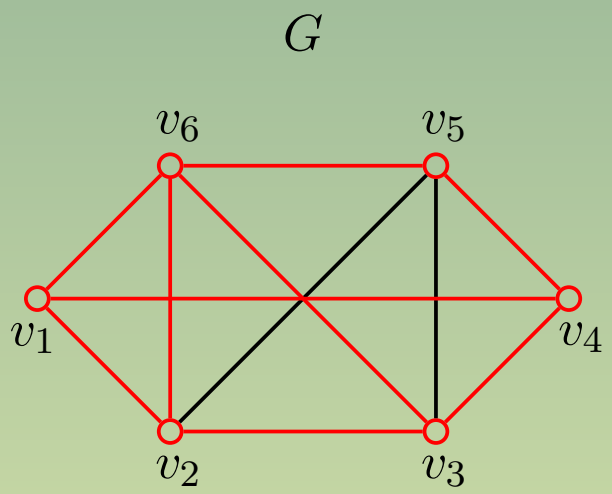


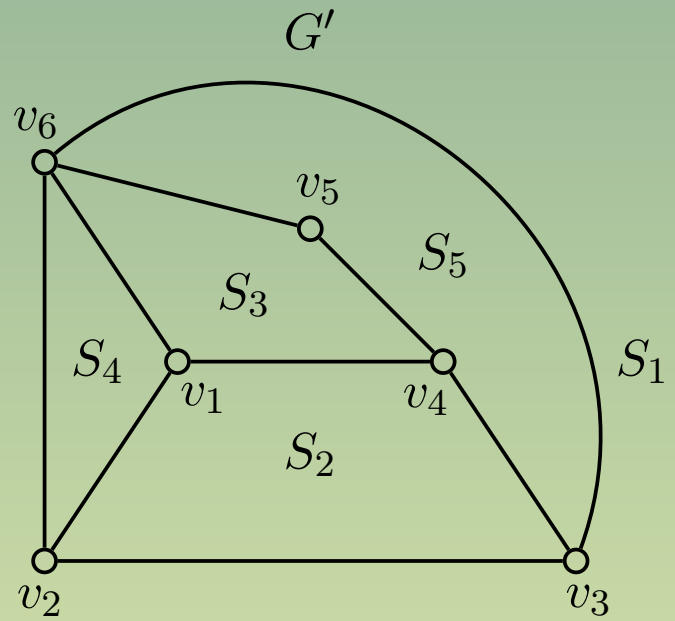
fragmenti od G s obzirom na G'



Kako svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ i $\mathcal{F}_3$ ima samo jednu dopustivu stranu, biramo nekog od ta tri fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_2$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_2$ odaberemo jedan α-put v_3v_6 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_2$) i njega smjestimo u jedinu dopustivu stranu S_1 od $\mathcal{F}_2$.

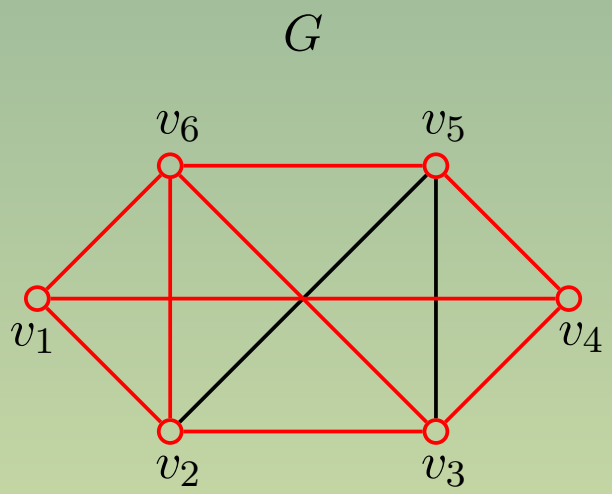
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

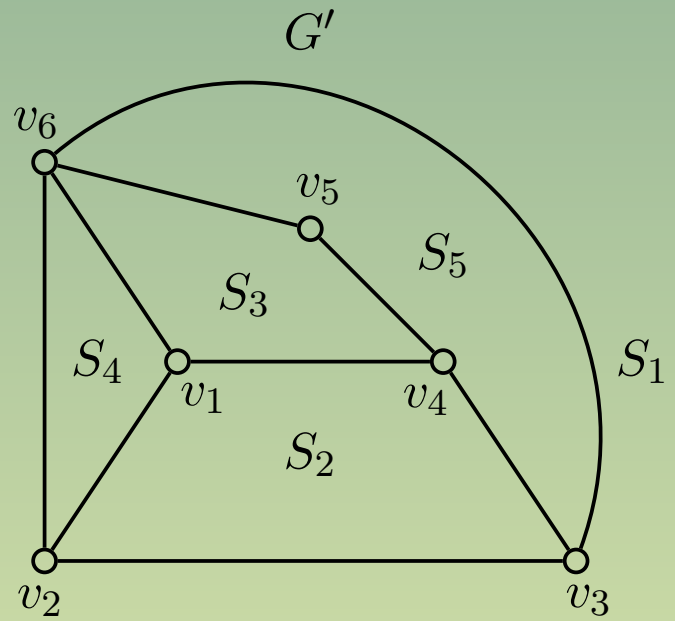




Kako svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ i $\mathcal{F}_3$ ima samo jednu dopustivu stranu, biramo nekog od ta tri fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_2$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_2$ odaberemo jedan α-put v_3v_6 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_2$) i njega smjestimo u jedinu dopustivu stranu S_1 od $\mathcal{F}_2$. Dobivamo novi podgraf G' i neko njegovo ravninsko smještenje koje ima 5 strana S_1, S_2, S_3, S_4 i S_5.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

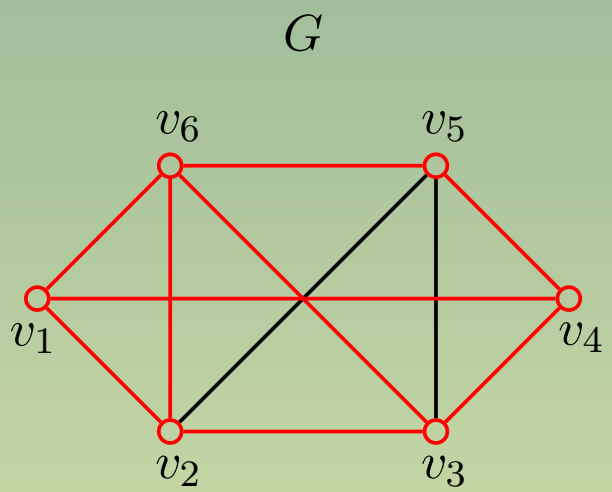
Sparivanje u bipartitnom grafu

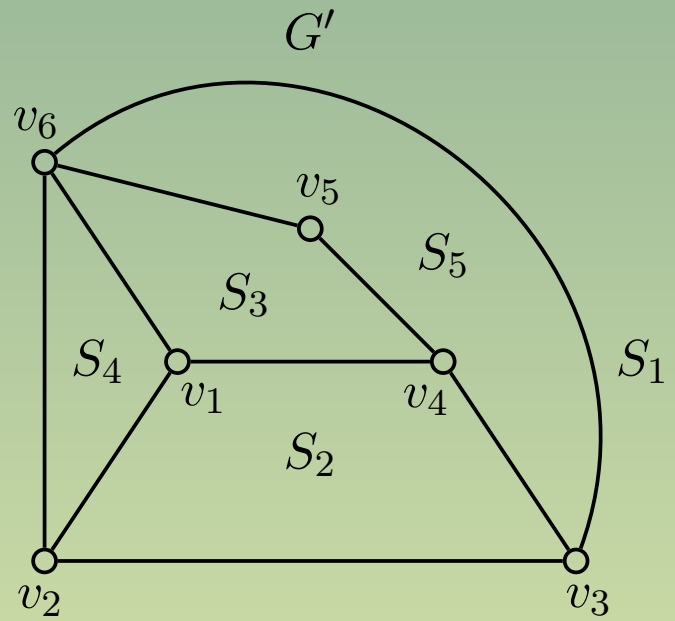
Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

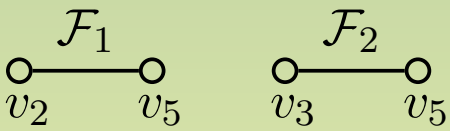
Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



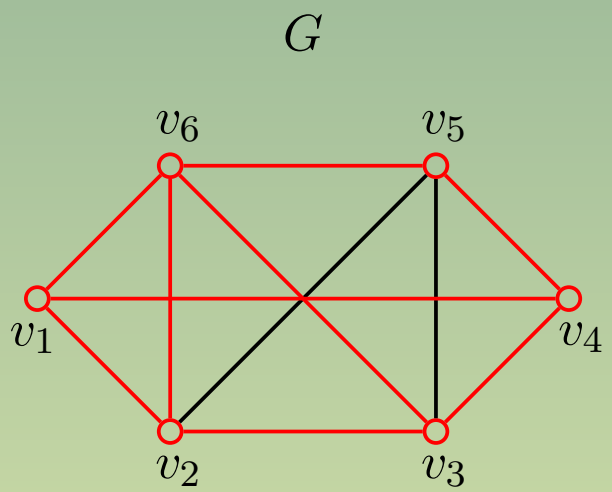


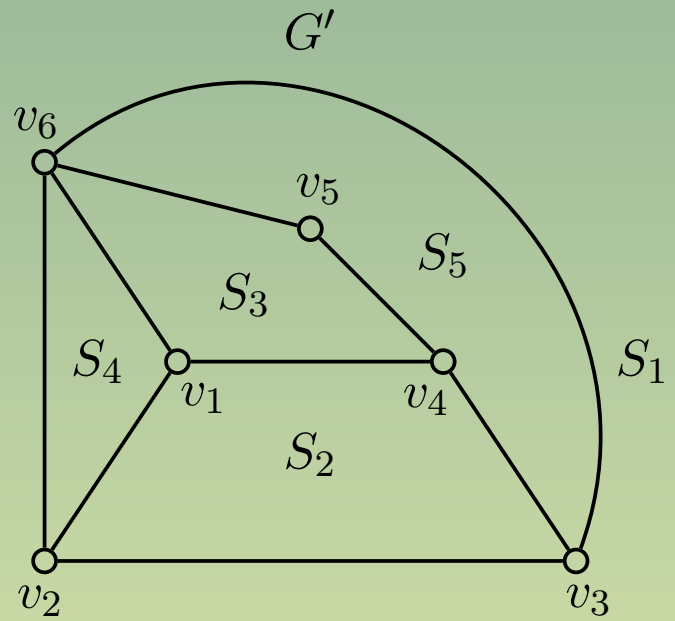
fragmenti od G s obzirom na G'



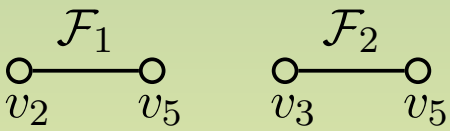
Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'. Najprije odredimo sve fragmente od G s obzirom na G' i njihove dopustive strane $S(\mathcal{F}_1) = \emptyset$ i $S(\mathcal{F}_2) = \{S_5\}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





fragmenti od G s obzirom na G'

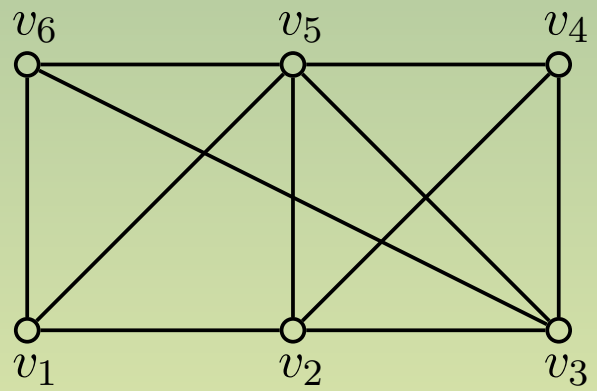


Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'. Najprije odredimo sve fragmente od G s obzirom na G' i njihove dopustive strane $S(\mathcal{F}_1) = \emptyset$ i $S(\mathcal{F}_2) = \{S_5\}$. Kako fragment $\mathcal{F}_1$ nema niti jednu dopustivu stranu, algoritam se zaustavlja i zaključujemo da zadani graf G nije planarni graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.31.

Pomoću Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritma ispitajte da li je zadani graf G planarni.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

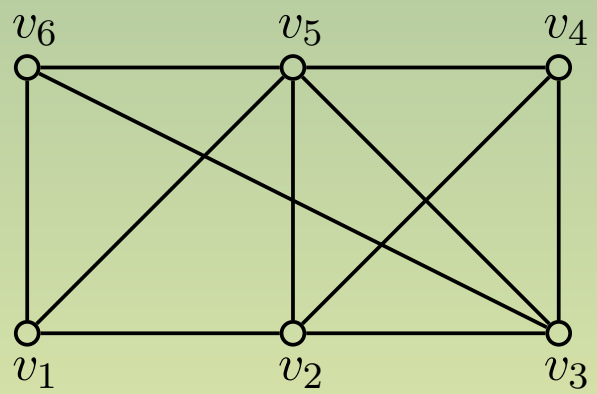
Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja

Primjer 10.31.

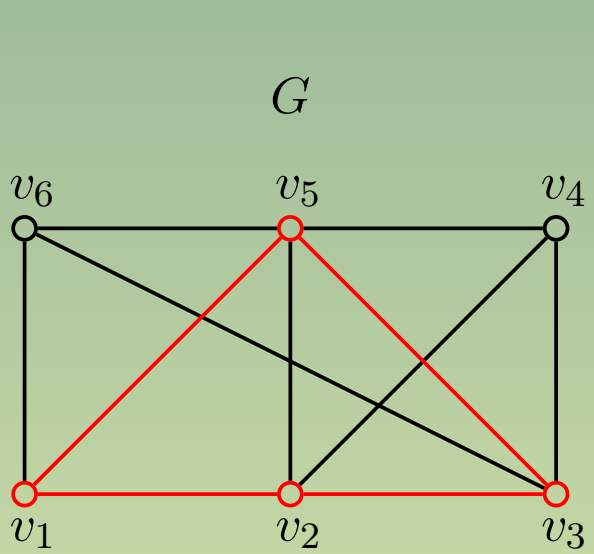
Pomoću Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritma ispitajte da li je zadani graf G planarni.

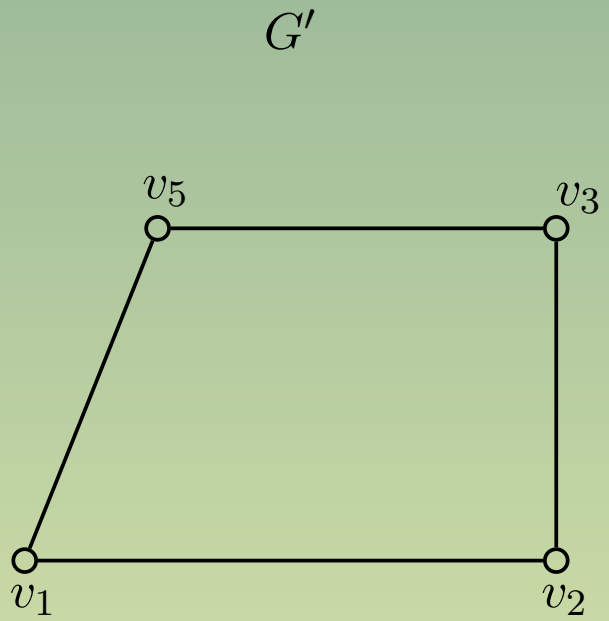


Rješenje.

U primjeru 10.29. smo pokazali da je zadani graf G planarni graf, gdje smo se koristili ad hoc metodama. Ovdje ćemo korak po korak pomoću Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritma doći do istog zaključka.

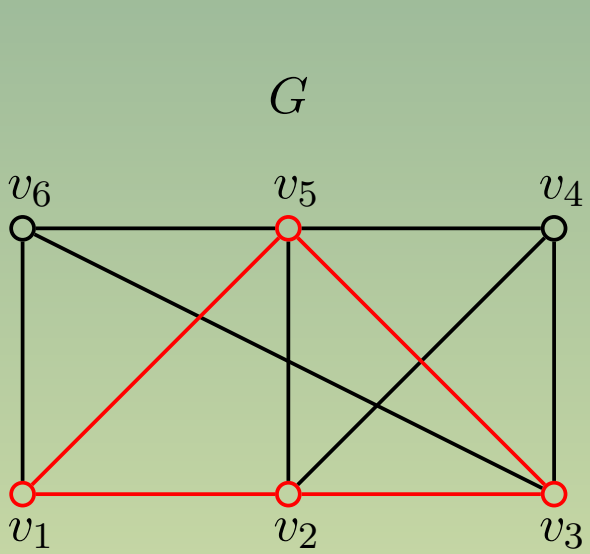
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

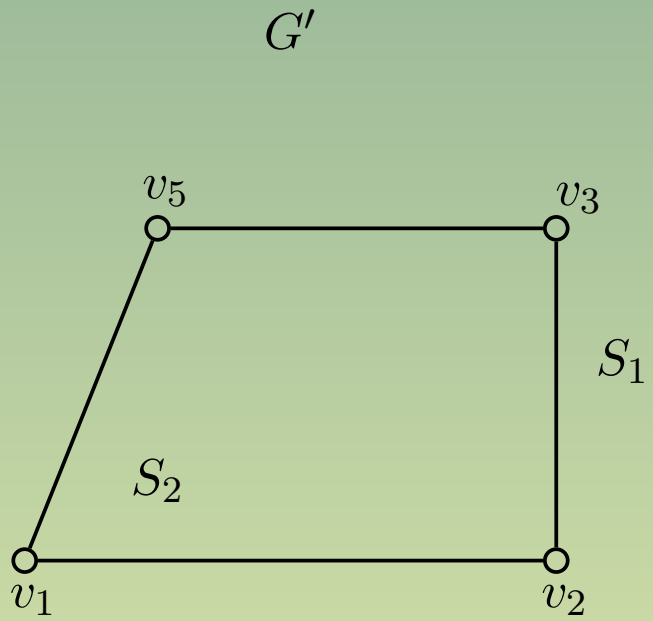




Odaberemo neki ciklus G' u grafu G, npr. $v_1v_2v_3v_5v_1$ i odredimo neko njegovo ravninsko smještenje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



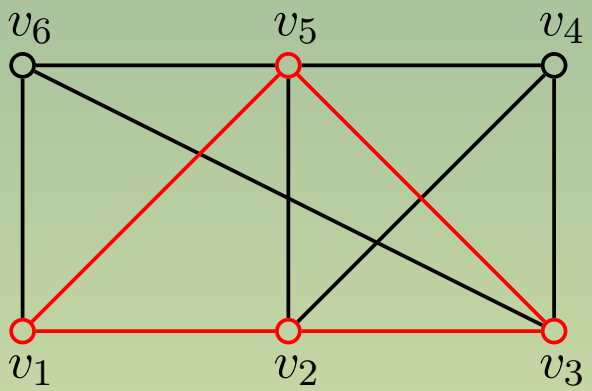


Odaberemo neki ciklus G' u grafu G, npr. $v_1v_2v_3v_5v_1$ i odredimo neko njegovo ravninsko smještenje. Ravninsko smještenje od G' ima ukupno dvije strane S_1 i S_2.

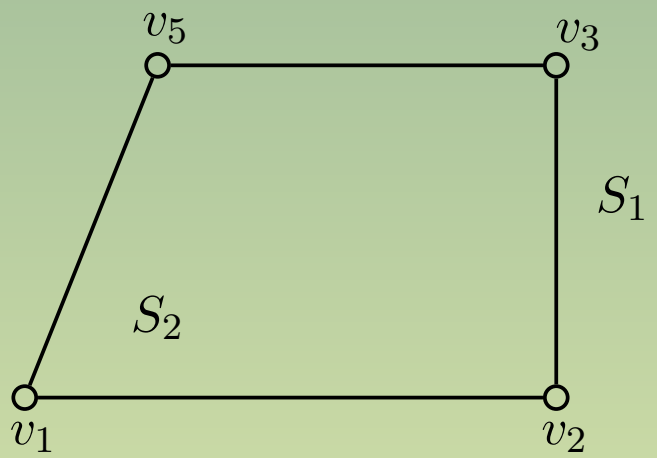
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

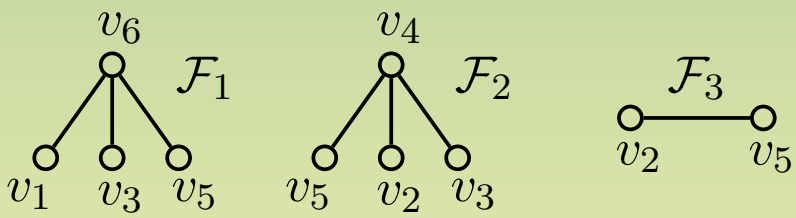
G



G'



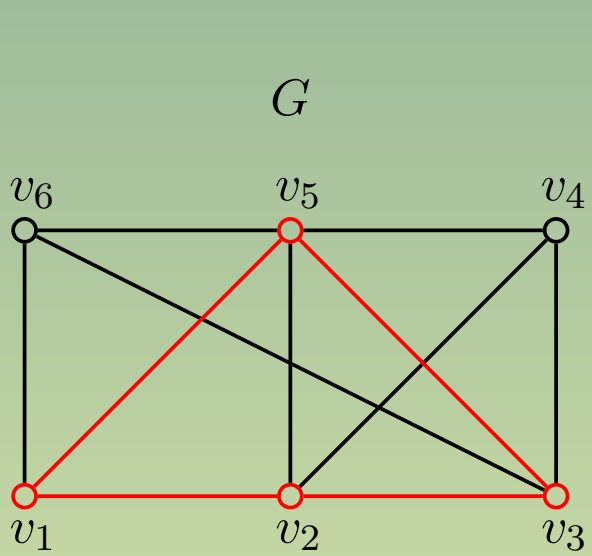
fragmenti od G s obzirom na G'

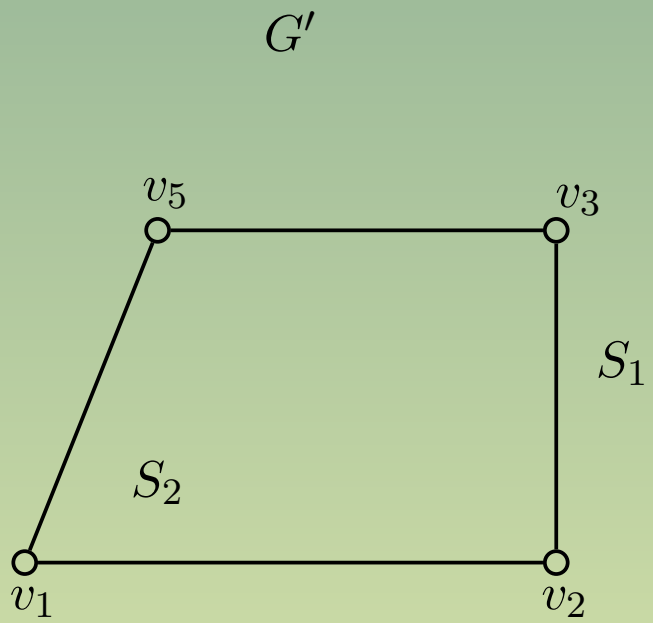


Odaberemo neki ciklus G' u grafu G, npr. $v_1v_2v_3v_5v_1$ i odredimo neko njegovo ravninsko smještenje. Ravninsko smještenje od G' ima ukupno dvije strane S_1 i S_2. Zatim odredimo sve fragmente od G s obzirom na G' i njihove dopustive strane.

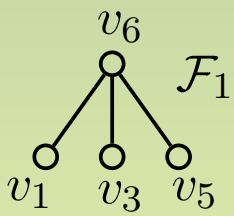
$$S(\mathcal{F}_1) = \{S_1, S_2\}, \quad S(\mathcal{F}_2) = \{S_1, S_2\}, \quad S(\mathcal{F}_3) = \{S_1, S_2\}$$

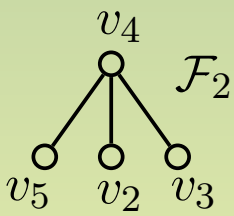
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

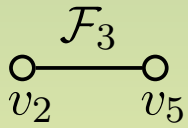




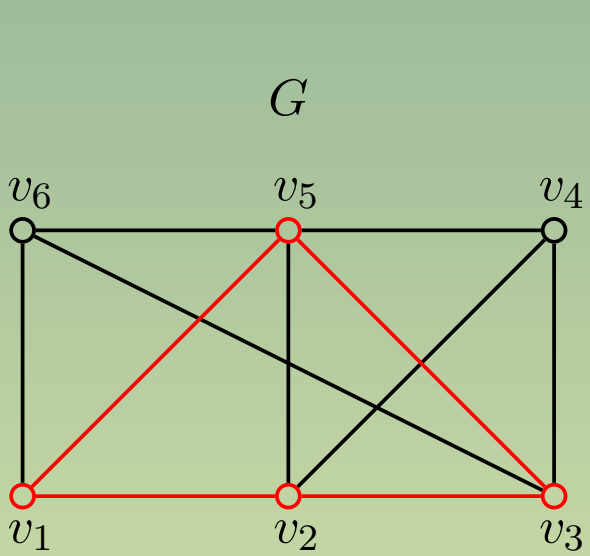
fragmenti od G s obzirom na G'

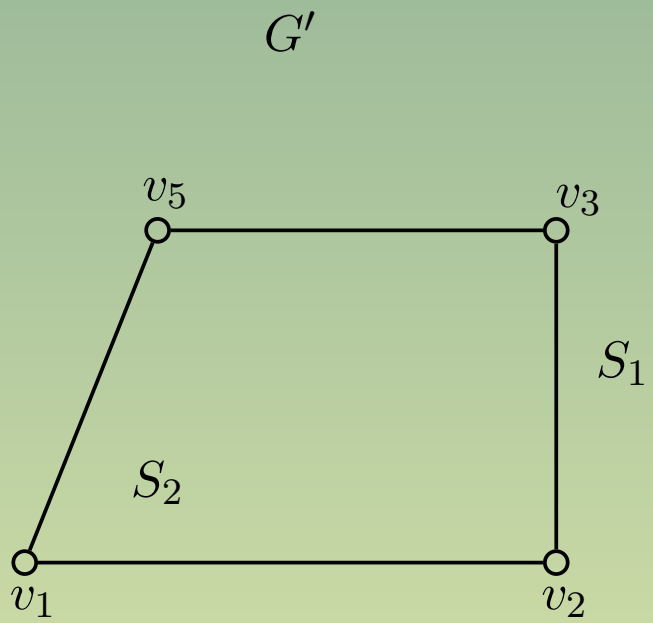




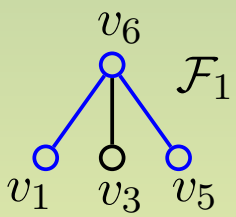


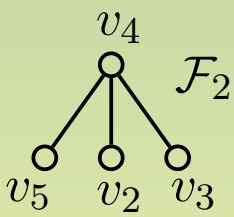
Kako svaki fragment ima više od jedne dopustive strane, odaberemo po volji neki od fragmenata $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ i $\mathcal{F}_3$. Na primjer, odaberimo fragment $\mathcal{F}_1$.

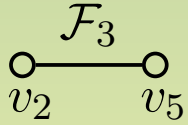




fragmenti od G s obzirom na G'

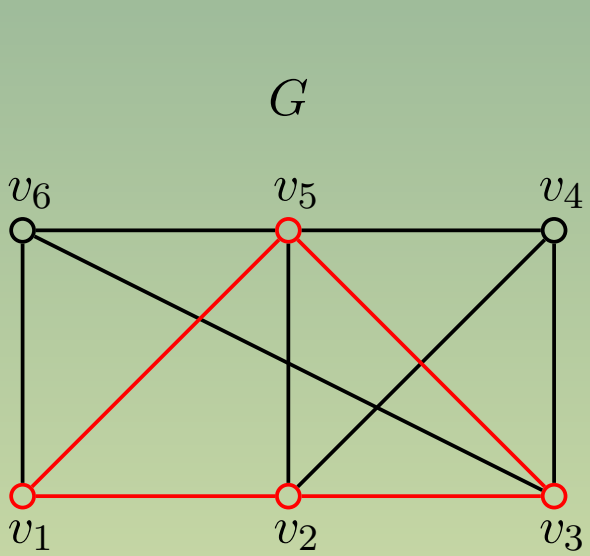


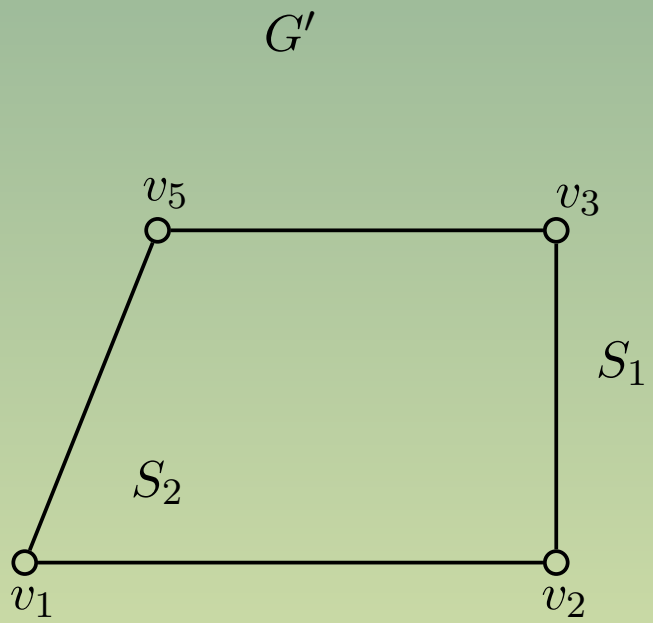




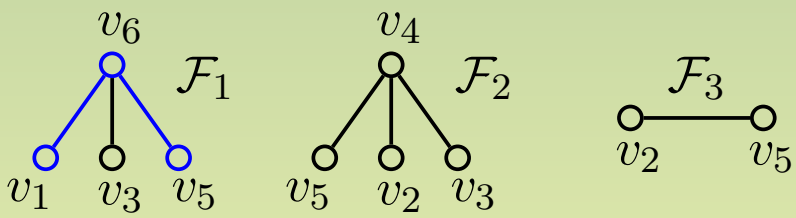
Kako svaki fragment ima više od jedne dopustive strane, odaberemo po volji neki od fragmenata $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ i $\mathcal{F}_3$. Na primjer, odaberimo fragment $\mathcal{F}_1$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put $v_1v_6v_5$ (postoje ukupno tri α-puta u $\mathcal{F}_1$).

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





fragmenti od G s obzirom na G'

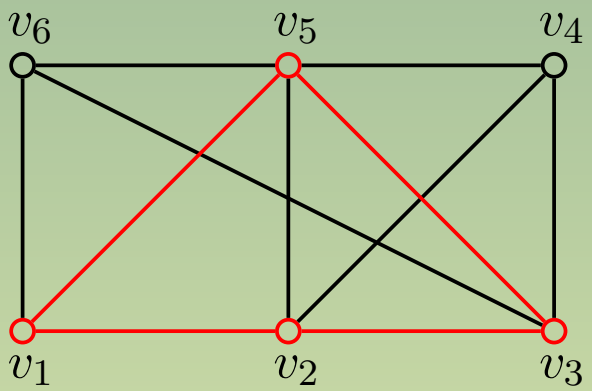


Odabrani α-put u $\mathcal{F}_1$ smjestimo u neku dopustivu stranu od $\mathcal{F}_1$. Kako je $S(\mathcal{F}_1) = \{S_1, S_2\}$, biramo jednu od strana S_1 i S_2.

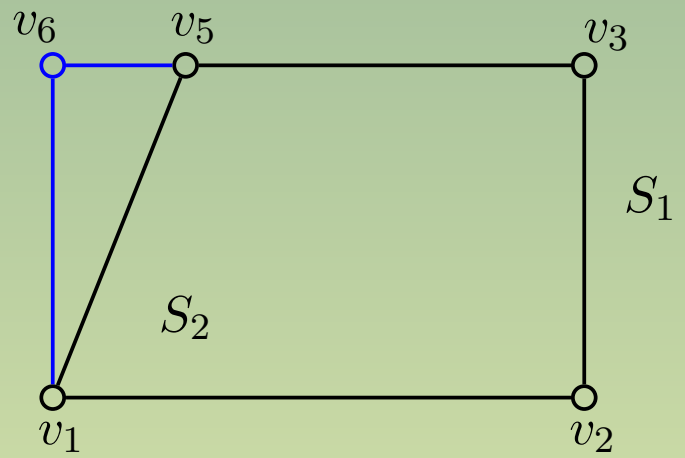
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

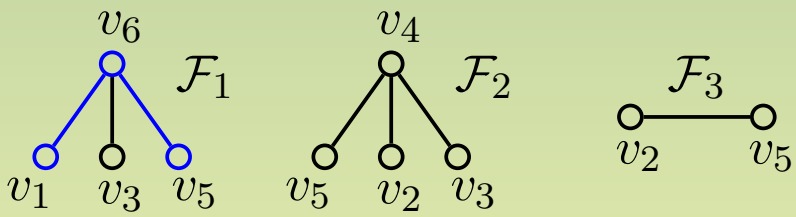
G



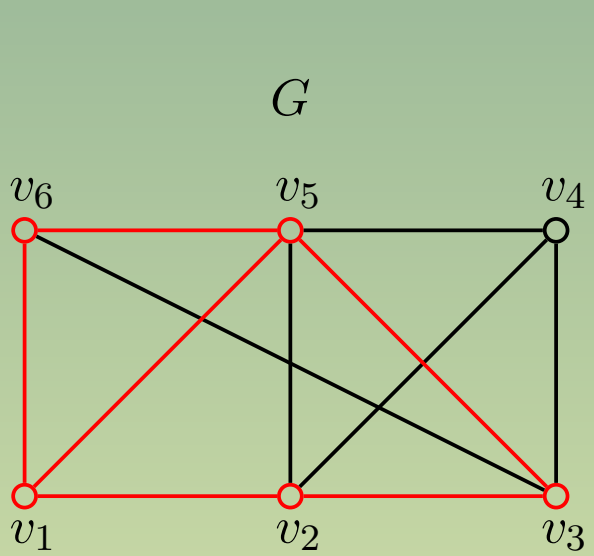
G'

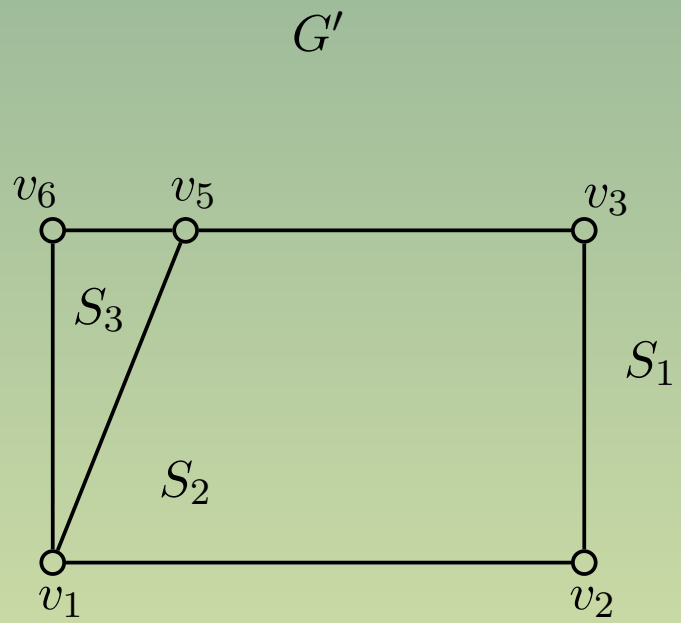


fragmenti od G s obzirom na G'



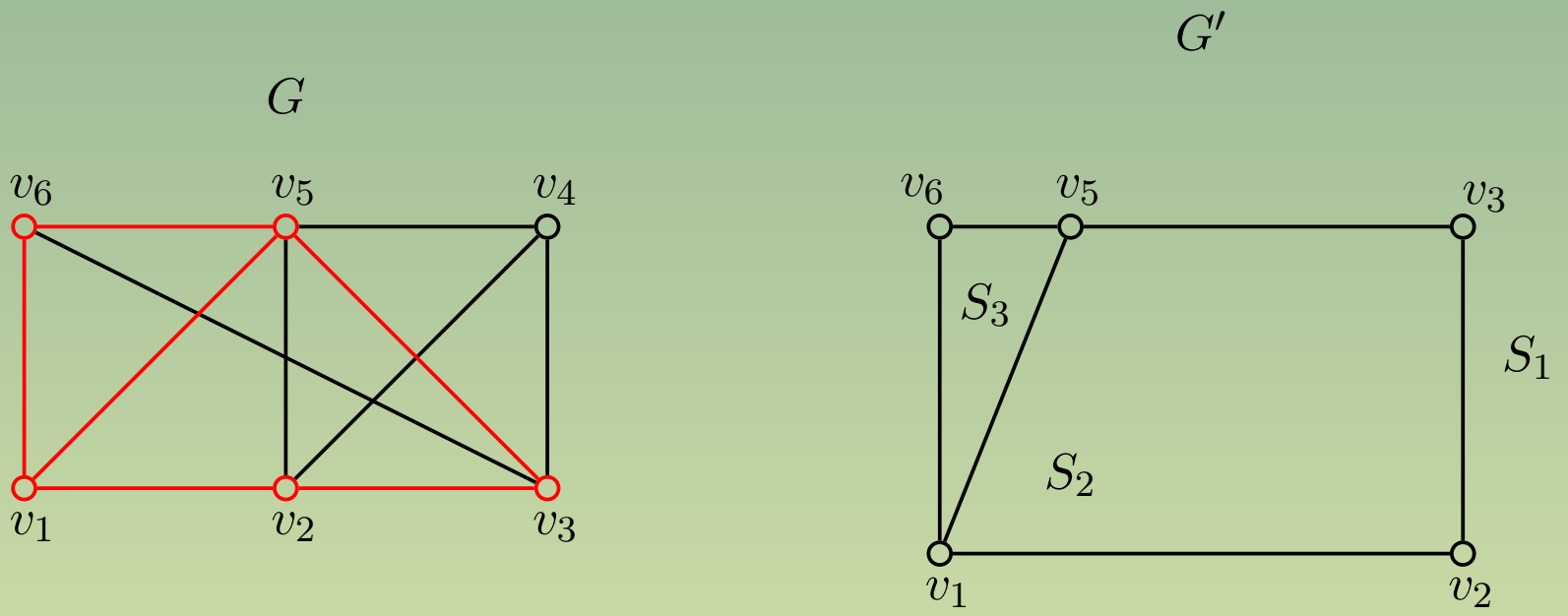
Odabrani α-put u $\mathcal{F}_1$ smjestimo u neku dopustivu stranu od $\mathcal{F}_1$. Kako je $S(\mathcal{F}_1) = \{S_1, S_2\}$, biramo jednu od strana S_1 i S_2. Na primjer, odaberimo stranu S_1 i u nju smjestimo odabrani α-put.





Odabrani α-put u $\mathcal{F}_1$ smjestimo u neku dopustivu stranu od $\mathcal{F}_1$. Kako je $S(\mathcal{F}_1) = \{S_1, S_2\}$, biramo jednu od strana S_1 i S_2. Na primjer, odaberimo stranu S_1 i u nju smjestimo odabrani α-put. Na taj način dobivamo novi podgraf G' i neko njegovo ravninsko smještenje koje ima tri strane S_1, S_2 i S_3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

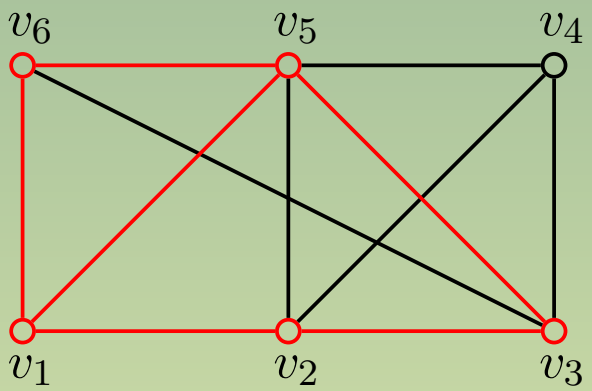
Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

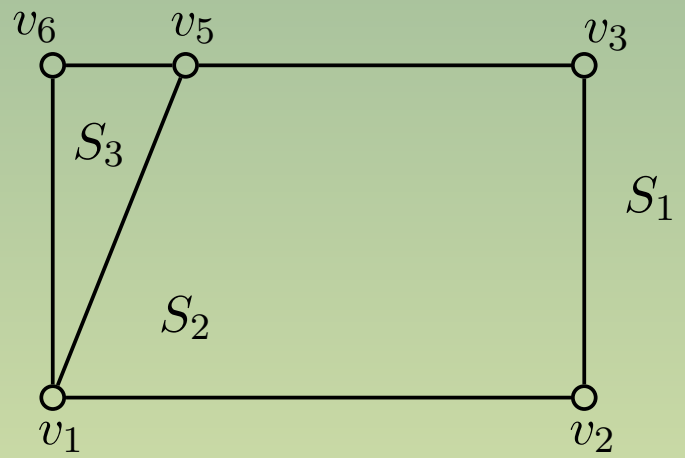
Savršena sparivanja

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

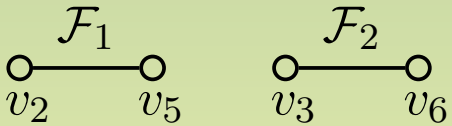
G

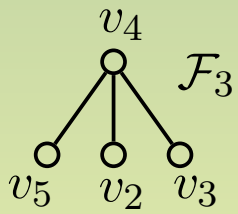


G'



fragmenti od G s obzirom na G'



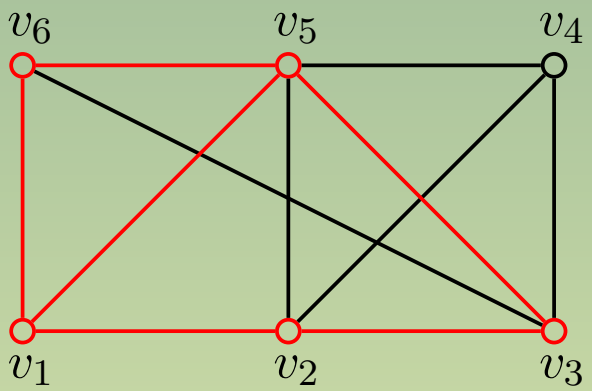


Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'. Najprije odredimo sve fragmente od G s obzirom na G' i njihove dopustive strane.

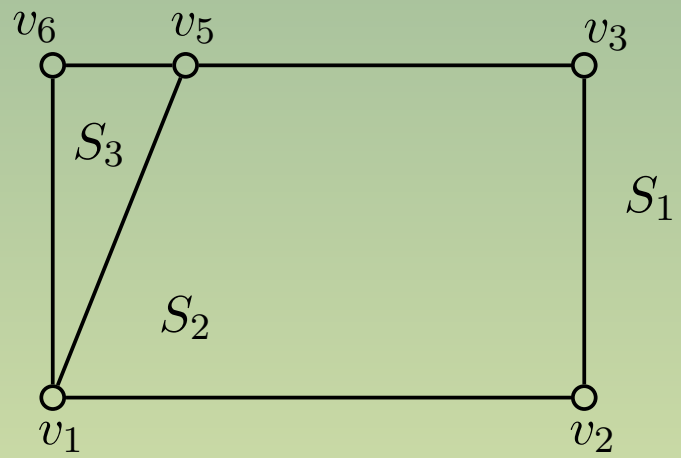
$$S(\mathcal{F}_1) = \{S_1, S_2\}, \quad S(\mathcal{F}_2) = \{S_1\}, \quad S(\mathcal{F}_3) = \{S_1, S_2\}$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

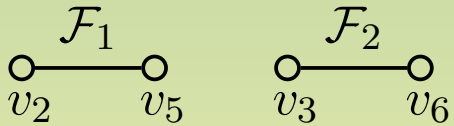
G

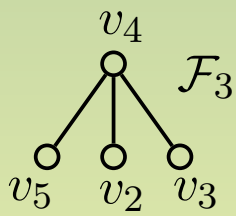


G'



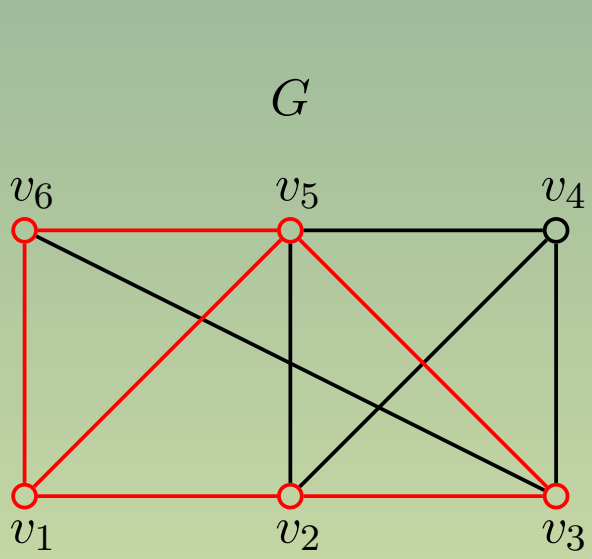
fragmenti od G s obzirom na G'

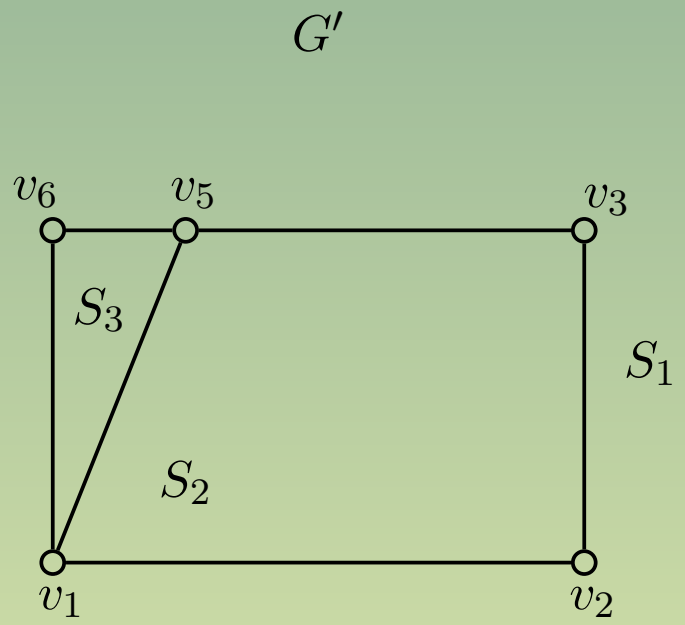




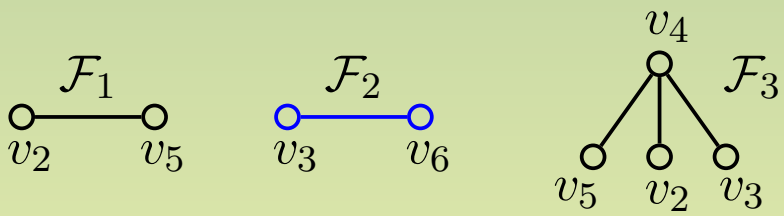
Kako jedino fragment $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu, moramo odabrati taj fragment.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

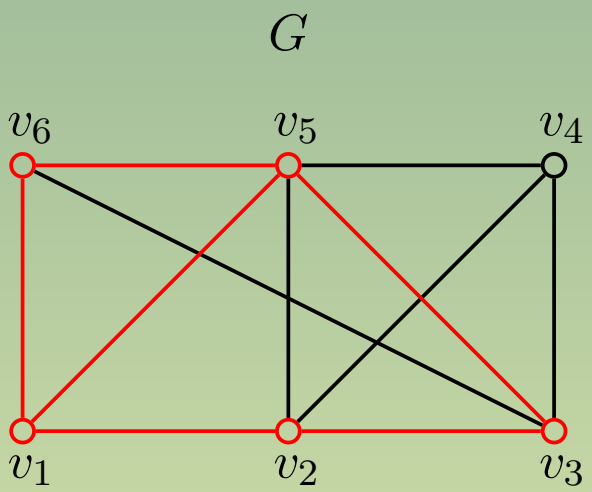


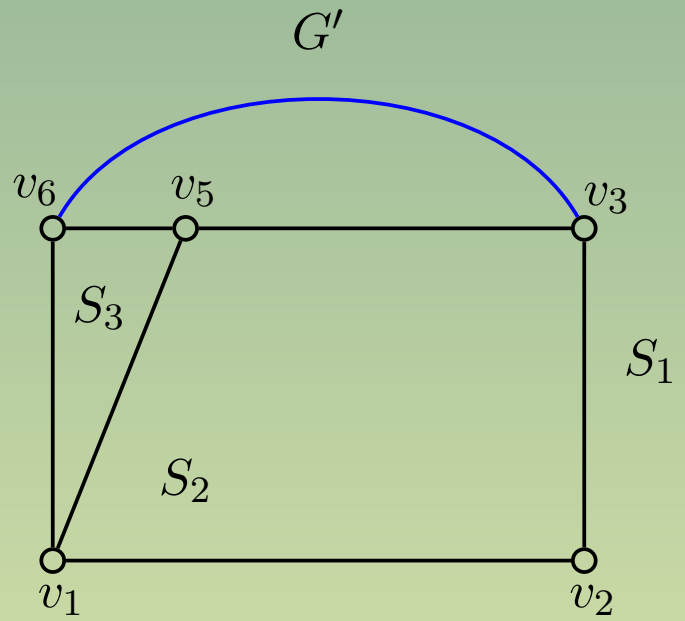


fragmenti od G s obzirom na G'

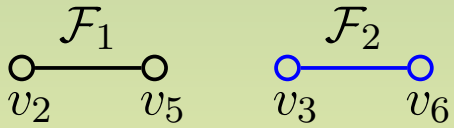


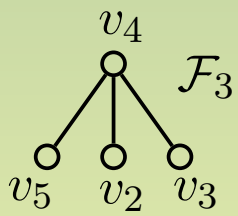
Kako jedino fragment $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu, moramo odabrati taj fragment. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_2$ odaberemo jedan α-put v_3v_6 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_2$)





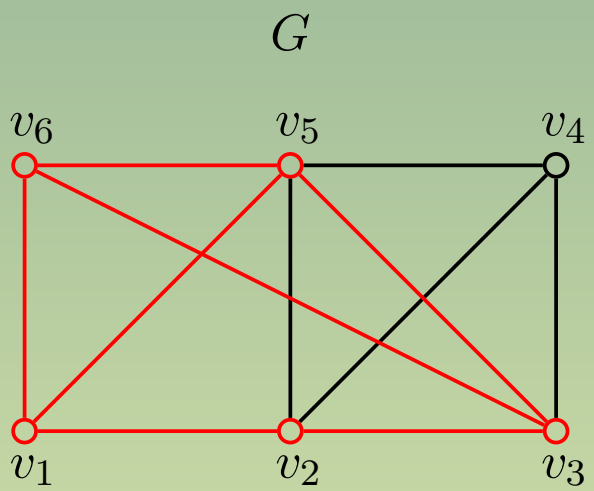
fragmenti od G s obzirom na G'

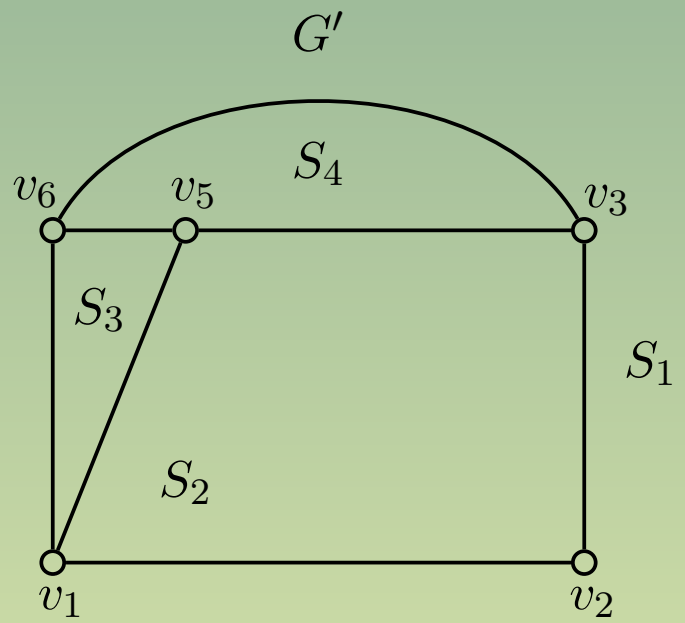




Kako jedino fragment $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu, moramo odabrati taj fragment. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_2$ odaberemo jedan α-put v_3v_6 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_2$) i njega smjestimo u jedinu dopustivu stranu S_1 od $\mathcal{F}_2$.

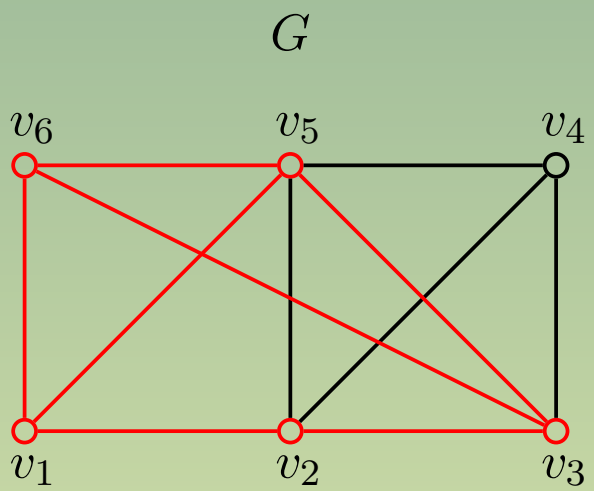
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

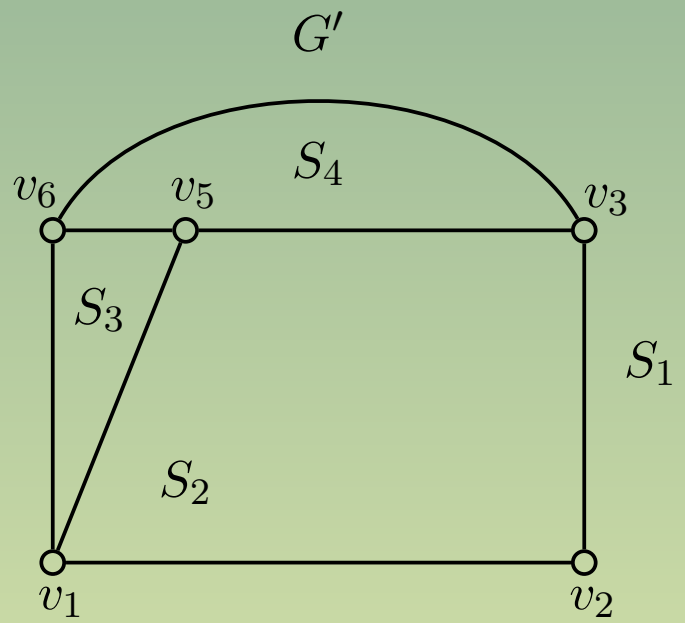




Kako jedino fragment $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu, moramo odabrati taj fragment. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_2$ odaberemo jedan α-put v_3v_6 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_2$) i njega smjestimo u jedinu dopustivu stranu S_1 od $\mathcal{F}_2$. Na taj način dobivamo novi podgraf G' i neko njegovo ravninsko smještenje koje ima 4 strane S_1, S_2, S_3 i S_4.

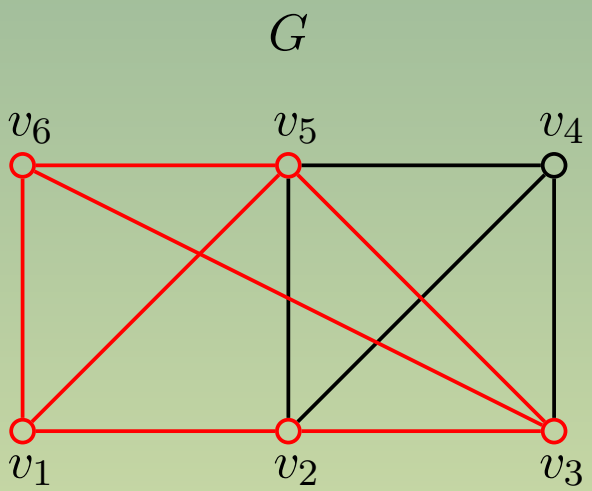
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

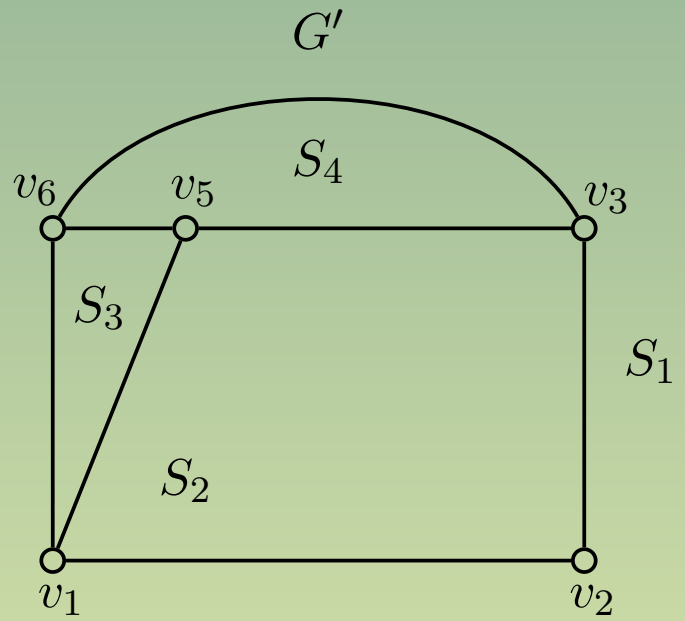




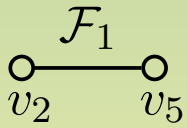
Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'.

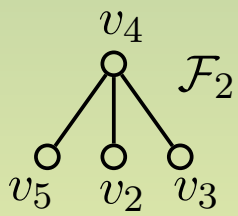
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





fragmenti od G s obzirom na G'

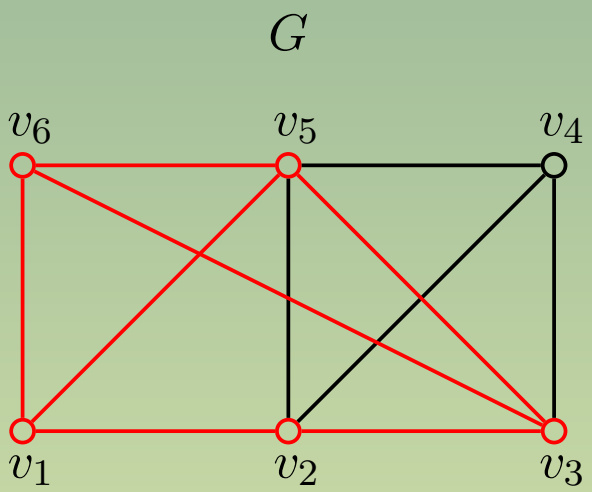


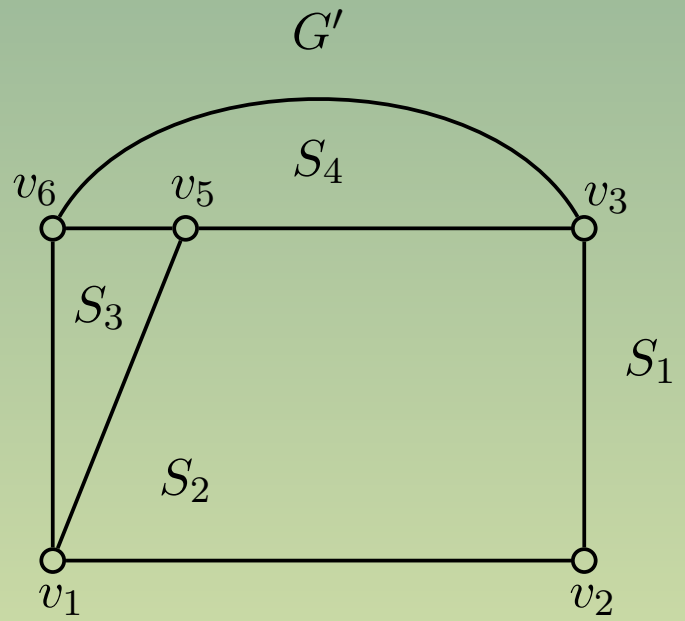


Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'. Najprije odredimo sve fragmente od G s obzirom na G' i njihove dopustive strane.

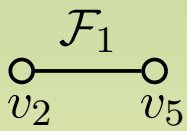
$$S(\mathcal{F}_1) = \{S_2\}, \quad S(\mathcal{F}_2) = \{S_2\}$$

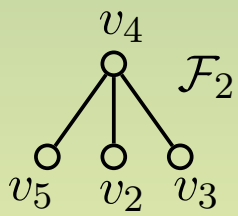
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





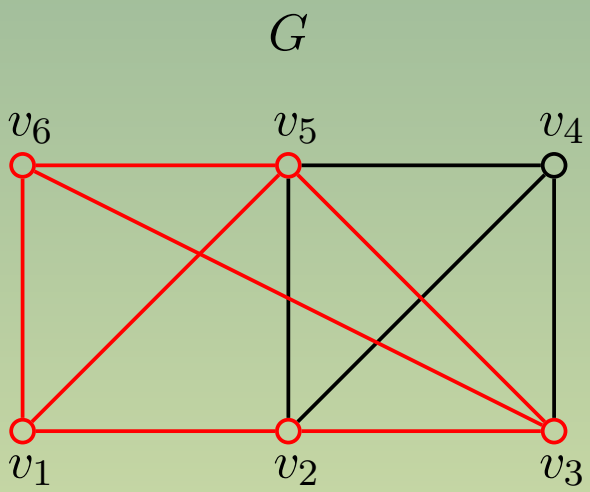
fragmenti od G s obzirom na G'

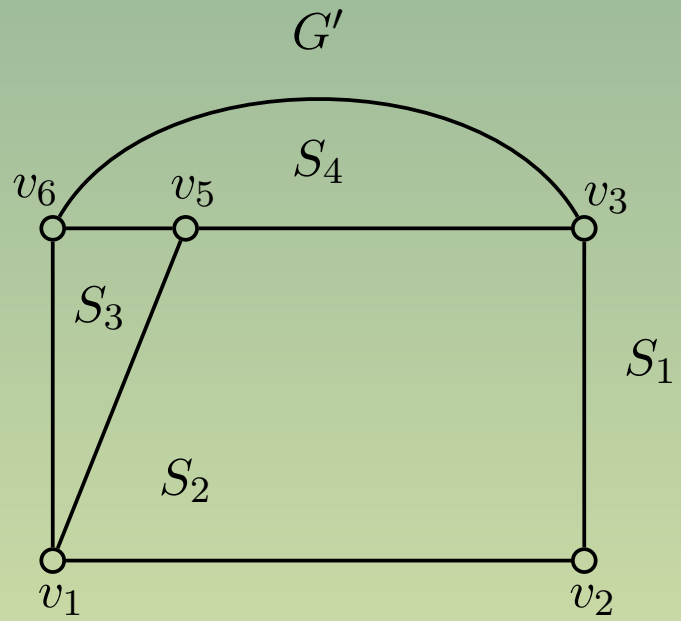




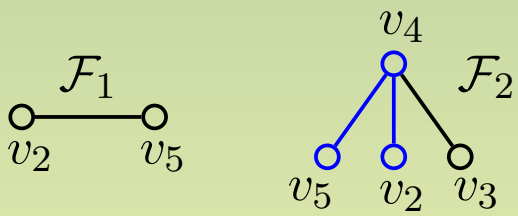
Kako svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu, biramo nekog od ta dva fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_2$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



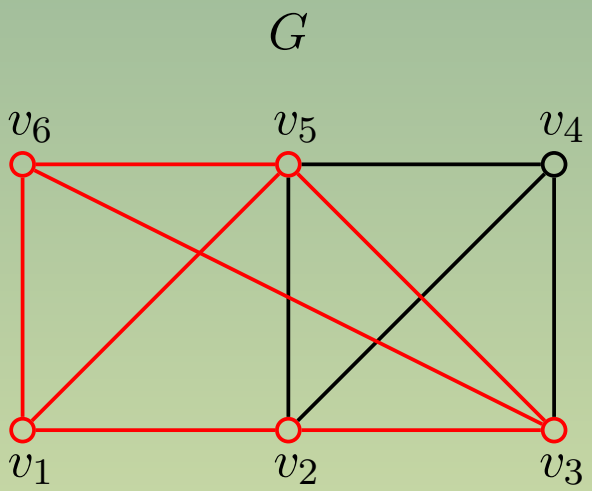


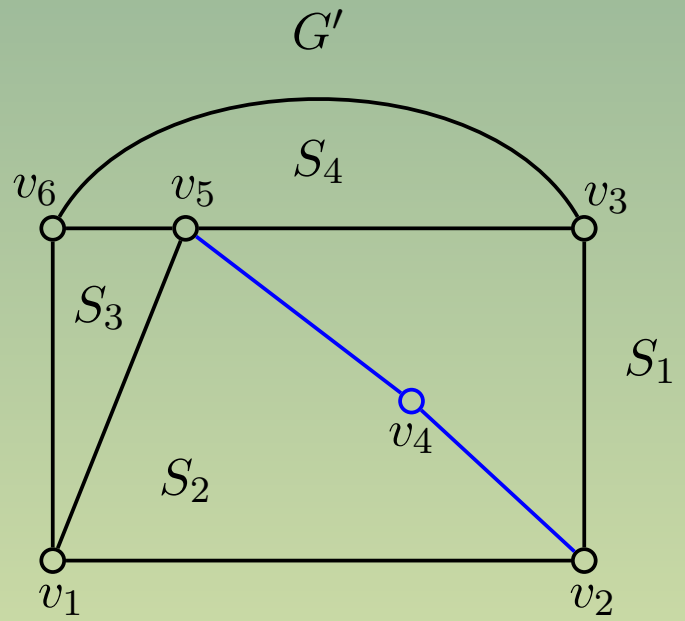
fragmenti od G s obzirom na G'



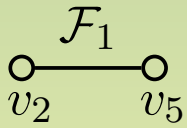
Kako svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu, biramo nekog od ta dva fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_2$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_2$ odaberemo jedan α-put $v_5v_4v_2$ (postoje ukupno tri α-puta u $\mathcal{F}_2$)

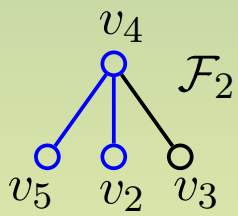
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





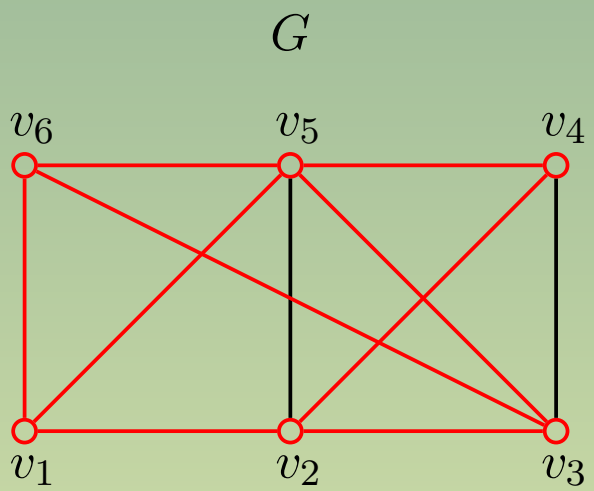
fragmenti od G s obzirom na G'

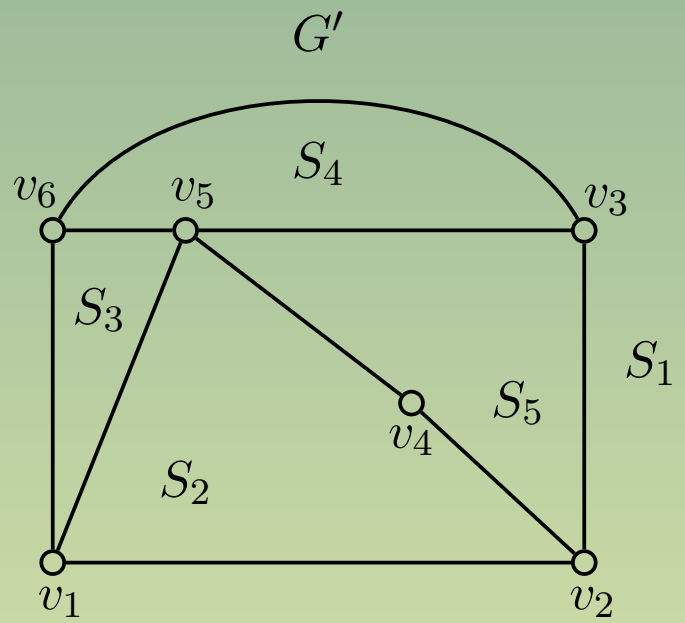




Kako svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu, biramo nekog od ta dva fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_2$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_2$ odaberemo jedan α-put $v_5v_4v_2$ (postoje ukupno tri α-puta u $\mathcal{F}_2$) i njega smjestimo u jedinu dopustivu stranu S_2 od $\mathcal{F}_2$.

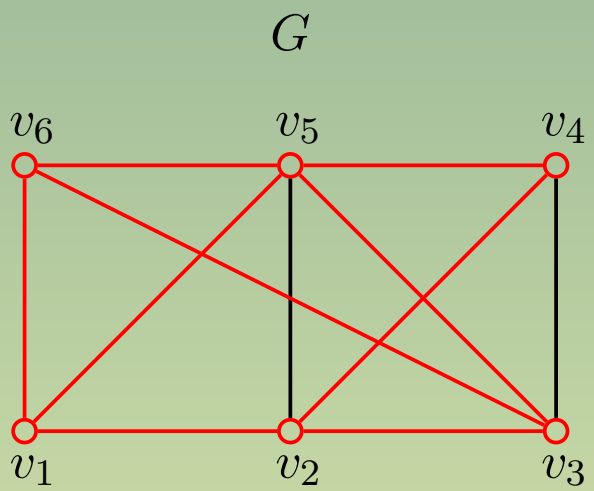
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

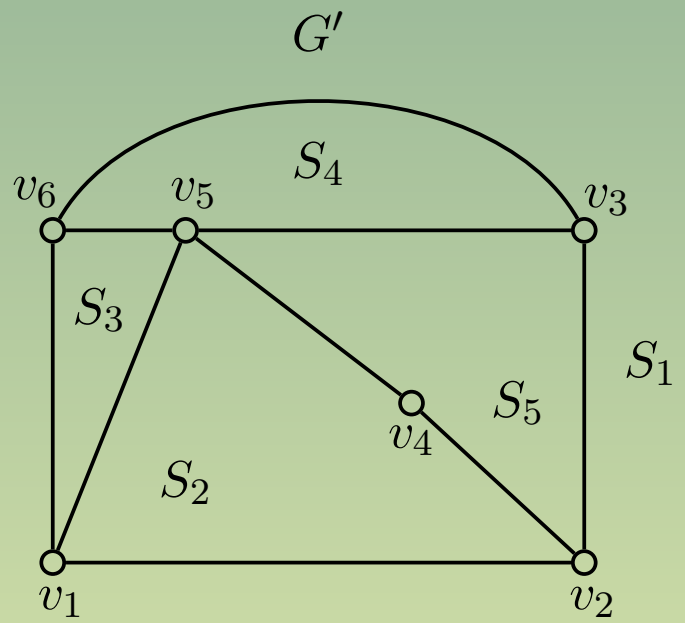




Kako svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu, biramo nekog od ta dva fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_2$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_2$ odaberemo jedan α-put $v_5v_4v_2$ (postoje ukupno tri α-puta u $\mathcal{F}_2$) i njega smjestimo u jedinu dopustivu stranu S_2 od $\mathcal{F}_2$. Dobivamo novi podgraf G' i neko njegovo ravninsko smještenje koje ima 5 strana S_1, S_2, S_3, S_4 i S_5.

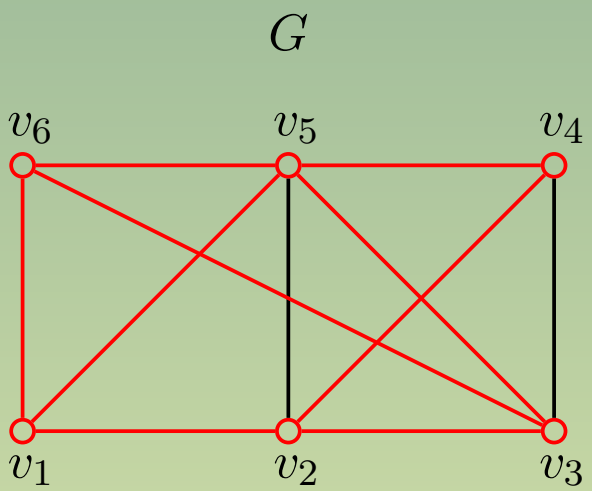
Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

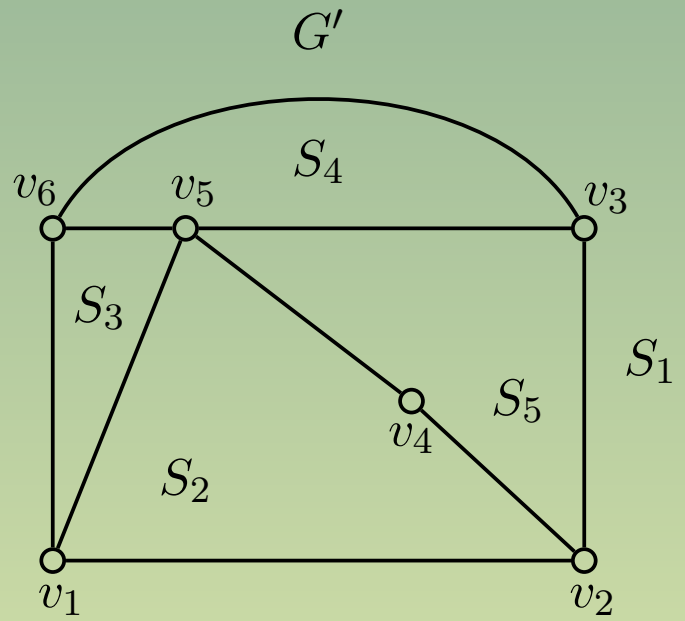




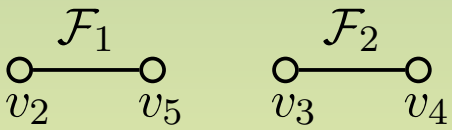
Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





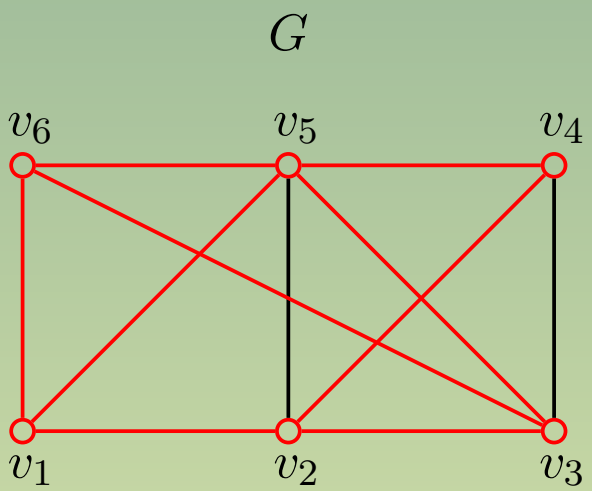
fragmenti od G s obzirom na G'

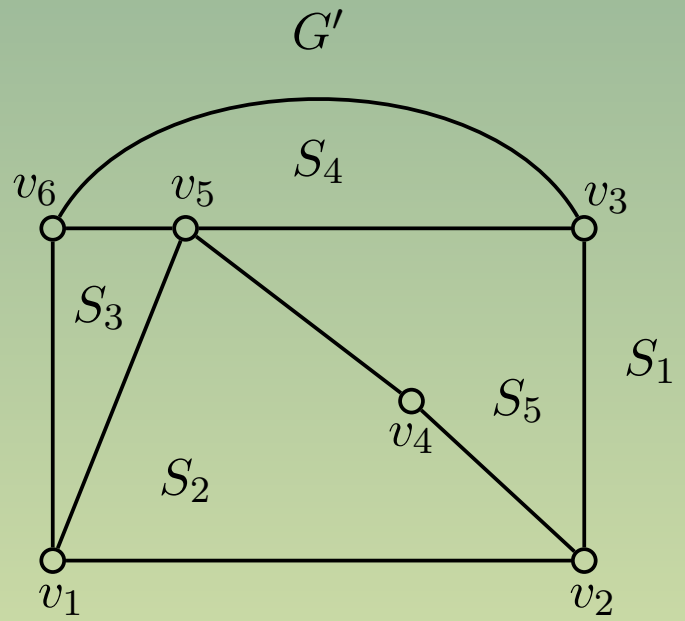


Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'. Najprije odredimo sve fragmente od G s obzirom na G' i njihove dopustive strane.

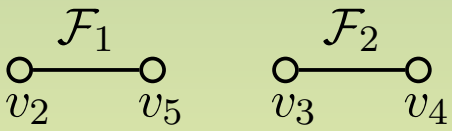
$$S(\mathcal{F}_1) = \{S_2, S_5\}, \quad S(\mathcal{F}_2) = \{S_5\}$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



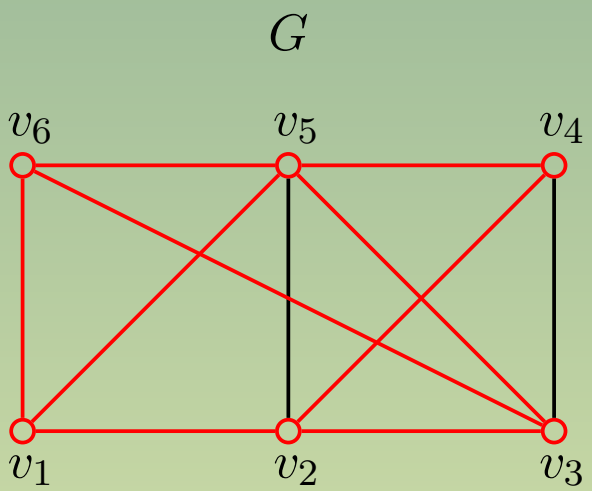


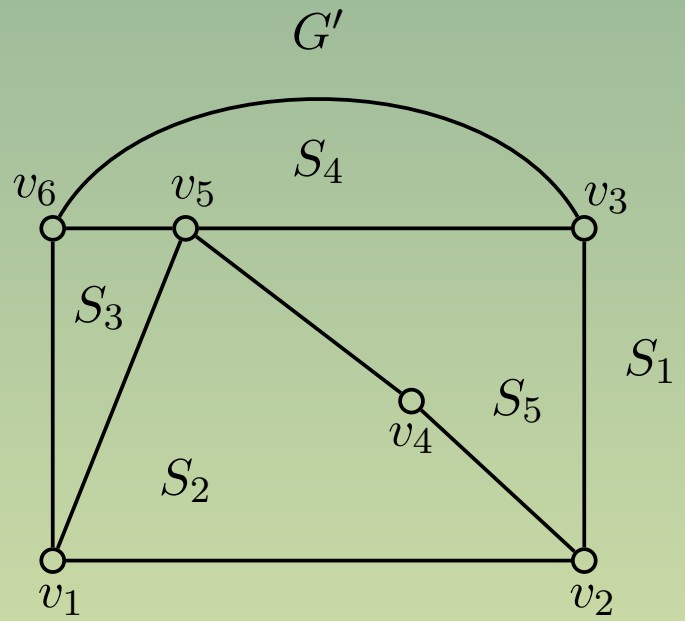
fragmenti od G s obzirom na G'



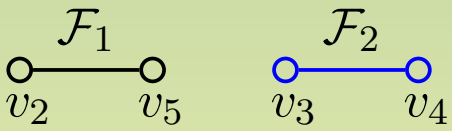
Kako jedino fragment $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu, moramo odabrati taj fragment.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



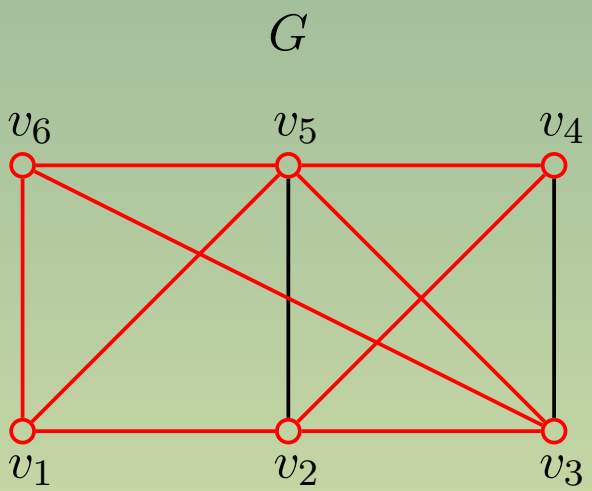


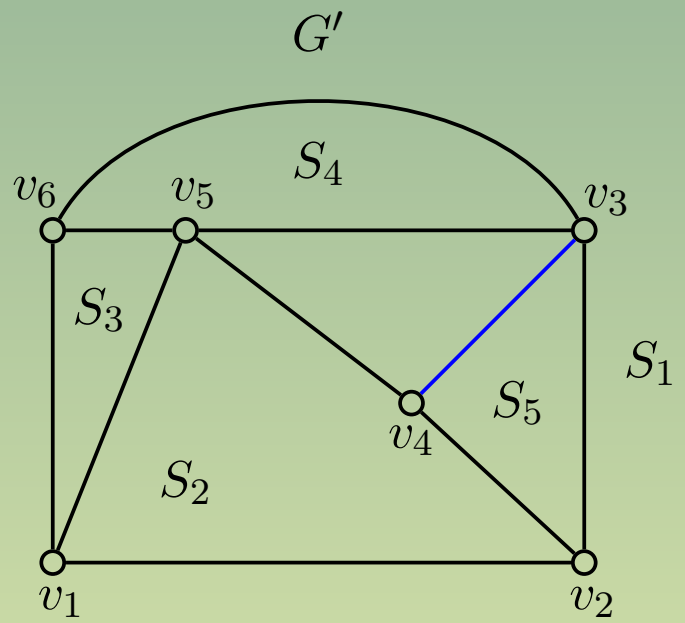
fragmenti od G s obzirom na G'



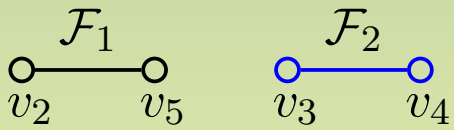
Kako jedino fragment $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu, moramo odabrati taj fragment. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_2$ odaberemo jedan α-put v_3v_4 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_2$)

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



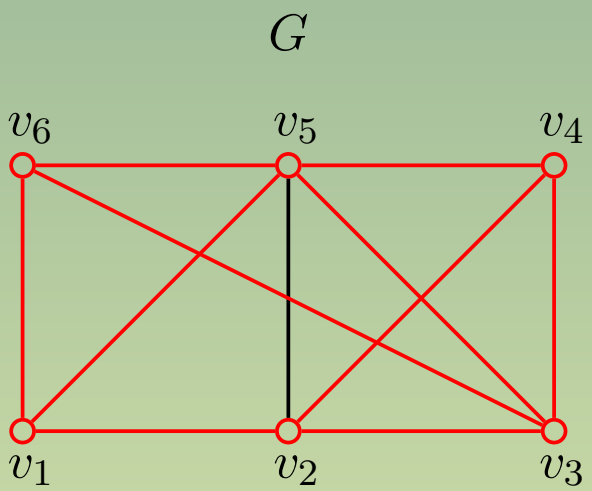


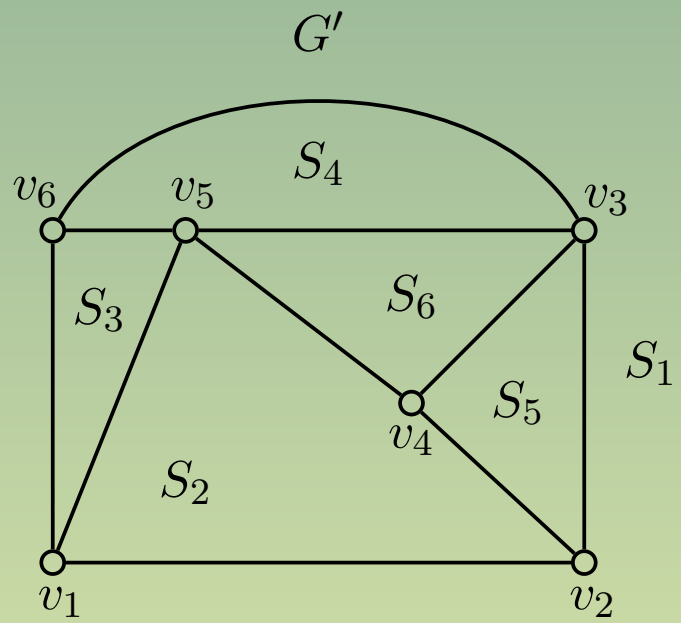
fragmenti od G s obzirom na G'



Kako jedino fragment $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu, moramo odabrati taj fragment. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_2$ odaberemo jedan α-put v_3v_4 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_2$) i njega smjestimo u jedinu dopustivu stranu S_5 od $\mathcal{F}_2$.

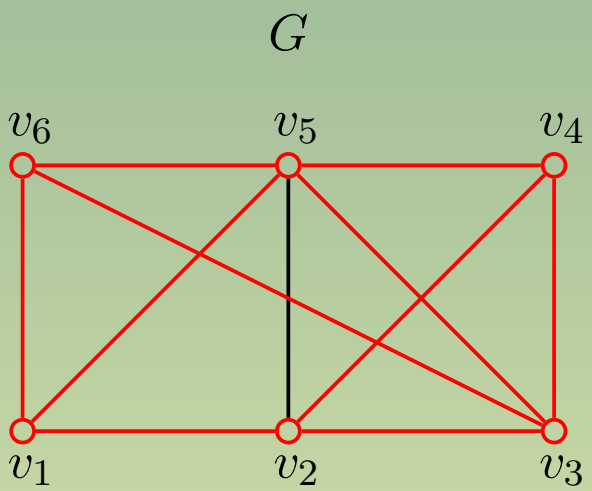
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

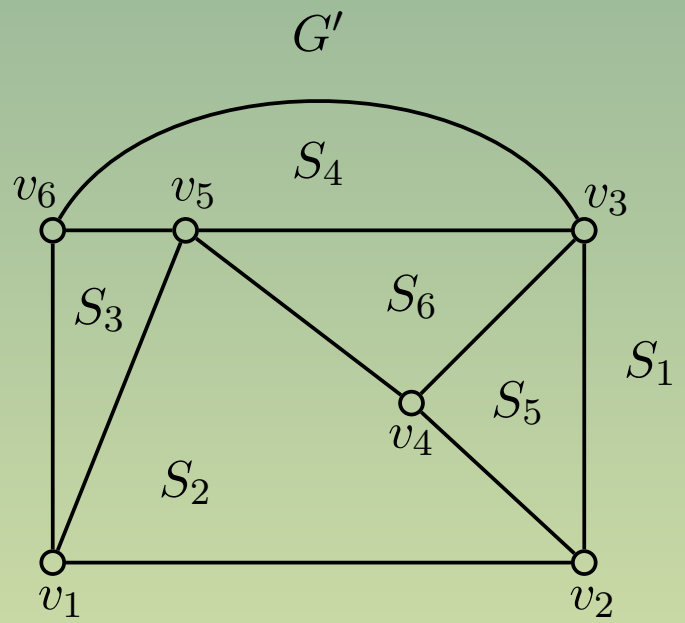




Kako jedino fragment $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu, moramo odabrati taj fragment. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_2$ odaberemo jedan α-put v_3v_4 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_2$) i njega smjestimo u jedinu dopustivu stranu S_5 od $\mathcal{F}_2$. Na taj način dobivamo novi podgraf G' i neko njegovo ravninsko smještenje koje ima 6 strana S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 i S_6.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



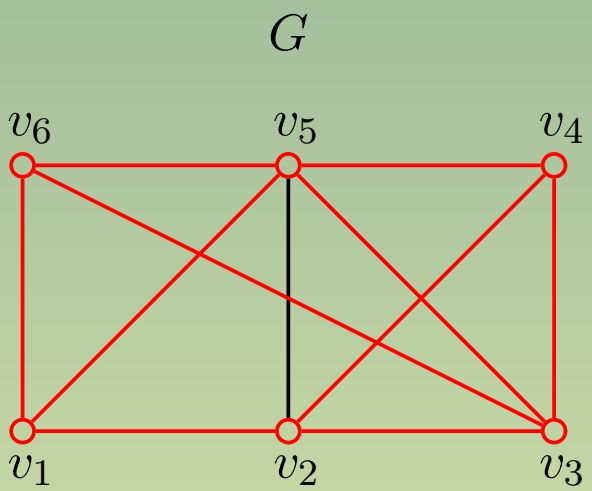


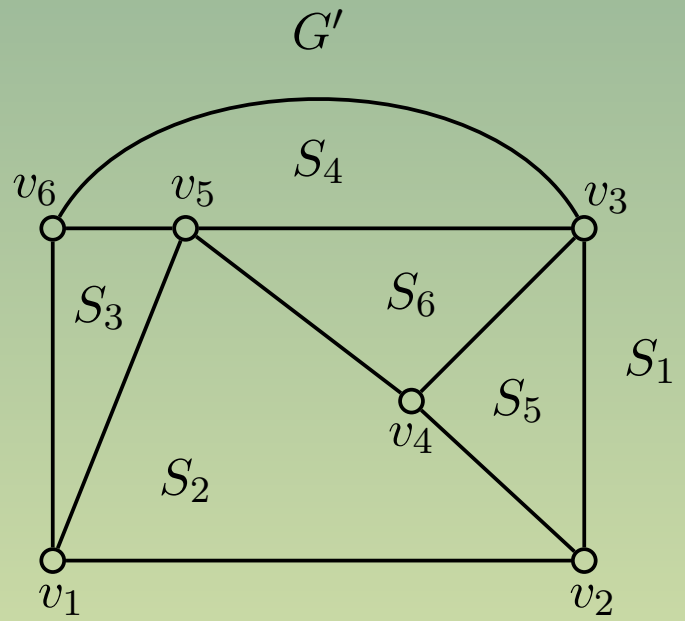
Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'.

Diskretne strukture s teorijom grafova

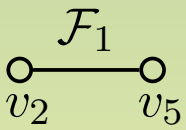
prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





fragmenti od G s obzirom na G'



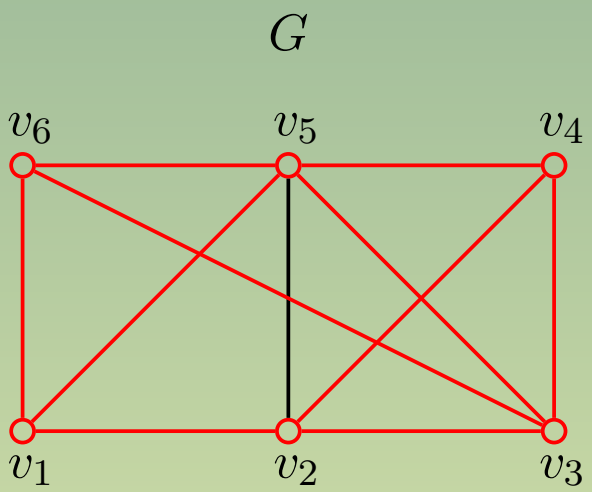
Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'. Najprije odredimo sve fragmente od G s obzirom na G' i njihove dopustive strane.

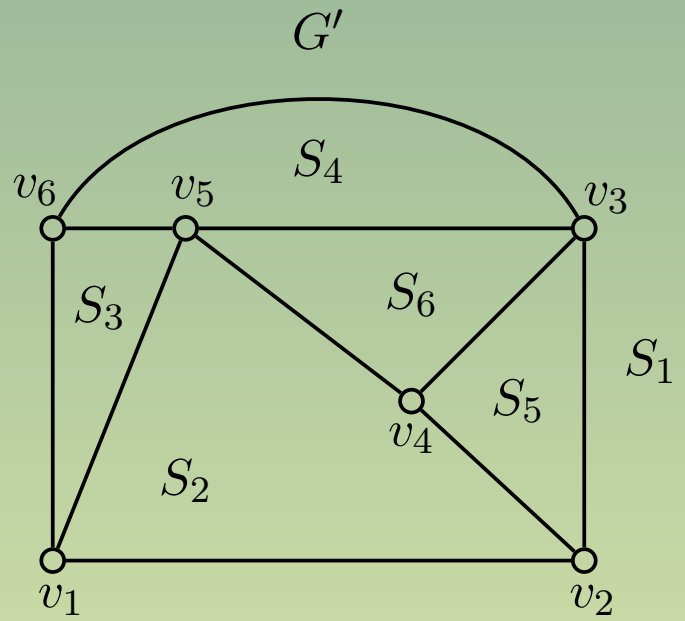
$$S(\mathcal{F}_1) = \{S_2\}$$

Diskretne strukture s teorijom grafova

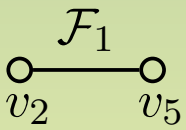
prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





fragmenti od G s obzirom na G'



Kako imamo samo jedan fragment $\mathcal{F}_1$ koji ima samo jednu dopustivu stranu S_2, uzimamo taj fragment.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

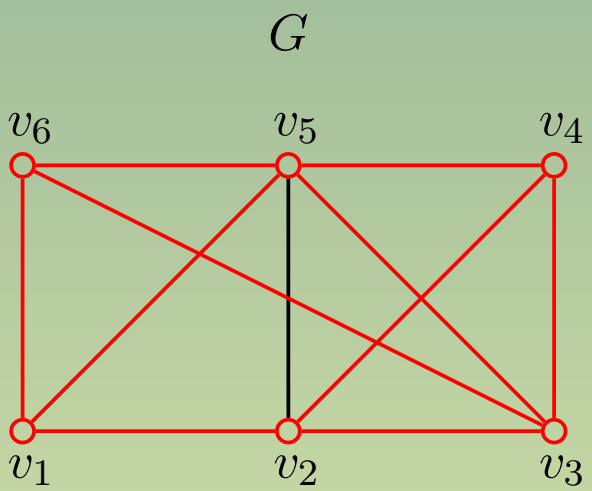
Sparivanje u bipartitnom grafu

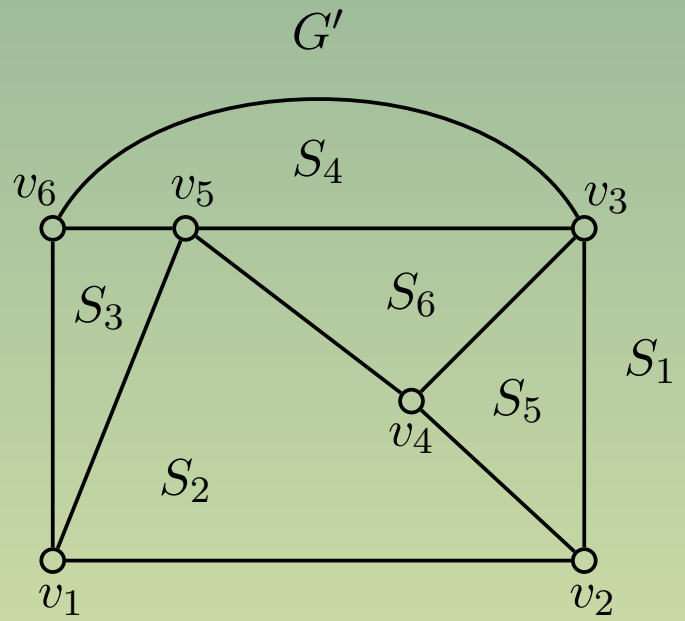
Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

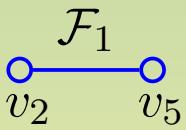
Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



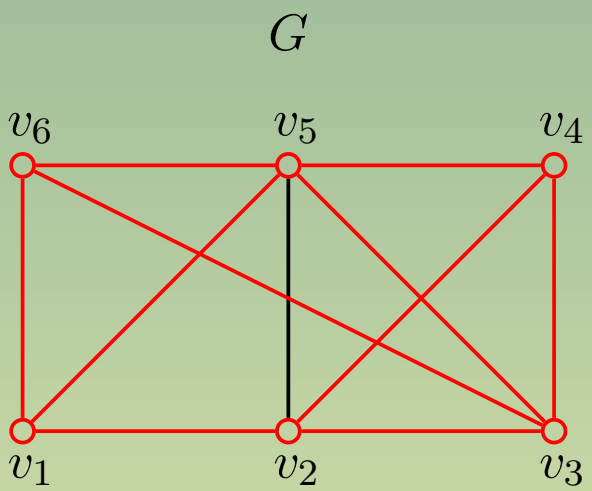


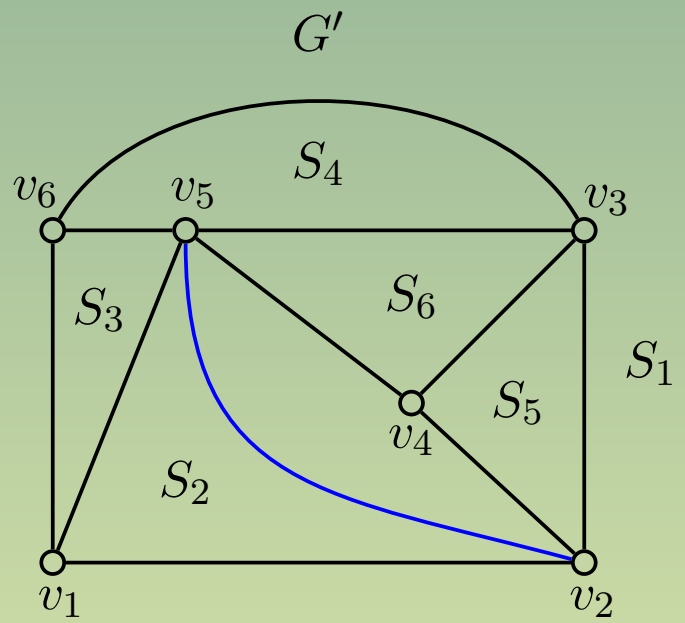
fragmenti od G s obzirom na G'



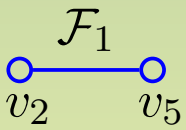
Kako imamo samo jedan fragment $\mathcal{F}_1$ koji ima samo jednu dopustivu stranu S_2, uzimamo taj fragment. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put v_2v_5 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_1$)

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



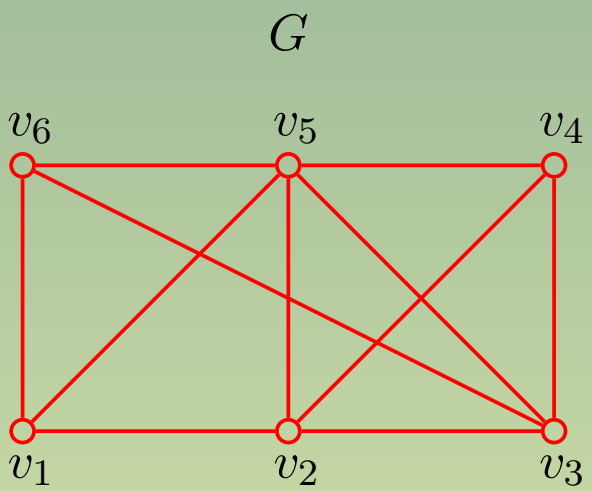


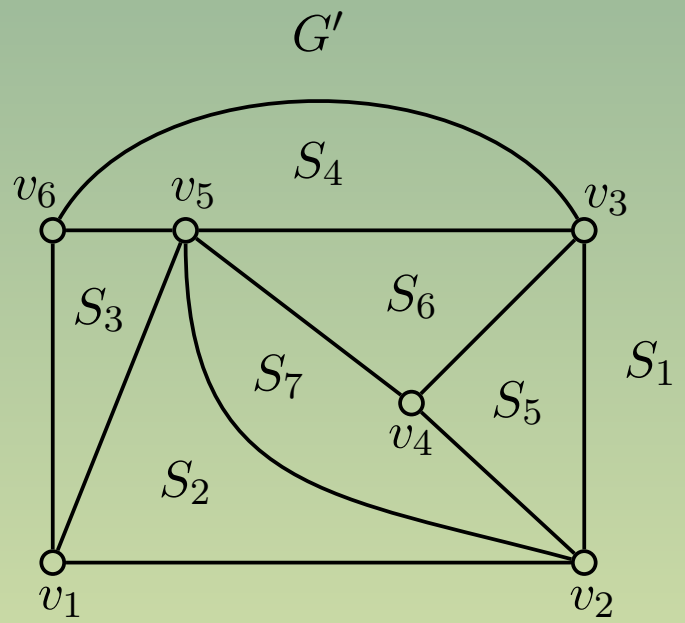
fragmenti od G s obzirom na G'



Kako imamo samo jedan fragment $\mathcal{F}_1$ koji ima samo jednu dopustivu stranu S_2, uzimamo taj fragment. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put v_2v_5 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_1$) i njega smjestimo u jedinu dopustivu stranu S_2 od $\mathcal{F}_1$.

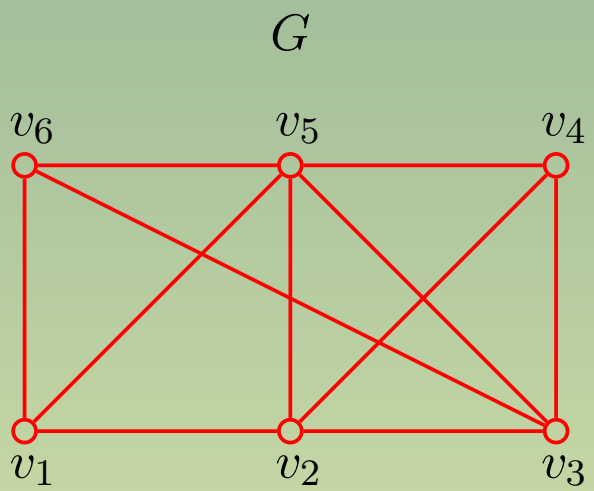
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

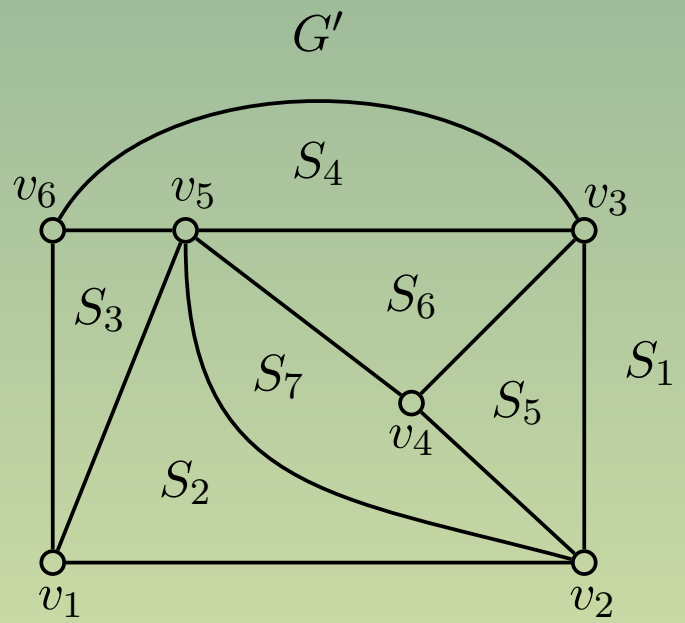




Kako imamo samo jedan fragment $\mathcal{F}_1$ koji ima samo jednu dopustivu stranu S_2, uzimamo taj fragment. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put v_2v_5 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_1$) i njega smjestimo u jedinu dopustivu stranu S_2 od $\mathcal{F}_1$. Na taj način dobivamo novi podgraf G' i neko njegovo ravninsko smještenje koje ima 7 strana S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 i S_7.

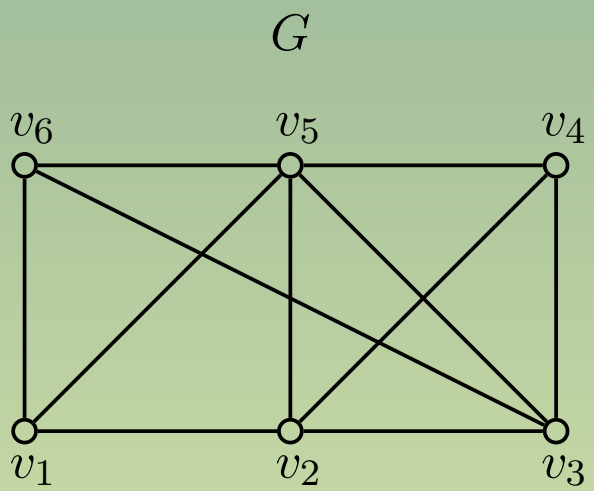
Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

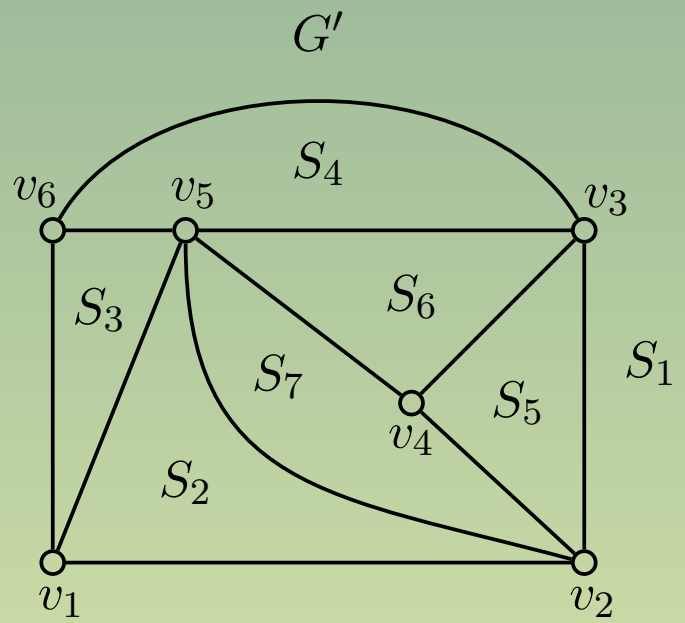




Kako više nema fragmenata od G s obzirom na G', algoritam se zaustavlja

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





Kako više nema fragmenata od G s obzirom na G', algoritam se zaustavlja. Zaključujemo da je G planarni graf, a dobiveni G' je jedno njegovo ravninsko smještenje. Dakle, G je planarni graf sa 7 strana.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Da bismo dokazali ispravnost Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritma, treba nam još nekoliko pomoćnih tvrdnji i pojmova.

Lema 10.1.

Neka su $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ natjecateljski fragmenti pri čemu svaki od njih ima barem dvije dopustive strane. Tada je $S(\mathcal{F}_1) = S(\mathcal{F}_2)$ i $k(S(\mathcal{F}_1)) = 2$.

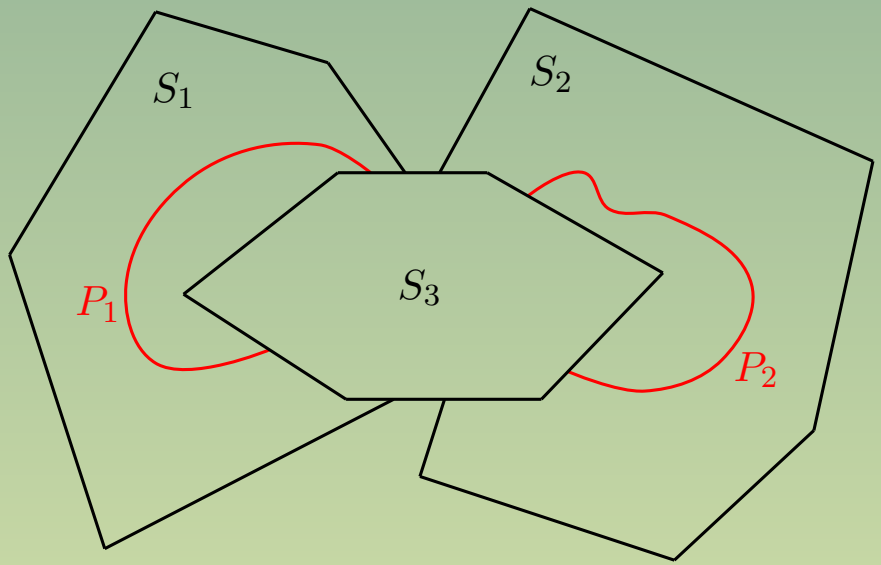
Dokaz.

Pretpostavimo da je $S(\mathcal{F}_1) \neq S(\mathcal{F}_2)$. U tom slučaju postoje barem tri različite strane S_1, S_2 i S_3 jer svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ po pretpostavci ima barem dvije dopustive strane. Kako su $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ◂ natjecateljski fragmenti, slijedi da je $S(\mathcal{F}_1) \cap S(\mathcal{F}_2) \neq \emptyset$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $S_3 \in S(\mathcal{F}_1) \cap S(\mathcal{F}_2)$, $S_1 \in S(\mathcal{F}_1)$ i $S_2 \in S(\mathcal{F}_2)$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Svaki α-put $P_1 \subseteq \mathcal{F}_1$ se može smjestiti u stranu S_1, a svaki α-put $P_2 \subseteq \mathcal{F}_2$ se može smjestiti u stranu S_2. Stoga se svaki par putova (P_1, P_2) može smjestiti izvan strane S_3. Iz svega navedenog slijedi da se svaki par putova (P_1, P_2) može smjestiti u stranu S_3, što je kontradikcija s definicijom natjecateljskih fragmenata. Dakle, mora biti $S(\mathcal{F}_1) = S(\mathcal{F}_2)$. Kada bi $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ imali više od dvije zajedničke strane, analognom konstrukcijom kao gore došli bismo ponovo do kontradikcije. ♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Parcijalno smještenje G' planarnog grafa G je ravninsko smještenje podgrafa G' od G koje se dobiva iz ravninskog smještenja grafa G uklanjanjem odgovarajućih vrhova i bridova. Drugim riječima, svako parcijalno smještenje planarnog grafa G može se proširiti do nekog ravninskog smještenja grafa G.

Na skupu svih fragmenata od G s obzirom na podgraf G' definiramo **fragmentni graf** $\mathcal{F}(G')$ na sljedeći način. Vrhovi tog grafa su fragmenti od G s obzirom na G', a dva vrha su susjedna ukoliko oni predstavljaju natjecateljske fragmente.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Lema 10.2.

Neka je G' parcijalno smještenje planarnog grafa G. Ako svi fragmenti od G s obzirom na G' imaju barem dvije dopustive strane, tada je fragmentni graf $\mathcal{F}(G')$ bipartitni graf.

Dokaz.

Sjetimo se, graf G je bipartitni akko ne sadrži cikluse neparnih duljina. Pretpostavimo da $\mathcal{F}(G')$ nije bipartitni graf. Tada u $\mathcal{F}(G')$ postoji ciklus $\mathcal{C} = \mathcal{F}_1\mathcal{F}_2 \cdots \mathcal{F}_r\mathcal{F}_1$ neparne duljine r. Susjedni vrhovi u tom ciklusu su natjecateljski fragmenti od G s obzirom na G'. Kako svi fragmenti po pretpostavci imaju barem dvije dopustive strane, iz ◂ leme 10.1 slijedi da je $S(\mathcal{F}_i) = S(\mathcal{F}_{i+1})$ za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$ i $S(\mathcal{F}_r) = S(\mathcal{F}_1)$. Nadalje, $k(S(\mathcal{F}_i)) = 2$ za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Zaključujemo da postoje točno dvije dopustive strane S_1 i S_2 za sve fragmente na ciklusu $\mathcal{C}$. Neka je P_i neki α-put u $\mathcal{F}_i$ za $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Kako je G' parcijalno smještenje od G, postoje jedino dva načina smještavanja α-putova P_i u G'.

- Ako je i neparan broj, P_i smjestimo u stranu S_1. Ako je i paran broj, P_i smjestimo u stranu S_2.
- Ako je i neparan broj, P_i smjestimo u stranu S_2. Ako je i paran broj, P_i smjestimo u stranu S_1.

Međutim, kako je r neparan broj, koji god od gornja dva načina smještavanja α-putova odaberemo, u zadnjem koraku nailazimo na problem. Naime, u zadnjem koraku moramo smjestiti α-putove P_r i P_1 u strane S_1 i S_2. Brojevi 1 i r su neparni pa bismo morali α-putove P_r i P_1 smjestiti u istu stranu. Kako su $\mathcal{F}_r$ i $\mathcal{F}_1$ natjecateljski fragmenti, to je nemoguće. Dakle, $\mathcal{F}(G')$ je zaista bipartitni graf. ♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Teorem 10.8.

Ako je G planarni graf, tada je u svakom koraku Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritma G' parcijalno smještenje od G.

Dokaz.

Dokaz provodimo indukcijom po broju iteracija n. Ako je $n = 1$, tada je G' ciklus u G, a svaki ciklus u planarnom grafu jest očito njegovo parcijalno smještenje.

Pretpostavimo da nakon n koraka dobivamo parcijalno smještenje G' od G. U sljedećem koraku algoritam najprije određuje sve fragmente od G s obzirom na G' i njihove dopustive strane.

Kako je G' po pretpostavci parcijalno smještenje od G, svaki od fragmenata ima barem jednu dopustivu stranu jer u protivnom bi postojao α-put u nekom fragmentu koji bi spajao dvije različite strane, što bi vodilo do neravninskog smještenja od G.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Za sljedeći korak algoritma, moramo razlikovati dva slučaja.

i. Postoji fragment $\mathcal{F}$ sa samo jednom dopustivom stranom.

U ovom slučaju možemo samo na jedan način smjestiti α-put $P \subseteq \mathcal{F}$ u G' pa algoritam daje parcijalno smještenje $G' \cup P$ od G.

ii. Svi fragmenti imaju barem dvije dopustive strane.

Pretpostavimo da smo odabrali fragment $\mathcal{F}$ i α-put $P \subseteq \mathcal{F}$. Ako smo P smjestili u onu stranu u kojoj se on nalazi i u ravninskom smještenju od G, tada smo dobili novi G' koji je i dalje parcijalno smještenje od G. Pretpostavimo da smo odabrali neku drugu dopustivu stranu. U slučaju da nema natjecateljskih fragmenata s $\mathcal{F}$, možemo P smjestiti u bilo koju dopustivu stranu. Ako postoje natjecateljski fragmenti s $\mathcal{F}$, pogledajmo komponentu povezanosti fragmenta $\mathcal{F}$ u fragmentnom grafu $\mathcal{F}(G')$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Ta komponenta je bipartitni graf i postoje samo dvije dopustive strane S_1 i S_2 za sve fragmente u toj komponenti. U tom slučaju svi fragmenti koji su smješteni u stranu S_1 nisu natjecateljski sa svim fragmentima koji su smješteni u stranu S_2. Ukoliko u ravninskom smještenju od G zamijenimo te dvije strane, dobivamo novo ravninsko smještenje od G koje se može reducirati na novodobiveni G' pa je dobiveni G' i dalje parcijalno smještenje od G. ♡

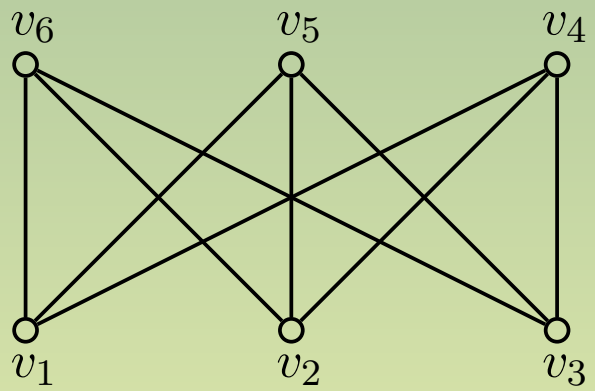
Korolar 10.5.

Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritam je korektan. Drugim riječima, ako je G planarni graf, tada algoritam daje neko njegovo ravninsko smještenje. Ako se algoritam zaustavi zbog toga što postoji fragment bez dopustive strane, tada graf G nije planarni.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.32.

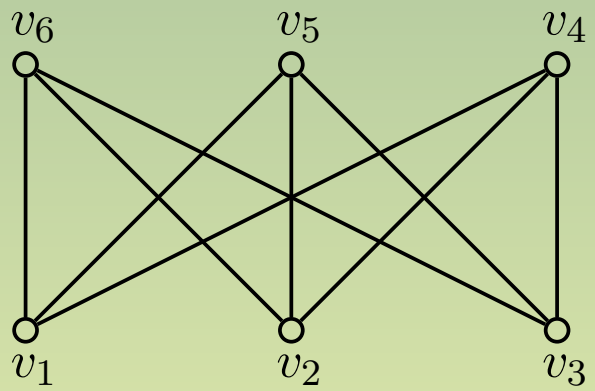
Pomoću Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritma ispitajte da li je zadani graf G planarni.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.32.

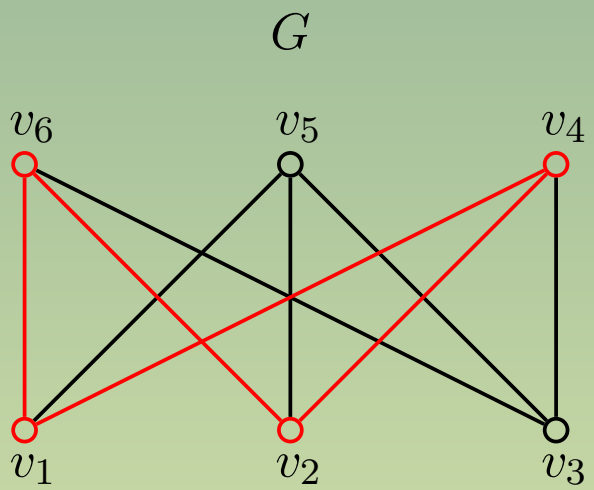
Pomoću Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritma ispitajte da li je zadani graf G planarni.

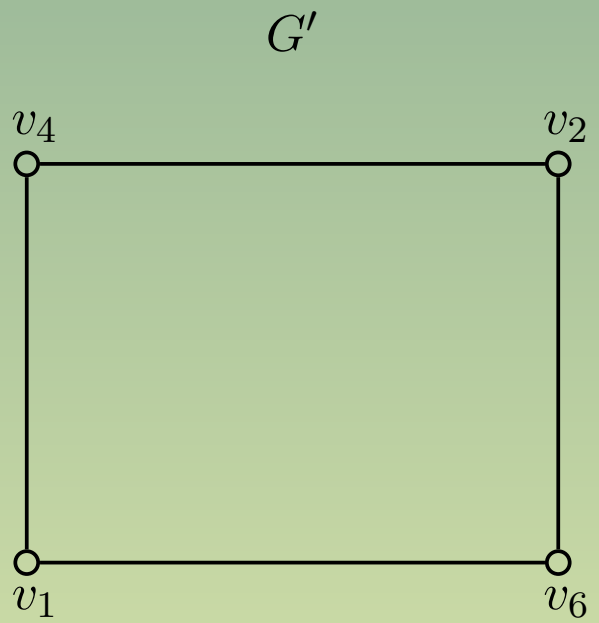


Rješenje.

Ovdje se zapravo radi o grafu $K_{3,3}$, a u korolaru 10.2. smo pokazali da taj graf nije planarni. Ovdje ćemo korak po korak pomoću Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritma doći do istog zaključka.

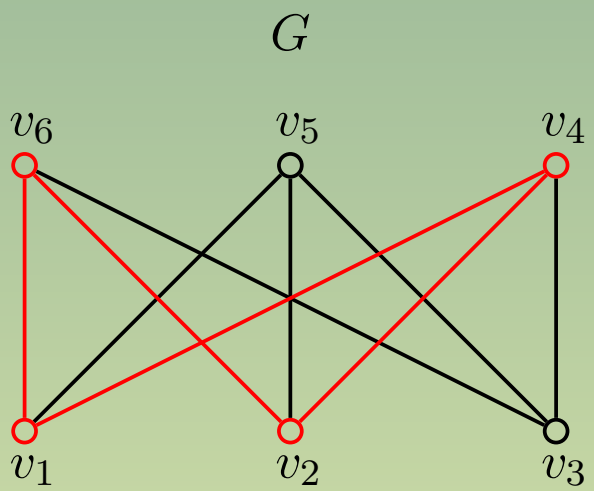
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

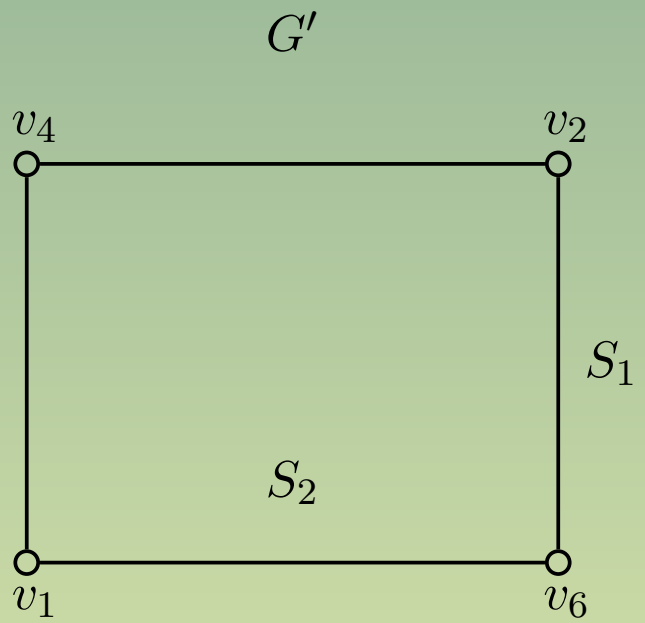




Odaberemo neki ciklus G' u grafu G, npr. $v_1v_6v_2v_4v_1$ i odredimo neko njegovo ravninsko smještenje.

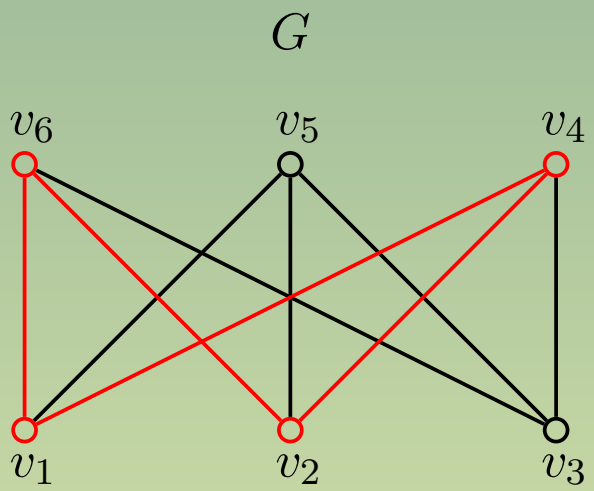
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

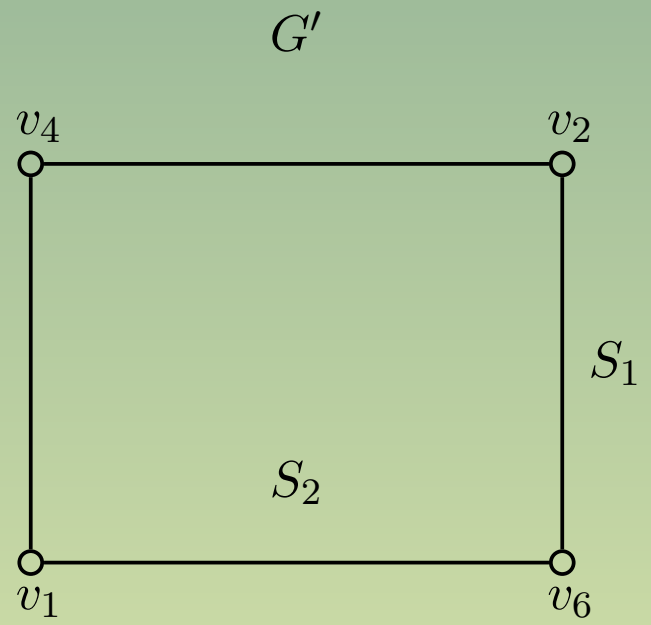




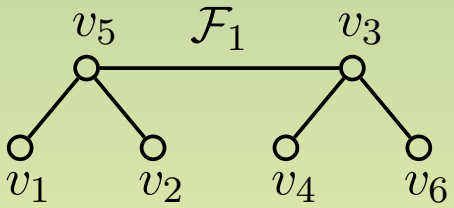
Odaberemo neki ciklus G' u grafu G, npr. $v_1v_6v_2v_4v_1$ i odredimo neko njegovo ravninsko smještenje. Ravninsko smještenje od G' ima ukupno dvije strane S_1 i S_2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





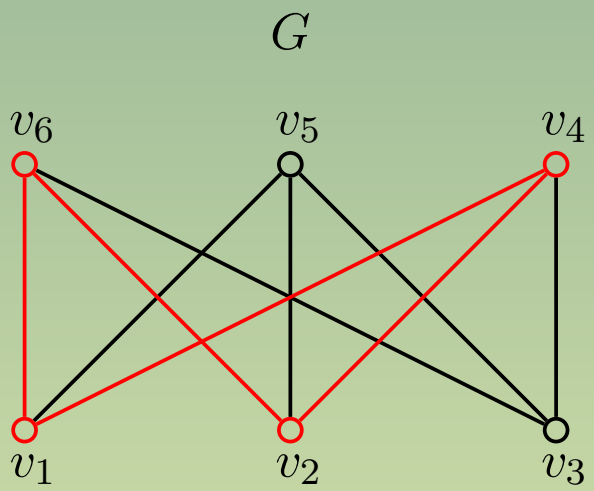
fragmenti od G s obzirom na G'

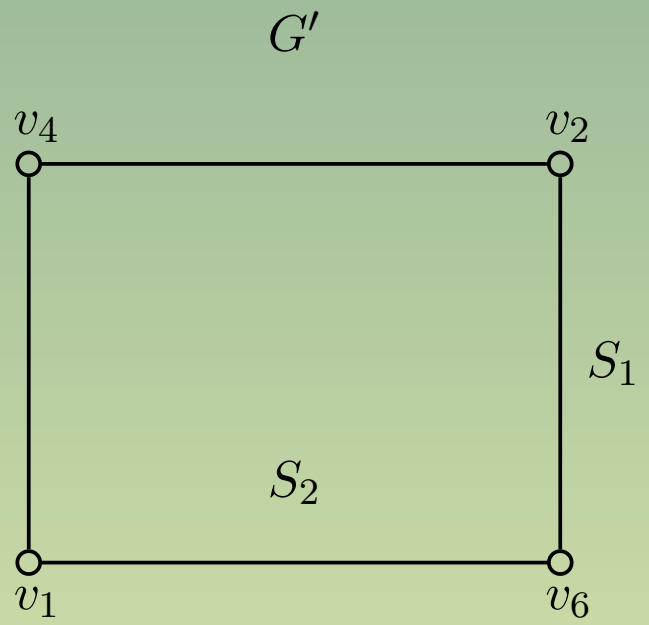


Odaberemo neki ciklus G' u grafu G, npr. $v_1v_6v_2v_4v_1$ i odredimo neko njegovo ravninsko smještenje. Ravninsko smještenje od G' ima ukupno dvije strane S_1 i S_2. Zatim odredimo sve fragmente od G s obzirom na G' i njihove dopustive strane.

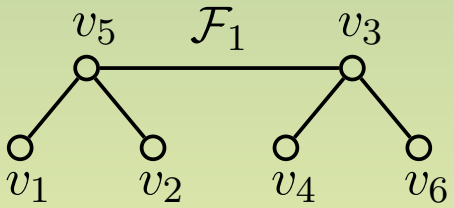
$$S(\mathcal{F}_1) = \{S_1, S_2\}$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





fragmenti od G s obzirom na G'



Postoji samo jedan fragment $\mathcal{F}_1$ koji ima dopustivih strana pa uzimamo taj fragment.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

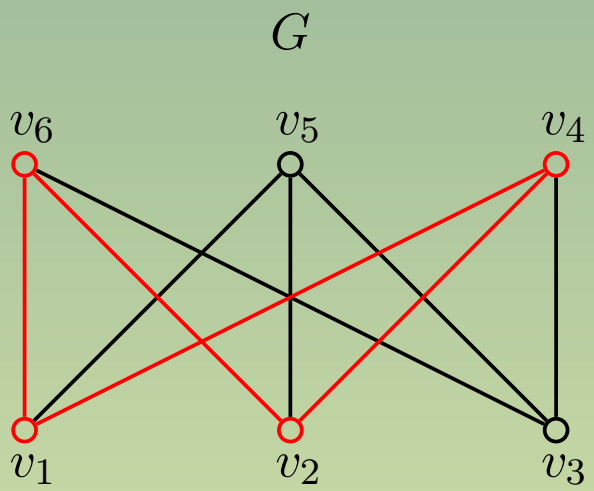
Sparivanje u bipartitnom grafu

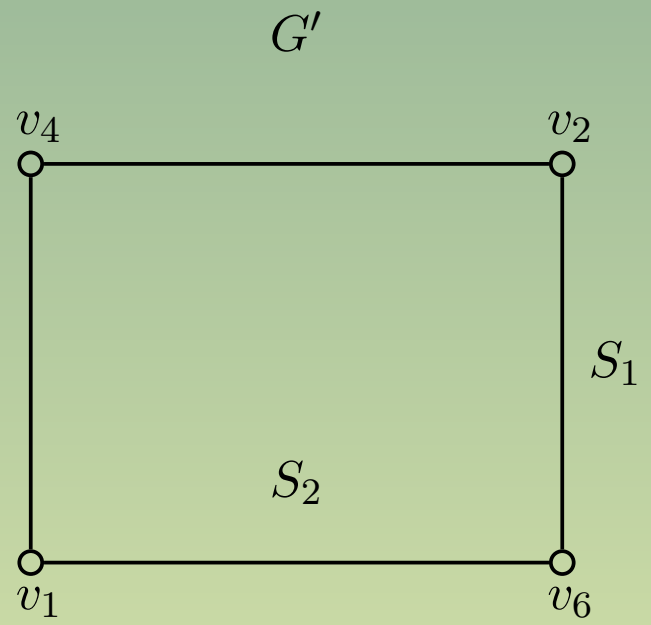
Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

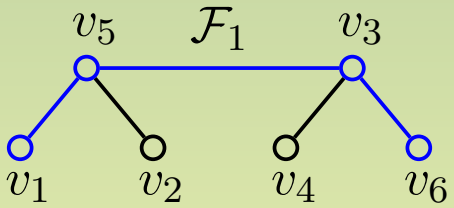
Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



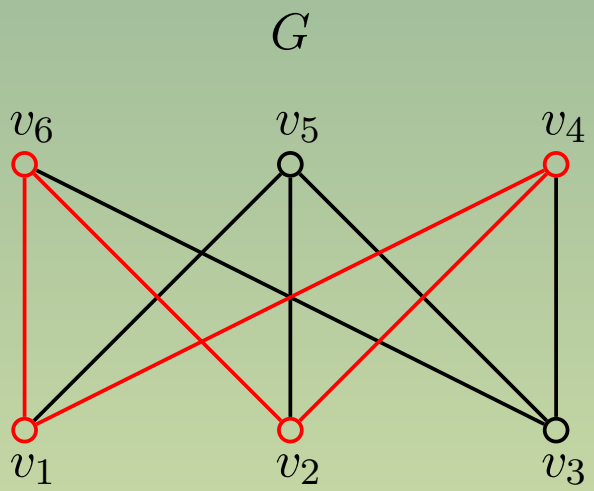


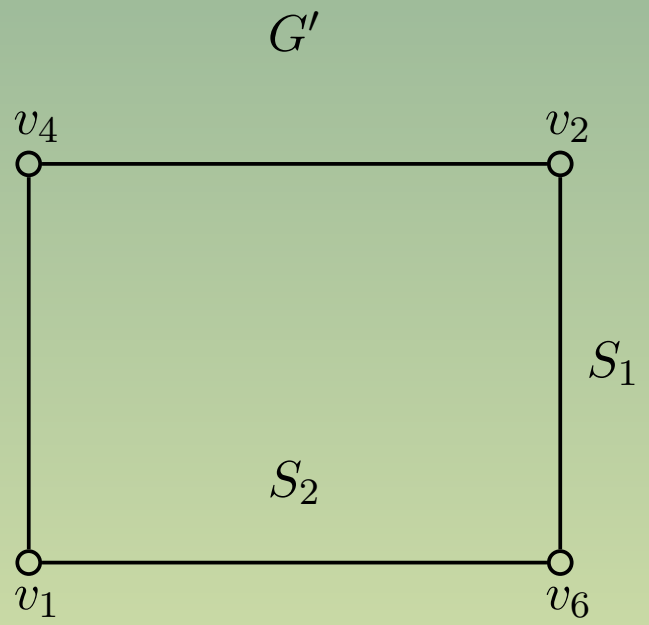
fragmenti od G s obzirom na G'



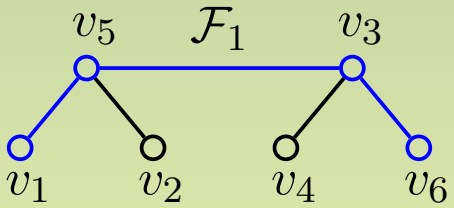
Postoji samo jedan fragment $\mathcal{F}_1$ koji ima dopustivih strana pa uzimamo taj fragment. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put $v_1v_5v_3v_6$ (postoji ukupno šest α-putova u $\mathcal{F}_1$).

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





fragmenti od G s obzirom na G'

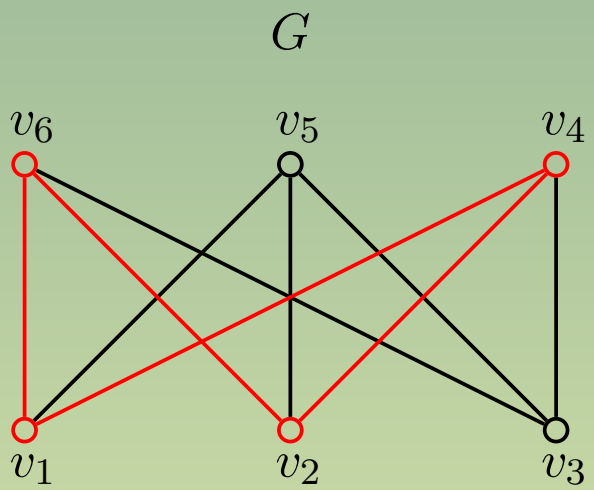


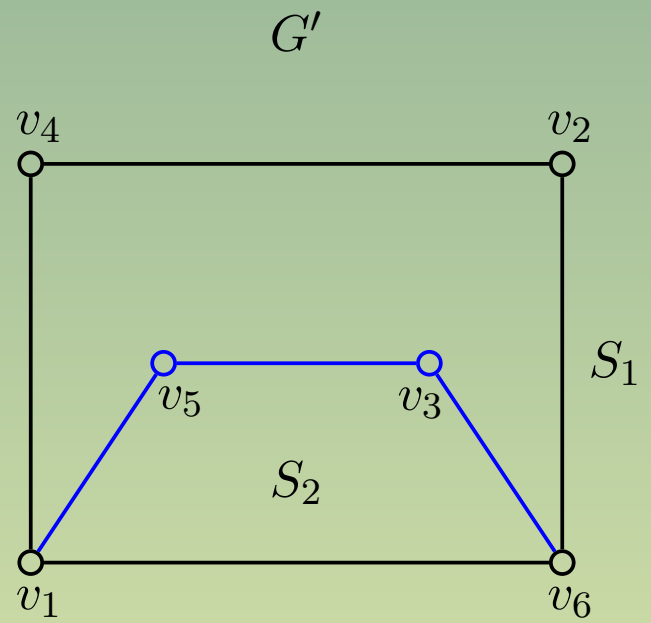
Odabrani α-put u $\mathcal{F}_1$ smjestimo u neku dopustivu stranu od $\mathcal{F}_1$. Kako je $S(\mathcal{F}_1) = \{S_1, S_2\}$, biramo jednu od strana S_1 i S_2.

Diskretne strukture s teorijom grafova

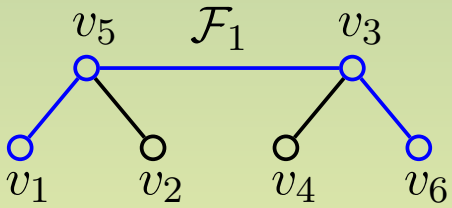
prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



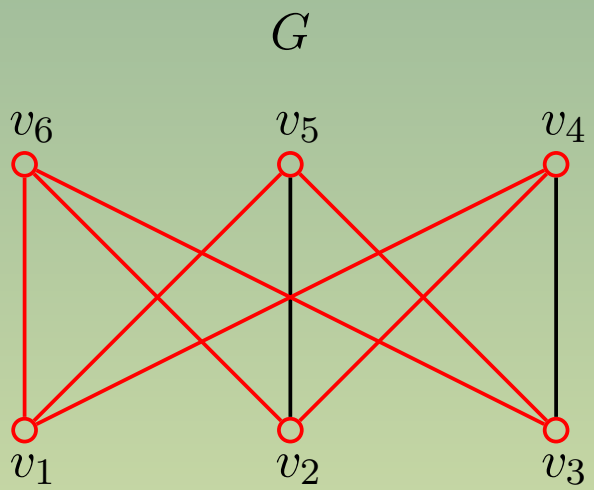


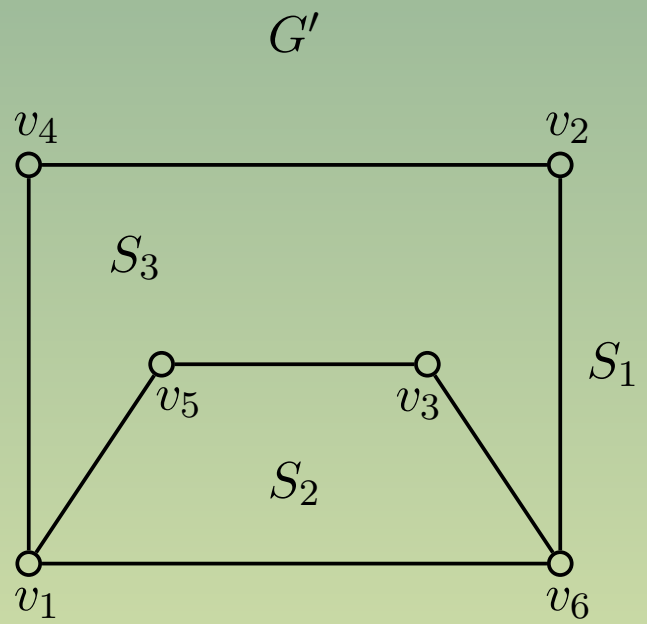
fragmenti od G s obzirom na G'



Odabrani α-put u $\mathcal{F}_1$ smjestimo u neku dopustivu stranu od $\mathcal{F}_1$. Kako je $S(\mathcal{F}_1) = \{S_1, S_2\}$, biramo jednu od strana S_1 i S_2. Na primjer, odaberimo stranu S_2 i u nju smjestimo odabrani α-put.

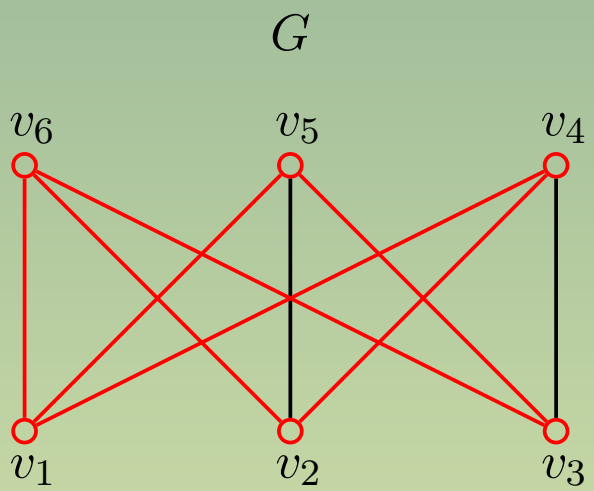
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

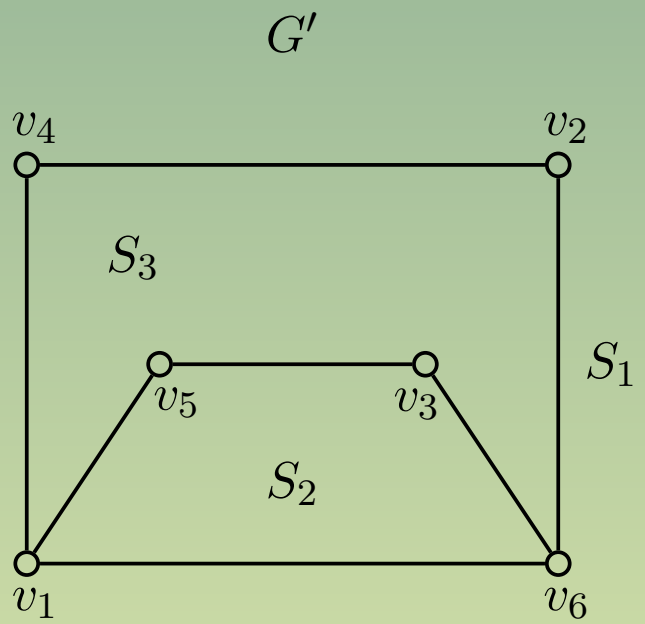




Odabrani α-put u $\mathcal{F}_1$ smjestimo u neku dopustivu stranu od $\mathcal{F}_1$. Kako je $S(\mathcal{F}_1) = \{S_1, S_2\}$, biramo jednu od strana S_1 i S_2. Na primjer, odaberimo stranu S_2 i u nju smjestimo odabrani α-put. Na taj način dobivamo novi podgraf G' i neko njegovo ravninsko smještenje koje ima tri strane S_1, S_2 i S_3.

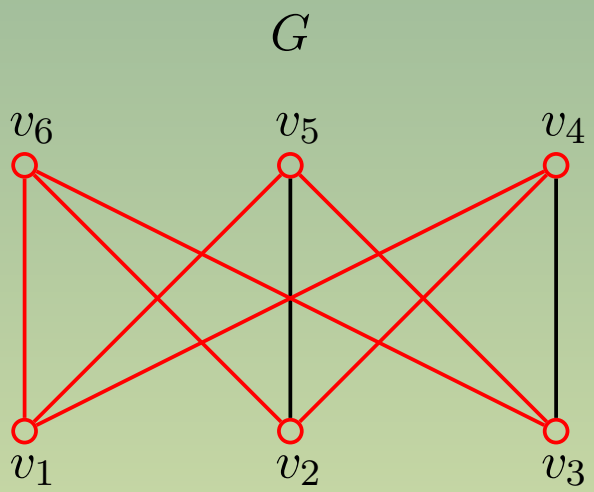
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

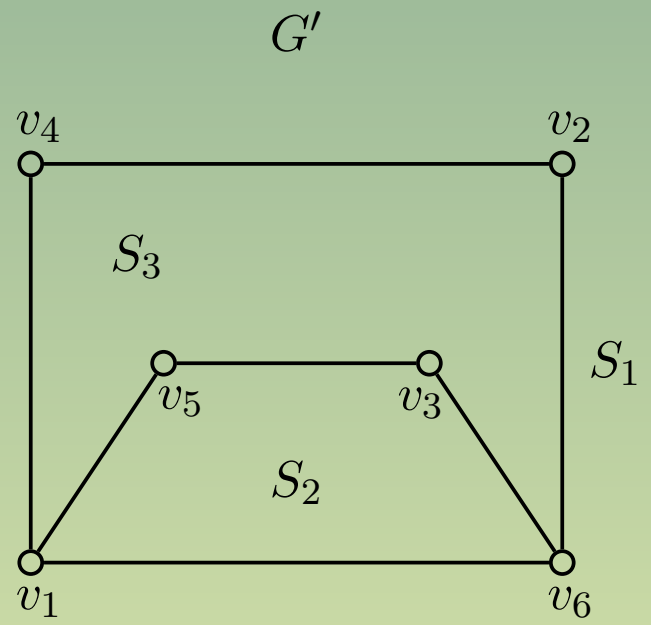




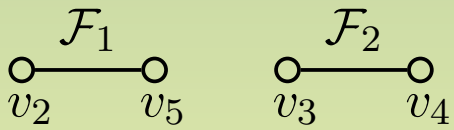
Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





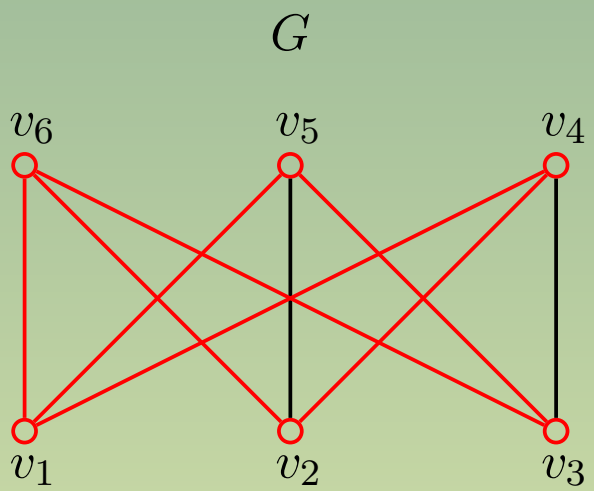
fragmenti od G s obzirom na G'

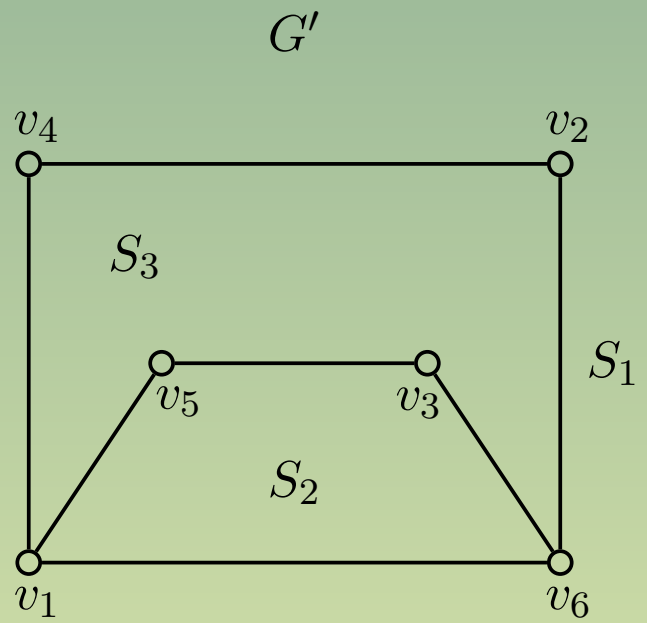


Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'. Najprije odredimo sve fragmente od G s obzirom na G' i njihove dopustive strane.

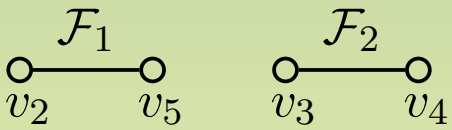
$$S(\mathcal{F}_1) = \{S_3\}, \quad S(\mathcal{F}_2) = \{S_3\}$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



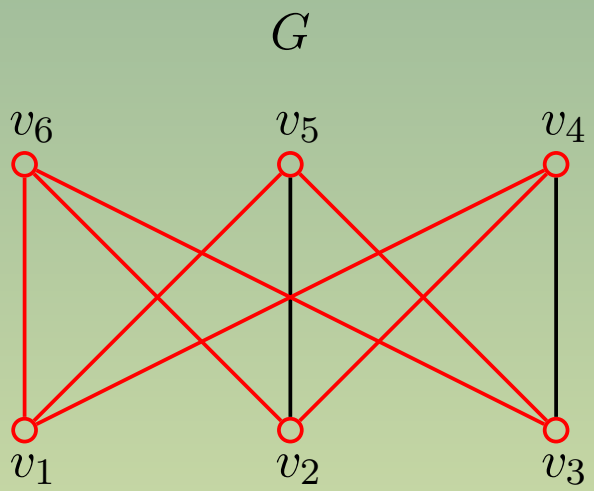


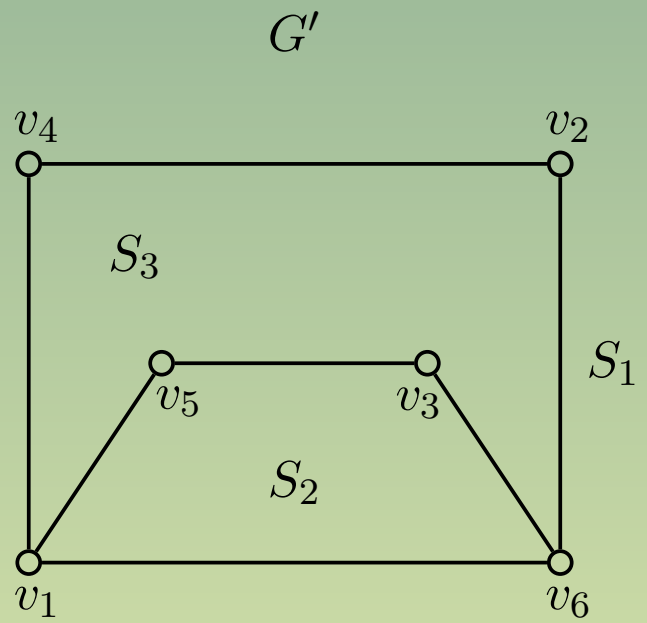
fragmenti od G s obzirom na G'



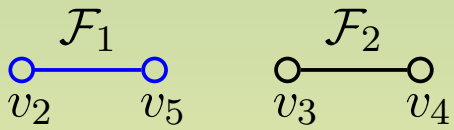
Svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu pa biramo nekog od ta dva fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_1$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



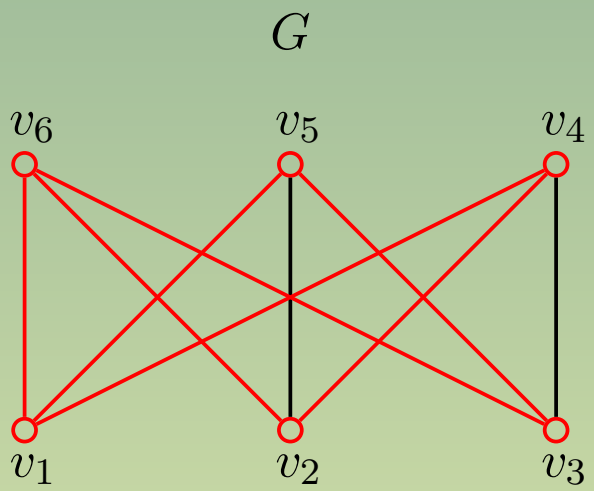


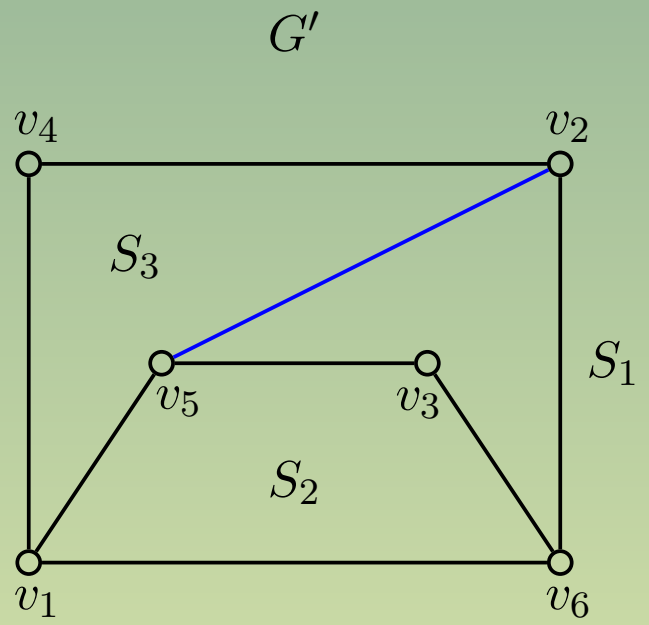
fragmenti od G s obzirom na G'



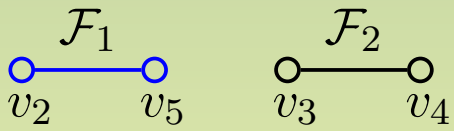
Svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu pa biramo nekog od ta dva fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_1$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put v_2v_5 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_1$)

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



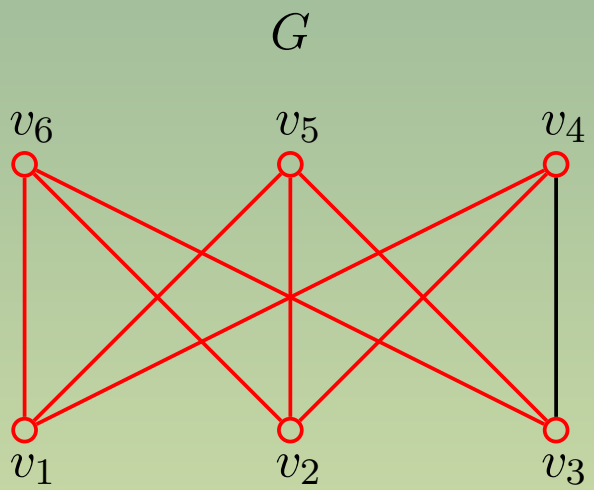


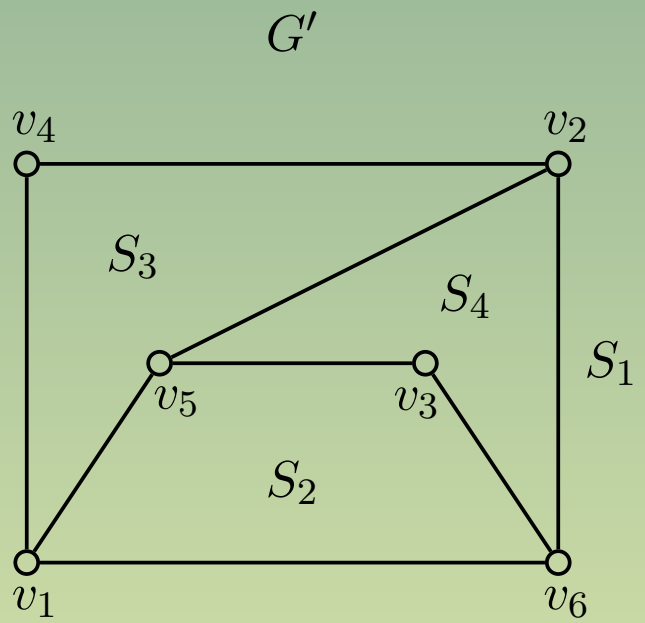
fragmenti od G s obzirom na G'



Svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu pa biramo nekog od ta dva fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_1$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put v_2v_5 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_1$) i njega smjestimo u jedinu dopustivu stranu S_3 od $\mathcal{F}_1$.

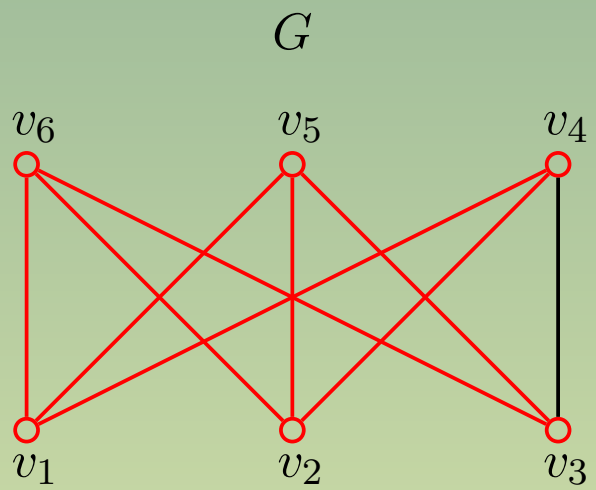
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

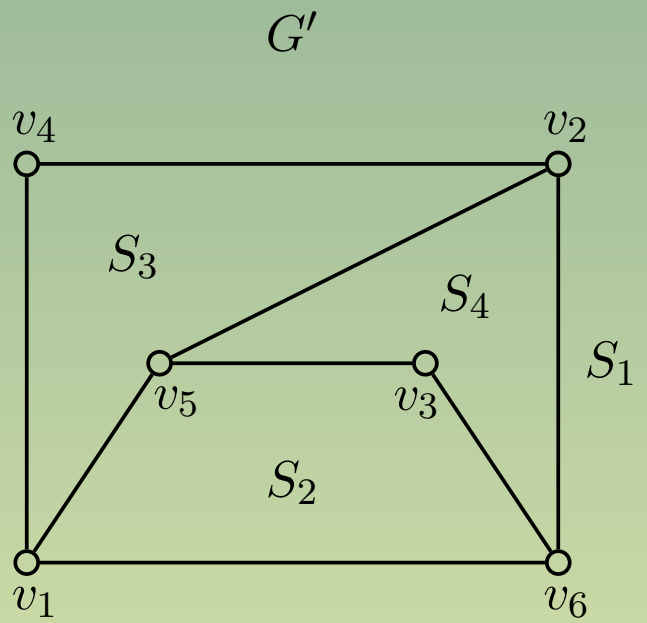




Svaki od fragmenata $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ ima samo jednu dopustivu stranu pa biramo nekog od ta dva fragmenta. Odaberimo, npr. fragment $\mathcal{F}_1$. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put v_2v_5 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_1$) i njega smjestimo u jedinu dopustivu stranu S_3 od $\mathcal{F}_1$. Na taj način dobivamo novi podgraf G' i neko njegovo ravninsko smještenje koje ima 4 strane S_1, S_2, S_3 i S_4.

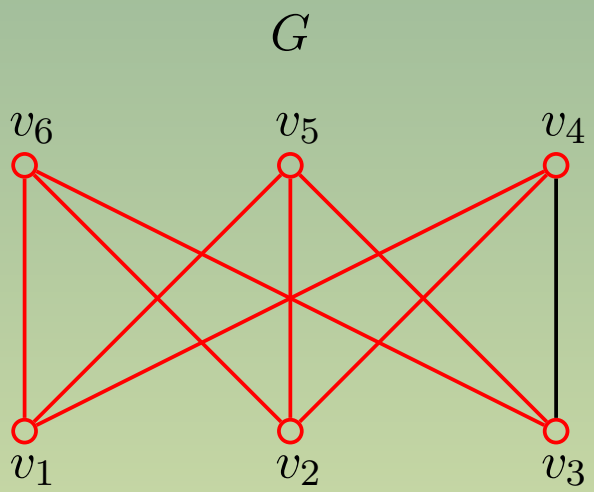
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

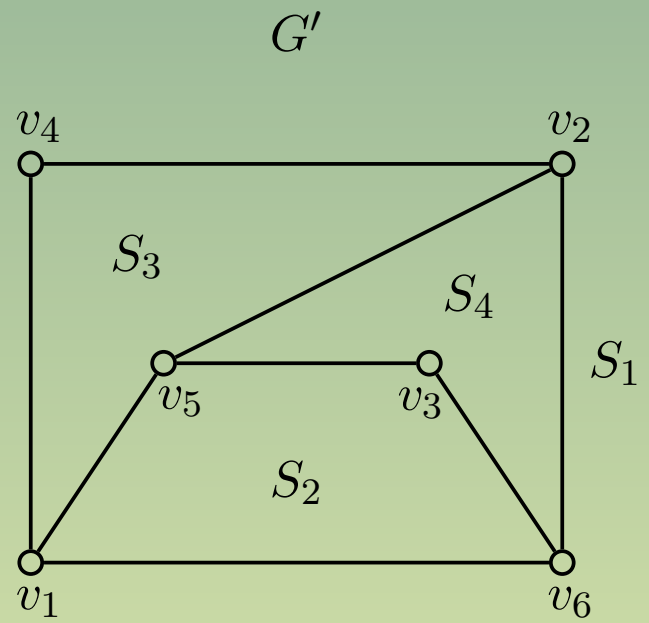




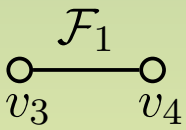
Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





fragmenti od G s obzirom na G'

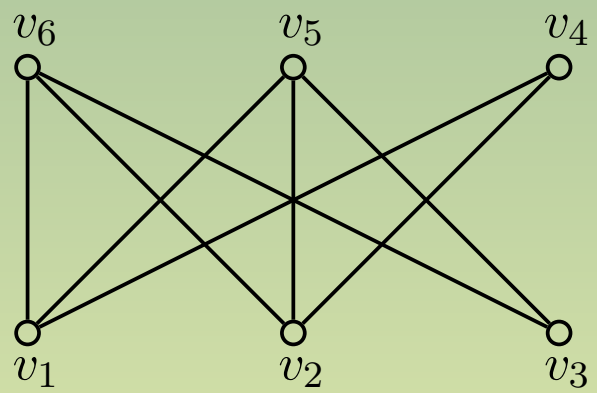


Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'. Najprije odredimo sve fragmente od G s obzirom na G' i njihove dopustive strane. Kako je $S(\mathcal{F}_1) = \emptyset$, algoritam se zaustavlja i zaključujemo da $G = K_{3,3}$ nije planarni graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.33.

Pomoću Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritma ispitajte da li je zadani graf G planarni.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

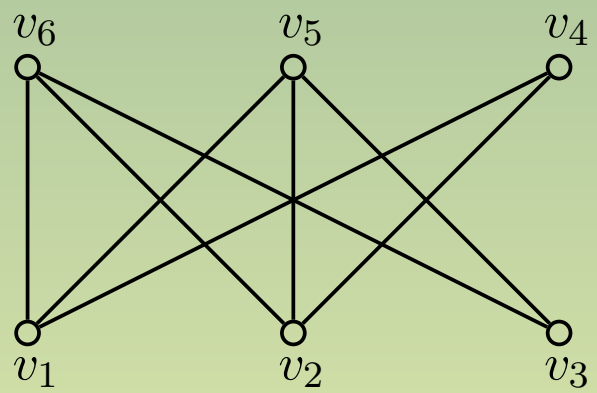
Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja

Primjer 10.33.

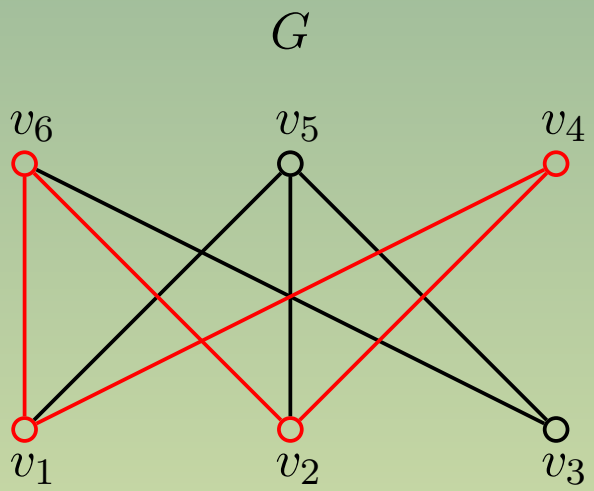
Pomoću Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritma ispitajte da li je zadani graf G planarni.

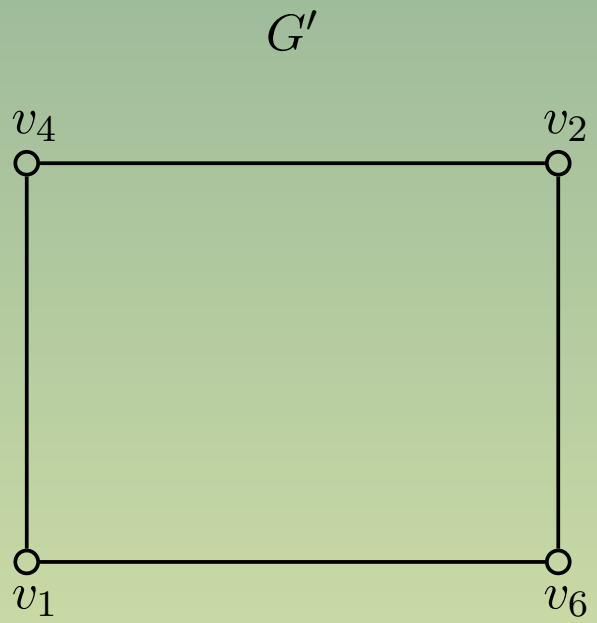


Rješenje.

Uočite da je graf G zapravo $K_{3,3}$ bez jednog svojeg brida, a u primjeru 10.28. smo pokazali da je taj graf planarni. Pritom smo se koristili ad hoc metodama pokušavajući vrhove grafa rasporediti tako da se bridovi ne sijeku. Ovdje ćemo korak po korak pomoću Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritma doći do istog zaključka.

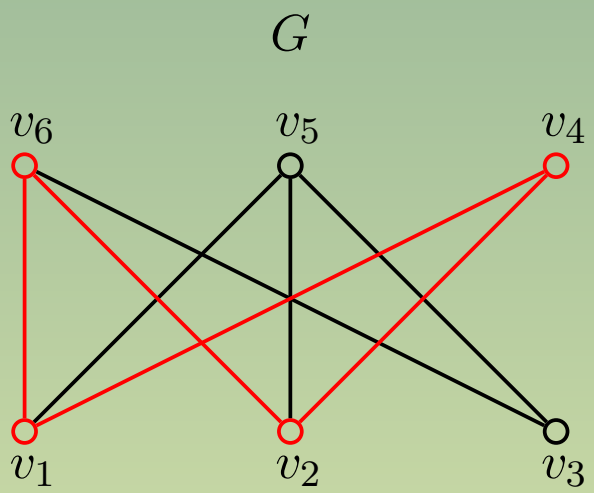
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

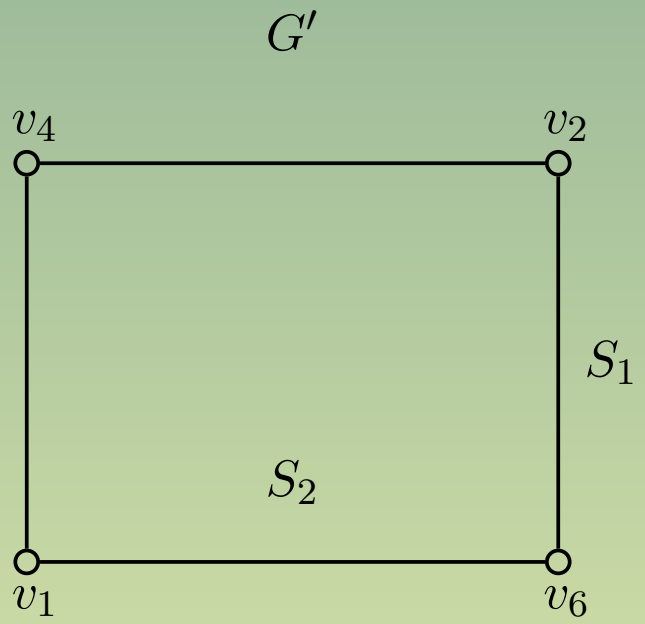




Odaberemo neki ciklus G' u grafu G, npr. $v_1v_6v_2v_4v_1$ i odredimo neko njegovo ravninsko smještenje.

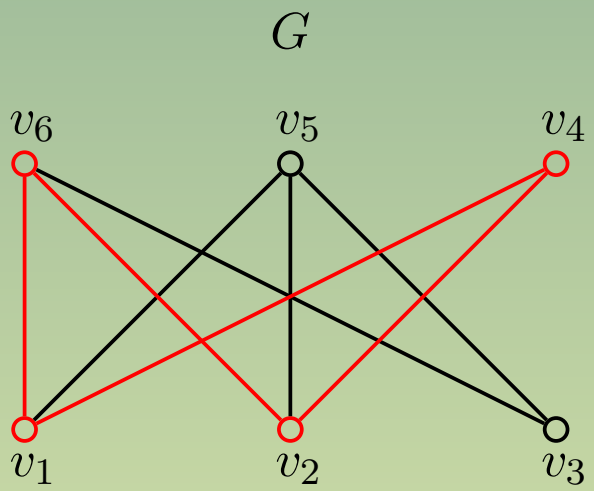
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

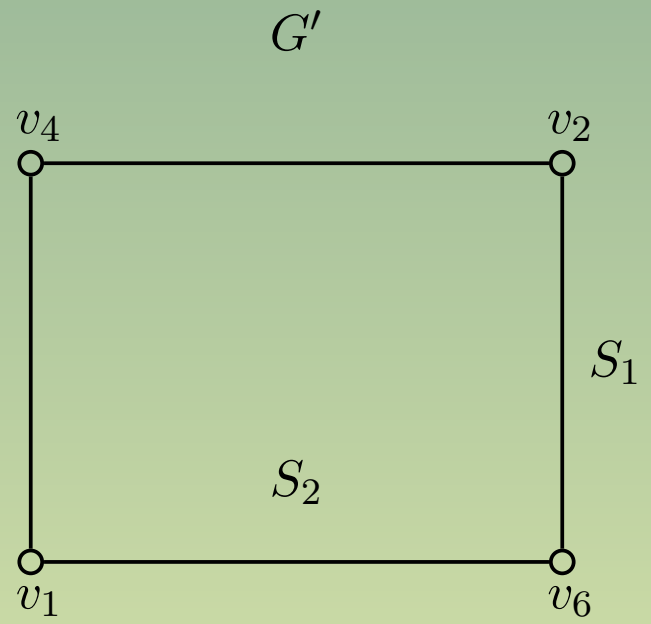




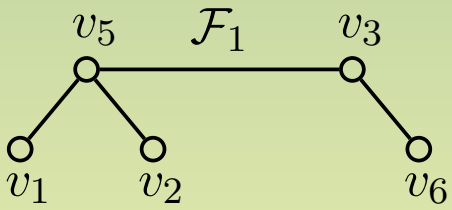
Odaberemo neki ciklus G' u grafu G, npr. $v_1v_6v_2v_4v_1$ i odredimo neko njegovo ravninsko smještenje. Ravninsko smještenje od G' ima ukupno dvije strane S_1 i S_2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





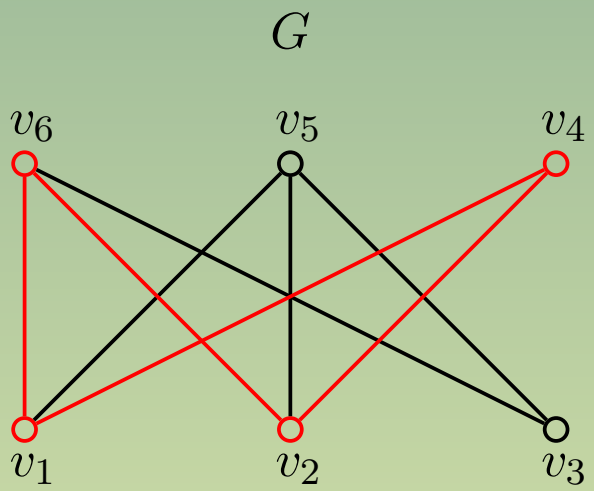
fragmenti od G s obzirom na G'

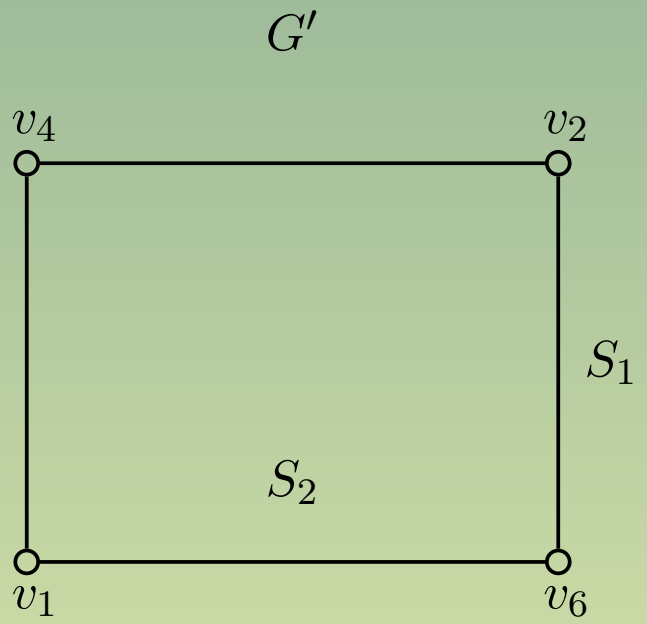


Odaberemo neki ciklus G' u grafu G, npr. $v_1v_6v_2v_4v_1$ i odredimo neko njegovo ravninsko smještenje. Ravninsko smještenje od G' ima ukupno dvije strane S_1 i S_2. Zatim odredimo sve fragmente od G s obzirom na G' i njihove dopustive strane.

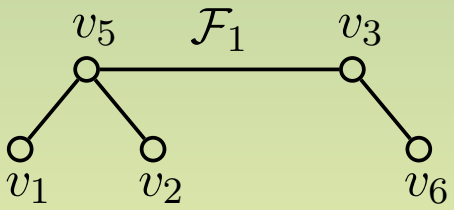
$$S(\mathcal{F}_1) = \{S_1, S_2\}$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



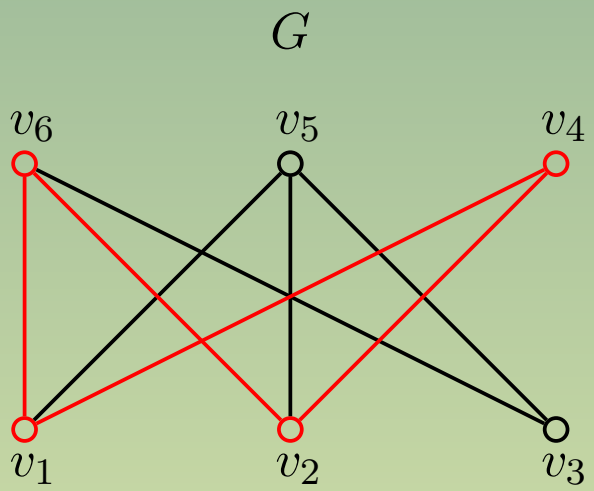


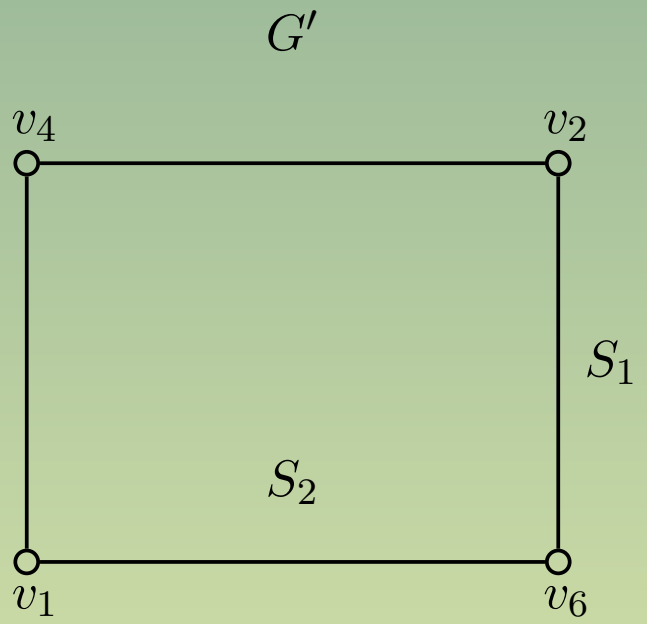
fragmenti od G s obzirom na G'



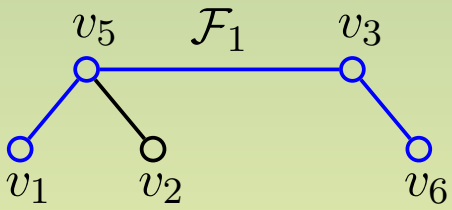
Postoji samo jedan fragment $\mathcal{F}_1$ koji ima dopustivih strana pa uzimamo taj fragment.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



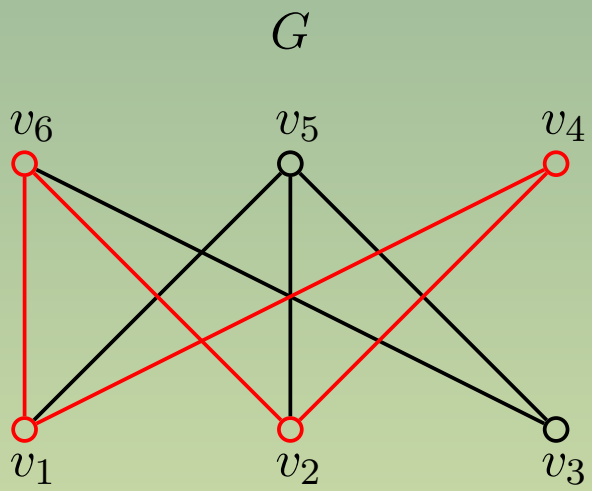


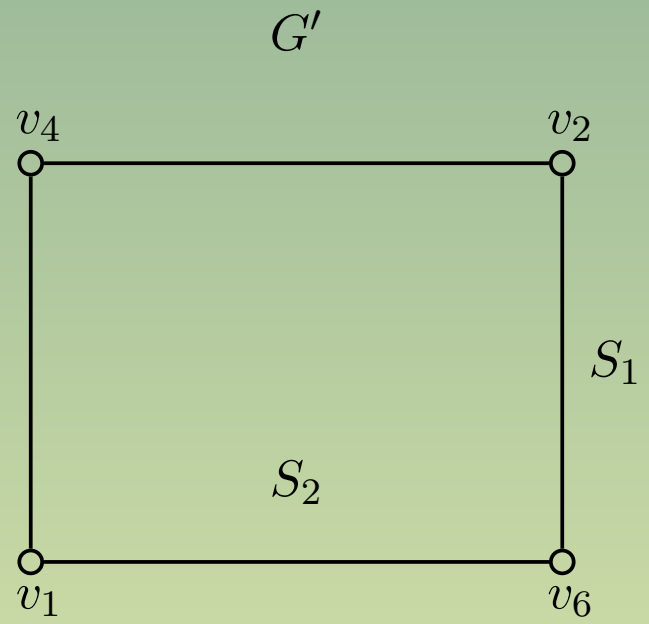
fragmenti od G s obzirom na G'



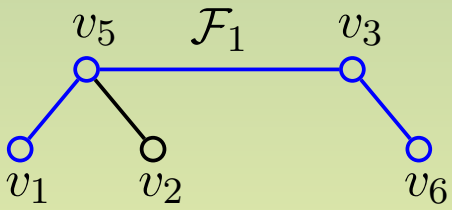
Postoji samo jedan fragment $\mathcal{F}_1$ koji ima dopustivih strana pa uzimamo taj fragment. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put $v_1v_5v_3v_6$ (postoje ukupno tri α-puta u $\mathcal{F}_1$).

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



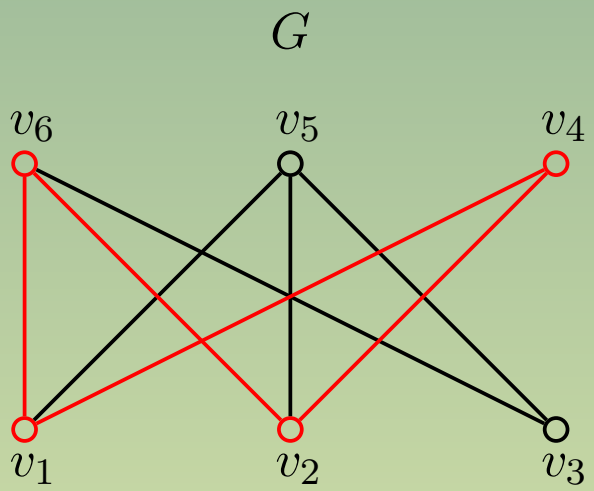


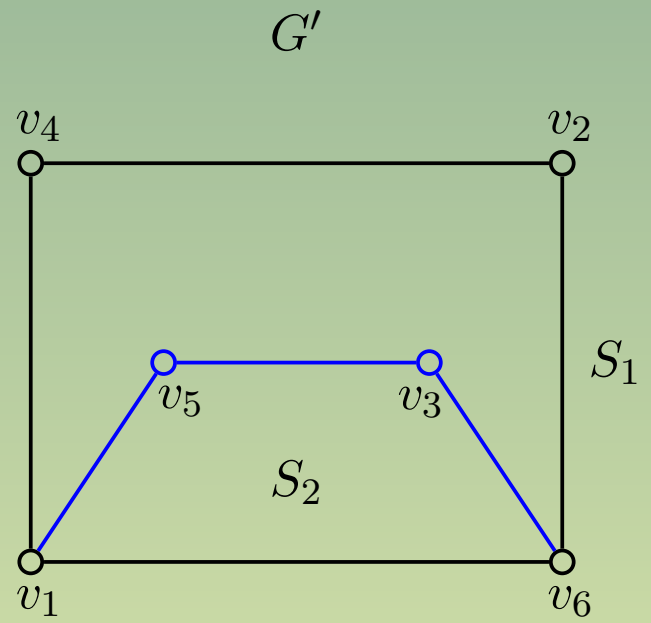
fragmenti od G s obzirom na G'



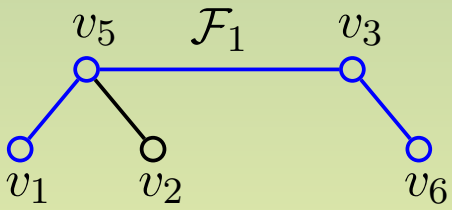
Odabrani α-put u $\mathcal{F}_1$ smjestimo u neku dopustivu stranu od $\mathcal{F}_1$. Kako je $S(\mathcal{F}_1) = \{S_1, S_2\}$, biramo jednu od strana S_1 i S_2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



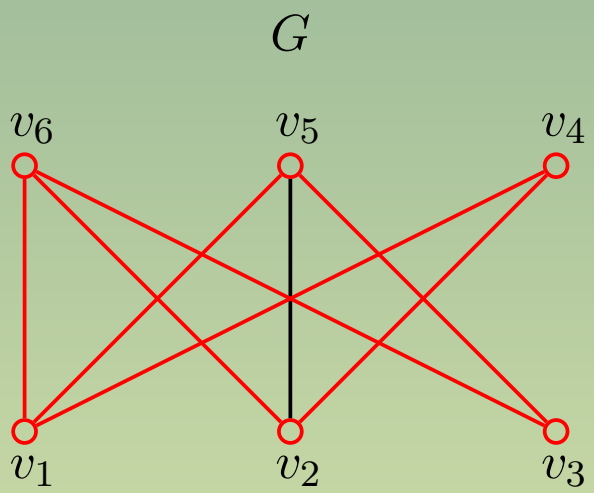


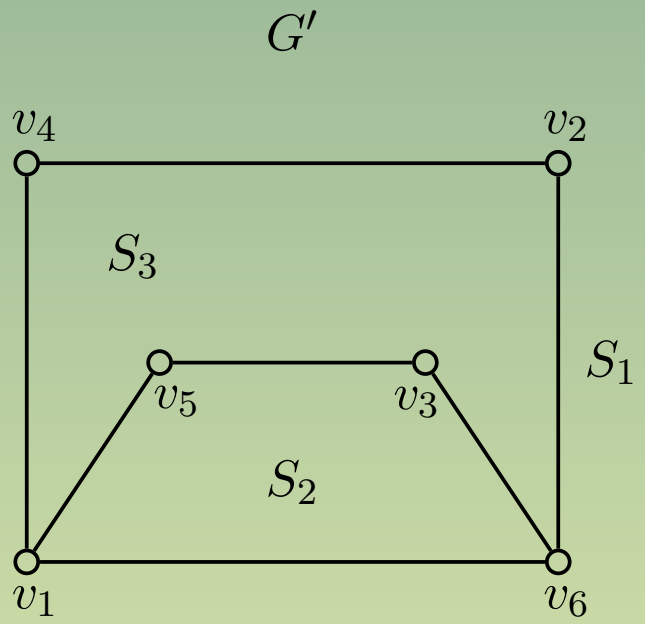
fragmenti od G s obzirom na G'



Odabrani α-put u $\mathcal{F}_1$ smjestimo u neku dopustivu stranu od $\mathcal{F}_1$. Kako je $S(\mathcal{F}_1) = \{S_1, S_2\}$, biramo jednu od strana S_1 i S_2. Na primjer, odaberimo stranu S_2 i u nju smjestimo odabrani α-put.

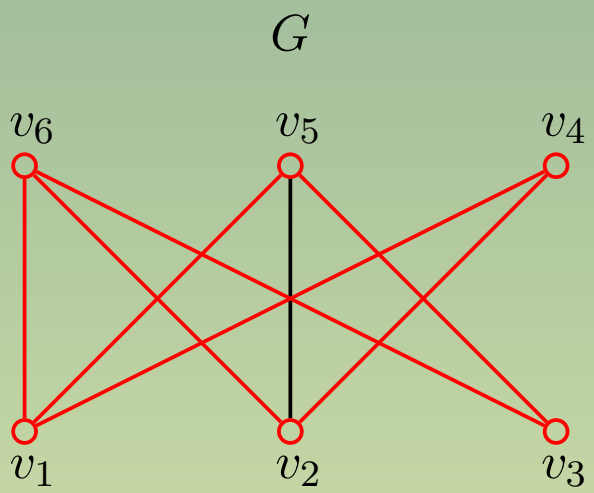
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

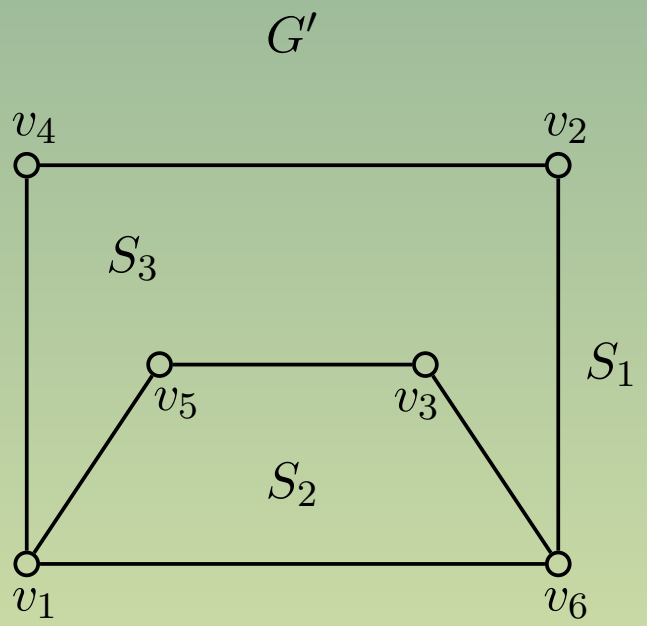




Odabrani α-put u $\mathcal{F}_1$ smjestimo u neku dopustivu stranu od $\mathcal{F}_1$. Kako je $S(\mathcal{F}_1) = \{S_1, S_2\}$, biramo jednu od strana S_1 i S_2. Na primjer, odaberimo stranu S_2 i u nju smjestimo odabrani α-put. Na taj način dobivamo novi podgraf G' i neko njegovo ravninsko smještenje koje ima tri strane S_1, S_2 i S_3.

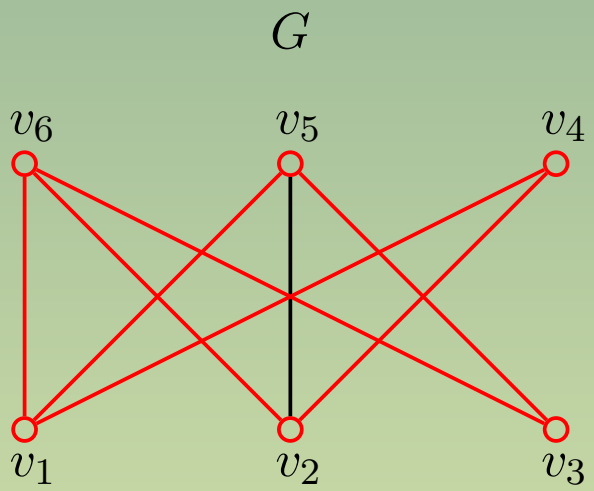
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

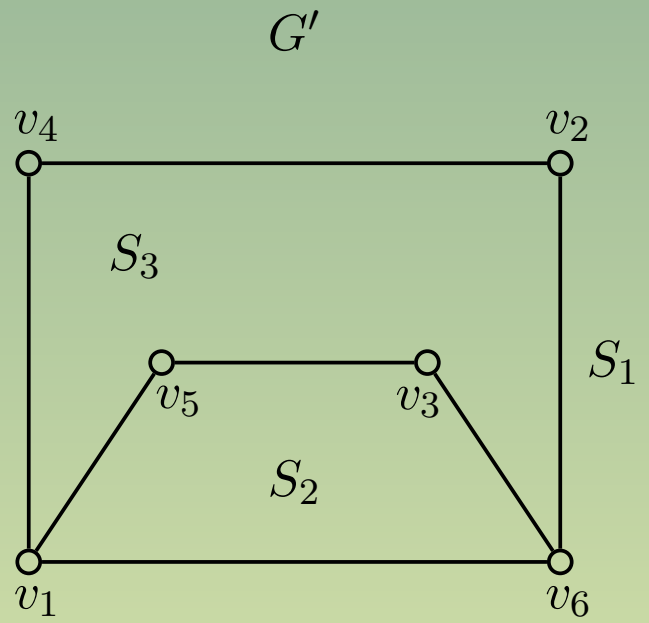




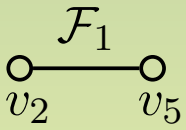
Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





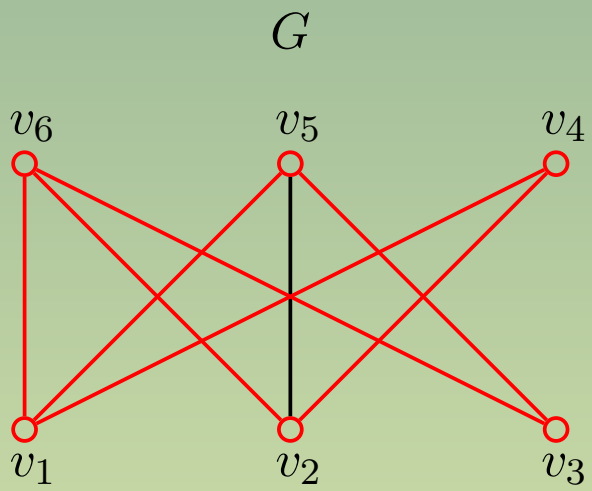
fragmenti od G s obzirom na G'

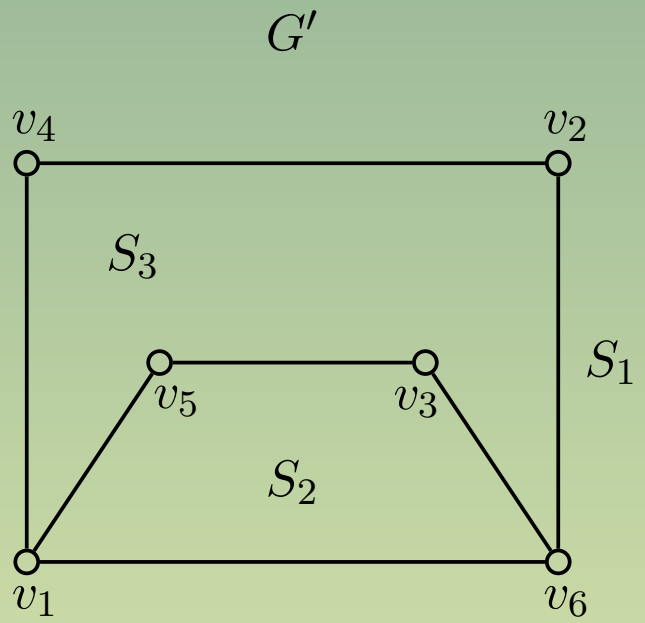


Dalje ponavljamo isti postupak za novodobiveni podgraf G'. Najprije odredimo sve fragmente od G s obzirom na G' i njihove dopustive strane.

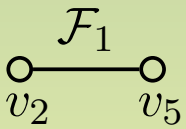
$$S(\mathcal{F}_1) = \{S_3\}$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



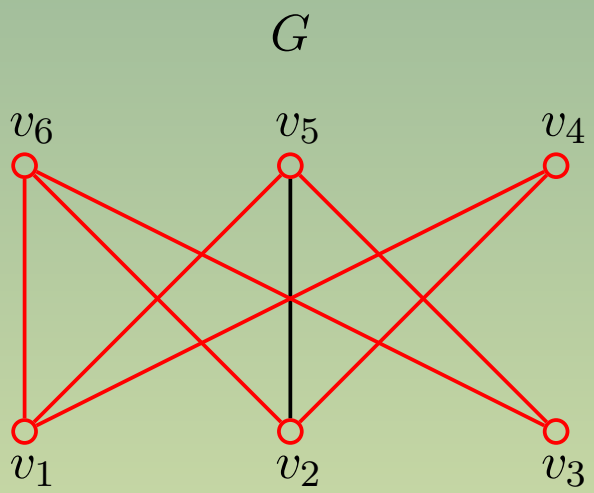


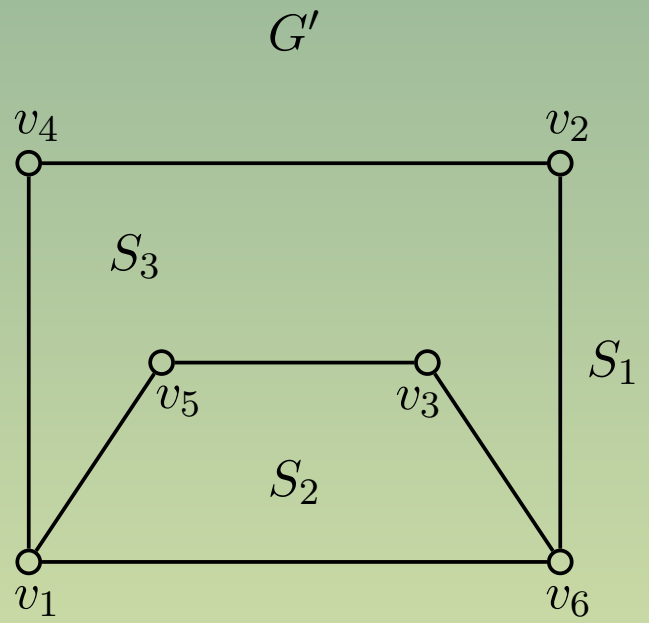
fragmenti od G s obzirom na G'



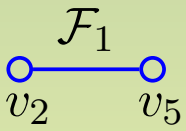
Kako postoji samo jedan fragment $\mathcal{F}_1$ koji ima dopustivih strana, uzimamo taj fragment.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



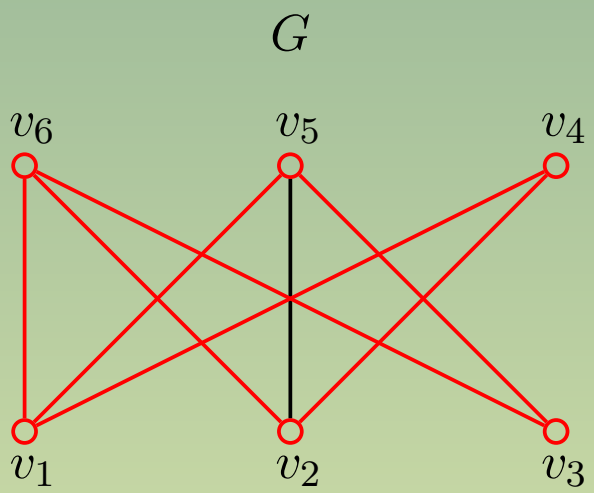


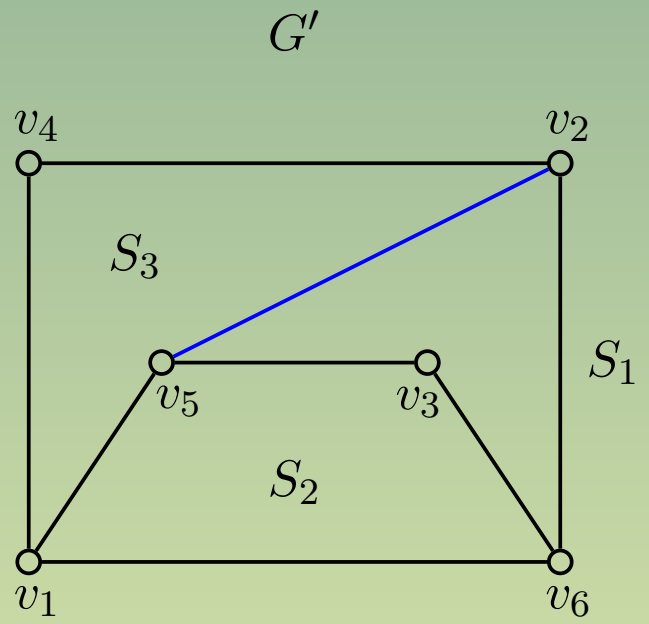
fragmenti od G s obzirom na G'



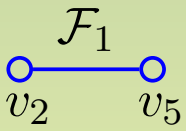
Kako postoji samo jedan fragment $\mathcal{F}_1$ koji ima dopustivih strana, uzimamo taj fragment. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put v_2v_5 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_1$)

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



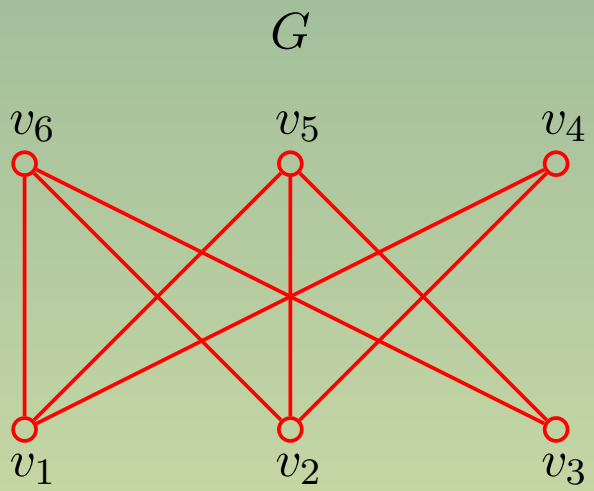


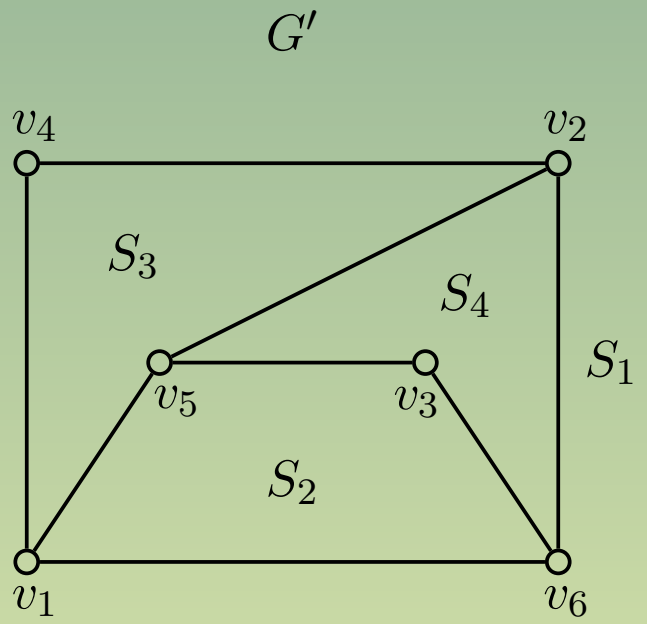
fragmenti od G s obzirom na G'



Kako postoji samo jedan fragment $\mathcal{F}_1$ koji ima dopustivih strana, uzimamo taj fragment. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put v_2v_5 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_1$) i njega smjestimo u jedinu dopustivu stranu S_3 od $\mathcal{F}_1$.

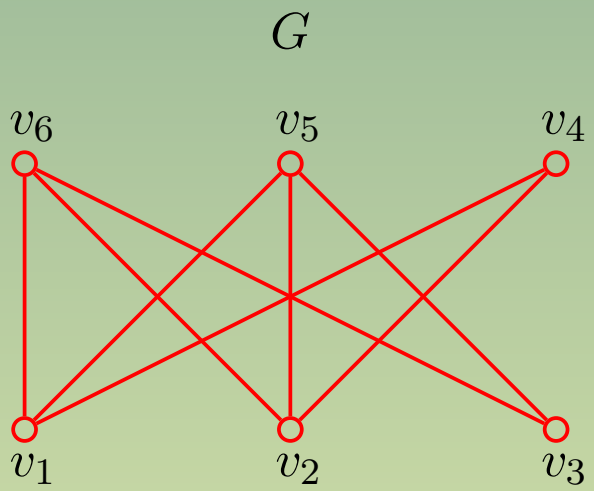
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

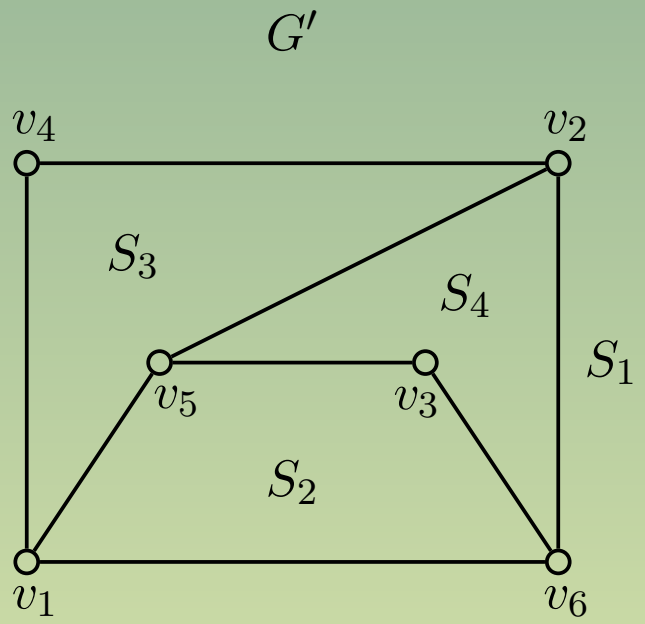




Kako postoji samo jedan fragment $\mathcal{F}_1$ koji ima dopustivih strana, uzimamo taj fragment. U odabranom fragmentu $\mathcal{F}_1$ odaberemo jedan α-put v_2v_5 (to je zapravo i jedini α-put u $\mathcal{F}_1$) i njega smjestimo u jedinu dopustivu stranu S_3 od $\mathcal{F}_1$. Na taj način dobivamo novi podgraf G' i neko njegovo ravninsko smještenje koje ima 4 strane S_1, S_2, S_3 i S_4.

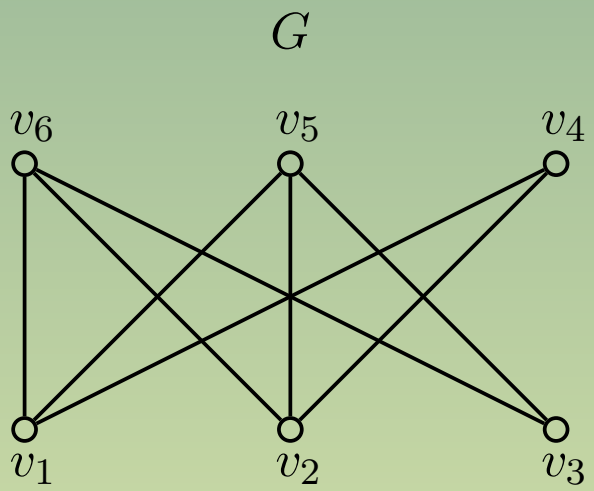
Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

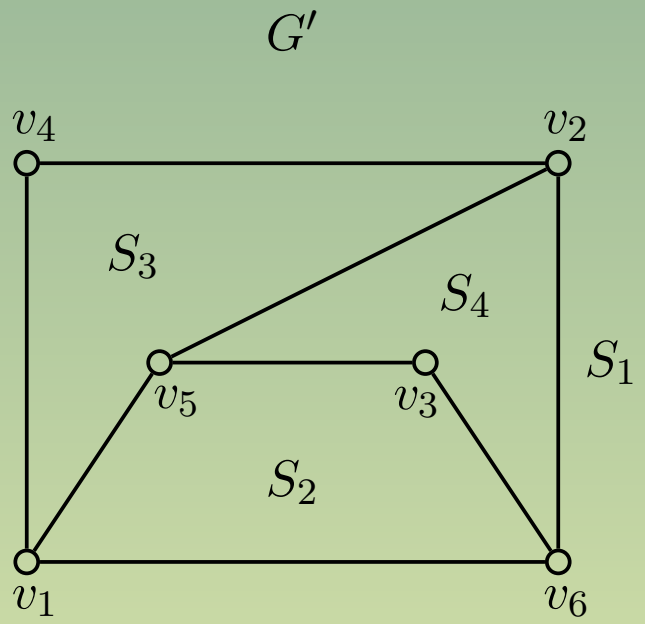




Kako više nema fragmenata, algoritam se zaustavlja

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja





Kako više nema fragmenata, algoritam se zaustavlja i zaključujemo da je G planarni graf, a G' je jedno njegovo ravninsko smještenje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Zadatak 10.13.

Osmislite i implementirajte na računalu algoritam koji će tražiti bikomponente zadanog grafa G. Postoji jedan efikasan algoritam složenosti $O(\nu + \varepsilon)$ koji rješava zadani problem, a temelji se na DFS algoritmu. Naime, vrijedi sljedeća tvrdnja: vrh v je rezni vrh grafa G akko vrh v u DFS stablu nije list i postoji podstablo od v iz kojeg ne postoji povratni brid prema nekom predaku od v. DFS stablo grafa G je korijensko stablo kreirano DFS algoritmom, a povratni brid je brid iz grafa G koji ne pripada DFS stablu. Iskoristite navedenu tvrdnju pri kreiranju algoritma za traženje reznih vrhova i bikomponenata zadanog grafa.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Napomena.

Složenost Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritma je $O(\nu^2)$.

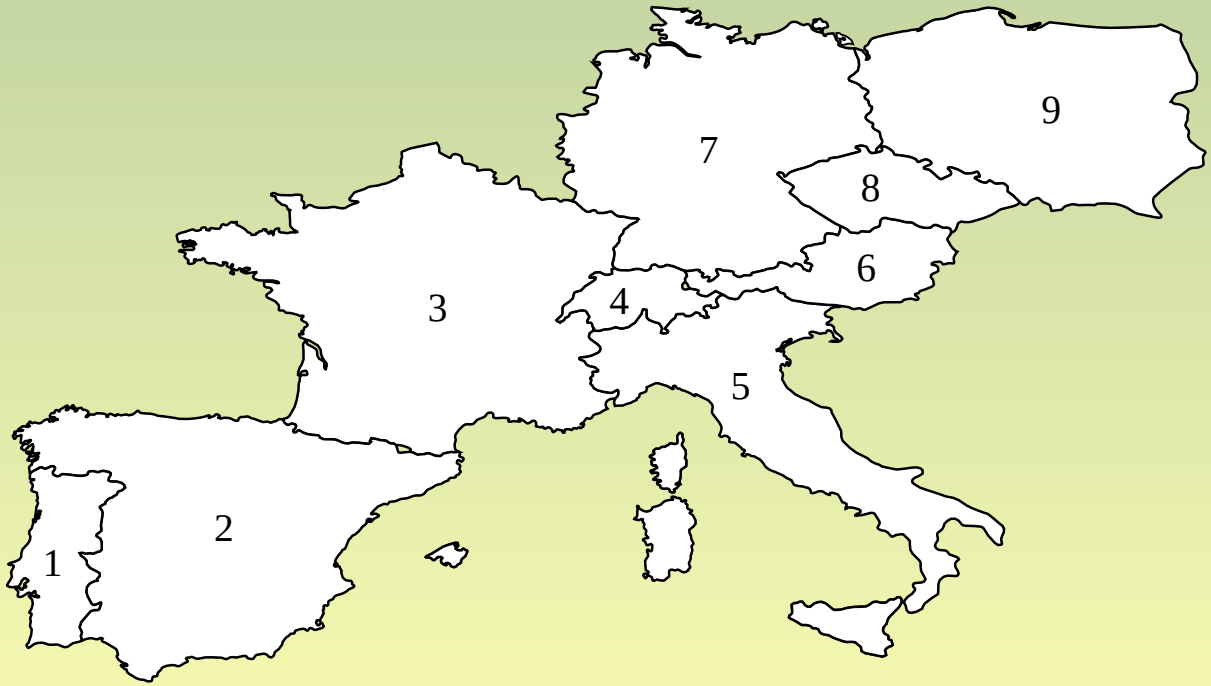
Zadatak 10.14.

Implementirajte na računalu Demoucron-Malgrange-Pertuiset algoritam. Nadalje, u slučaju da je G planarni graf, algoritam neka nacrta neko planarno smještenje zadanog grafa.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Bojanje vrhova grafa

Krećemo s jednim motivacijskim primjerom. Pogledajmo donju kartu na kojoj su nacrtane neke europske države. Naš je zadatak da tu kartu obojamo sa što je moguće manje boja, ali tako da susjedne države budu obojane različitim bojama.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Pritom ne bismo htjeli problem rješavati "napamet", nego bismo htjeli razviti matematičku teoriju koja bi nam garantirala korektnost našeg rješenja i po mogućnosti pronaći algoritam koji bi davao neko bojanje karte s minimalnim brojem boja tako da susjedne države budu obojane različitim bojama.

Matematički model za taj problem je graf. Vrhovi grafa predstavljaju države, a dva vrha su spojena bridom jedino ako su odgovarajuće države susjedne. Problem bojanja karte se tada svodi na problem bojanja vrhova grafa tako da susjedni vrhovi budu obojani različitim bojama i da pritom koristimo što je moguće manje boja. Nadalje, graf koji pridružujemo nekoj karti koju želimo obojati je uvijek planarni graf.

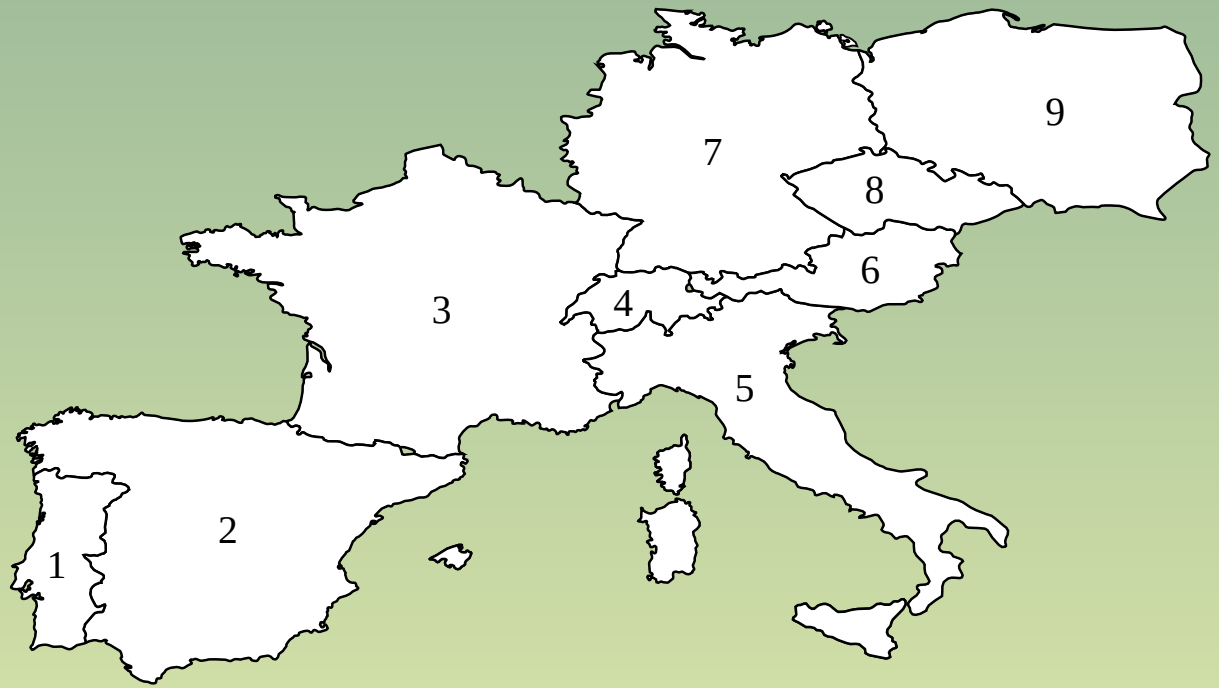
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Jedno od najvećih matematičkih dostignuća 20. stoljeća je dokaz teorema o četiri boje koji je jednostavan za razumjeti, ali ga je bilo vrlo teško dokazati. Dokazan je tek 1976. godine, a sam problem je bio otvoren od 1852. godine. Teorem o četiri boje zapravo garantira da su za bojanje vrhova planarnog grafa dovoljne samo četiri boje. To dalje ima za posljedicu da je svaku kartu moguće obojati s najviše četiri boje. Stoga i mi našu promatranu kartu možemo obojati s najviše četiri boje tako da pritom susjedne države budu obojane različitim bojama.

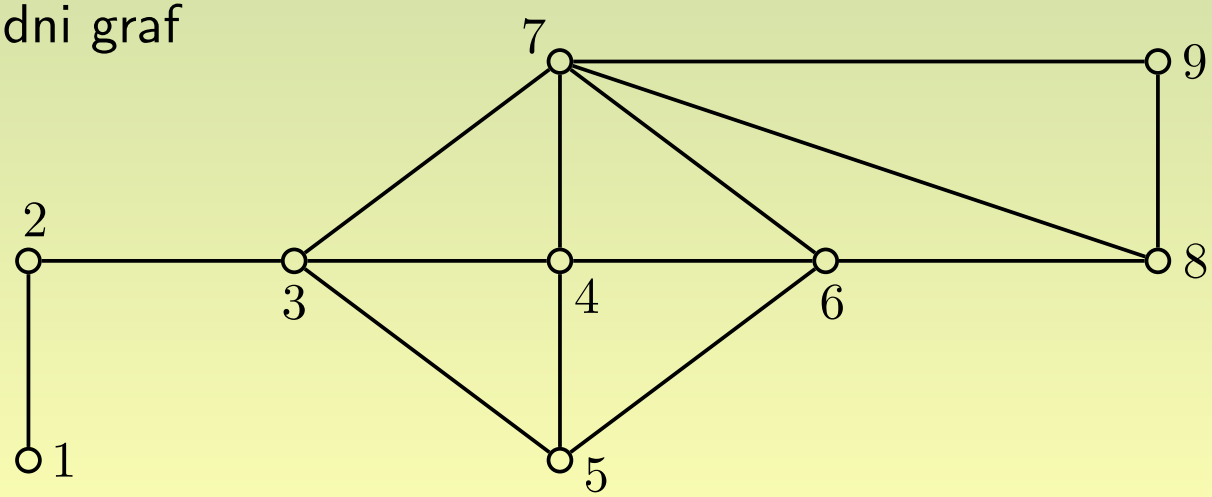
Na sljedećem slajdu je prikazano jedno takvo rješenje i u našem slučaju su dovoljne tri boje. Kada malo razvijemo teoriju bojanja vrhova grafa, vratite se natrag na taj primjer i riješite ga sami, korak po korak, uz pomoć teorije i algoritama koje ćemo obraditi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

karta



pripadni graf



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

Sparivanje u bipartitnom grafu

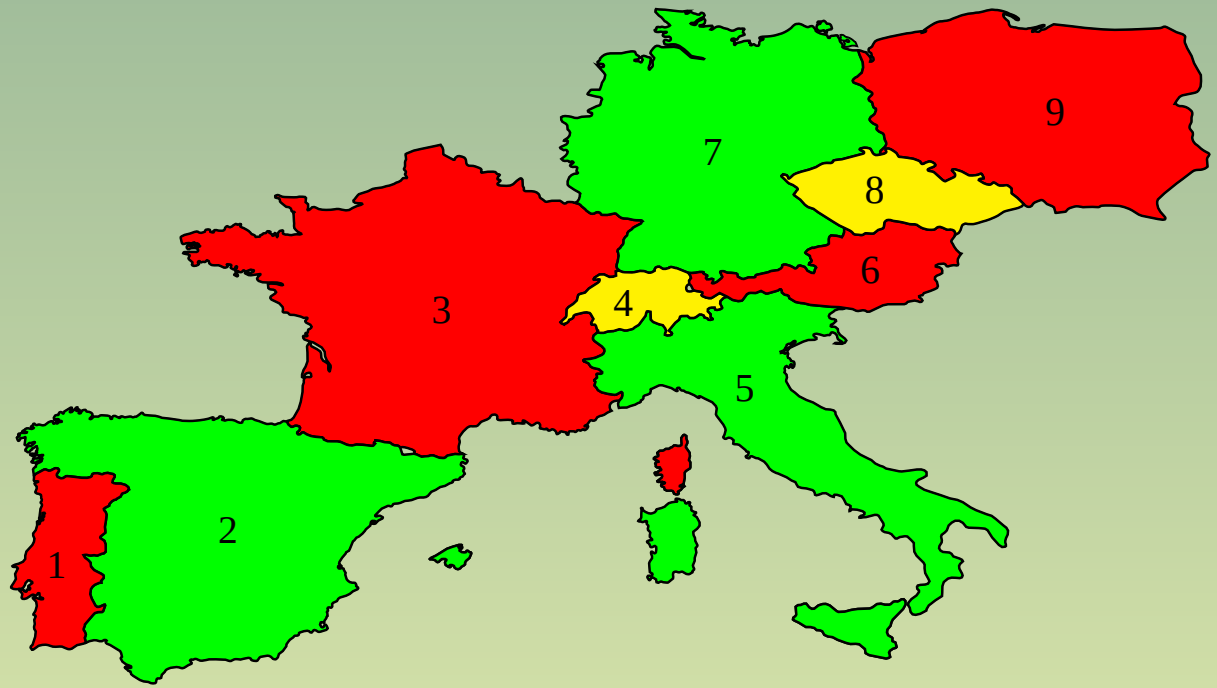
Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

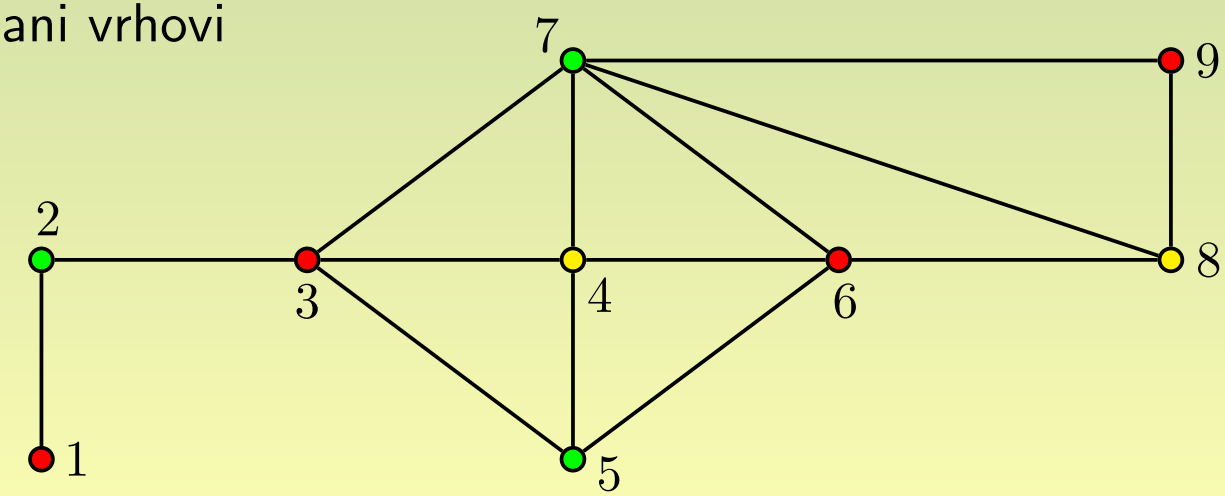
Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja

obojana karta



obojani vrhovi



Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Bojanje vrhova grafa G je preslikavanje koje svakom vrhu u grafu G pridružuje neku boju, ali tako da su susjedni vrhovi obojani različitim bojama. Drugim riječima, bojanje vrhova grafa G je zapravo particija skupa $V(G)$ takva da nikoja dva vrha koji pripadaju istom elementu particije nisu susjedni u G.

n-bojanje vrhova grafa je bojanje u kojemu je korišteno n različitih boja. Kažemo da je graf G **n-obojiv** ako dopušta bojanje s n različitih boja.

Napomena.

Graf G je n-obojiv ako i samo ako je pripadni jednostavni graf n-obojiv. Stoga je dovoljno da se kod bojanja vrhova grafa ograničimo samo na jednostavne grafove.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

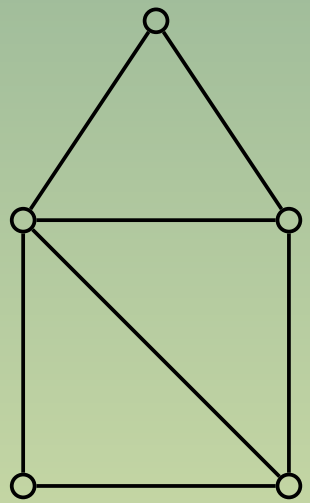
Kromatski broj grafa G je minimalni broj različitih boja potrebnih za bojanje vrhova grafa G. Kromatski broj grafa G označavamo s $\gamma(G)$.

Kromatski broj grafa G

$$\gamma(G) = \min\{n : G \text{ je } n\text{-obojiv}\}$$

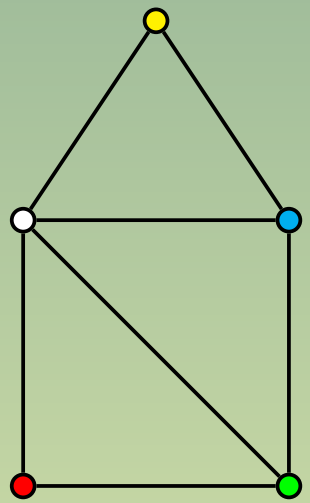
Ako je $\gamma(G) = n$, kažemo da je G **n-kromatski graf**.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



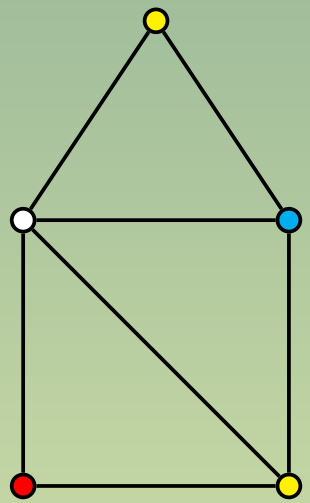
Promatrani graf nije k-obojiv za svaki prirodni broj $k \geqslant 6$ jer ima samo pet vrhova pa ne dopušta bojanje vrhova s više od pet različitih boja (u jednom bojanju vrhova).

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



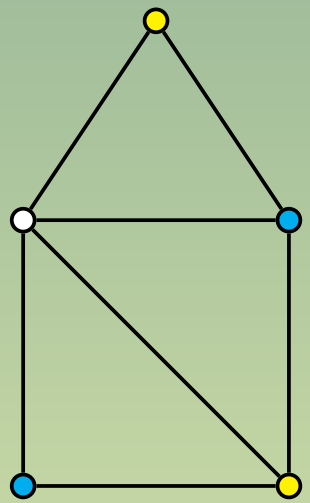
Na slici je prikazano jedno 5-bojanje vrhova zadanog grafa pa je promatrani graf 5-obojiv.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



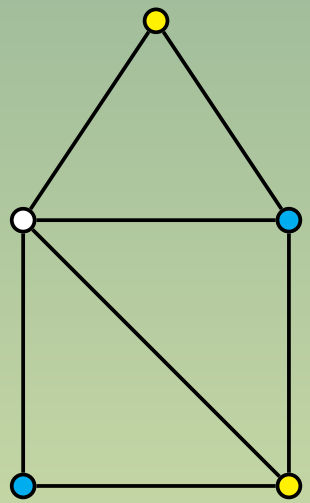
Na slici je prikazano jedno 4-bojanje vrhova zadanog grafa pa je promatrani graf 4-obojiv.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na slici je prikazano jedno 3-bojanje vrhova zadanog grafa pa je promatrani graf 3-obojiv.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Zadani graf nije 2-obojiv zato jer sadrži 3-cikluse, a za bojanje vrhova 3-ciklusa trebamo točno tri boje. Stoga je minimalni broj boja potreban za bojanje vrhova zadanog grafa G jednak 3 pa je kromatski broj zadanog grafa G jednak 3, tj. $\gamma(G) = 3$. Dakle, graf G je 3-kromatski graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.34.

Ako je $\gamma(G) = 1$, što možete reći o grafu G?

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.34.

Ako je $\gamma(G) = 1$, što možete reći o grafu G?

Rješenje.

Ako je $\gamma(G) = 1$, tada graf G dopušta 1-bojanje vrhova. U tom slučaju su svi vrhovi obojani istom bojom iz čega slijedi da u grafu G nikoja dva vrha nisu susjedna. Zaključujemo da je G prazan graf.

Vrijedi i obrnuto. Ako je G prazan graf, tada je $\gamma(G) = 1$. Dakle, jedini grafovi koji su 1-kromatski su prazni grafovi.

Jasno, svi gornji zaključci vrijede uz pretpostavku da G nema petlji. Općenitije bismo mogli reći da su jedini 1-kromatski grafovi prazni grafovi ili grafovi čiji skup bridova čine samo petlje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.35.

Odredite kromatski broj potpunog grafa K_n.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.35.

Odredite kromatski broj potpunog grafa K_n.

Rješenje.

Potpuni graf K_n ima n vrhova i svaka dva vrha su međusobno susjedni. Stoga je potrebno točno n različitih boja za bojanje vrhova grafa K_n pa je $\gamma(K_n) = n$.

Kromatski broj grafa K_n

$$\gamma(K_n) = n$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Propozicija 10.1.

Neka je G neprazni graf bez petlji. Graf G je bipartitni graf akko $\gamma(G) = 2$.

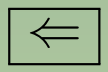
Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Neka je G bipartitni graf s biparticijom vrhova $V = \{X, Y\}$. Kako su svi vrhovi iz skupa X međusobno nesusjedni, obojamo ih crvenom bojom. Isto tako, kako su svi vrhovi iz skupa Y međusobno nesusjedni, obojamo ih plavom bojom. Na taj način dobivamo jedno 2-bojanje grafa G pa je $\gamma(G) \leqslant 2$. Nadalje, kako je G neprazni i bipartitni graf, tada u grafu G postoji barem jedan par susjednih vrhova pa je $\gamma(G) \geqslant 2$. Stoga je $\gamma(G) = 2$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Neka je G 2-kromatski graf. Pretpostavimo da su za bojanje vrhova korištene crvena i plava boja. Neka je X skup svih vrhova grafa G koji su obojani crvenom bojom, a Y skup svih vrhova grafa G koji su obojani plavom bojom. Tada je $\{X, Y\}$ jedna particija skupa vrhova grafa G. Nadalje, iz definicije bojanja grafa slijedi da nikoja dva različita vrha iz X nisu susjedni i nikoja dva različita vrha iz Y nisu susjedni. Kako G nema petlji, slijedi da je G bipartitni graf s biparticijom $\{X, Y\}$. ♡

Kromatski broj grafa $K_{m,n}$

$$\gamma(K_{m,n}) = 2$$

Teorem 10.9.

Za svaki graf G je $\gamma(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

Dokaz.

Dokaz provodimo indukcijom po broju vrhova grafa. Ako je $\nu(G) = 1$, tada je očito $\gamma(G) = 1$ pa u tom slučaju zbog $\Delta(G) \geqslant 0$ tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve grafove s k vrhova. Neka je G graf s $k+1$ vrhova. Odaberimo bilo koji vrh $v \in V(G)$ i promotrimo graf $G_0 = G - v$. Tada je jasno da je $\Delta(G_0) \leqslant \Delta(G)$. Vrhovi grafa G_0 se mogu obojati najmanje s $\gamma(G_0)$ boja. Kako graf G_0 ima k vrhova, prema pretpostavci indukcije je $\gamma(G_0) \leqslant \Delta(G_0) + 1 \leqslant \Delta(G) + 1$. Stoga se vrhovi od G_0 mogu obojati najviše s $\Delta(G) + 1$ boja. Kako je najviše $\Delta(G)$ vrhova susjedno s vrhom v u grafu G, barem jednom od $\Delta(G) + 1$ boja će se moći obojati i vrh v. Stoga je zaista $\gamma(G) \leqslant \Delta(G) + 1$. ♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Sljedeći teorem, kojeg navodimo bez dokaza, daje malo jaču tvrdnju prethodnog teorema.

Teorem 10.10 (Brooksov teorem).

Neka je G jednostavni i povezani graf koji nije potpun, niti je neparni ciklus. Tada je $\gamma(G) \leqslant \Delta(G)$.

Iz Brooksovog teorema slijedi da su jedini jednostavni i povezani grafovi za koje je $\gamma(G) = \Delta(G) + 1$ samo potpuni grafovi i ciklusi neparnih duljina. Za ostale jednostavne i povezane grafove vrijedi $\gamma(G) \leqslant \Delta(G)$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Kromatski broj ciklusa C_n

$$\gamma(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ 3, & \text{ako je } n \text{ neparan} \end{cases}$$

Primjer 10.36.

Neka je $\mathcal{T}$ stablo s n vrhova. Odredite kromatski broj stabla $\mathcal{T}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Kromatski broj ciklusa C_n

$$\gamma(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ 3, & \text{ako je } n \text{ neparan} \end{cases}$$

Primjer 10.36.

Neka je $\mathcal{T}$ stablo s n vrhova. Odredite kromatski broj stabla $\mathcal{T}$.

Rješenje.

Svako stablo je bipartitni graf pa je $\gamma(\mathcal{T}) \leqslant 2$. Ako je $n = 1$, tada je $\mathcal{T}$ prazno stablo (prazan graf s jednim vrhom) pa je $\gamma(\mathcal{T}) = 1$. Ako je $n \geqslant 2$, tada je $\gamma(\mathcal{T}) = 2$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Kažemo da je graf G **kritičan** ako je $\gamma(H) < \gamma(G)$ za svaki pravi podgraf H grafa G. **k-kritični** graf je graf koji je k-kromatski i kritični. Jasno je da svaki k-kromatski graf ima k-kritični podgraf.

Jednostavnije rečeno, graf G je kritičan ako se brisanjem bilo kojeg njegovog vrha ili brida smanjuje njegov kromatski broj, tj. za svaki $v \in V(G)$ i za svaki $e \in E(G)$ vrijedi

$$\gamma(G - v) < \gamma(G), \quad \gamma(G - e) < \gamma(G).$$

Tipični primjeri kritičnih grafova su neparni ciklusi i potpuni grafovi. Neparni ciklusi su 3-kritični grafovi, a potpuni graf K_n je n-kritični graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Propozicija 10.2.

Svaki kritični graf je povezan.

Dokaz.

Neka je G kritični graf i pretpostavimo da nije povezan. Neka su $G_1, G_2, \ldots, G_\omega$ komponente povezanosti grafa G pri čemu je $\omega \geqslant 2$. Neka je $\gamma_i = \gamma(G_i)$ za $i = 1, 2, \ldots, \omega$. Tada je

$$\gamma(G) = \max\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\omega\} = \gamma_t$$

za neki $t \in \{1, 2, \ldots, \omega\}$. Ako postoji više takvih t-ova, tada odaberemo bilo kojeg od njih. Komponenta povezanosti G_t je pravi podgraf grafa G i vrijedi

$$\gamma(G_t) = \gamma(G) \not< \gamma(G),$$

što je kontradikcija s pretpostavkom da je G kritični graf. Dakle, G mora biti povezan graf. ♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Propozicija 10.3.

Ako je G k-kritični graf, tada je $\delta(G) \geqslant k-1$.

Dokaz.

Pretpostavimo da je G k-kritični graf u kojemu je $\delta(G) < k-1$. Neka je $v \in V(G)$ za koji je $d(v) = \delta(G)$. Kako je G k-kritičan, slijedi da je graf $G - v$ $(k-1)$-obojiv. Neka je $V_1, V_2, \ldots, V_{k-1}$ $(k-1)$-bojanje od $G - v$. Kako je v susjedan s $\delta(G) < k-1$ vrhova u G, tada mora biti nesusjedan u G sa svim vrhovima iz nekog V_j. No, tada je $V_1, V_2, \ldots, V_j \cup \{v\}, \ldots, V_{k-1}$ jedno $(k-1)$-bojanje od G, što je nemoguće jer je $\gamma(G) = k$. Stoga je $\delta(G) \geqslant k-1$. ♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Korolar 10.6.

Ako je G k-kromatski graf, tada je barem k vrhova u G stupnja $\geqslant k-1$.

Dokaz.

Neka je G k-kromatski graf, a H k-kritični podgraf od G. Prema prethodnoj propoziciji, svaki vrh u H je barem stupnja $k-1$ u H pa onda i u G. No, kako je H k-kromatski, slijedi da je $\nu(H) \geqslant k$ pa tvrdnja slijedi. ♡

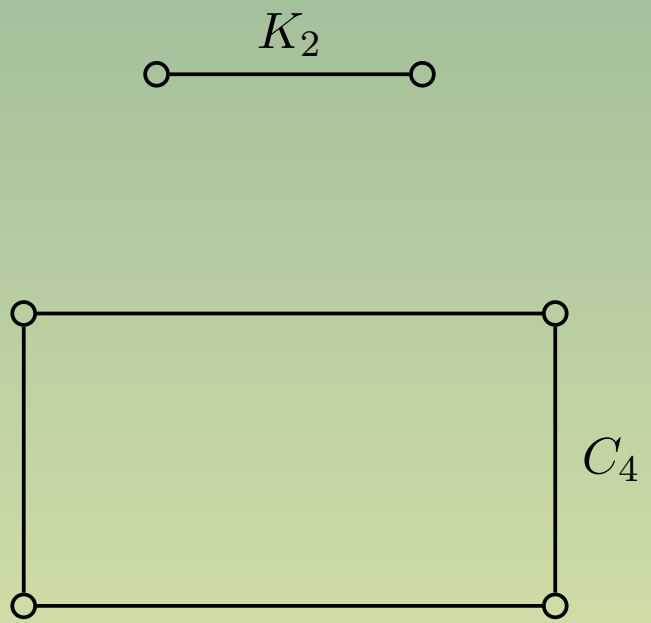
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Već smo prije spomenuli da su tipični primjeri kritičnih grafova neparni ciklusi i potpuni grafovi. Postavlja se pitanje kako doći do nekih drugih primjera kritičnih grafova.

Ovdje ćemo opisati jednu konstrukciju dobivanja novih kritičnih grafova iz već poznatih kritičnih grafova. U tu svrhu trebat će nam pojam spoja dva grafa.

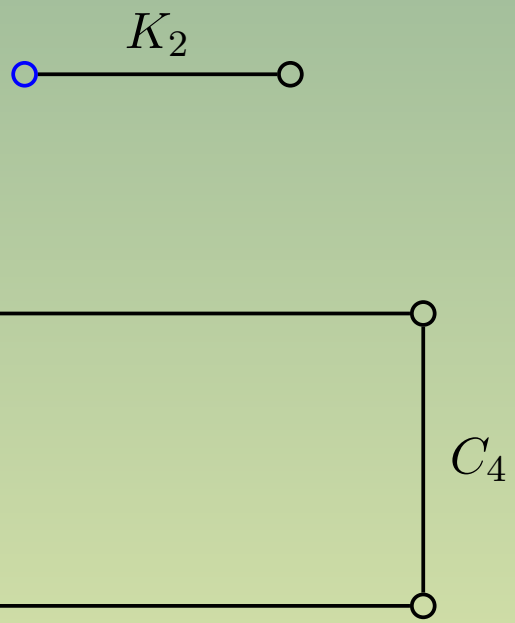
Spoj dva disjunktna grafa $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ je graf $G_1 \vee G_2$ kojemu je skup vrhova $V_1 \cup V_2$, a skup bridova je $E_1 \cup E_2 \cup \big\{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\big\}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



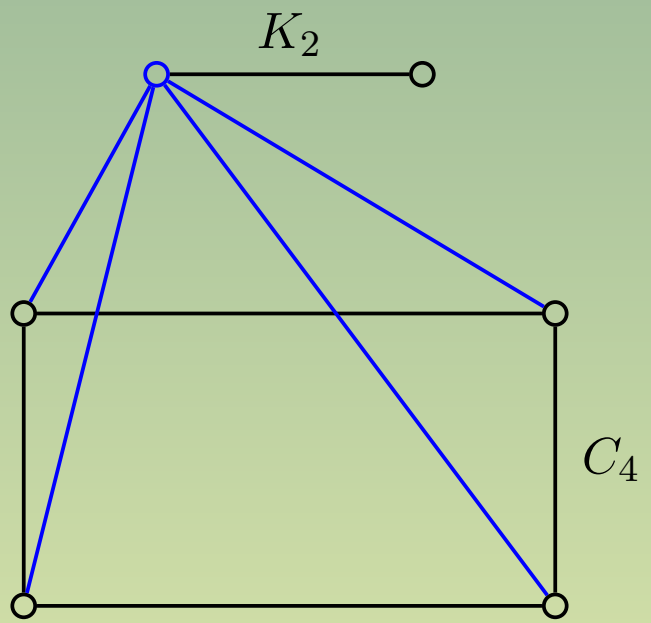
Nacrtajmo spoj $K_2 \vee C_4$ grafova K_2 i C_4. Grafu $K_2 \vee C_4$ pripadaju svi vrhovi i svi bridovi od K_2 i C_4 kojima još moramo dodati sve bridove čiji je jedan kraj u K_2, a drugi u C_4.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



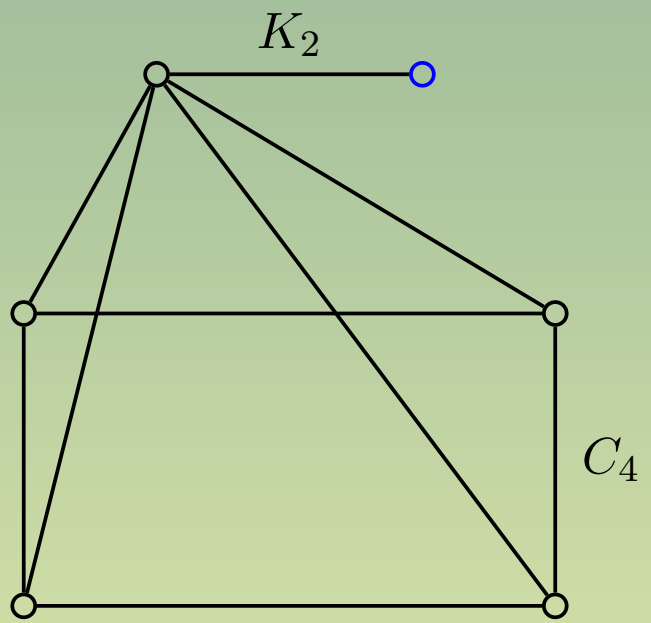
Spojimo plavi vrh iz K_2

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



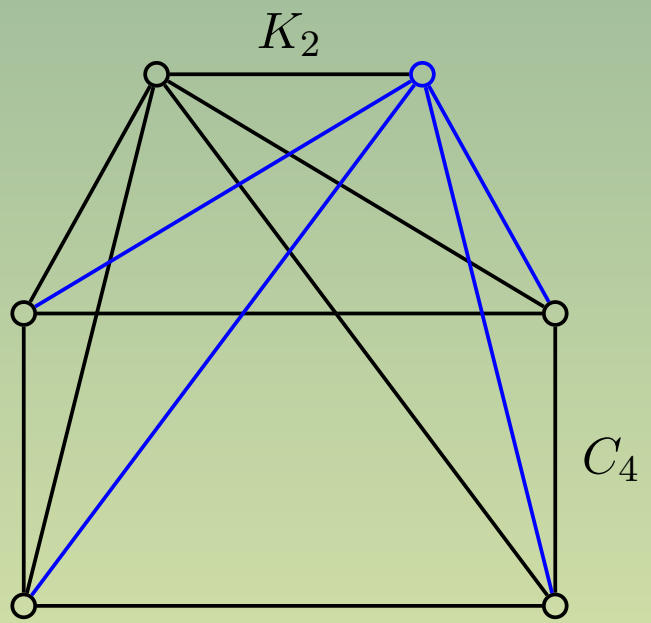
Spojimo plavi vrh iz K_2 sa svim vrhovima u C_4.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



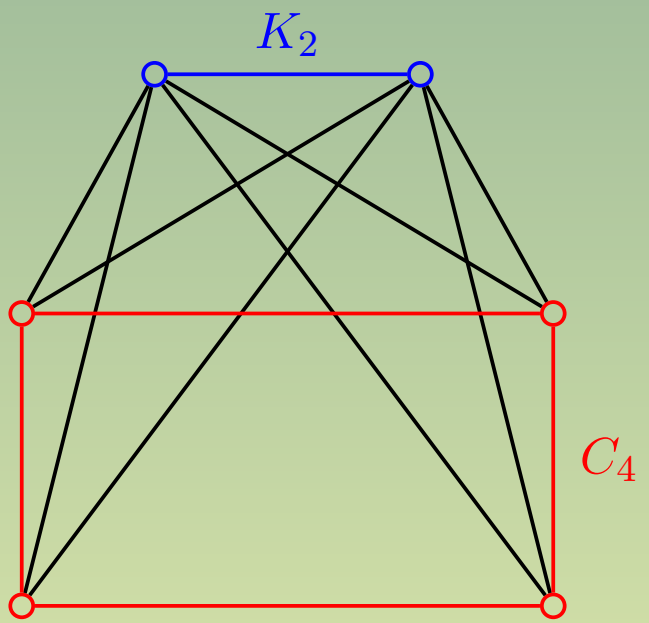
Spojimo i drugi plavi vrh iz K_2

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



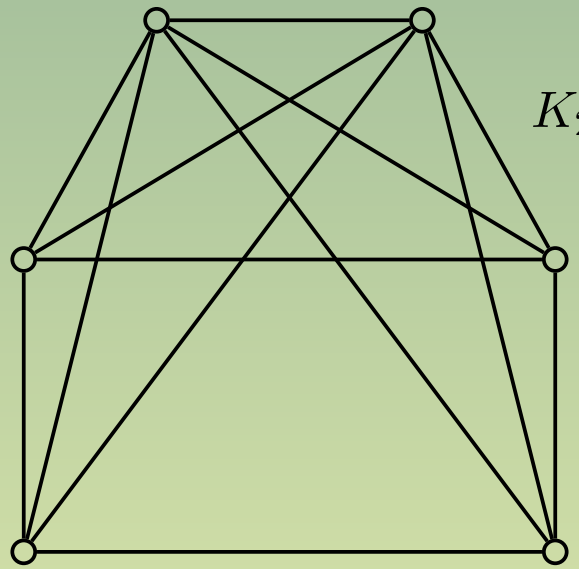
Spojimo i drugi plavi vrh iz K_2 sa svim vrhovima u C_4.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na taj način smo svaki vrh iz K_2 spojili sa svakim vrhom iz C_4

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na taj način smo svaki vrh iz K_2 spojili sa svakim vrhom iz C_4 pa smo dobili graf $K_2 \vee C_4$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Teorem 10.11.

Neka su G_1 i G_2 disjunktni grafovi. Tada je

$$\gamma(G_1 \vee G_2) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2).$$

Nadalje, $G_1 \vee G_2$ je kritični graf akko su G_1 i G_2 kritični grafovi.

Dokaz.

Kako je svaki vrh iz G_1 susjedan sa svakim vrhom iz G_2 u grafu $G_1 \vee G_2$, niti jedna boja koja je upotrijebljena za bojanje vrhova iz $V(G_1)$ ne može se upotrijebiti za bojanje vrhova iz $V(G_2)$ kod bojanja vrhova grafa $G_1 \vee G_2$. Za bojanje vrhova grafa G_1 potrebno je minimalno $\gamma(G_1)$ boja, a za bojanje vrhova grafa G_2 potrebno je minimalno $\gamma(G_2)$ boja. Iz svega navedenog slijedi da je $\gamma(G_1 \vee G_2) \geqslant \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$. Međutim, ako vrhove iz $V(G_1)$ obojamo s bojama $\{b_1, b_2, \ldots, b_{\gamma(G_1)}\}$, a vrhove iz $V(G_2)$ s

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

nekim drugim bojama $\{b'_1, b'_2, \ldots, b'_{\gamma(G_2)}\}$, dobivamo jedno $(\gamma(G_1) + \gamma(G_2))$-bojanje vrhova grafa $G_1 \vee G_2$. Zbog $\gamma(G_1 \vee G_2) \geqslant \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$ zaključujemo da mora biti $\gamma(G_1 \vee G_2) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$.

Dokažimo još i drugi dio teorema. Pretpostavimo da je $G_1 \vee G_2$ kritični graf. Tada se brisanjem bilo kojeg vrha ili brida u grafu $G_1 \vee G_2$ smanjuje njegov kromatski broj. Tvrdimo da su u tom slučaju G_1 i G_2 kritični grafovi. Pretpostavimo da smo izbrisali neki vrh ili brid koji pripada grafu G_1. Tim brisanjem se smanjuje kromatski broj grafa $G_1 \vee G_2$ jer je on po pretpostavci kritični graf. Zbog već dokazane relacije $\gamma(G_1 \vee G_2) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$ i definicije spoja dva grafa, kromatski broj grafa $G_1 \vee G_2$ se smanjio jedino ako se smanjio kromatski broj grafa G_1. Stoga je G_1 kritični graf. Iz istih razloga je G_2 također kritični graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Obrnuto, pretpostavimo da su G_1 i G_2 kritični grafovi. Tvrdimo da je tada i $G_1 \vee G_2$ kritični graf. Brisanjem bilo kojeg vrha u grafu $G_1 \vee G_2$ ili bilo kojeg brida koji pripada nekom od grafova G_1 i G_2, smanjuje se kromatski broj grafa $G_1 \vee G_2$ jer su G_1 i G_2 kritični grafovi. Jedino još preostaje pokazati da se i brisanjem bilo kojeg brida oblika $e = v_1v_2$, $v_1 \in V(G_1)$ i $v_2 \in V(G_2)$, također smanjuje kromatski broj grafa $G_1 \vee G_2$. Pretpostavimo da smo iz grafa $G_1 \vee G_2$ izbrisali jedan takav brid e. U tom slučaju su vrhovi v_1 i v_2 postali nesusjedni vrhovi u grafu $(G_1 \vee G_2) - e$. Kako je G_2 kritični graf, tada se graf $G_2 - v_2$ može obojati s minimalno $\gamma(G_2) - 1$ boja $\{b_1, b_2, \ldots, b_{\gamma(G_2)-1}\}$. Kako se vrhovi grafa G_2 mogu obojati minimalno s $\gamma(G_2)$ boja, vrh v_2 moramo obojati novom bojom $b_{\gamma(G_2)}$ i on je jedini vrh u G_2 obojan tom bojom. Bojom $b_{\gamma(G_2)}$ možemo obojati i vrh v_1 u grafu G_1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

U grafu $(G_1 \vee G_2) - e$, svi preostali vrhovi iz grafa G_1 (osim vrha v_1) su susjedni sa svim vrhovima iz grafa G_2 pa za njihovo bojanje trebamo novih $\gamma(G_1) - 1$ boja $\{b'_1, b'_2, \ldots, b'_{\gamma(G_1)-1}\}$ jer je G_1 kritični graf. Dakle, za bojanje vrhova grafa $(G_1 \vee G_2) - e$ koristili smo boje

$$\{b_1, b_2, \ldots, b_{\gamma(G_2)-1}, b_{\gamma(G_2)}, b'_1, b'_2, \ldots, b'_{\gamma(G_1)-1}\},$$

tj. ukupno $\gamma(G_1) + \gamma(G_2) - 1$ različitih boja. Zaključujemo da se brisanjem brida e smanjio kromatski broj grafa $G_1 \vee G_2$. Stoga je $G_1 \vee G_2$ kritični graf. ♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.37.

Nacrtajte jedan kritični graf sa šest vrhova koji nije potpun graf.

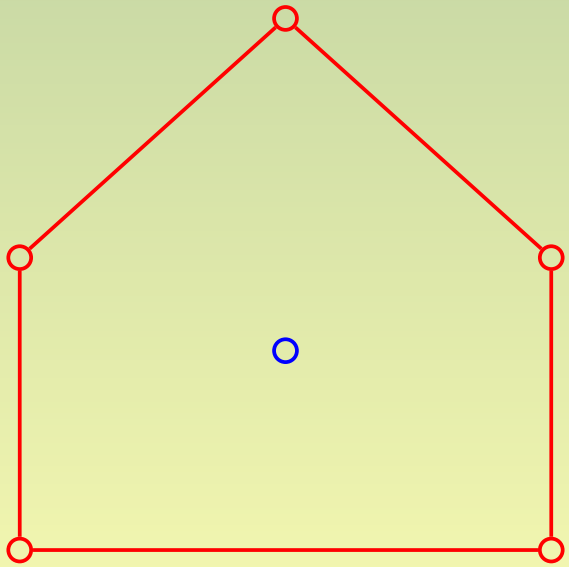
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.37.

Nacrtajte jedan kritični graf sa šest vrhova koji nije potpun graf.

Rješenje.

Ako uzmemo kritične grafove C_5 (crveni graf) i K_1 (plavi graf),



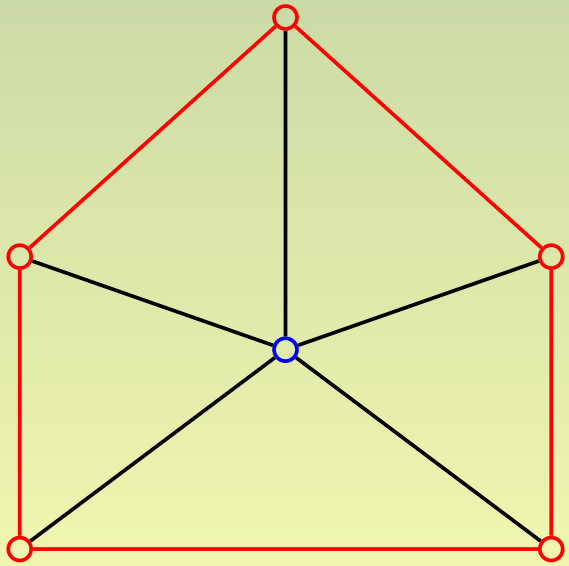
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.37.

Nacrtajte jedan kritični graf sa šest vrhova koji nije potpun graf.

Rješenje.

Ako uzmemo kritične grafove C_5 (crveni graf) i K_1 (plavi graf), tada je njihov spoj $C_5 \vee K_1$



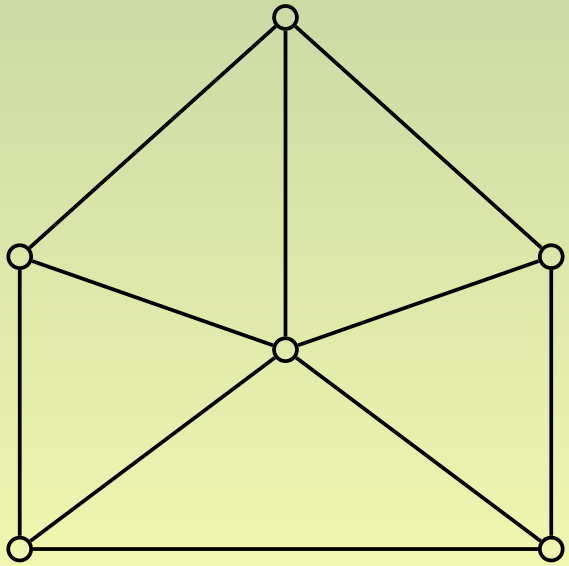
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.37.

Nacrtajte jedan kritični graf sa šest vrhova koji nije potpun graf.

Rješenje.

Ako uzmemo kritične grafove C_5 (crveni graf) i K_1 (plavi graf), tada je njihov spoj $C_5 \vee K_1$ prema ◂ teoremu 10.11. kritični graf koji ima šest vrhova i nije potpun graf.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.38.

Nacrtajte jedan kritični graf sa sedam vrhova koji nije potpun graf niti neparni ciklus.

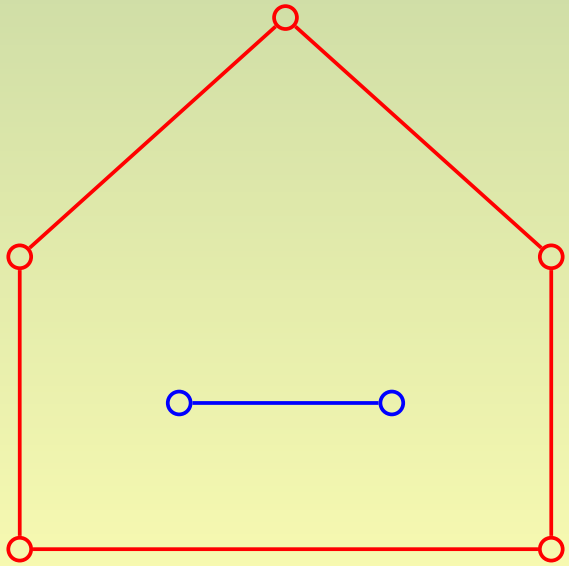
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.38.

Nacrtajte jedan kritični graf sa sedam vrhova koji nije potpun graf niti neparni ciklus.

Rješenje.

Ako uzmemo kritične grafove C_5 (crveni graf) i K_2 (plavi graf),



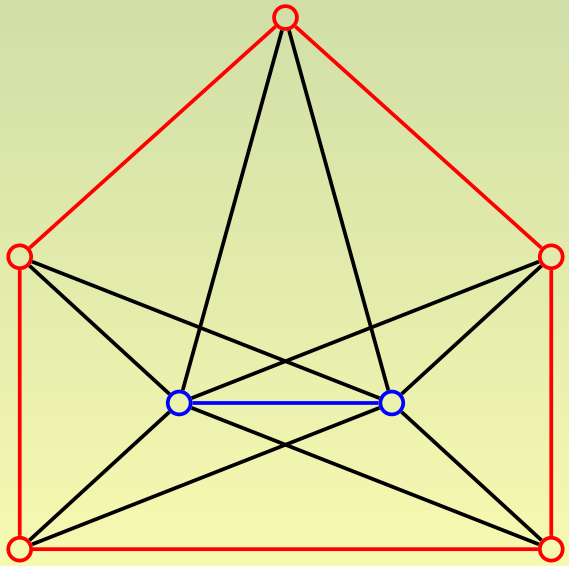
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.38.

Nacrtajte jedan kritični graf sa sedam vrhova koji nije potpun graf niti neparni ciklus.

Rješenje.

Ako uzmemo kritične grafove C_5 (crveni graf) i K_2 (plavi graf), tada je njihov spoj $C_5 \vee K_2$



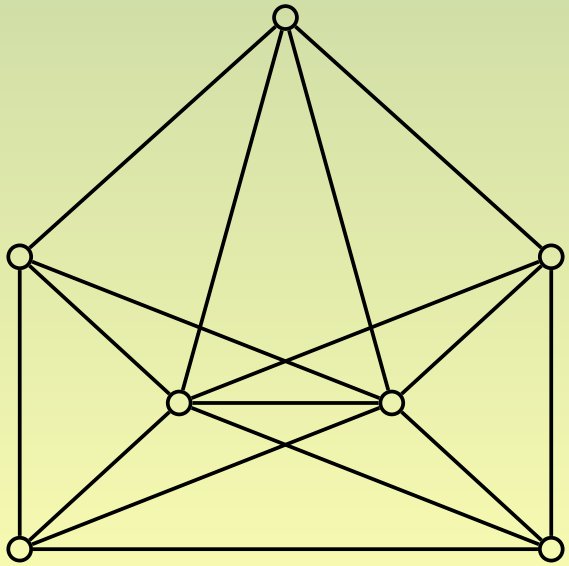
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.38.

Nacrtajte jedan kritični graf sa sedam vrhova koji nije potpun graf niti neparni ciklus.

Rješenje.

Ako uzmemo kritične grafove C_5 (crveni graf) i K_2 (plavi graf), tada je njihov spoj $C_5 \vee K_2$ prema ◂ teoremu 10.11. kritični graf koji ima sedam vrhova i nije potpun graf niti neparni ciklus.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Klika u jednostavnom grafu G je podskup S skupa vrhova $V(G)$ takav da je inducirani podgraf $G[S]$ potpuni graf.

Propozicija 10.4.

Neka je G jednostavni graf. Tada je

$$\gamma(G) \geqslant \max_{S \subseteq V(G)} \{k(S) : S \text{ je klika u } G\}.$$

Dokaz.

Zbog $\gamma(K_n) = n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, slijedi tvrdnja. ♡

Donja ograda za kromatski broj

Ako je K_r podgraf grafa G, tada je $\gamma(G) \geqslant r$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Napomena.

Ako je K_r podgraf grafa G, tada je $\gamma(G) \geqslant r$. Međutim, ako je $\gamma(G) = r$, graf G ne mora sadržavati podgraf izomorfan s K_r. Na primjer, $\gamma(C_5) = 3$, ali C_5 ne sadrži "trokute", tj. ne sadrži podgraf izomorfan s K_3. Općeniti protuprimjer grafa G za koji je $\gamma(G) = r > 3$, a da on ne sadrži podgraf izomorfan s K_r pogledajmo na sljedećem primjeru.

Primjer 10.39.

Neka je $r \geqslant 4$ prirodni broj. Neka je $G = K_{r-3} \vee C_5$. Dokažite da je $\gamma(G) = r$ i da graf G ne sadrži podgraf izomorfan s K_r.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Rješenje.

Prema ◂ teoremu 10.11. slijedi da je

$$\gamma(G) = \gamma(K_{r-3}) + \gamma(C_5) = (r-3) + 3 = r.$$

Nadalje, iz definicije spoja dva grafa slijedi da graf G nema podgraf izomorfan s K_r. Naime, graf G ima ukupno $(r-3)+5 = r+2$ vrha od kojih moramo uzeti barem 3 vrha iz C_5 za dobivanje podgrafa izomorfnog s K_r. Međutim, od ta tri vrha iz C_5 barem jedan par tih vrhova nisu međusobno susjedni pa ne možemo dobiti podgraf izomorfan s K_r.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Teoremi ◂ teoremu 10.9. i ◂ Brooksov teorem daju dosta grubu gornju ogradu za kromatski broj grafa. Naime, za graf G može broj $\Delta(G)$ biti jako veliki, a da ipak graf G ima mali kromatski broj. Na primjer, bipartitni graf G može imati jako veliki $\Delta(G)$, a znamo da je njegov kromatski broj jednak 2.

U slučaju planarnih grafova imamo sljedeću fenomenalnu gornju ogradu za kromatski broj planarnog grafa.

Teorem 10.12 (Teorem o četiri boje).

Svaki planarni graf je 4-obojiv, tj. za svaki planarni graf G je $\gamma(G) \leqslant 4$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Dokaz.

Ne brinite, nećemo se upuštati u dokaz tog teorema. Naime, dokaz je objavljen na 140 stranica u *Illinois Journal of Mathematics*. Za njega je trebalo 1200 sati rada računala pa nije baš onaj "pravi" dokaz kakvog vole matematičari. ♡





No, ne trebamo tugovati jer možemo ipak na elegantan način dokazati teorem o pet boja.

Teorem 10.13 (Kempe, Heawood).

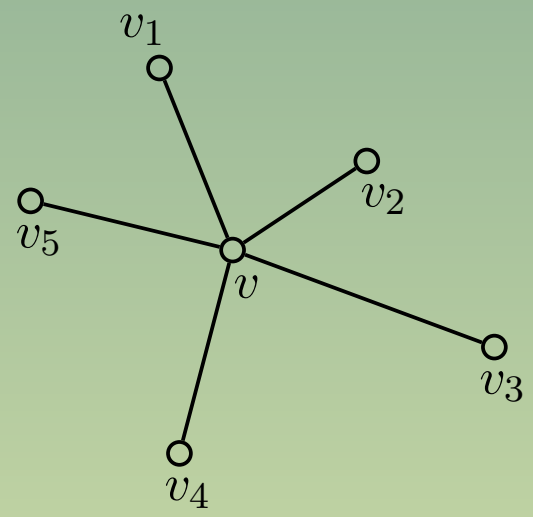
Za svaki planarni graf G je $\gamma(G) \leqslant 5$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Dokaz.

Dokaz provodimo indukcijom po broju vrhova ν. Ako je $\nu = 1$, tada tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve planarne grafove s k vrhova. Neka je G planarni graf s $k+1$ vrhova. Prema ◂ korolaru 10.4. svaki planarni graf mora imati barem jedan vrh stupnja najviše 5. Neka je $v \in V(G)$ takav vrh i promotrimo graf $G_0 = G - v$. Prema pretpostavci indukcije, graf G_0 je 5-obojiv. Označimo boje s brojevima $1, 2, 3, 4, 5$. Ako neka od tih boja nije iskorištena za bojanje susjednih vrhova vrha v, tada možemo tom bojom obojati vrh v iz čega slijedi da je G 5-obojiv. Pretpostavimo stoga da je $d_G(v) = 5$ i da je svih pet boja iskorišteno za bojanje susjednih vrhova vrha v. Označimo susjedne vrhove vrha v, u smjeru kazaljke na satu, s v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 i neka je vrh v_i obojan s bojom i. Želimo pokazati da je moguće promijeniti boje vrhovima iz G_0 tako da jedna od boja $1, 2, 3, 4, 5$ postane dostupna za vrh v. Razlikujemo dva slučaja.

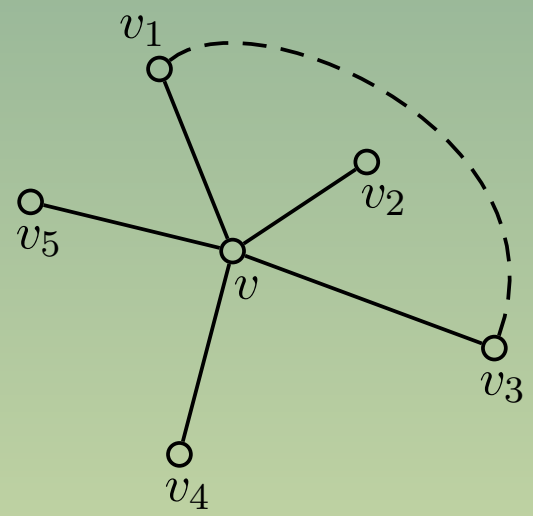
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



1. slučaj: Ne postoji put u G_0 od v_1 do v_3 kroz vrhove koji su obojani samo bojama 1 i 3.

Neka je $\mathcal{H}$ podgraf od G_0 koji se sastoji od vrhova i bridova svih putova kroz vrhove obojane bojama 1 i 3 koji počinju u vrhu v_1. Po pretpostavci vrh v_3 nije u $\mathcal{H}$. Nadalje, svaki vrh koji nije u $\mathcal{H}$, ali je susjedan s nekim vrhom u $\mathcal{H}$, nije obojan niti jednom od boja 1 i 3. Stoga, ako vrhovima unutar $\mathcal{H}$ zamijenimo međusobno boje 1 i 3, dobit ćemo novo 5-bojanje grafa G_0. Međutim, u tom novom bojanju, boja 1 je postala dostupna za vrh v pa ako bojom 1 obojimo vrh v, dobit ćemo 5-bojanje grafa G.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



2. slučaj: Postoji put $\mathcal{P}$ u G_0 od v_1 do v_3 kroz vrhove koji su obojani samo bojama 1 i 3.

Ako putu $\mathcal{P}$ dodamo bridove v_3v i vv_1, dobivamo ciklus u G pri čemu je jedan od vrhova v_2 i v_4 unutar tog ciklusa, a drugi je izvan tog ciklusa (uz pretpostavku da imamo ravninsko smještenje od G). Dakle, svaki put od v_2 do v_4 mora sijeći taj ciklus, a kako je G ravninski graf, taj presjek se mora dogoditi u nekom vrhu tog ciklusa. Zaključujemo da unutar G_0 ne postoji put od v_2 do v_4 čiji vrhovi bi bili obojani samo bojama 2 i 4. Na taj način se nalazimo u 1. slučaju za vrhove v_2 i v_4 za koji smo već pokazali da je tada moguće napraviti 5-bojanje grafa G. ♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Još ćemo navesti nekoliko ocjena za gornju ogradu kromatskog broja grafa koje mogu pomoći kod određivanja kromatskog broja nekog zadanog grafa.

Teorem 10.14.

Neka je G jednostavni graf. Ako K_r nije podgraf grafa G za neki $4 \leqslant r \leqslant \Delta(G)+1$, tada vrijedi

$$\gamma(G) \leqslant \frac{r-1}{r}\left(\Delta(G)+2\right).$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Za graf G kažemo da je **k-degenerirani** ako svaki podgraf od G sadrži vrh stupnja $\leqslant k$. k-degenerirani grafovi se uzastopnim brisanjem vrhova stupnja $\leqslant k$ u dobivenim podgrafovima mogu svesti na K_1. Iz definicije slijedi da ako je G k-degenerirani graf, tada je G l-degenerirani graf za svaki prirodni broj $l \geqslant k$. Jasno, od interesa nam je za zadani graf G pronaći najmanji prirodni broj k za koji je graf G k-degenerirani i očito za taj minimalni k vrijedi $k \leqslant \Delta(G)$.

Lema 10.3.

Za svaki k-degenerirani graf G vrijedi $\gamma(G) \leqslant k + 1$.

Dokaz.

Dokaz provodimo indukcijom po broju vrhova grafa. Ako je $\nu = 1$, tada je $\gamma(G) = 1$ pa sigurno vrijedi $\gamma(G) \leqslant k + 1$ jer je $k \geqslant 0$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Pretpostavimo da za svaki k-degenerirani graf G s $\nu = n$ vrhova vrijedi $\gamma(G) \leqslant k + 1$. Neka je G k-degenerirani graf s $\nu = n + 1$ vrhova. Tada graf G sadrži vrh v_0 stupnja $\leqslant k$. Promotrimo graf $G_0 = G - v_0$. Kako je G_0 podgraf k-degeneriranog grafa G, tada je i G_0 k-degenerirani graf. Kako G_0 ima n vrhova, po pretpostavci indukcije je $\gamma(G_0) \leqslant k + 1$. Nadalje, zbog $d_G(v_0) \leqslant k$, vrh v_0 je susjedan s najviše k vrhova iz G_0, pa zaključujemo da je za bojanje vrhova grafa G također dovoljno $k + 1$ boja. Stoga je $\gamma(G) \leqslant k + 1$. ♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Teorem 10.15 (Stacho, 2002.).

Neka je V_i skup svih vrhova stupnja i u jednostavnom grafu G. Neka je $s = \max_{i \geqslant \frac{\Delta(G)+2}{2}} k(V_i)$. Tada je $\gamma(G) \leqslant \left\lceil \frac{s}{s+1}(\Delta(G)+2) \right\rceil$.

Dokaz.

Neka je $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_\nu$ niz stupnjeva vrhova grafa G i neka je

$$k = \left\lceil \frac{s}{s+1}(\Delta(G)+2) \right\rceil.$$

Tvrdimo da je $d_k < k$. Ako je $d_k < \frac{\Delta(G)+2}{2}$, tada zbog $s \geqslant 1$ je $0 < \frac{s}{s+1} < 1$ pa slijedi

$$d_k < \frac{\Delta(G)+2}{2} < \Delta(G)+2 < \frac{s}{s+1}(\Delta(G)+2) \leqslant \left\lceil \frac{s}{s+1}(\Delta(G)+2) \right\rceil = k.$$

Dakle, u slučaju $d_k < \frac{\Delta(G)+2}{2}$ je $d_k < k$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Pretpostavimo stoga da je $d_k \geqslant \frac{\Delta(G)+2}{2}$. Iz definicije broja s slijedi da se u najgorem slučaju stupnjevi vrhova koji su $\geqslant \frac{\Delta(G)+2}{2}$ nakon svakih s koraka smanjuju barem za jedan. Stoga je za svaki $i = 1, 2, \ldots, k$

$$d_i \leqslant \Delta(G) - \left\lceil \frac{i}{s} \right\rceil + 1,$$

a zbog $\left\lceil \frac{i}{s} \right\rceil \geqslant \frac{i}{s}$ i $1 < 2$ slijedi

$$d_i < \Delta(G) - \frac{i}{s} + 2.$$

Specijalno, za $i = k$ vrijedi

$$d_k < \Delta(G) - \frac{k}{s} + 2.$$

Uvrstimo li u desnu stranu definiciju broja k, dobivamo

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

$$d_k < \Delta(G) - \frac{k}{s} + 2 = \Delta(G) - \frac{1}{s}\left\lceil \frac{s}{s+1}(\Delta(G)+2)\right\rceil + 2 \leqslant$$

$$\leqslant \Delta(G) - \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{s+1}(\Delta(G)+2) + 2 =$$

$$= \Delta(G) - \frac{1}{s+1}(\Delta(G)+2) + 2 =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{s+1}\right)\left(\Delta(G)+2\right) = \frac{s}{s+1}\left(\Delta(G)+2\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left\lceil \frac{s}{s+1}(\Delta(G)+2)\right\rceil = k$$

Zaključujemo da je i u slučaju $d_k \geqslant \frac{\Delta(G)+2}{2}$ također $d_k < k$. Dakle, u svakom slučaju je $d_k < k$. Tvrdimo da je G $(k-1)$-degenerirani graf. Trebamo dokazati da svaki podgraf od G ima vrh stupnja $\leqslant k-1$. Neka je H proizvoljni podgraf od G. Ukoliko H sadrži barem jedan od vrhova $v_k, v_{k+1}, \ldots, v_\nu$, tada zbog $d_k < k$ i $d_k \geqslant d_{k+1} \geqslant \cdots \geqslant d_\nu$ slijedi da H sadrži vrh stupnja $\leqslant k-1$. U protivnom, H sadrži samo neke od vrhova

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

$v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$. U najgorem slučaju, ako H sadrži sve vrhove $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$, tada je stupanj svakog od tih vrhova u podgrafu H najviše $k-2$ jer je G jednostavni graf. Zaključujemo da u ovom slučaju podgraf H također sadrži vrh stupnja $\leqslant k-1$ pa je G zaista $(k-1)$-degenerirani graf. Prema prethodnoj lemi je tada $\gamma(G) \leqslant k$, čime je dokazana tvrdnja teorema. ♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Do sada smo spomenuli nekoliko teorema koji daju gornju ogradu za kromatski broj grafa. U konkretnoj situaciji želimo pronaći neko bojanje vrhova grafa G s minimalnim brojem boja. Međutim, to je jako težak problem, tj. ne postoji polinomijalni algoritam za rješavanje tog problema osim u slučaju bipartitnih grafova.

Na malenim grafovima možemo primijeniti grubu silu za traženje nekog k-bojanja vrhova grafa G i računanje njegovog kromatskog broja. U tom slučaju imamo ukupno k^ν mogućih pridruživanja k različitih boja vrhovima grafa. Za svako pridruživanje moramo provjeriti da li je pravilno, tj. da li su susjednim vrhovima pridružene različite boje. Čim naiđemo na takvo pridruživanje, dobili smo jedno k-bojanje vrhova grafa G. Ukoliko takvog pridruživanja nema, zaključujemo da graf G nije k-obojiv.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Za računanje kromatskog broja grafa primijenimo opisani postupak za $k = 1, 2, \ldots, \nu - 1$. Dakle, najprije se vrhovi grafa pokušaju obojati s jednom bojom. Ako nam to uspije, tada je kromatski broj grafa jednak jedan. U protivnom povećamo broj boja na dva i pokušamo obojati vrhove grafa s dvije boje. Ako uspijemo, kromatski broj grafa je jednak dva, a u protivnom povećamo broj boja na tri i nastavimo dalje postupak bojanja tako dugo dok ne naletimo na prvi k za kojeg je graf G k-obojiv. Tada je kromatski broj grafa G jednak k.

Opisani algoritam se izvršava u eksponencijalnom vremenu s obzirom na broj vrhova grafa i neprimjenjiv je na grafovima s puno vrhova i bridova. Kod ručnog računanja kromatskog broja nekog malog grafa najčešće primijenjujemo ad hoc metode. U tom slučaju za neki k nećemo prolaziti kroz svih k^ν mogućnosti, nego ćemo postupati na sljedeći način.

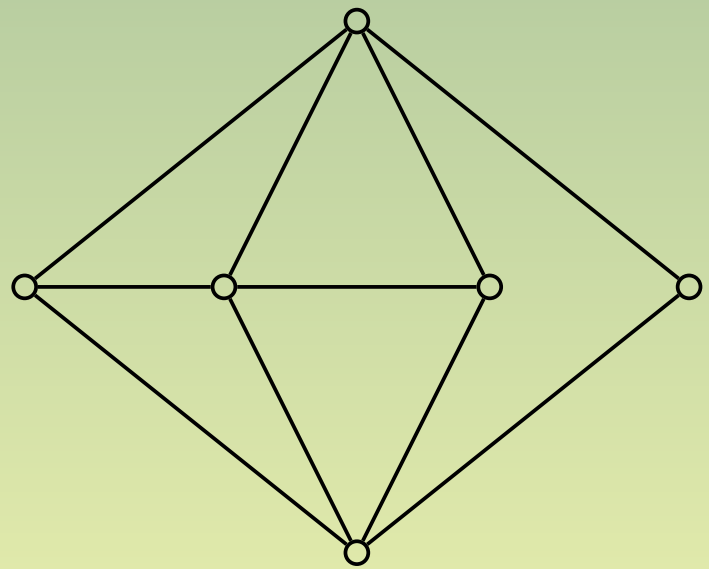
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Najprije obojamo vrhove grafa sa što je moguće manje boja. Nakon toga moramo dokazati da smo zaista koristili minimalni broj boja, tj. da ne postoji bojanje vrhova s manjim brojem boja od broja boja u našem konkretnom bojanju. Pritom koristimo do sada spomenute teoreme, kromatske brojeve nekih standardnih grafova i razne ad hoc metode. Nema nekog univerzalnog recepta, sve ovisi o samoj unutrašnjoj strukturi zadanog grafa. Najčešći argument na kojeg se pozivamo da je naše bojanje s r boja minimalno, jest da pronađemo podgraf K_r u grafu G. Nadalje, svjesni smo činjenice da to ne mora uvijek biti tako, ali u velikoj većini tipičnih zadataka taj argument prolazi. Ukoliko ipak ne uspijemo dokazati da smo koristili minimalni broj boja, tada trebamo pokušati pronaći novo bojanje s manjim brojem boja. Ako nam to ne uspijeva, tada ipak postoji neki razlog da je početno bojanje bilo minimalno, samo trebamo biti uporni i pronaći taj razlog.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.40.

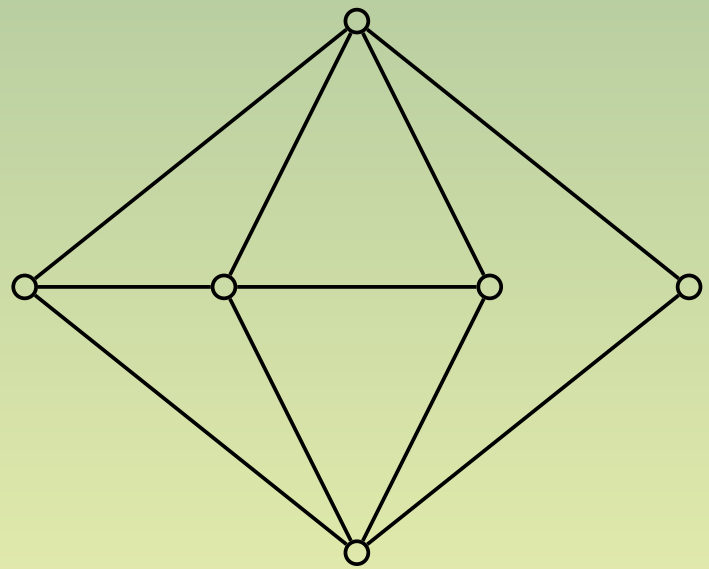
Odredite kromatski broj grafa G i pronađite jedno bojanje njegovih vrhova s minimalnim brojem boja. Da li je G kritični graf?



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.40.

Odredite kromatski broj grafa G i pronađite jedno bojanje njegovih vrhova s minimalnim brojem boja. Da li je G kritični graf?



Rješenje.

Kako je graf G planarni graf, prema ◂ teoremu 10.12. je $\gamma(G) \leqslant 4$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

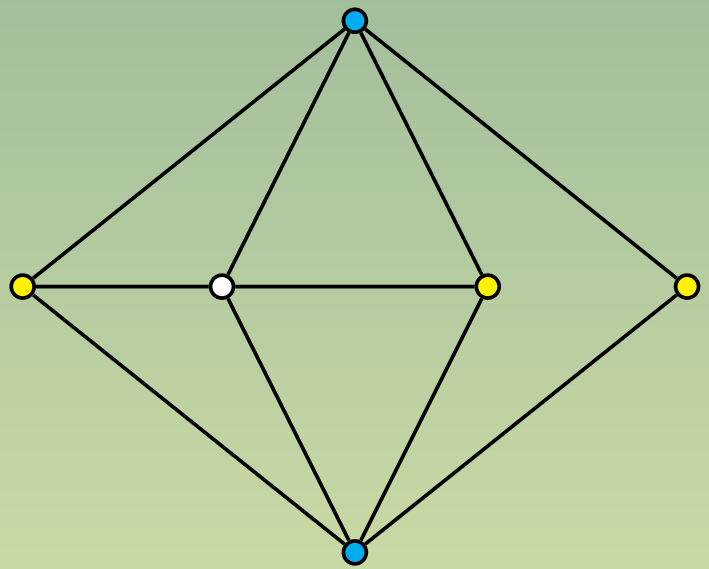
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

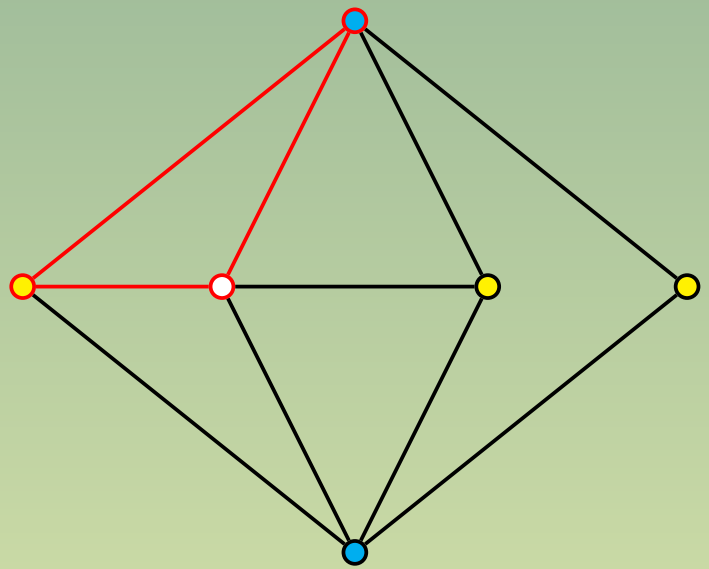
Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



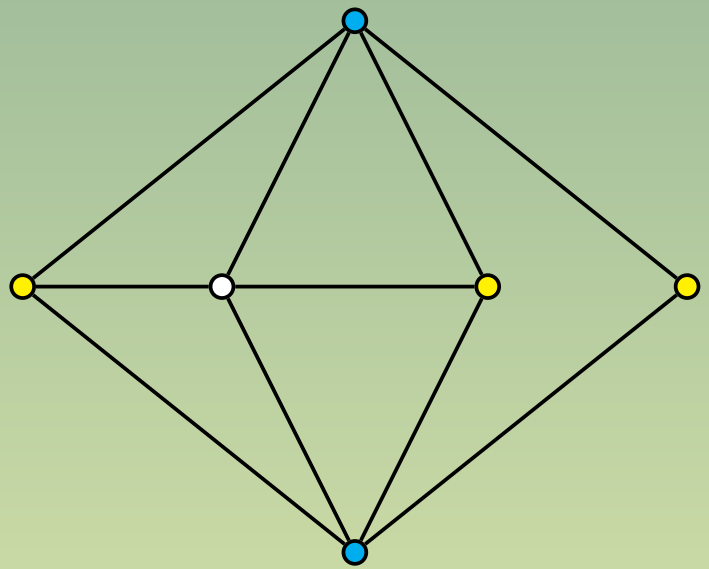
Na gornjoj slici je prikazano jedno 3-bojanje vrhova grafa G. To je ujedno i bojanje s minimalnim brojem boja

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



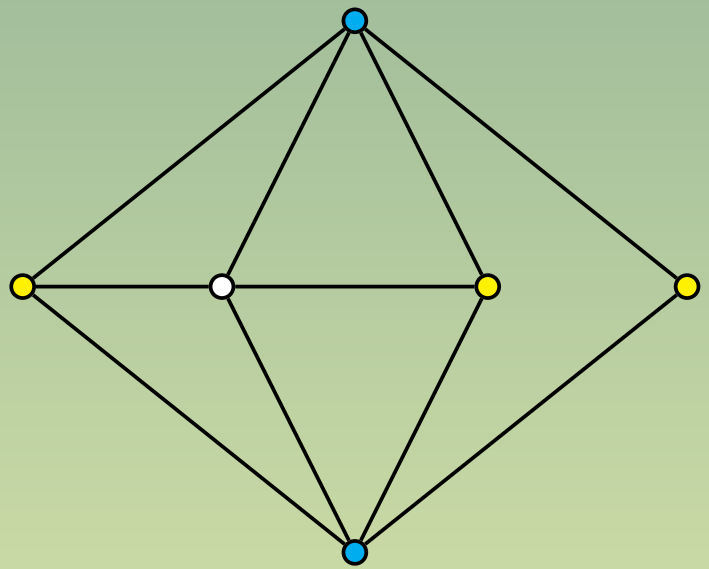
Na gornjoj slici je prikazano jedno 3-bojanje vrhova grafa G. To je ujedno i bojanje s minimalnim brojem boja jer graf G sadrži podgraf izomorfan s K_3. Na slici je prikazan jedan takav crveni podgraf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



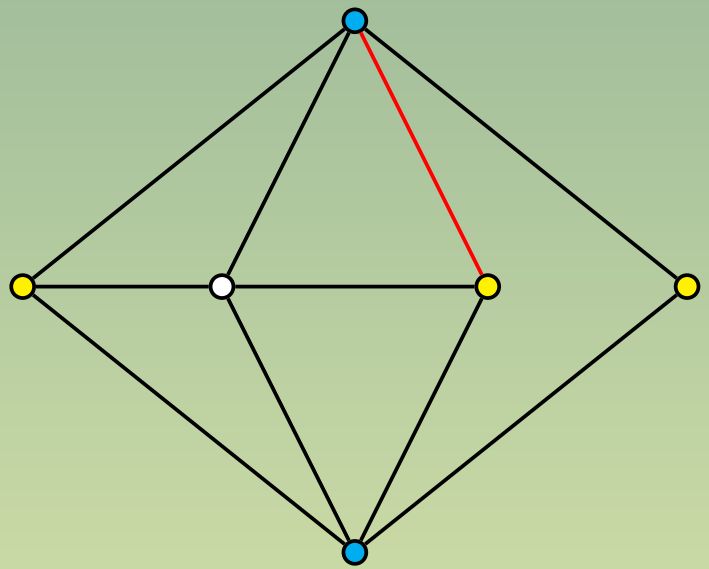
Stoga je $\gamma(G) = 3$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



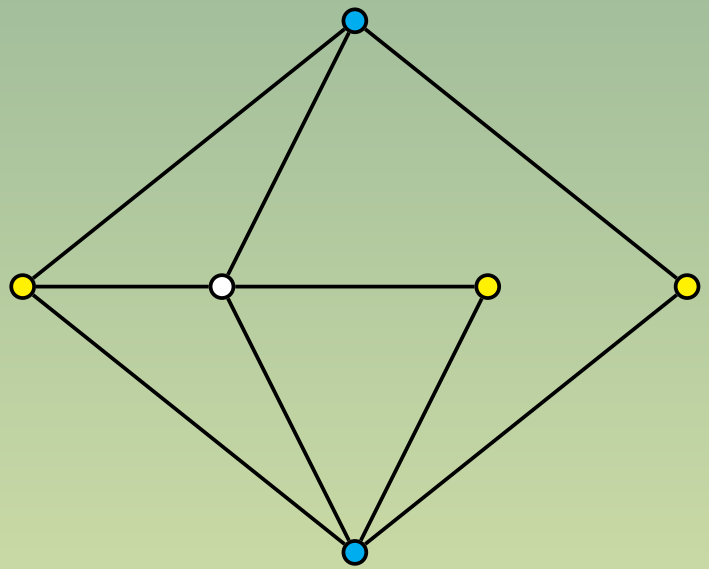
Stoga je $\gamma(G) = 3$. Nadalje, da bi graf G bio kritični, svaki njegov pravi podgraf mora imati kromatski broj < 3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



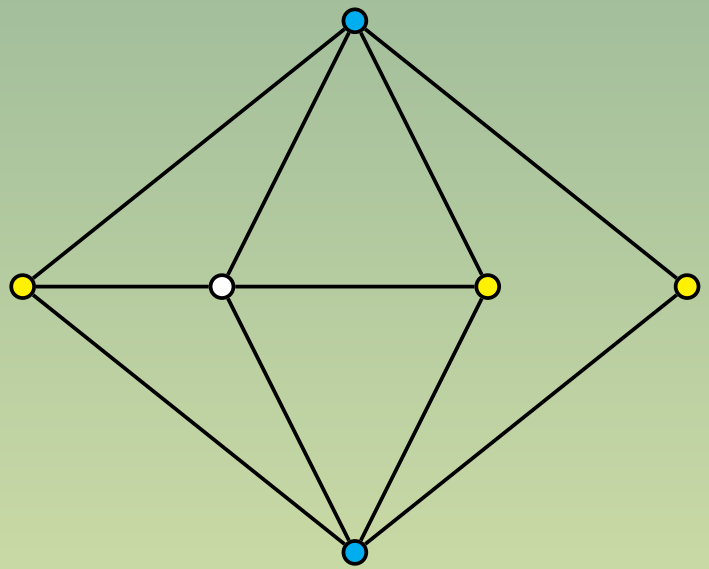
Stoga je $\gamma(G) = 3$. Nadalje, da bi graf G bio kritični, svaki njegov pravi podgraf mora imati kromatski broj < 3. No, ako uklonimo iz grafa G crveni brid,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Stoga je $\gamma(G) = 3$. Nadalje, da bi graf G bio kritični, svaki njegov pravi podgraf mora imati kromatski broj < 3. No, ako uklonimo iz grafa G crveni brid, dobivamo podgraf od G kojemu je kromatski broj i dalje jednak 3 jer taj podgraf također sadrži podgrafove izomorfne s K_3. Stoga G nije kritični graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

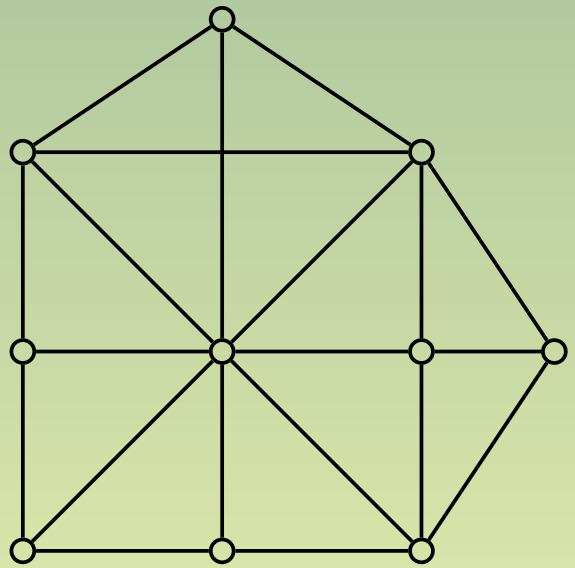


Dakle, $\gamma(G) = 3$ i na slici je prikazano jedno bojanje vrhova grafa G s minimalnim brojem boja. Nadalje, G nije kritični graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.41.

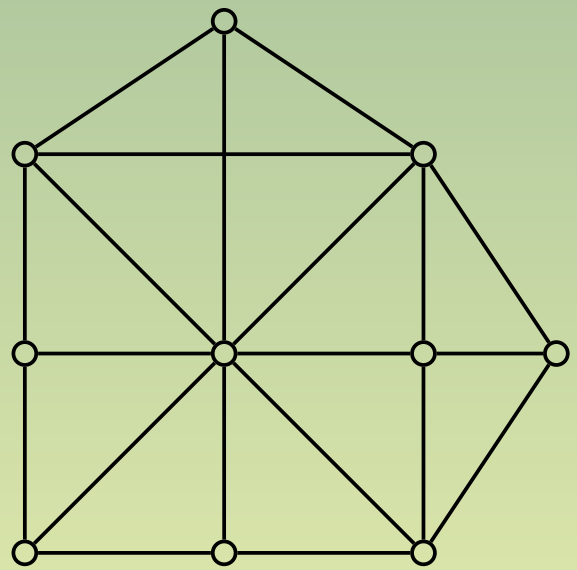
Odredite kromatski broj grafa G i pronađite jedno bojanje njegovih vrhova s minimalnim brojem boja.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.41.

Odredite kromatski broj grafa G i pronađite jedno bojanje njegovih vrhova s minimalnim brojem boja.



Rješenje.

U ovom zadatku ćemo pokazati primjenu ◂ teorema 10.14. i ◂ teorema 10.15. za određivanje gornje ograde kromatskog broja grafa. Vidjet ćemo da u ovom slučaju ◂ teorem 10.15. daje znatno bolju gornju ogradu.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

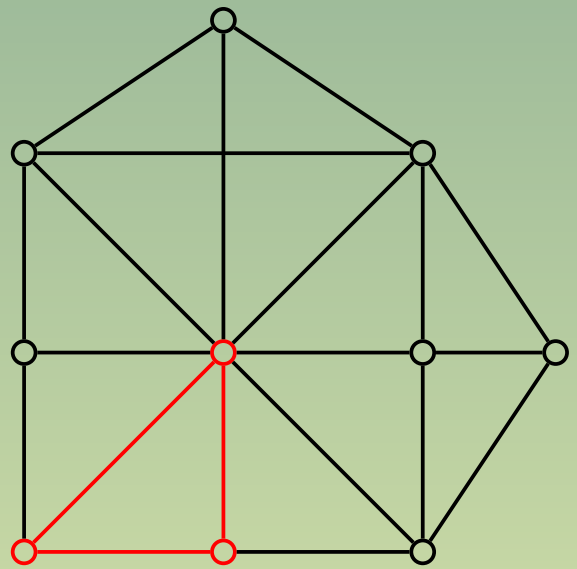
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

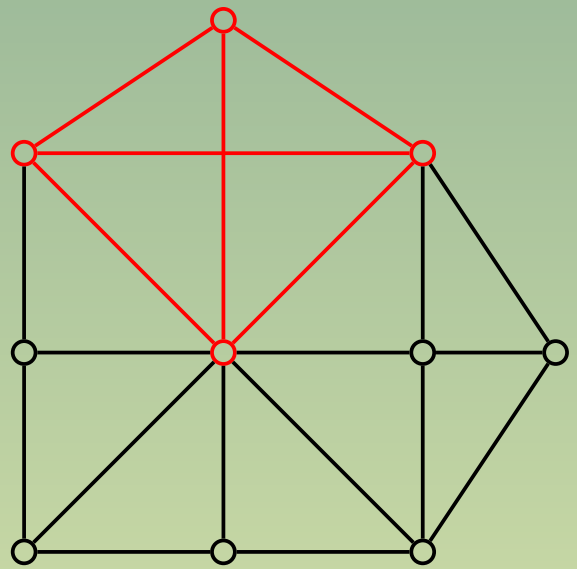
Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



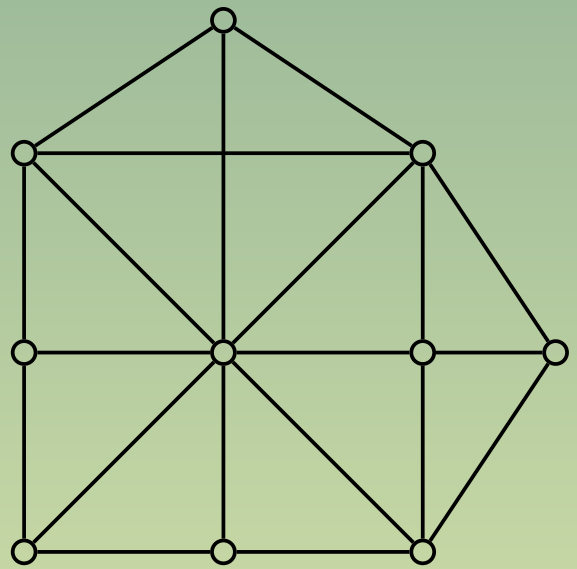
Graf G sadrži podgraf izomorfan s K_3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



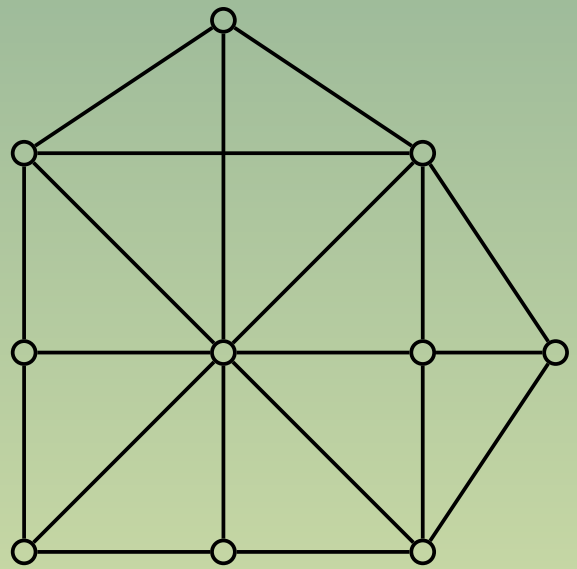
Graf G sadrži podgraf izomorfan s K_3. Graf G sadrži podgraf izomorfan s K_4.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



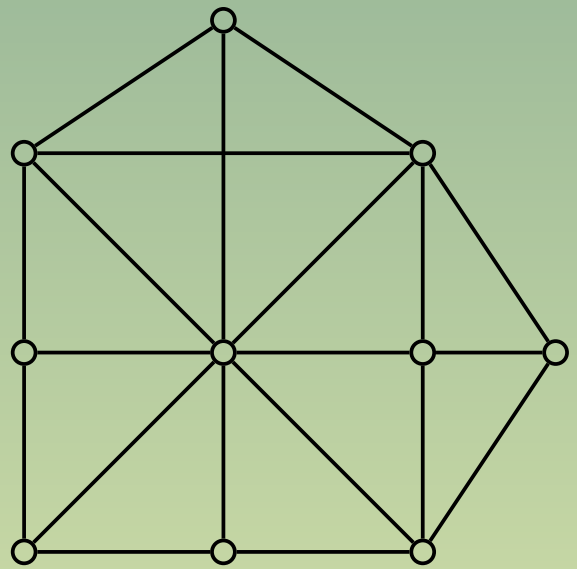
Graf G sadrži podgraf izomorfan s K_3. Graf G sadrži podgraf izomorfan s K_4. Pažljivim promatranjem grafa G možemo uočiti da on ne sadrži podgrafove izomorfne s K_5.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Graf G sadrži podgraf izomorfan s K_3. Graf G sadrži podgraf izomorfan s K_4. Pažljivim promatranjem grafa G možemo uočiti da on ne sadrži podgrafove izomorfne s K_5. Stoga prema ◂ teoremu 10.14. za $r = 5$ i $\Delta(G) = 8$ dobivamo $\gamma(G) \leqslant \frac{5-1}{5} \cdot (8+2)$, tj. $\gamma(G) \leqslant 8$.

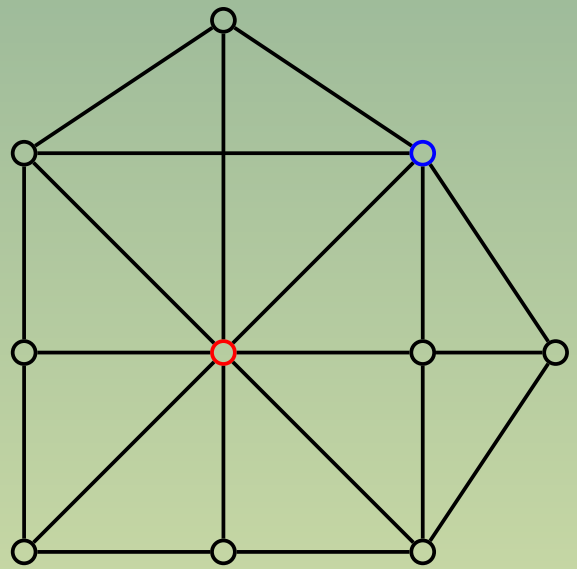
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Pronađimo sada gornju ogradu za $\gamma(G)$ pomoću ◂ teorema 10.15..
Najprije moramo izračunati veličinu s. Zbog $\Delta(G) = 8$ slijedi

$$s = \max_{i \geqslant \frac{\Delta(G)+2}{2}} k(V_i) = \max_{i \geqslant 5} k(V_i).$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

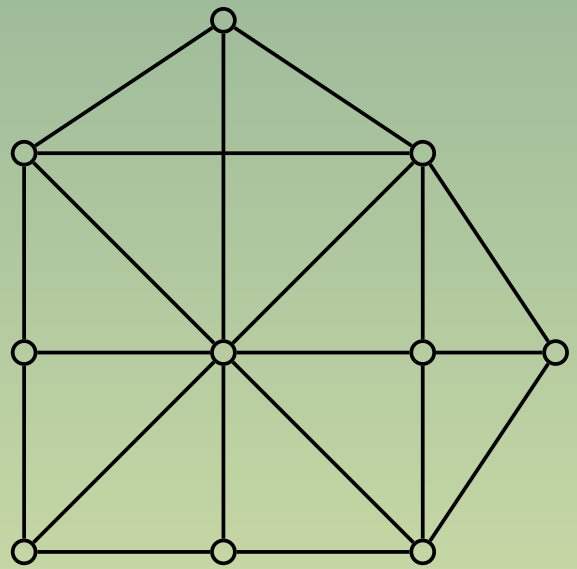


Pronađimo sada gornju ogradu za $\gamma(G)$ pomoću ◂ teorema 10.15.. Najprije moramo izračunati veličinu s. Zbog $\Delta(G) = 8$ slijedi

$$s = \max_{i \geqslant \frac{\Delta(G)+2}{2}} k(V_i) = \max_{i \geqslant 5} k(V_i).$$

Jedini vrhovi u grafu G stupnja $\geqslant 5$ su plavi vrh stupnja 5 i crveni vrh stupnja 8. Stoga dobivamo $k(V_5) = 1$, $k(V_6) = 0$, $k(V_7) = 0$, $k(V_8) = 1$ pa je $s = \max\{1, 0, 0, 1\} = 1$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

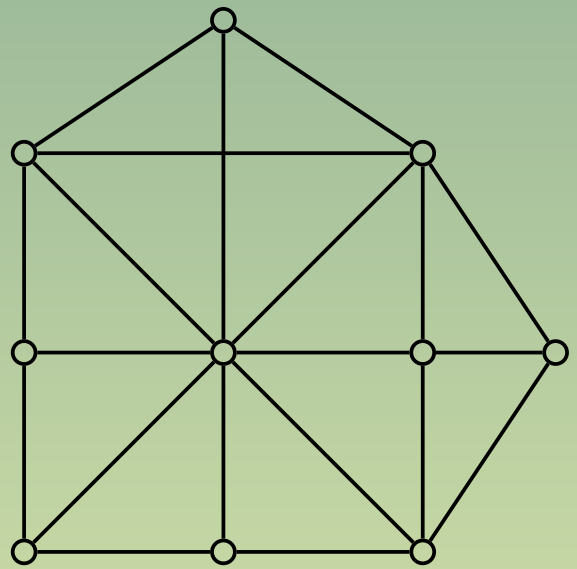


Prema teoremu 10.15. zbog $s = 1$ i $\Delta(G) = 8$ dobivamo

$$\gamma(G) \leqslant \left\lceil \frac{1}{1+1} \cdot (8+2) \right\rceil = 5.$$

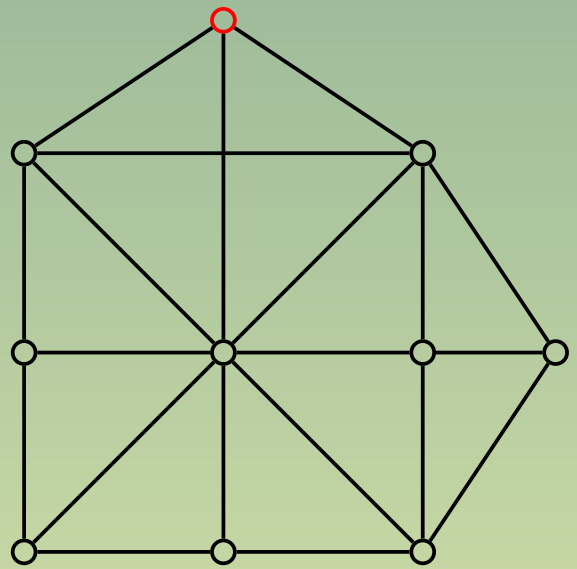
Dakle, $\gamma(G) \leqslant 5$. Vidimo da smo u ovom slučaju dobili puno bolju gornju ogradu, što nam sigurno znatno olakšava traženje kromatskog broja grafa G i jednog bojanja vrhova s minimalnim brojem boja.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



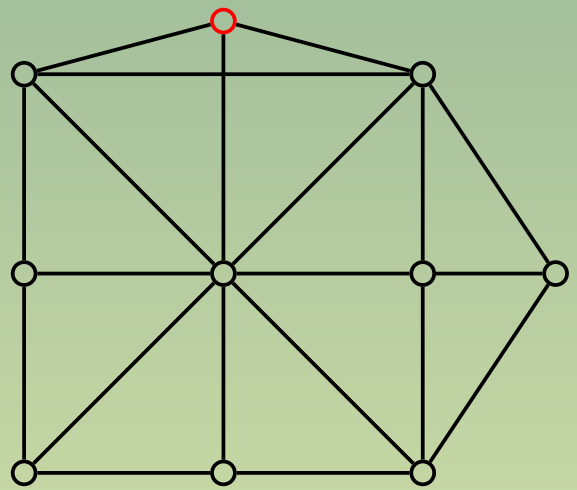
Međutim, možemo dobiti još bolju gornju ogradu ako uočimo da je G planarni graf.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



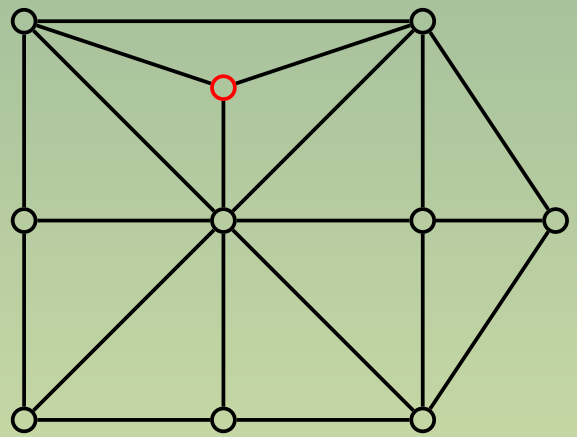
Međutim, možemo dobiti još bolju gornju ogradu ako uočimo da je G planarni graf. Naime, ako crveni vrh pomaknemo malo prema dolje,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



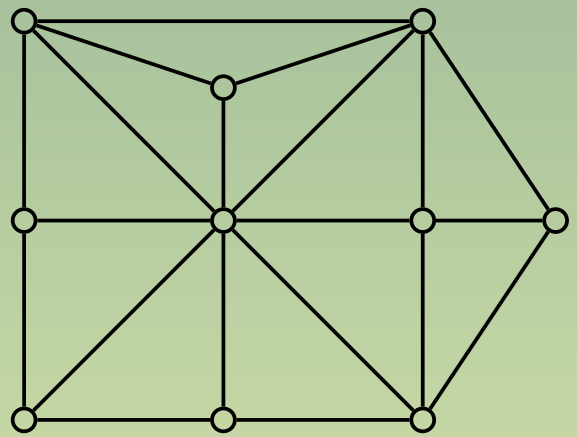
Međutim, možemo dobiti još bolju gornju ogradu ako uočimo da je G planarni graf. Naime, ako crveni vrh pomaknemo malo prema dolje,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



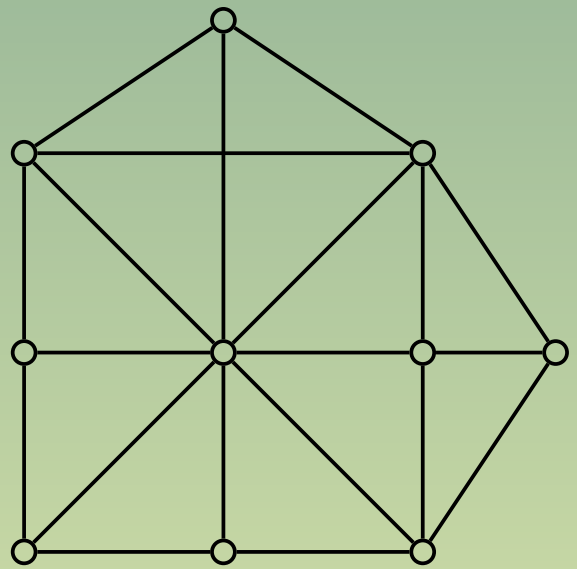
Međutim, možemo dobiti još bolju gornju ogradu ako uočimo da je G planarni graf. Naime, ako crveni vrh pomaknemo malo prema dolje,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



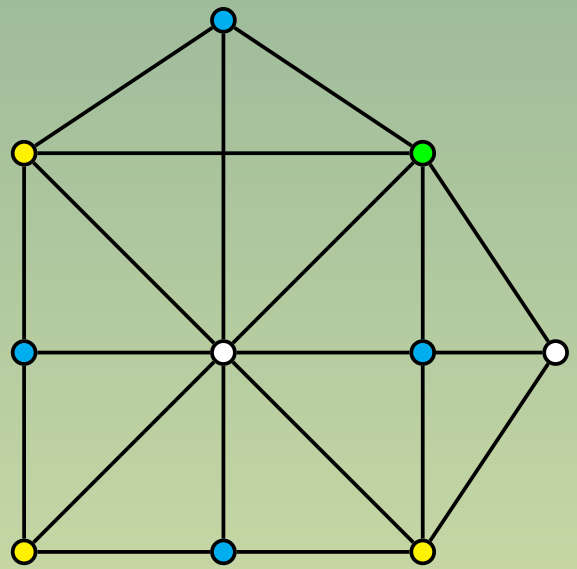
Međutim, možemo dobiti još bolju gornju ogradu ako uočimo da je G planarni graf. Naime, ako crveni vrh pomaknemo malo prema dolje, dobivamo jedno ravninsko smještenja grafa G pa je prema ◂ teoremu 10.12. $\gamma(G) \leqslant 4$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



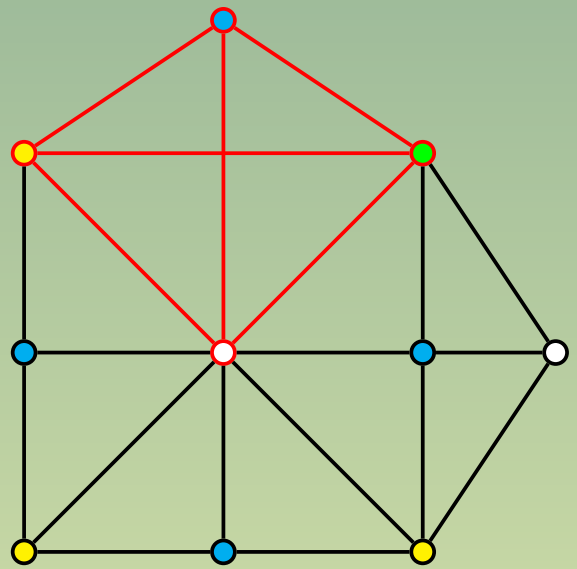
Dakle, pomoću ◂ teorema 10.14. smo dobili najlošiju gornju ogradu $\gamma(G) \leqslant 8$. Pomoću ◂ teorema 10.15. smo dobili puno bolju gornju ogradu $\gamma(G) \leqslant 5$. Zahvaljujući tome što smo uočili da je graf G planarni, mogli smo primijeniti ◂ teorem 10.12. i zaključiti da je $\gamma(G) \leqslant 4$ (iako bismo i bez tog uočavanja imali jako dobru gornju ogradu $\gamma(G) \leqslant 5$).

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



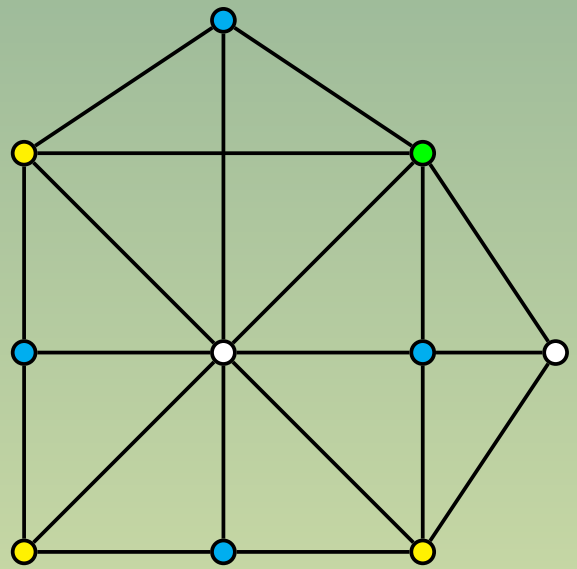
Znamo da je $\gamma(G) \leqslant 4$ i na slici je prikazano jedno 4-bojanje vrhova grafa G.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Znamo da je $\gamma(G) \leqslant 4$ i na slici je prikazano jedno 4-bojanje vrhova grafa G. Ovo bojanje je ujedno i bojanje s minimalnim brojem boja jer graf G sadrži crveni podgraf koji je izomorfan s K_4.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

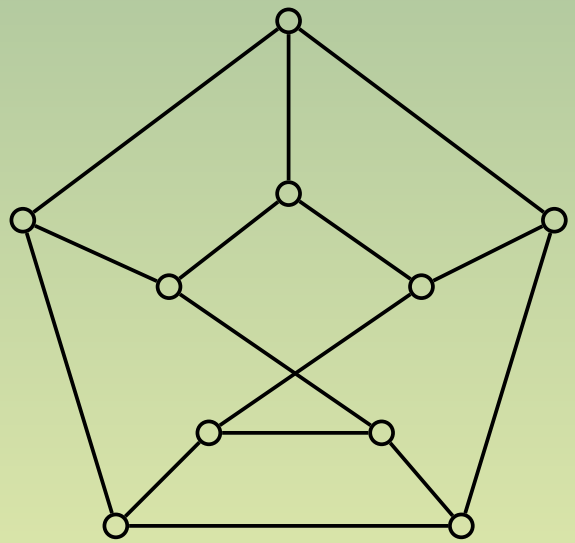


Dakle, $\gamma(G) = 4$ i na slici je prikazano jedno bojanje vrhova grafa s minimalnim brojem boja.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.42.

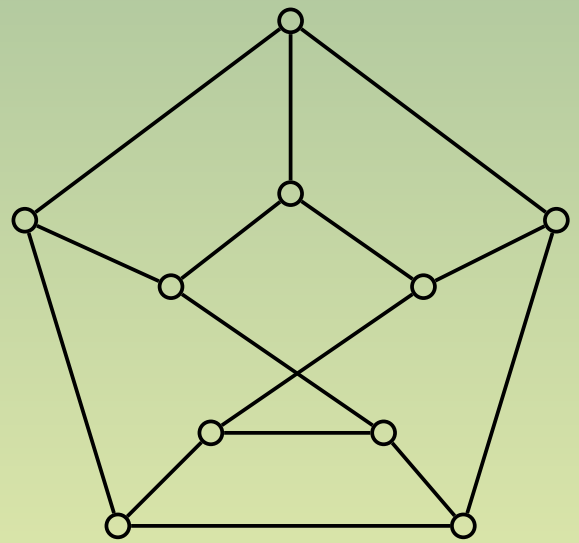
Odredite kromatski broj grafa G i pronađite jedno bojanje njegovih vrhova s minimalnim brojem boja.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.42.

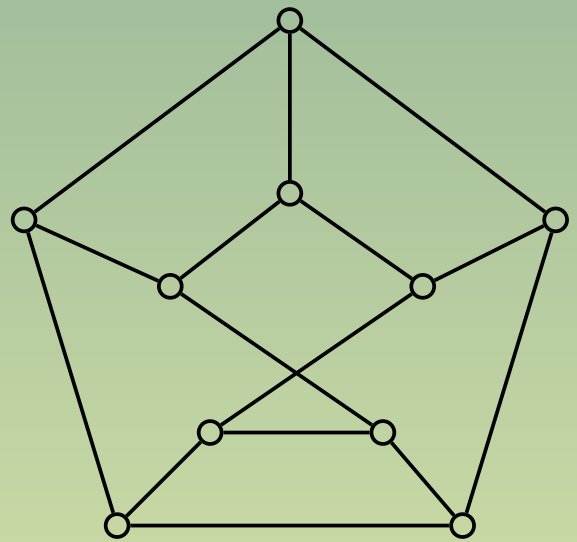
Odredite kromatski broj grafa G i pronađite jedno bojanje njegovih vrhova s minimalnim brojem boja.



Rješenje.

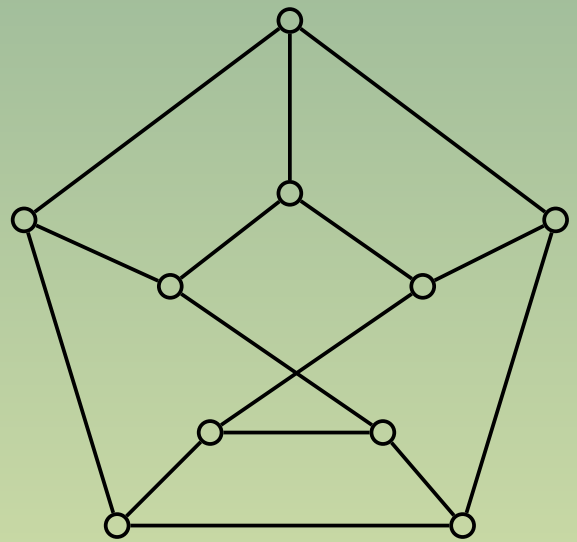
U ovom zadatku ćemo pokazati primjenu ◂ teorema 10.14. i ◂ teorema 10.15. za određivanje gornje ograde kromatskog broja grafa. Vidjet ćemo da u ovom slučaju ◂ teorem 10.14. daje bolju gornju ogradu.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



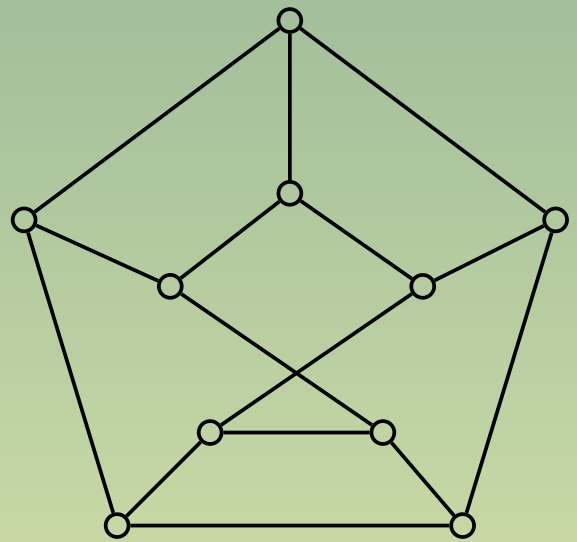
Graf G je 3-regularan pa je $\Delta(G) = 3$. Pažljivim promatranjem grafa G možemo uočiti da on ne sadrži podgrafove izomorfne s K_3 i K_4.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Graf G je 3-regularan pa je $\Delta(G) = 3$. Pažljivim promatranjem grafa G možemo uočiti da on ne sadrži podgrafove izomorfne s K_3 i K_4. Stoga prema ◂ teoremu 10.14. za $r = 4$ i $\Delta(G) = 3$ dobivamo $\gamma(G) \leqslant \frac{4-1}{4} \cdot (3+2) = \frac{15}{4}$, tj. $\gamma(G) \leqslant 3$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

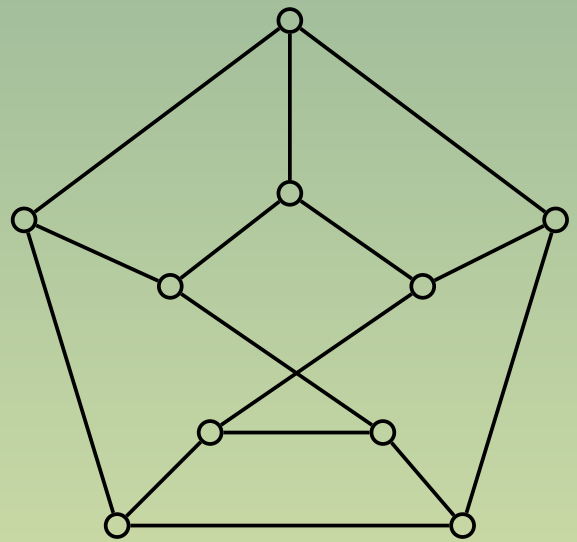


Pronađimo sada gornju ogradu za $\gamma(G)$ pomoću ◂ teorema 10.15..

Najprije moramo izračunati veličinu s. Zbog $\Delta(G) = 3$ slijedi

$$s = \max_{i \geqslant \frac{\Delta(G)+2}{2}} k(V_i) = \max_{i \geqslant 3} k(V_i).$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

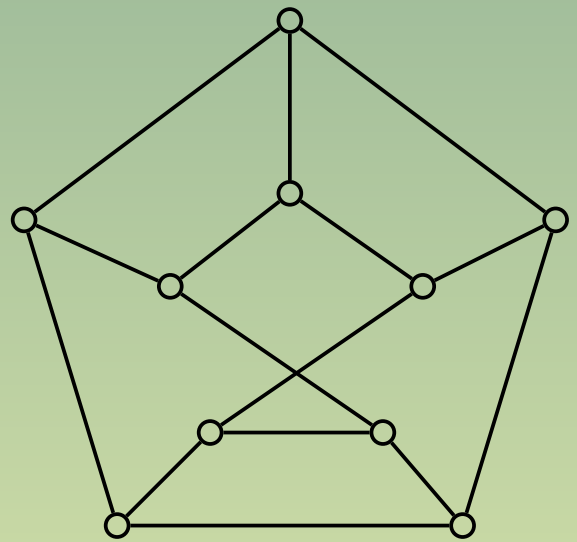


Pronađimo sada gornju ogradu za $\gamma(G)$ pomoću ◂ teorema 10.15..
Najprije moramo izračunati veličinu s. Zbog $\Delta(G) = 3$ slijedi

$$s = \max_{i \geqslant \frac{\Delta(G)+2}{2}} k(V_i) = \max_{i \geqslant 3} k(V_i).$$

Kako je graf G 3-regularan, slijedi da svi vrhovi imaju stupanj 3 pa je $k(V_3) = 10$. Stoga je $s = \max\{10\} = 10$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

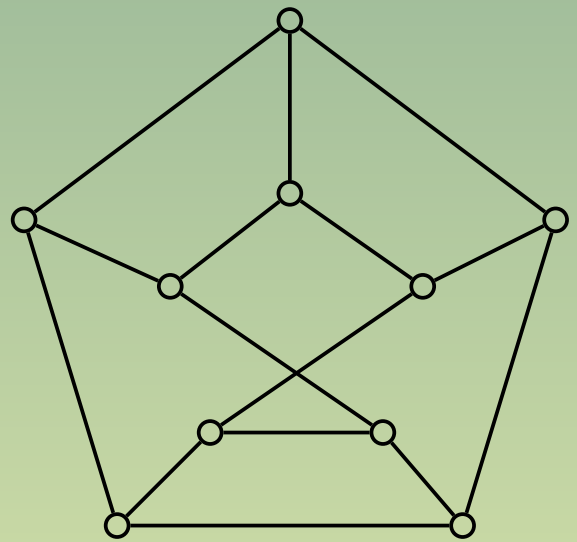


Prema ◂ teoremu 10.15. zbog $s = 10$ i $\Delta(G) = 3$ dobivamo

$$\gamma(G) \leqslant \left\lceil \frac{10}{10+1} \cdot (3+2) \right\rceil = 5.$$

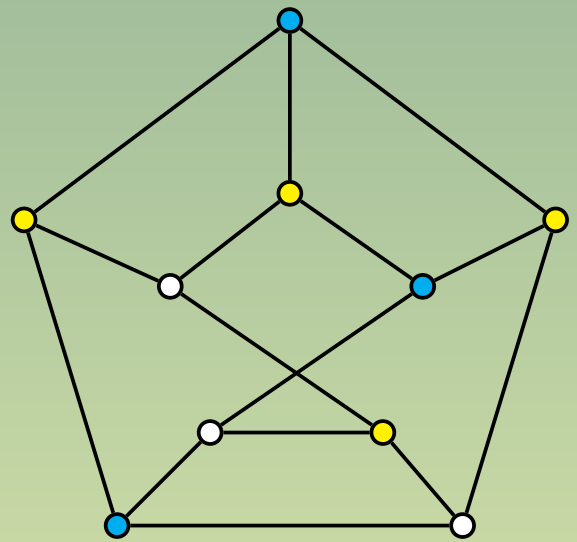
Dakle, $\gamma(G) \leqslant 5$. Vidimo da smo u ovom slučaju dobili slabiju gornju ogradu.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



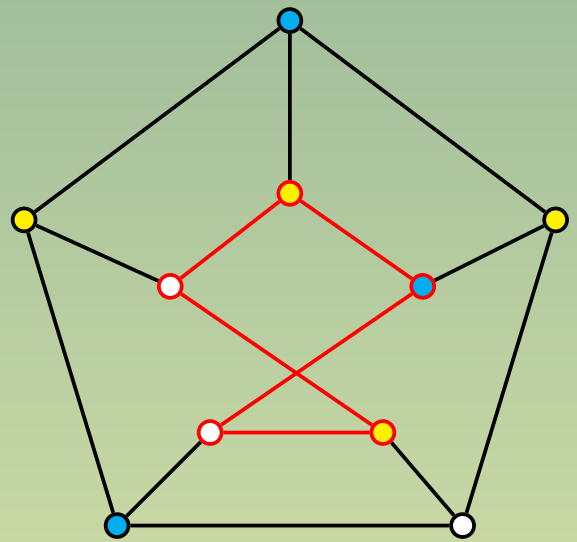
Dakle, pomoću ◂ teorema 10.14. smo dobili bolju gornju ogradu $\gamma(G) \leqslant 3$, a pomoću ◂ teorema 10.15. smo dobili slabiju gornju ogradu $\gamma(G) \leqslant 5$. Stoga uzimamo bolju gornju ogradu $\gamma(G) \leqslant 3$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



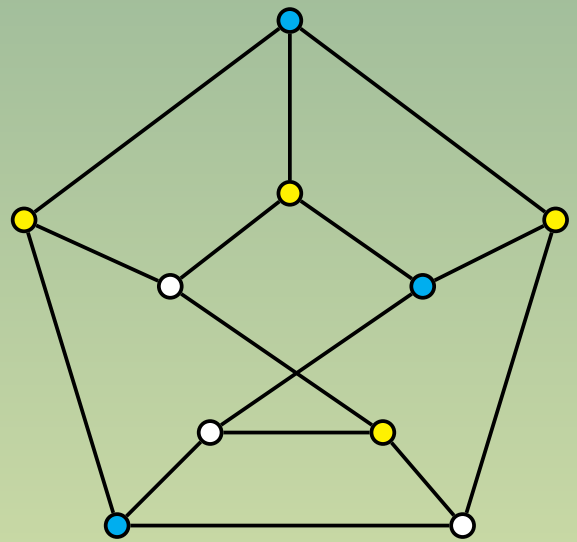
Znamo da je $\gamma(G) \leqslant 3$ i na slici je prikazano jedno 3-bojanje vrhova grafa G.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Znamo da je $\gamma(G) \leqslant 3$ i na slici je prikazano jedno 3-bojanje vrhova grafa G. Ovo bojanje je ujedno i bojanje s minimalnim brojem boja jer graf G sadrži crveni podgraf koji je izomorfan s C_5, a znamo da za bojanje vrhova neparnog ciklusa trebamo minimalno tri boje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

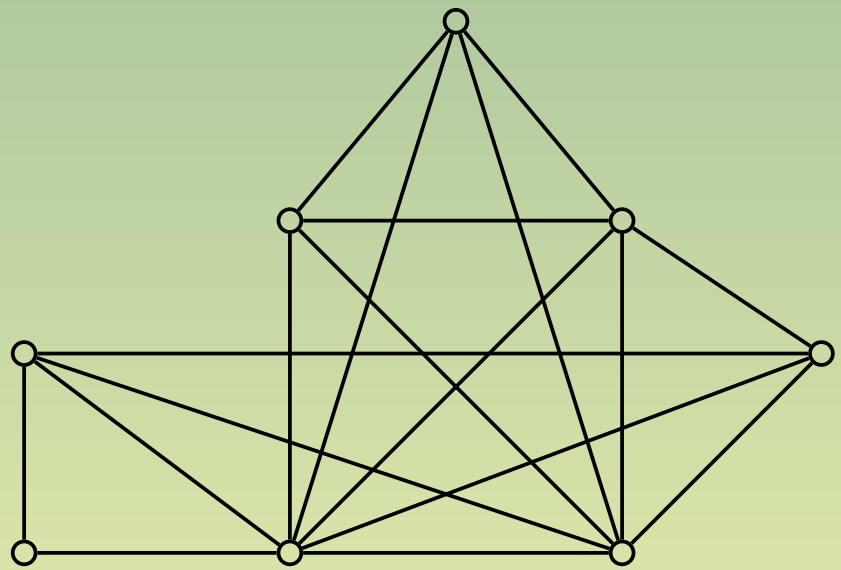


Dakle, $\gamma(G) = 3$ i na slici je prikazano jedno bojanje vrhova grafa s minimalnim brojem boja. Uočite da G nema podgrafova izomorfnih s K_3, ali smo se u ovom slučaju spasili argumentom da G sadrži podgraf izomorfan s C_5, što je bio dokaz da kromatski broj grafa G ne može biti manji od 3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.43.

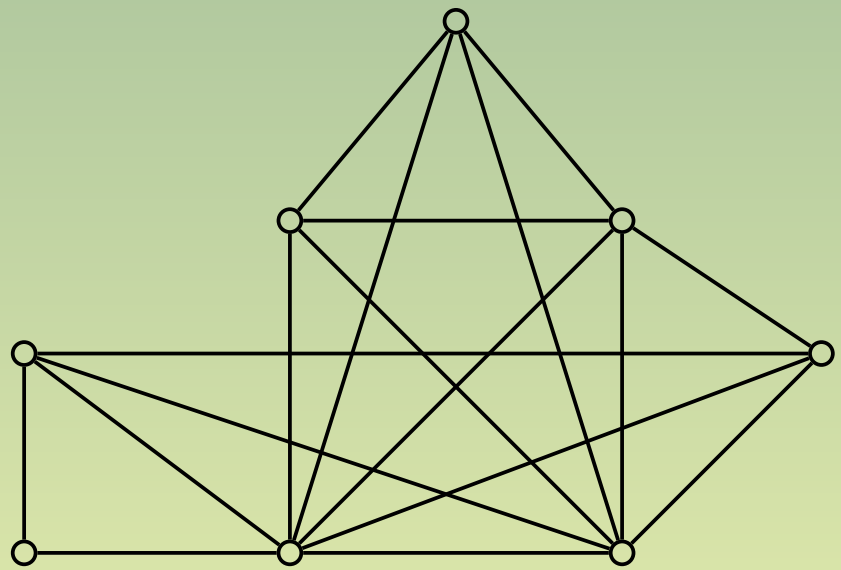
Odredite kromatski broj grafa G i pronađite jedno bojanje njegovih vrhova s minimalnim brojem boja.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.43.

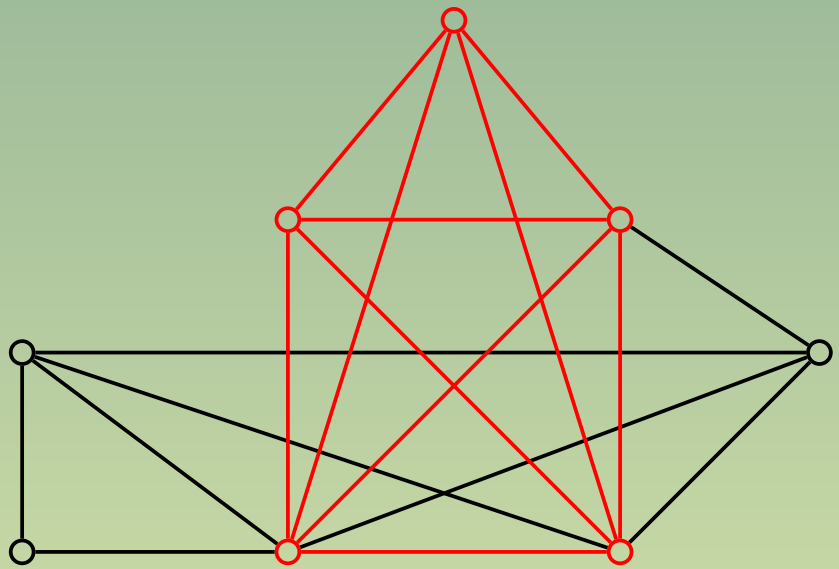
Odredite kromatski broj grafa G i pronađite jedno bojanje njegovih vrhova s minimalnim brojem boja.



Rješenje.

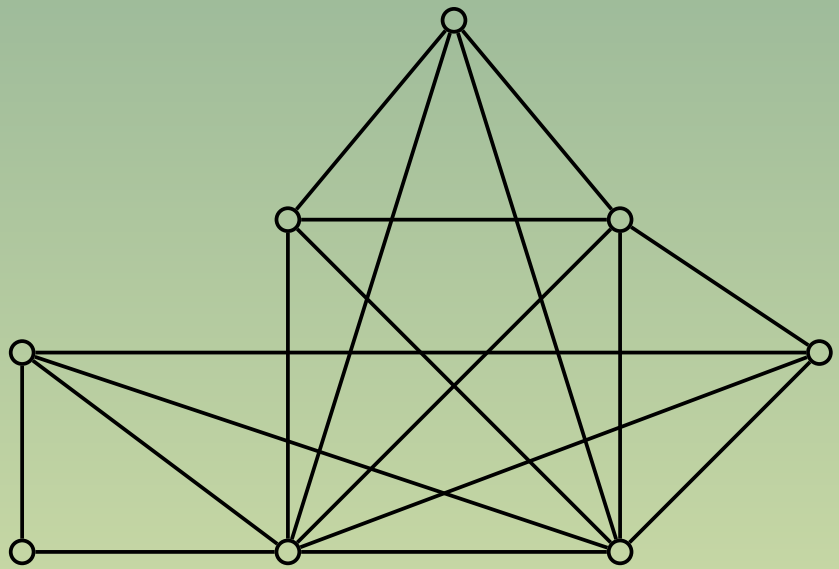
U ovom zadatku ćemo pokazati primjenu ◂ teorema 10.14. i ◂ teorema 10.15. za određivanje gornje ograde kromatskog broja grafa. Vidjet ćemo da u ovom slučaju ◂ teorem 10.15. daje bolju gornju ogradu.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



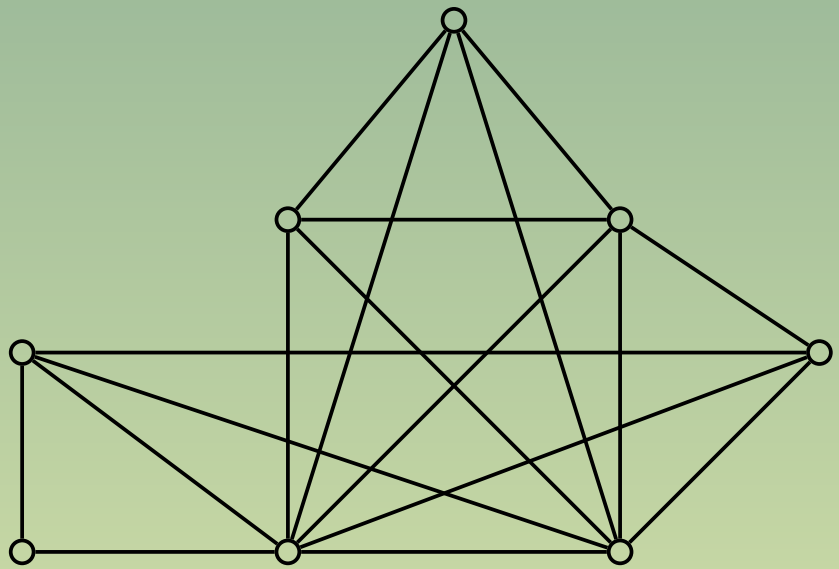
Graf G sadrži podgraf izomorfan s K_5.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



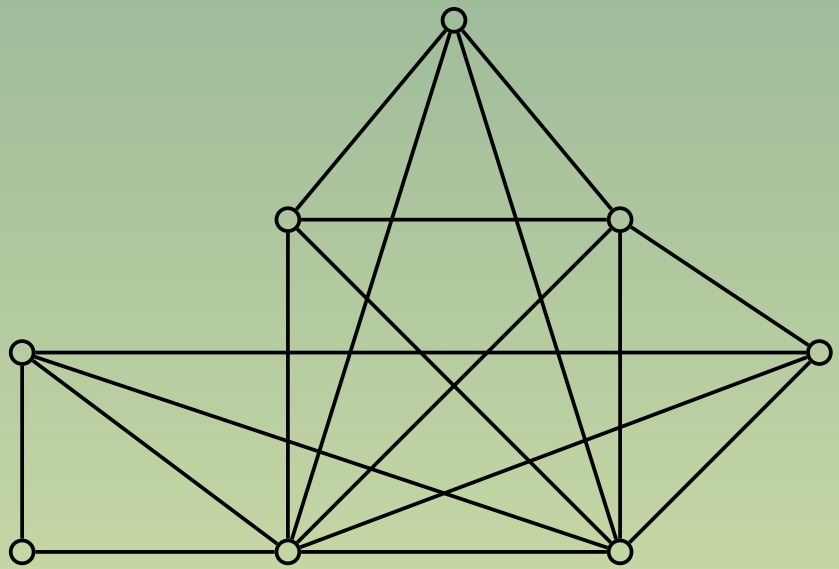
Graf G sadrži podgraf izomorfan s K_5. Pažljivim promatranjem grafa G možemo uočiti da on ne sadrži podgrafove izomorfne s K_6.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Graf G sadrži podgraf izomorfan s K_5. Pažljivim promatranjem grafa G možemo uočiti da on ne sadrži podgrafove izomorfne s K_6. Stoga prema ◂ teoremu 10.14. za $r = 6$ i $\Delta(G) = 7$ dobivamo $\gamma(G) \leqslant \frac{6-1}{6} \cdot (7+2)$, tj. $\gamma(G) \leqslant 7$. Uočite da u ovom slučaju ◂ teorem 10.14. nije dao ništa bolju ocjenu od ◂ Brooksovog teorema.

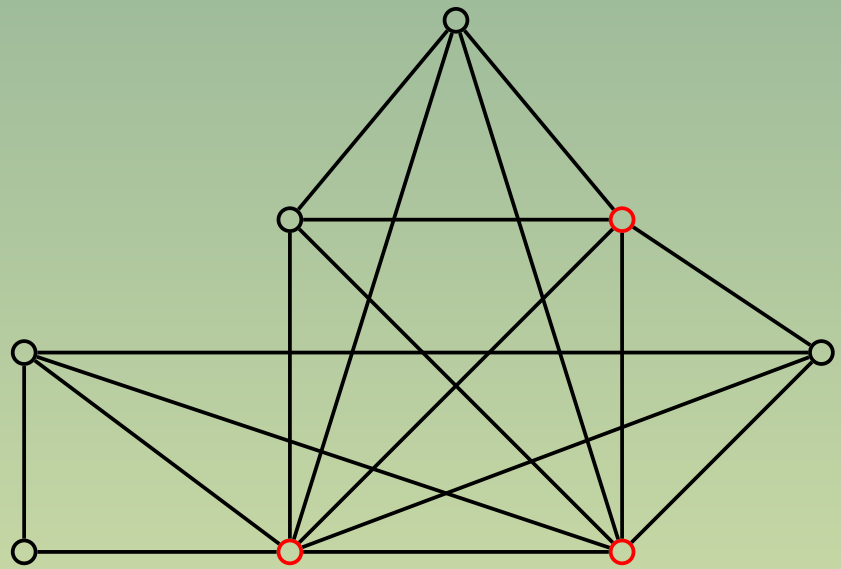
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Pronađimo sada gornju ogradu za $\gamma(G)$ pomoću ◂ teorema 10.15..
Najprije moramo izračunati veličinu s. Zbog $\Delta(G) = 7$ slijedi

$$s = \max_{i \geqslant \frac{\Delta(G)+2}{2}} k(V_i) = \max_{i \geqslant 5} k(V_i).$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

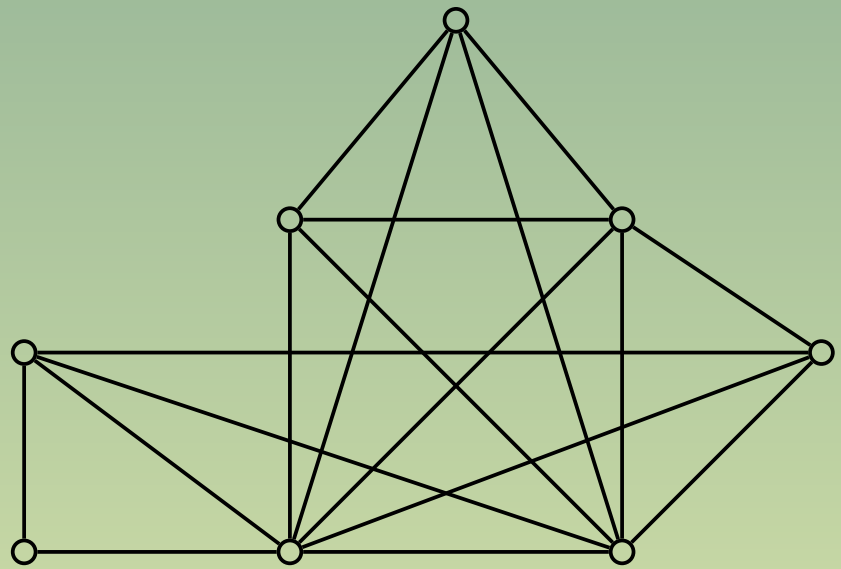


Pronađimo sada gornju ogradu za $\gamma(G)$ pomoću ◂ teorema 10.15.. Najprije moramo izračunati veličinu s. Zbog $\Delta(G) = 7$ slijedi

$$s = \max_{i \geqslant \frac{\Delta(G)+2}{2}} k(V_i) = \max_{i \geqslant 5} k(V_i).$$

Jedini vrhovi u grafu G stupnja $\geqslant 5$ su crveni vrhovi od kojih je jedan stupnja 5, drugi je stupnja 6, a treći je stupnja 7. Stoga je $k(V_5) = 1$, $k(V_6) = 1$, $k(V_7) = 1$ pa je $s = \max\{1, 1, 1\} = 1$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

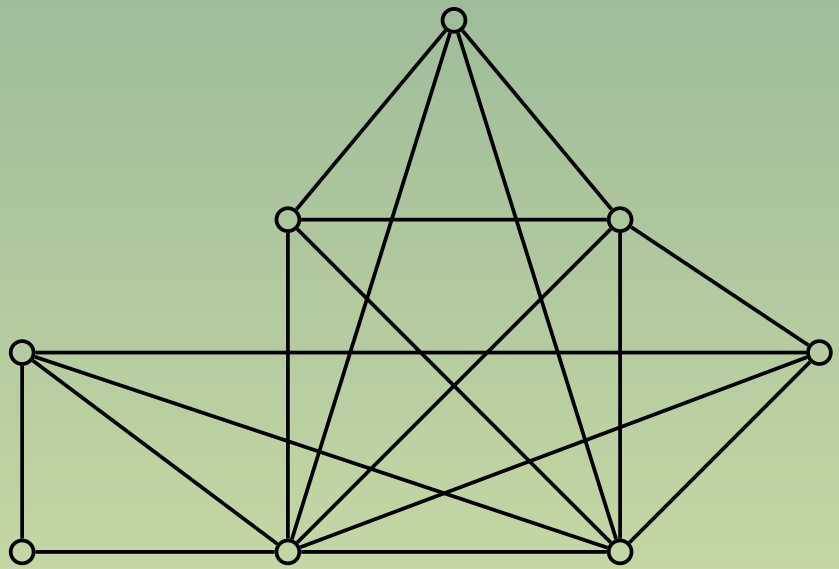


Prema ◂ teoremu 10.15. zbog $s = 1$ i $\Delta(G) = 7$ dobivamo

$$\gamma(G) \leqslant \left\lceil \frac{1}{1+1} \cdot (7+2) \right\rceil = 5.$$

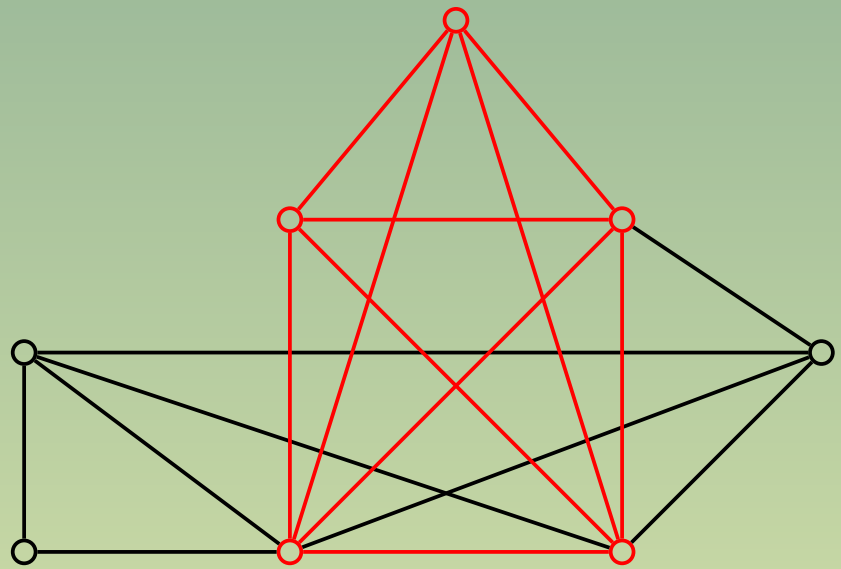
Dakle, $\gamma(G) \leqslant 5$. Vidimo da smo u ovom slučaju dobili bolju gornju ogradu.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



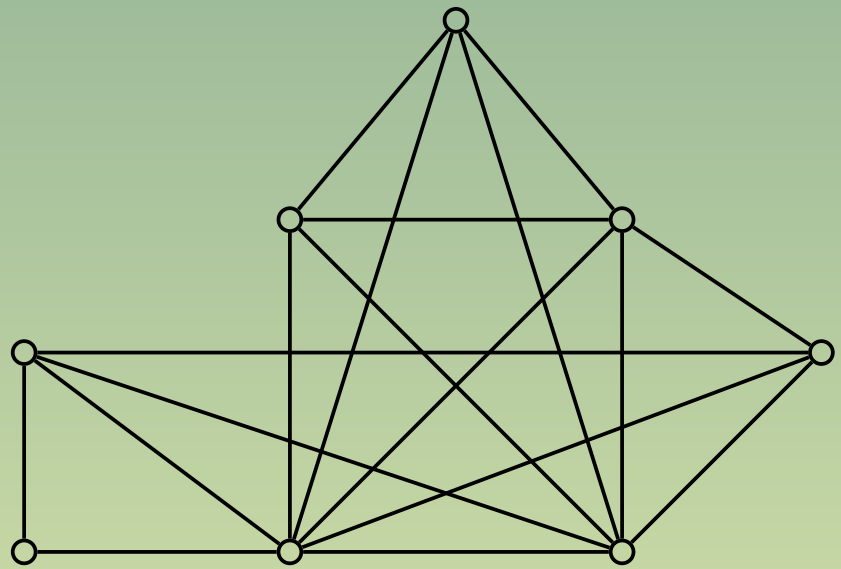
Dakle, pomoću ◂ teorema 10.14. smo dobili lošiju gornju ogradu $\gamma(G) \leqslant 7$. Pomoću ◂ teorema 10.15. smo dobili bolju gornju ogradu $\gamma(G) \leqslant 5$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



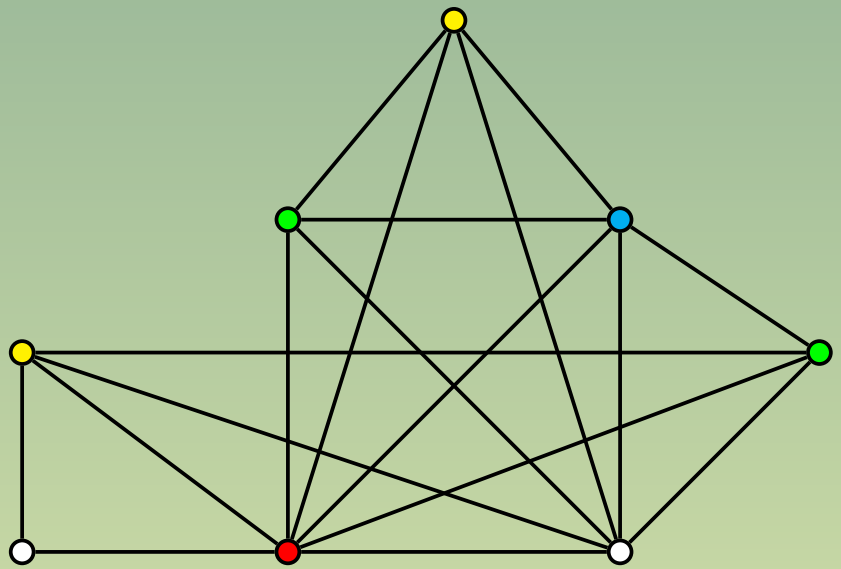
Dakle, pomoću ◂ teorema 10.14. smo dobili lošiju gornju ogradu $\gamma(G) \leqslant 7$. Pomoću ◂ teorema 10.15. smo dobili bolju gornju ogradu $\gamma(G) \leqslant 5$. Kako G sadrži podgraf izomorfan s K_5, mora biti $\gamma(G) \geqslant 5$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Dakle, pomoću ◂ teorema 10.14. smo dobili lošiju gornju ogradu $\gamma(G) \leqslant 7$. Pomoću ◂ teorema 10.15. smo dobili bolju gornju ogradu $\gamma(G) \leqslant 5$. Kako G sadrži podgraf izomorfan s K_5, mora biti $\gamma(G) \geqslant 5$. Iz $\gamma(G) \leqslant 5$ i $\gamma(G) \geqslant 5$ slijedi da je $\gamma(G) = 5$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

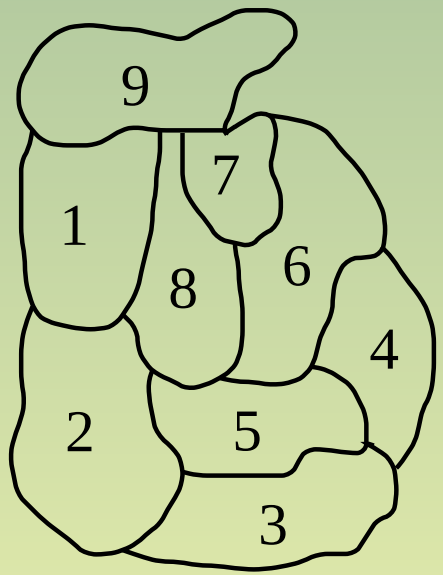


Dakle, $\gamma(G) = 5$ i na slici je prikazano jedno bojanje vrhova grafa s minimalnim brojem boja.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.44.

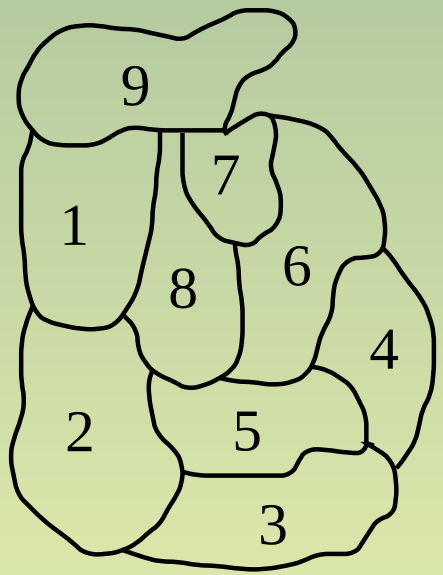
Obojite područja prikazana na slici s minimalnim brojem boja tako da susjedna područja budu obojana različitim bojama.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.44.

Obojite područja prikazana na slici s minimalnim brojem boja tako da susjedna područja budu obojana različitim bojama.

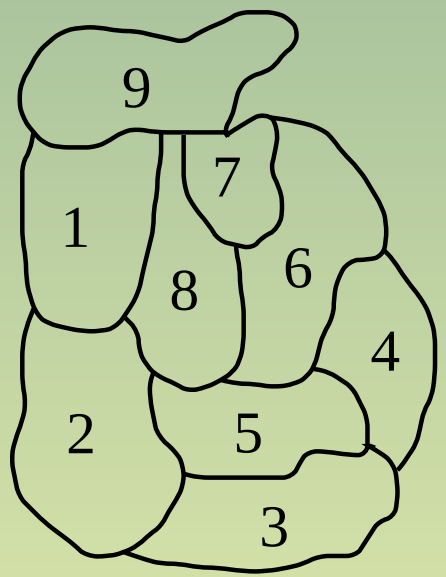


Rješenje.

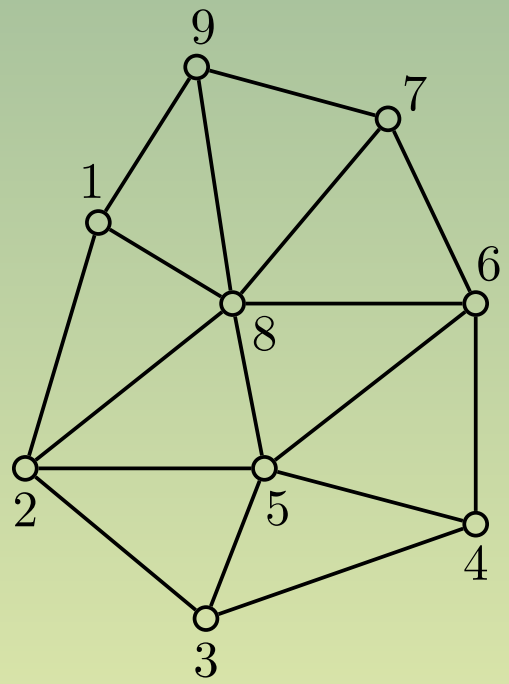
Zadanoj karti ćemo pridružiti graf kojemu su vrhovi označena područja, a dva vrha su spojena bridom jedino ako su odgovarajuća područja susjedna na karti.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

karta



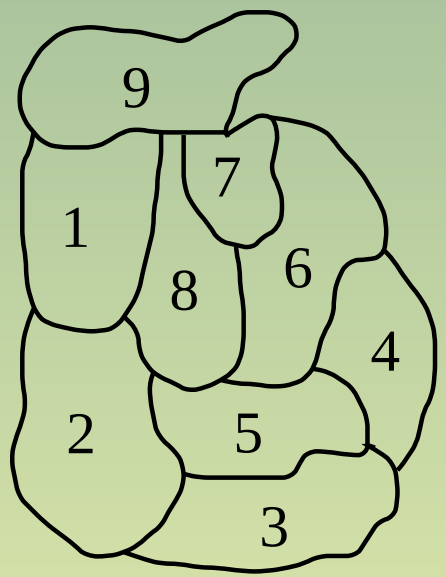
pripadni graf G



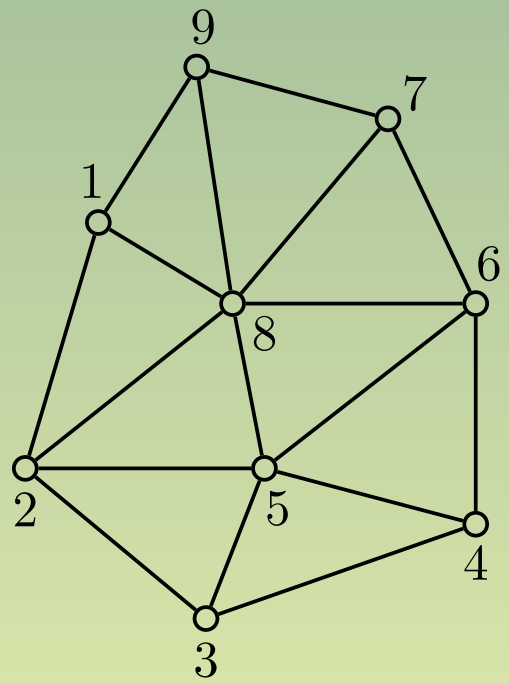
Problem bojanja karte se svodi na problem računanja kromatskog broja pripadnog grafa i traženja jednog bojanja vrhova tog grafa s minimalnim brojem boja.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

karta



pripadni graf G



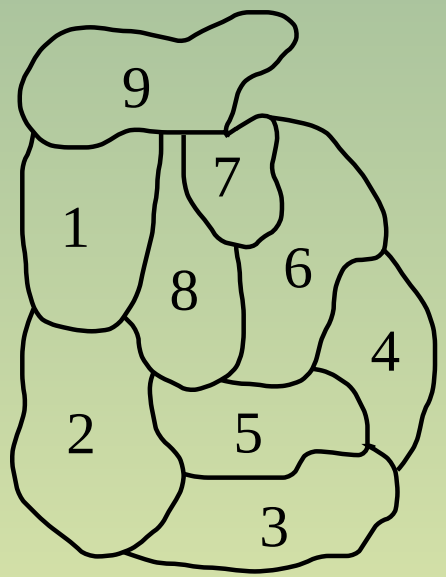
Kako je G ravninski graf, prema ◂ teoremu 10.12. je $\gamma(G) \leqslant 4$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

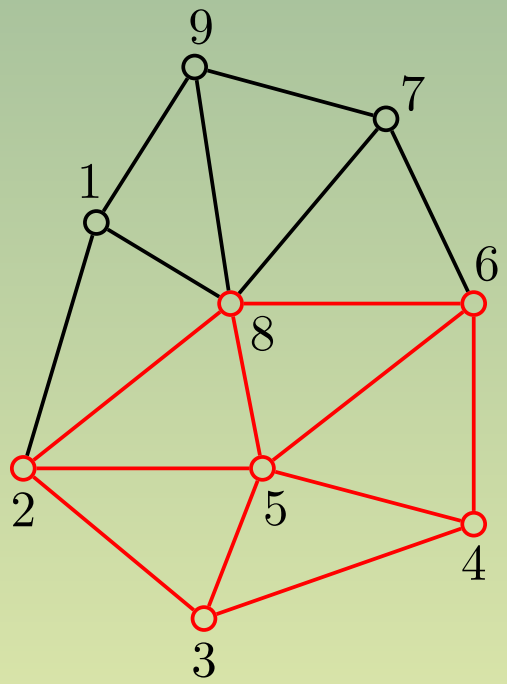
prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

karta



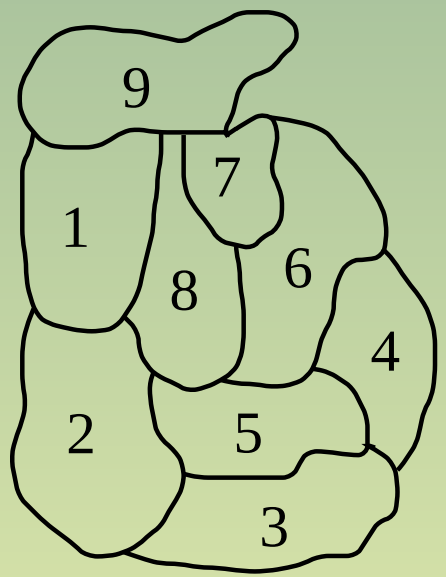
pripadni graf G



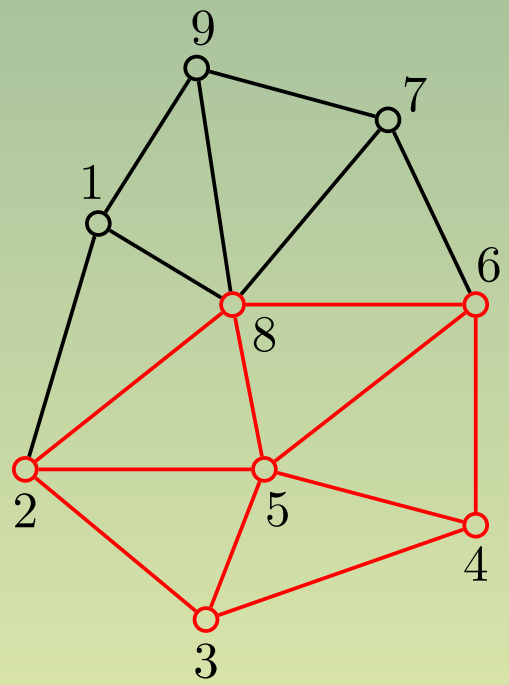
Kako je G ravninski graf, prema ◂ teoremu 10.12. je $\gamma(G) \leqslant 4$. No, graf G sadrži crveni podgraf koji je izomorfan s $C_5 \vee K_1$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

karta



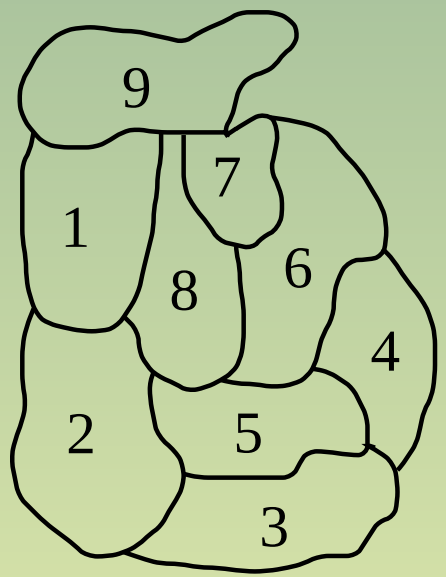
pripadni graf G



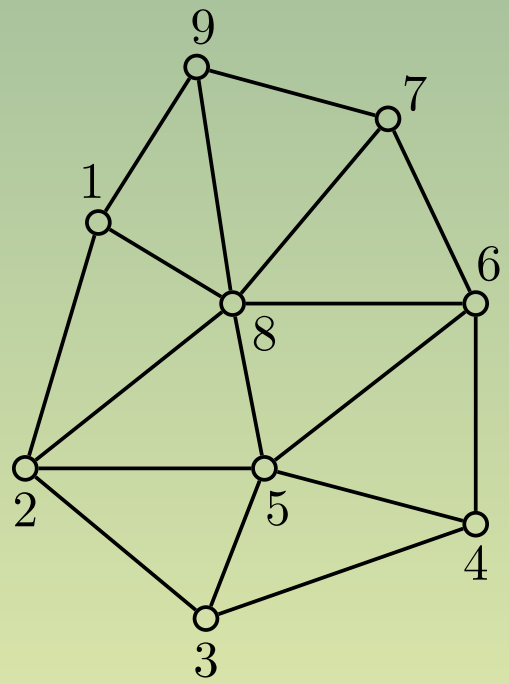
Kako je G ravninski graf, prema teoremu 10.12. je $\gamma(G) \leqslant 4$. No, graf G sadrži crveni podgraf koji je izomorfan s $C_5 \vee K_1$. Prema teoremu 10.11. slijedi $\gamma(C_5 \vee K_1) = 3 + 1 = 4$ pa je $\gamma(G) \geqslant 4$ (kromatski broj grafa je veći ili jednak od kromatskog broja bilo kojeg njegovog podgrafa).

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

karta



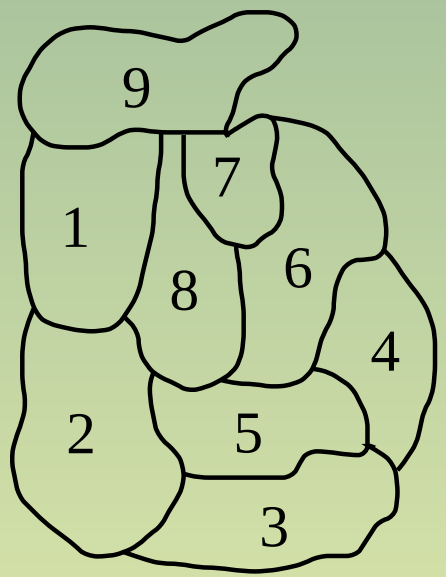
pripadni graf G



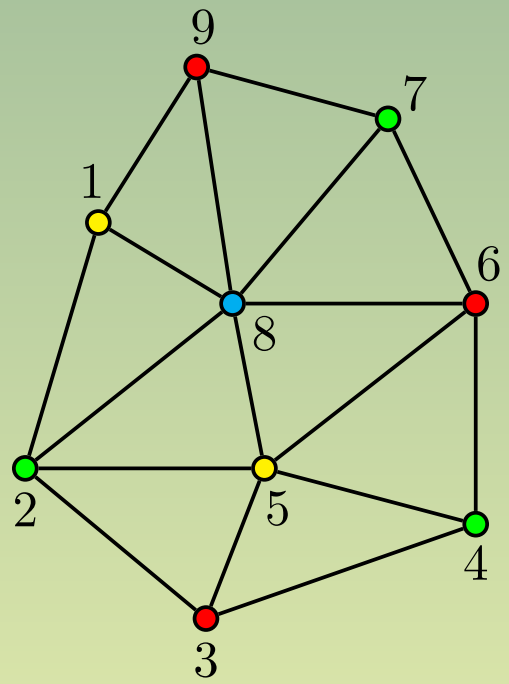
Iz $\gamma(G) \leqslant 4$ i $\gamma(G) \geqslant 4$ slijedi da je $\gamma(G) = 4$. Dakle, vrhovi grafa G se mogu obojati s minimalno 4 boje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

karta



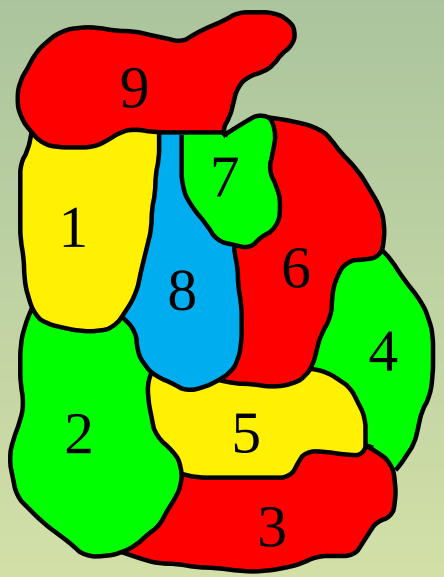
obojani vrhovi od G



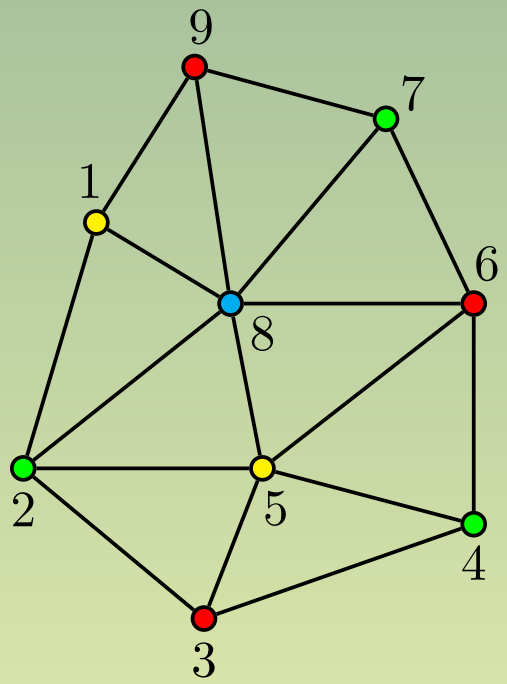
Iz $\gamma(G) \leqslant 4$ i $\gamma(G) \geqslant 4$ slijedi da je $\gamma(G) = 4$. Dakle, vrhovi grafa G se mogu obojati s minimalno 4 boje. Na desnoj slici je prikazano jedno bojanje vrhova grafa G s minimalnim brojem boja.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

obojana karta



obojani vrhovi od G



Iz $\gamma(G) \leqslant 4$ i $\gamma(G) \geqslant 4$ slijedi da je $\gamma(G) = 4$. Dakle, vrhovi grafa G se mogu obojati s minimalno 4 boje. Na desnoj slici je prikazano jedno bojanje vrhova grafa G s minimalnim brojem boja. Dobiveno bojanje vrhova grafa prenesemo na bojanje odgovarajućih područja na karti.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.45.

Ako je $\gamma(G) \leqslant 4$, tada je G ravninski graf. Dokažite ili opovrgnite.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.45.

Ako je $\gamma(G) \leqslant 4$, tada je G ravninski graf. Dokažite ili opovrgnite.

Rješenje.

Tvrdnja ne vrijedi, tj. ne vrijedi obrat teorema o četiri boje. Na primjer, $K_{3,3}$ je bipartitni graf pa je stoga $\gamma(K_{3,3}) = 2$. Dakle, $\gamma(K_{3,3}) \leqslant 4$, ali znamo da $K_{3,3}$ nije ravninski graf. ◂ korolar 10.2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.46.

Ako su G i H homeomorfni grafovi, da li onda G i H moraju imati jednake kromatske brojeve?

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.46.

Ako su G i H homeomorfni grafovi, da li onda G i H moraju imati jednake kromatske brojeve?

Rješenje.

Ako su G i H homeomorfni grafovi, tada oni ne moraju nužno imati jednake kromatske brojeve. Na primjer, C_3 i C_4 su homeomorfni grafovi, ali oni nemaju iste kromatske brojeve jer je $\gamma(C_3) = 3$ i $\gamma(C_4) = 2$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.47.

Dokažite da svaki k-kromatski graf ima barem $\binom{k}{2}$ bridova.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.47.

Dokažite da svaki k-kromatski graf ima barem $\binom{k}{2}$ bridova.

Rješenje.

Neka je G k-kromatski graf. Tada se skup vrhova grafa G može particionirati u točno k klasa $V_1, V_2, \ldots, V_k$ tako da nikoja dva vrha iz iste klase nisu međusobno susjedni. Jednostavnije rečeno, vrhovi pripadaju istoj klasi ako su obojani istom bojom. Između svake dvije različite klase V_i i V_j mora postojati barem jedan brid jer bi se u protivnom klase V_i i V_j mogle spojiti u jednu klasu pa bi bilo $\gamma(G) < k$, što je nemoguće jer je G k-kromatski graf. Kako između k klasa, dvije klase možemo odabrati na $\binom{k}{2}$ načina, slijedi da je $\varepsilon(G) \geqslant \binom{k}{2}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.48.

Dokažite da za svaki graf G vrijedi $\gamma \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2\varepsilon + \frac{1}{4}}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.48.

Dokažite da za svaki graf G vrijedi $\gamma \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2\varepsilon + \frac{1}{4}}$.

Rješenje.

Prema prethodnom primjeru je $\varepsilon \geqslant \binom{\gamma}{2}$. Raspisivanjem dobivamo

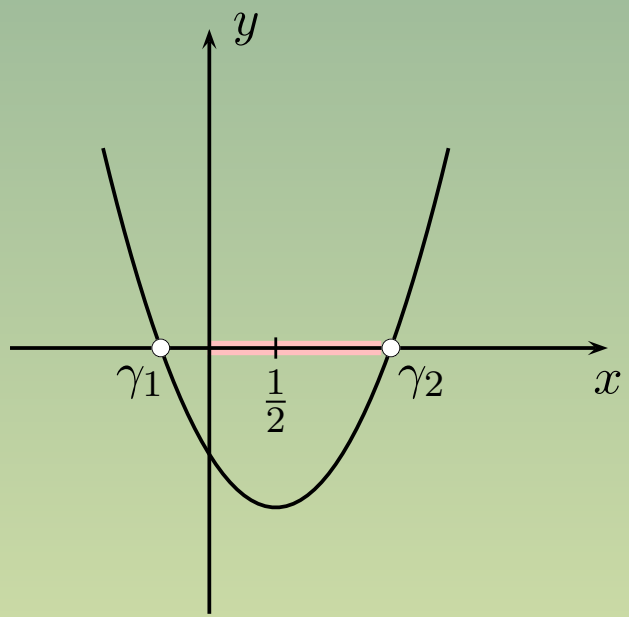
$$\varepsilon \geqslant \binom{\gamma}{2}$$
$$2\varepsilon \geqslant \gamma(\gamma - 1)$$
$$\gamma^2 - \gamma - 2\varepsilon \leqslant 0$$

Rješavanjem kvadratne nejednadžbe po γ dobivamo

$$\gamma_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8\varepsilon}}{2}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{2\varepsilon + \frac{1}{4}}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{2\varepsilon + \frac{1}{4}}$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Kako je uvijek $\gamma \geqslant 1$, sa slike zaključujemo da će biti

$$\gamma^2 - \gamma - 2\varepsilon \leqslant 0$$

jedino ako je $\gamma \leqslant \gamma_2$, tj.

$$\gamma \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2\varepsilon + \frac{1}{4}}.$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.49.

Dokažite da za svaki neprazni graf G vrijedi $\gamma \leqslant \lceil \sqrt{2\varepsilon} \rceil$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.49.

Dokažite da za svaki neprazni graf G vrijedi $\gamma \leqslant \left\lceil \sqrt{2\varepsilon} \right\rceil$.

Rješenje.

Prema prethodnom primjeru je $\gamma \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2\varepsilon + \frac{1}{4}}$. Kako je $\gamma \in \mathbb{N}$, tada je sigurno

$$\gamma \leqslant \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2\varepsilon + \frac{1}{4}} \right\rfloor .$$

Tvrdimo da je

$$\left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2\varepsilon + \frac{1}{4}} \right\rfloor \leqslant \left\lceil \sqrt{2\varepsilon} \right\rceil . \qquad (\clubsuit)$$

Uočimo najprije da je $\frac{1}{2} + \sqrt{2\varepsilon + \frac{1}{4}} > \sqrt{2\varepsilon}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Da bismo dokazali da vrijedi (♣), dovoljno je još pokazati

$$\left(\tfrac{1}{2}+\sqrt{2\varepsilon+\tfrac{1}{4}}\right)-\sqrt{2\varepsilon}<1. \qquad (\spadesuit)$$

Tvrdnja (♠) slijedi iz sljedećeg niza ekvivalentnih tvrdnji.

$$\left(\tfrac{1}{2}+\sqrt{2\varepsilon+\tfrac{1}{4}}\right)-\sqrt{2\varepsilon}<1 \iff$$

$$\underbrace{\sqrt{2\varepsilon+\tfrac{1}{4}}-\sqrt{2\varepsilon}}_{>0}<\tfrac{1}{2}\Big/^2 \iff$$

$$2\varepsilon+\tfrac{1}{4}+2\varepsilon-2\sqrt{4\varepsilon^2+\tfrac{1}{2}\varepsilon}<\tfrac{1}{4} \iff$$

$$2\varepsilon<\sqrt{4\varepsilon^2+\tfrac{1}{2}\varepsilon}\Big/^2 \iff$$

$$4\varepsilon^2<4\varepsilon^2+\tfrac{1}{2}\varepsilon \iff$$

$$\varepsilon>0$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Kako je po pretpostavci G neprazni graf, posljednja tvrdnja $\varepsilon > 0$ je istinita tvrdnja. Zbog niza ekvivalencija je istinita i tvrdnja (♠). Konačno, iz

$$\tfrac{1}{2} + \sqrt{2\varepsilon + \tfrac{1}{4}} > \sqrt{2\varepsilon},$$

$$\left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{2\varepsilon + \tfrac{1}{4}}\right) - \sqrt{2\varepsilon} < 1$$

i definicije "poda" i "stropa" (razmislite malo o tome) slijedi (♣) pa je $\gamma \leqslant \lceil \sqrt{2\varepsilon} \rceil$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Poopćenje bipartitnog grafa je m-partitni graf. Za graf G kažemo da je **$\mathbf{m}$-partitni** ako mu se skup vrhova može particionirati u m podskupova tako da nikoja dva vrha iz istog podskupa nisu međusobno susjedni. Za $m = 2$ dobivamo bipartitni graf.

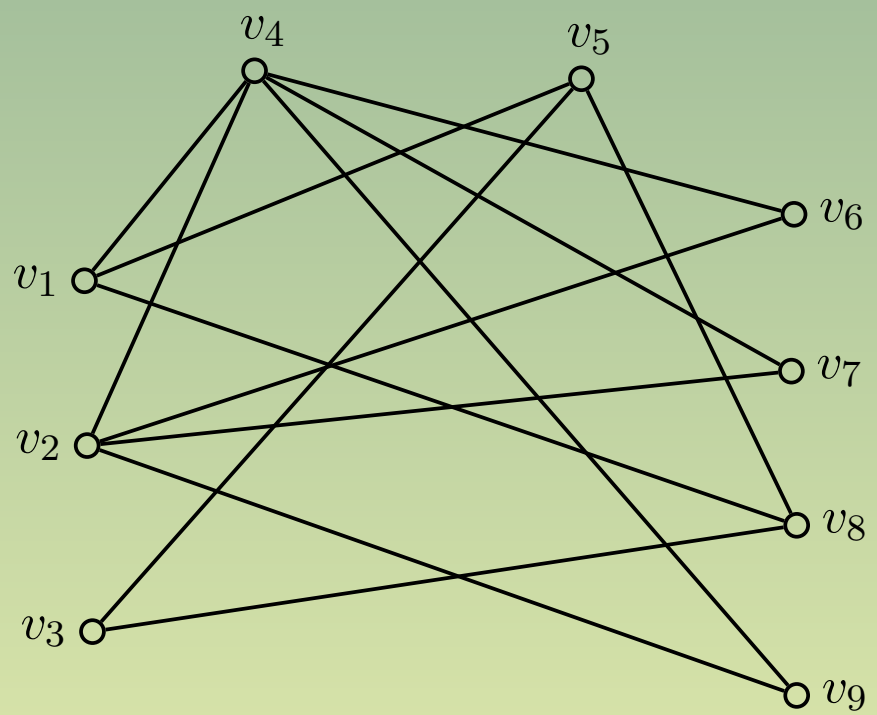
Uočimo da je svaki graf G bez petlji zapravo $\gamma(G)$-partitni graf, ali nije m-partitni graf za svaki $m = 1, 2, \ldots, \gamma(G) - 1$. Obrnuto, ako je neki graf G m-partitni, tada je $\gamma(G) \leqslant m$. Stoga problem bojanja vrhova grafa G možemo na ekvivalentni način promatrati kao problem particioniranja skupa vrhova u što je moguće manji broj klasa tako da nikoja dva vrha iz iste klase nisu međusobno susjedni.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Potpun m-partitni graf je jednostavni graf kod kojeg su svaka dva vrha iz različitih particija susjedni vrhovi. Specijalno, potpun m-partitni graf sa n vrhova u kojemu svaki član particije ima $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ ili $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ vrhova označava se s $T_{n,m}$ i zove se **Turánov graf**.

Dakle, u m-partitnom grafu $T_{n,m}$ svaka dva člana particije, ili imaju jednak broj elemenata, ili se broj elemenata razlikuje najviše za jedan.

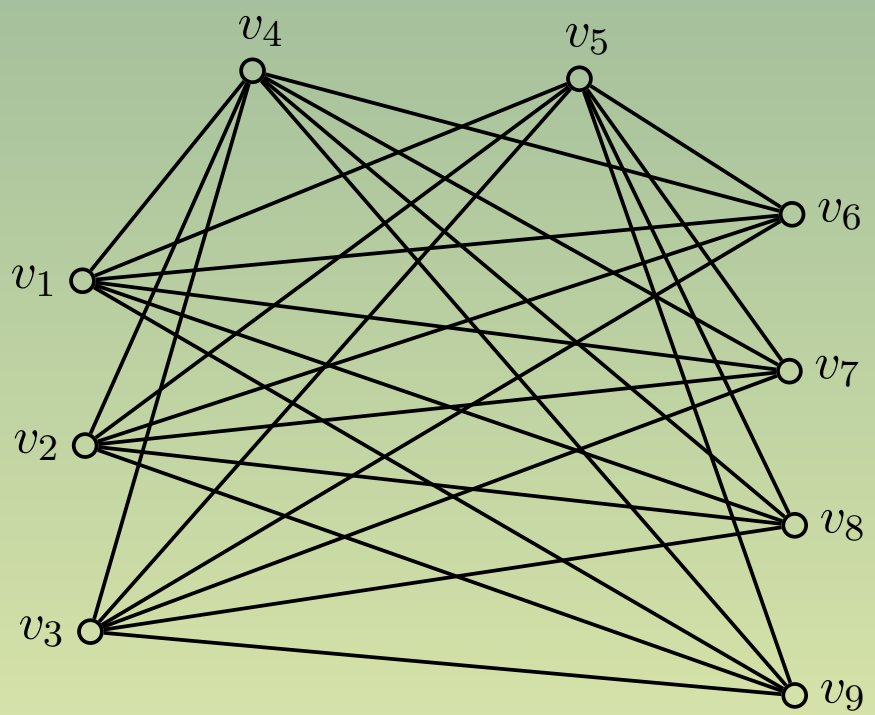
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na slici je prikazan 3-partitni graf s particijom vrhova

$$V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad V_2 = \{v_4, v_5\}, \quad V_3 = \{v_6, v_7, v_8, v_9\}.$$

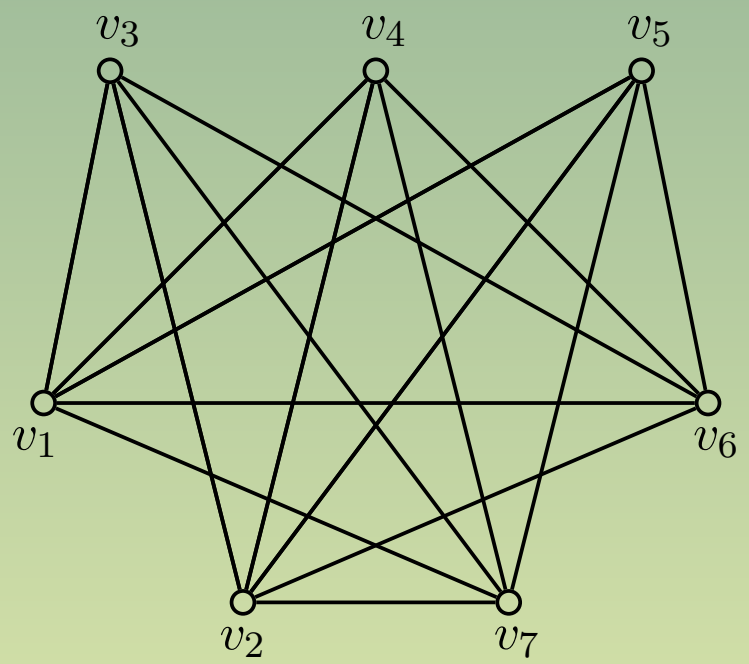
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na slici je prikazan potpuni 3-partitni graf s particijom vrhova

$$V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad V_2 = \{v_4, v_5\}, \quad V_3 = \{v_6, v_7, v_8, v_9\}.$$

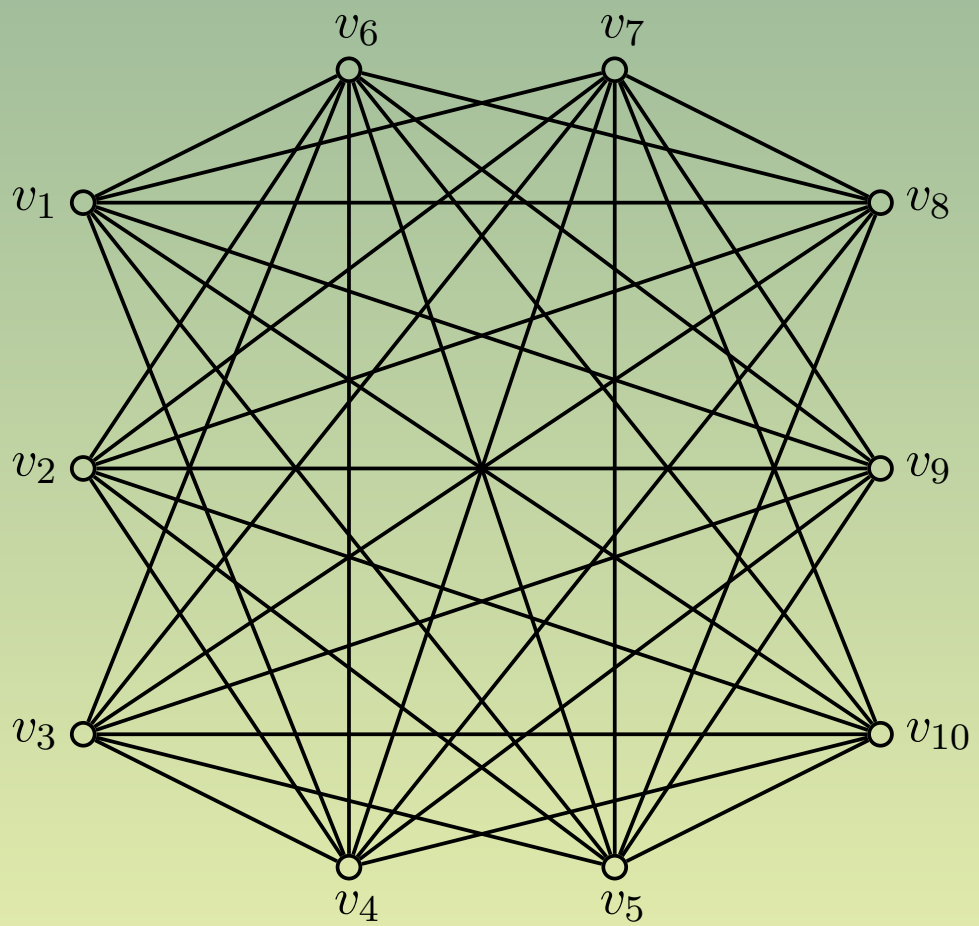
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na slici je prikazan Turánov graf $T_{7,3}$ s particijom vrhova

$$V_1 = \{v_1, v_2\}, \quad V_2 = \{v_3, v_4, v_5\}, \quad V_3 = \{v_6, v_7\}.$$

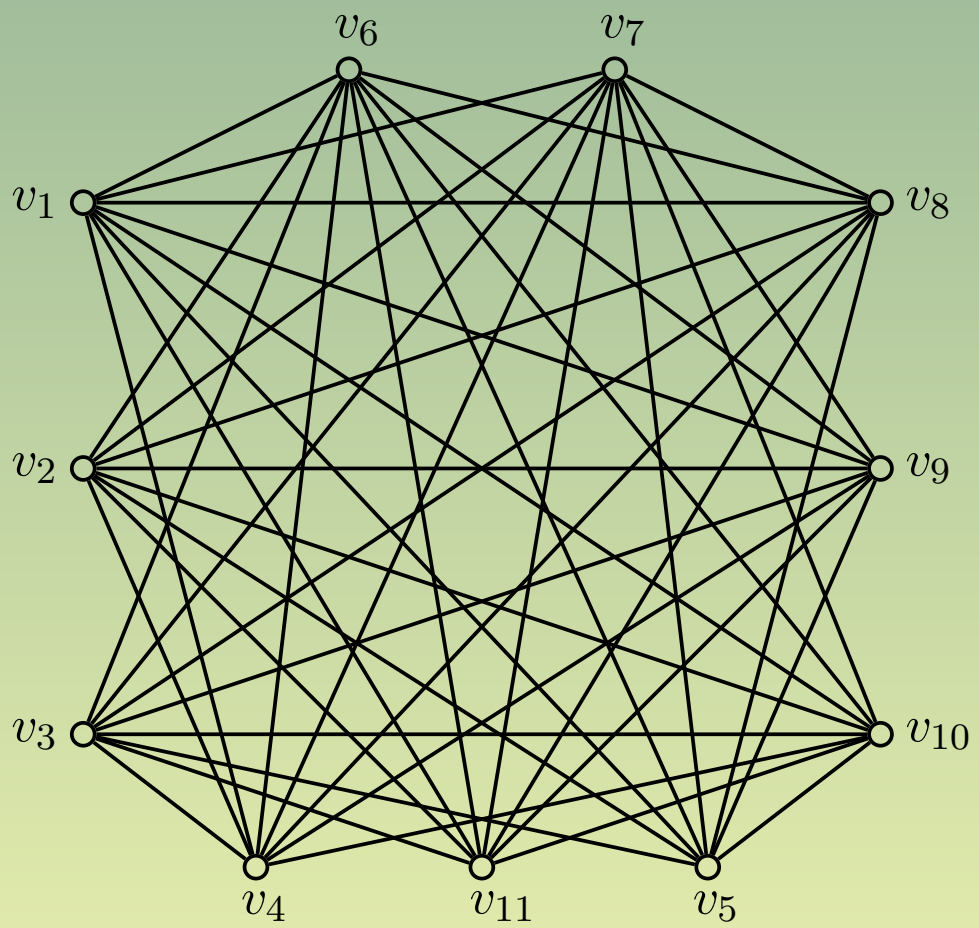
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na slici je prikazan Turánov graf $T_{10,4}$ s particijom vrhova

$$V_1 = \{v_1, v_2, v_3\},\ V_2 = \{v_4, v_5\},\ V_3 = \{v_6, v_7\},\ V_4 = \{v_8, v_9, v_{10}\}.$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na slici je prikazan Turánov graf $T_{11,4}$ s particijom vrhova

$$V_1 = \{v_1, v_2, v_3\},\ V_2 = \{v_4, v_5, v_{11}\},\ V_3 = \{v_6, v_7\},\ V_4 = \{v_8, v_9, v_{10}\}.$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.50.

Neka je G jednostavni m-partitni graf s pripadnom particijom vrhova $\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$. Neka je $k(V_i) = \nu_i$. Dokažite da je

$$\varepsilon(G) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \nu_i(\nu - \nu_i).$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.50.

Neka je G jednostavni m-partitni graf s pripadnom particijom vrhova $\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$. Neka je $k(V_i) = \nu_i$. Dokažite da je

$$\varepsilon(G) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \nu_i(\nu - \nu_i).$$

Rješenje.

Svaki vrh iz V_i može biti susjedan samo s vrhovima iz $V_1, V_2, \ldots, V_{i-1}, V_{i+1}, \ldots, V_m$. Vrh iz V_i možemo odabrati na ν_i načina, a vrh koji ne pripada skupu V_i možemo odabrati na $\nu - \nu_i$ načina. Dakle, za svaki $i = 1, 2, \ldots, m$ u grafu G imamo najviše $\nu_i(\nu - \nu_i)$ bridova kojima je jedan kraj u V_i.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Stoga je

$$\varepsilon(G) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \nu_i(\nu - \nu_i)$$

jer je u gornjoj sumi svaki brid brojan dvaput. Naime, svaki brid e u grafu G ima dva kraja koji pripadaju dvama različitim elementima V_i i V_j particije vrhova. Jedanput brid e brojimo kod prebrojavanja svih bridova kojima je jedan kraj u V_i, a drugi put brid e brojimo kod prebrojavanja svih bridova kojima je jedan kraj u V_j.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.51.

Dokažite da Turánov graf $T_{n,m}$ ima ukupno

$$\varepsilon(T_{n,m}) = \binom{n-k}{2} + (m-1)\binom{k+1}{2}$$

bridova, gdje je $k = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.51.

Dokažite da Turánov graf $T_{n,m}$ ima ukupno

$$\varepsilon(T_{n,m}) = \binom{n-k}{2} + (m-1)\binom{k+1}{2}$$

bridova, gdje je $k = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$.

Rješenje.

Neka je $\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ pripadna particija vrhova grafa $T_{n,m}$.
Neka je $k(V_i) = n_i$. Prema prethodnom primjeru je

$$\varepsilon(T_{n,m}) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} n_i(n - n_i).$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Međutim, kako je $T_{n,m}$ potpuni m-partitni graf, tada zapravo vrijedi jednakost, tj.

$$\varepsilon(T_{n,m}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} n_i(n-n_i).$$

Nadalje, svaki član particije $\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ ima k ili $k+1$ vrhova pa je

$$n_i(n-n_i) = \begin{cases} k(n-k), & \text{ako je } n_i = k \\ (k+1)(n-k-1), & \text{ako je } n_i = k+1 \end{cases}$$

za svaki $i = 1, 2, \ldots, m$. Ako u svaku particiju stavimo najprije po k vrhova, tada nam preostane još $n - mk$ vrhova. Zaključujemo da u $T_{n,m}$ imamo ukupno $n - mk$ klasa s $k+1$ vrhova i $m - (n - mk) = m - n + mk$ klasa s k vrhova. Stoga je

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

$$\varepsilon(T_{n,m}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} n_i(n-n_i) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big((m-n+mk)k(n-k)+(n-mk)(k+1)(n-k-1)\Big) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\big(n^2-2kn-n+k^2m+km\big) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\big(n^2-2kn-n+k^2+k\big)+\tfrac{1}{2}(m-1)\big(k^2+k\big) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big((n-k)^2-(n-k)\Big)+\tfrac{1}{2}(m-1)\big(k^2+k\big) =$$

$$= \tfrac{1}{2}(n-k)(n-k-1)+\tfrac{1}{2}(m-1)k(k+1) =$$

$$= \binom{n-k}{2}+(m-1)\binom{k+1}{2}$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.52.

Dokažite da među svim jednostavnim m-partitnim grafovima s n vrhova, Turánov graf $T_{n,m}$ ima najveći broj bridova.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.52.

Dokažite da među svim jednostavnim m-partitnim grafovima s n vrhova, Turánov graf $T_{n,m}$ ima najveći broj bridova.

Rješenje.

Neka je G jednostavni m-partitni graf s n vrhova. Ukoliko G nije potpuni m-partitni graf, tada on sigurno ima manje bridova od pripadnog potpunog m-partitnog grafa s n vrhova. Stoga pretpostavimo da je G potpuni m-partitni graf s n vrhova i pripadnom particijom $\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$. Tvrdimo da je $\varepsilon(G) \leqslant \varepsilon(T_{n,m})$. Pretpostavimo da u particiji $\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ postoje V_i i V_j čiji se broj elemenata razlikuje za više od 1, tj. neka je $k(V_i) - 1 > k(V_j)$. Neka je $v_0 \in V_i$ proizvoljni vrh. Ako vrh v_0 premjestimo iz klase V_i u klasu V_j, izgubit ćemo $k(V_j)$ bridova, ali ćemo dobiti $k(V_i) - 1$ bridova.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Kako je po pretpostavci $k(V_i) - 1 > k(V_j)$, broj bridova nakon ove operacije se povećao. Zaključujemo da će graf G imati maksimalni broj bridova ukoliko elementi particije vrhova imaju jednaki broj elemenata ili pak se broj njihovih elemenata razlikuje najviše za 1. Dakle, da bi graf G imao maksimalni broj bridova, mora svaki element particije vrhova imati $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ ili $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ elemenata, tj. mora biti $G = T_{n,m}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.53.

Ako je G jednostavni graf, dokažite da je $\gamma \geqslant \frac{\nu^2}{\nu^2 - 2\varepsilon}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.53.

Ako je G jednostavni graf, dokažite da je $\gamma \geqslant \frac{\nu^2}{\nu^2 - 2\varepsilon}$.

Rješenje.

Mogli bismo primjer rješavati u istom stilu kao što smo rješavali primjer 6.13., a za to bi nam trebali uvjetni ekstremi realnih funkcija više varijabli. Međutim, kako trenutno toliko uživamo u grafovima, ne želimo odlaziti u druga područja i objašnjavati uvjetne ekstreme. Stoga ćemo ponuditi rješenje u kojemu nećemo koristiti matematičku analizu.

Kako je G γ-kromatski graf, tada je G i γ-partitni graf. Prema prethodnom primjeru, među svim jednostavnim γ-partitnim grafovima s ν vrhova, Turánov graf $T_{\nu,\gamma}$ ima najveći broj bridova. U Turánovom grafu $T_{\nu,\gamma}$ svaki član particije vrhova ima $\left\lfloor \frac{\nu}{\gamma} \right\rfloor$ ili $\left\lceil \frac{\nu}{\gamma} \right\rceil$ elemenata.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Pretpostavimo trenutno da svaki član particije ima $\left\lceil \frac{\nu}{\gamma} \right\rceil$ vrhova. Svaki brid je određen s dva vrha. Prvi vrh možemo birati na ν načina, a drugi vrh na $\nu - \left\lceil \frac{\nu}{\gamma} \right\rceil$ načina jer vrhovi iz iste particije nisu susjedni pa između njih ne postoji brid. Stoga je u tom slučaju dvostruki broj bridova u $T_{\nu,\gamma}$ jednak $\nu\left(\nu - \left\lceil \frac{\nu}{\gamma} \right\rceil\right)$. Međutim, općenito u $T_{\nu,\gamma}$ ne mora svaki član particije imati $\left\lceil \frac{\nu}{\gamma} \right\rceil$ vrhova, neki članovi particije imaju $\left\lfloor \frac{\nu}{\gamma} \right\rfloor$ vrhova. Stoga je

$$2\varepsilon(T_{\nu,\gamma}) \leqslant \nu\left(\nu - \left\lceil \frac{\nu}{\gamma} \right\rceil\right).$$

Kako je $\varepsilon = \varepsilon(G) \leqslant \varepsilon(T_{\nu,\gamma})$, slijedi

$$2\varepsilon \leqslant \nu\left(\nu - \left\lceil \frac{\nu}{\gamma} \right\rceil\right).$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Nadalje, zbog $\frac{\nu}{\gamma} \leqslant \left\lceil \frac{\nu}{\gamma} \right\rceil$ dobivamo

$$2\varepsilon \leqslant \nu \left(\nu - \frac{\nu}{\gamma} \right).$$

Daljnjim raspisivanjem dobivamo

$$2\varepsilon \leqslant \nu \left(\nu - \frac{\nu}{\gamma} \right)$$

$$2\varepsilon \leqslant \nu^2 - \frac{\nu^2}{\gamma} \Big/ \cdot \gamma$$

$$2\varepsilon\gamma \leqslant \nu^2\gamma - \nu^2$$

$$\nu^2 \leqslant \gamma\left(\nu^2 - 2\varepsilon\right)$$

$$\gamma \geqslant \frac{\nu^2}{\nu^2 - 2\varepsilon}$$

Uočimo da je $\nu^2 - 2\varepsilon > 0$ jer je G jednostavni graf pa je $\varepsilon \leqslant \binom{\nu}{2}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.54.

Neka je G jednostavni k-regularni graf. Dokažite da je $\gamma \geqslant \frac{\nu}{\nu - k}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.54.

Neka je G jednostavni k-regularni graf. Dokažite da je $\gamma \geqslant \frac{\nu}{\nu-k}$.

Rješenje.

Prema prethodnom primjeru je $\gamma \geqslant \frac{\nu^2}{\nu^2-2\varepsilon}$. Kako je G k-regularni graf, iz svakog vrha izlazi točno k bridova pa je $2\varepsilon = \nu k$. Dalje dobivamo

$$\gamma \geqslant \frac{\nu^2}{\nu^2 - 2\varepsilon}$$

$$\gamma \geqslant \frac{\nu^2}{\nu^2 - \nu k}$$

$$\gamma \geqslant \frac{\nu^2}{\nu(\nu - k)}$$

$$\gamma \geqslant \frac{\nu}{\nu - k}$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Pohlepno bojanje vrhova grafa

Spomenuli smo ranije da općenito ne postoji efikasan algoritam za bojanje vrhova grafa. Međutim, usprkos tome koriste se pohlepni algoritmi, koji su efikasni u smislu brzine, ali ne daju uvijek bojanje vrhova s minimalnim brojem boja. Kao i svaki pohlepni algoritam, tako i pohlepno bojanje vrhova grafa u svakom koraku daje lokalno optimalno rješenje u nadi da će na kraju dobiveno rješenje biti i globalno optimalno. Kod Kruskalovog i Primovog algoritma ta pohlepnost funkcionira, tj. daje na kraju globalno optimalno rješenje, no kod bojanja vrhova grafa, nažalost, ne dobivamo uvijek optimalno rješenje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Pohlepno bojanje vrhova grafa boja vrhove grafa u određenom redoslijedu $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ na sljedeći način. Pretpostavljamo da je skup boja zapravo skup prirodnih brojeva. Vrhu v_i se pridružuje najmanja dostupna boja s kojom nije obojan niti jedan od njegovih eventualnih susjeda $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$. Ukoliko se za bojanje vrha v_i ne može upotrijebiti niti jedna od već korištenih boja, uzima se sljedeća najmanja boja koja se još nije koristila.

Početni redoslijed vrhova grafa jako utječe na optimalnost konačnog rješenja. Dokazat ćemo malo kasnije da uvijek postoji redoslijed vrhova grafa s kojim pohlepno bojanje vrhova daje na kraju bojanje s minimalnim brojem boja, jedino je problem što je takav redoslijed vrhova teško pronaći.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Isto tako, mnogi početni redoslijedi vrhova grafa mogu na kraju rezultirati jako lošim pohlepnim bojanjem. Na primjer, kod nekih bipartitnih grafova je moguće pronaći takav poredak vrhova s kojim će pohlepno bojanje koristiti čak $\frac{\nu}{2}$ boja, a znamo da su bipartitni grafovi 2-kromatski. Dakle, pohlepno bojanje vrhova grafa može biti jako dobro, ali može biti i jako loše, a na to utječe redoslijed bojanja vrhova.

Pohlepna bojanja se upravo razlikuju po tome kojim redoslijedom bojaju vrhove grafa. Ovdje ćemo spomenuti tri metode za određivanje redoslijeda pohlepnog bojanja vrhova.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

- **Slučajni poredak vrhova.** Ovo je najjednostavnija i najbrža metoda koja uzima proizvoljni poredak bojanja vrhova grafa. Glavne prednosti te metode su zasigurno jednostavnost i brzina, ali nedostatak joj je da može rezultirati lošim pohlepnim bojanjem koje može biti dosta daleko od optimalnog. Složenost te metode je $O(\nu)$.

- **Welsh-Powellov algoritam.** Na početku se vrhovi sortiraju u padajućem poretku $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ s obzirom na njihov stupanj, tj. ako je $i < j$, tada je $d(v_i) \geqslant d(v_j)$. Drugim riječima, vrh s većim stupnjem će biti obojan prije vrha s manjim stupnjem. Ova metoda daje bolje rezultate od metode slučajnog poretka vrhova, ali je njezina složenost $O(\nu^2)$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

- **Brèlazov algoritam.** Ovo je jedna od najboljih poznatih metoda i daje bolje rezultate od prethodne dvije metode. Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na sljedeći način. Na početku se nekom vrhu s najvećim stupnjem pridruži boja 1. Zatim se u svakom sljedećem koraku za svaki neobojani vrh v računa njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$ s obzirom na trenutno obojane vrhove. Stupanj zasićenosti neobojanog vrha v je broj različitih boja s kojima su trenutno obojani (neki, a možda i svi) njegovi susjedni vrhovi. Nakon toga se uzme vrh s najvećim stupnjem zasićenosti (ako ih ima više, odaberemo nekog od njih) i njemu se pridruži najmanja dostupna boja. Opisani postupak se ponavlja sve dok se ne obojaju svi vrhovi zadanog grafa. Složenost ove metode je $O(\nu^3)$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Pohlepno bojanje (slučajni raspored vrhova)

ULAZ: jednostavni graf G

IZLAZ: neko bojanje vrhova grafa G koje nije nužno i optimalno

1: Uzmi po volji neki raspored vrhova $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ grafa G. Nadalje, pretpostavljamo da je skup boja skup $\mathbb{N}$.

2: Vrhu v_1 pridruži boju 1. Stavi $i = 2$.

3: Dok je $i \leqslant \nu$ radi sljedeće:
Vrhu v_i pridruži najmanju dostupnu boju s kojom nije obojan niti jedan od njegovih eventualnih susjeda $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$ i varijablu i povećaj za 1.
Ako se za bojanje vrha v_i ne može upotrijebiti niti jedna od već korištenih boja, uzmi sljedeću najmanju boju koja se još nije koristila.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.55.

Dokažite da za svaki graf G postoji raspored vrhova za koji će pohlepno bojanje dati bojanje s minimalnim brojem boja.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.55.

Dokažite da za svaki graf G postoji raspored vrhova za koji će pohlepno bojanje dati bojanje s minimalnim brojem boja.

Rješenje.

Kako petlje ne utječu na bojanje vrhova grafa, možemo pretpostaviti da je G graf bez petlji. Neka je G γ-kromatski graf. Tada skup njegovih vrhova možemo particionirati u γ klasa $V_1, V_2, \ldots, V_\gamma$ tako da nikoja dva vrha iz iste klase nisu susjedni vrhovi. Vrhove grafa G rasporedimo na sljedeći način. Na početak stavimo sve vrhove iz V_1 u nekom proizvoljnom poretku, nakon njih stavimo sve vrhove iz V_2 u proizvoljnom poretku i tako redom do zadnje klase V_γ.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Kratko zapisano, raspored vrhova je

$$V_1, V_2, \ldots, V_\gamma$$

pri čemu vrhovi iz iste klase mogu biti u proizvoljnom poretku, ali također i klase mogu biti u proizvoljnom poretku. Važno je samo da između svaka dva vrha iz iste klase bude opet vrh iz te iste klase, tj. vrhovi iz iste klase moraju biti nanizani jedan do drugog u nekom poretku. Ukoliko su vrhovi raspoređeni na opisani način, tada će pohlepno bojanje vrhova grafa G dati bojanje vrhova s minimalnim brojem boja, tj. s γ boja. Naime, pohlepno bojanje će najprije obojati sve vrhove iz klase V_1, a kako u toj klasi nikoja dva vrha nisu susjedna, svi će vrhovi iz V_1 biti obojani bojom 1. Nakon toga će se bojati vrhovi iz V_2. Nikoja dva vrha iz V_2 nisu međusobno susjedni. Ukoliko vrh iz V_2 nije susjedan s niti jednim vrhom iz V_1, tada će on biti obojan bojom 1. Ako pak je vrh iz V_2 susjedan s nekim vrhom iz V_1, tada će on biti obojan bojom 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Sigurno postoji barem jedan vrh iz V_2 koji je susjedan s nekim vrhom iz V_1 jer u protivnom bi se klase V_1 i V_2 mogle spojiti u jednu klasu, što je kontradikcija s pretpostavkom da je G γ-kromatski graf. Dakle, poanta je da nakon bojanja klasa V_1 i V_2 pohlepno bojanje je koristilo točno dvije boje. Pretpostavimo da je nakon bojanja klasa $V_1, V_2, \ldots, V_i$ pohlepno bojanje koristilo točno i boja. U sljedećem koraku se prelazi na bojanje vrhova iz klase V_{i+1}. U toj klasi mora postojati barem jedan vrh v_0 koji je susjedan sa svakom od klasa $V_1, V_2, \ldots, V_i$, tj. vrh v_0 koji je susjedan s barem po jednim vrhom iz svake od navedenih klasa. Naime, kada takav vrh v_0 ne bi postojao, tada bismo svaki vrh iz klase V_{i+1} mogli staviti u neku od klasa $V_1, V_2, \ldots, V_i$, a da pritom svojstvo "svaka dva vrha iz iste klase nisu susjedni vrhovi" ostane i dalje sačuvano. U tom slučaju bi klasa V_{i+1} nestala pa G ne bi bio γ-kromatski graf, što je kontradikcija s pretpostavkom.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Dakle, u klasi V_{i+1} postoji vrh v_0 koji je susjedan s barem po jednim vrhom iz svake od klasa $V_1, V_2, \ldots, V_i$ pa će za bojanje vrha v_0 pohlepno bojanje koristiti boju $i+1$. Kako nikoja dva vrha u klasi V_{i+1} nisu međusobno susjedni, boja $i+1$ će biti korištena za sve vrhove koji imaju isto svojstvo kao i vrh v_0. Svi ostali vrhovi iz V_{i+1} će biti obojani nekom od već korištenih boja $\{1, 2, \ldots, i\}$. Zaključujemo da je nakon bojanja klasa $V_1, V_2, \ldots, V_i, V_{i+1}$ pohlepno bojanje koristilo točno $i+1$ boja. Stoga će nakon bojanja svih klasa pohlepno bojanje iskoristiti točno γ boja.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Napomena.

U prethodnom primjeru smo pokazali da za svaki graf postoji raspored vrhova za kojeg će pohlepno bojanje dati bojanje vrhova s minimalnim brojem boja. Štoviše, takav raspored vrhova općenito nije jedinstven i može postojati i veći broj takvih dobrih rasporeda vrhova. Međutim, usprkos tome ipak je općenito teško pronaći jedan takav dobar raspored vrhova. Naime, za graf s ν vrhova imamo ukupno $\nu!$ mogućih rasporeda vrhova, što je jako veliki broj mogućnosti čak i za grafove s desetak vrhova pa je mala vjerojatnost da bismo u nekom razumnom vremenu mogli doći do jednog takvog dobrog rasporeda vrhova.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Pohlepno bojanje (Welsh-Powellov algoritam)

ULAZ: jednostavni graf G

IZLAZ: neko bojanje vrhova grafa G koje nije nužno i optimalno

1: Rasporedi vrhove padajuće s obzirom na njihove stupnjeve. Neka je $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ dobiveni raspored vrhova. Nadalje, pretpostavljamo da je skup boja skup $\mathbb{N}$.

2: Vrhu v_1 pridruži boju 1. Stavi $i = 2$.

3: Dok je $i \leqslant \nu$ radi sljedeće:
Vrhu v_i pridruži najmanju dostupnu boju s kojom nije obojan niti jedan od njegovih eventualnih susjeda $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$ i varijablu i povećaj za 1.
Ako se za bojanje vrha v_i ne može upotrijebiti niti jedna od već korištenih boja, uzmi sljedeću najmanju boju koja se još nije koristila.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.56.

Neka je $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_\nu$ *padajući niz stupnjeva vrhova grafa* G. *Dokažite da je* $\gamma(G) \leqslant \max_i \min\{d_i + 1, i\}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.56.

Neka je $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_\nu$ *padajući niz stupnjeva vrhova grafa* G. *Dokažite da je* $\gamma(G) \leqslant \max_i \min\{d_i + 1, i\}$.

Rješenje.

Kod bojanja vrha v_i pohlepni algoritam ignorira sve susjedne vrhove v_j vrha v_i za koje je $j > i$. Stoga za bojanje vrha v_i trebamo, umjesto $d_G(v_i) + 1$ boja, imati na raspolaganju najviše $d_{G[\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}]}(v_i) + 1$ različitih boja. Jasno je da će broj $d_{G[\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}]}(v_i) + 1$ biti manji, što je manji stupanj vrha v_i u induciranom podgrafu $G\big[\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}\big]$. To ćemo postići tako da vrhove rasporedimo padajuće s obzirom na njihove stupnjeve. Kada algoritam dođe do koraka u kojemu mora obojati vrh v_i, mogu nastupiti dva slučaja.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

- $d_G(v_i) = d_i < i - 1$, tj. $d_i + 1 < i$

U tom slučaju vrh v_i sigurno nije susjedan sa svim vrhovima $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$ i u najgorem slučaju je susjedan sa prvih d_i vrhova pa će u svakom slučaju za njegovo bojanje biti dostupna neka od boja (prva najmanja) iz skupa $\{1, 2, \ldots, d_i, d_i + 1\}$.

- $d_G(v_i) = d_i \geqslant i - 1$, tj. $d_i + 1 \geqslant i$

U ovom slučaju razlikujemo dva podslučaja. Ako vrh v_i nije susjedan s nekim od vrhova $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$, tada je za bojanje vrha v_i sigurno dostupna neka od boja iz skupa $\{1, 2, \ldots, i - 1\}$. Ako pak je vrh v_i susjedan sa svim vrhovima $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$, u najgorem slučaju su svi vrhovi $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$ obojani istom bojom pa će u tom slučaju za bojanje vrha v_i biti dostupna neka od boja iz skupa $\{1, 2, \ldots, i - 1, i\}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Zaključujemo da je za bojanje vrha v_i dovoljno imati na raspolaganju $\min\{d_i+1, i\}$ različitih boja. Stoga će algoritam za pohlepno bojanje vrhova (Welsh-Powellov algoritam) na kraju ukupno koristiti $\max_i \min\{d_i+1, i\}$ različitih boja pa je $\gamma(G) \leqslant \max_i \min\{d_i+1, i\}$.

Napomena.

U sljedećem primjeru ćemo koristiti sljedeće dvije činjenice.

$$\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} + \max\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} = \\ = \max\{x_i + y_j : i \in \{1, \ldots, n\},\ j \in \{1, \ldots, m\}\}$$

$$\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} + \min\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} = \\ = \min\{x_i + y_j : i \in \{1, \ldots, n\},\ j \in \{1, \ldots, m\}\}$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.57.

Neka je G jednostavni graf. Dokažite da je

$$\gamma(G) + \gamma(G^c) \leqslant \nu + 1.$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.57.

Neka je G jednostavni graf. Dokažite da je

$$\gamma(G) + \gamma(G^c) \leqslant \nu + 1.$$

Rješenje.

Neka su $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ padajuće sortirani vrhovi grafa G s obzirom na njihove stupnjeve u G. Neka je $d_i = d_G(v_i)$. Tada je $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_\nu$. Vrh v_i u grafu G^c ima stupanj jednak $(\nu - 1) - d_i$, tj. $d_{G^c}(v_i) = (\nu - 1) - d_i$. Ako stavimo $d'_i = (\nu - 1) - d_i$, tada je $d'_\nu \geqslant \cdots \geqslant d'_2 \geqslant d'_1$. Stoga su $v_\nu, \ldots, v_2, v_1$ padajuće sortirani vrhovi u G^c s obzirom na njihove stupnjeve u G^c. Drugim riječima, vrh v_i se u grafu G nalazi na i-tom mjestu, a u grafu G^c se nalazi na $(\nu - i + 1)$-om mjestu u pripadnom sortiranom nizu vrhova. Prethodni primjer povlači

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

$$\gamma(G) + \gamma(G^c) \leqslant$$

$$\leqslant \max_i \min\{d_i + 1, i\} + \max_i \min\{d'_i + 1, \nu - i + 1\} =$$

$$= \max_{i,j} \left\{ \min\{d_i + 1, i\} + \min\{d'_j + 1, \nu - j + 1\} \right\} =$$

$$= \max_{i,j} \left\{ \min\{d_i + d'_j + 2, \nu + d_i - j + 2, i + 1 + d'_j, i - j + \nu + 1\} \right\}$$

Među brojevima

$$d_i + d'_j + 2,\ \nu + d_i - j + 2,\ i + 1 + d'_j,\ i - j + \nu + 1$$

barem jedan od njih je uvijek $\leqslant \nu + 1$ za sve indekse i i j.
Dokažimo tu tvrdnju.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Razlikujemo dva slučaja.

- $i \leqslant j$

U tom slučaju je zadnji od promatrana četiri broja $\leqslant \nu + 1$.

$$i - j + \nu + 1 = (\nu + 1) + \underbrace{(i - j)}_{\leqslant 0} \leqslant \nu + 1$$

- $i > j$

Ako je $i > j$, tada je $d_i \leqslant d_j$ jer je po pretpostavci $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_\nu$. U tom slučaju je prvi od promatrana četiri broja $\leqslant \nu + 1$.

$$d_i + d'_j + 2 = d_i + (\nu - 1) - d_j + 2 = (\nu + 1) + \underbrace{(d_i - d_j)}_{\leqslant 0} \leqslant \nu + 1$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Stoga je

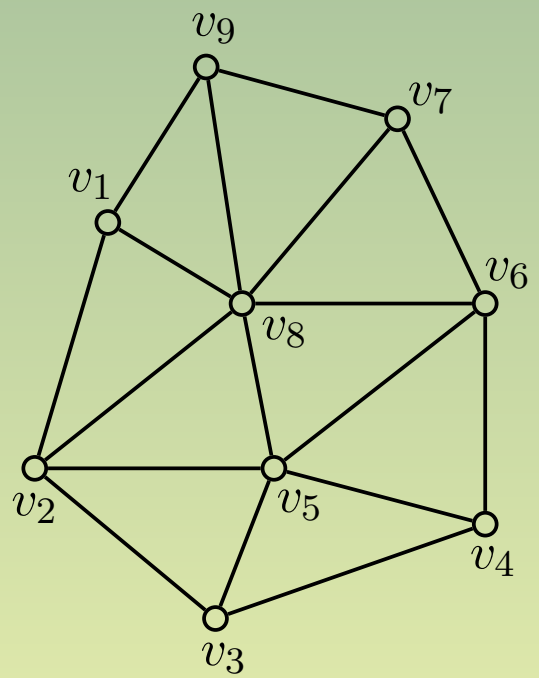
$$\min\{d_i + d'_j + 2, \nu + d_i - j + 2, i + 1 + d'_j, i - j + \nu + 1\} \leqslant \nu + 1$$

za svaki izbor indeksa $i, j \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$. Konačno, kada tražimo maksimum nekog skupa brojeva u kojemu su svi brojevi $\leqslant \nu + 1$, tada je i taj maksimum $\leqslant \nu + 1$. Zaključujemo da je zaista $\gamma(G) + \gamma(G^c) \leqslant \nu + 1$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.58.

Pokažite da pohlepno bojanje sa slučajnim rasporedom vrhova ne daje uvijek bojanje vrhova s minimalnim brojem boja u grafu



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

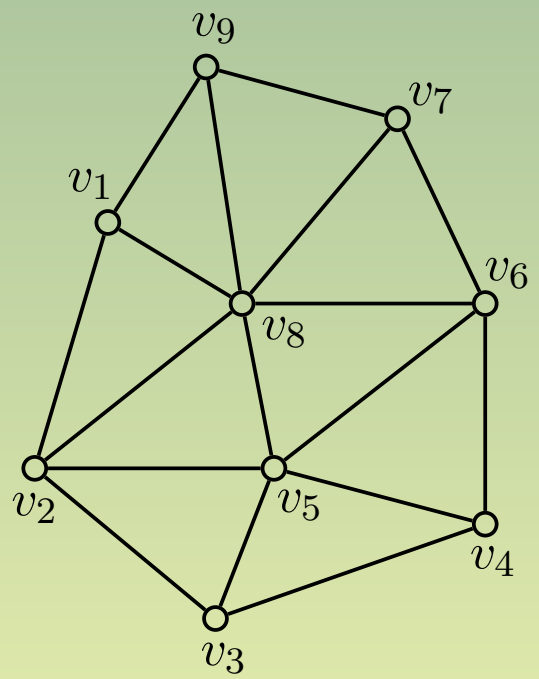
Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja

Primjer 10.58.

Pokažite da pohlepno bojanje sa slučajnim rasporedom vrhova ne daje uvijek bojanje vrhova s minimalnim brojem boja u grafu

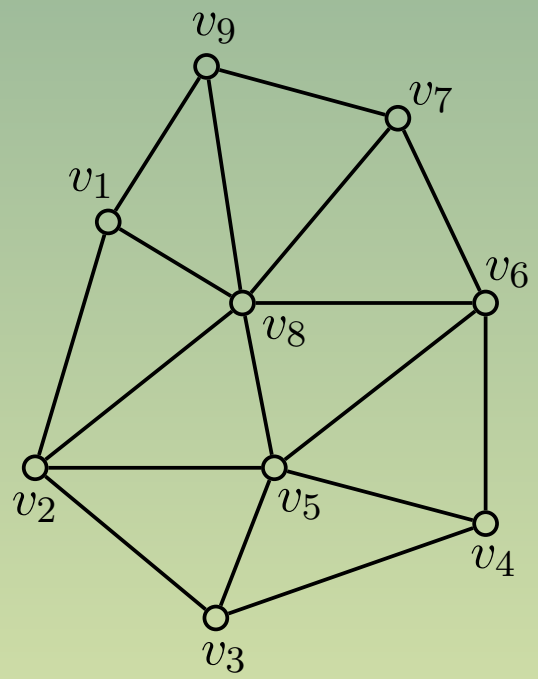


Rješenje.

Od prije znamo da je kromatski broj zadanog grafa jednak 4.

Na primjer, uz raspored vrhova $v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_1, v_2, v_8, v_5$ pohlepno bojanje neće dati bojanje vrhova s minimalnim brojem boja. Uvjerimo se u to.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto, $5 \to$ bijelo

$1:$

$2:$

$3:$

$4:$

$5:$

raspoređeni vrhovi: $v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_1, v_2, v_8, v_5$

Vrh v_3

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

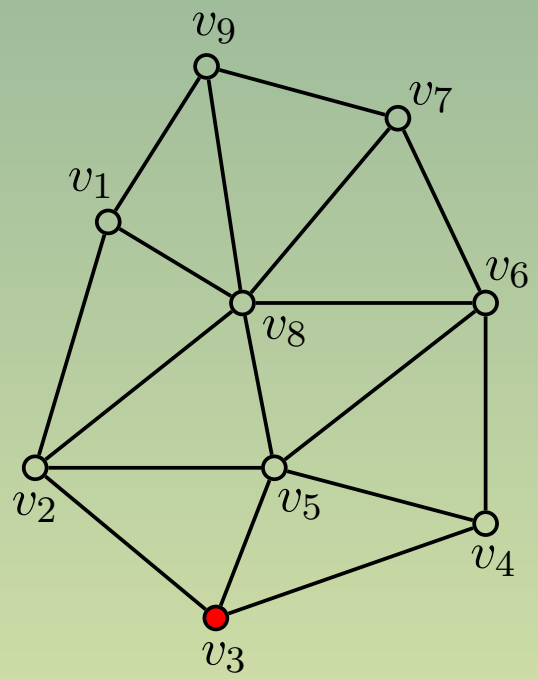
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto, $5 \to$ bijelo

$1 : v_3$

$2 :$

$3 :$

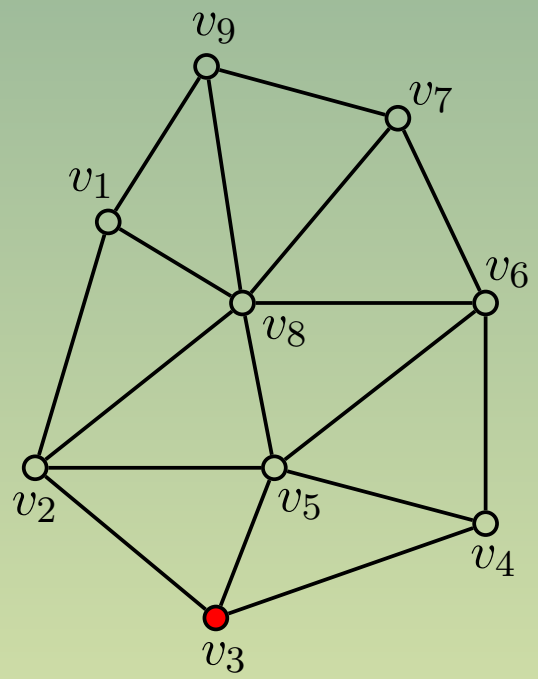
$4 :$

$5 :$

raspoređeni vrhovi: $v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_1, v_2, v_8, v_5$

Vrh v_3 obojamo bojom 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto, $5 \to$ bijelo

$1 : v_3$

$2 :$

$3 :$

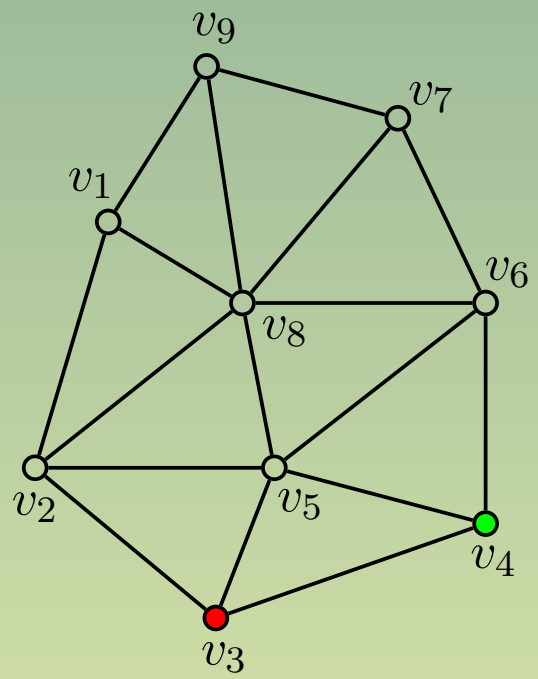
$4 :$

$5 :$

raspoređeni vrhovi: $v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_1, v_2, v_8, v_5$

Prelazimo na vrh v_4 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto, $5 \to$ bijelo

$1 : v_3$

$2 : v_4$

$3 :$

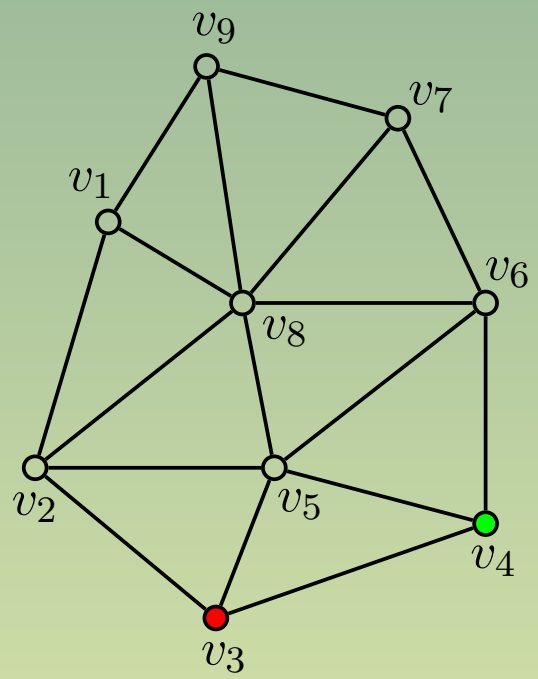
$4 :$

$5 :$

raspoređeni vrhovi: $v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_1, v_2, v_8, v_5$

Prelazimo na vrh v_4 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto, $5 \to$ bijelo

$1 : v_3$

$2 : v_4$

$3 :$

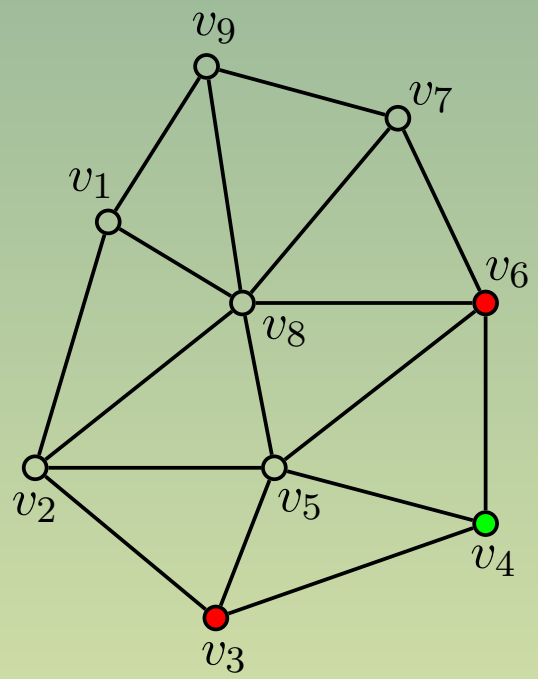
$4 :$

$5 :$

raspoređeni vrhovi: $v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_1, v_2, v_8, v_5$

Prelazimo na vrh v_6 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto, $5 \to$ bijelo

$1 : v_3, v_6$

$2 : v_4$

$3 :$

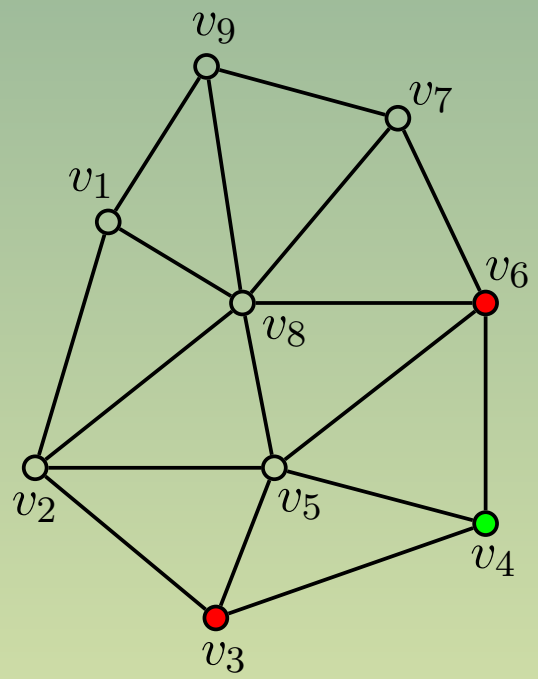
$4 :$

$5 :$

raspoređeni vrhovi: $v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_1, v_2, v_8, v_5$

Prelazimo na vrh v_6 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto, $5 \to$ bijelo

$1 : v_3, v_6$

$2 : v_4$

$3 :$

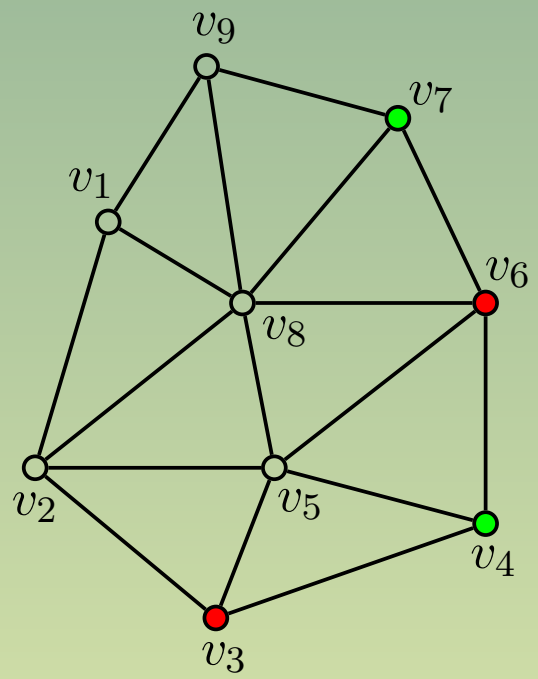
$4 :$

$5 :$

raspoređeni vrhovi: $v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_1, v_2, v_8, v_5$

Prelazimo na vrh v_7 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto, $5 \to$ bijelo

$1 : v_3, v_6$

$2 : v_4, v_7$

$3 :$

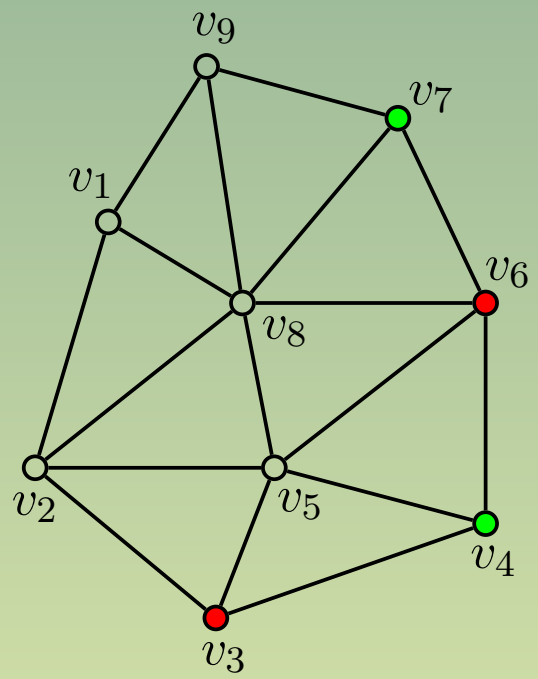
$4 :$

$5 :$

raspoređeni vrhovi: $v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_1, v_2, v_8, v_5$

Prelazimo na vrh v_7 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto, $5 \to$ bijelo

$1 : v_3, v_6$

$2 : v_4, v_7$

$3 :$

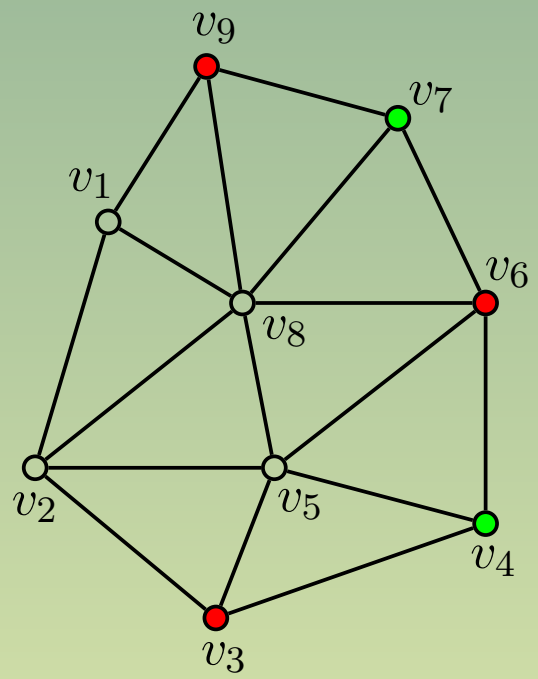
$4 :$

$5 :$

raspoređeni vrhovi: $v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_1, v_2, v_8, v_5$

Prelazimo na vrh v_9 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto, $5 \to$ bijelo

$1 : v_3, v_6, v_9$

$2 : v_4, v_7$

$3 :$

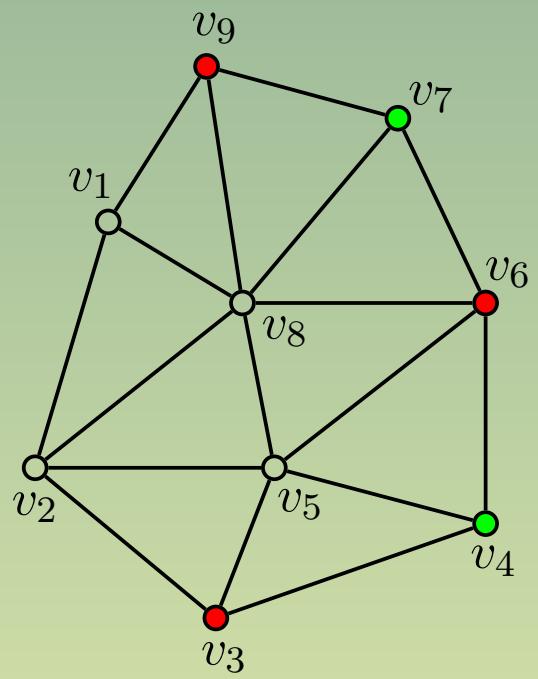
$4 :$

$5 :$

raspoređeni vrhovi: $v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_1, v_2, v_8, v_5$

Prelazimo na vrh v_9 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto, $5 \to$ bijelo

$1 : v_3, v_6, v_9$

$2 : v_4, v_7$

$3 :$

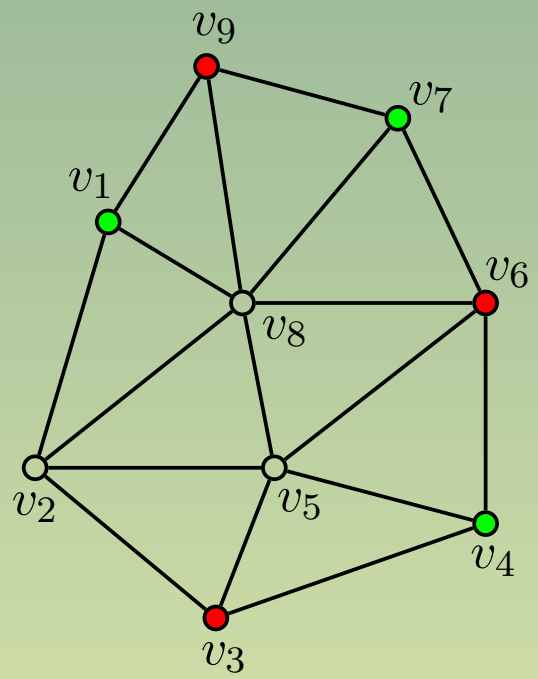
$4 :$

$5 :$

raspoređeni vrhovi: $v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_1, v_2, v_8, v_5$

Prelazimo na vrh v_1 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto, $5 \to$ bijelo

$1 : v_3, v_6, v_9$

$2 : v_4, v_7, v_1$

$3 :$

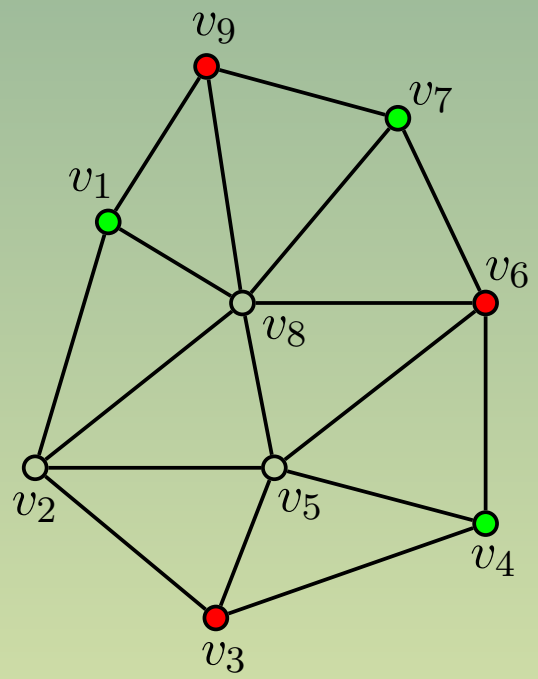
$4 :$

$5 :$

raspoređeni vrhovi: $v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_1, v_2, v_8, v_5$

Prelazimo na vrh v_1 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto, $5 \to$ bijelo

$1 : v_3, v_6, v_9$

$2 : v_4, v_7, v_1$

$3 :$

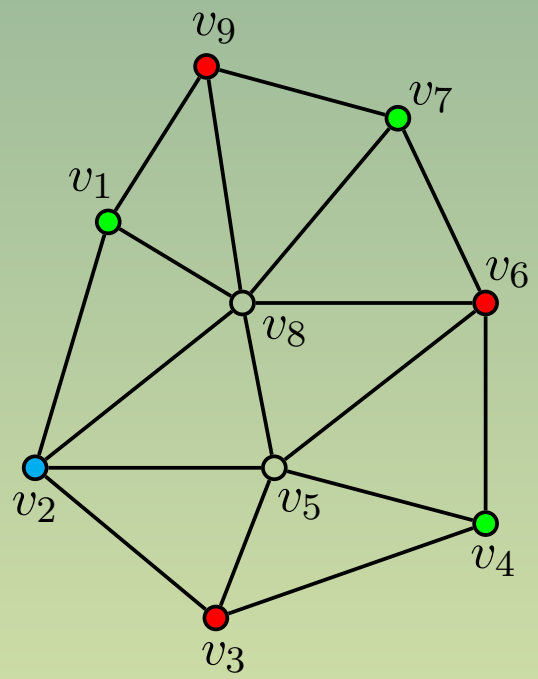
$4 :$

$5 :$

raspoređeni vrhovi: $v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_1, v_2, v_8, v_5$

Prelazimo na vrh v_2 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto, $5 \to$ bijelo

$1 : v_3, v_6, v_9$

$2 : v_4, v_7, v_1$

$3 : v_2$

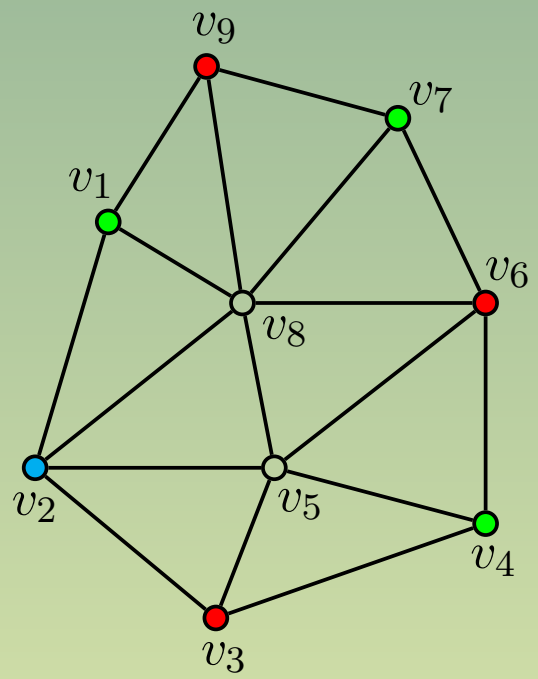
$4 :$

$5 :$

raspoređeni vrhovi: $v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_1, v_2, v_8, v_5$

Prelazimo na vrh v_2 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto, $5 \to$ bijelo

$1 : v_3, v_6, v_9$

$2 : v_4, v_7, v_1$

$3 : v_2$

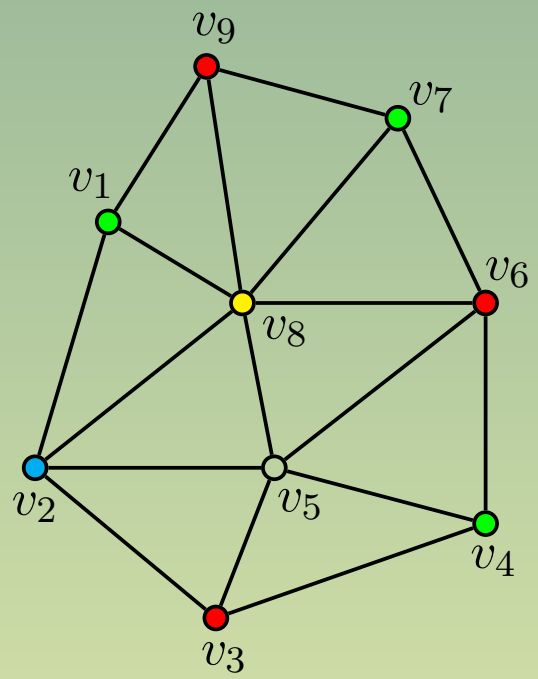
$4 :$

$5 :$

raspoređeni vrhovi: $v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_1, v_2, v_8, v_5$

Prelazimo na vrh v_8 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto, $5 \to$ bijelo

$1 : v_3, v_6, v_9$

$2 : v_4, v_7, v_1$

$3 : v_2$

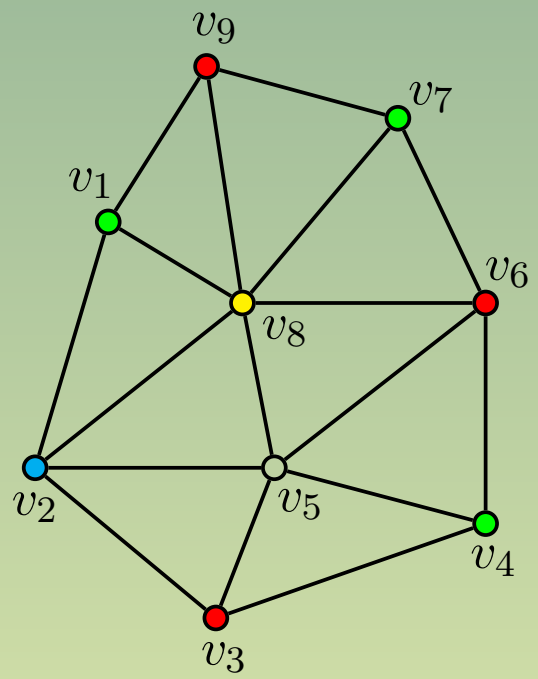
$4 : v_8$

$5 :$

raspoređeni vrhovi: $v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_1, v_2, v_8, v_5$

Prelazimo na vrh v_8 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 4.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto, $5 \to$ bijelo

$1 : v_3, v_6, v_9$

$2 : v_4, v_7, v_1$

$3 : v_2$

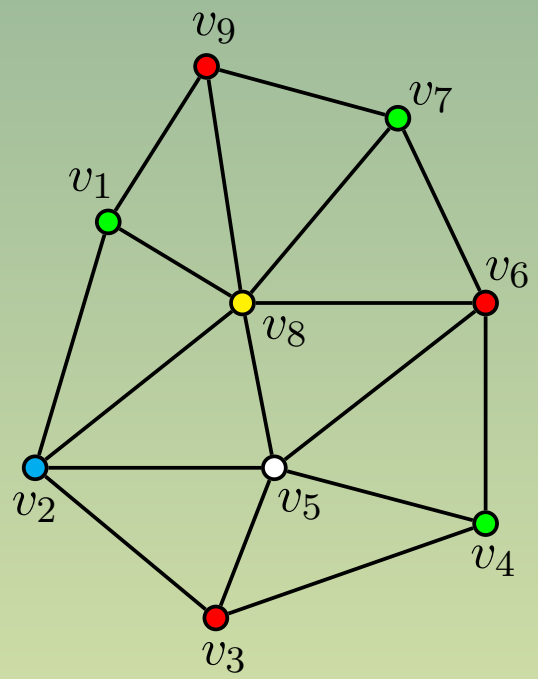
$4 : v_8$

$5 :$

raspoređeni vrhovi: $v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_1, v_2, v_8, v_5$

Prelazimo na vrh v_5 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto, $5 \to$ bijelo

$1 : v_3, v_6, v_9$

$2 : v_4, v_7, v_1$

$3 : v_2$

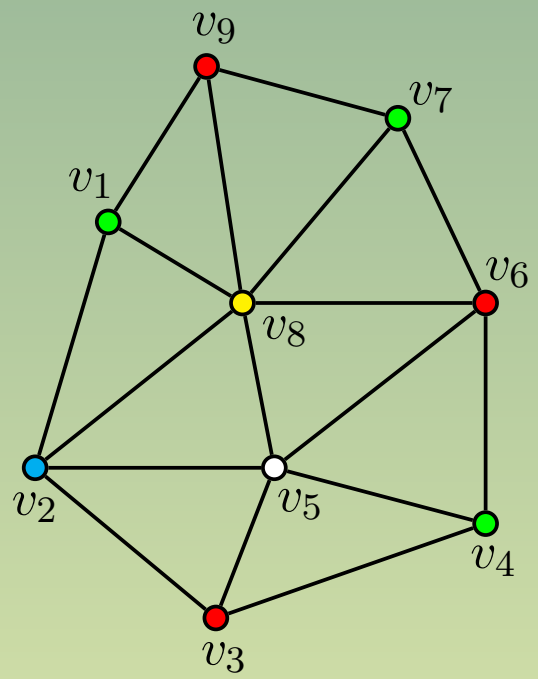
$4 : v_8$

$5 : v_5$

raspoređeni vrhovi: $v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_1, v_2, v_8, v_5$

Prelazimo na vrh v_5 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 5.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto, $5 \to$ bijelo

$1 : v_3, v_6, v_9$

$2 : v_4, v_7, v_1$

$3 : v_2$

$4 : v_8$

$5 : v_5$

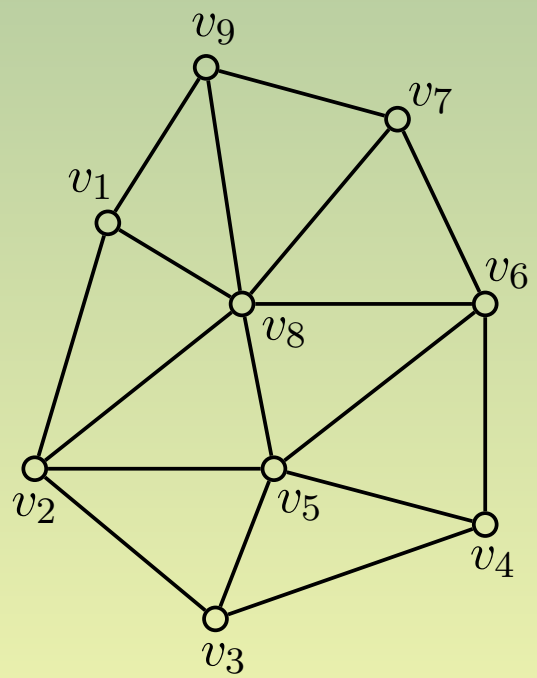
raspoređeni vrhovi: $v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_1, v_2, v_8, v_5$

Dakle, pohlepno bojanje je uz odabrani raspored vrhova koristilo ukupno pet boja. Od prije znamo da se zadani graf može obojati s četiri boje pa u ovom slučaju pohlepnim bojanjem nismo dobili optimalno bojanje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.59.

Pokažite da Welsh-Powellov algoritam daje bojanje vrhova s minimalnim brojem boja u grafu



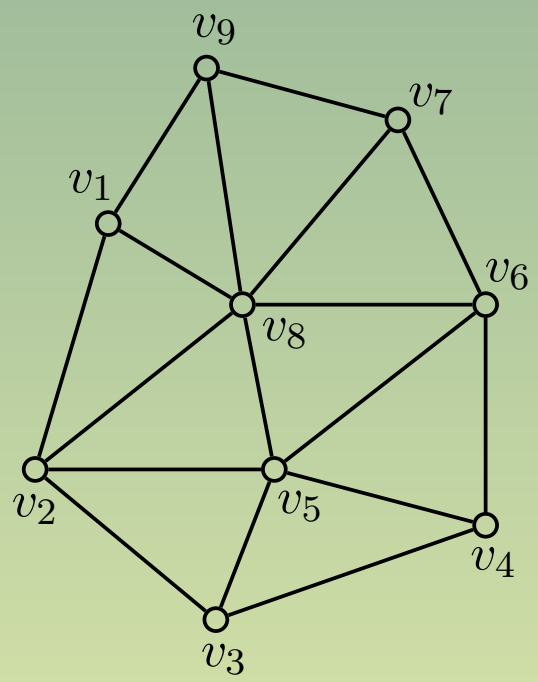
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Rješenje.

Od prije znamo da je kromatski broj zadanog grafa jednak 4. Welsh-Powellov algoritam sortira vrhove padajuće s obzirom na njihove stupnjeve. Kako u zadanom grafu postoji više vrhova istog stupnja, traženi raspored vrhova nije jedinstven. Ovdje ćemo uzeti jedan takav padajući raspored vrhova s obzirom na njihove stupnjeve, a vi pokažite da u ovom slučaju svi takvi mogući rasporedi uvijek daju bojanje vrhova s minimalnim brojem boja. Također je dobro da na računalu generirate sve takve rasporede i pripadna pohlepna bojanja i ekperimentalno se uvjerite da su u svakom slučaju to ujedno i optimalna bojanja. Ovdje ćemo uzeti sljedeći padajući raspored vrhova s obzirom na njihove stupnjeve:

$$v_8, v_5, v_2, v_6, v_1, v_3, v_4, v_7, v_9.$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1:$

$2:$

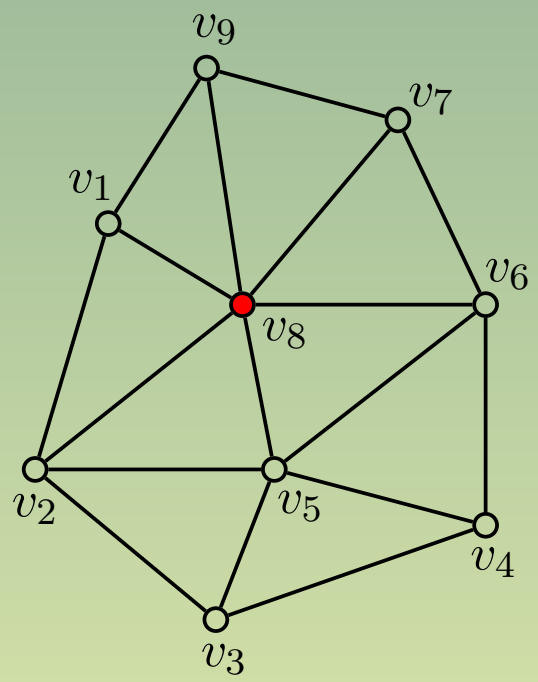
$3:$

$4:$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_2, v_6, v_1, v_3, v_4, v_7, v_9$

Vrh v_8

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 :$

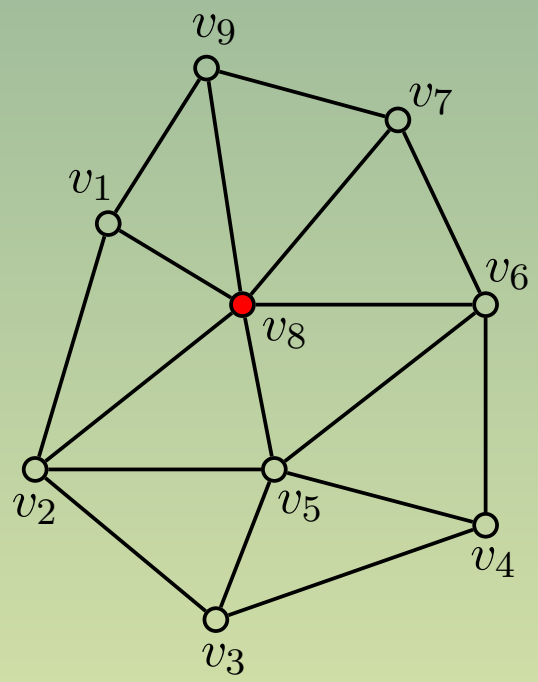
$3 :$

$4 :$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_2, v_6, v_1, v_3, v_4, v_7, v_9$

Vrh v_8 obojamo bojom 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 :$

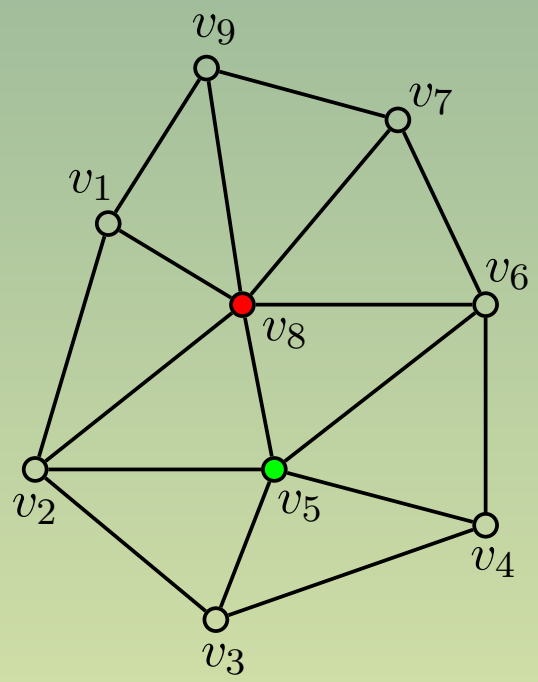
$3 :$

$4 :$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_2, v_6, v_1, v_3, v_4, v_7, v_9$

Prelazimo na vrh v_5 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \rightarrow$ crveno, $2 \rightarrow$ zeleno, $3 \rightarrow$ plavo, $4 \rightarrow$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_5$

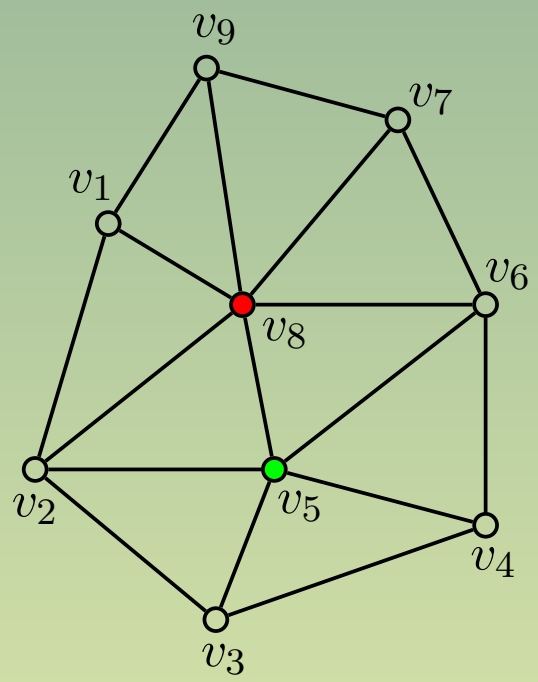
$3 :$

$4 :$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_2, v_6, v_1, v_3, v_4, v_7, v_9$

Prelazimo na vrh v_5 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_5$

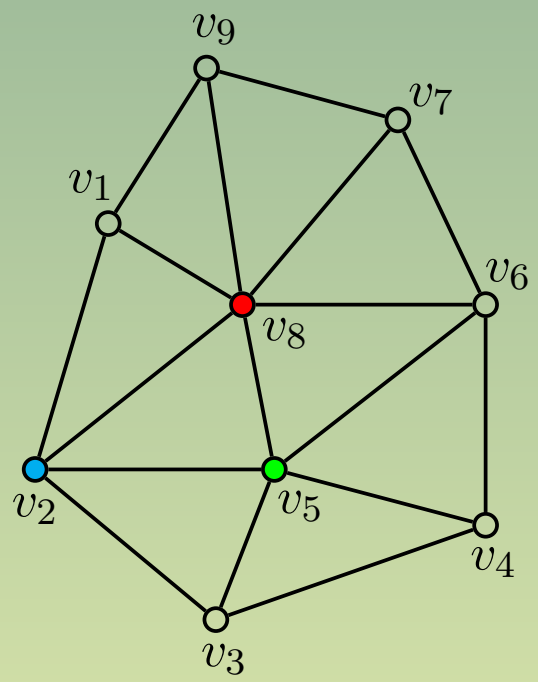
$3 :$

$4 :$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_2, v_6, v_1, v_3, v_4, v_7, v_9$

Prelazimo na vrh v_2 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_5$

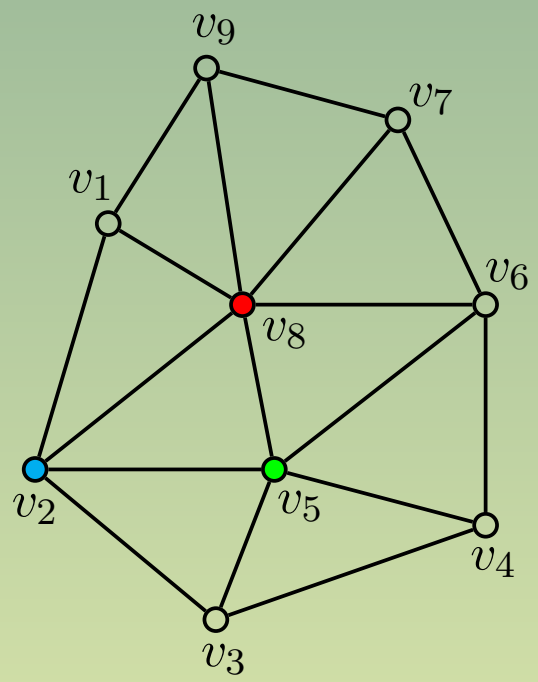
$3 : v_2$

$4 :$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_2, v_6, v_1, v_3, v_4, v_7, v_9$

Prelazimo na vrh v_2 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_5$

$3 : v_2$

$4 :$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_2, v_6, v_1, v_3, v_4, v_7, v_9$

Prelazimo na vrh v_6 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

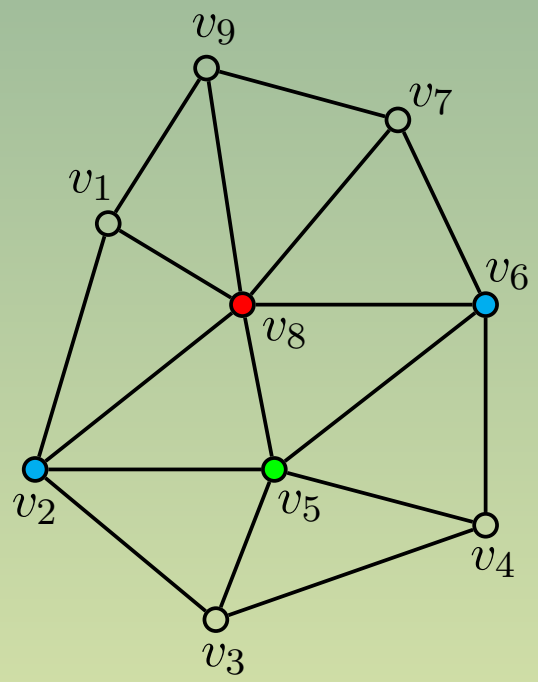
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_5$

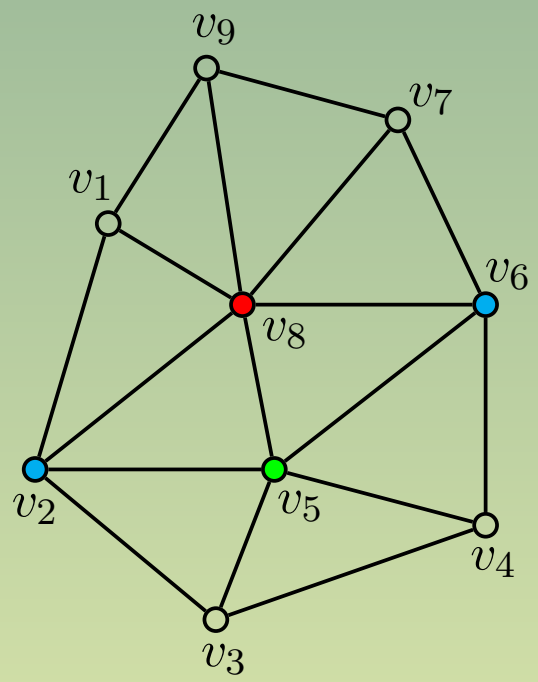
$3 : v_2, v_6$

$4 :$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_2, v_6, v_1, v_3, v_4, v_7, v_9$

Prelazimo na vrh v_6 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_5$

$3 : v_2, v_6$

$4 :$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_2, v_6, v_1, v_3, v_4, v_7, v_9$

Prelazimo na vrh v_1 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

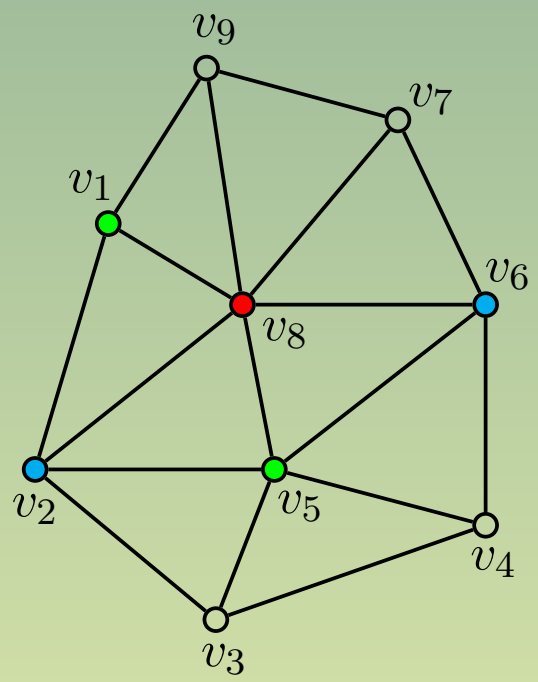
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_5, v_1$

$3 : v_2, v_6$

$4 :$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_2, v_6, v_1, v_3, v_4, v_7, v_9$

Prelazimo na vrh v_1 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

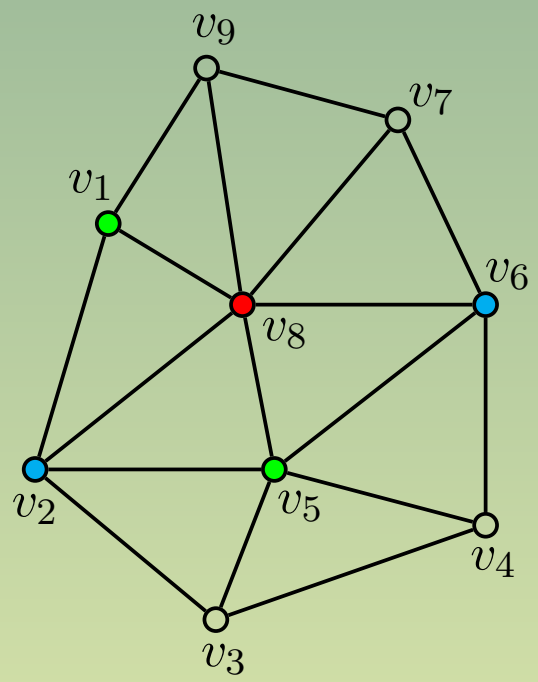
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_5, v_1$

$3 : v_2, v_6$

$4 :$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_2, v_6, v_1, v_3, v_4, v_7, v_9$

Prelazimo na vrh v_3 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

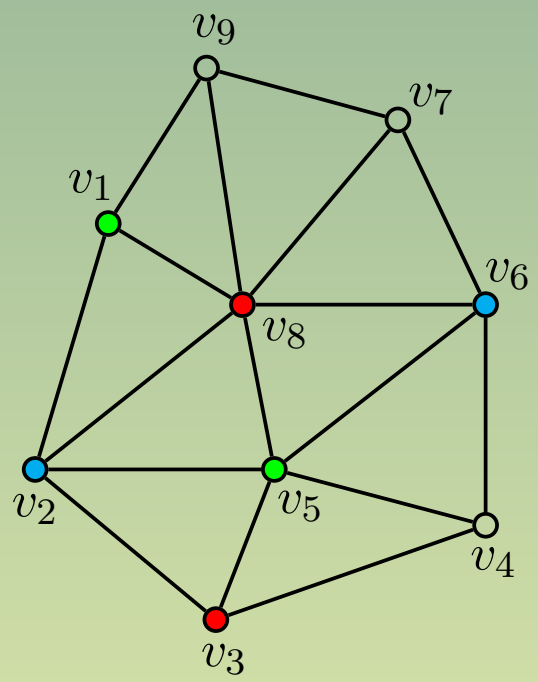
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_3$

$2 : v_5, v_1$

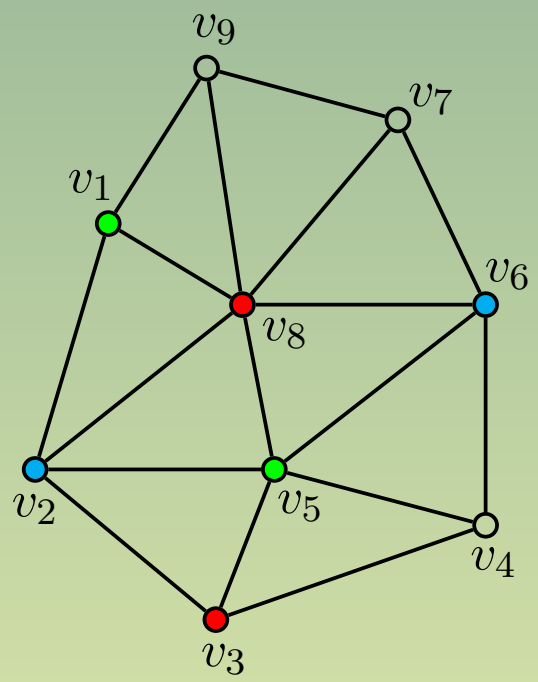
$3 : v_2, v_6$

$4 :$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_2, v_6, v_1, v_3, v_4, v_7, v_9$

Prelazimo na vrh v_3 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_3$

$2 : v_5, v_1$

$3 : v_2, v_6$

$4 :$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_2, v_6, v_1, v_3, v_4, v_7, v_9$

Prelazimo na vrh v_4 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

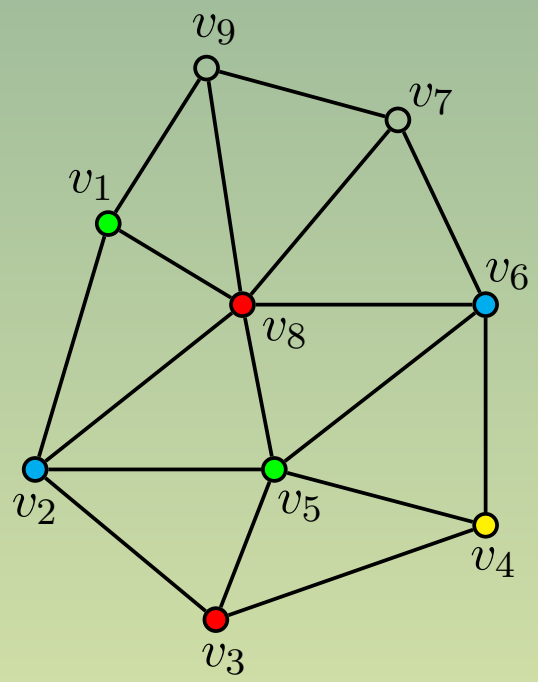
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_3$

$2 : v_5, v_1$

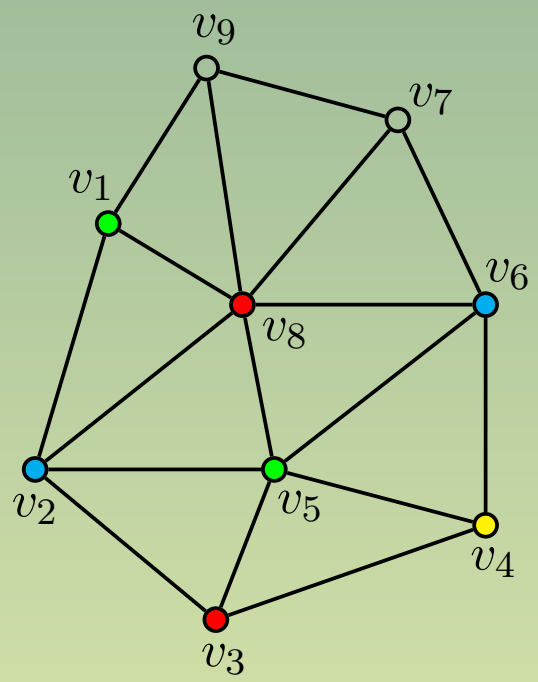
$3 : v_2, v_6$

$4 : v_4$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_2, v_6, v_1, v_3, v_4, v_7, v_9$

Prelazimo na vrh v_4 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 4.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_3$

$2 : v_5, v_1$

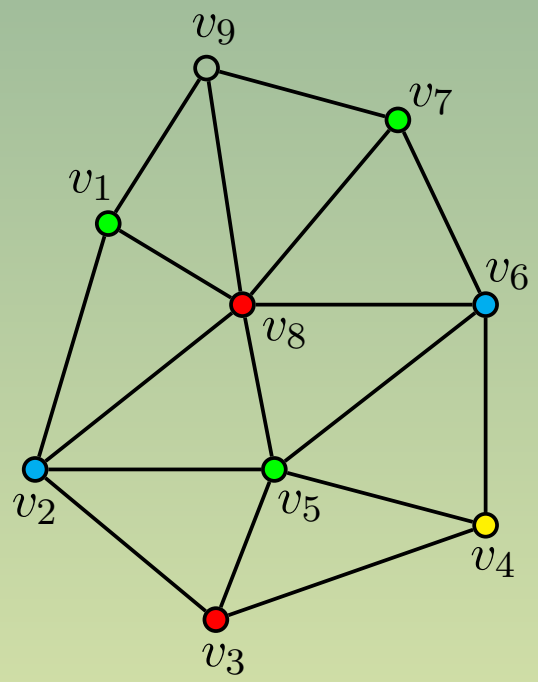
$3 : v_2, v_6$

$4 : v_4$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_2, v_6, v_1, v_3, v_4, v_7, v_9$

Prelazimo na vrh v_7 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_3$

$2 : v_5, v_1, v_7$

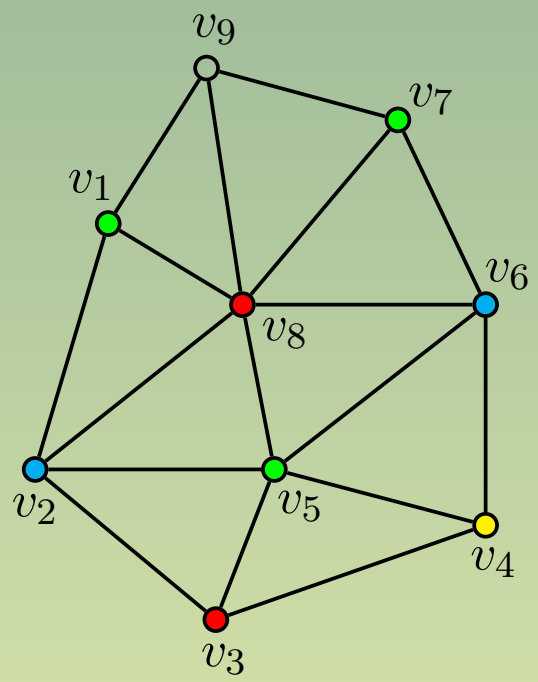
$3 : v_2, v_6$

$4 : v_4$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_2, v_6, v_1, v_3, v_4, v_7, v_9$

Prelazimo na vrh v_7 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_3$

$2 : v_5, v_1, v_7$

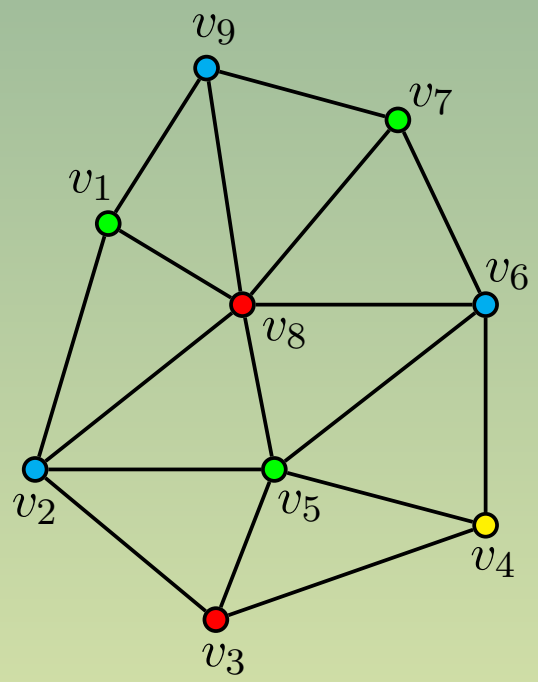
$3 : v_2, v_6$

$4 : v_4$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_2, v_6, v_1, v_3, v_4, v_7, v_9$

Prelazimo na vrh v_9 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_3$

$2 : v_5, v_1, v_7$

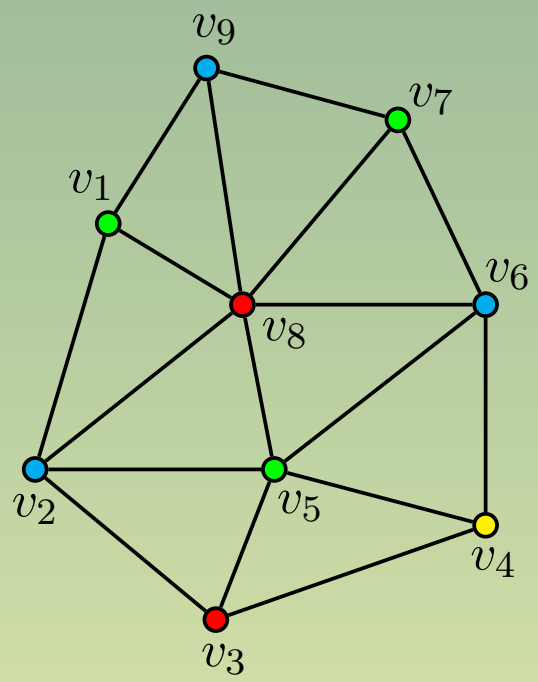
$3 : v_2, v_6, v_9$

$4 : v_4$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_2, v_6, v_1, v_3, v_4, v_7, v_9$

Prelazimo na vrh v_9 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_3$

$2 : v_5, v_1, v_7$

$3 : v_2, v_6, v_9$

$4 : v_4$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_2, v_6, v_1, v_3, v_4, v_7, v_9$

Dakle, u ovom slučaju je Welsh-Powellov algoritam dao bojanje vrhova s minimalnim brojem boja.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja

Zadatak 10.15.

Implementirajte algoritam za pohlepno bojanje vrhova grafa sa slučajnim rasporedom vrhova.

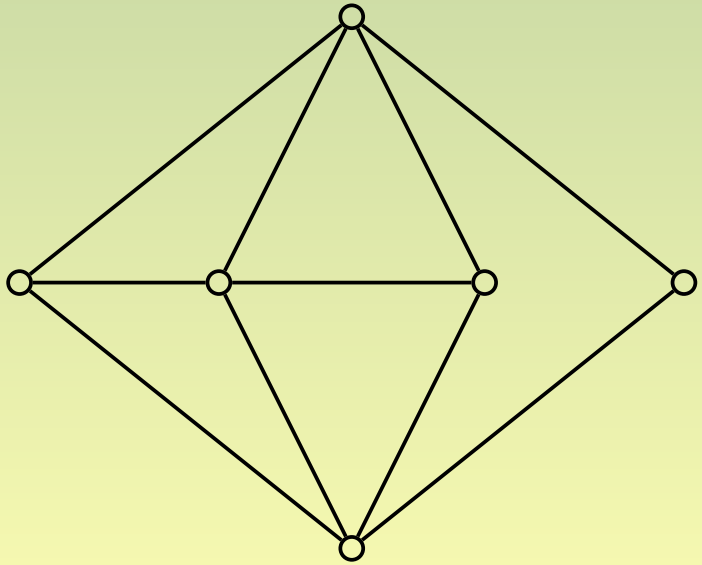
Zadatak 10.16.

Implementirajte Welsh-Powellov algoritam za pohlepno bojanje vrhova grafa.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Zadatak 10.17.

Dokažite da u grafu na slici pohlepno bojanje s bilo kojim rasporedom vrhova uvijek daje bojanje vrhova s minimalnim brojem boja. Generirajte svih 720 mogućih rasporeda vrhova grafa na računalu i za svakog od njih provedite pohlepno bojanje i uvjerite se da se u svakom slučaju dobiva optimalno bojanje. Sve rezultate za svaki raspored vrhova algoritam neka spremi u jednu datoteku.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Pohlepno bojanje (Brèlazov algoritam)

ULAZ: jednostavni graf G

IZLAZ: neko bojanje vrhova grafa G koje nije nužno i optimalno

1: Pretpostavljamo da je skup boja skup $\mathbb{N}$. Pronađi neki vrh v_1 najvećeg stupnja u grafu G. Vrhu v_1 pridruži boju 1.

2: Za svaki neobojani vrh v izračunaj njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$. Stupanj zasićenosti neobojanog vrha je broj različitih boja s kojima su trenutno obojani (neki, a možda i svi) njegovi susjedni vrhovi.

3: Neka je w vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. Ukoliko ima više takvih vrhova, odaberi nekog od njih.

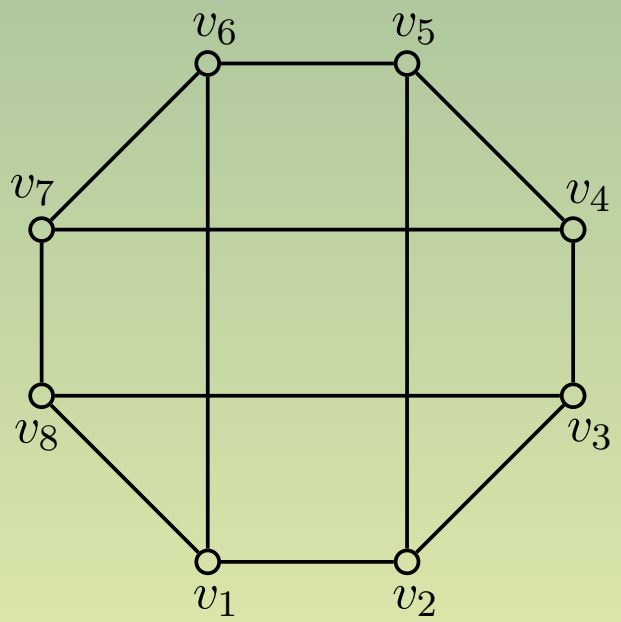
4: Vrhu w pridruži najmanju dostupnu boju s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. Ako se za bojanje vrha w ne može upotrijebiti niti jedna od već korištenih boja, uzmi sljedeću najmanju boju koja se još nije koristila.

5: Ako nisu obojani svi vrhovi u grafu, prijeđi na korak 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.60.

Pokažite da Welsh-Powellov algoritam neće uvijek dati bojanje vrhova s minimalnim brojem boja u kubnom grafu



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

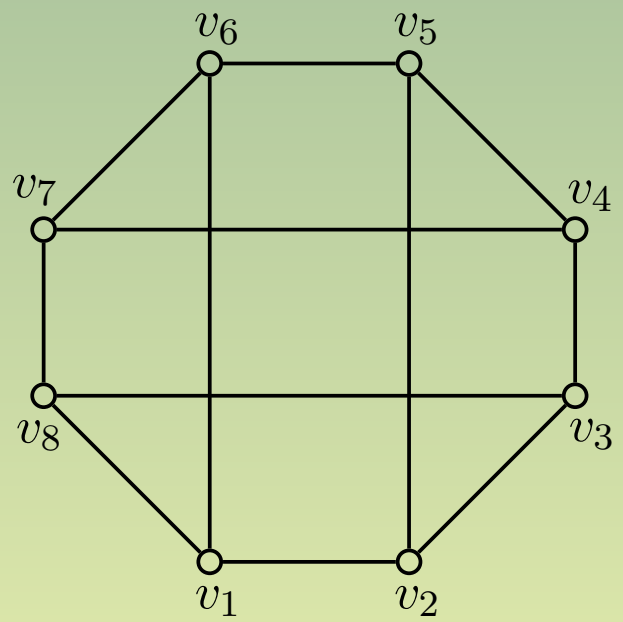
Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja

Primjer 10.60.

Pokažite da Welsh-Powellov algoritam neće uvijek dati bojanje vrhova s minimalnim brojem boja u kubnom grafu

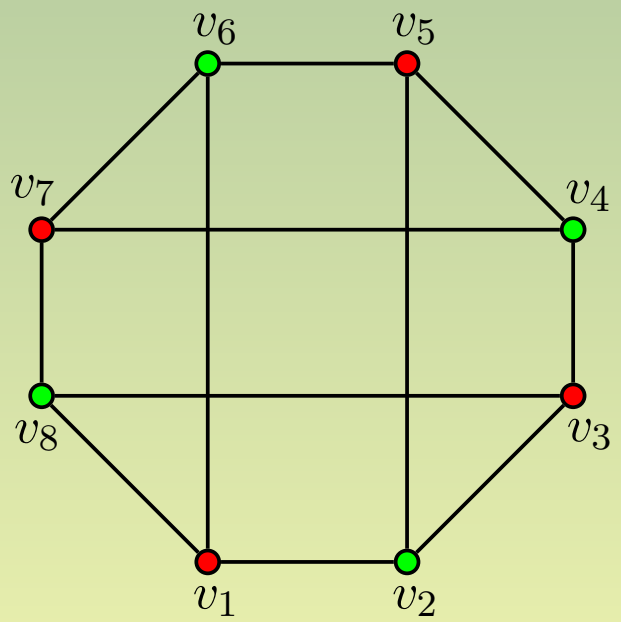


Rješenje.

Kubni graf je regularan pa je u ovom slučaju svaki poredak vrhova ujedno i sortiran padajuće s obzirom na njihove stupnjeve. Stoga na kubnom grafu Welsh-Powellov algoritam nije ništa bolji od pohlepnog bojanja sa slučajnim rasporedom vrhova.

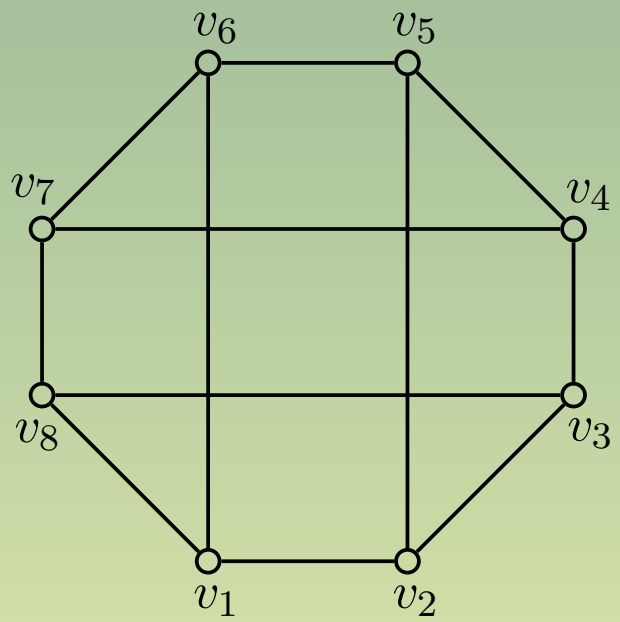
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Ukoliko vrhove bojamo u poretku $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$, tada ćemo dobiti jedno 2-bojanje vrhova prikazano na slici i jasno je da je to bojanje vrhova s minimalnim brojem boja pa sa spomenutim rasporedom vrhova Welsh-Powellov algoritam daje optimalno bojanje.



No, ukoliko uzmemo raspored vrhova $v_8, v_5, v_6, v_7, v_3, v_4, v_2, v_1$, tada Welsh-Powellov algoritam neće dati optimalno bojanje vrhova zadanog grafa. Uvjerimo se u to.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1:$

$2:$

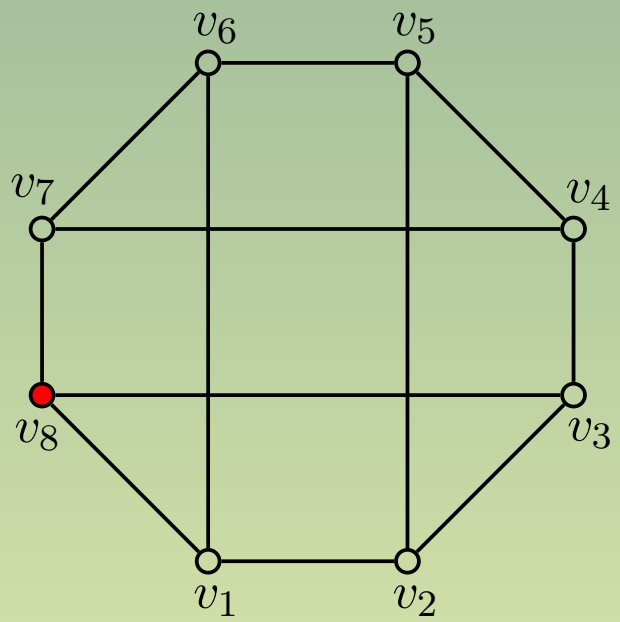
$3:$

$4:$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_6, v_7, v_3, v_4, v_2, v_1$

Vrh v_8

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 :$

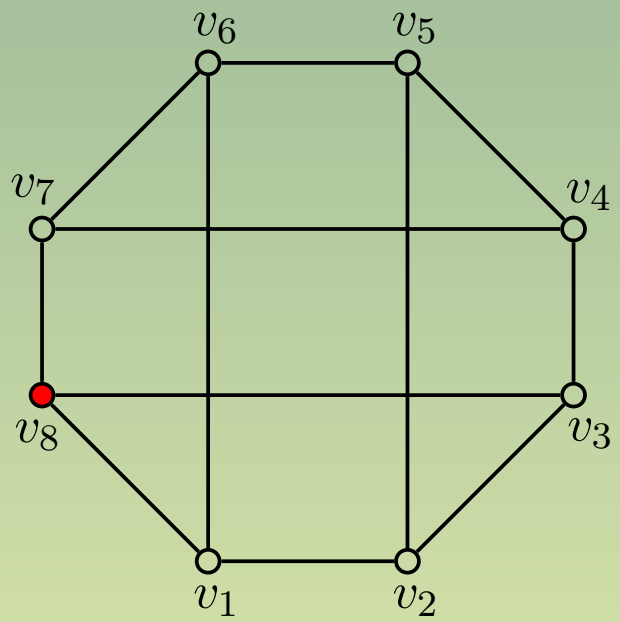
$3 :$

$4 :$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_6, v_7, v_3, v_4, v_2, v_1$

Vrh v_8 obojamo bojom 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 :$

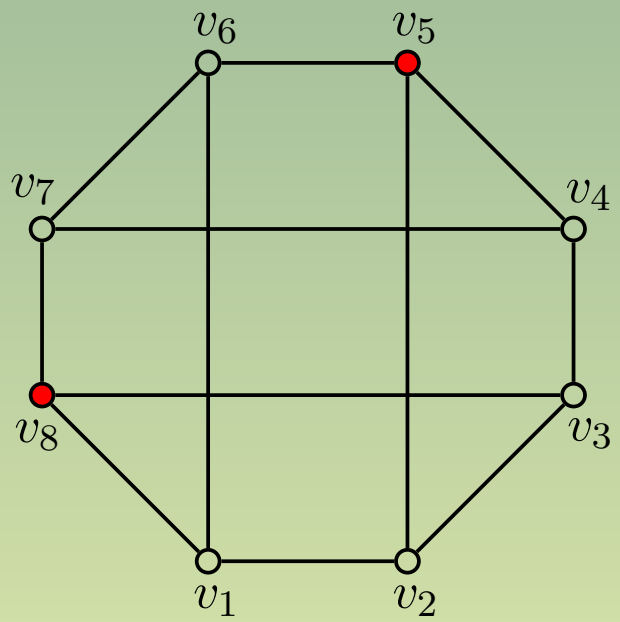
$3 :$

$4 :$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_6, v_7, v_3, v_4, v_2, v_1$

Prelazimo na vrh v_5 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_5$

$2 :$

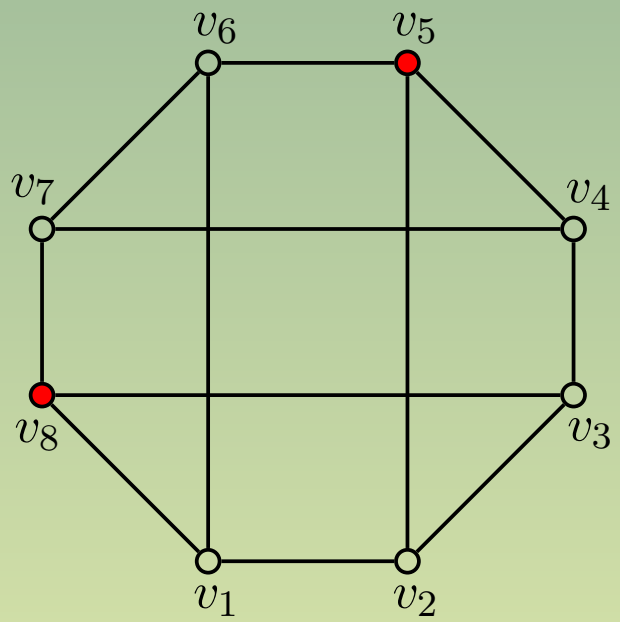
$3 :$

$4 :$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_6, v_7, v_3, v_4, v_2, v_1$

Prelazimo na vrh v_5 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_5$

$2 :$

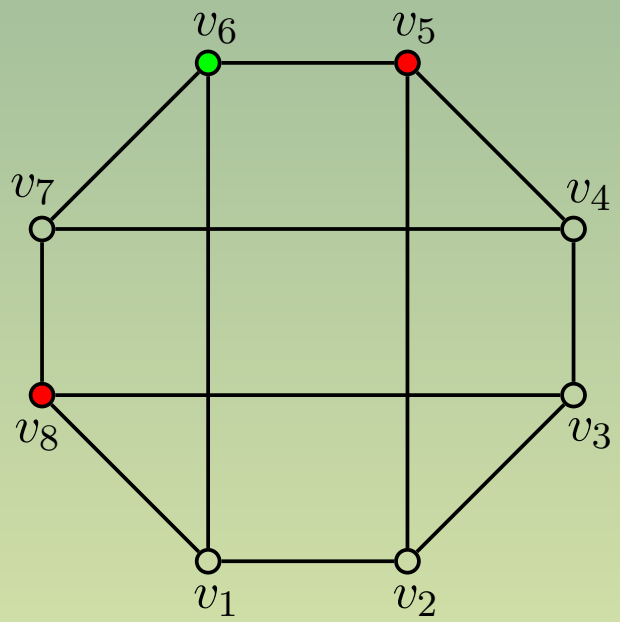
$3 :$

$4 :$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_6, v_7, v_3, v_4, v_2, v_1$

Prelazimo na vrh v_6 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \rightarrow$ crveno, $2 \rightarrow$ zeleno, $3 \rightarrow$ plavo, $4 \rightarrow$ žuto

$1 : v_8, v_5$

$2 : v_6$

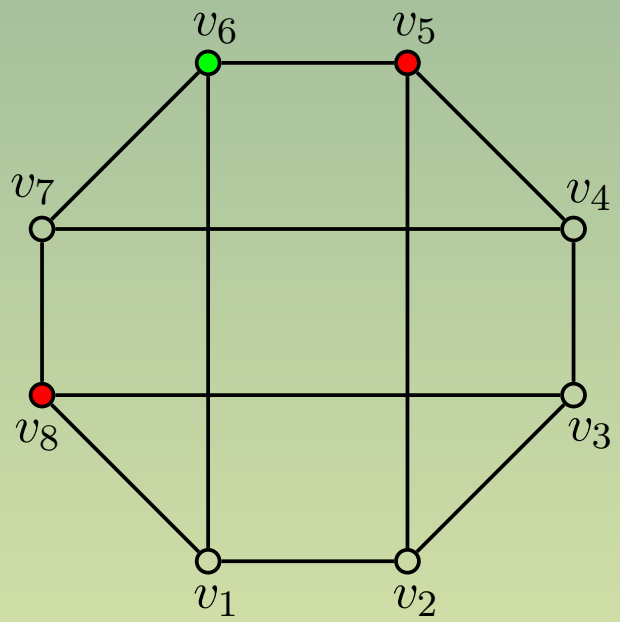
$3 :$

$4 :$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_6, v_7, v_3, v_4, v_2, v_1$

Prelazimo na vrh v_6 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_5$

$2 : v_6$

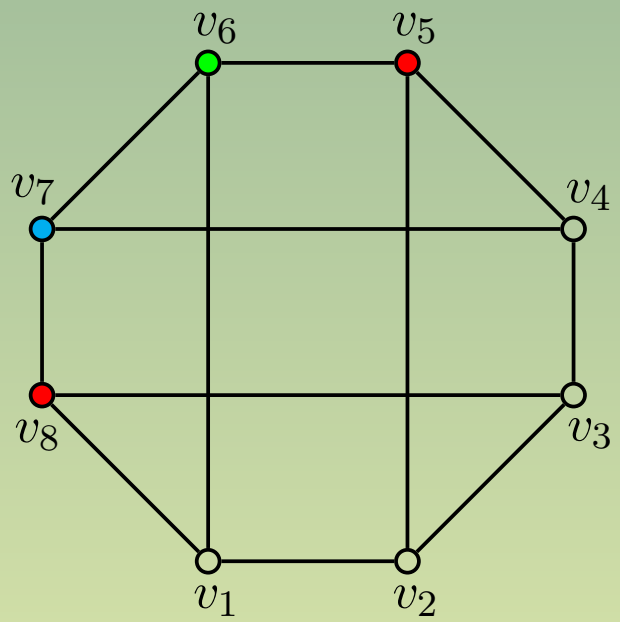
$3 :$

$4 :$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_6, v_7, v_3, v_4, v_2, v_1$

Prelazimo na vrh v_7 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_5$

$2 : v_6$

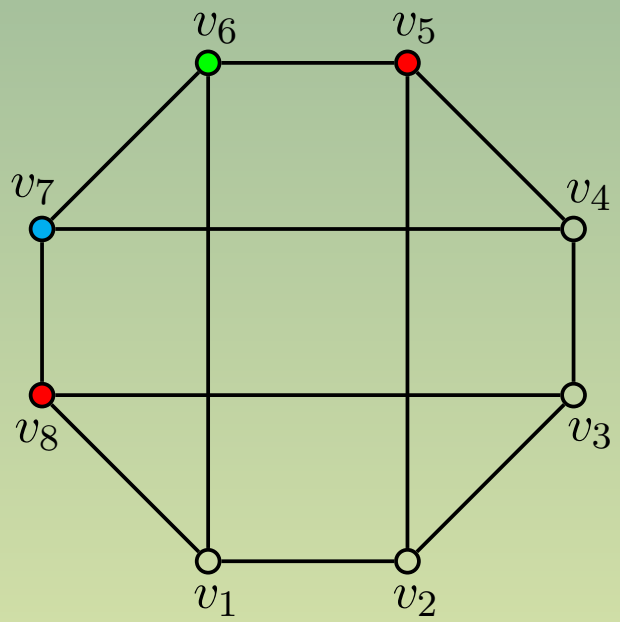
$3 : v_7$

$4 :$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_6, v_7, v_3, v_4, v_2, v_1$

Prelazimo na vrh v_7 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_5$

$2 : v_6$

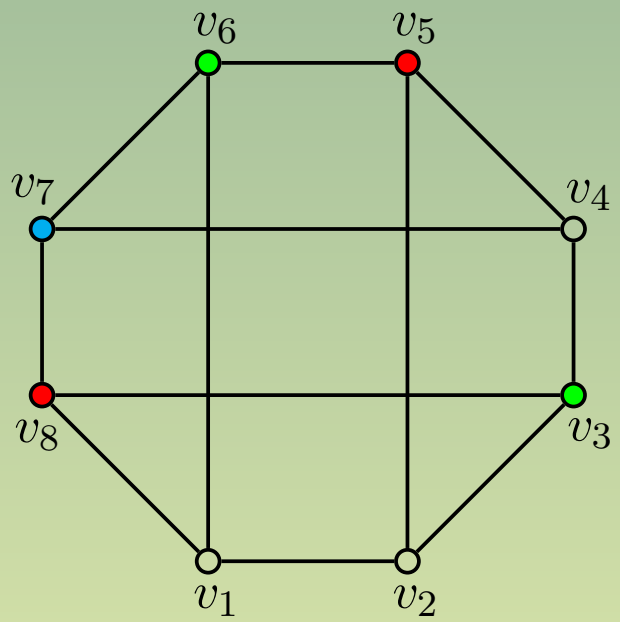
$3 : v_7$

$4 :$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_6, v_7, v_3, v_4, v_2, v_1$

Prelazimo na vrh v_3 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_5$

$2 : v_6, v_3$

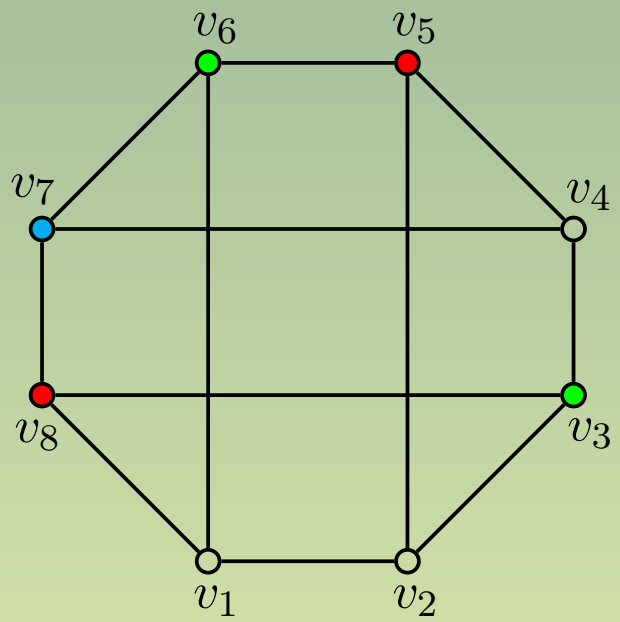
$3 : v_7$

$4 :$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_6, v_7, v_3, v_4, v_2, v_1$

Prelazimo na vrh v_3 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_5$

$2 : v_6, v_3$

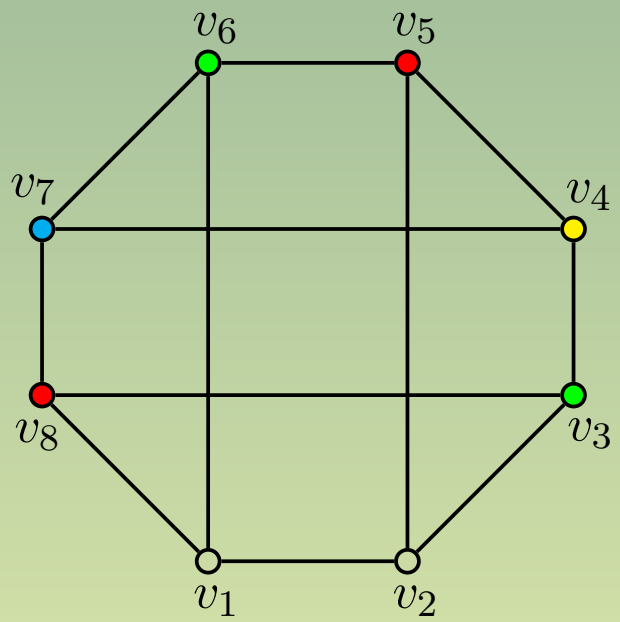
$3 : v_7$

$4 :$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_6, v_7, v_3, v_4, v_2, v_1$

Prelazimo na vrh v_4 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo, $4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_5$

$2 : v_6, v_3$

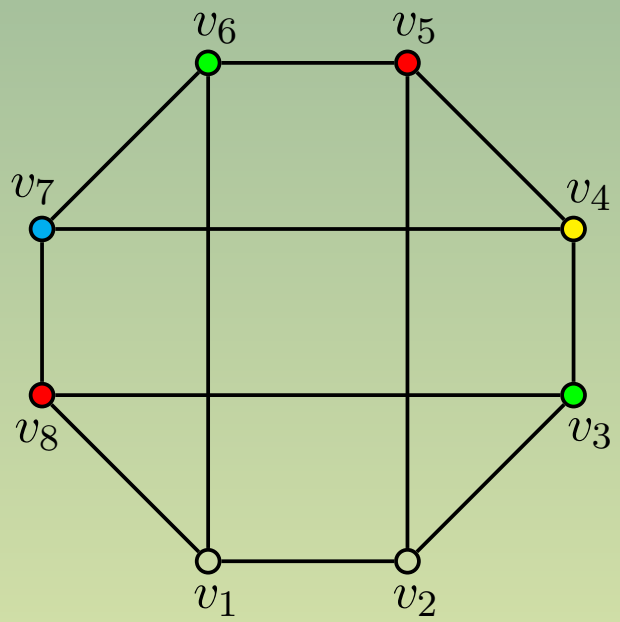
$3 : v_7$

$4 : v_4$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_6, v_7, v_3, v_4, v_2, v_1$

Prelazimo na vrh v_4 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 4.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_5$

$2 : v_6, v_3$

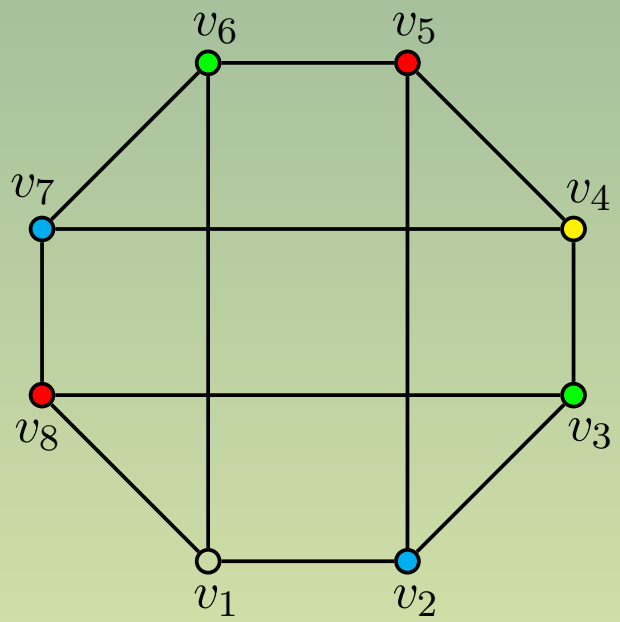
$3 : v_7$

$4 : v_4$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_6, v_7, v_3, v_4, v_2, v_1$

Prelazimo na vrh v_2 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_5$

$2 : v_6, v_3$

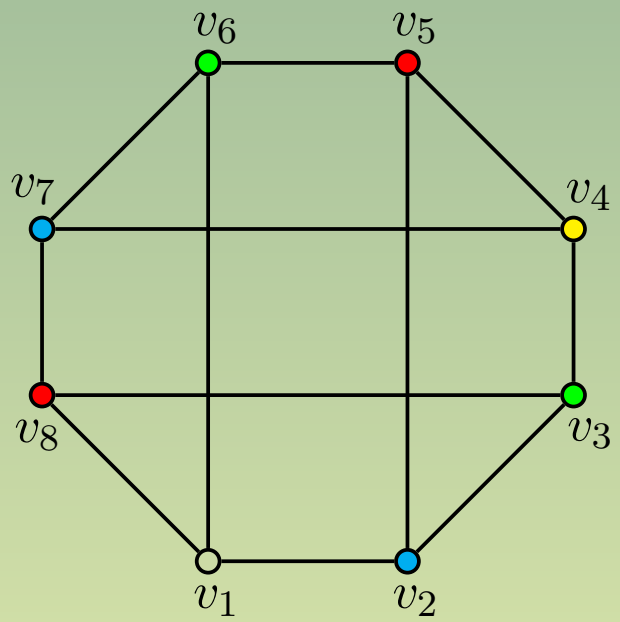
$3 : v_7, v_2$

$4 : v_4$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_6, v_7, v_3, v_4, v_2, v_1$

Prelazimo na vrh v_2 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_5$

$2 : v_6, v_3$

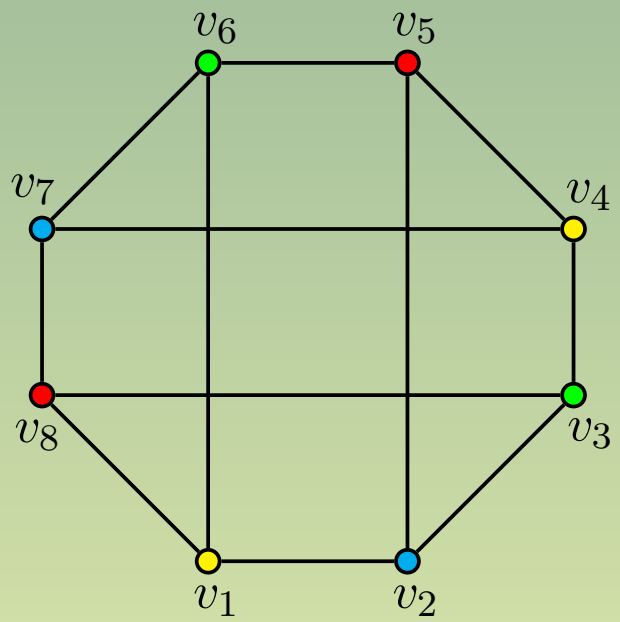
$3 : v_7, v_2$

$4 : v_4$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_6, v_7, v_3, v_4, v_2, v_1$

Prelazimo na vrh v_1 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_5$

$2 : v_6, v_3$

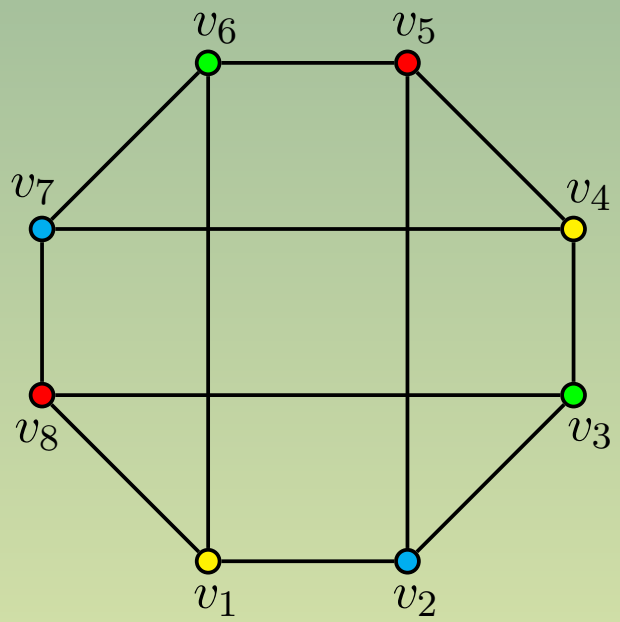
$3 : v_7, v_2$

$4 : v_4, v_1$

raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_6, v_7, v_3, v_4, v_2, v_1$

Prelazimo na vrh v_1 i njega obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 4.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo, $4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_5$

$2 : v_6, v_3$

$3 : v_7, v_2$

$4 : v_4, v_1$

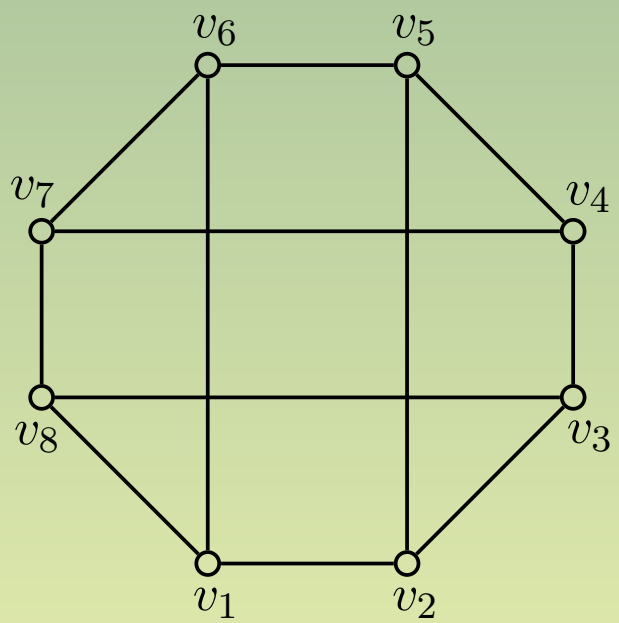
raspoređeni vrhovi: $v_8, v_5, v_6, v_7, v_3, v_4, v_2, v_1$

Dakle, u ovom slučaju je Welsh-Powellov algoritam nije dao bojanje vrhova s minimalnim brojem boja. Umjesto dvije boje, algoritam je koristio čak četiri boje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.61.

Pokažite da Brèlazov algoritam uvijek daje bojanje vrhova s minimalnim brojem boja u kubnom grafu



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

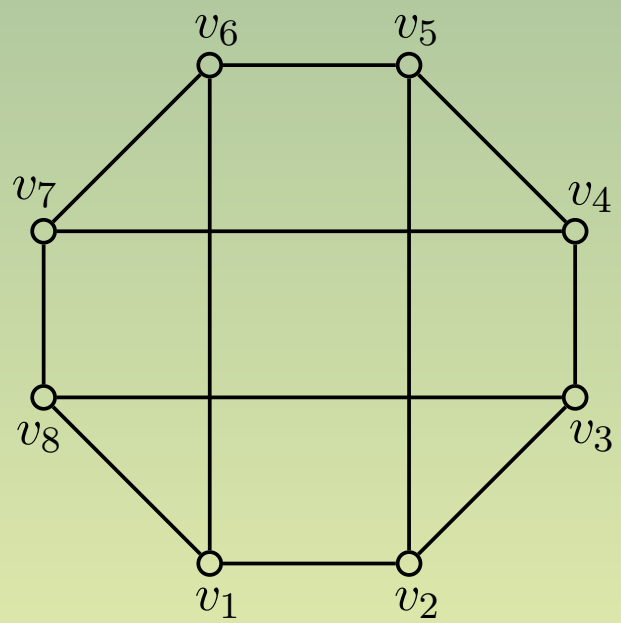
Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja

Primjer 10.61.

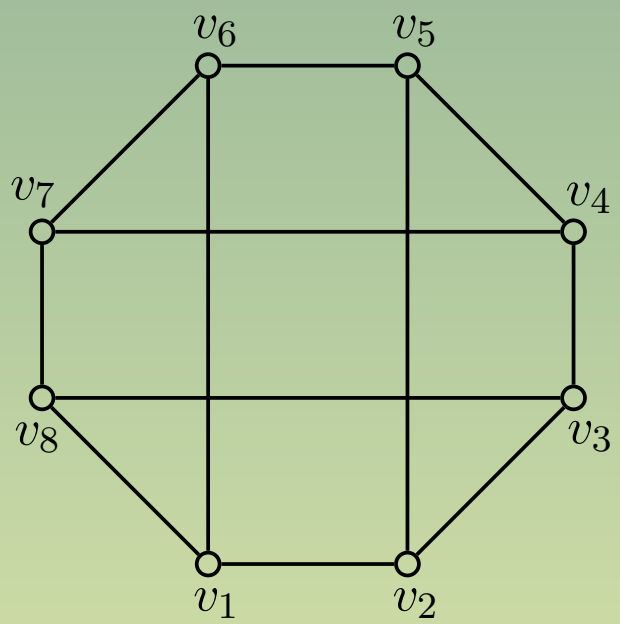
Pokažite da Brèlazov algoritam uvijek daje bojanje vrhova s minimalnim brojem boja u kubnom grafu



Rješenje.

U pojedinim koracima Brèlazovog algoritma imat ćemo više mogućnosti biranja vrha kojeg ćemo bojati, no uočite da u svakom slučaju algoritam daje optimalno bojanje vrhova.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

$1:$

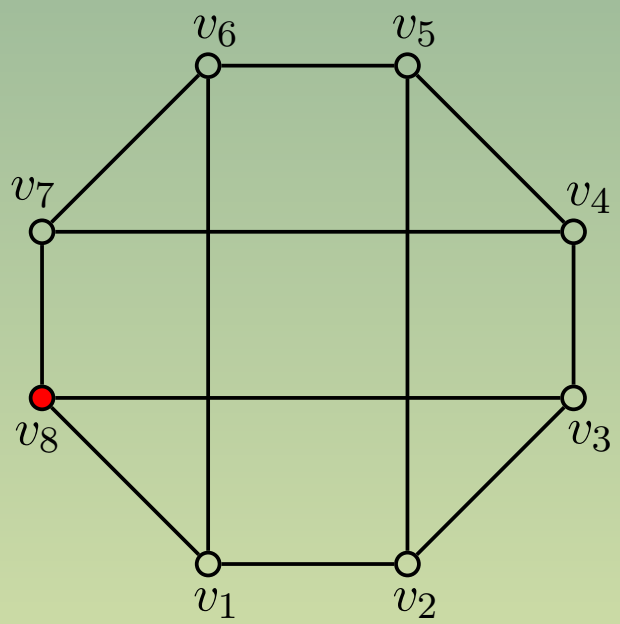
$2:$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s								

konačno rješenje

Najprije odaberemo neki vrh najvećeg stupnja,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

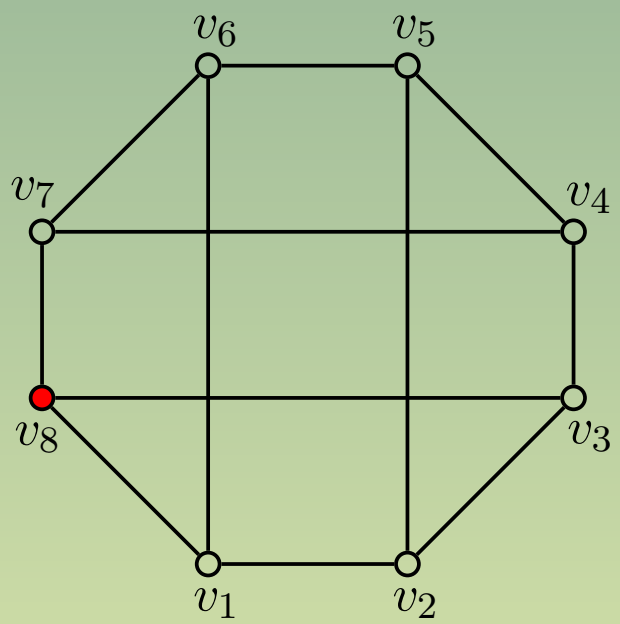
$1 : v_8$

$2 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s								■

Najprije odaberemo neki vrh najvećeg stupnja, npr. vrh v_8 i obojamo ga bojom 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \rightarrow$ crveno, $2 \rightarrow$ zeleno

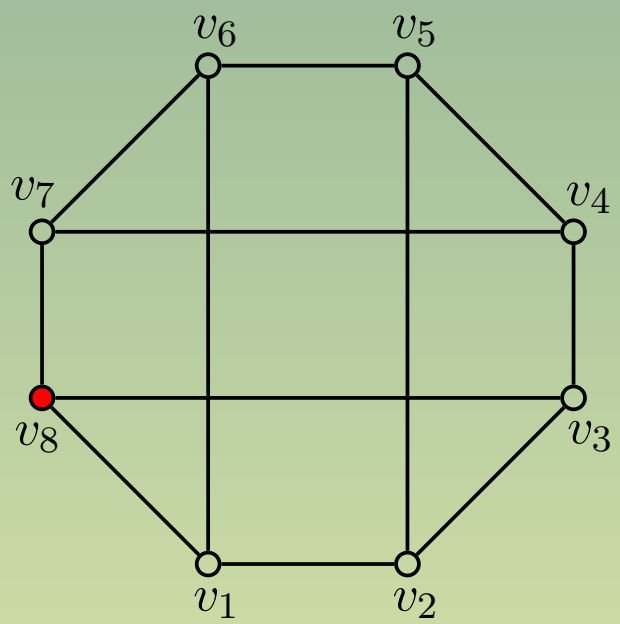
$1 : v_8$

$2 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s								■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

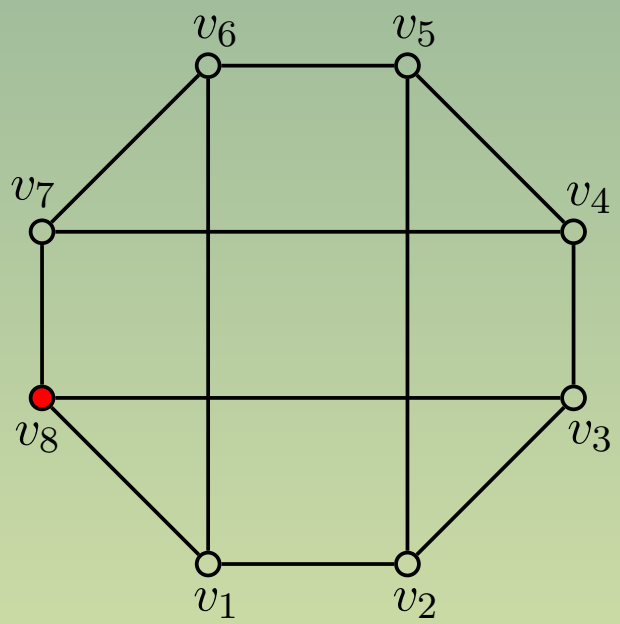
$1 : v_8$

$2 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	1	0	1	0	0	0	1	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

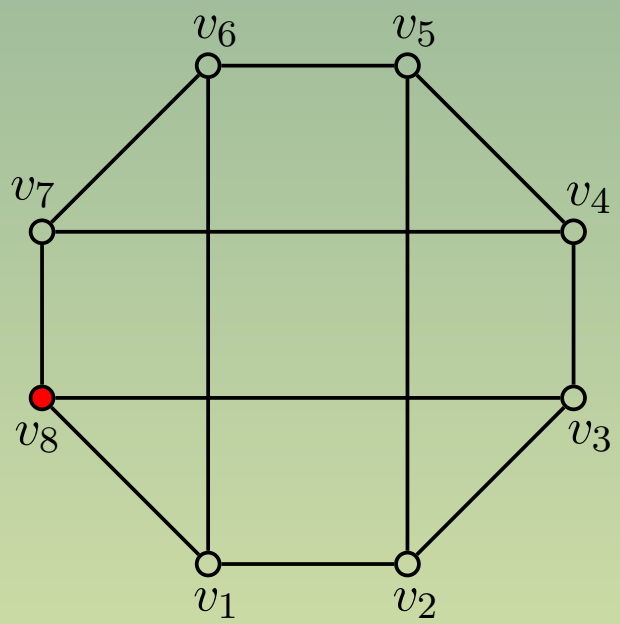
$1 : v_8$

$2 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	1	0	1	0	0	0	1	■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_1.

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

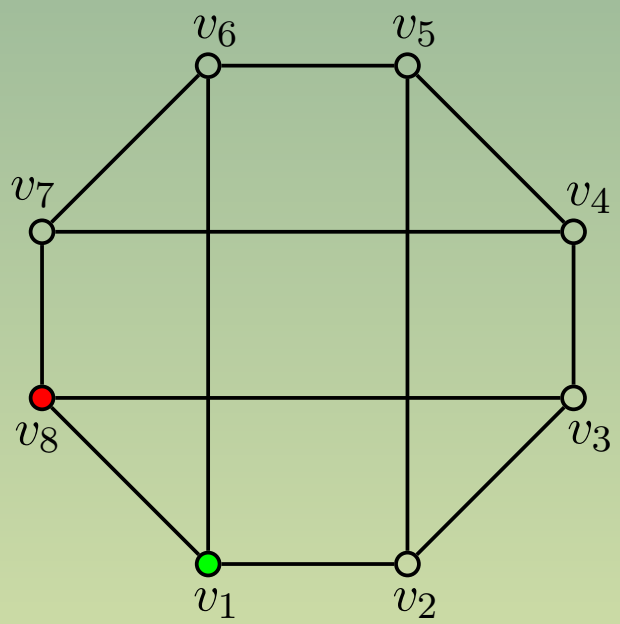
$1 : v_8$

$2 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	1	0	1	0	0	0	1	■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_1.
Vrh v_1 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \rightarrow$ crveno, $2 \rightarrow$ zeleno

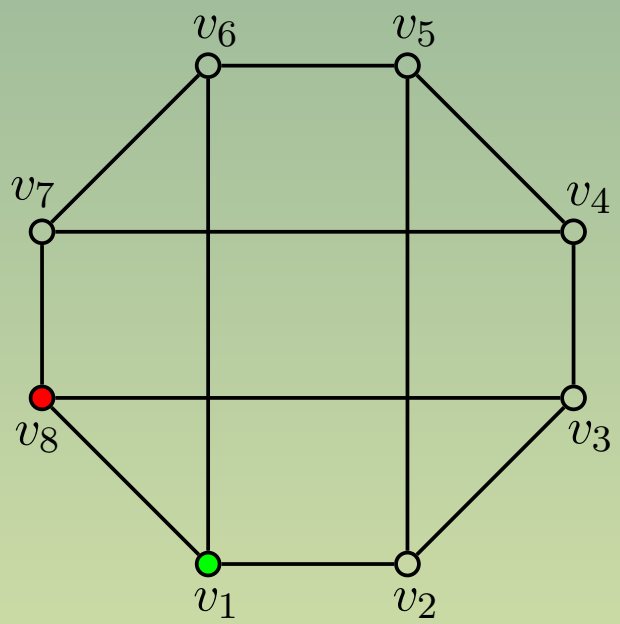
$1 : v_8$

$2 : v_1$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■							■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_1. Vrh v_1 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

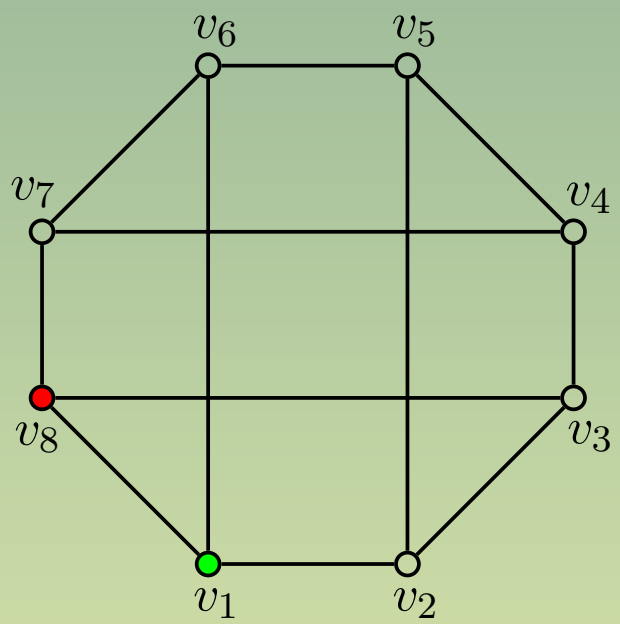
$1 : v_8$

$2 : v_1$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■							■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

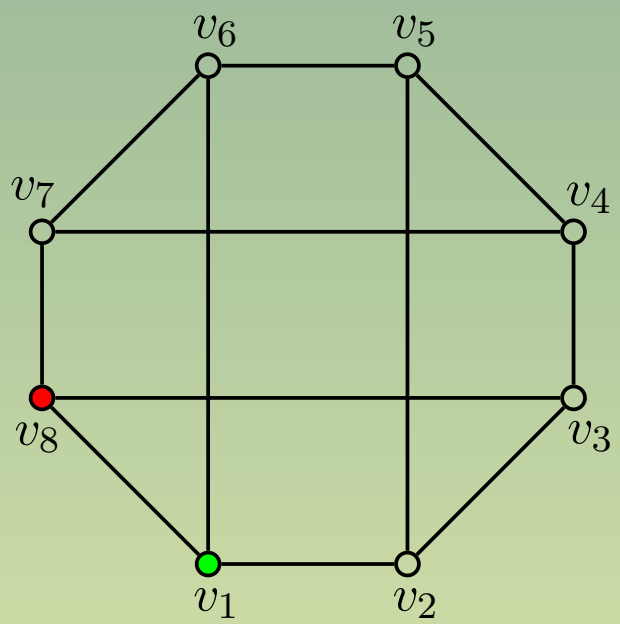
$1 : v_8$

$2 : v_1$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	1	1	0	0	1	1	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

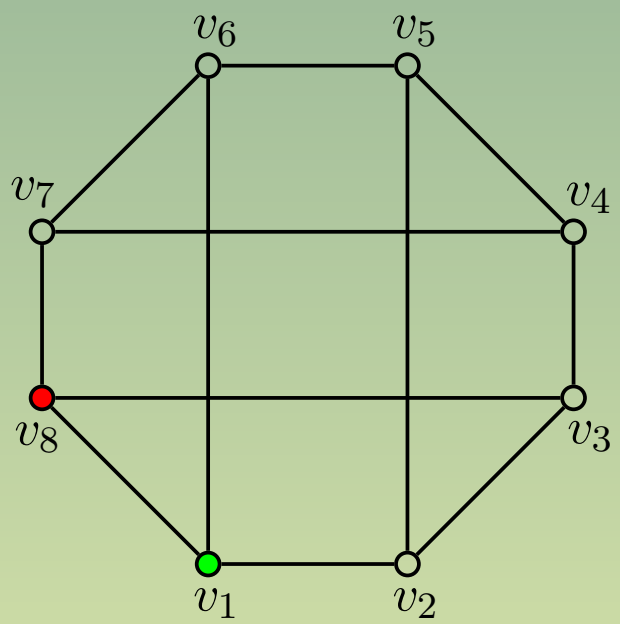
$1 : v_8$

$2 : v_1$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	1	1	0	0	1	1	■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

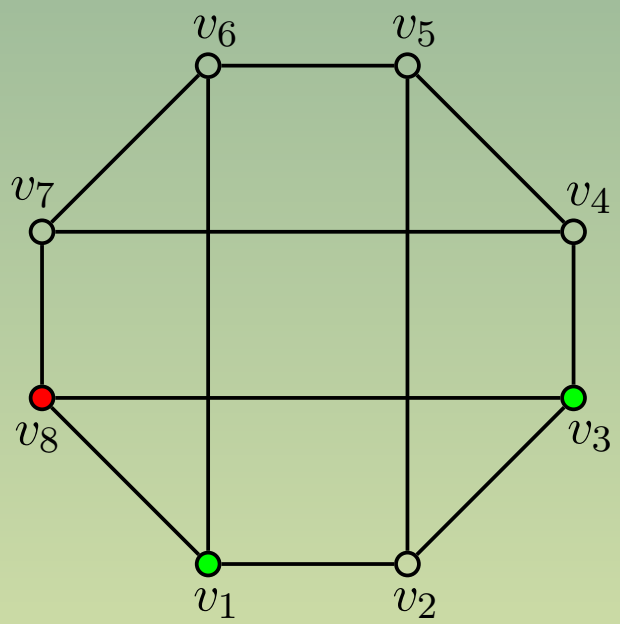
$1 : v_8$

$2 : v_1$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	1	1	0	0	1	1	■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_3.
Vrh v_3 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

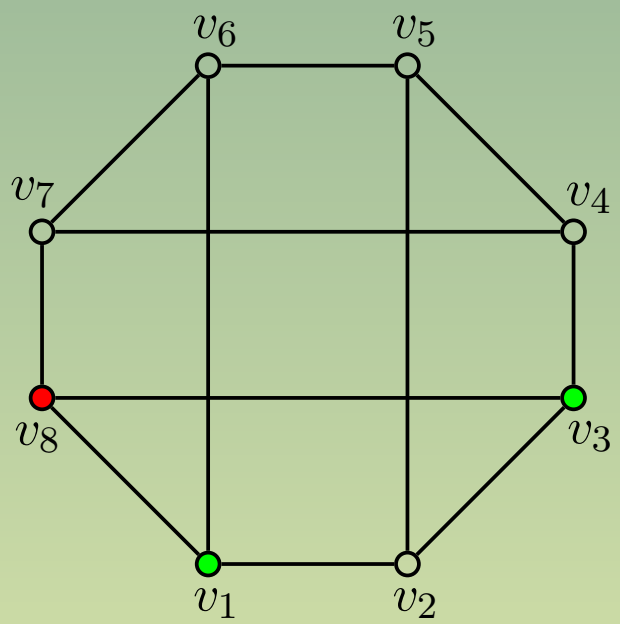
$1 : v_8$

$2 : v_1, v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■		■					■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_3. Vrh v_3 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

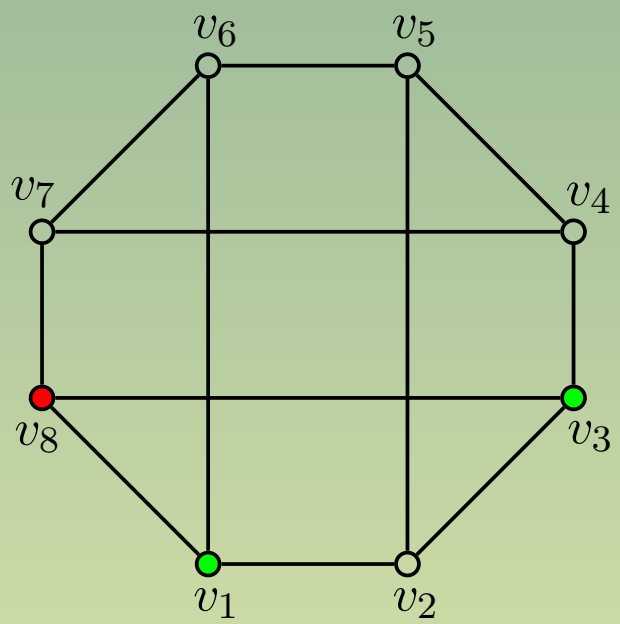
$1 : v_8$

$2 : v_1, v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■		■					■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

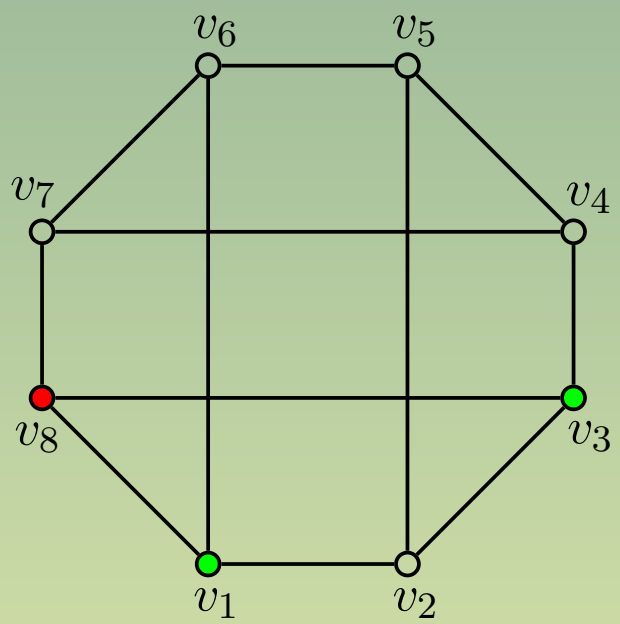
$1 : v_8$

$2 : v_1, v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	1	■	1	0	1	1	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

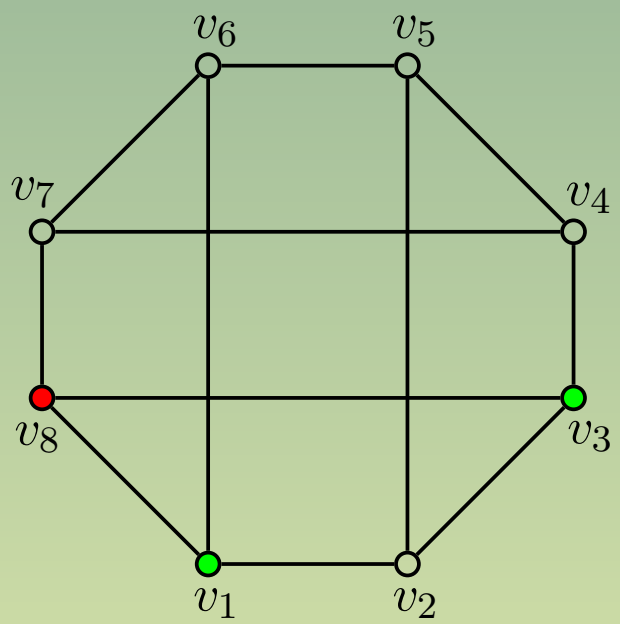
$1 : v_8$

$2 : v_1, v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	1	■	1	0	1	1	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi. Uočite da vrh v_2 ima dva obojana susjeda, ali su oba obojana istom bojom pa je $d_s(v_2) = 1$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

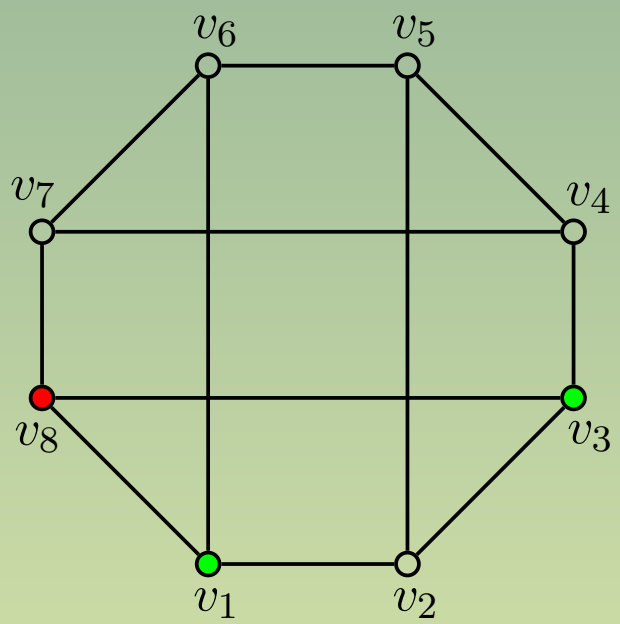
$1 : v_8$

$2 : v_1, v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	1	■	1	0	1	1	■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

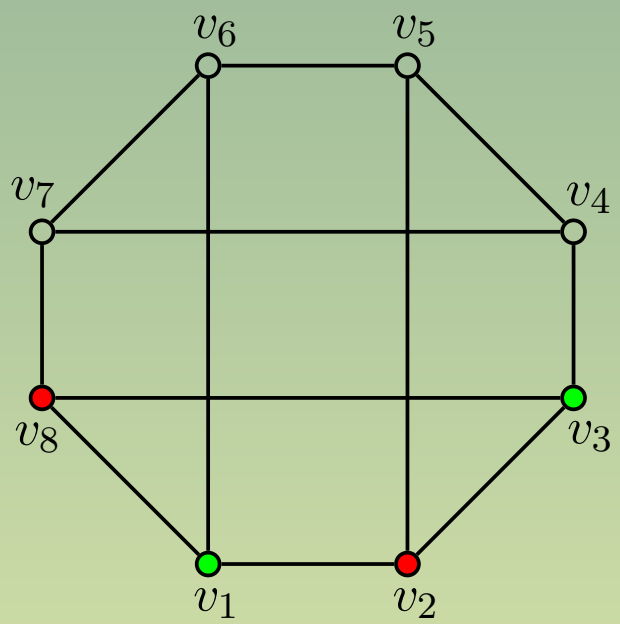
$1 : v_8$

$2 : v_1, v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	1	■	1	0	1	1	■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_2.
Vrh v_2 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

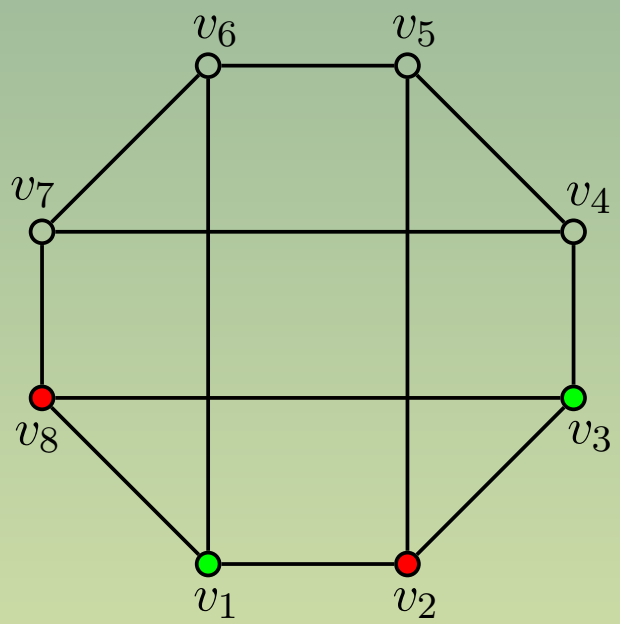
$1 : v_8, v_2$

$2 : v_1, v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■					■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_2. Vrh v_2 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \rightarrow$ crveno, $2 \rightarrow$ zeleno

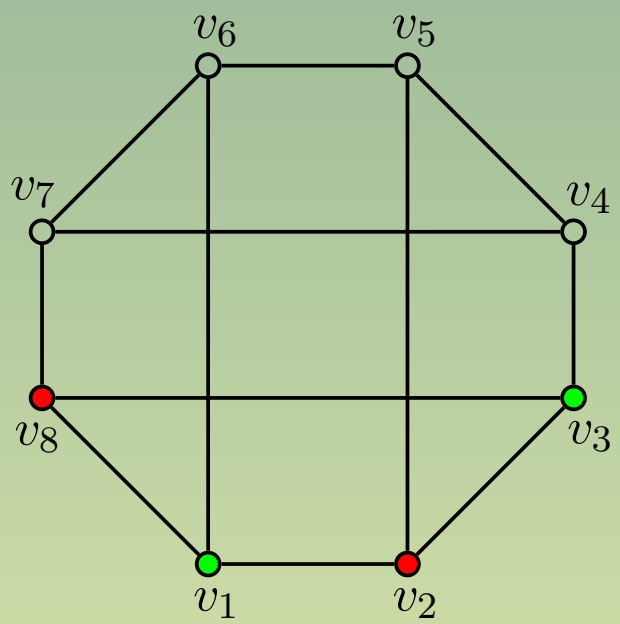
$1 : v_8, v_2$

$2 : v_1, v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■					■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

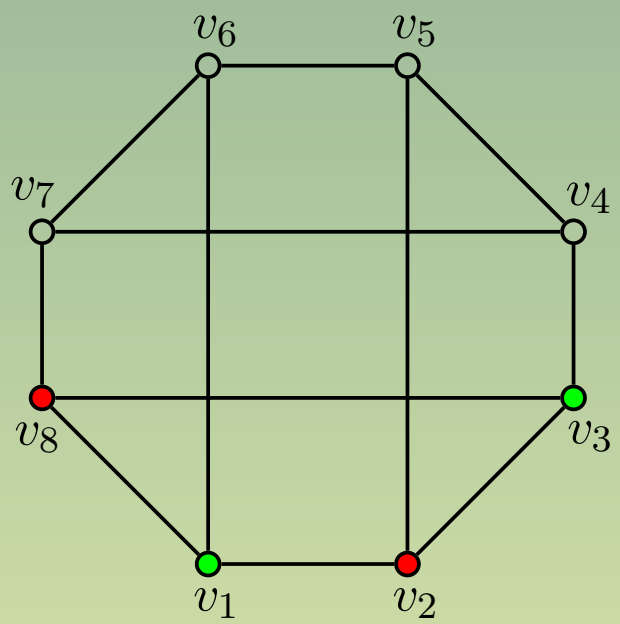
$1 : v_8, v_2$

$2 : v_1, v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■	1	1	1	1	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

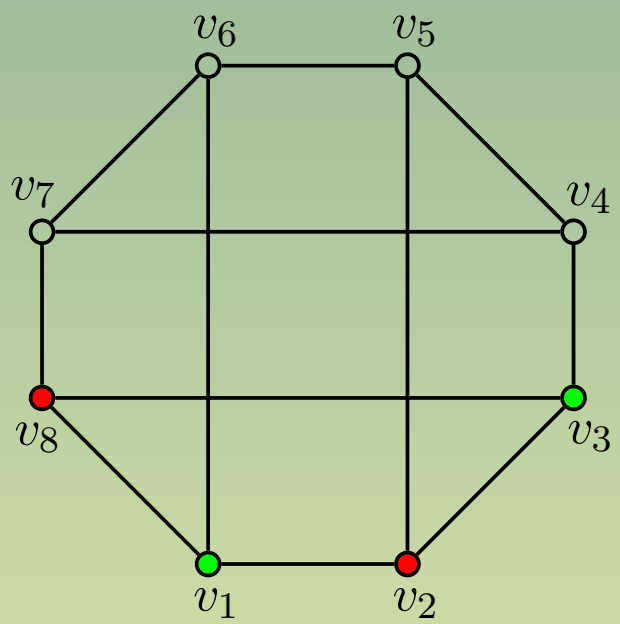
$1 : v_8, v_2$

$2 : v_1, v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■	1	1	1	1	■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_5.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

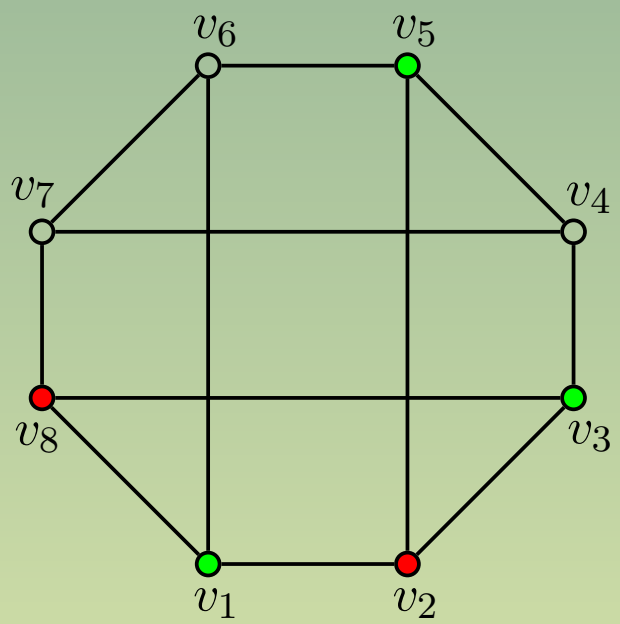
$1 : v_8, v_2$

$2 : v_1, v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■	1	1	1	1	■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_5.
Vrh v_5 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

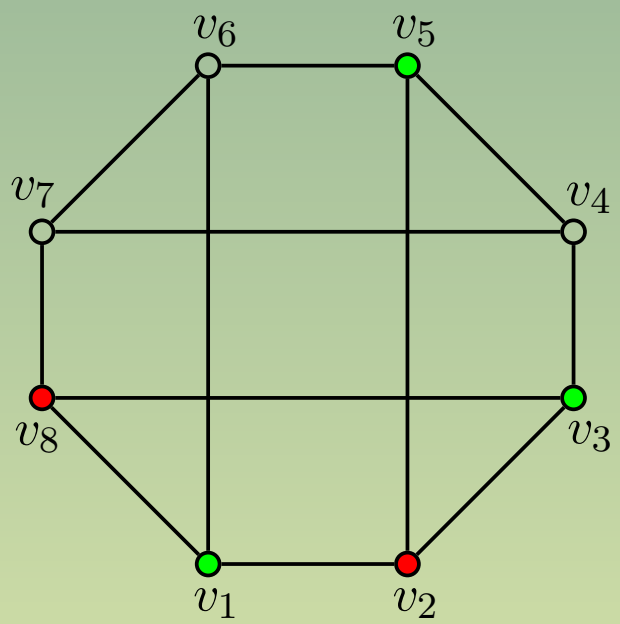
$1 : v_8, v_2$

$2 : v_1, v_3, v_5$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■		■			■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_5. Vrh v_5 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \rightarrow$ crveno, $2 \rightarrow$ zeleno

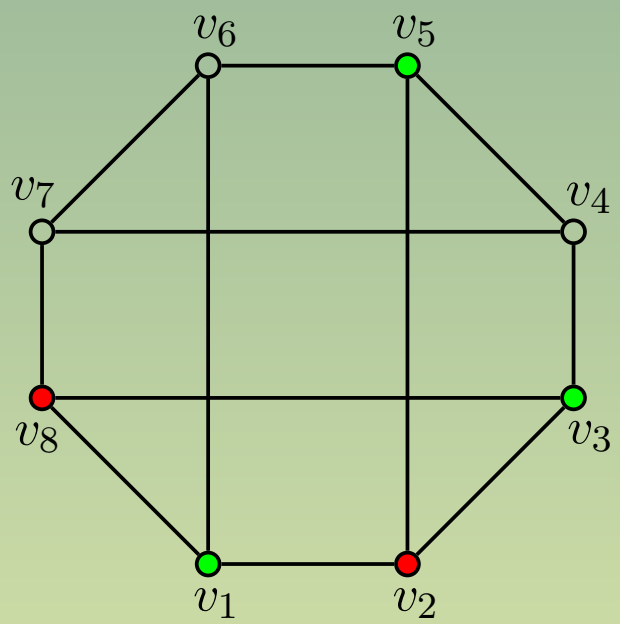
$1 : v_8, v_2$

$2 : v_1, v_3, v_5$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■		■			■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

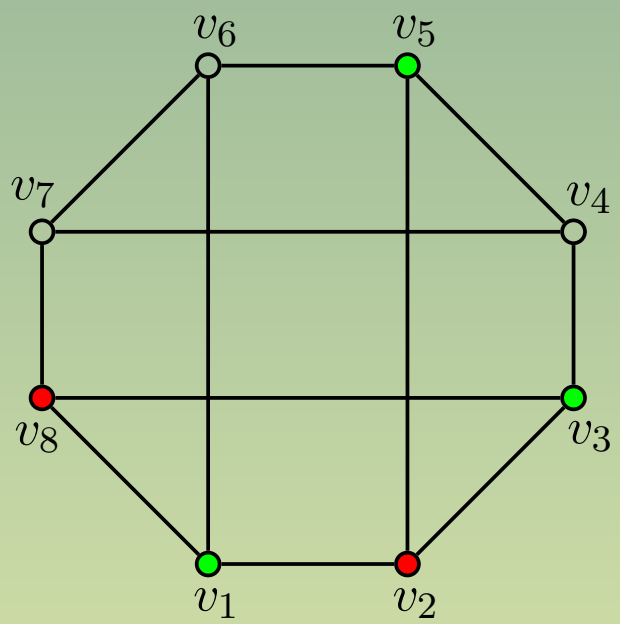
$1 : v_8, v_2$

$2 : v_1, v_3, v_5$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■	1	■	1	1	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

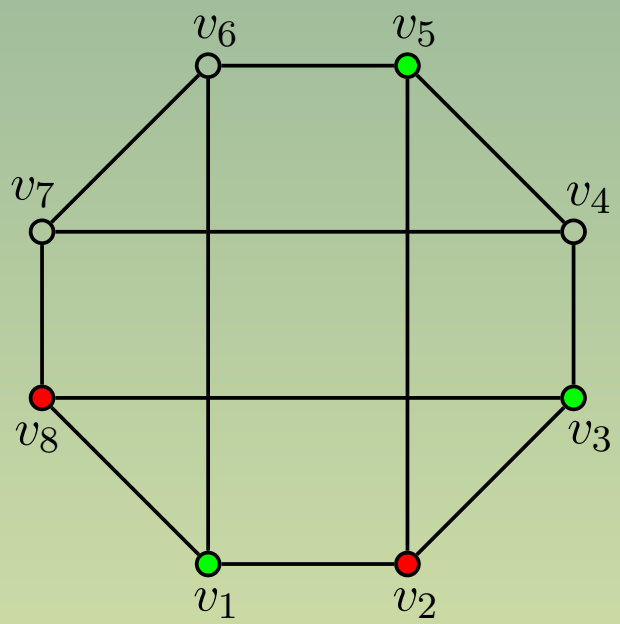
$1 : v_8, v_2$

$2 : v_1, v_3, v_5$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■	1	■	1	1	■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_7.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

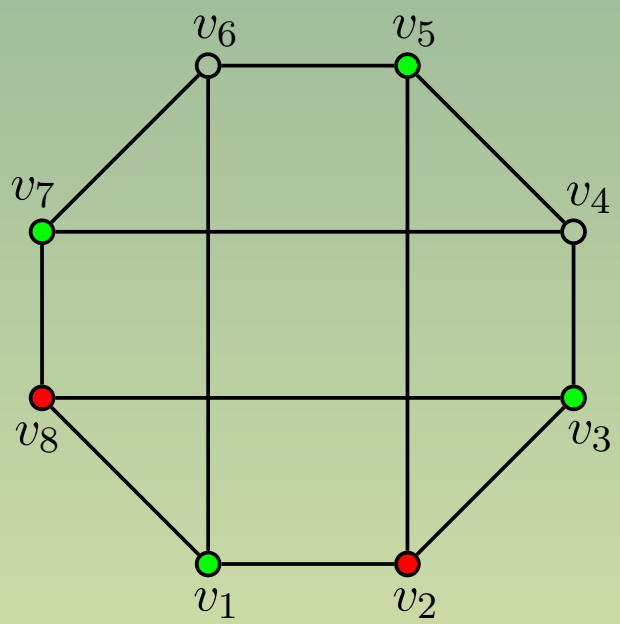
$1 : v_8, v_2$

$2 : v_1, v_3, v_5$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■	1	■	1	1	■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_7.
Vrh v_7 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

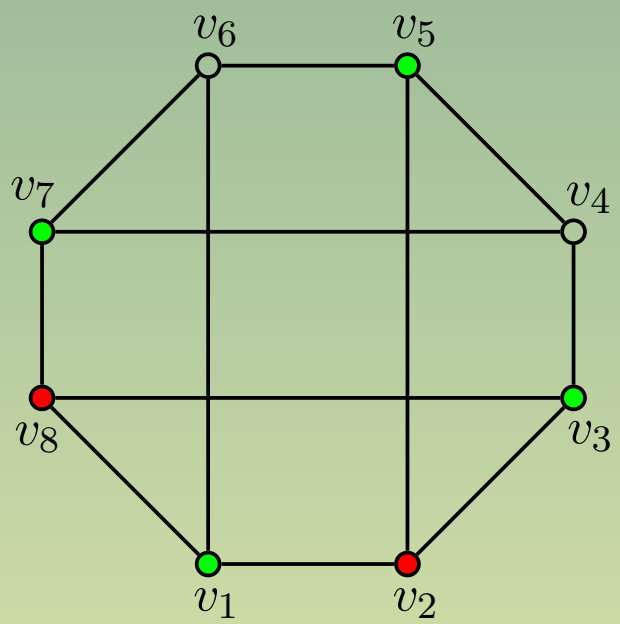
$1 : v_8, v_2$

$2 : v_1, v_3, v_5, v_7$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■		■		■	■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_7. Vrh v_7 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \rightarrow$ crveno, $2 \rightarrow$ zeleno

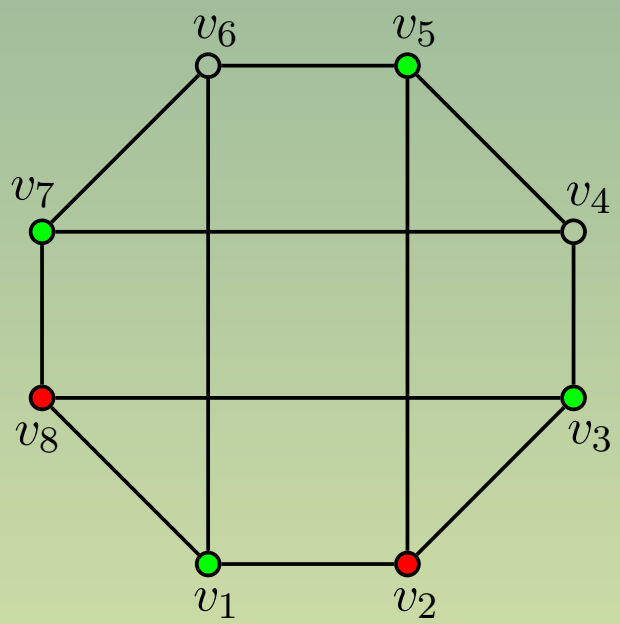
$1 : v_8, v_2$

$2 : v_1, v_3, v_5, v_7$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■		■		■	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

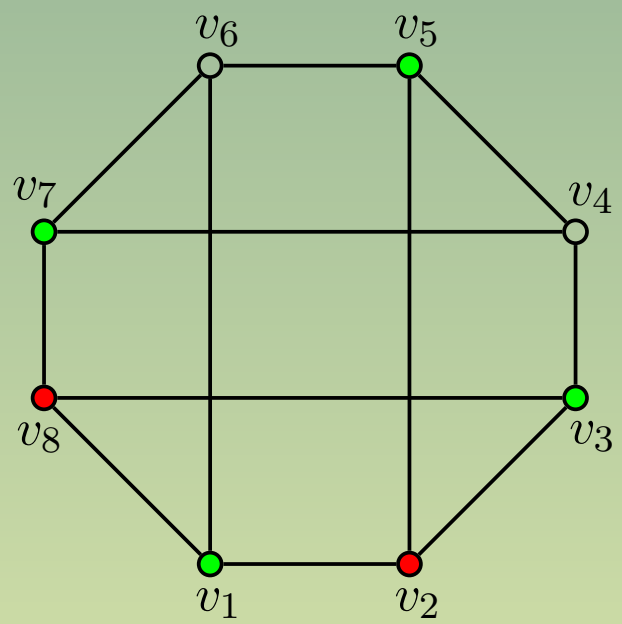
$1 : v_8, v_2$

$2 : v_1, v_3, v_5, v_7$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■	1	■	1	■	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

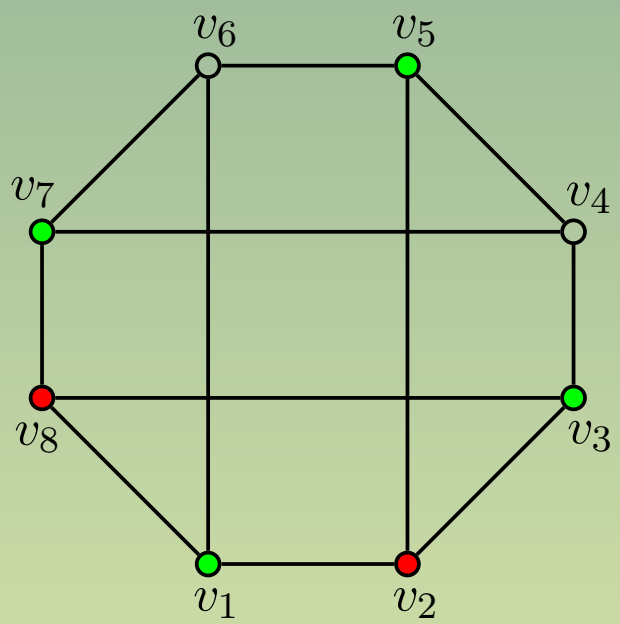
$1 : v_8, v_2$

$2 : v_1, v_3, v_5, v_7$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■	1	■	1	■	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi. Vrh v_4 ima tri obojana susjeda, ali su svi obojani istom bojom pa je $d_s(v_4) = 1$. Analogna situacija je i s vrhom v_6.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

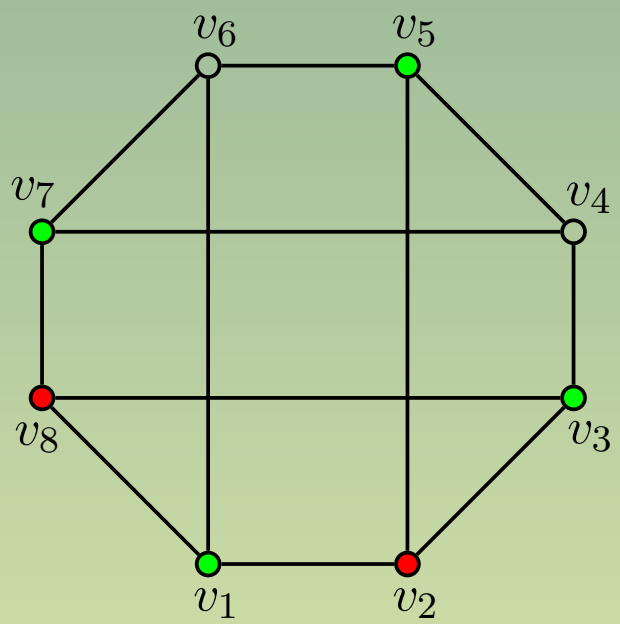
$1 : v_8, v_2$

$2 : v_1, v_3, v_5, v_7$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■	1	■	1	■	■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_4.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

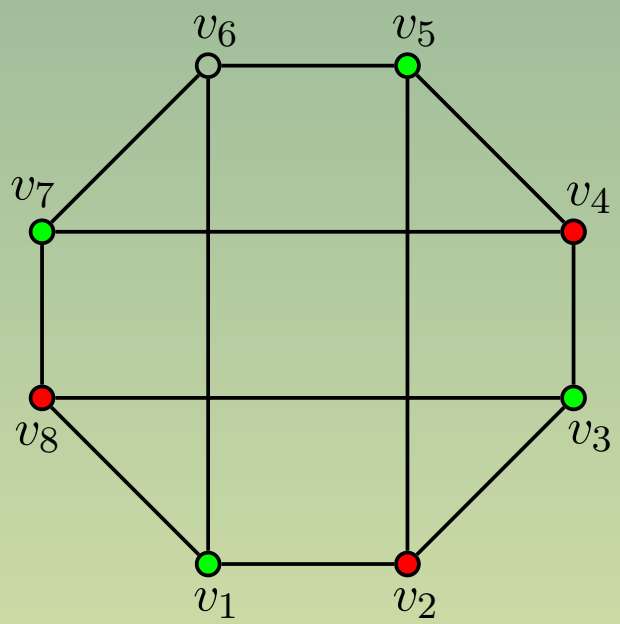
$1 : v_8, v_2$

$2 : v_1, v_3, v_5, v_7$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■	1	■	1	■	■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_4.
Vrh v_4 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

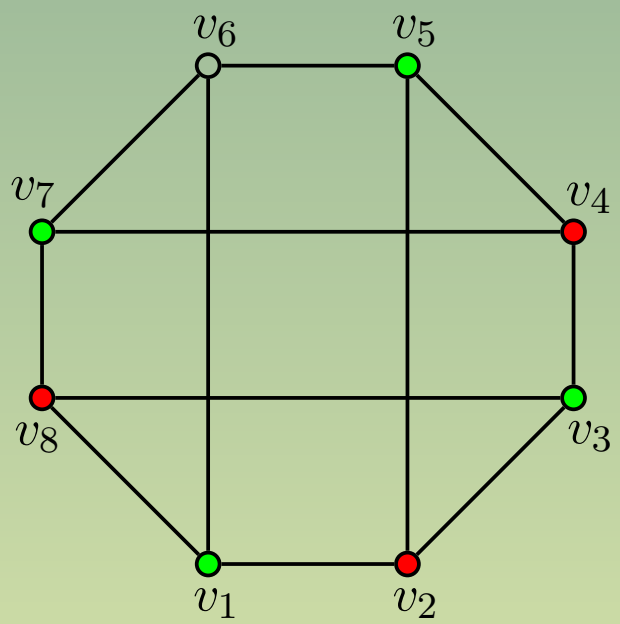
$1 : v_8, v_2, v_4$

$2 : v_1, v_3, v_5, v_7$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■	■	■		■	■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_4. Vrh v_4 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

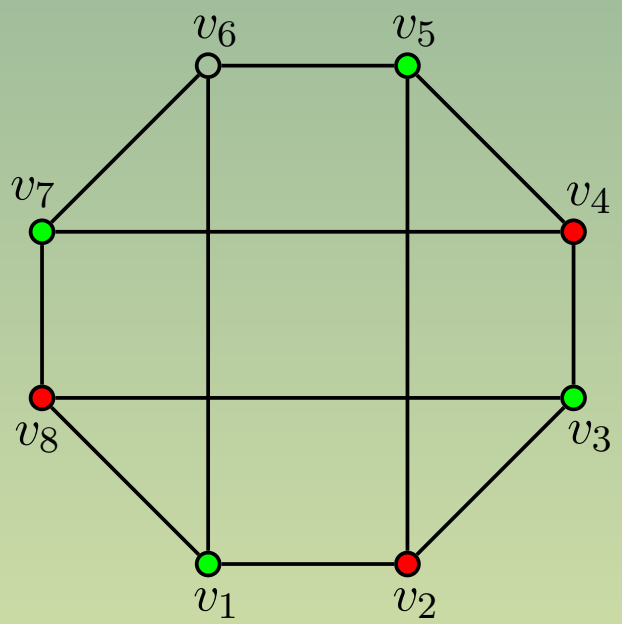
$1 : v_8, v_2, v_4$

$2 : v_1, v_3, v_5, v_7$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■	■	■		■	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

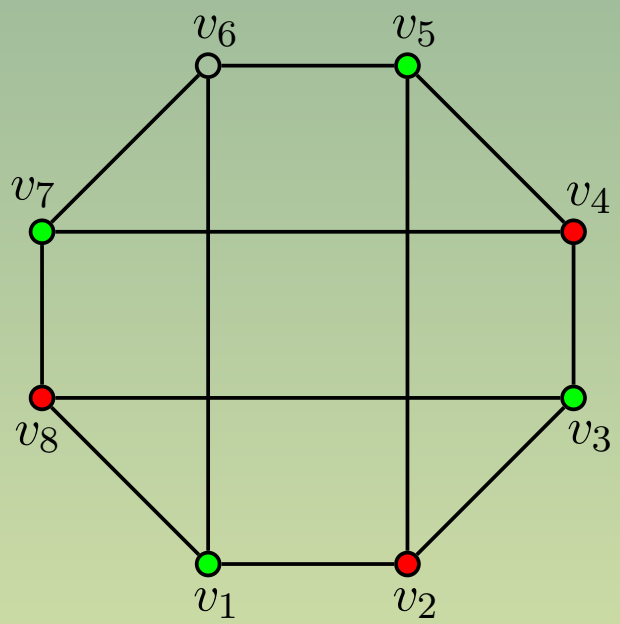
$1 : v_8, v_2, v_4$

$2 : v_1, v_3, v_5, v_7$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■	■	■	1	■	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

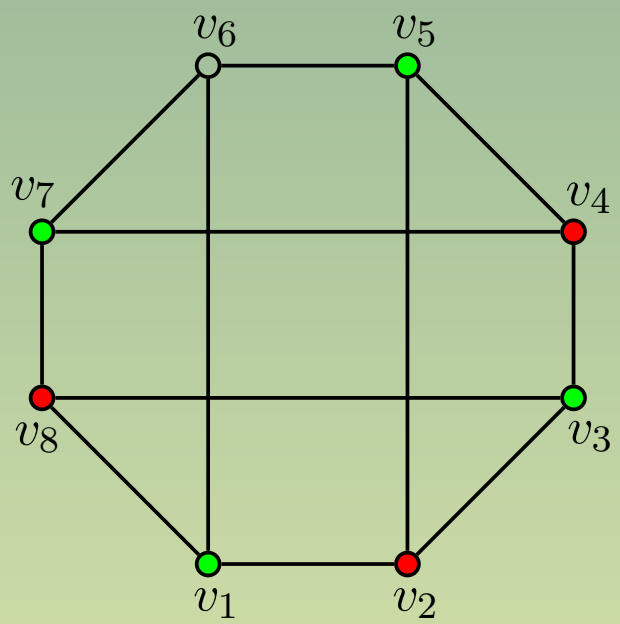
$1 : v_8, v_2, v_4$

$2 : v_1, v_3, v_5, v_7$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■	■	■	1	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, vrh v_6.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

$1 : v_8, v_2, v_4$

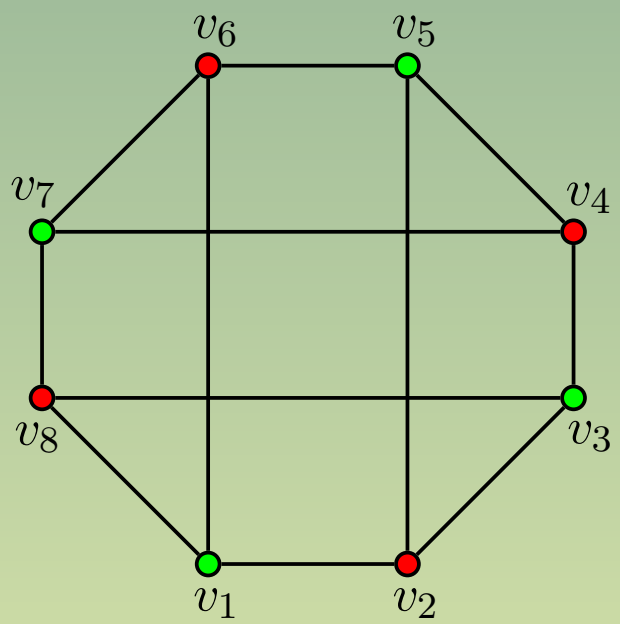
$2 : v_1, v_3, v_5, v_7$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■	■	■	1	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, vrh v_6.

Vrh v_6 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno

$1 : v_8, v_2, v_4, v_6$

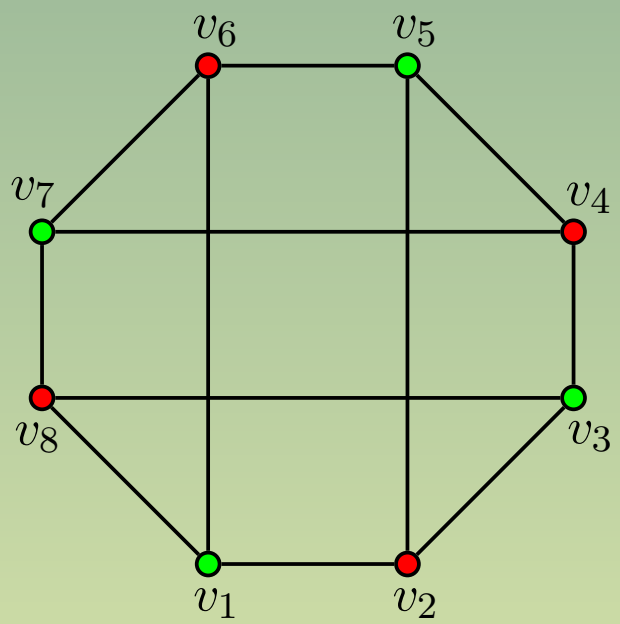
$2 : v_1, v_3, v_5, v_7$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■	■	■	■	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, vrh v_6.

Vrh v_6 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \rightarrow$ crveno, $2 \rightarrow$ zeleno

$1 : v_8, v_2, v_4, v_6$

$2 : v_1, v_3, v_5, v_7$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
d_s	■	■	■	■	■	■	■	■

◂ objasni postupak

Kako su obojani svi vrhovi, Brèlazov algoritam završava. Vidimo da smo dobili bojanje s minimalnim brojem boja.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Zadatak 10.18.

Implementirajte Brelazov algoritam za pohlepno bojanje vrhova grafa.

Zadatak 10.19.

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ promatramo bipartitni graf G_n s $2n$ vrhova i biparticijom vrhova $V_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $V_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Dva vrha u_i i v_j su susjedni akko je $i \neq j$. Uočite da je G_n $(n-1)$-regularni graf.

a. *Opišite grafove G_1, G_2, G_3 i G_4.*

b. *Implementirajte algoritam koji će za svaki $n \in \mathbb{N}$ generirati graf G_n.*

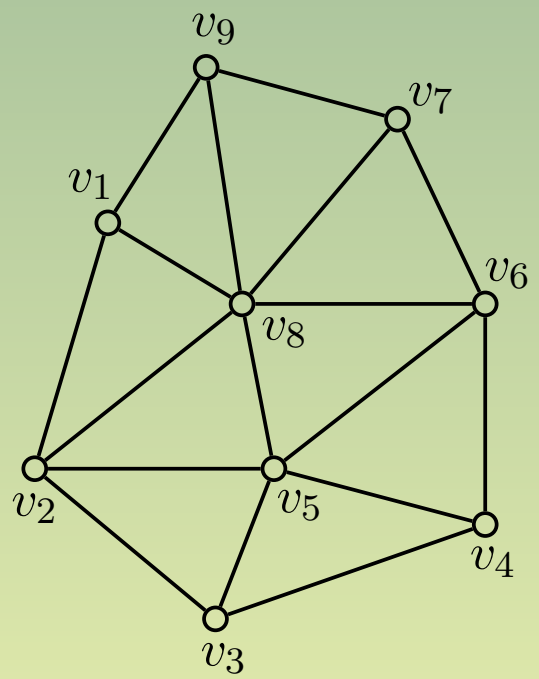
c. *Pronađite općenito raspored vrhova u grafu G_n za koji će Welsh-Powellov algoritam koristiti n boja i napravite testiranje na računalu za $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$. Rezultate testiranja spremite u jednu datoteku.*

d. *Eksperimentalno provjerite da Brèlazov algoritam na grafu G_n uvijek daje optimalno bojanje vrhova, tj. uvijek koristi 2 boje. U svakom koraku, ukoliko ima više vrhova s maksimalnim stupnjem zasićenosti, neka Brèlazov algoritam na slučajni način odabere nekog od njih. Isto tako, neka se početni vrh s maksimalnim stupnjem također odabere na slučajni način. Za $n \in \{1, \ldots, 100\}$ na grafu G_n ponovite Brèlazov algoritam $2n$ puta i uvjerite se da u svakom slučaju daje optimalno bojanje. Rezultate ponavljanja Brèlazovog algoritma za svaki pojedini n spremite u zasebnu datoteku (ukupno 100 datoteka).*

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.62.

Pokažite da Brèlazov algoritam daje bojanje vrhova s minimalnim brojem boja u grafu



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

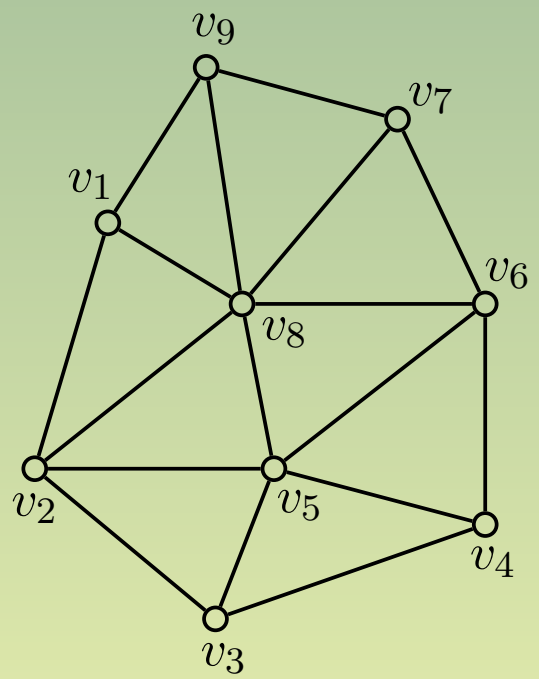
Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja

Primjer 10.62.

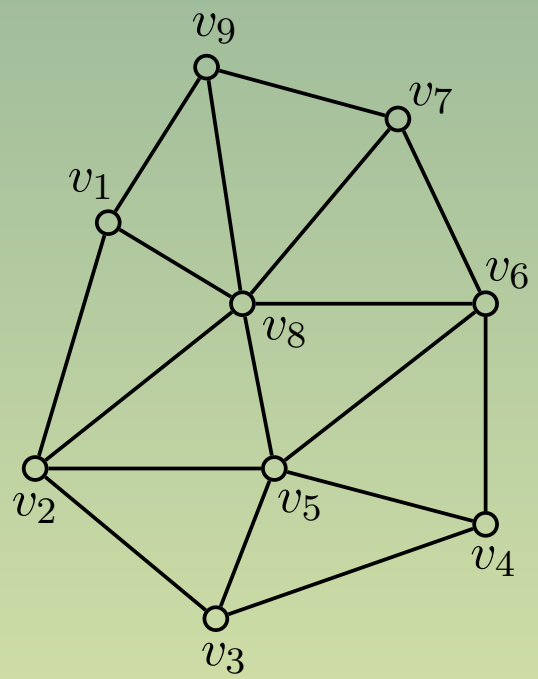
Pokažite da Brèlazov algoritam daje bojanje vrhova s minimalnim brojem boja u grafu



Rješenje.

Već smo ranije vidjeli da Welsh-Powellov algoritam na ovom grafu daje optimalno bojanje. Kako je Brèlazov algoritam barem jednako dobar kao i Welsh-Powellov, tada će i on dati optimalno bojanje. Uvjerimo se u to na ovom primjeru.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1:$

$2:$

$3:$

$4:$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s									

▸ rješenje

Najprije odaberemo jedini vrh najvećeg stupnja, vrh v_8,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

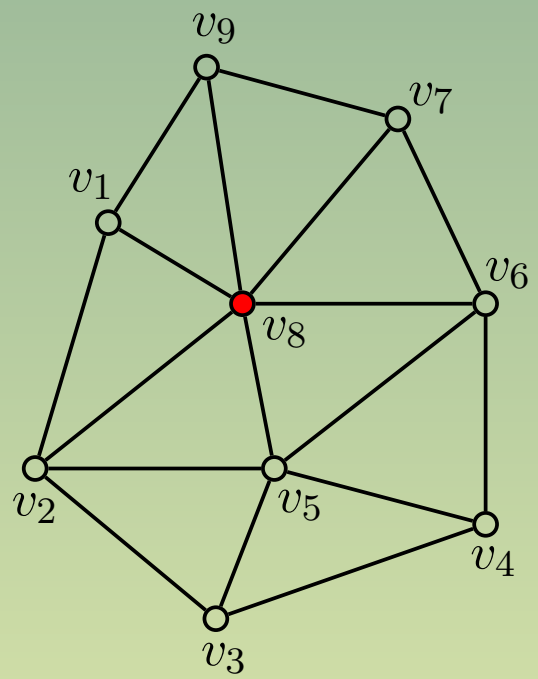
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



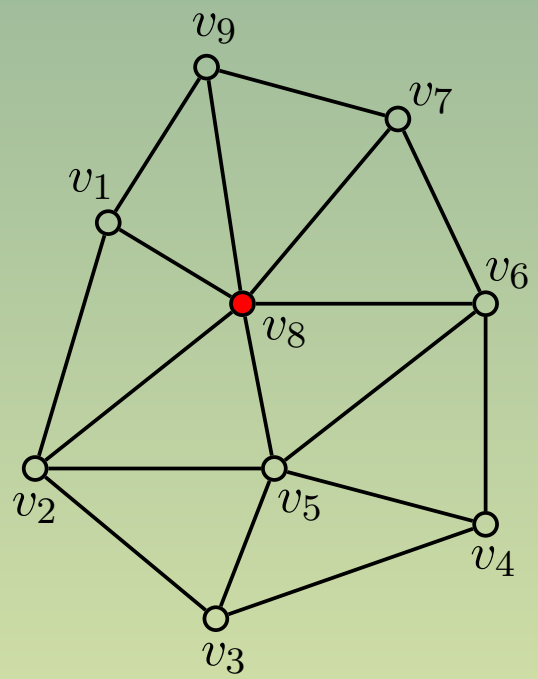
$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,
$4 \to$ žuto

$1 : v_8$
$2 :$
$3 :$
$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s								■	

Najprije odaberemo jedini vrh najvećeg stupnja, vrh v_8, i obojamo ga bojom 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 :$

$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s								■	

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

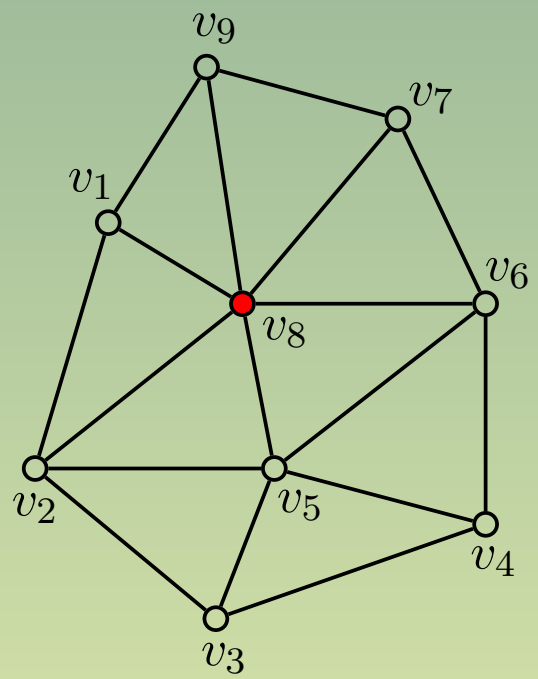
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 :$

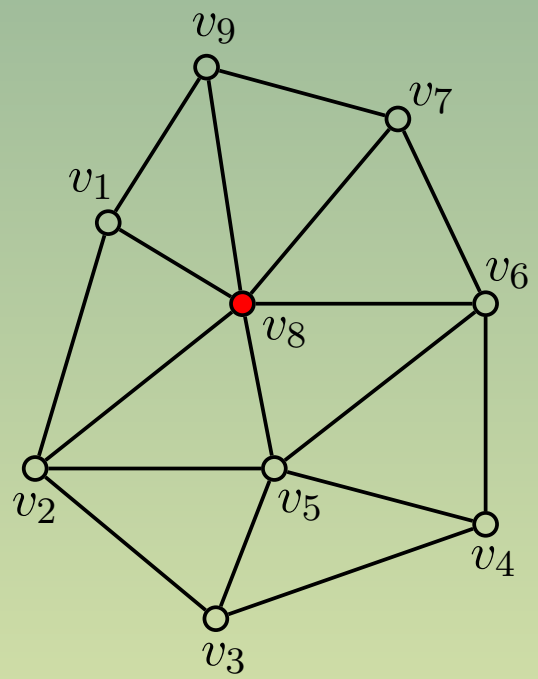
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	1	0	0	1	1	1	■	1

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 :$

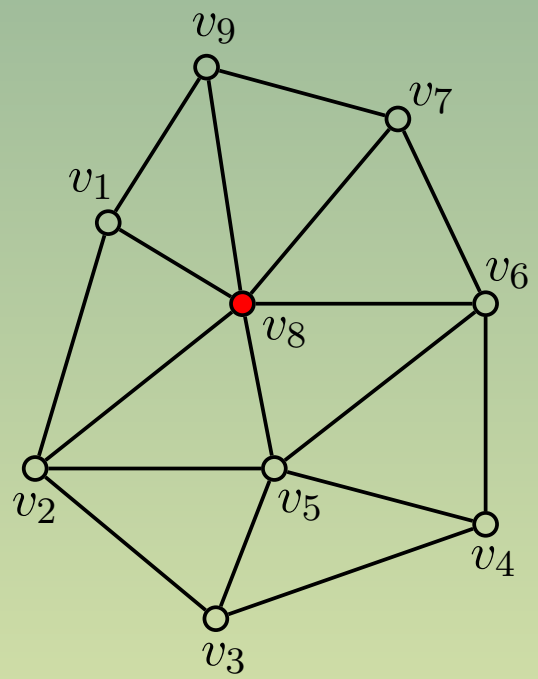
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	1	0	0	1	1	1	■	1

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_7.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 :$

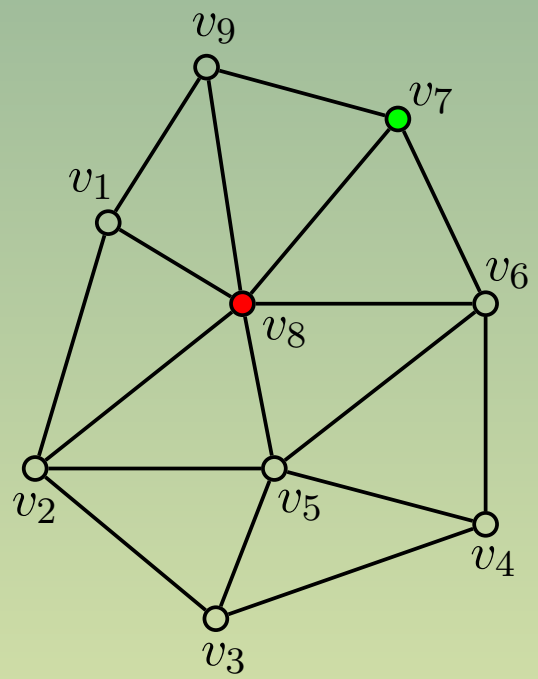
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	1	0	0	1	1	1	■	1

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_7.
Vrh v_7 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_7$

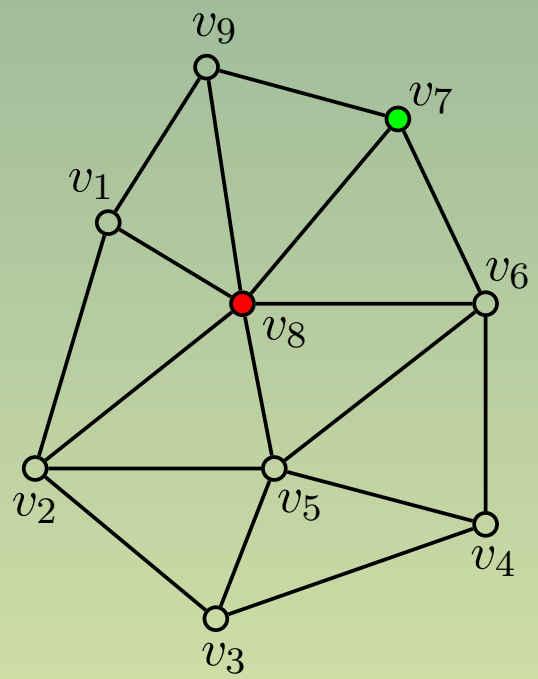
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s							■	■	

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_7. Vrh v_7 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_7$

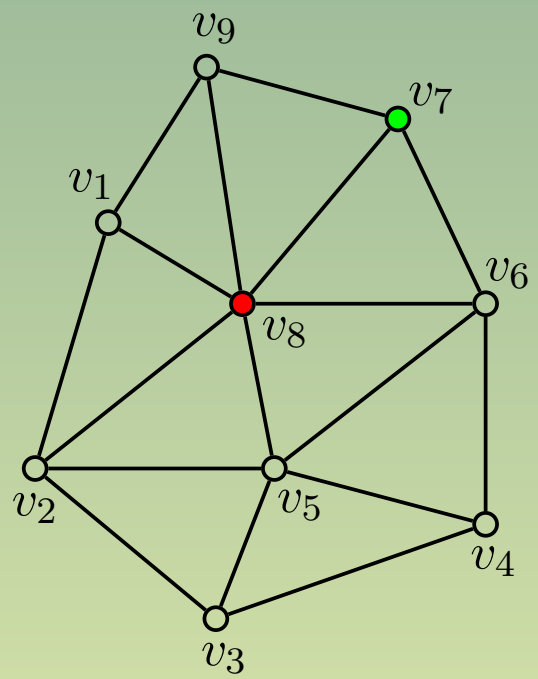
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s							■	■	

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_7$

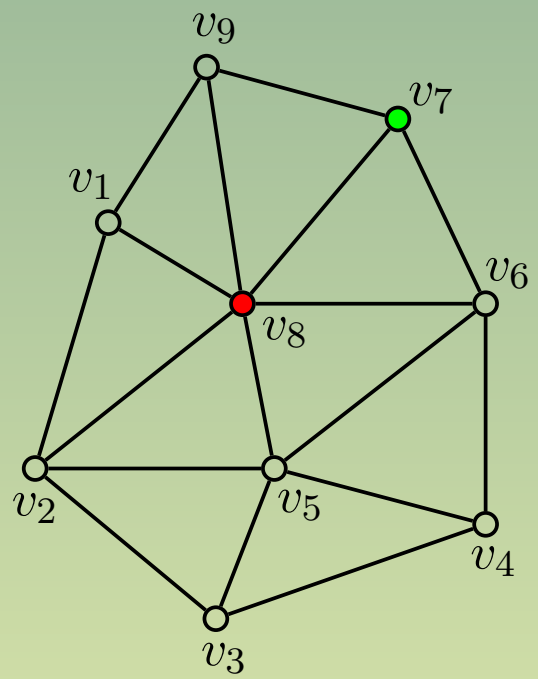
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	1	0	0	1	2	■	■	2

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_7$

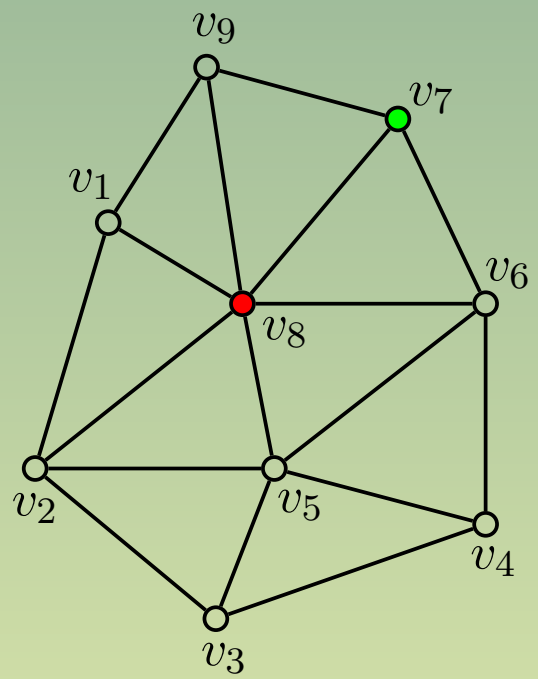
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	1	0	0	1	2	■	■	2

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_6.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_7$

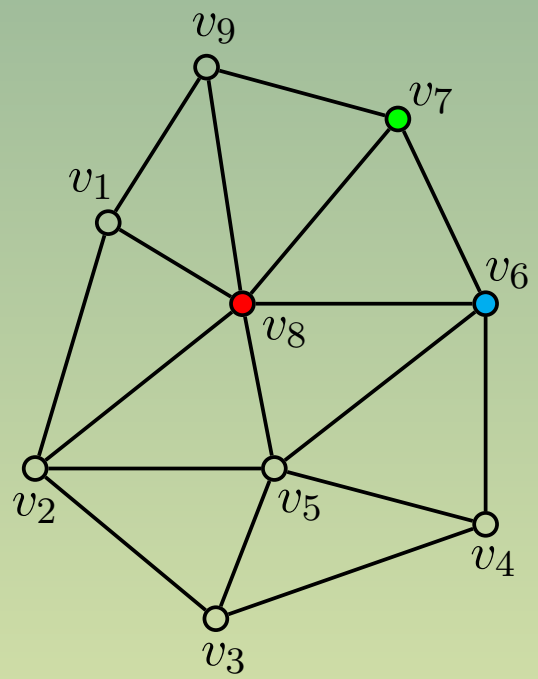
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	1	0	0	1	2	■	■	2

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_6. Vrh v_6 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_7$

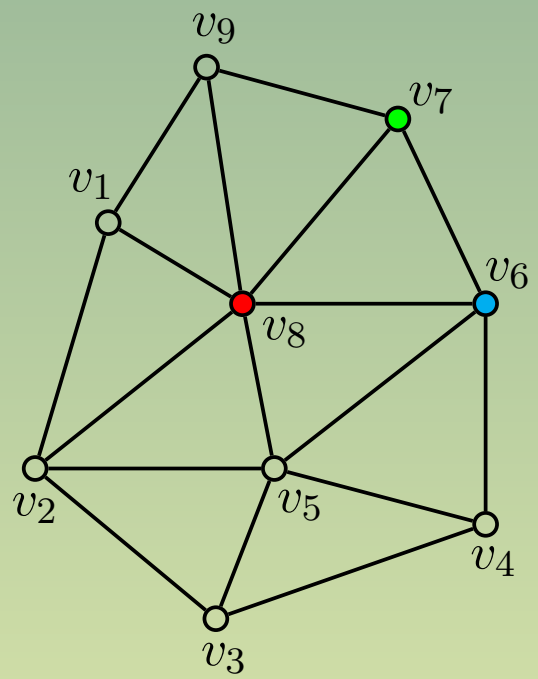
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s						■	■	■	

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_6. Vrh v_6 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_7$

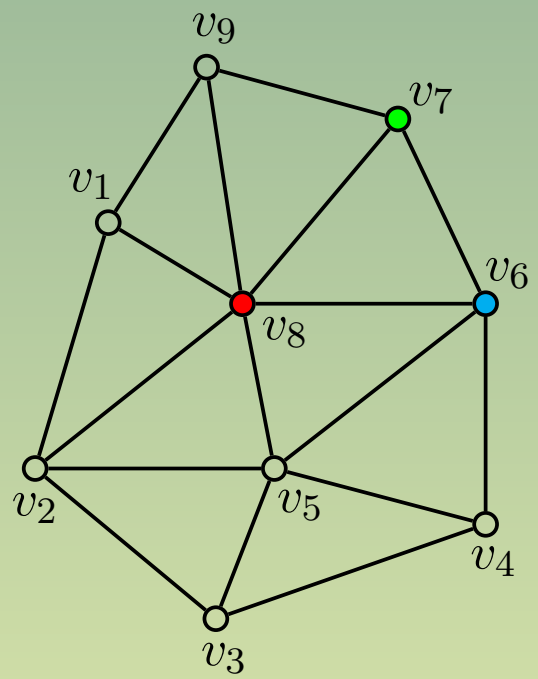
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s						■	■	■	

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_7$

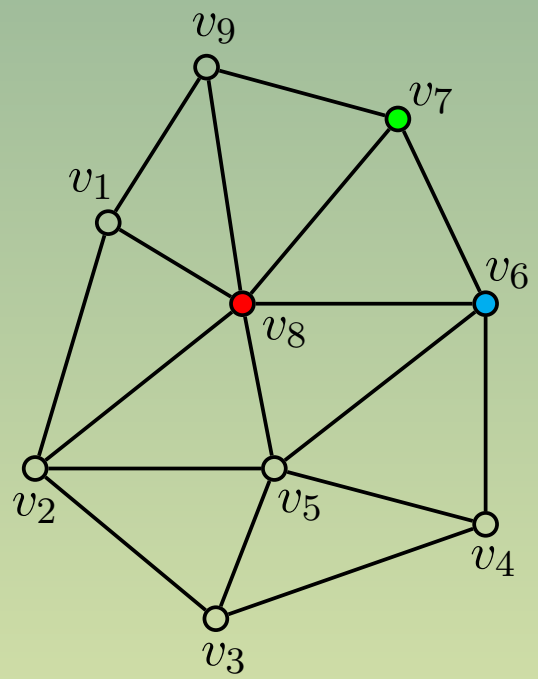
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	1	0	1	2	■	■	■	2

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_7$

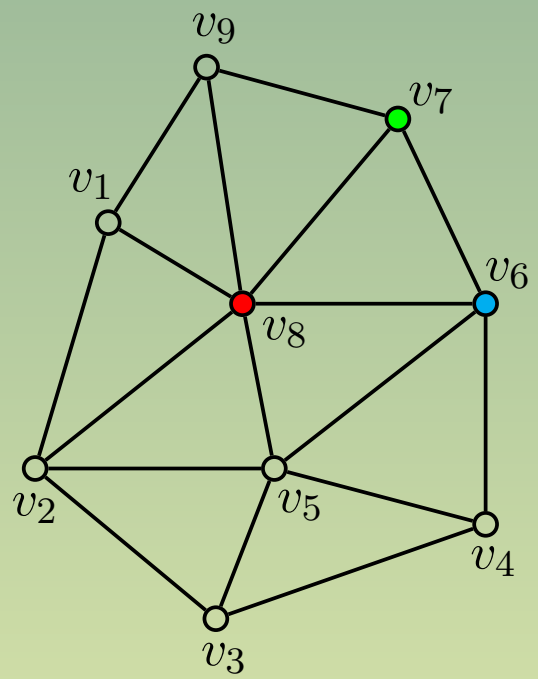
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	1	0	1	2	■	■	■	2

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_5.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_7$

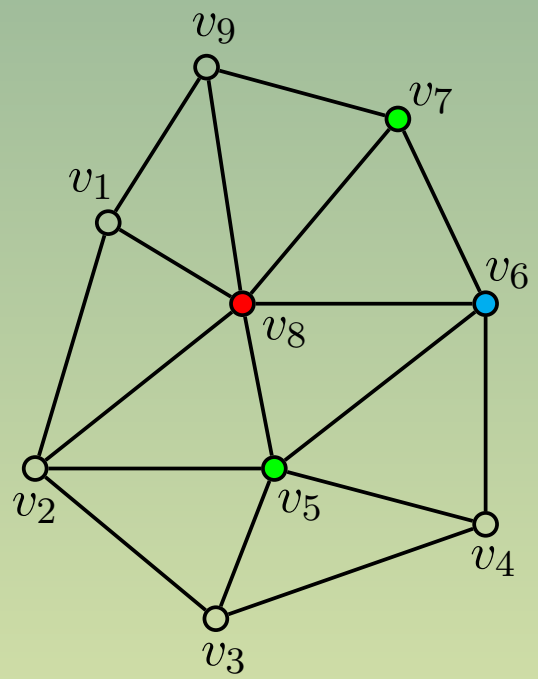
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	1	0	1	2	■	■	■	2

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_5.
Vrh v_5 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_7, v_5$

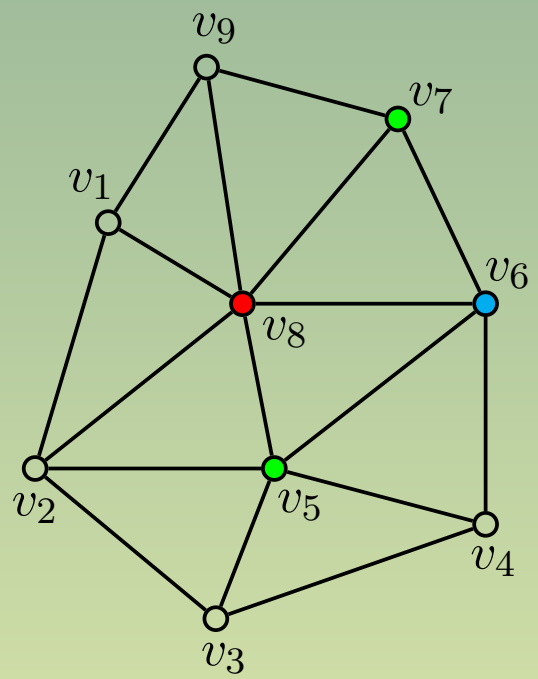
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s					■	■	■	■	

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_5. Vrh v_5 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_7, v_5$

$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s					■	■	■	■	

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

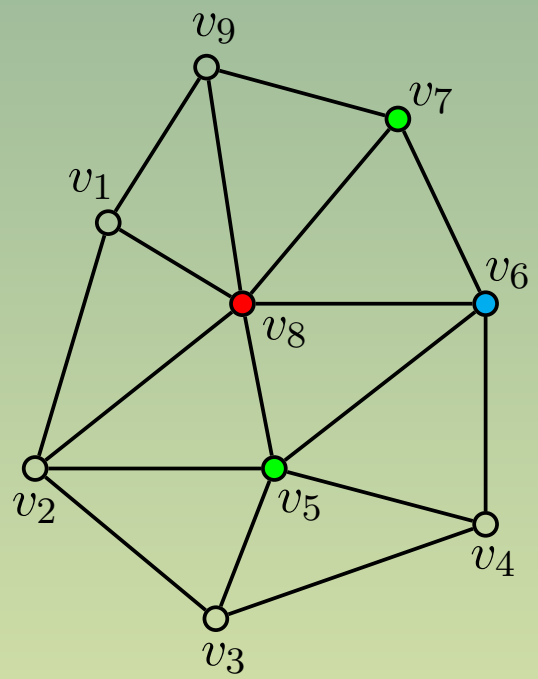
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_7, v_5$

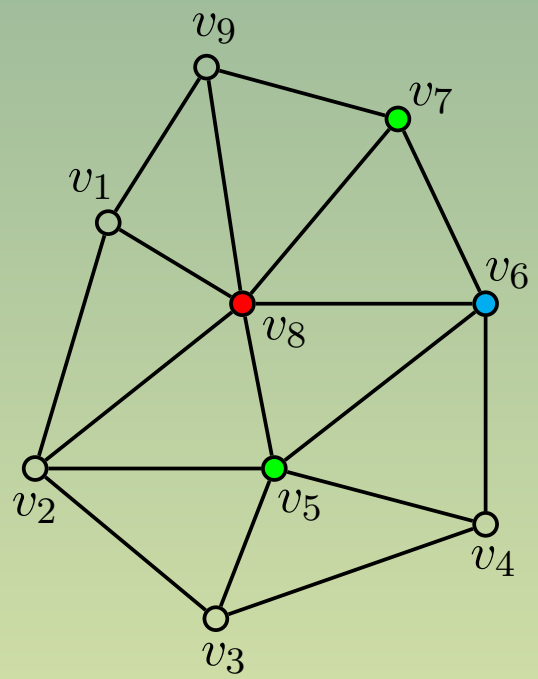
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	2	1	2	■	■	■	■	2

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_7, v_5$

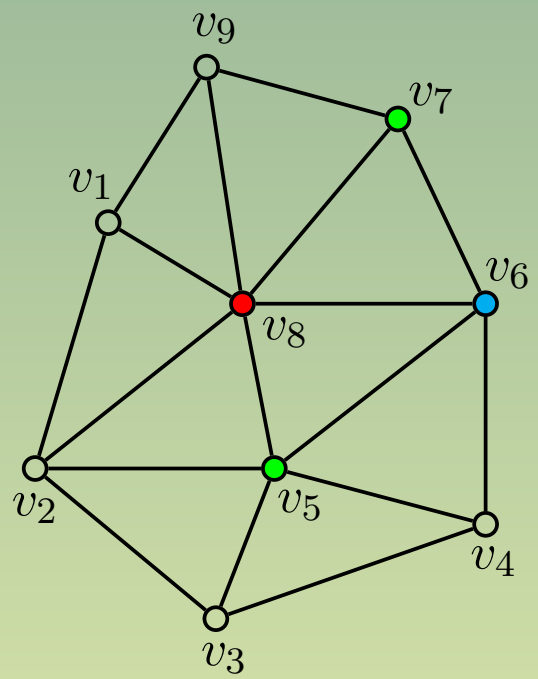
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	2	1	2	■	■	■	■	2

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_4.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8$

$2 : v_7, v_5$

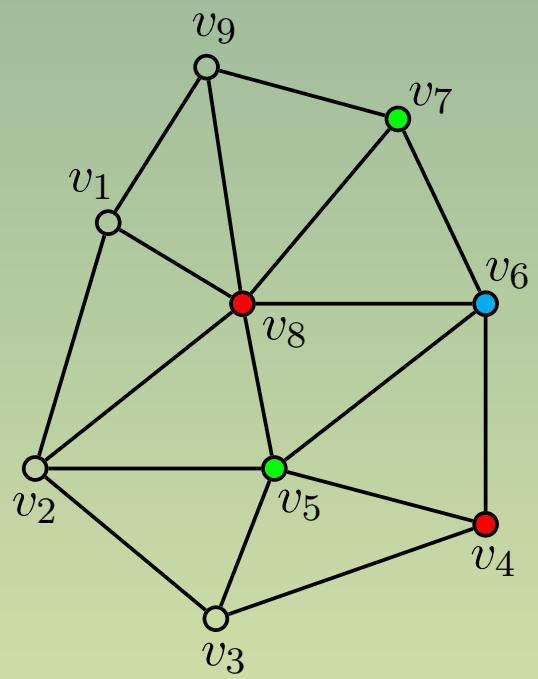
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	2	1	2	■	■	■	■	2

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_4.
Vrh v_4 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$

$2 : v_7, v_5$

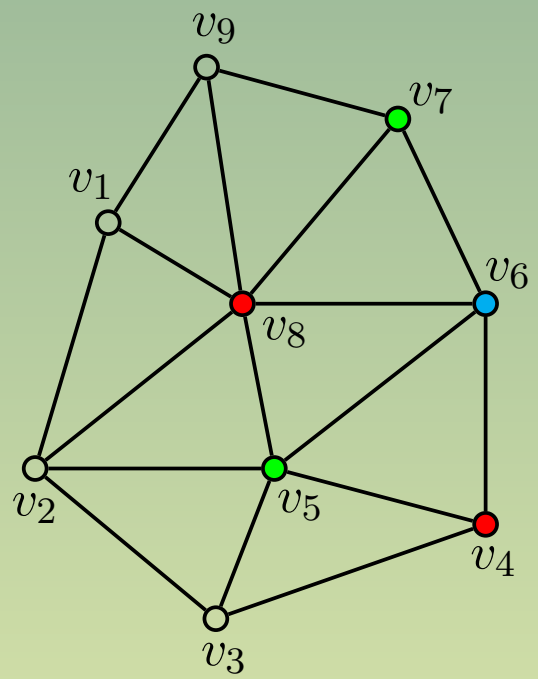
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s				■	■	■	■	■	

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_4. Vrh v_4 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$

$2 : v_7, v_5$

$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s				■	■	■	■	■	

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

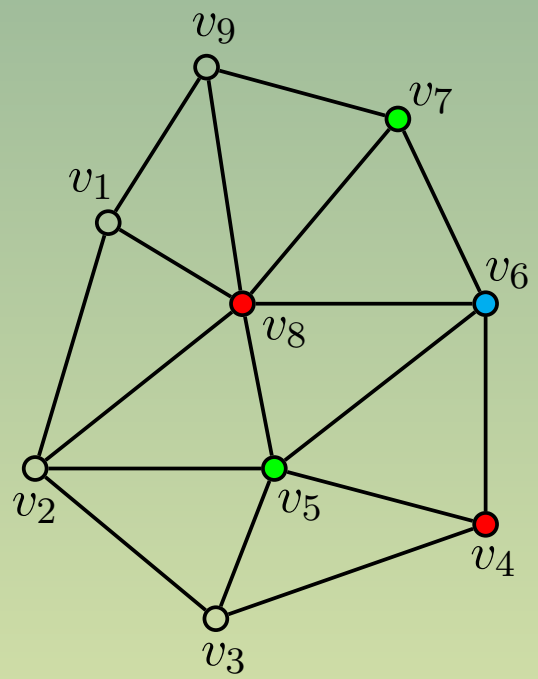
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$

$2 : v_7, v_5$

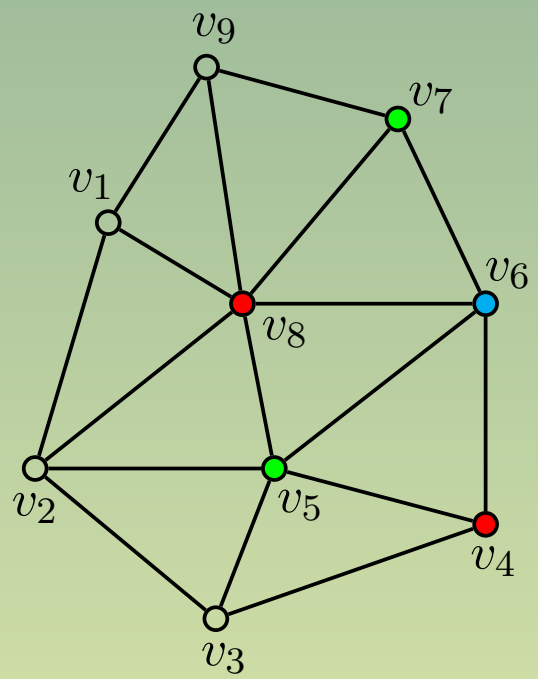
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	2	2	■	■	■	■	■	2

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$

$2 : v_7, v_5$

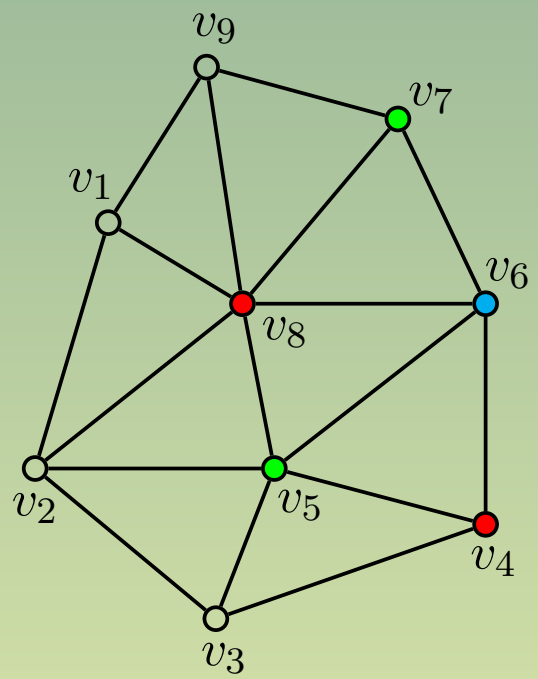
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	2	2	■	■	■	■	■	2

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$

$2 : v_7, v_5$

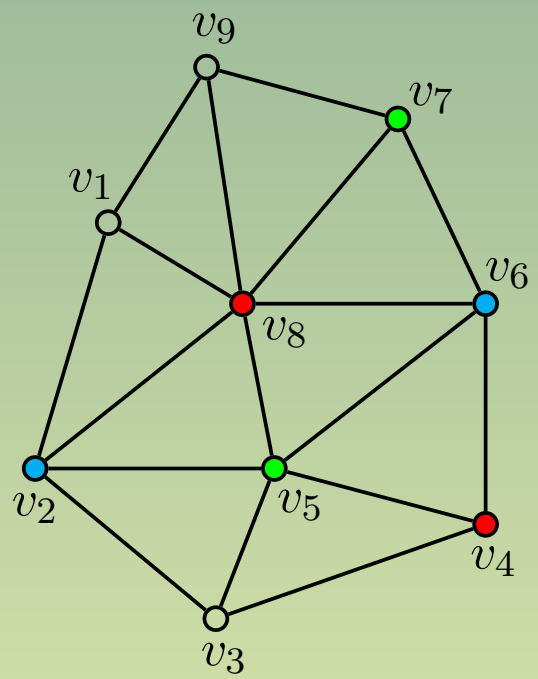
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	2	2	■	■	■	■	■	2

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_2.
Vrh v_2 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$

$2 : v_7, v_5$

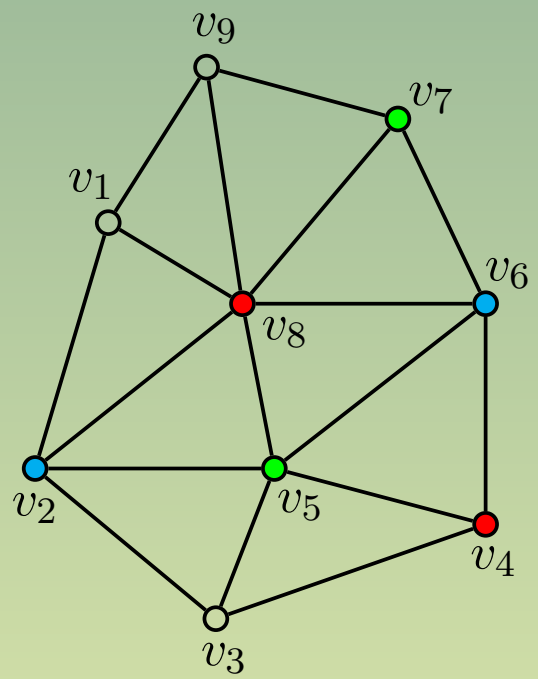
$3 : v_6, v_2$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s		■		■	■	■	■	■	

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_2. Vrh v_2 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$

$2 : v_7, v_5$

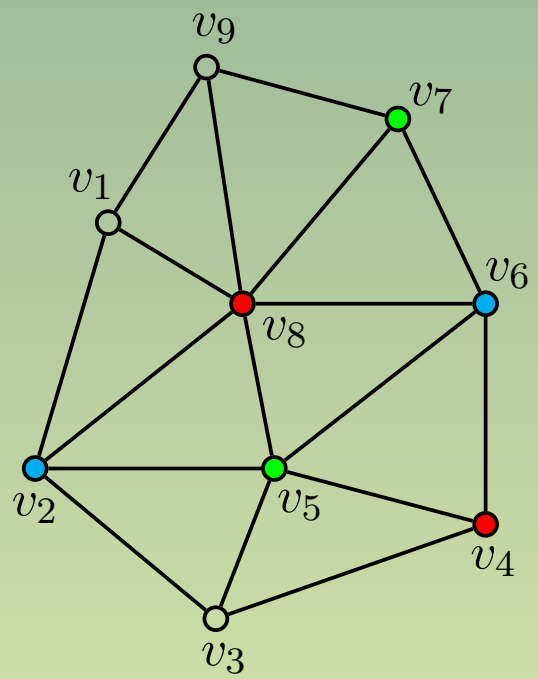
$3 : v_6, v_2$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s		■		■	■	■	■	■	

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$

$2 : v_7, v_5$

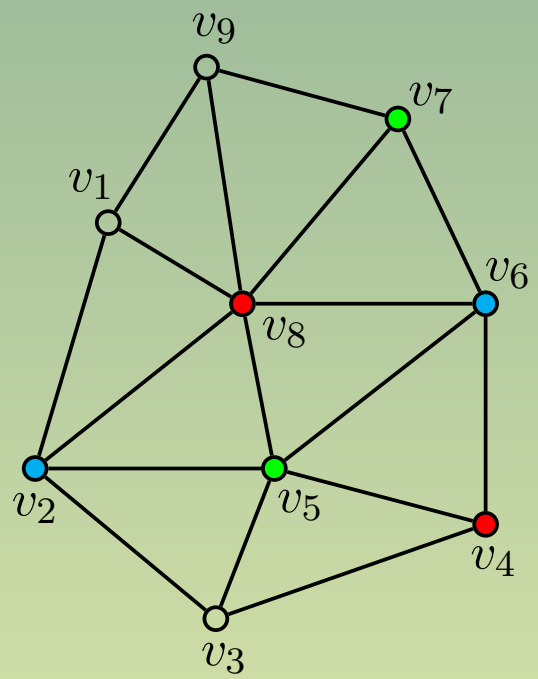
$3 : v_6, v_2$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	2	■	3	■	■	■	■	■	2

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$

$2 : v_7, v_5$

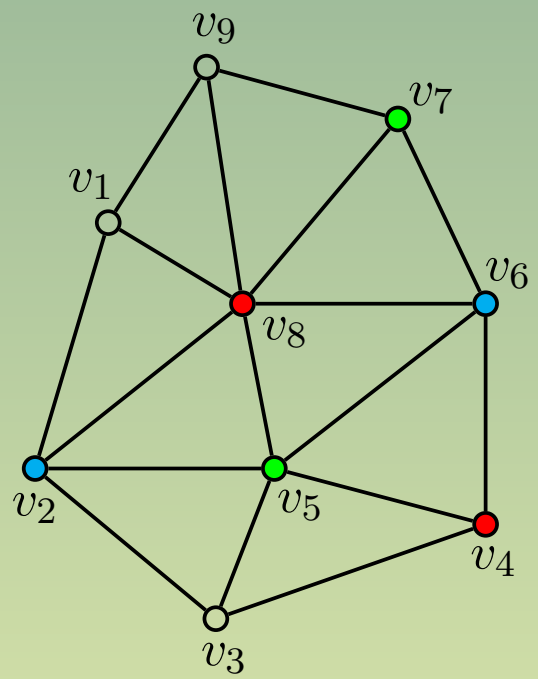
$3 : v_6, v_2$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	2	■	3	■	■	■	■	■	2

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$

$2 : v_7, v_5$

$3 : v_6, v_2$

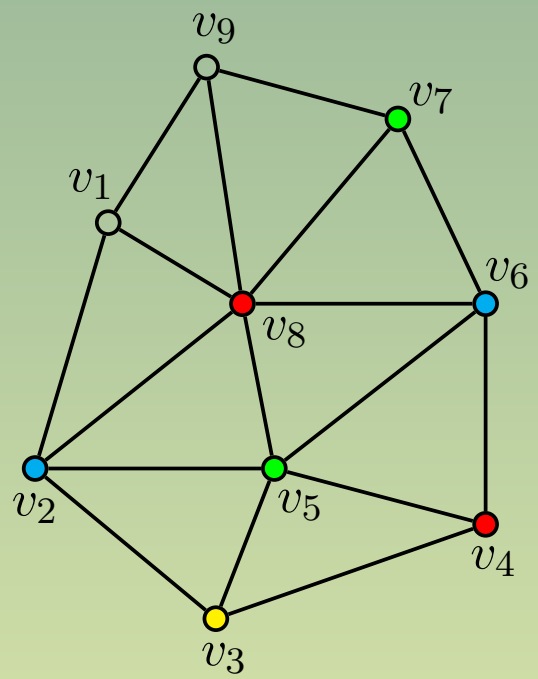
$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	2	■	3	■	■	■	■	■	2

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_3.

Vrh v_3 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$

$2 : v_7, v_5$

$3 : v_6, v_2$

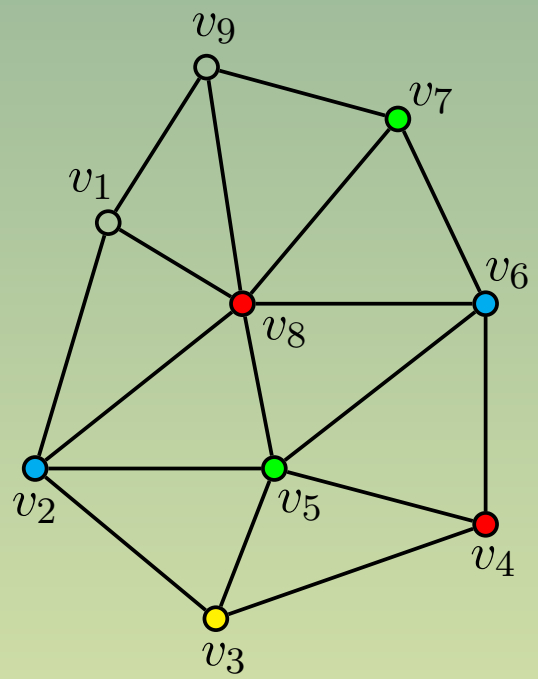
$4 : v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s		■	■	■	■	■	■	■	

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_3.

Vrh v_3 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 4.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$

$2 : v_7, v_5$

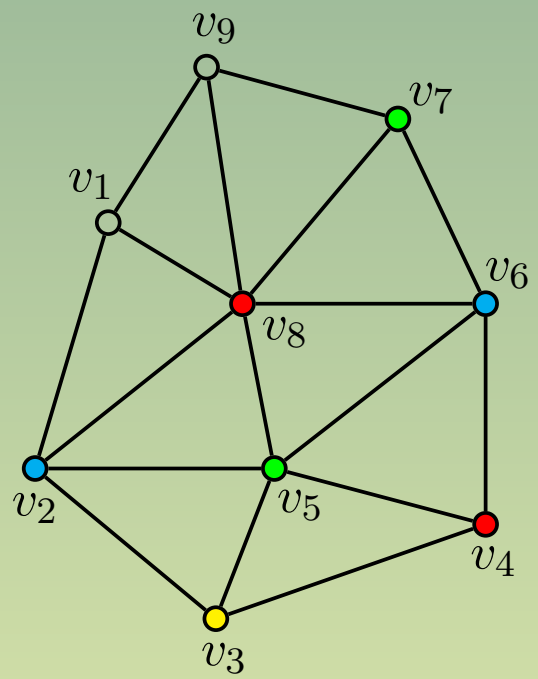
$3 : v_6, v_2$

$4 : v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s		■	■	■	■	■	■	■	

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$

$2 : v_7, v_5$

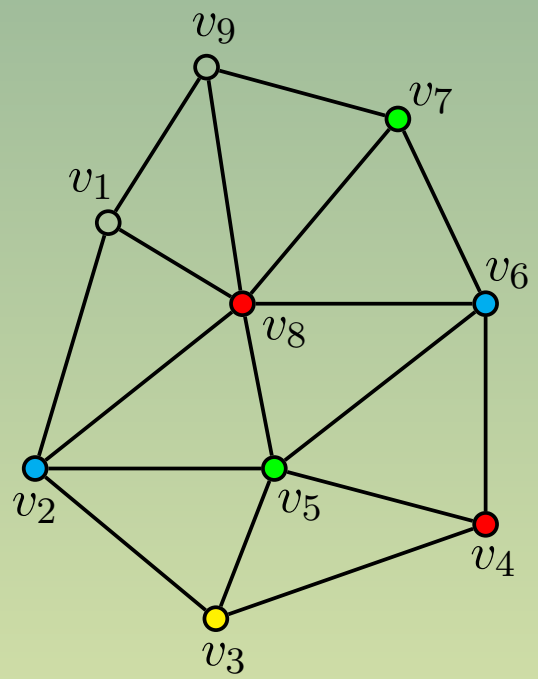
$3 : v_6, v_2$

$4 : v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	2	■	■	■	■	■	■	■	2

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$

$2 : v_7, v_5$

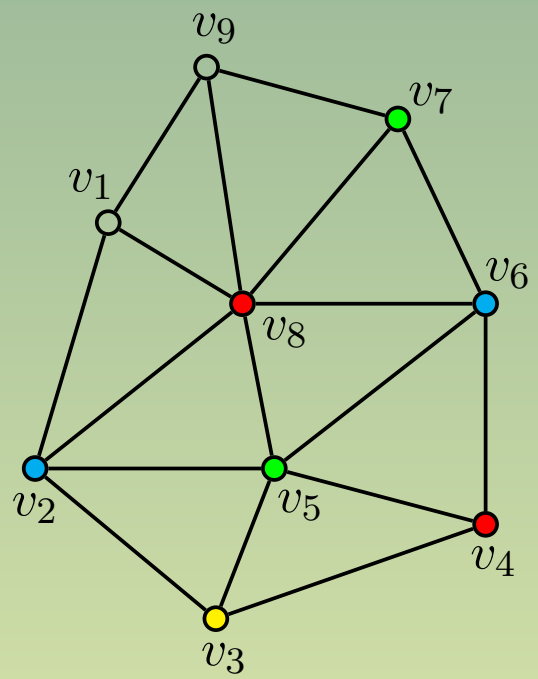
$3 : v_6, v_2$

$4 : v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	2	■	■	■	■	■	■	■	2

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_9.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$

$2 : v_7, v_5$

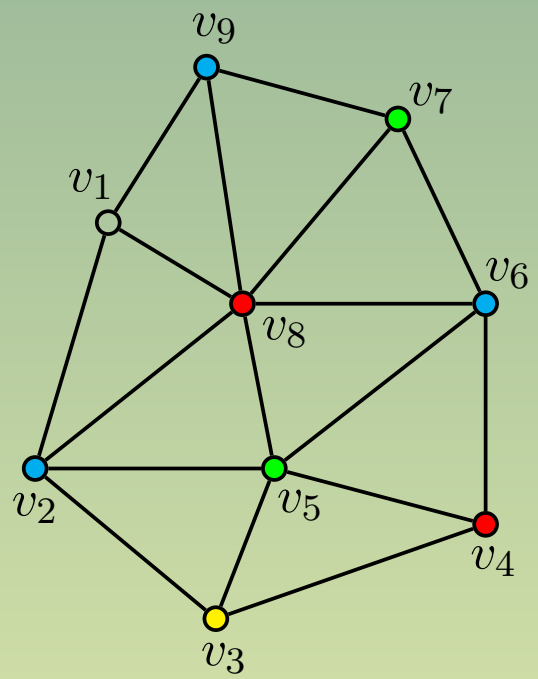
$3 : v_6, v_2$

$4 : v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	2	■	■	■	■	■	■	■	2

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_9. Vrh v_9 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$

$2 : v_7, v_5$

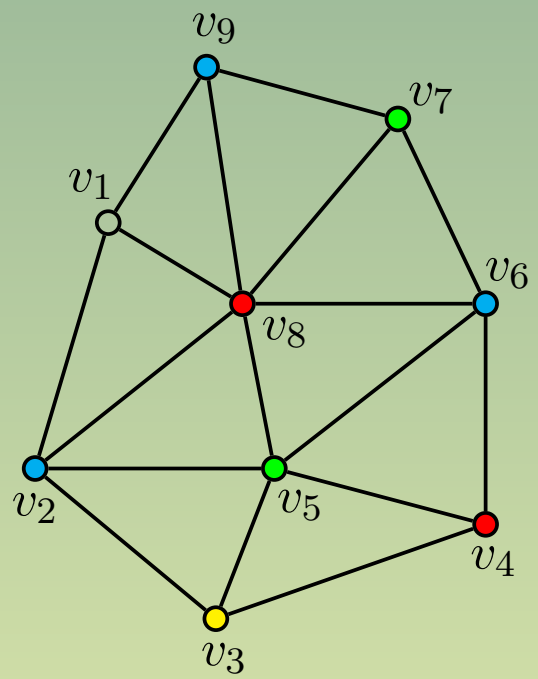
$3 : v_6, v_2, v_9$

$4 : v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s		■	■	■	■	■	■	■	■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_9. Vrh v_9 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$

$2 : v_7, v_5$

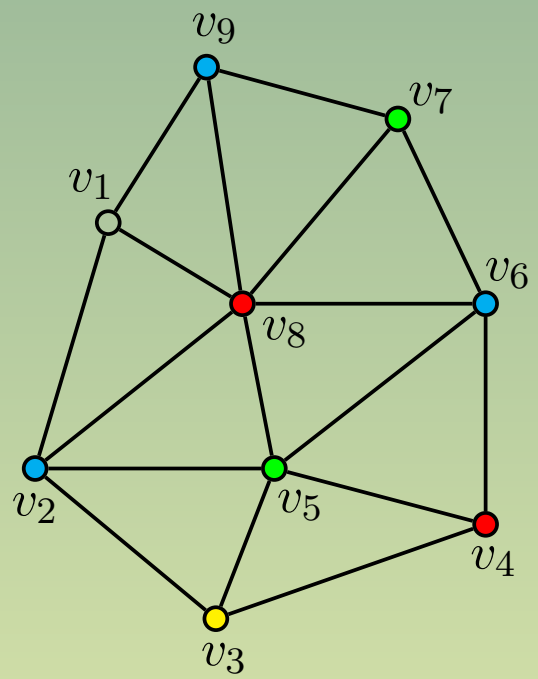
$3 : v_6, v_2, v_9$

$4 : v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s		■	■	■	■	■	■	■	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$

$2 : v_7, v_5$

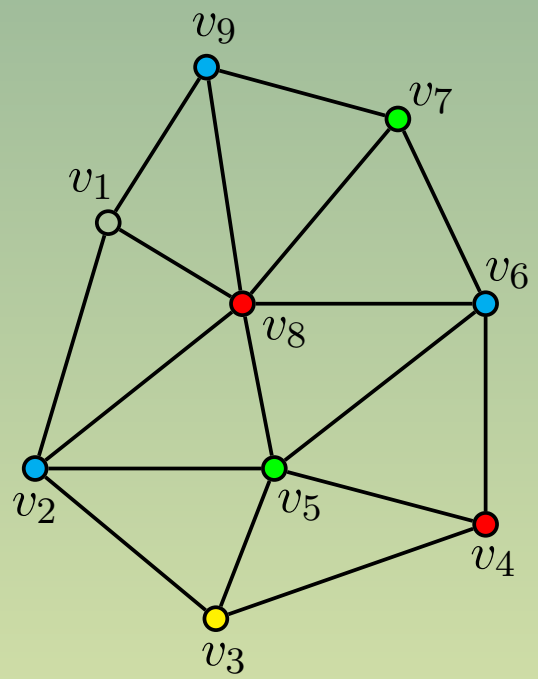
$3 : v_6, v_2, v_9$

$4 : v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	2	■	■	■	■	■	■	■	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



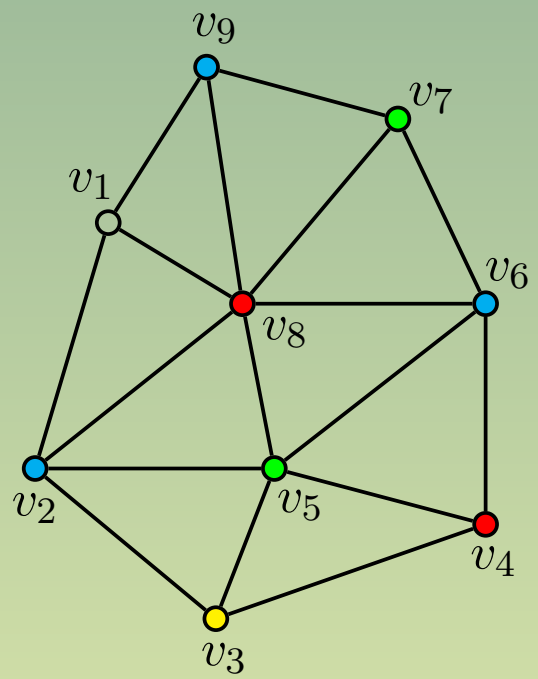
$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,
$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$
$2 : v_7, v_5$
$3 : v_6, v_2, v_9$
$4 : v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	2	■	■	■	■	■	■	■	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi. Vrh v_1 ima trenutno tri obojana susjeda, ali su korištene samo dvije boje za njihovo bojanje pa je zato $d_s(v_1) = 2$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo, $4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$

$2 : v_7, v_5$

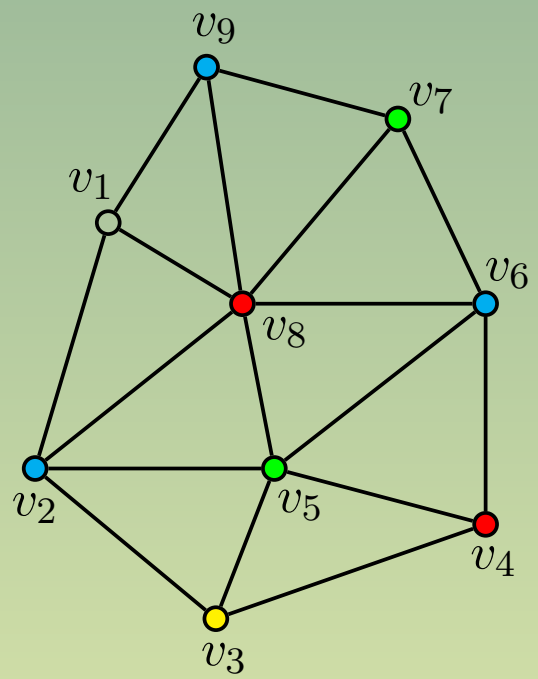
$3 : v_6, v_2, v_9$

$4 : v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	2	■	■	■	■	■	■	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$

$2 : v_7, v_5$

$3 : v_6, v_2, v_9$

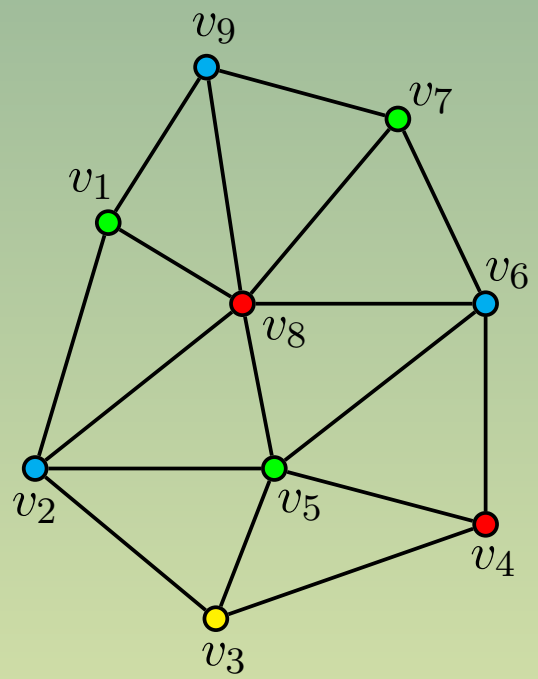
$4 : v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	2	■	■	■	■	■	■	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_1.

Vrh v_1 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$

$2 : v_7, v_5, v_1$

$3 : v_6, v_2, v_9$

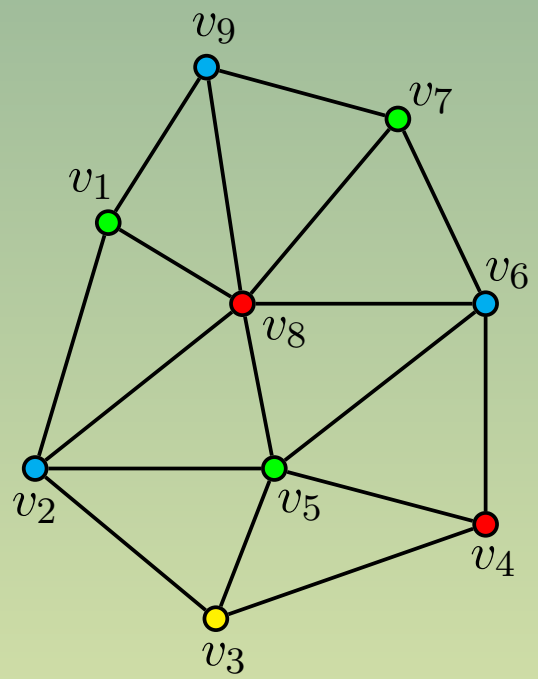
$4 : v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	■	■	■	■	■	■	■	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_1.

Vrh v_1 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo, $4 \to$ žuto

$1 : v_8, v_4$

$2 : v_7, v_5, v_1$

$3 : v_6, v_2, v_9$

$4 : v_3$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	■	■	■	■	■	■	■	■	■

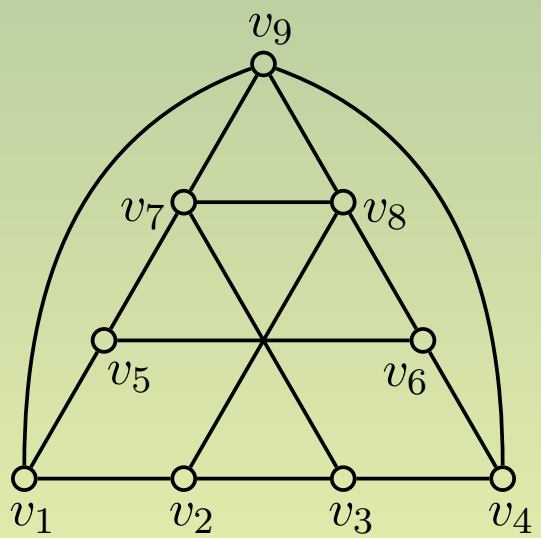
postupak

Kako su obojani svi vrhovi, Brèlazov algoritam završava. Vidimo da smo dobili bojanje vrhova s minimalnim brojem boja jer već od prije znamo da je kromatski broj zadanog grafa jednak 4.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.63.

Pokažite da Brèlazov algoritam ne daje uvijek bojanje vrhova s minimalnim brojem boja u grafu



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

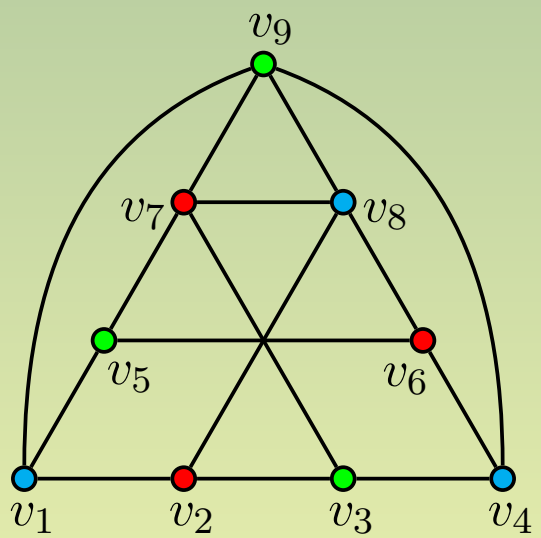
Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja

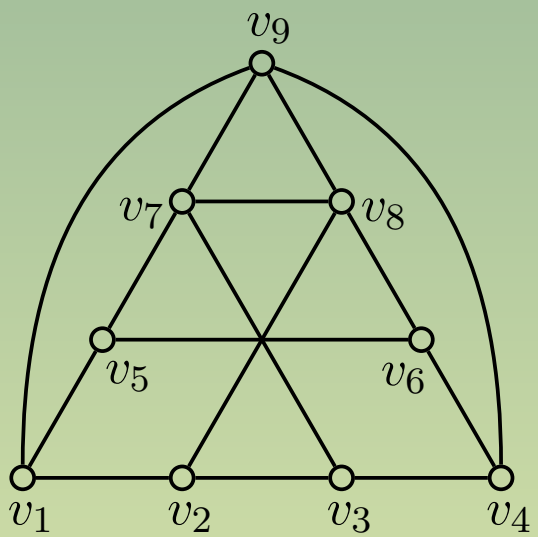
Rješenje.

Na donjoj slici je prikazano jedno 3-bojanje vrhova zadanog grafa. Kako graf sadrži podgrafove izomorfne s K_3, to je ujedno i bojanje s minimalnim brojem boja.



Međutim, Brèlazov algoritam ipak neće uvijek dati bojanje vrhova s minimalnim brojem boja. Pogledajmo najprije situaciju u kojoj će Brèlazov algoritam dati optimalno bojanje vrhova.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1:$

$2:$

$3:$

$4:$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s									

▸ rješenje

Najprije odaberemo neki vrh najvećeg stupnja, npr. vrh v_7,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

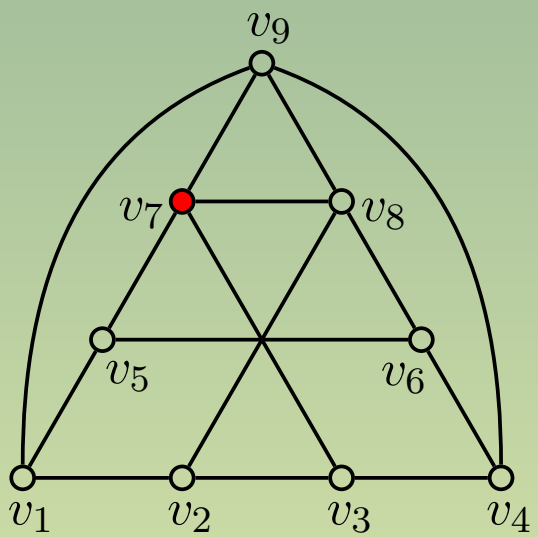
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo, $4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 :$

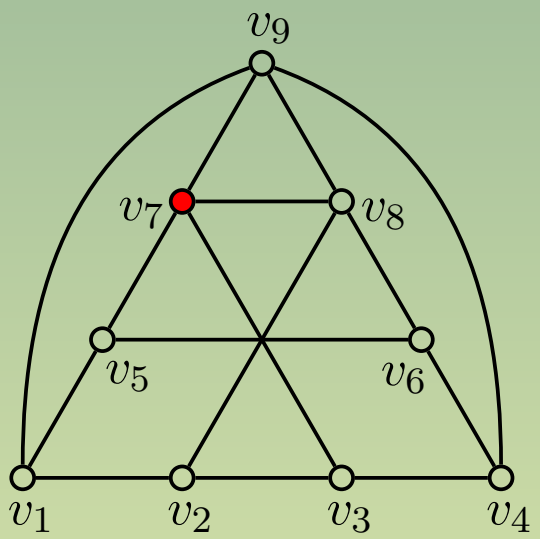
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s							■		

Najprije odaberemo neki vrh najvećeg stupnja, npr. vrh v_7, i njega obojamo bojom 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 :$

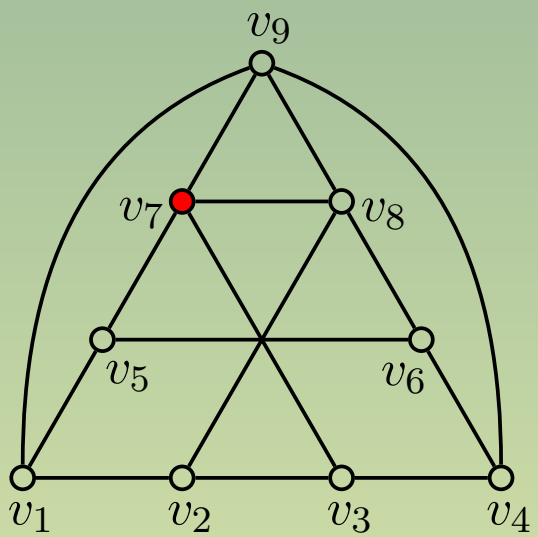
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s							■		

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 :$

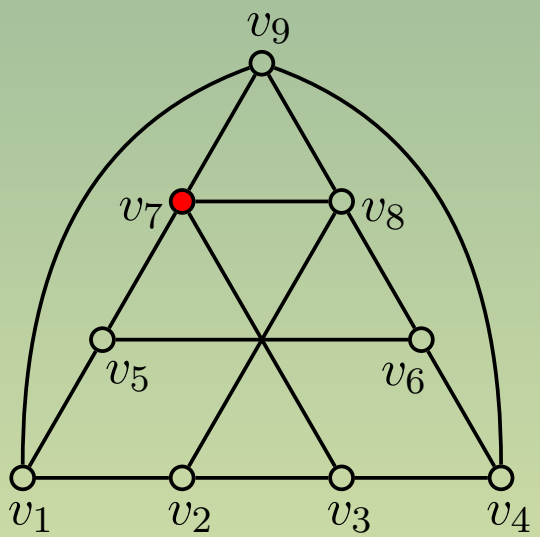
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	0	0	1	0	1	0	■	1	1

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 :$

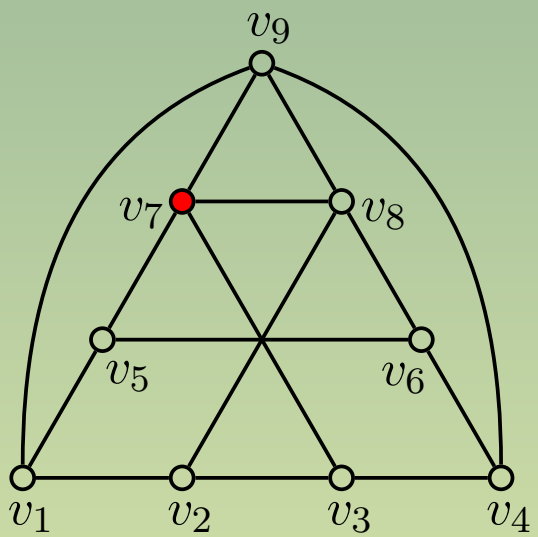
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	0	0	1	0	1	0	■	1	1

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_9.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 :$

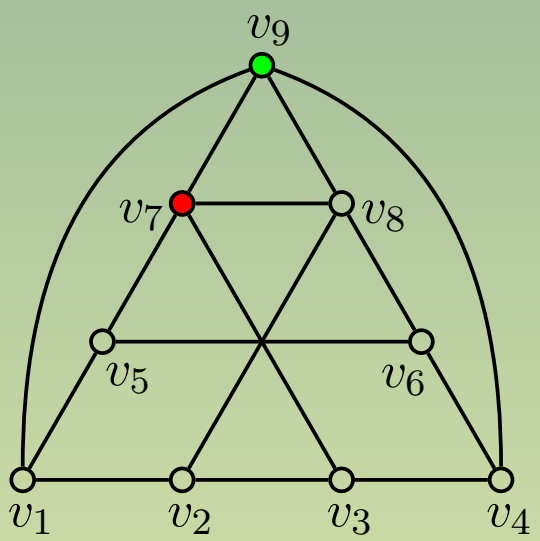
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	0	0	1	0	1	0	■	1	1

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_9. Vrh v_9 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 : v_9$

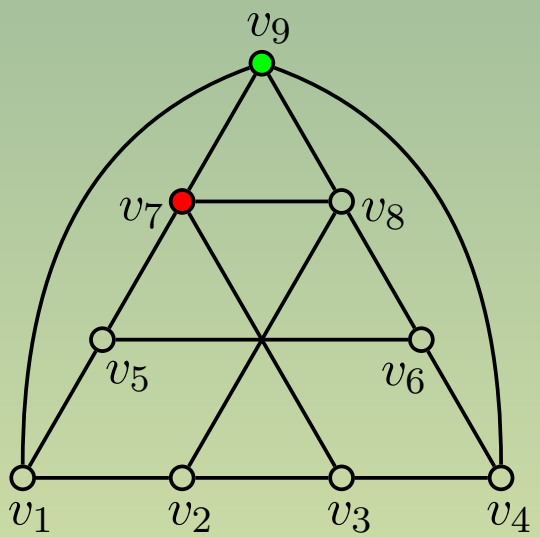
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s							■		■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_9. Vrh v_9 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 : v_9$

$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s							■		■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

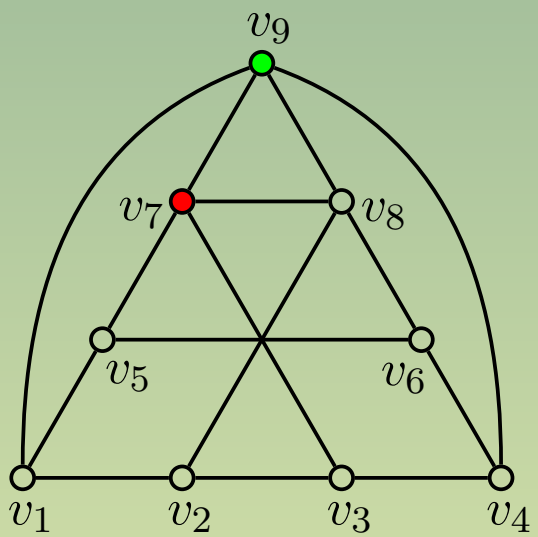
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 : v_9$

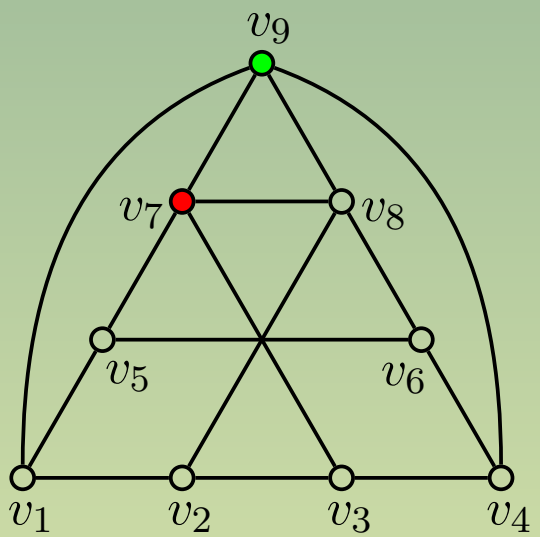
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	0	1	1	1	0	■	2	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 : v_9$

$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	0	1	1	1	0	■	2	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_8.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

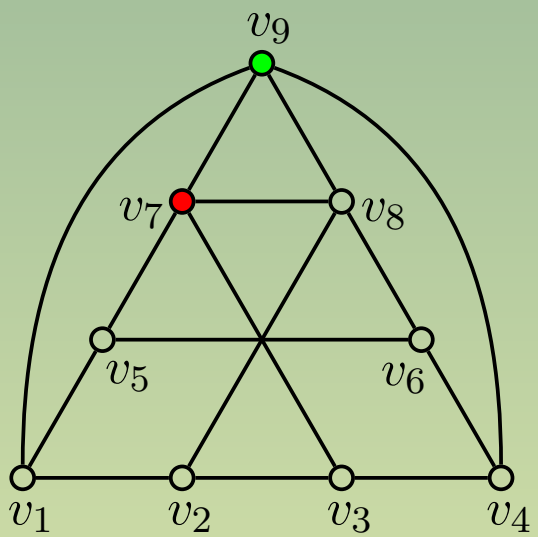
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 : v_9$

$3 :$

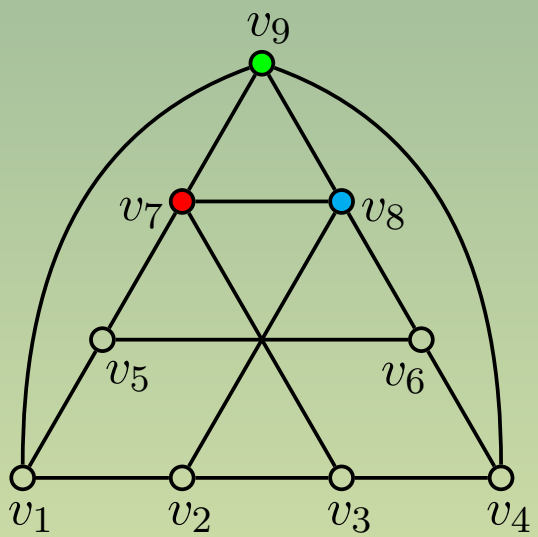
$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	0	1	1	1	0	■	2	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_8.

Vrh v_8 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 : v_9$

$3 : v_8$

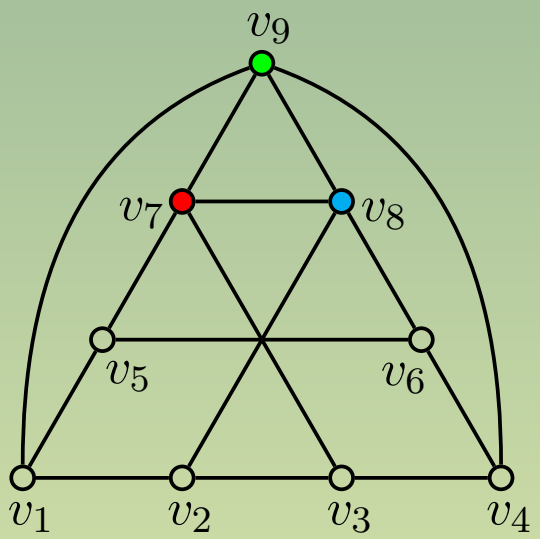
$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s							■	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_8.

Vrh v_8 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 : v_9$

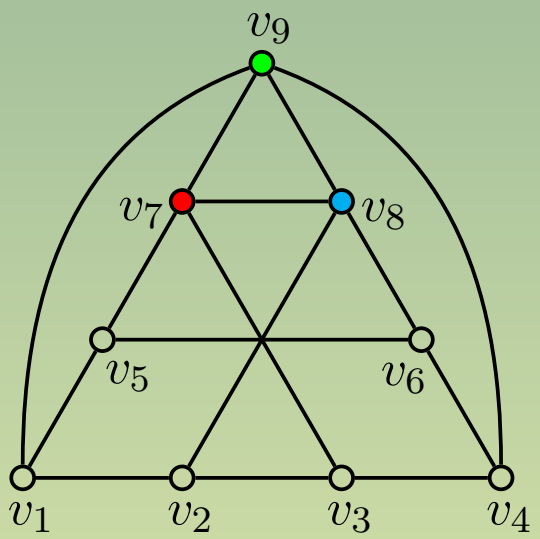
$3 : v_8$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s							■	■	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 : v_9$

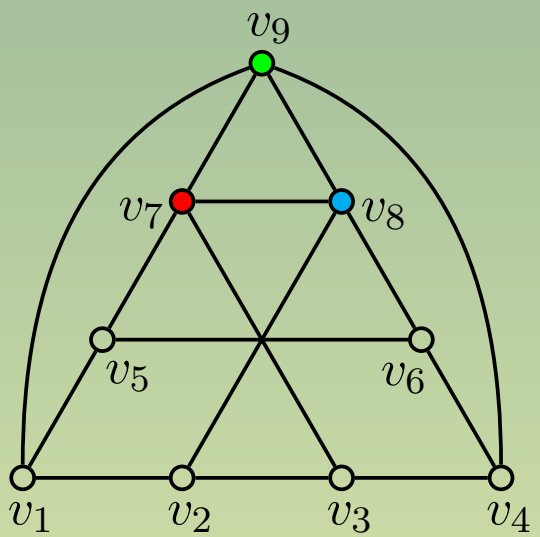
$3 : v_8$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	1	1	1	1	1	■	■	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 : v_9$

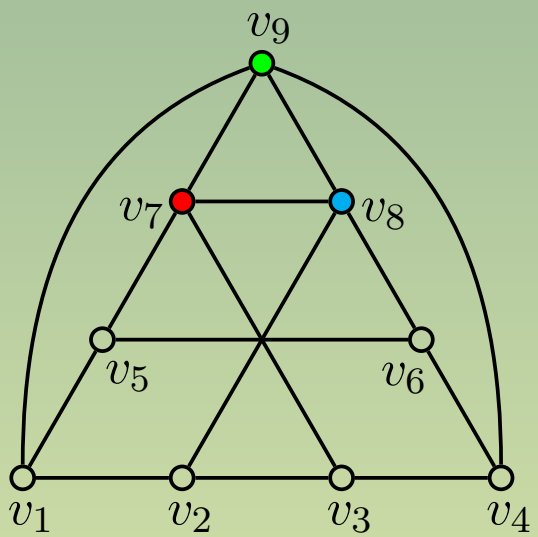
$3 : v_8$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	1	1	1	1	1	■	■	■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_5.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 : v_9$

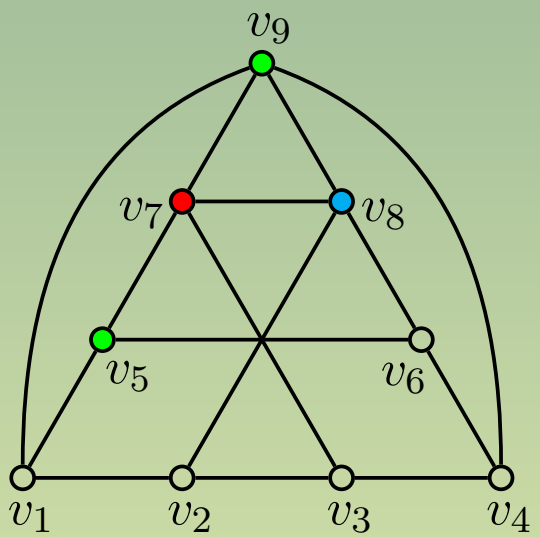
$3 : v_8$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	1	1	1	1	1	■	■	■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_5.
Vrh v_5 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 : v_9, v_5$

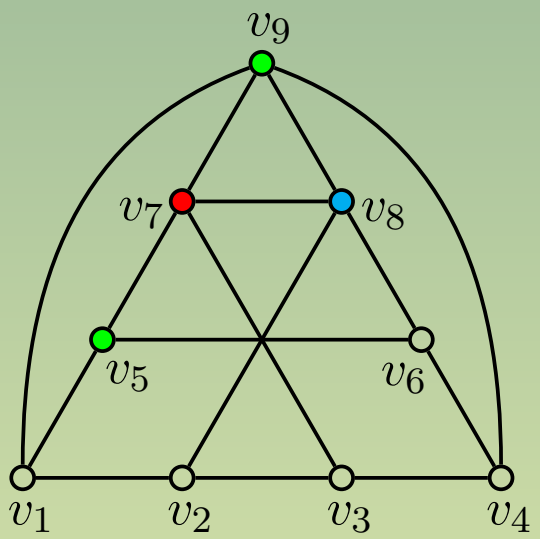
$3 : v_8$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s					■		■	■	■

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_5. Vrh v_5 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 : v_9, v_5$

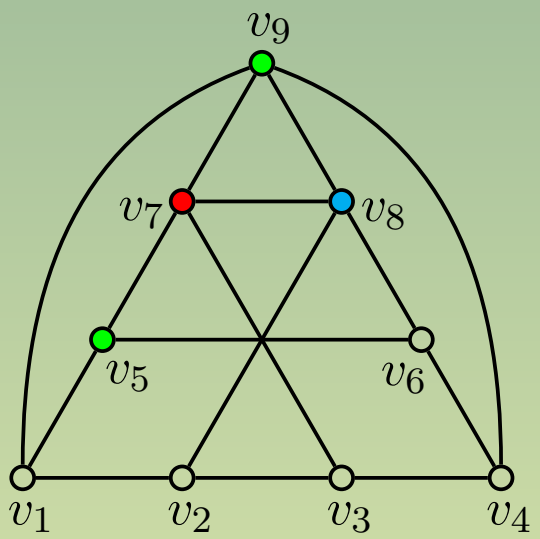
$3 : v_8$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s					■		■	■	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 : v_9, v_5$

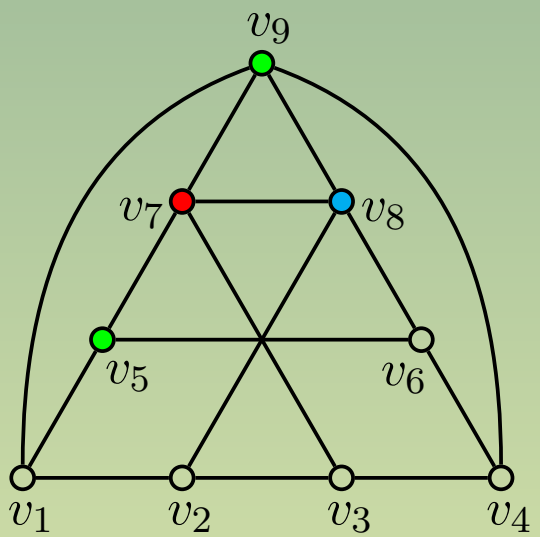
$3 : v_8$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	1	1	1	■	2	■	■	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 : v_9, v_5$

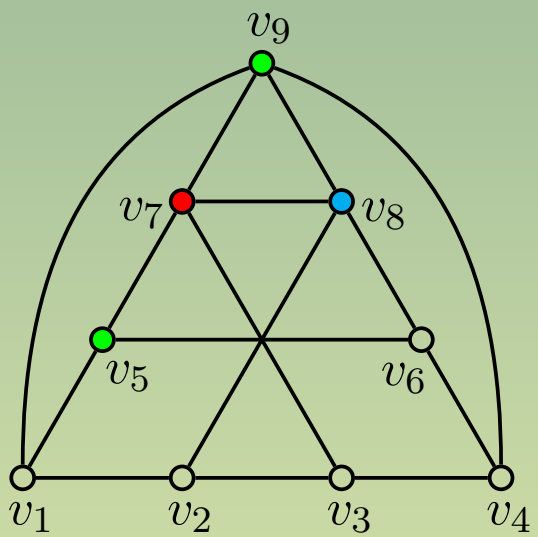
$3 : v_8$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	1	1	1	■	2	■	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_6.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 : v_9, v_5$

$3 : v_8$

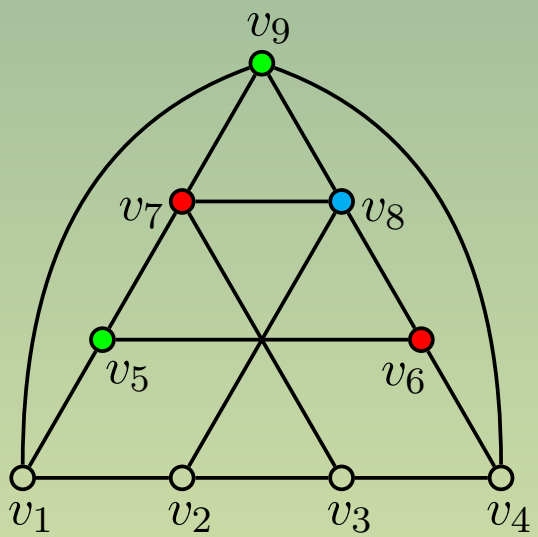
$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	1	1	1	■	2	■	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_6.

Vrh v_6 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_6$

$2 : v_9, v_5$

$3 : v_8$

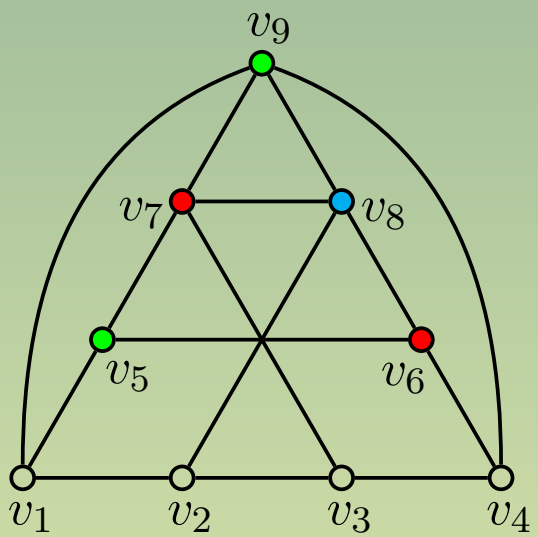
$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s					■	■	■	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_6.

Vrh v_6 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_6$

$2 : v_9, v_5$

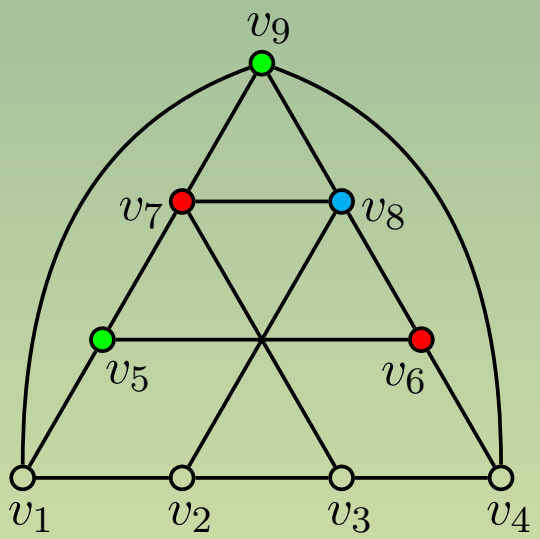
$3 : v_8$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s					■	■	■	■	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_6$

$2 : v_9, v_5$

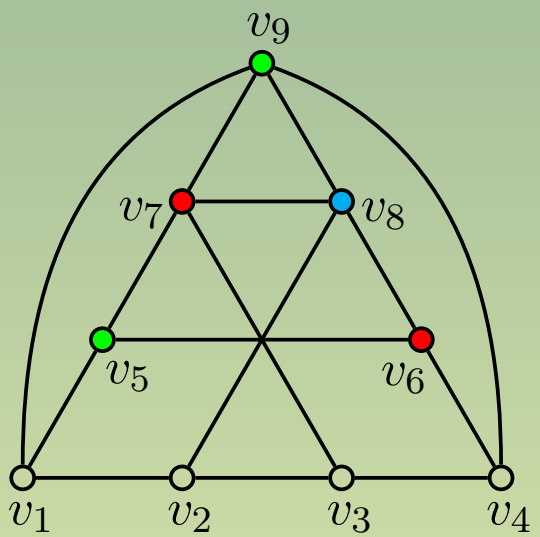
$3 : v_8$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	1	1	2	■	■	■	■	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_6$

$2 : v_9, v_5$

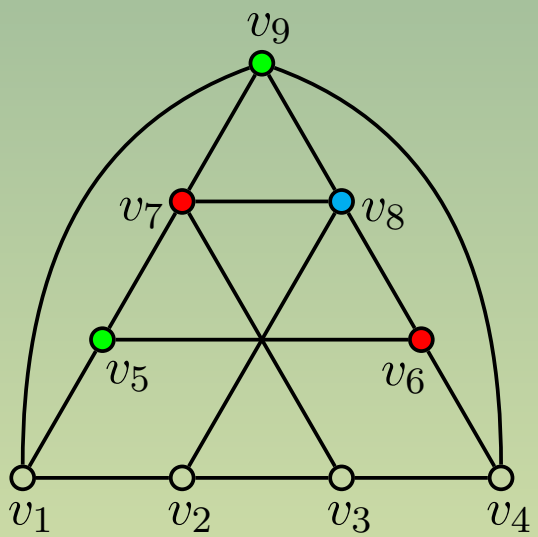
$3 : v_8$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	1	1	2	■	■	■	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_4.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_6$

$2 : v_9, v_5$

$3 : v_8$

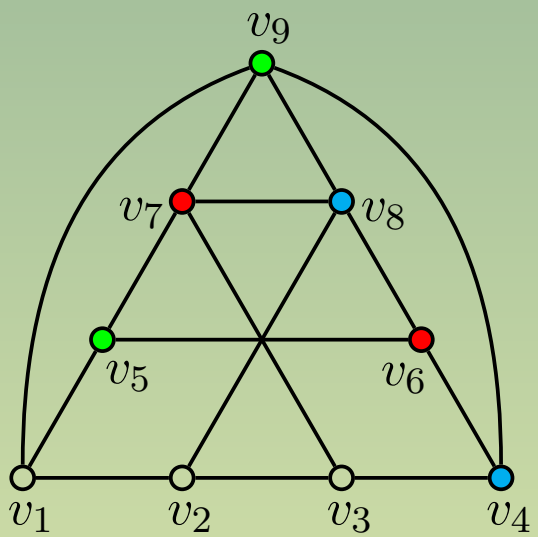
$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	1	1	2	■	■	■	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_4.

Vrh v_4 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_6$

$2 : v_9, v_5$

$3 : v_8, v_4$

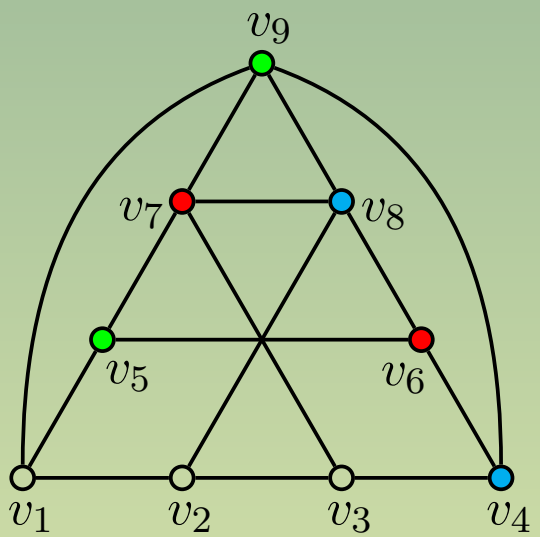
$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s				■	■	■	■	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_4.

Vrh v_4 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_6$

$2 : v_9, v_5$

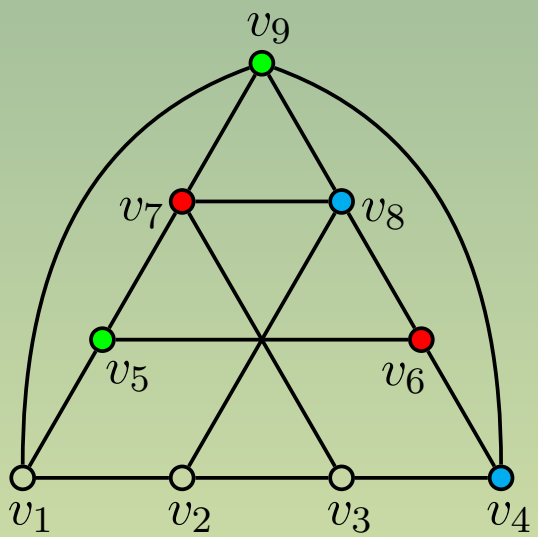
$3 : v_8, v_4$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s				■	■	■	■	■	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo, $4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_6$

$2 : v_9, v_5$

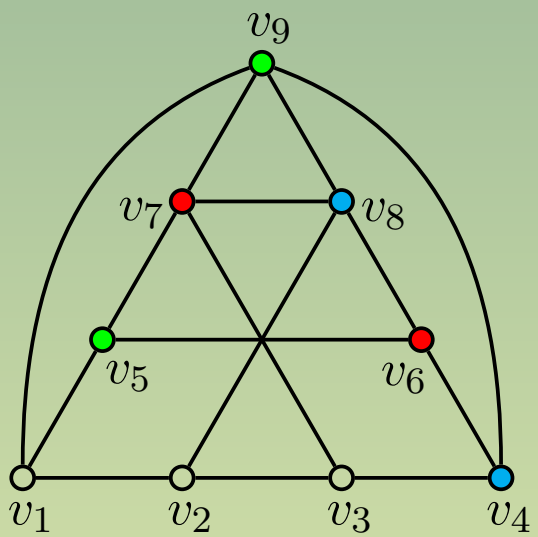
$3 : v_8, v_4$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	1	2	■	■	■	■	■	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_6$

$2 : v_9, v_5$

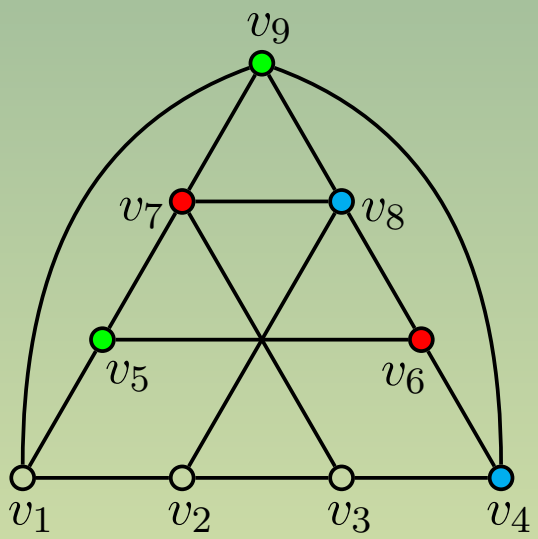
$3 : v_8, v_4$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	1	2	■	■	■	■	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_6$

$2 : v_9, v_5$

$3 : v_8, v_4$

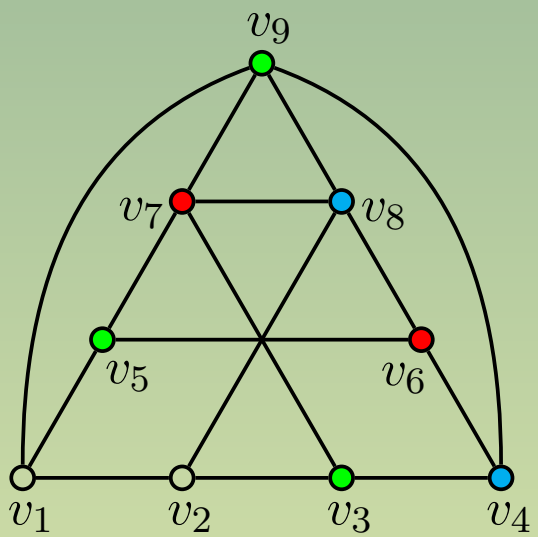
$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	1	2	■	■	■	■	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_3.

Vrh v_3 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_6$

$2 : v_9, v_5, v_3$

$3 : v_8, v_4$

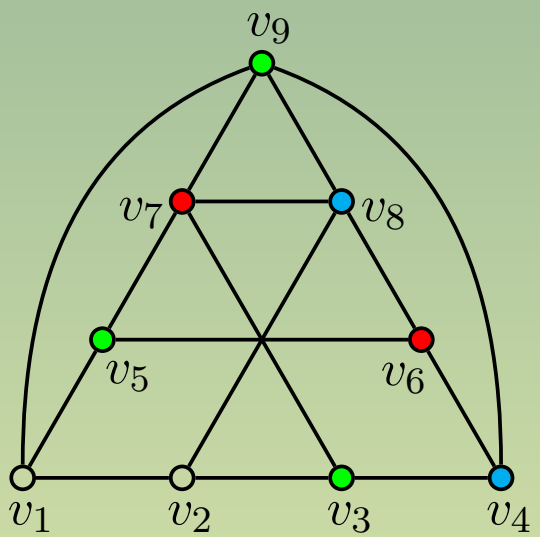
$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s			■	■	■	■	■	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_3.

Vrh v_3 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_6$

$2 : v_9, v_5, v_3$

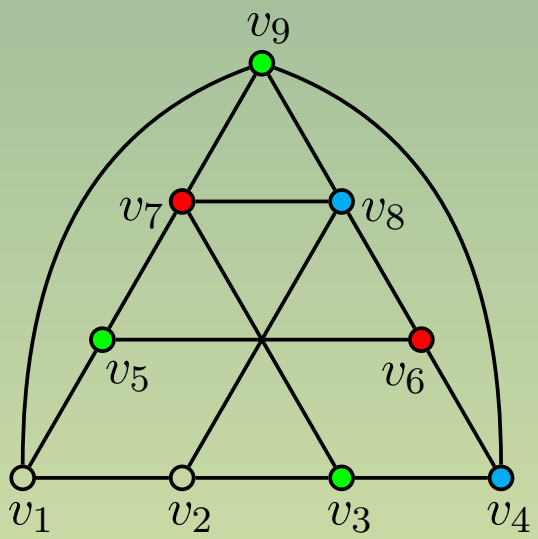
$3 : v_8, v_4$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s			■	■	■	■	■	■	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_6$

$2 : v_9, v_5, v_3$

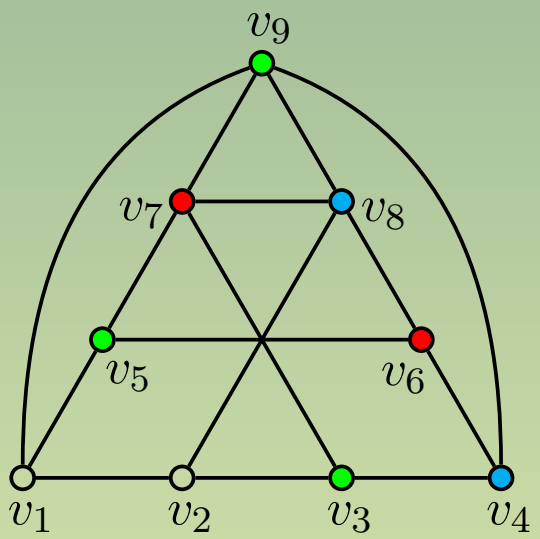
$3 : v_8, v_4$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	2	■	■	■	■	■	■	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_6$

$2 : v_9, v_5, v_3$

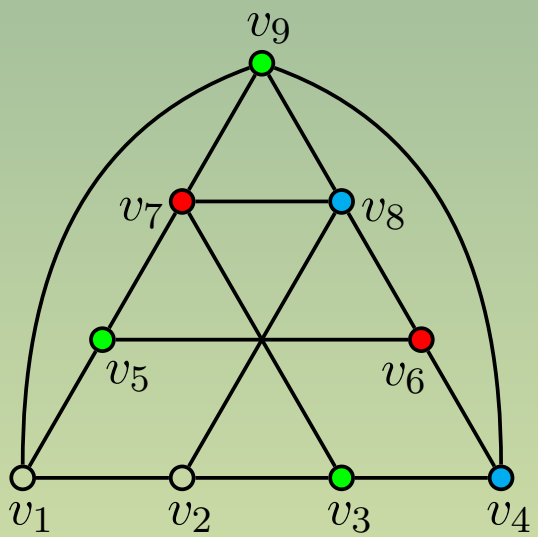
$3 : v_8, v_4$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	2	■	■	■	■	■	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_6$

$2 : v_9, v_5, v_3$

$3 : v_8, v_4$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	2	■	■	■	■	■	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_2.

Vrh v_2 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

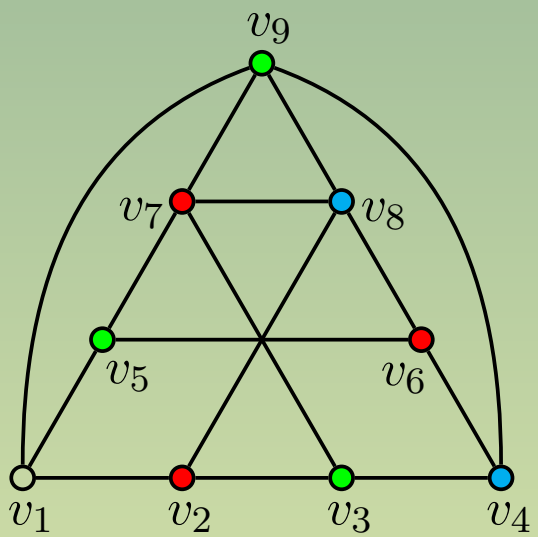
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_6, v_2$

$2 : v_9, v_5, v_3$

$3 : v_8, v_4$

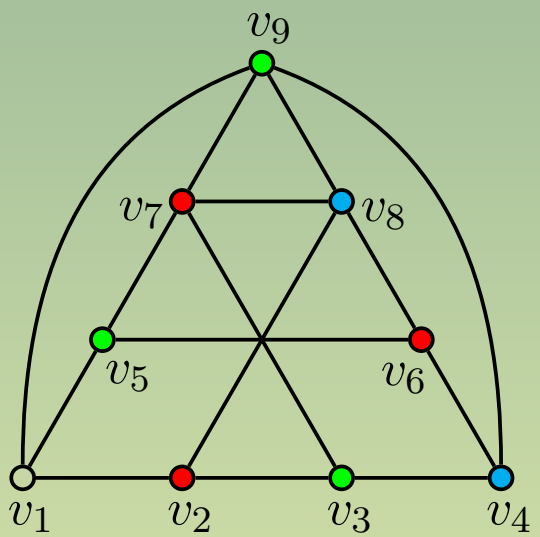
$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s		■	■	■	■	■	■	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_2.

Vrh v_2 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_6, v_2$

$2 : v_9, v_5, v_3$

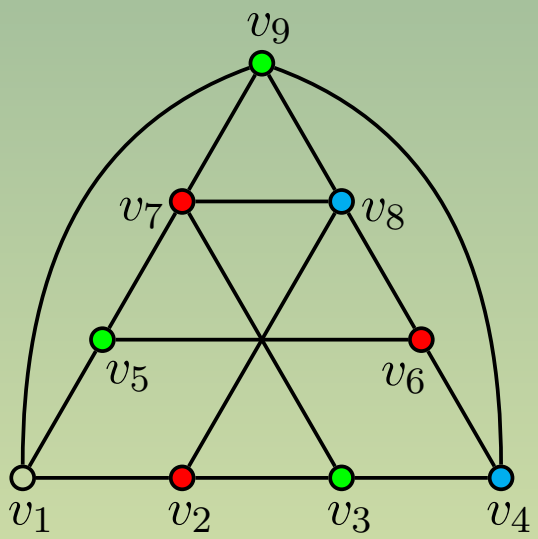
$3 : v_8, v_4$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s		■	■	■	■	■	■	■	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_6, v_2$

$2 : v_9, v_5, v_3$

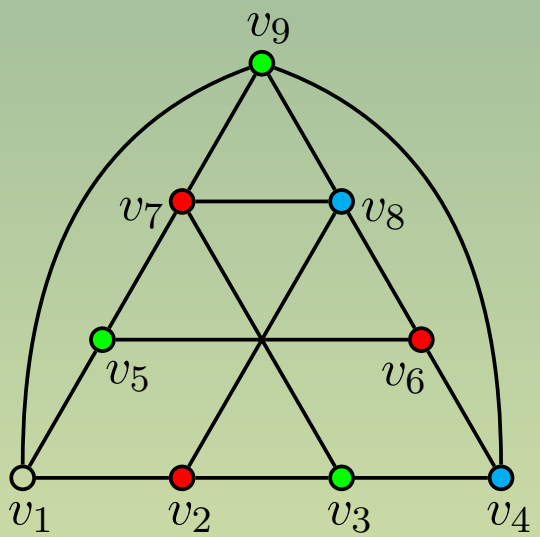
$3 : v_8, v_4$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	2	■	■	■	■	■	■	■	■

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_6, v_2$

$2 : v_9, v_5, v_3$

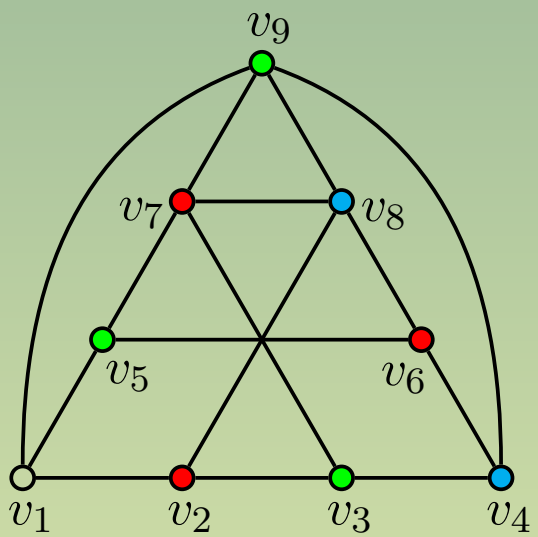
$3 : v_8, v_4$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	2	■	■	■	■	■	■	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_6, v_2$

$2 : v_9, v_5, v_3$

$3 : v_8, v_4$

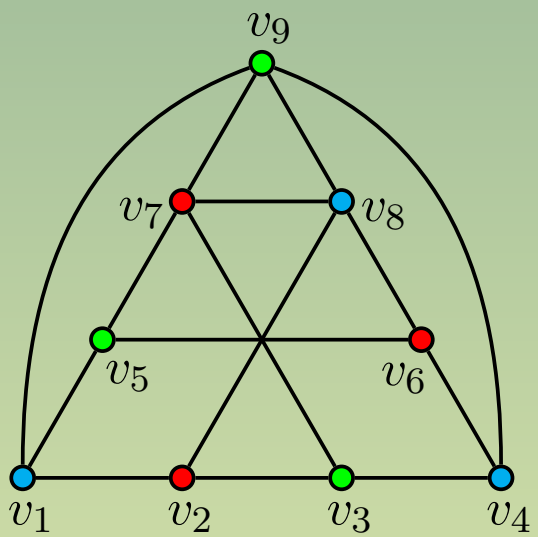
$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	2	■	■	■	■	■	■	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_1.

Vrh v_1 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_6, v_2$

$2 : v_9, v_5, v_3$

$3 : v_8, v_4, v_1$

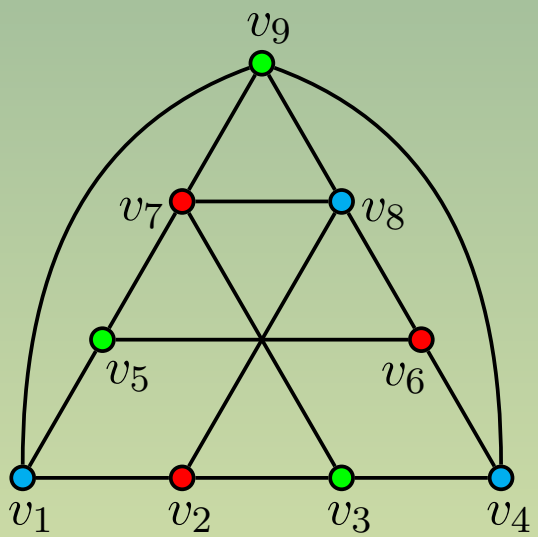
$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	■	■	■	■	■	■	■	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_1.

Vrh v_1 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo, $4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_6, v_2$

$2 : v_9, v_5, v_3$

$3 : v_8, v_4, v_1$

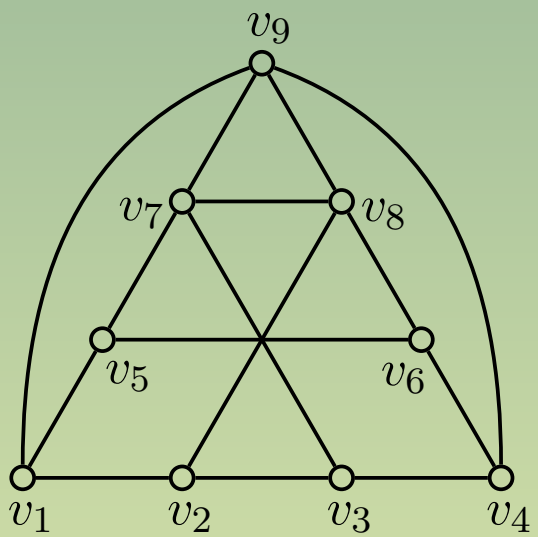
$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	■	■	■	■	■	■	■	■	■

postupak

Kako su obojani svi vrhovi, Brèlazov algoritam završava. Vidimo da smo dobili optimalno bojanje. Pogledajmo sada situaciju u kojoj Brèlazov algoritam neće dati optimalno bojanje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1:$

$2:$

$3:$

$4:$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s									

▸ rješenje

Najprije odaberemo neki vrh najvećeg stupnja, npr. vrh v_7,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

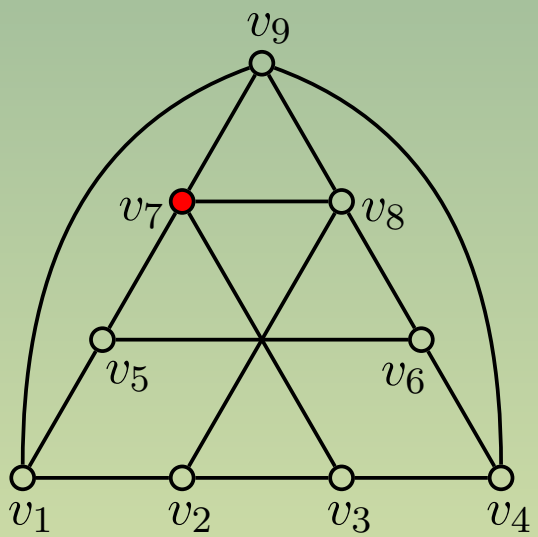
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo, $4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 :$

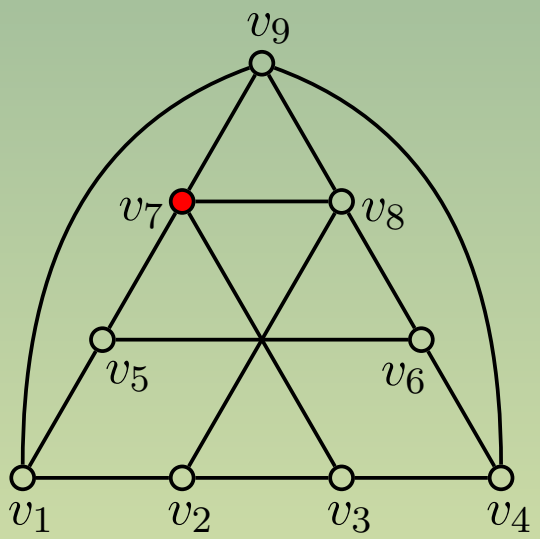
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s							■		

Najprije odaberemo neki vrh najvećeg stupnja, npr. vrh v_7, i njega obojamo bojom 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 :$

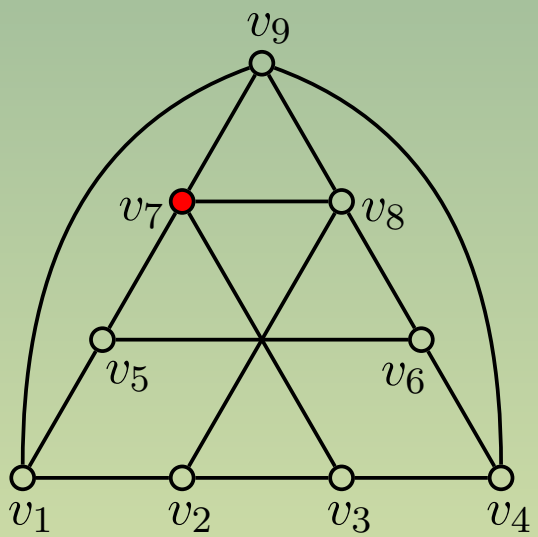
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s							■		

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 :$

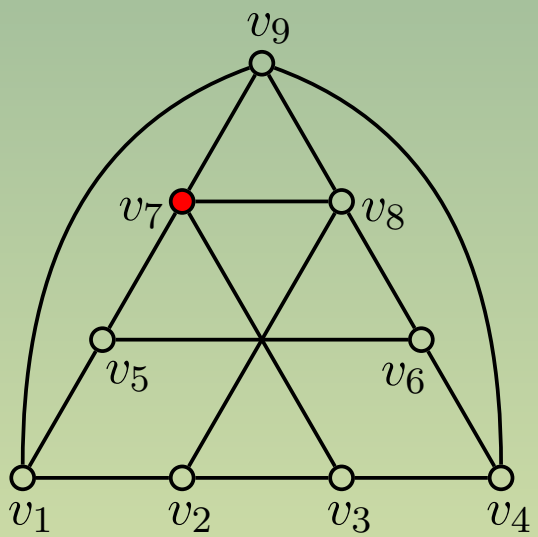
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	0	0	1	0	1	0	■	1	1

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 :$

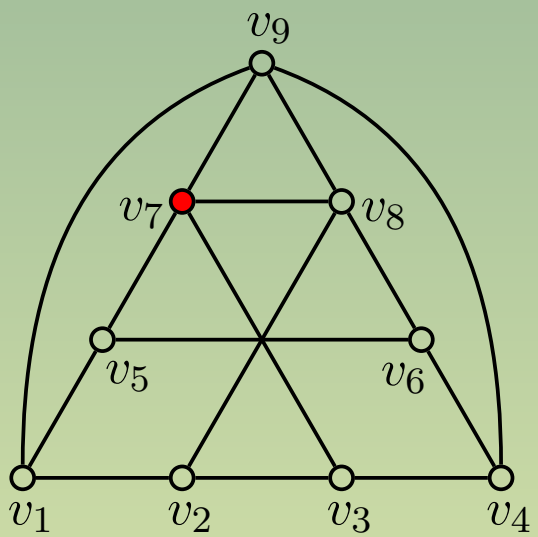
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	0	0	1	0	1	0	■	1	1

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 :$

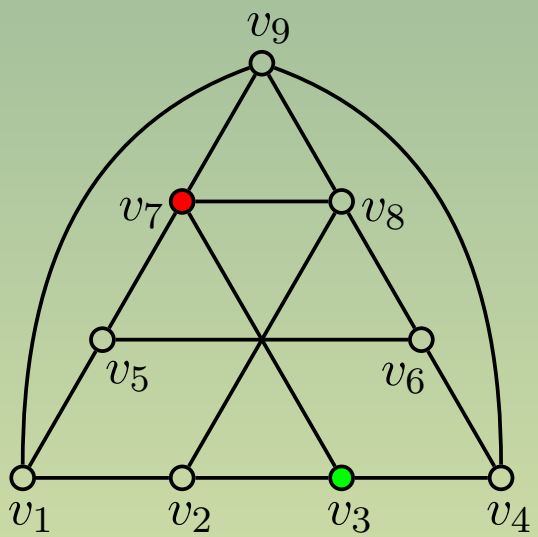
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	0	0	1	0	1	0	■	1	1

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_3.
Vrh v_3 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 : v_3$

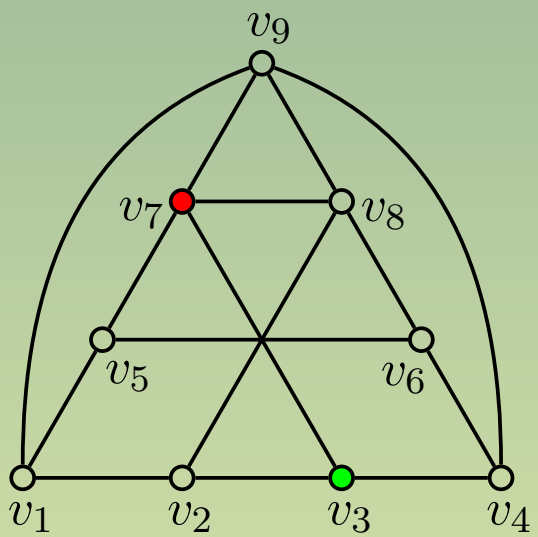
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s			■				■		

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_3. Vrh v_3 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 : v_3$

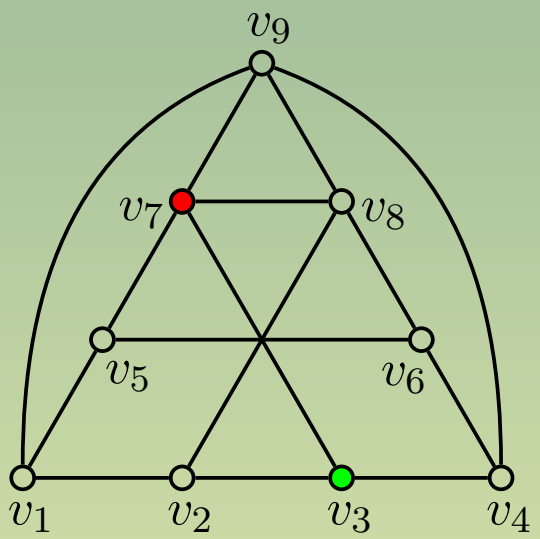
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s			■				■		

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 : v_3$

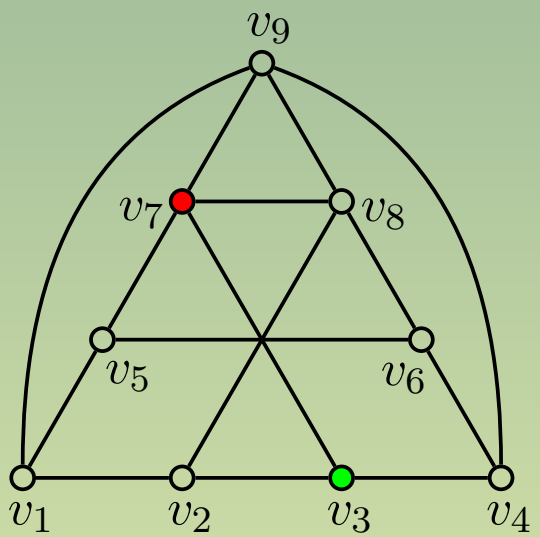
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	0	1	■	1	1	0	■	1	1

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 : v_3$

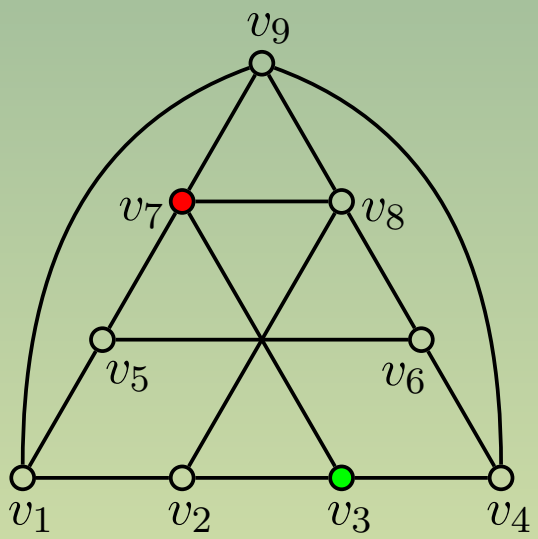
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	0	1	■	1	1	0	■	1	1

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7$

$2 : v_3$

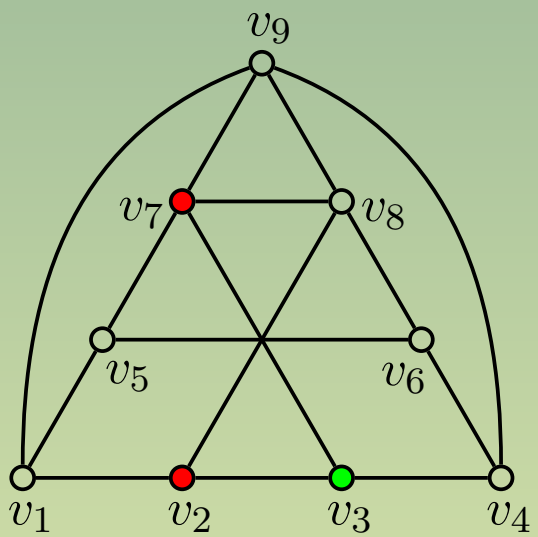
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	0	1	■	1	1	0	■	1	1

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_2.
Vrh v_2 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2$

$2 : v_3$

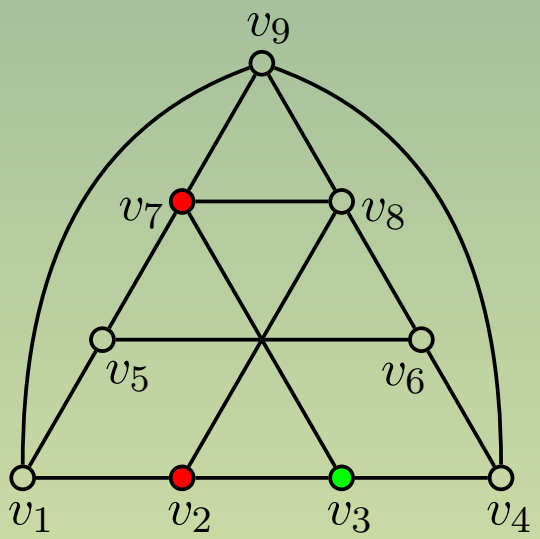
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s		■	■				■		

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_2. Vrh v_2 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2$

$2 : v_3$

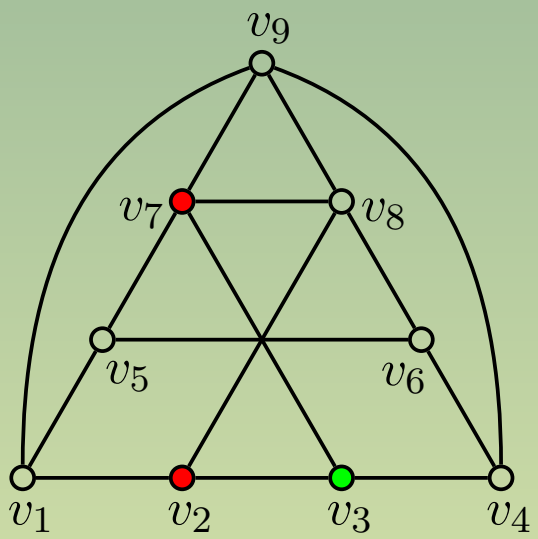
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s		■	■				■		

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2$

$2 : v_3$

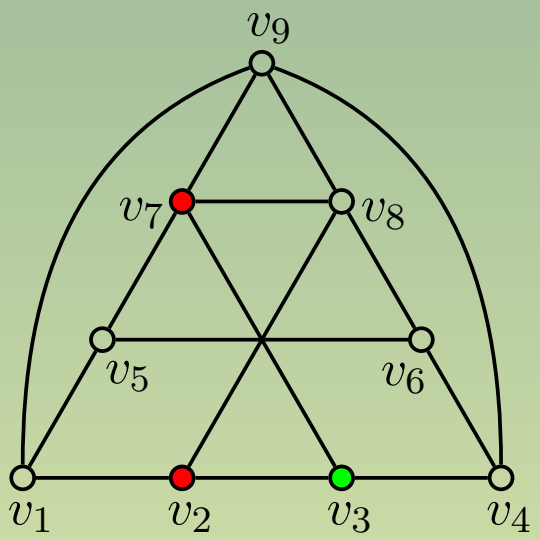
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	■	■	1	1	0	■	1	1

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2$

$2 : v_3$

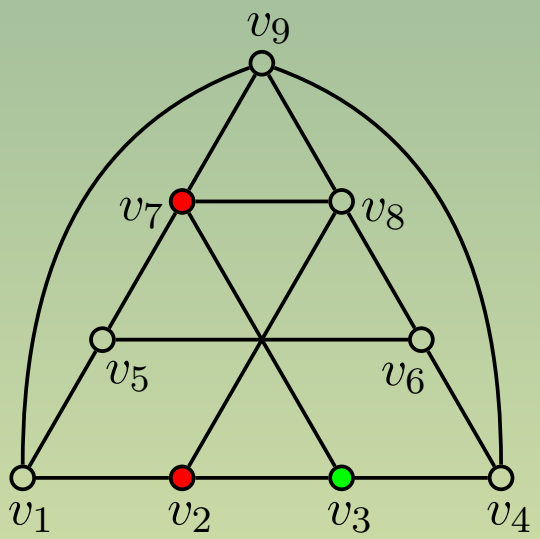
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	■	■	1	1	0	■	1	1

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_4.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2$

$2 : v_3$

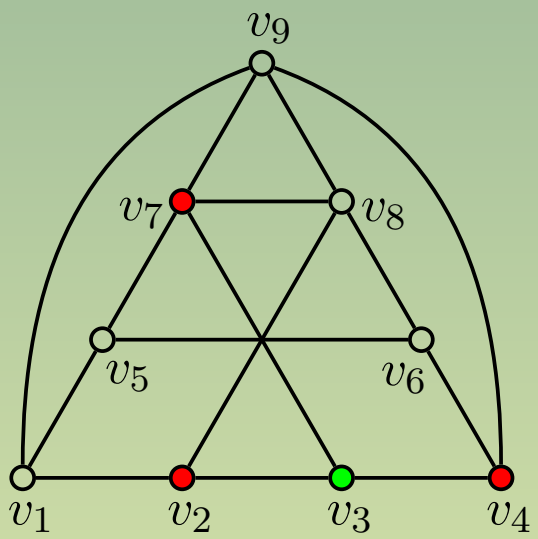
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	■	■	1	1	0	■	1	1

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_4.
Vrh v_4 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3$

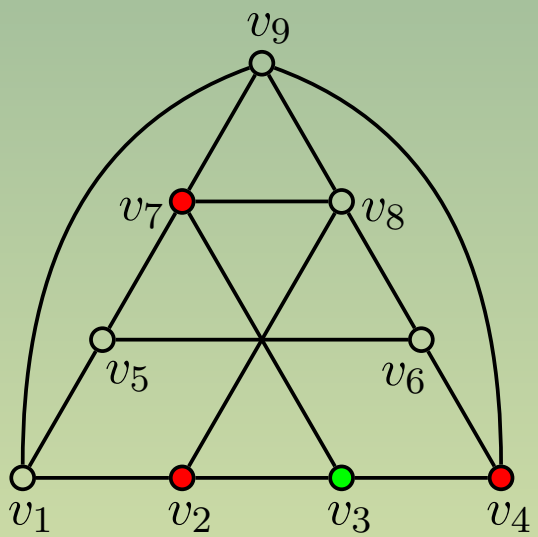
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s		■	■	■			■		

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_4. Vrh v_4 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3$

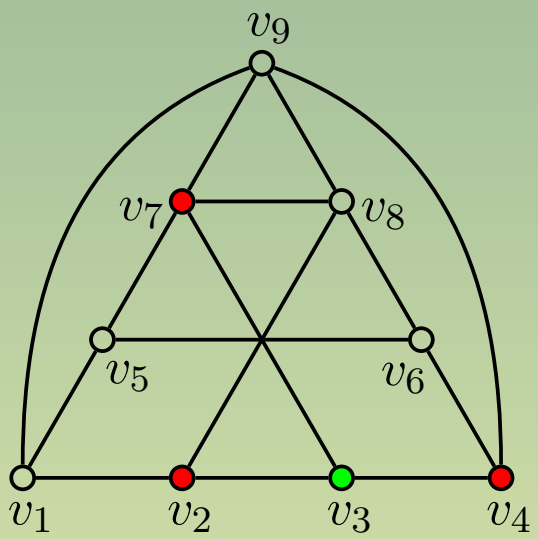
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s		■	■	■			■		

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3$

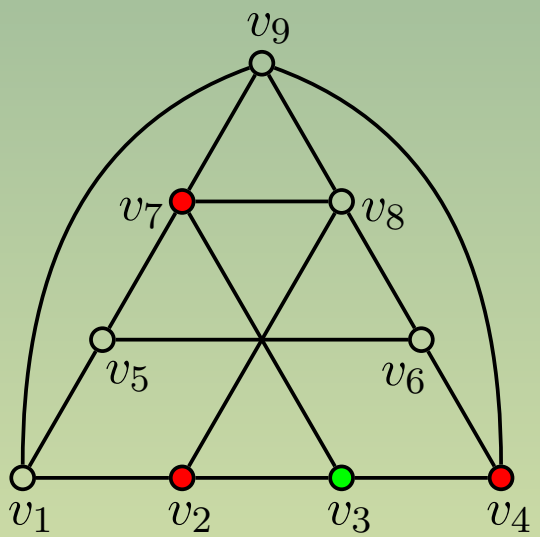
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	■	■	■	1	1	■	1	1

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3$

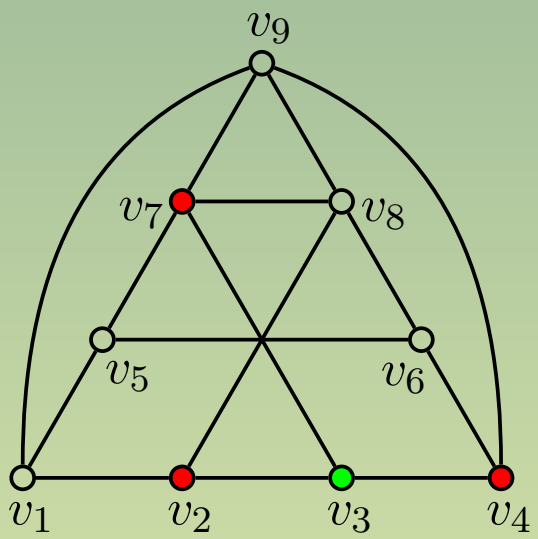
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	■	■	■	1	1	■	1	1

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_5.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3$

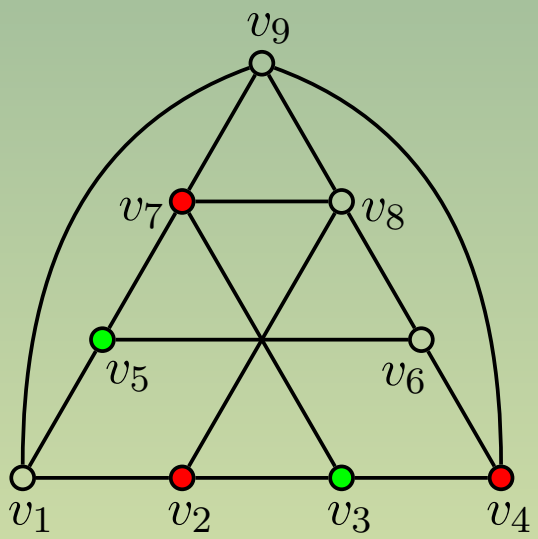
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	1	■	■	■	1	1	■	1	1

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_5.
Vrh v_5 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3, v_5$

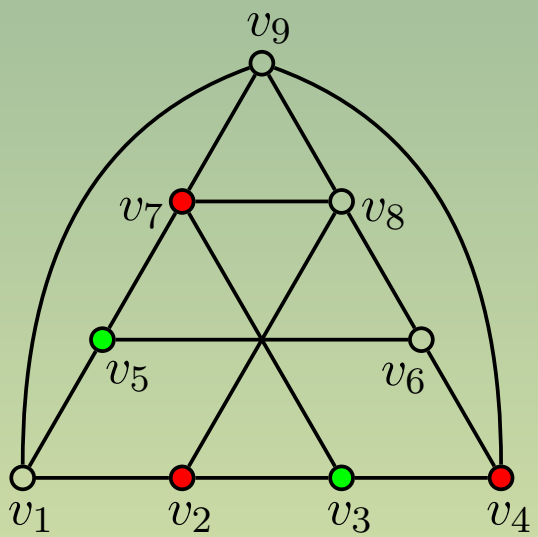
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s		■	■	■	■		■		

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_5. Vrh v_5 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3, v_5$

$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s		■	■	■	■		■		

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

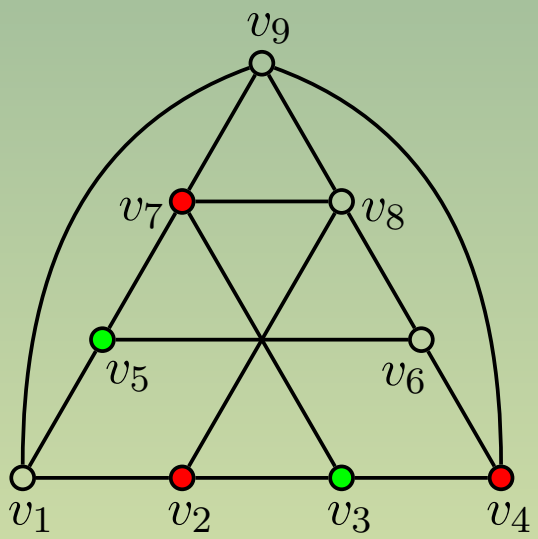
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3, v_5$

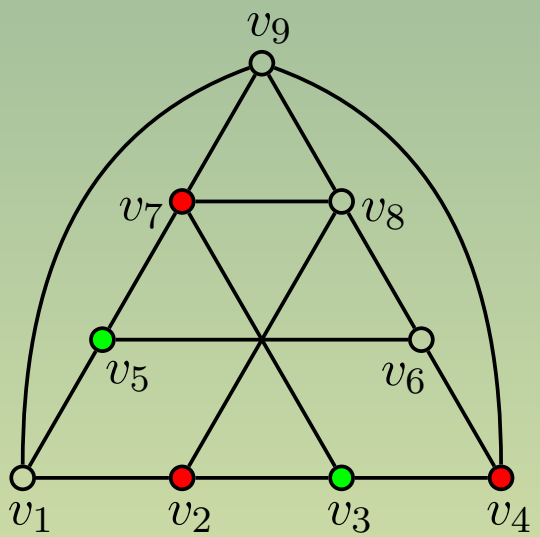
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	2	■	■	■	■	2	■	1	1

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo, $4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3, v_5$

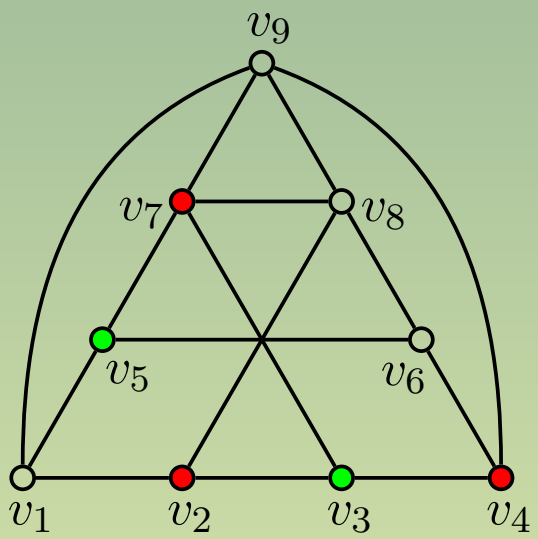
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	2	■	■	■	■	2	■	1	1

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_6.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3, v_5$

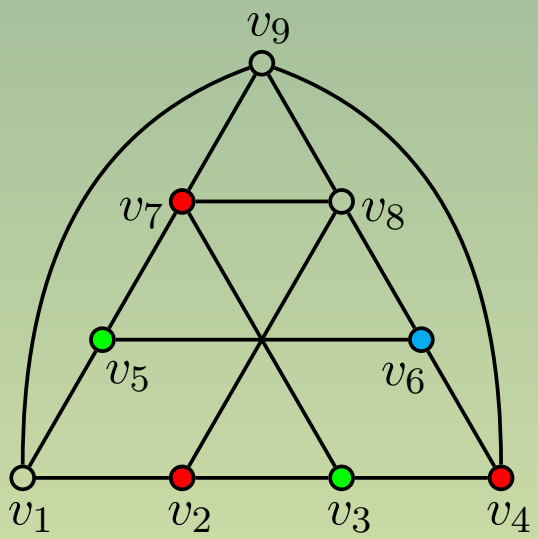
$3 :$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	2	■	■	■	■	2	■	1	1

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_6.
Vrh v_6 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3, v_5$

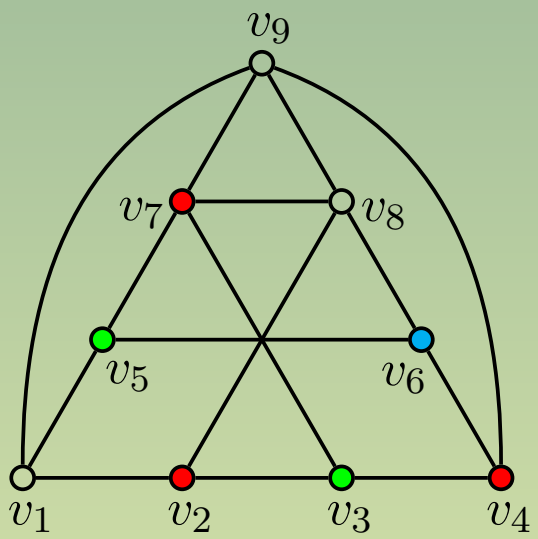
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s		■	■	■	■	■	■		

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_6. Vrh v_6 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3, v_5$

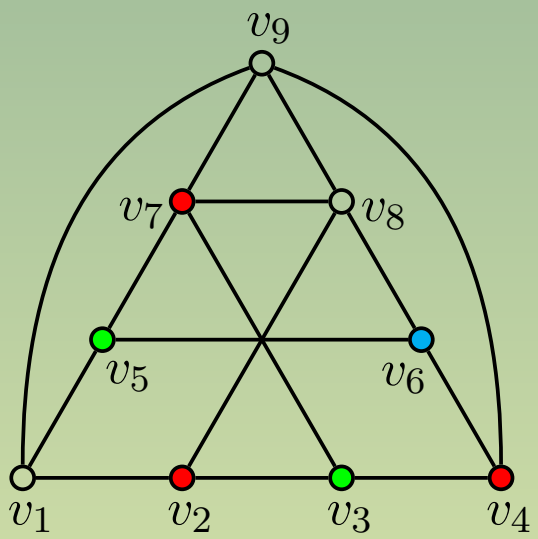
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s		■	■	■	■	■	■		

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3, v_5$

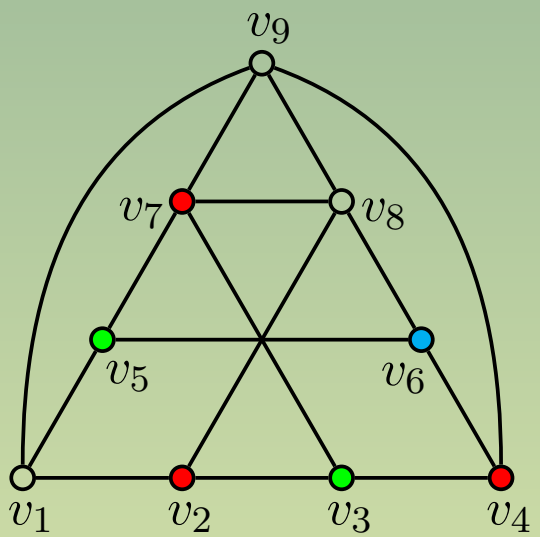
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	2	■	■	■	■	■	■	2	1

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3, v_5$

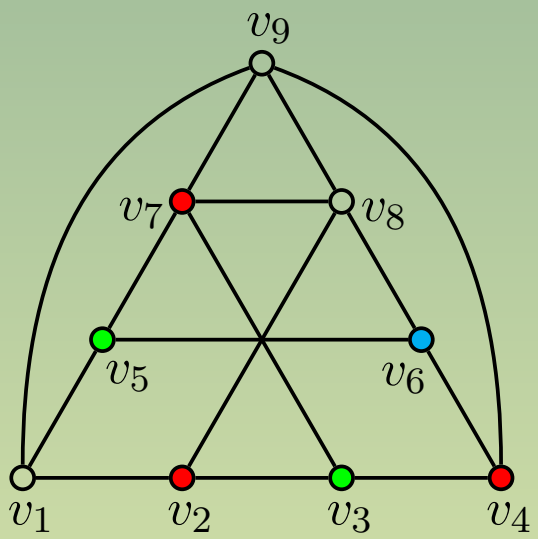
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	2	■	■	■	■	■	■	2	1

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_8.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3, v_5$

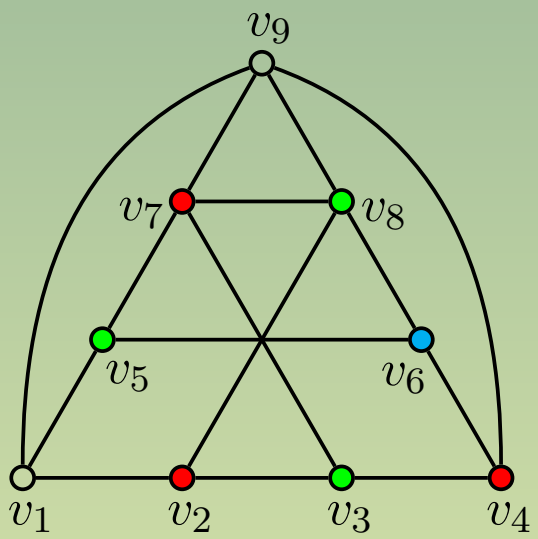
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	2	■	■	■	■	■	■	2	1

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_8. Vrh v_8 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3, v_5, v_8$

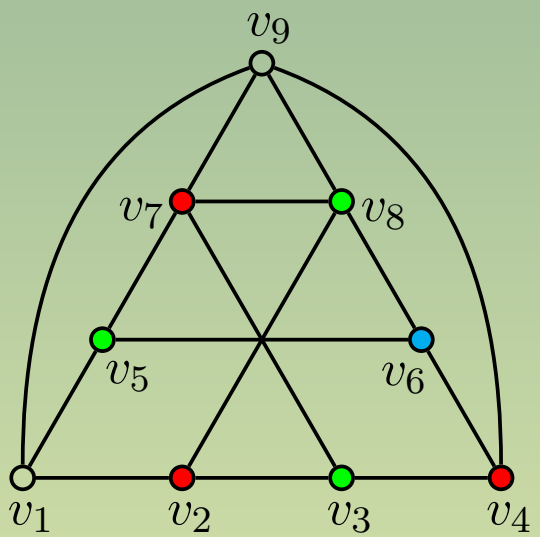
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s		■	■	■	■	■	■	■	

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_8. Vrh v_8 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 2.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3, v_5, v_8$

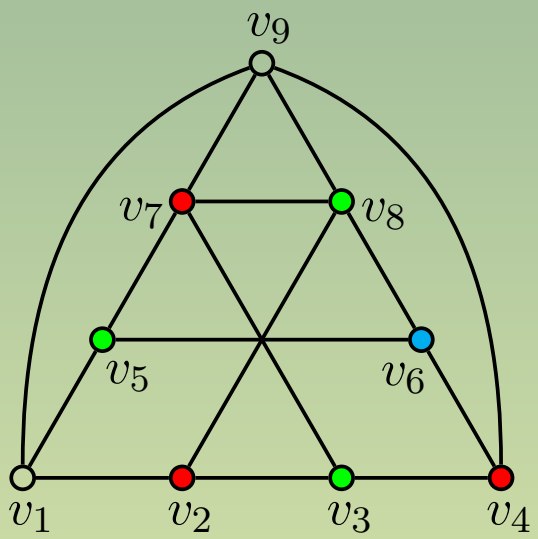
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s		■	■	■	■	■	■	■	

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3, v_5, v_8$

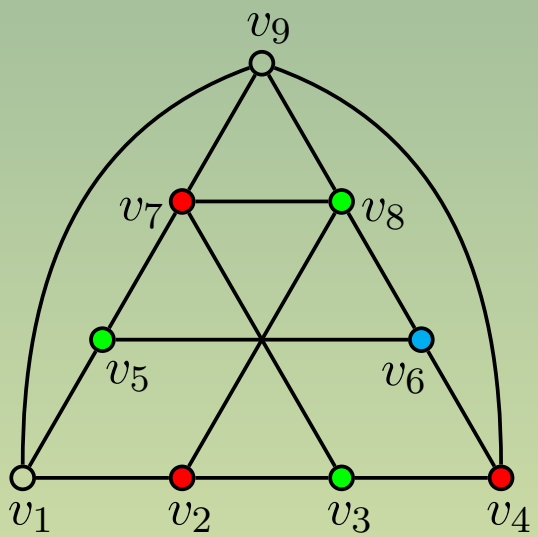
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	2	■	■	■	■	■	■	■	2

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3, v_5, v_8$

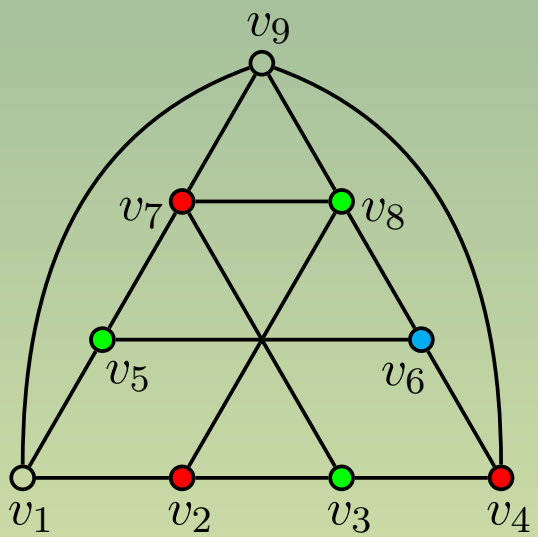
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	2	■	■	■	■	■	■	■	2

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3, v_5, v_8$

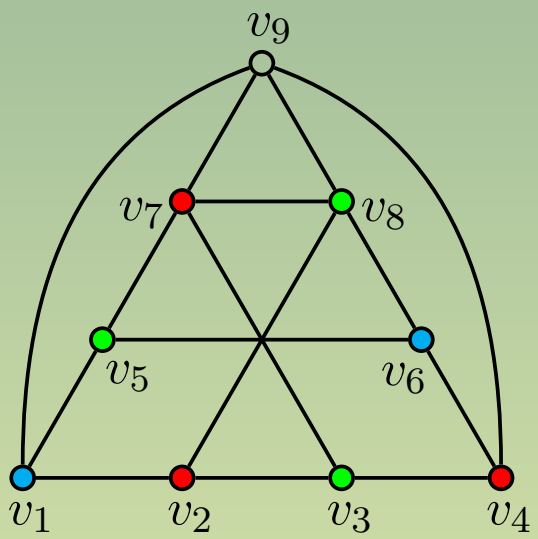
$3 : v_6$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	2	■	■	■	■	■	■	■	2

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_1. Vrh v_1 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo, $4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3, v_5, v_8$

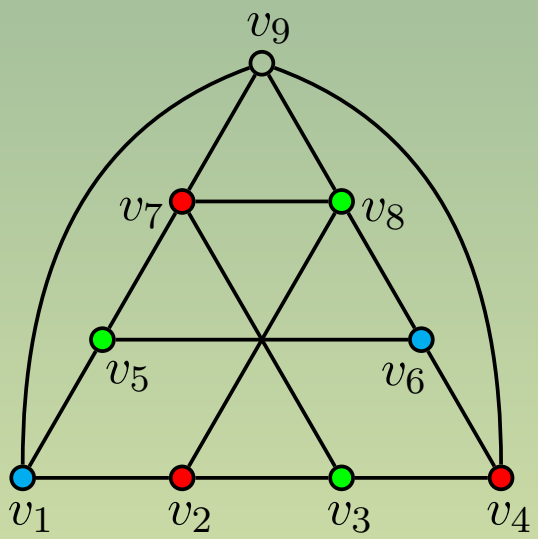
$3 : v_6, v_1$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	■	■	■	■	■	■	■	■	

Odaberemo neki vrh s najvećim stupnjem zasićenosti, npr. vrh v_1. Vrh v_1 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 3.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3, v_5, v_8$

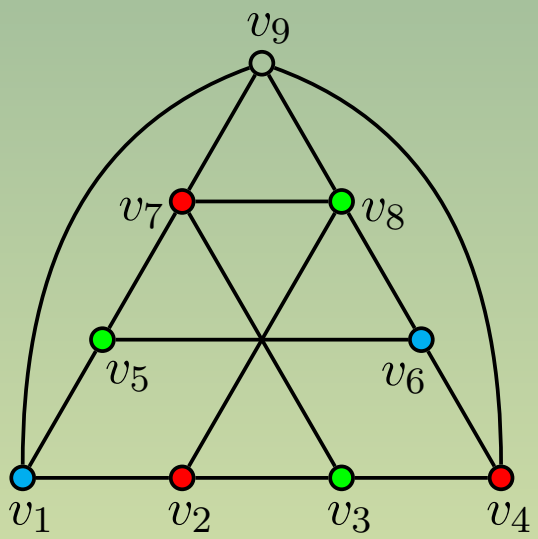
$3 : v_6, v_1$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	■	■	■	■	■	■	■	■	

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$,

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3, v_5, v_8$

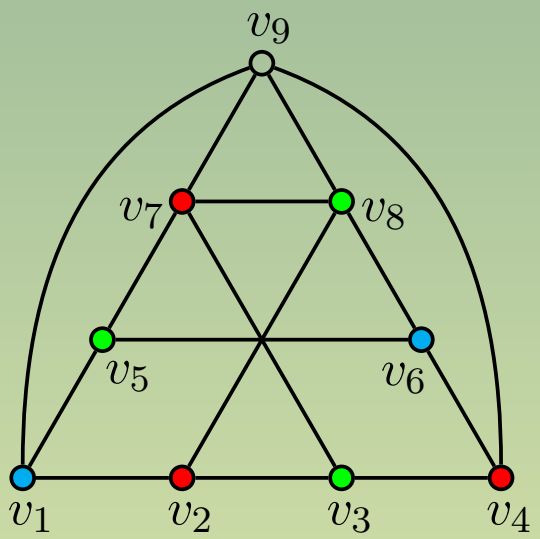
$3 : v_6, v_1$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	■	■	■	■	■	■	■	■	3

Za svaki neobojani vrh v računamo njegov stupanj zasićenosti $d_s(v)$, tj. broj različitih boja s kojima su trenutno obojani njegovi susjedi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3, v_5, v_8$

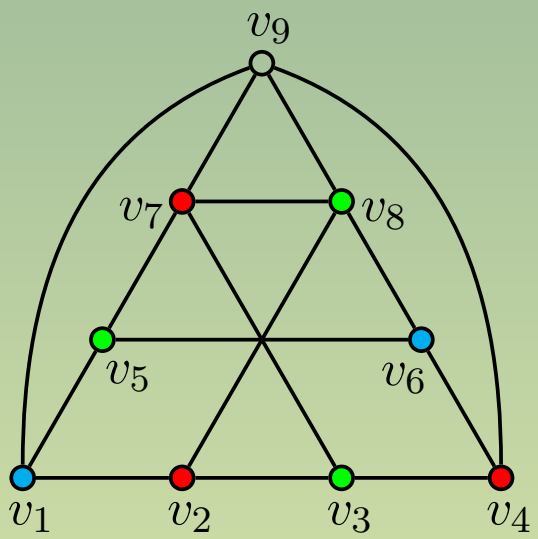
$3 : v_6, v_1$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	■	■	■	■	■	■	■	■	3

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_9.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3, v_5, v_8$

$3 : v_6, v_1$

$4 :$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	■	■	■	■	■	■	■	■	3

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_9.

Vrh v_9 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

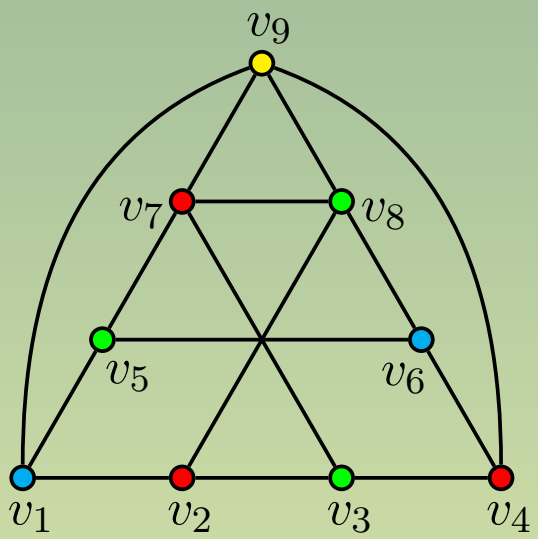
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo,

$4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3, v_5, v_8$

$3 : v_6, v_1$

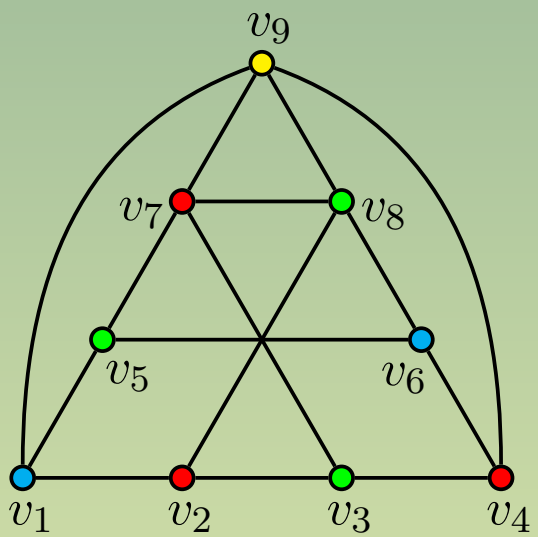
$4 : v_9$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	■	■	■	■	■	■	■	■	■

Odaberemo vrh s najvećim stupnjem zasićenosti. To je vrh v_9.

Vrh v_9 obojamo najmanjom dostupnom bojom s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda. To je boja 4.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



$1 \to$ crveno, $2 \to$ zeleno, $3 \to$ plavo, $4 \to$ žuto

$1 : v_7, v_2, v_4$

$2 : v_3, v_5, v_8$

$3 : v_6, v_1$

$4 : v_9$

vrhovi	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
d_s	■	■	■	■	■	■	■	■	■

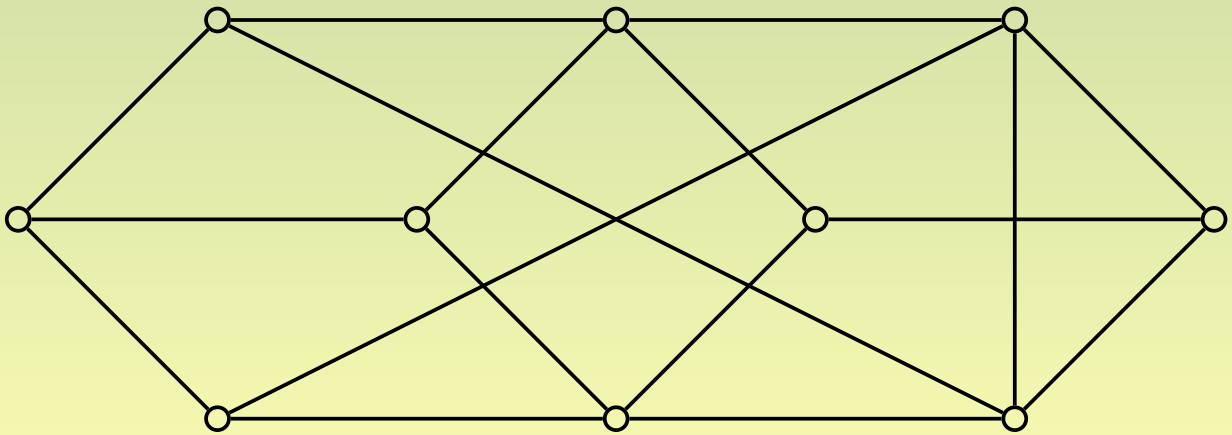
postupak

Kako su obojani svi vrhovi, Brèlazov algoritam završava. Vidimo da nismo dobili optimalno bojanje u ovom slučaju.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Zadatak 10.20.

Dokažite da je zadani graf 3-kromatski. Nadalje, primijenite Brèlazov algoritam $10\,000$ *puta na zadani graf. Na temelju tog eksperimenta izračunajte kolika je približna vjerojatnost da će na izlazu Brèlazov algoritam dati jedno 3-bojanje vrhova zadanog grafa. Kolika je približna vjerojatnost da će na izlazu Brèlazov algoritam dati 4-bojanje vrhova zadanog grafa? Primijenite Brèlazov algoritam* $50\,000$ *i* $100\,000$ *puta i pogledajte što se događa sa spomenutim vjerojatnostima.*



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Gustoća jednostavnog grafa

Gustoća jednostavnog grafa G je broj $\rho(G) = \frac{2\varepsilon}{\nu(\nu-1)}$.

Ako je G jednostavni graf s ν vrhova, tada je $0 \leqslant \rho(G) \leqslant 1$.

Nadalje, $\rho(G) = 1$ akko je $G = K_\nu$ jer je $\varepsilon(K_\nu) = \binom{\nu}{2}$.

Isto tako, $\rho(G) = 0$ akko je G prazan graf.

Gustoća jednostavnog grafa G je broj koji nam govori koliko jako je graf "gusti", tj. koliko puno ima bridova s obzirom na broj svojih vrhova. "Gušći" grafovi općenito imaju veći kromatski broj od "rijetkih" grafova s istim brojem vrhova.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Zadatak 10.21.

Promotrimo jedan algoritam za pohlepno bojanje vrhova grafa koji je mala modifikacija Welsh-Powellovog algoritma. Algoritam redoslijed bojanja vrhova određuje dinamički u toku izvođenja programa. U svakom koraku algoritam bira onaj neobojani vrh koji ima najveći stupanj. Ukoliko postoji više neobojanih vrhova najvećeg stupnja, tada se između njih odabere onaj vrh koji ima trenutno najviše obojanih susjeda. Ako postoji više neobojanih vrhova koji zadovoljavaju oba prethodno spomenuta kriterija, tada na slučajni način odaberemo neki od tih vrhova. Nakon što se odabere vrh, njemu se pridruži najmanja dostupna boja s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda i postupak se dalje ponavlja sve dok se ne obojaju svi vrhovi u grafu. Implementirajte opisani algoritam na računalu.

Zadatak 10.22.

Promotrimo jedan algoritam za pohlepno bojanje vrhova grafa koji je mala modifikacija Brèlazovog algoritma. Algoritam redoslijed bojanja vrhova određuje dinamički u toku izvođenja programa. U svakom koraku algoritam bira onaj neobojani vrh koji ima najveći stupanj zasićenosti. Ukoliko postoji više neobojanih vrhova najvećeg stupnja zasićenosti, tada se između njih odabere onaj vrh koji ima najveći stupanj. Ako postoji više neobojanih vrhova koji zadovoljavaju oba prethodno spomenuta kriterija, tada na slučajni način odaberemo neki od tih vrhova. Nakon što se odabere vrh, njemu se pridruži najmanja dostupna boja s kojom nije obojan niti jedan od njegovih trenutno obojanih susjeda i postupak se dalje ponavlja sve dok se ne obojaju svi vrhovi u grafu. Implementirajte opisani algoritam na računalu.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Zadatak 10.23.

Testirajte Welsh-Powellov algoritam, Brèlazov algoritam i prethodno opisana dva algoritma na sljedećim grafovima.

a. *Generirajte slučajne jednostavne grafove s 200 vrhova s gustoćama 0.25, 0.5, 0.75 i testirajte na njima gornje algoritme.*

b. *Generirajte slučajne jednostavne grafove s 1000 vrhova s gustoćama 0.25, 0.5, 0.75 i testirajte na njima gornje algoritme.*

Koji je od gornjih algoritama najlošiji, a koji najbolji? Da li su oba modificirana algoritma bolja od Welsh-Powellovg i Brèlazovog algoritma? Donesite neki zaključak na temelju provedenih eksperimenata.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Bojanje bridova grafa

Bojanje bridova grafa G bez petlji je funkcija koja svakom bridu grafa G pridružuje neku boju, ali tako da su susjedni bridovi obojani različitim bojama. Drugim riječima, bojanje bridova grafa G je zapravo particija skupa $E(G)$ takva da nikoja dva brida koji pripadaju istom elementu particije nisu susjedni u G.

Kažemo da je graf G k-**bridno obojiv** ako je moguće njegove bridove obojati s k različitih boja.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Bridno kromatski broj grafa G bez petlji je minimalni broj različitih boja potrebnih za bojanje bridova grafa G. Bridno kromatski broj grafa G bez petlji označavamo s $\gamma'(G)$.

Bridno kromatski broj grafa G bez petlji

$$\gamma'(G) = \min\{n : G \text{ je } n\text{-bridno obojiv}\}$$

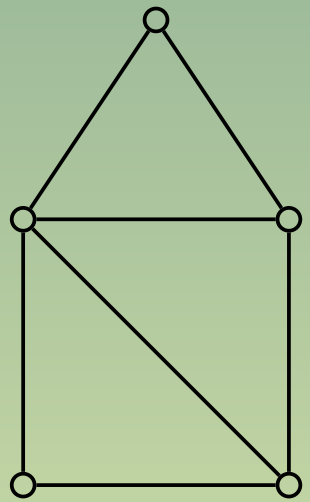
Ako je $\gamma'(G) = n$, kažemo da je G **bridno n-kromatski graf**.

Iz definicije bridno kromatskog broja grafa G odmah slijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 10.5.

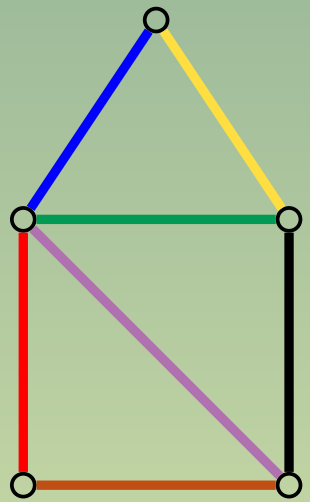
Za graf G bez petlji u kojemu postoji k međusobno susjednih bridova vrijedi $\gamma'(G) \geqslant k$. Specijalno je $\gamma'(G) \geqslant \Delta(G)$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



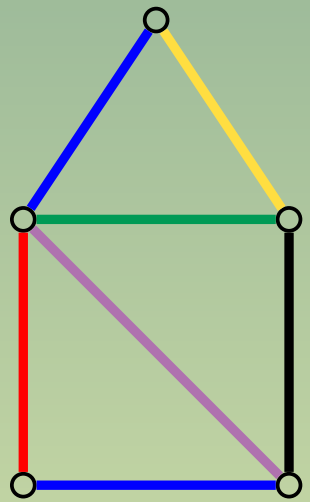
Promatrani graf nije k-bridno obojiv za svaki prirodni broj $k \geqslant 8$ jer ima samo sedam bridova pa ne dopušta bojanje bridova s više od sedam različitih boja (u jednom bojanju bridova).

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



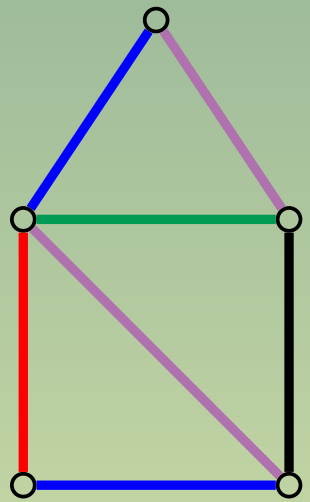
Na slici je prikazano jedno bojanje bridova sa 7 različitih boja pa je promatrani graf 7-bridno obojiv.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



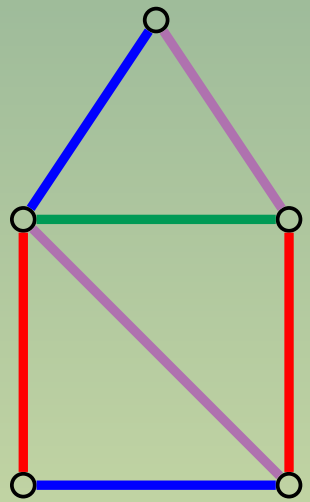
Na slici je prikazano jedno bojanje bridova sa 6 različitih boja pa je promatrani graf 6-bridno obojiv.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



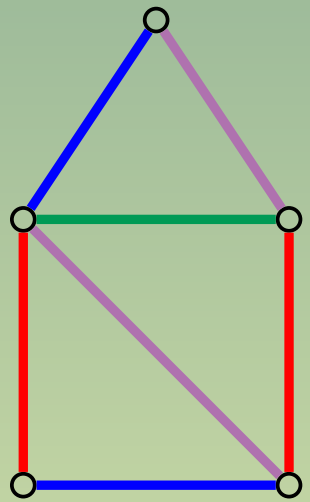
Na slici je prikazano jedno bojanje bridova s 5 različitih boja pa je promatrani graf 5-bridno obojiv.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na slici je prikazano jedno bojanje bridova s 4 različite boje pa je promatrani graf 4-bridno obojiv.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na slici je prikazano jedno bojanje bridova s 4 različite boje pa je promatrani graf 4-bridno obojiv.

Kako za promatrani graf G vrijedi $\Delta(G) = 4$, zaključujemo da se bridovi grafa G ne mogu obojati s manje od 4 boje. Stoga je za bojanje bridova grafa G potrebno minimalno 4 boje pa je njegov bridno kromatski broj jednak $\gamma'(G) = 4$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Teorem 10.16 (Konig, 1916.).

Ako je G bipartitni graf, tada je $\gamma'(G) = \Delta(G)$.

Dokaz.

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po broju bridova grafa G. Neka je G bipartitni graf s biparticijom vrhova (X, Y).

Ako G ima samo jedan brid, tada je $\Delta(G) = 1$ i $\gamma'(G) = 1$ pa tvrdnja vrijedi u tom slučaju.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve bipartitne grafove s n bridova.

Neka je G bipartitni graf s $n + 1$ bridova. Uzmimo neki njegov brid e i promotrimo graf $G - e$. Graf $G - e$ je također bipartitni i ima n bridova pa prema pretpostavci indukcije vrijedi

$$\gamma'(G - e) = \Delta(G - e).$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Nadalje, jasno je da je $\Delta(G-e)$ jednako $\Delta(G)$ ili $\Delta(G)-1$ jer se brisanjem jednog brida maksimalni stupanj u grafu može smanjiti najviše za jedan. Stoga smo bridove grafa $G-e$ u svakom slučaju obojali s najviše $\Delta(G)$ boja.

Dokažimo da i bridove grafa G možemo obojati s $\Delta(G)$ boja. Neka su u i v krajevi brida e. Kako je $d(u) \leqslant \Delta(G)$ u grafu G i kako je e još uvijek neobojani brid, postoji barem jedna od $\Delta(G)$ boja koja nije prisutna kod vrha u, tj. s kojom nije obojan niti jedan od bridova susjedan s vrhom u. Iz istog razloga postoji barem jedna od $\Delta(G)$ boja koja nije prisutna kod vrha v. Ukoliko se radi o istoj boji, tada brid e možemo obojati tom bojom i na taj način dobivamo jedno bojanje bridova grafa G s $\Delta(G)$ boja.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Pretpostavimo stoga da se radi o različitim bojama b_1 i b_2, tj.

- boja b_1 je prisutna kod vrha u, ali je odsutna kod vrha v,
- boja b_2 je prisutna kod vrha v, ali je odsutna kod vrha u.

Neka je K podgraf induciran sa svim bridovima koji su obojani u grafu $G - e$ bojama b_1 i b_2. Tada vrhovi u i v pripadaju skupu vrhova grafa K jer je u svakom od tih vrhova prisutna neka od boja b_1 i b_2.

Tvrdimo da u grafu K ne postoji put između vrhova u i v, tj. da vrhovi u i v pripadaju različitim komponentama povezanosti grafa K.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Pretpostavimo suprotno, tj. da vrhovi u i v pripadaju istoj komponenti povezanosti grafa K.

- Tada postoji put P u grafu K između vrhova u i v.
- Kako su vrhovi u i v susjedni u grafu G, oni pripadaju različitim elementima biparticije vrhova grafa G. Jedan od njih pripada skupu X, a drugi skupu Y.
- Zbog toga put P mora biti neparne duljine jer bi u protivnom u grafu G postojao ciklus $P + e$ neparne duljine, što je nemoguće jer je G bipartitni graf.
- Kako je boja b_1 prisutna kod vrha u, prvi brid na putu P je obojan bojom b_1 jer u grafu K su svi bridovi obojani bojama b_1 ili b_2.
- Boje bridova na putu P se naizmjenično mijenjaju između boja b_1 i b_2. Kako je P neparne duljine, zadnji brid na putu P je obojan također bojom b_1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Na taj način smo dobili da je boja b_1 također prisutna i kod vrha v, što je kontradikcija s ranijom pretpostavkom da je boja b_1 odsutna kod vrha v. Dakle, vrhovi u i v pripadaju različitim komponentama povezanosti grafa K. Stoga je K nepovezani graf.

Neka je K_u komponenta povezanosti grafa K kojoj pripada vrh u. Ako u grafu K_u zamijenimo boje bridovima, tj.

- bridove u K_u obojane bojom b_1 prebojimo u boju b_2,
- bridove u K_u obojane bojom b_2 prebojimo u boju b_1,

dobivamo novo pravilno bojanje bridova grafa $G - e$ s $\Delta(G)$ boja u kojemu je boja b_1 odsutna kod oba vrha u i v. Sada brid e možemo obojati bojom b_1 i dobivamo bojanje bridova grafa G s $\Delta(G)$ boja. Kako je uvijek $\gamma'(G) \geqslant \Delta(G)$, zaključujemo da je $\gamma'(G) = \Delta(G)$. ♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Bridno kromatski broj grafa $K_{m,n}$

$$\gamma'(K_{m,n}) = \max\{m, n\}$$

Bridno kromatski broj ciklusa $C_n,\ n > 1$

$$\gamma'(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ 3, & \text{ako je } n \text{ neparan} \end{cases}$$

Bridno kromatski broj grafa $K_n,\ n > 1$

$$\gamma'(K_n) = \begin{cases} n-1, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ n, & \text{ako je } n \text{ neparan} \end{cases}$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Propozicija 10.6.

Neka je $n > 1$ prirodni broj. Tada je

$$\gamma'(K_n) = \begin{cases} n-1, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ n, & \text{ako je } n \text{ neparan} \end{cases}.$$

Dokaz.

Pretpostavimo najprije da je $n > 1$ neparni prirodni broj. Nacrtajmo graf K_n tako da njegovi vrhovi formiraju pravilni n-terokut. Tada n bridova grafa K_n predstavlja stranice tog n-terokuta. Obojimo te bridove međusobno različitim bojama. Svaki od preostalih bridova grafa K_n nalazi se unutar pravilnog n-terokuta i paralelan je s točno jednom njegovom stranicom. Ako svaki od unutarnjih bridova obojamo s onom bojom kojom je obojana stranica n-terokuta s kojom je paralelan, dobit ćemo jedno bojanje bridova grafa K_n s n boja.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

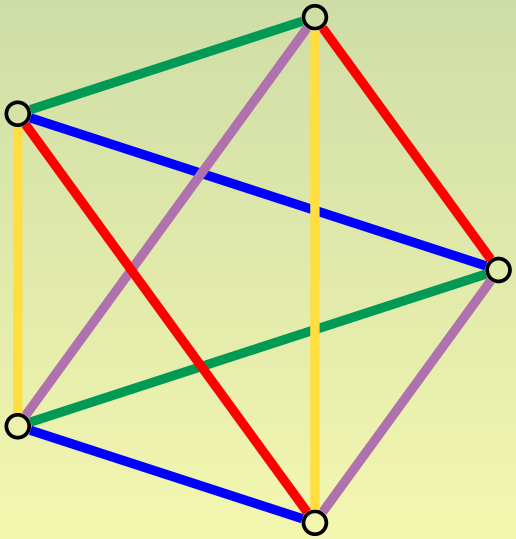
Stoga je $\gamma'(K_n) \leqslant n$ za neparni prirodni broj $n > 1$. Tvrdimo da je $\gamma'(K_n) = n$ za neparni prirodni broj $n > 1$.

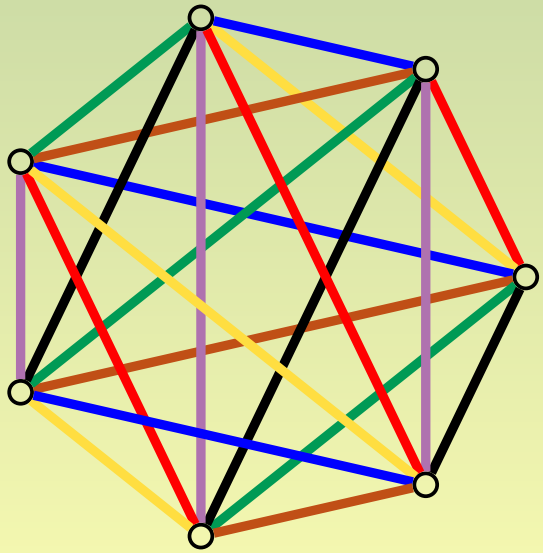
Pretpostavimo suprotno, tj. da se bridovi grafa K_n mogu obojati s manje od n boja. Neka su bridovi grafa K_n obojani s $n-1$ boja. Iz same definicije bojanja bridova grafa slijedi da svi bridovi koji su obojani istom bojom moraju biti međusobno nesusjedni. Kako je n neparni broj, maksimalni broj bridova u jednoj boji jednak je $\frac{n-1}{2}$. S obzirom da je za bojanje bridova upotrijebljeno $n-1$ boja, zaključujemo da graf K_n ima najviše $(n-1) \cdot \frac{n-1}{2}$ bridova, tj. $\frac{(n-1)^2}{2}$ bridova. No, to je kontradikcija s činjenicom da graf K_n ima ukupno $\binom{n}{2}$ bridova, tj. $\frac{n(n-1)}{2}$ bridova.

Dakle, ako je $n > 1$ neparni prirodni broj, tada je $\gamma'(K_n) = n$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Pretpostavimo da je n parni prirodni broj. Neka je v bilo koji vrh grafa K_n. Tada je graf $K_n - v$ potpuni graf s $n-1$ vrhova. Kako je $n-1$ neparni broj, prema već dokazanom bridove grafa $K_n - v$ možemo obojati minimalno s $n-1$ boja tako da sve paralelne bridove bojamo istom bojom. Pritom graf $K_n - v$ nacrtamo tako da njegovi vrhovi formiraju pravilni n-terokut kako je prikazano na donjoj slici za K_5 i K_7.



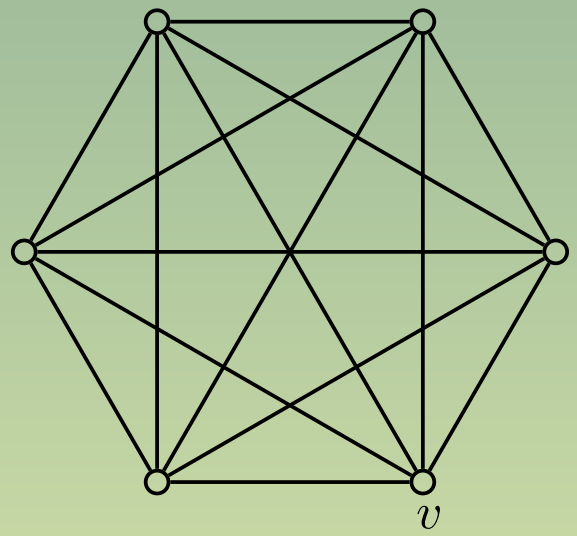


Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

S takvim bojanjem bridova grafa $K_n - v$ u svakom njegovom vrhu odsutna je točno jedna od upotrijebljenih $n-1$ boja. Preciznije, u međusobno različitim vrhovima odsutne su međusobno različite boje. Pogledajte prethodnu sliku kako biste se u to i vizualno uvjerili. Konačno, preostale bridove grafa K_n obojimo na sljedeći način. Za svaki vrh w grafa $K_n - v$ brid (w, v) obojimo onom od upotrijebljenih $n-1$ boja koja je odsutna u vrhu w. Na taj način dobivamo jedno bojanje bridova grafa K_n s $n-1$ boja. Kako je uvijek $\gamma'(K_n) \geqslant \Delta(K_n) = n-1$, zaključujemo da je $\gamma'(K_n) = n-1$ za parni prirodni broj n. ♡

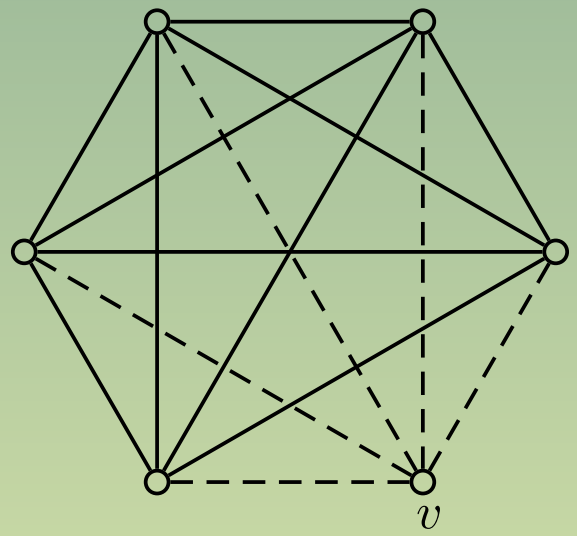
Na sljedećem slajdu je ilustriran opisani postupak bojanja bridova grafa K_n za parni prirodni broj n, konkretno za graf K_6.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



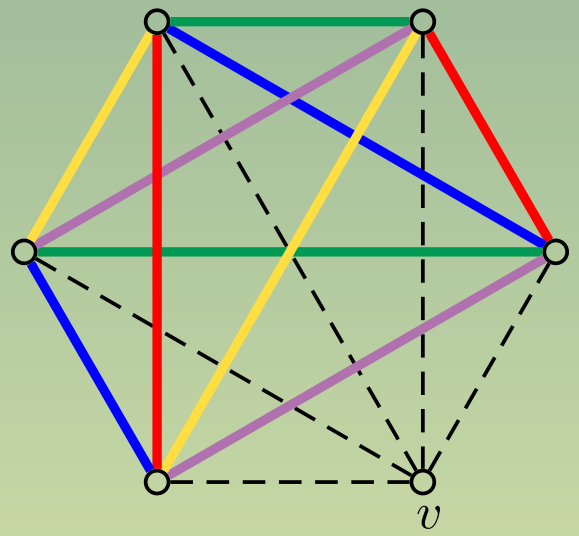
U grafu K_6 odaberemo jedan vrh v

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



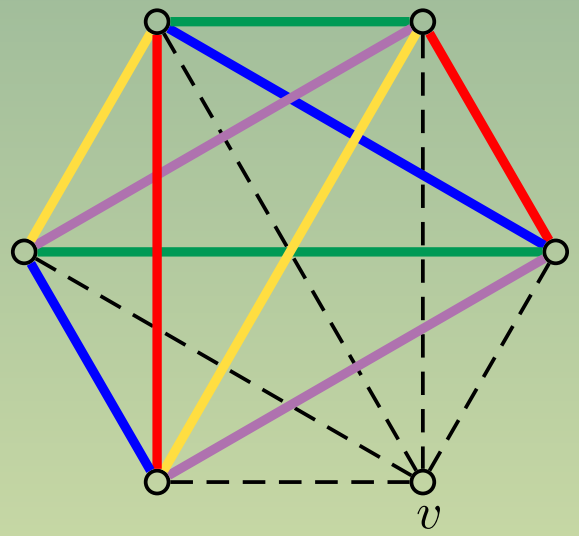
U grafu K_6 odaberemo jedan vrh v i promotrimo graf $K_6 - v$ koji je zapravo izomorfan s K_5.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



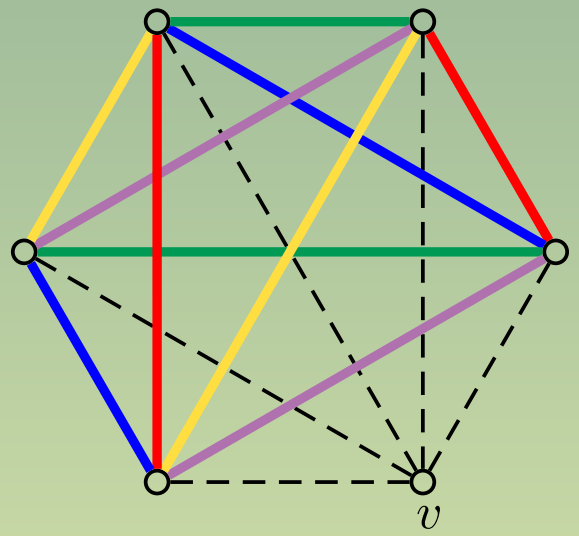
Bridove grafa $K_6 - v$, tj. grafa K_5 obojamo tako da su svi paralelni bridovi obojani istom bojom.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



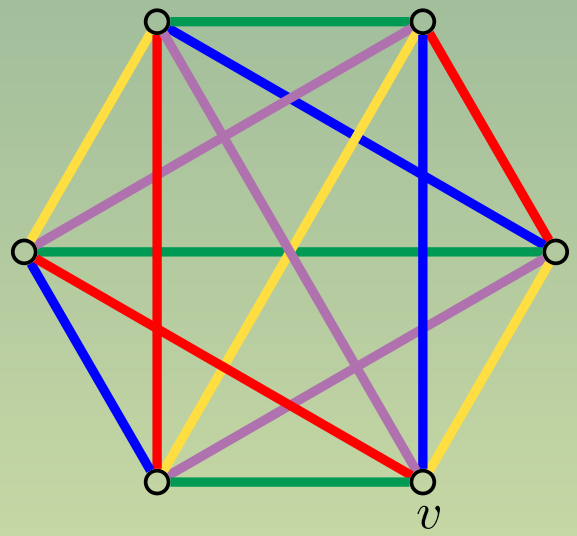
Bridove grafa $K_6 - v$, tj. grafa K_5 obojamo tako da su svi paralelni bridovi obojani istom bojom. Na ovoj slici vrhovi grafa K_5 nisu raspoređeni tako da formiraju pravilni peterokut pa zbog toga jednako obojani bridovi nisu paralelni u pravom smislu te riječi. Međutim, to nije bitno jer smo paralelnost koristili samo kako bismo lakše objasnili prethodni dokaz, a o jednako obojanim bridovima možemo razmišljati kao o "paralelnim" bridovima.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Uočite da je u svakom od vrhova grafa $K_6 - v$ odsutna točno jedna od upotrijebljenih 5 boja. Također, u međusobno različitim vrhovima su odsutne međusobno različite boje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Uočite da je u svakom od vrhova grafa $K_6 - v$ odsutna točno jedna od upotrijebljenih 5 boja. Također, u međusobno različitim vrhovima su odsutne međusobno različite boje.

Stoga preostale bridove grafa K_6 možemo obojati s već upotrijebljenih 5 boja.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

O bridno kromatskom broju proizvoljnog jednostavnog grafa govori sljedeći fantastični teorem.

Teorem 10.17 (Vizing, Gupta, 1964.).

Ako je G jednostavni graf, tada je

$$\gamma'(G) = \Delta(G) \quad \textit{ili} \quad \gamma'(G) = \Delta(G) + 1.$$

Dokaz.

Dokaz ovog teorema je konstruktivne prirode, a ideje u dokazu se mogu primijeniti za implementaciju aproksimacijskih algoritama za bojanje bridova grafa. Bojanje bridova grafa je također težak problem u praksi pa je svaka ideja za neki aproksimacijski algoritam uvijek dobro došla. To je jedan od glavnih razloga zašto ovdje navodimo dokaz ovog teorema.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

- Kao što smo rekli, dokaz je konstruktivne prirode. Ideja je da za zadani jednostavni graf G konstruiramo jedno njegovo bojanje bridova s najviše $\Delta(G)+1$ boja i pokažemo da se takvo bojanje može uvijek realizirati.

- Pretpostavimo da smo obojali sve bridove nekog podgrafa G' grafa G s najviše $\Delta(G)+1$ boja. Ako je G' pravi podgraf od G, tada sigurno postoji barem još jedan neobojani brid uv. Ideja je da pokušamo obojati brid uv nekom od $\Delta(G)+1$ boja tako da i dalje susjedni bridovi budu obojani različitim bojama. U tom postupku morat ćemo u većini situacija nekim već obojanim bridovima promijeniti boje kako bismo mogli na ispravni način obojati brid uv.

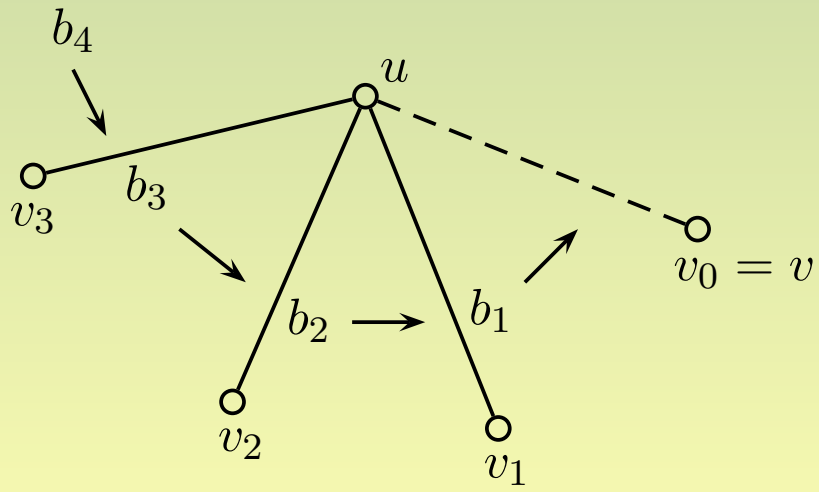
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

- Kako je korišteno najviše $\Delta(G)+1$ boja, tada kod svakog vrha grafa G nije upotrijebljena barem jedna od tih boja, tj. za svaki vrh w grafa G postoji barem jedna boja s kojom nije obojan niti jedan brid susjedan s vrhom w. Neka je b_0 jedna od boja koja nije upotrijebljena kod vrha u. Sada ćemo napraviti listu susjeda vrha u zajedno s pripadajućim bojama koje nisu upotrijebljene kod tih vrhova. Počinjemo s $v_0 = v$.

- Neka je b_1 boja koja nije upotrijebljena kod vrha v_0. Ako boja b_1 nije upotrijebljena niti kod vrha u, tada brid uv možemo obojati bojom b_1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

- U protivnom, neka je b_1 boja pronađena na bridu uv_1. Neka je b_2 boja koja nije upotrijebljena kod vrha v_1. Ukoliko boja b_2 nije upotrijebljena kod vrha u, tada trenutnu boju b_1 brida uv_1 mijenjamo u boju b_2, a nakon toga bojom b_1 obojamo brid uv_0 i time završimo postupak **rebojanja bridova**.
- Ako je boja b_2 upotrijebljena kod vrha u, neka je uv_2 brid obojan bojom b_2. Dalje nastavljamo opisani princip na brid uv_2.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

- Općenito, ako smo došli do brida uv_{i-1} koji je obojan bojom b_{i-1}, neka je b_i boja koja nije upotrijebljena kod vrha v_{i-1}. Ako boja b_i nije upotrijebljena kod vrha u, tada bojom b_i obojimo brid uv_{i-1}. Nadalje, kako bismo završili postupak rebojanja bridova, bojom b_j obojamo brid uv_{j-1} za svaki $1 \leqslant j \leqslant i-1$. Ako je boja b_i upotrijebljena kod vrha u, tada postoji brid uv_i obojan bojom b_i i nastavljamo dalje opisani princip na brid uv_i.

- Dosadašnji opisani postupak rebojanja susjednih bridova vrha u s $\Delta(G)+1$ boja neće se uvijek moći provesti. Naime, vrh u može imati najviše $\Delta(G)$ susjednih vrhova i moguće je da kod više njegovih susjeda nije upotrijebljena ista boja. Drugim riječima, tijekom rebojanja bridova mogu nastupiti dva bitno različita slučaja.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

- **1. slučaj.** U nekom trenutku smo naišli na boju b_i koja nedostaje kod oba vrha v_{i-1} i u. Primijenimo standardni postupak rebojanja bridova i ukoliko uspijemo doći do kraja, tj. ako uspijemo obojati brid uv_0, time je postupak bojanja brida uv uspješno završio i možemo prijeći na bojanje novog brida.

- **2. slučaj.** Kod dva ili više susjednih vrhova vrha u javlja se ista neupotrijebljena boja. U ovom slučaju moramo provesti drukčiji postupak rebojanja susjednih bridova vrha u. U nastavku opisujemo modificirani postupak rebojanja bridova.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

- Neka je l najmanji indeks za koji se neupotrijebljena boja kod vrha v_l nalazi već među bojama $b_1, \ldots, b_l$. Drugim riječima, vrh v_l je prvi vrh kod kojeg se neupotrijebljena boja kod tog vrha već ranije javila kao neupotrijebljena boja kod nekog drugog susjednog vrha od vrha u. Uzmimo da je to boja b_k za neki $1 \leqslant k \leqslant l$. Kada naiđemo na takvo ponavljanje neke boje, prestajemo koristiti standarno rebojanje bridova. U tom slučaju koristimo jedno od tri moguća rješenja ovisno o situaciji koja nastupi.

- Prije nego opišemo spomenuta tri rješenja, objasnimo još malo detaljnije nastalu situaciju. Kao što smo rekli, kod vrha v_l se boja b_k javlja kao neupotrijebljena boja u tom vrhu, a ta se boja već ranije javila kao neupotrijebljena boja kod vrha v_{k-1}. Dakle, bojom b_k je obojan brid uv_k. Ove činjenice slijede direktno iz već ranije opisanog standardnog postupka rebojanja bridova.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

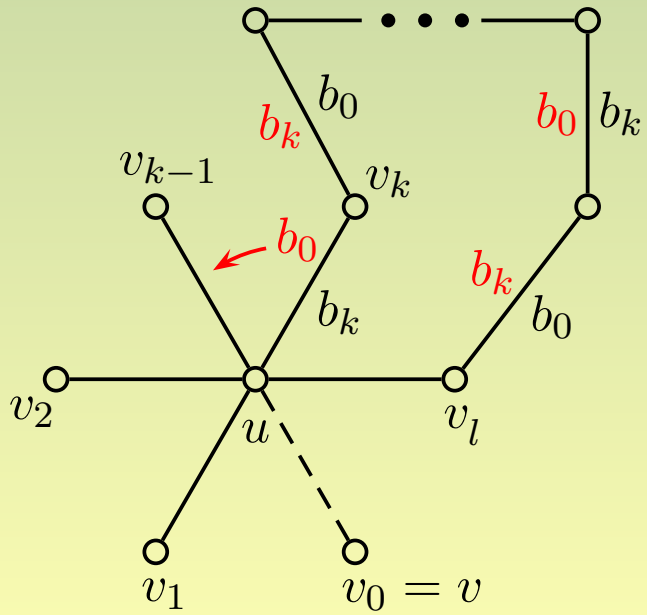
- Boja b_0 je upotrijebljena kod vrha v_l jer u protivnom bismo mogli primijeniti standardno rebojanje bridova iz vrha v_l tako da bojom b_0 obojimo brid uv_l. Sjetimo se, boja b_0 nije upotrijebljena kod vrha u. Stoga u vrhu v_l postoji brid obojan bojom b_0, a to sigurno nije brid uv_l.

- Neka je P maksimalni put koji počinje u vrhu v_l s bridom koji je obojan bojom b_0, a boje ostalih njegovih susjednih bridova se naizmjenično mijenjaju između boja b_0 i b_k. Samo je jedan takav put jer svaki vrh je susjedan najviše s jednim bridom obojanim određenom bojom.

- Na temelju uvedenog puta P možemo sada opisati moguće situacije i dati rješenja za rebojanje bridova u tim slučajevima.

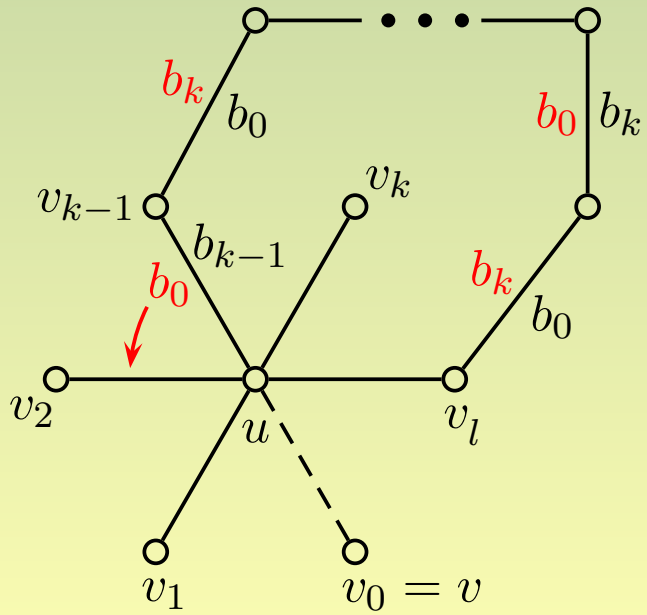
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

- **1. situacija** – put P je došao do vrha v_k. Kako je brid uv_k obojan bojom b_k, put P je morao doći u vrh v_k preko brida obojanog bojom b_0. Boja b_0 nije upotrijebljena kod vrha u, a boja b_k nije upotrijebljena kod vrha v_l. Stoga možemo brid uv_k obojati bojom b_0, a bridovima na putu P zamijenimo boje: boju b_0 u b_k, a boju b_k u b_0. Nakon toga od vrha v_k možemo primijeniti standardno rebojanje bridova i na taj način obojati brid uv.



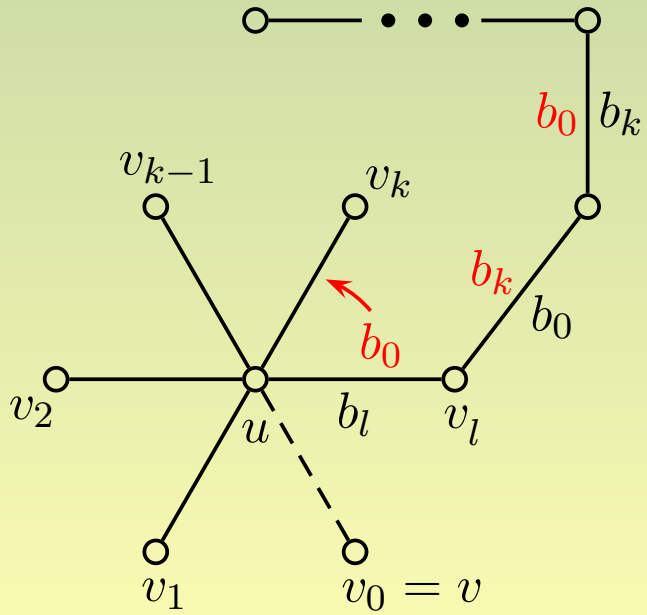
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

- **2. situacija** – put P je došao do vrha v_{k-1}. Boja b_k nije upotrijebljena kod vrha v_{k-1} pa je put P morao doći u taj vrh preko brida obojanog bojom b_0. Boja b_0 nije upotrijebljena kod vrha u, a boja b_k nije upotrijebljena kod vrha v_l. Stoga možemo brid uv_{k-1} obojati bojom b_0, a bridovima na putu P zamijenimo boje: boju b_0 u b_k, a boju b_k u b_0. Nakon toga od vrha v_{k-1} možemo primijeniti standardno rebojanje bridova i na taj način obojati brid uv.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

- **3. situacija** – put P nije uspio doći niti do jednog od vrhova v_k ili v_{k-1}. U tom slučaju je put P završio u nekom vrhu različitom od vrhova u, v_l, v_k, v_{k-1} (moguće je da je pritom prošao kroz neke od preostalih vrhova v_i). Sada brid uv_l bojamo bojom b_0, a bridovima na putu P zamijenimo boje: boju b_0 u b_k, a boju b_k u b_0. Nakon toga od vrha v_l možemo primijeniti standardno rebojanje bridova i na taj način obojati brid uv.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

- Dakle, pokrili smo sve moguće slučajeve koji se mogu desiti. U svakom od tih slučajeva uspjeli smo obojati brid uv. Preciznije, na temelju obojanih bridova pografa G' uspjeli smo obojati novi brid uv s nekom od $\Delta(G)+1$ boja. Na taj način smo s $\Delta(G)+1$ boja uspjeli obojati bridove podgrafa $G'+uv$. Ponovimo li opisani postupak na svakom od preostalih neobojanih bridova grafa G, nakon konačno mnogo koraka obojat ćemo sve bridove grafa G s najviše $\Delta(G)+1$ boja.

Time je dokaz teorema završen. ♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

S obzirom na bridno kromatski broj prema Vizingovom teoremu sve jednostavne grafove možemo razvrstati u dvije klase:

- U prvoj klasi se nalaze jednostavni grafovi G za koje je $\gamma'(G) = \Delta(G)$.
- U drugoj klasi se nalaze jednostavni grafovi G za koje je $\gamma'(G) = \Delta(G) + 1$.

Međutim, unatoč tako snažnom rezultatu o bridno kromatskom broju jednostavnog grafa, određivanje bridno kromatskog broja ostaje i dalje težak problem. Ne postoji polinomijalni algoritam koji bi za zadani jednostavni graf G odredio njegov bridno kromatski broj. Dakle, odrediti kojoj od gornjih klasa zadani jednostavni graf G pripada, općenito je jako teški problem.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Kroz opsežna eksperimentalna i teoretska istraživanja pokazano je da u prvoj klasi ima znatno više jednostavnih grafova s n vrhova, nego što ih ima u drugoj klasi.

Primjeri jednostavnih grafova koji pripadaju prvoj klasi su:

- bipartitni grafovi
- potpuni grafovi s parnim brojem vrhova
- $W_n = C_{n-1} \vee K_1$ kojeg zovemo kotač s n vrhova spoj grafova

Primjeri jednostavnih grafova koji pripadaju drugoj klasi su:

- ciklusi neparnih duljina
- potpuni grafovi s neparnim brojem vrhova
- Petersenov graf

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Napomena.

Na prvi tren izgleda pomalo čudno da je određivanje bridno kromatskog broja jednostavnog grafa težak problem, pogotovo što moramo odlučiti samo između dvije mogućnosti zahvaljujući Vizingovom teoremu. Isto tako, dokaz Vizingovog teorema je konstruktivne prirode koji odmah daje jedan efikasan algoritam za bojanje bridova jednostavnog grafa o čemu će biti više riječi kasnije. Izgleda sve super idealno. U čemu je onda problem?

Sjetimo se malo detalja dokaza Vizingovog teorema. Što je zapravo dokazano? Ako smo dobro razumijeli strukturu dokaza, tada smo svjesni jedne činjenice u kojoj leži cijeli problem. Struktura tog dokaza je takva da nam garantira da bridove svakog jednostavnog grafa G možemo obojati s najviše $\Delta(G)+1$ boja. Dokaz nam čak daje i algoritam kako to napraviti.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Međutim, što ako je $\gamma'(G) = \Delta(G)$? Dokaz Vizingovog teorema nam garantira da ćemo svakako bridove takvog jednostavnog grafa moći obojati s $\Delta(G) + 1$ boja i daje nam algoritam kako to napraviti. No, nigdje u dokazu nema niti jedne riječi o tome kako poboljšati to bojanje bridova i prevesti ga u bojanje s $\Delta(G)$ boja. Stoga je u tom slučaju moguće da algoritam iz dokaza neće uvijek dati bojanje bridova s minimalnim brojem boja. U najgorem slučaju će koristiti jednu boju više, nego što to zaista treba. Dakle, težina problema leži u činjenici da nema efikasnog algoritma koji bi prepoznao da bojanje bridova s $\Delta(G) + 1$ boja treba smanjiti na bojanje bridova s $\Delta(G)$ boja ukoliko je $\gamma'(G) = \Delta(G)$. Veliki problem je čak prepoznati takvu situaciju, a kamoli onda i realizirati bojanje bridova s $\Delta(G)$ boja.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Određivanje bridno kromatskog broja jednostavnog grafa je teški problem. Na malim grafovima uglavnom koristimo neke ad hoc metode ukoliko želimo ručno odrediti njihov bridno kromatski broj. Nema nekog univerzalnog recepta. Posao nam znatno olakšava Vizingov teorem jer moramo odlučiti "samo" između dvije mogućnosti. U nastavku navodimo upute kako se ponašati kod ručnog određivanja bridno kromatskog broja malog grafa.

- Za zadani jednostavni graf G odredimo najprije $\Delta(G)$, tj. maksimalni stupanj njegovih vrhova.
- Na zdravorazumski način tražimo bojanje bridova grafa s najviše $\Delta(G)+1$ boja. Ukoliko nam ponestane inspiracije, možemo programirano pratiti dokaz Vizingovog teorema kako bismo dobili bojanje bridova s najviše $\Delta(G)+1$ boja. Međutim, na malim grafovima za to nema neke velike potrebe.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

- Ako smo pronašli bojanje bridova s $\Delta(G)$ boja, tada je gotovo. Bridno kromatski broj jednostavnog grafa G u tom je slučaju jednak $\Delta(G)$.
- Ako smo pronašli bojanje bridova s $\Delta(G)+1$ boja, tada nije gotovo. Možemo krenuti u dva smjera:
  - Pokušati pronaći bojanje bridova s $\Delta(G)$ boja nakon čega možemo odmah zaključiti da je $\gamma'(G) = \Delta(G)$.
  - Ako nikako ne možemo pronaći bojanje bridova s $\Delta(G)$ boja, tada trebamo na neki razumni način dokazati ili objasniti zašto na promatranom grafu G takvo bojanje bridova ne postoji. Nakon toga možemo zaključiti da je $\gamma'(G) = \Delta(G)+1$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Za proizvoljne grafove koji ne moraju biti jednostavni vrijede sljedeća dva teorema.

Teorem 10.18 (Vizingov teorem za opći slučaj).

Neka je G graf bez petlji. Tada vrijedi

$$\Delta(G) \leqslant \gamma'(G) \leqslant \Delta(G) + \mu(G)$$

gdje je $\mu(G)$ multiplicitet grafa G, tj. maksimalni broj bridova između dva vrha u grafu G.

Teorem 10.19 (Shannon, 1949.).

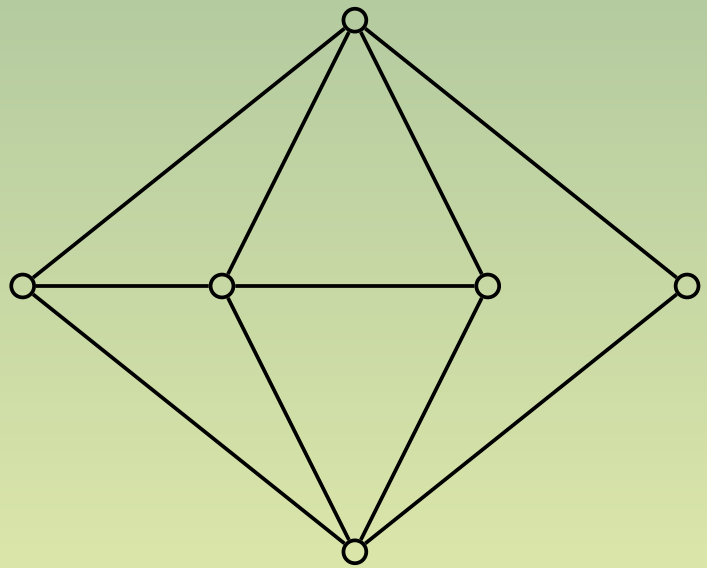
Neka je G graf bez petlji. Tada vrijedi

$$\gamma'(G) \leqslant \left\lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \right\rfloor.$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.64.

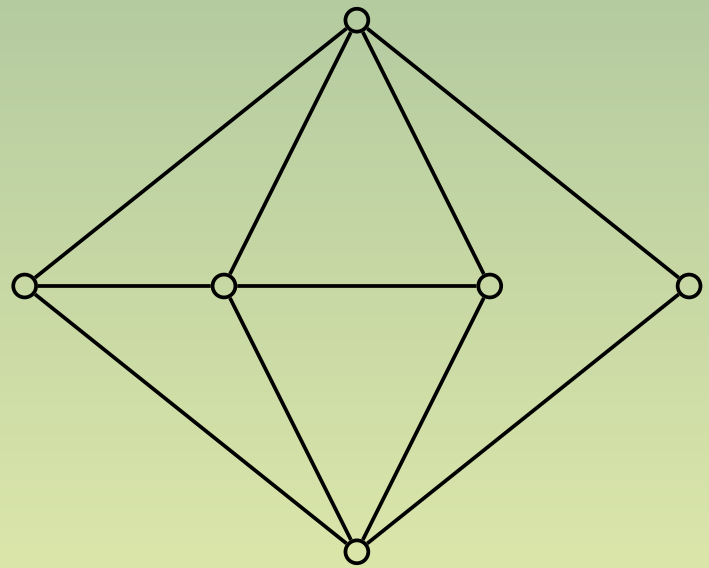
Odredite bridno kromatski broj grafa G i pronađite jedno bojanje njegovih bridova s minimalnim brojem boja.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.64.

Odredite bridno kromatski broj grafa G i pronađite jedno bojanje njegovih bridova s minimalnim brojem boja.

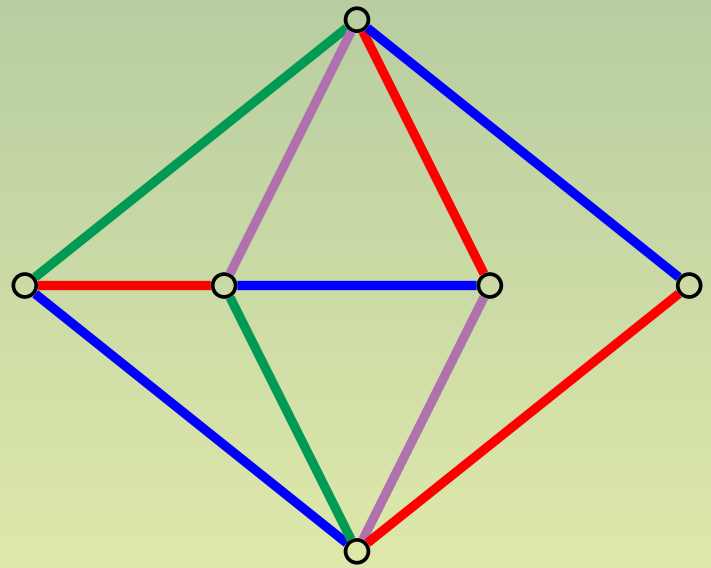


Rješenje.

Kako je G jednostavni graf i $\Delta(G) = 4$, prema ◂ Vizingovom teoremu njegov je bridno kromatski broj jednak 4 ili 5.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Na donjoj slici je prikazano jedno bojanje bridova grafa G s 4 boje iz čega možemo odmah zaključiti da je $\gamma'(G) = 4$.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.65.

Odredite bridno kromatski broj Petersenovog grafa i pronađite jedno bojanje njegovih bridova s minimalnim brojem boja.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

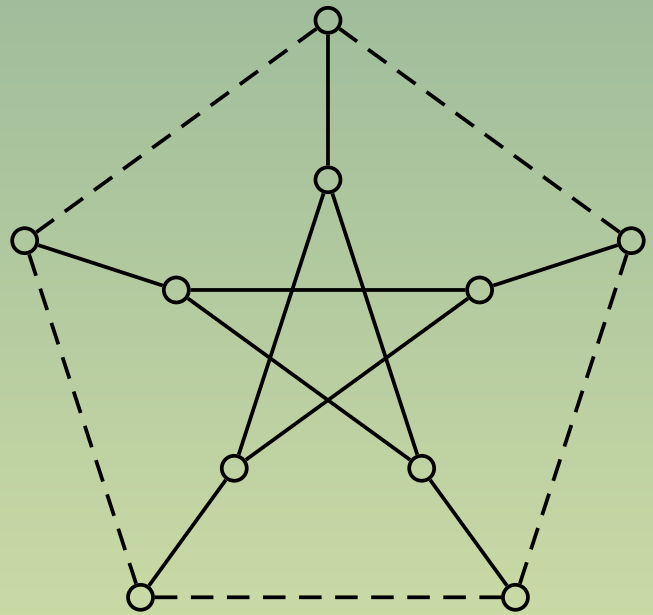
Primjer 10.65.

Odredite bridno kromatski broj Petersenovog grafa i pronađite jedno bojanje njegovih bridova s minimalnim brojem boja.

Rješenje.

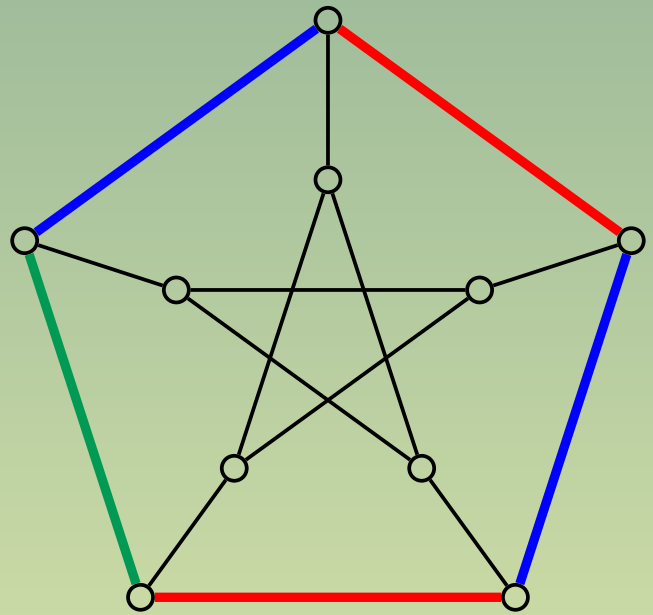
Neka je P Petersenov graf. Kako je Petersenov graf 3-regularni graf, slijedi da je $\Delta(P) = 3$. Prema ◂ Vizingovom teoremu bridno kromatski broj Petersenovog grafa jednak je 3 ili 4. Dokazat ćemo da bridove Petersenovog grafa ne možemo obojati samo s tri boje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Crtkani podgraf na slici je zapravo ciklus neparne duljine.

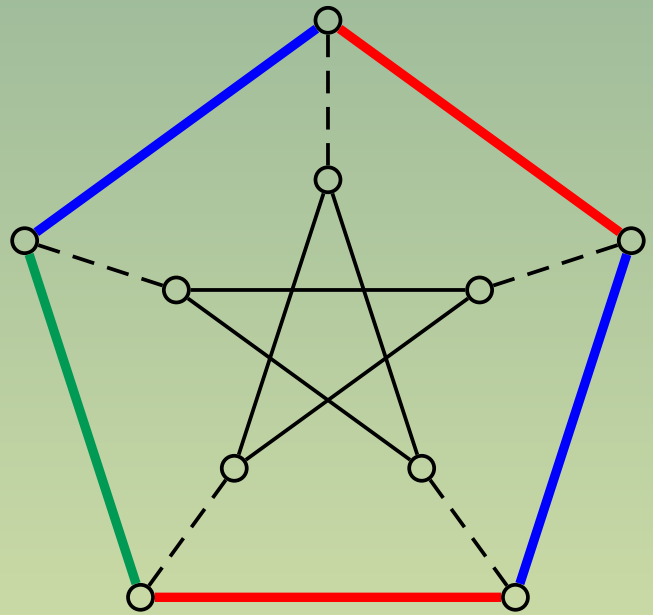
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Crtkani podgraf na slici je zapravo ciklus neparne duljine.

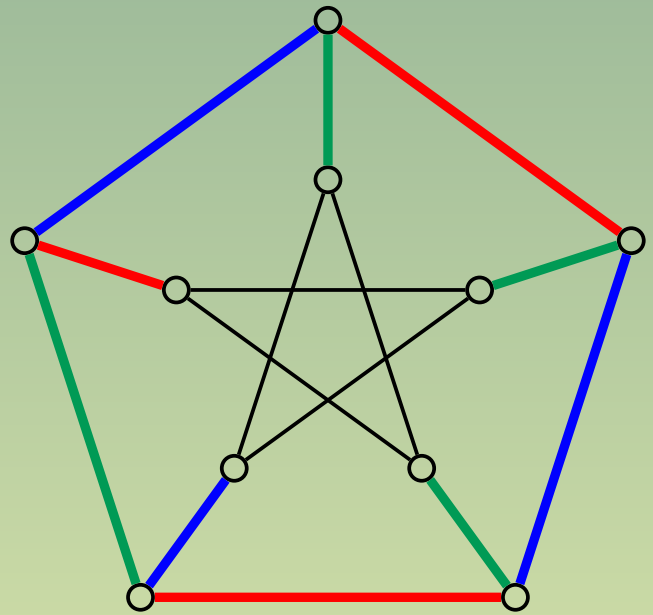
Za bojanje njegovih bridova trebamo svakako tri boje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Crtkane bridove na slici možemo i dalje obojati s trenutne tri boje bez uvođenja novih boja.

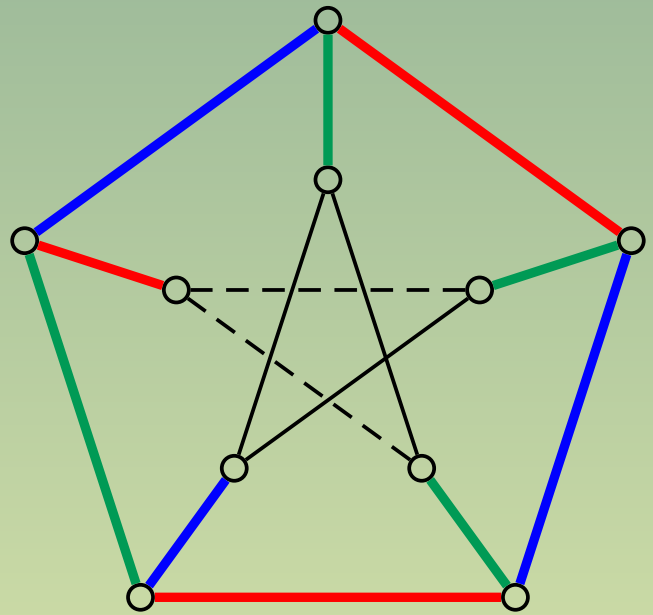
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Crtkane bridove na slici možemo i dalje obojati s trenutne tri boje bez uvođenja novih boja.

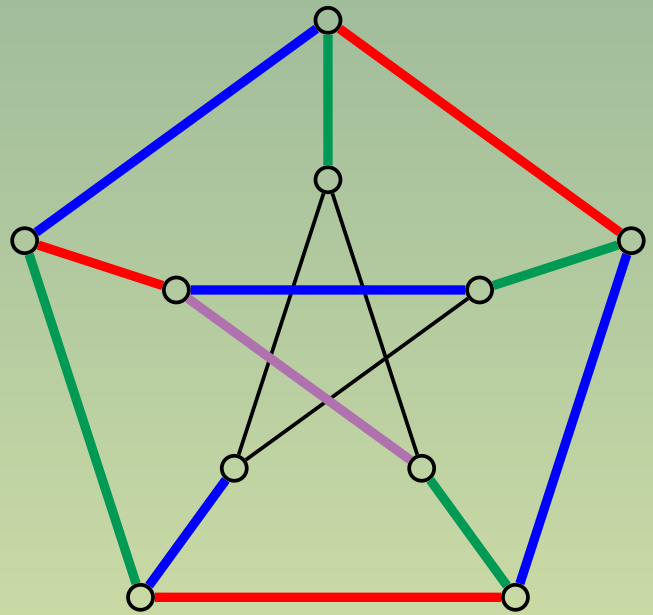
To možemo napraviti na jedinstveni način.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



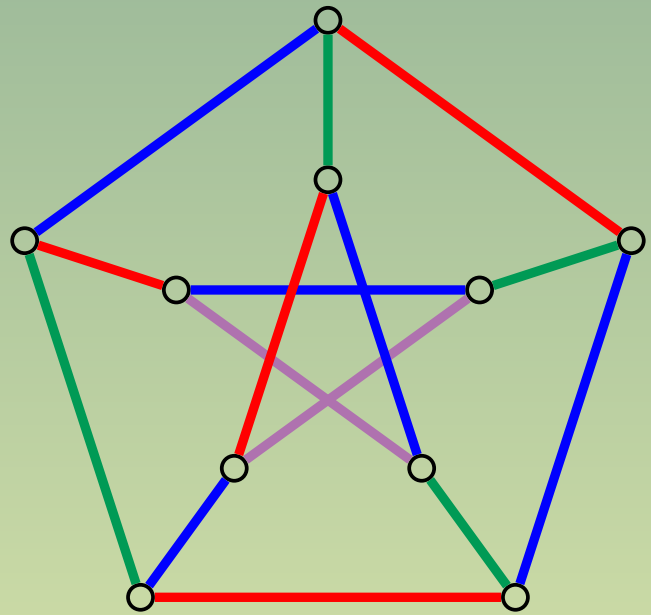
Uočimo crtkane bridove na slici. Svaki od tih bridova je susjedan s bridovima crvene i zelene boje. Stoga bi svaki od crtkanih bridova morali obojati plavom bojom. Međutim, to nije moguće jer su crtkani bridovi susjedni.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Stoga moramo uvesti četvrtu boju kako bismo mogli dalje nastaviti bojanje bridova.

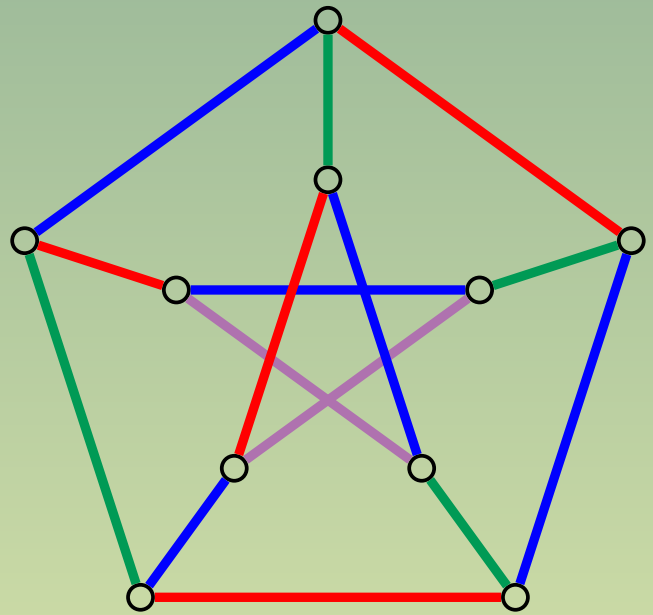
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Stoga moramo uvesti četvrtu boju kako bismo mogli dalje nastaviti bojanje bridova.

S trenutne četiri boje možemo obojati preostale bridove.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Dakle, dobili smo jedno bojanje bridova Petersenovog grafa s 4 boje i usput smo tijekom bojanja dokazali da ne postoji bojanje bridova s tri boje. Stoga je $\gamma'(P) = 4$, tj. bridno kromatski broj Petersenovog grafa jednak je 4.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Propozicija 10.7.

Neka je G jednostavni graf s ν vrhova i ε bridova. Ako vrijedi

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor,$$

tada je $\gamma'(G) = \Delta(G) + 1$.

Dokaz.

Neka je G jednostavni graf u kojemu vrijedi $\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\gamma'(G) = \Delta(G)$. Svako bojanje bridova grafa G s $\Delta(G)$ boja daje jednu particiju skupa bridova $E(G)$ u $\Delta(G)$ klasa. Bridovi iz pojedine klase su međusobno nesusjedni pa stoga svaka od tih klasa može imati najviše $\left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor$ bridova. Zaključujemo da graf G ima najviše $\Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor$ bridova, tj. $\varepsilon \leqslant \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor$. Međutim, to je kontradikcija s početnom pretpostavkom o broju bridova u grafu G. Dakle, zaista je $\gamma'(G) = \Delta(G) + 1$. ♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Korolar 10.7.

Neka je G jednostavni regularni graf s neparnim brojem vrhova. Tada je $\gamma'(G) = \Delta(G) + 1$.

Dokaz.

Neka je G k-regularni jednostavni graf. Tada je $d(v) = k$ za svaki $v \in V(G)$ pa je $\Delta(G) = k$. Nadalje, iz

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2\varepsilon$$

slijedi $k\nu = 2\varepsilon$, tj. $\varepsilon = \frac{k\nu}{2}$. Kako je ν neparni broj, zaključujemo da je k paran i $\left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor = \frac{\nu-1}{2}$. Dakle, zadovoljen je uvjet

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor$$

pa iz ◂ propozicije 10.7 slijedi $\gamma'(G) = \Delta(G) + 1$. ♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Korolar 10.8.

Neka je H jednostavni regularni graf s parnim brojem vrhova. Neka je G graf dobiven iz grafa H dodavanjem jednog vrha na neki njegov brid. Tada je $\gamma'(G) = \Delta(G) + 1$.

Dokaz.

Neka je H k-regularni jednostavni graf s parnim brojem vrhova. Tada je $\varepsilon(H) = \frac{k\nu(H)}{2}$ i $\Delta(H) = k$. Dodavanjem jednog vrha na neki brid grafa H dobiva se graf G za koji vrijedi

$$\Delta(G) = k, \quad \varepsilon(G) = \varepsilon(H) + 1, \quad \nu(G) = \nu(H) + 1.$$

Kako je $\nu(H)$ parni broj, tada je $\left\lfloor \frac{\nu(H)+1}{2} \right\rfloor = \frac{\nu(H)}{2}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Stoga je

$$\varepsilon(G) = \varepsilon(H) + 1 = k \cdot \frac{\nu(H)}{2} + 1,$$

$$\Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu(G)}{2} \right\rfloor = k \cdot \left\lfloor \frac{\nu(H)+1}{2} \right\rfloor = k \cdot \frac{\nu(H)}{2}.$$

Dakle, zadovoljen je uvjet

$$\varepsilon(G) > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu(G)}{2} \right\rfloor$$

pa iz ◂ propozicije 10.7 slijedi $\gamma'(G) = \Delta(G) + 1$. ♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Korolar 10.9.

Neka je G jednostavni regularni graf koji ima barem jedan rezni vrh. Tada je $\gamma'(G) = \Delta(G) + 1$.

Dokaz.

Neka je G regularni graf koji ima rezni vrh v. Ako G ima neparni broj vrhova, tada tvrdnja slijedi iz ◂ korolara 10.7. Pretpostavimo da G ima parni broj vrhova. Neka je $G = H \cup K$ tako da je $H \cap K = \{v\}$. Tada jedan od podgrafova H i K mora imati neparni broj vrhova. Neka je to podgraf H. U podgrafu H svaki vrh ima stupanj $\Delta(G)$ osim vrha v koji je manjeg stupnja. Stoga je $\Delta(H) = \Delta(G)$. Iz poznate jednakosti

$$\sum_{v \in V(H)} d(v) = 2\varepsilon(H)$$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

tada slijedi

$$\varepsilon(H) = \tfrac{1}{2}\Big(\big(\nu(H)-1\big)\Delta(G) + d_H(v)\Big). \qquad (\circ)$$

Kako je $\nu(H)$ neparni broj, vrijedi $\left\lfloor \frac{\nu(H)}{2} \right\rfloor = \frac{\nu(H)-1}{2}$. Stoga je

$$\Delta(H) \cdot \left\lfloor \frac{\nu(H)}{2} \right\rfloor = \Delta(G) \cdot \frac{\nu(H)-1}{2}. \qquad (\bullet)$$

Iz $(\circ)$ i $(\bullet)$ zaključujemo da vrijedi

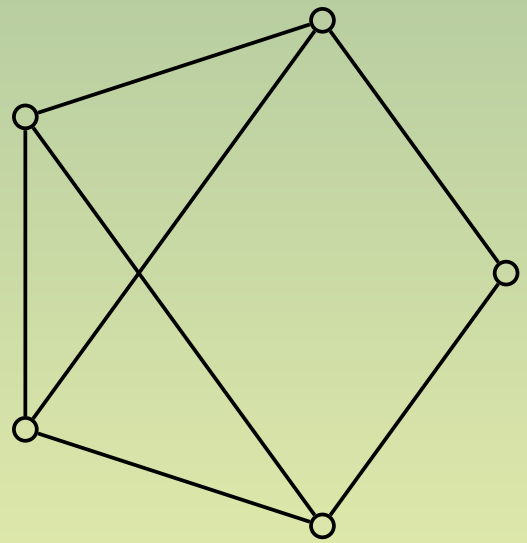
$$\varepsilon(H) > \Delta(H) \cdot \left\lfloor \frac{\nu(H)}{2} \right\rfloor$$

pa je prema ◂ propoziciji 10.7 $\gamma'(H) = \Delta(H) + 1$. Nadalje, zbog $\Delta(H) = \Delta(G)$ vrijedi $\gamma'(H) = \Delta(G) + 1$. Konačno, kako je H podgraf od jednostavnog grafa G prema ◂ Vizingovom teoremu slijedi da mora biti $\gamma'(G) = \Delta(G) + 1$. ♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.66.

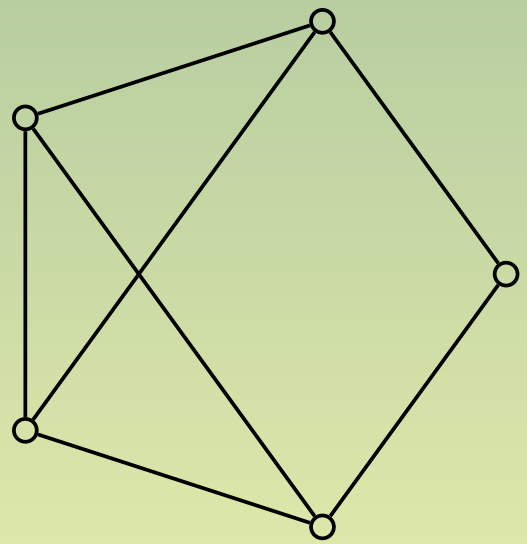
Odredite bridno kromatski broj grafa G i pronađite jedno bojanje njegovih bridova s minimalnim brojem boja.



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.66.

Odredite bridno kromatski broj grafa G i pronađite jedno bojanje njegovih bridova s minimalnim brojem boja.



Rješenje.

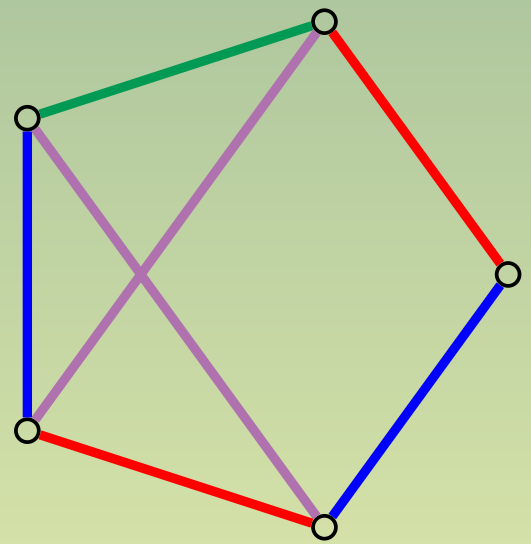
Kako je G jednostavni graf i $\Delta(G) = 3$, prema ◂ Vizingovom teoremu njegov je bridno kromatski broj jednak 3 ili 4.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Na donjoj slici je prikazano jedno bojanje bridova grafa G s 4 boje.



Međutim, bojanje bridova grafa G s 3 boje ne postoji. Naime, za graf G je $\nu = 5$, $\varepsilon = 7$, $\Delta(G) = 3$ pa vrijedi $\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor$ jer je

$$7 > 3 \cdot \left\lfloor \tfrac{5}{2} \right\rfloor = 3 \cdot \lfloor 2.5 \rfloor = 3 \cdot 2 = 6.$$

Prema ◂ propoziciji 10.7 tada je $\gamma'(G) = \Delta(G) + 1$, tj. $\gamma'(G) = 4$.

Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Napomena.

Uočite da ◂ propoziciju 10.7 ne možemo primijeniti na Petersenov graf P. Naime, u Petersenovom grafu je $\nu = 10$, $\varepsilon = 15$ i $\Delta(P) = 3$. No, u ovom slučaju nije zadovoljen uvjet $\varepsilon > \Delta(P) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor$ jer

$$15 \not> 3 \cdot \left\lfloor \tfrac{10}{2} \right\rfloor = 3 \cdot \lfloor 5 \rfloor = 3 \cdot 5 = 15.$$

Budite oprezni, uvjet u spomenutoj propoziciji je dovoljan da zaključimo da neki jednostavni graf pripada drugoj klasi s obzirom na svoj bridno kromatski broj. Međutim, taj uvjet nije i nužan. Drugim riječima, postoje grafovi iz druge klase koji ne zadovoljavaju uvjet iz ◂ propozicije 10.7. Jedan takav primjer grafa je upravo Petersenov graf P.

Kako bismo dokazali da je $\gamma'(P) = \Delta(P) + 1$, morali smo u ◂ primjeru 10.65 detaljnije proučiti unutrašnju strukturu Petersenovog grafa i pažljivim postepenim bojanjem bridova dokazati da on zaista pripada drugoj klasi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Na kraju navodimo još jedan teorem o bridno kromatskom broju planarnih grafova kojeg je također dokazao Vizing.

Teorem 10.20.

Neka je G jednostavni planarni graf za koji vrijedi $\Delta(G) \geqslant 8$. Tada je $\gamma'(G) = \Delta(G)$.

Pogledajmo sada nekoliko standardnih zadataka koji se mogu riješiti pomoću bojanja vrhova ili bojanja bridova grafa.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.67.

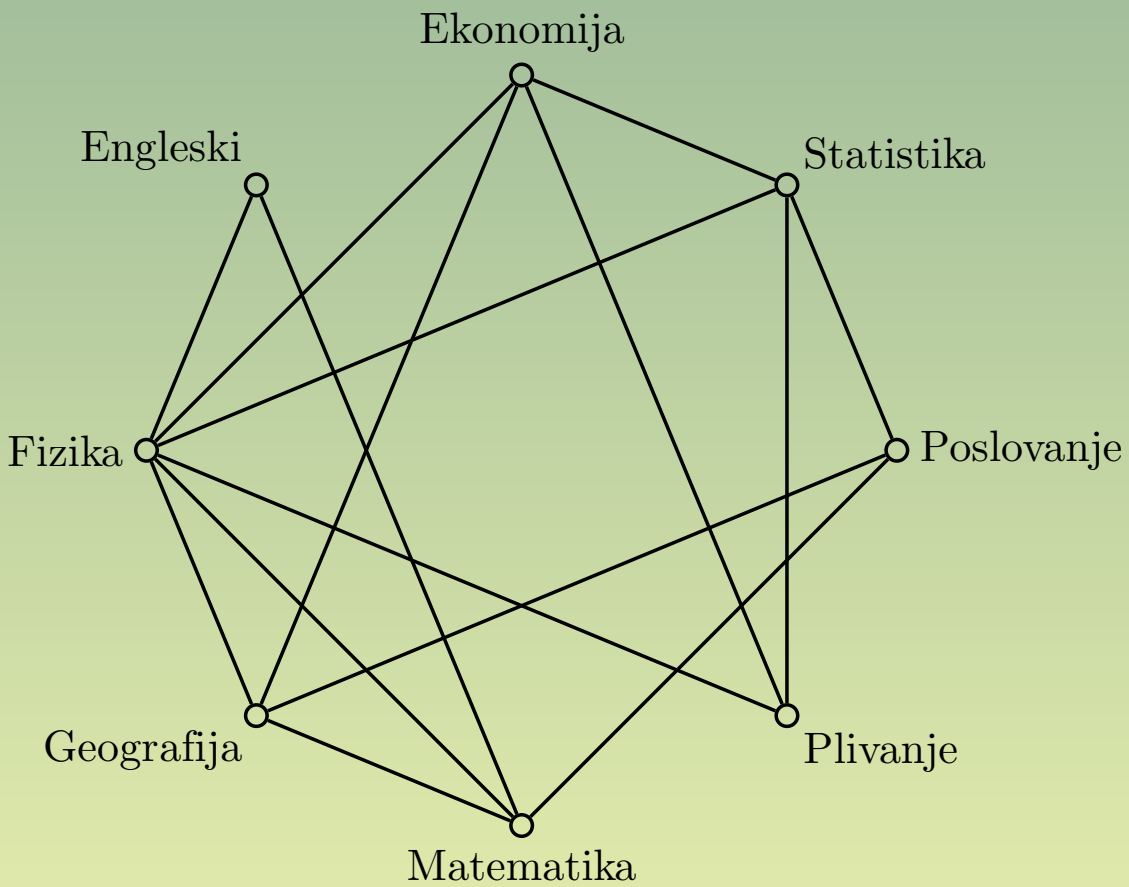
U tablici se nalazi popis od 10 studentica zajedno s kolegijima koje su odabrale.

studentica	*odabrani kolegiji*
Marija	*Fizika, Matematika, Engleski*
Janja	*Fizika, Geografija, Ekonomija*
Ivana	*Geografija, Poslovanje*
Ana	*Statistika, Ekonomija*
Lana	*Matematika, Poslovanje*
Sandra	*Fizika, Geografija*
Danijela	*Poslovanje, Statistika*
Katarina	*Matematika, Geografija*
Petra	*Fizika, Plivanje, Statistika*
Dijana	*Fizika, Ekonomija, Plivanje*

Neki od kolegija se mogu istovremeno predavati. Međutim, želimo li svakoj od studentica omogućiti nesmetano slušanje svih kolegija koje je odabrala, koliko najmanje različitih vremenskih termina predavanja moramo staviti u raspored?

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

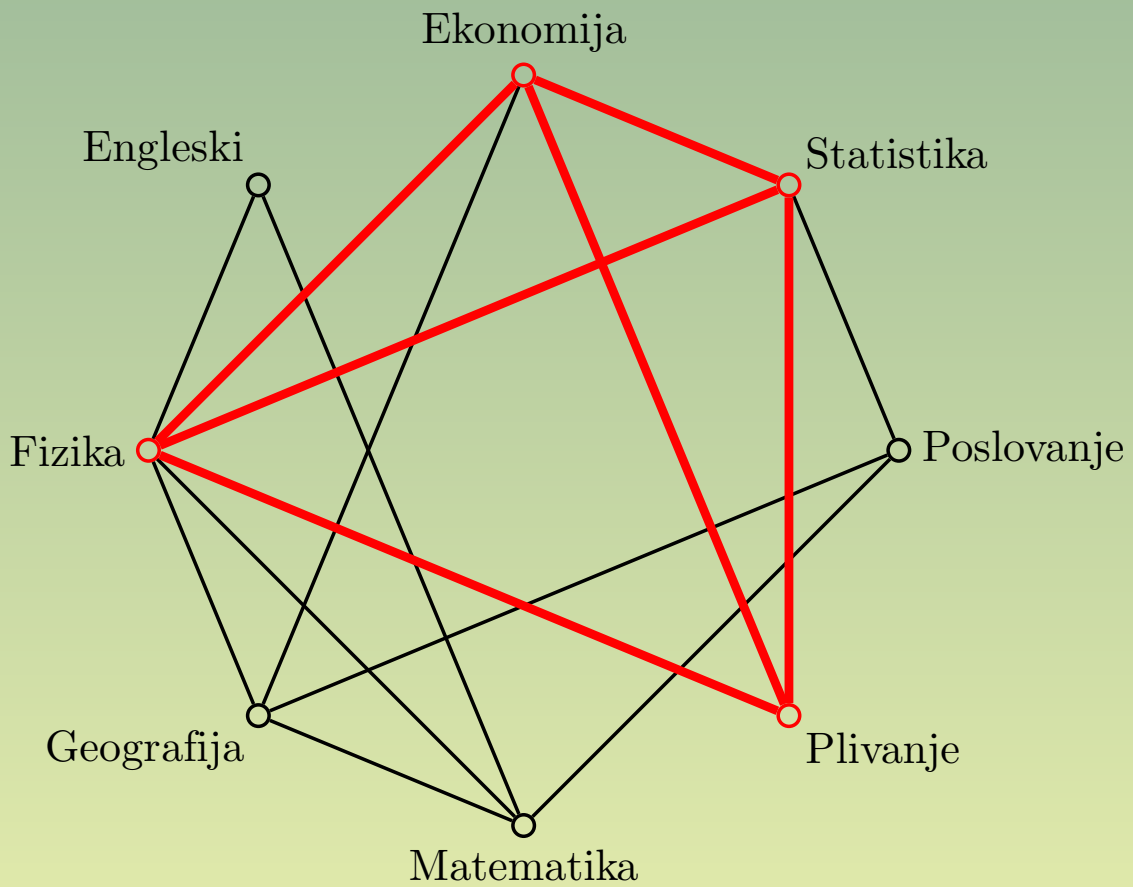
Rješenje.



Formiramo graf G kojemu su vrhovi svi spomenuti kolegiji, a dva vrha su susjedni ako i samo ako postoji barem jedna studentica koja je upisala oba pripadna kolegija. Tada je najmanji broj različitih termina jednak kromatskom broju grafa G.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

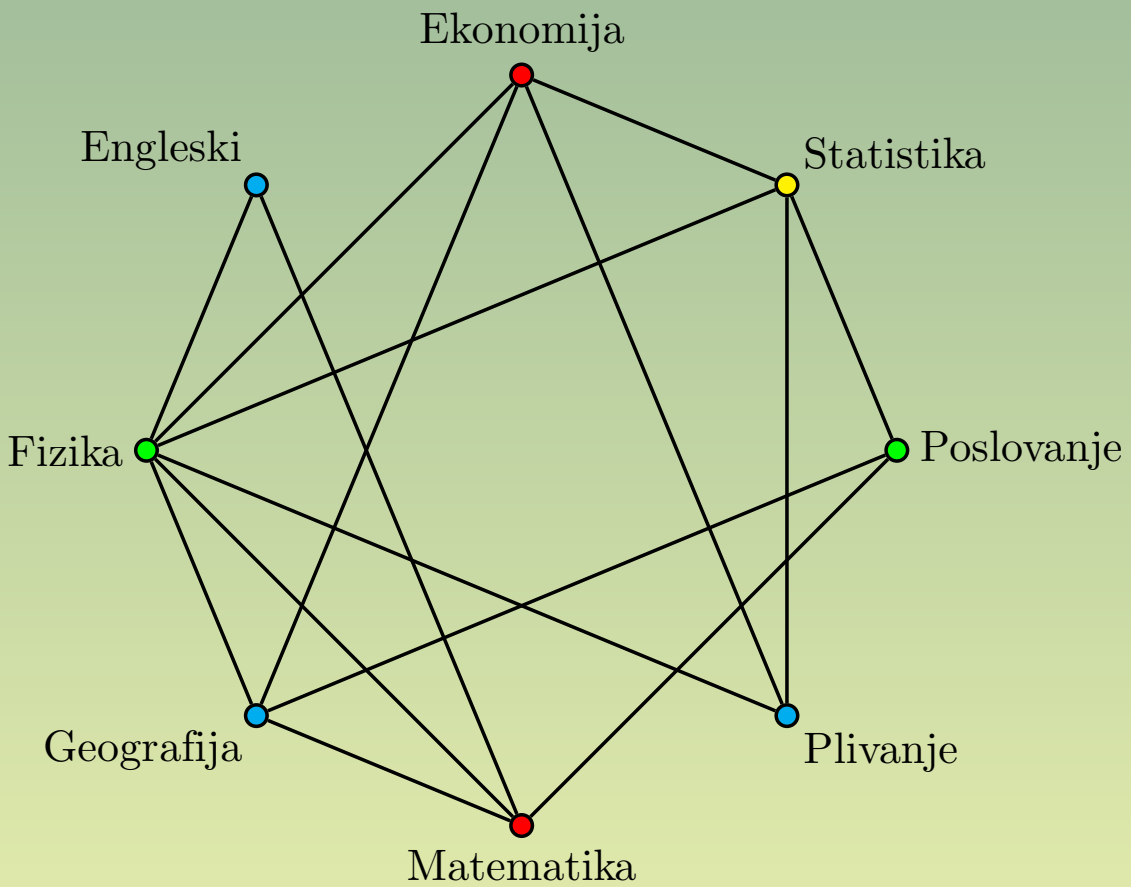
Rješenje.



Graf G ima 4-kliku $\{\text{Ekonomija}, \text{Fizika}, \text{Plivanje}, \text{Statistika}\}$, tj. podgraf induciran s navedenim skupom vrhova koji je izomorfan s K_4. Stoga za bojanje vrhova grafa G trebaju barem 4 boje, tj. $\gamma(G) \geqslant 4$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Rješenje.



Jedno bojanje vrhova grafa G s 4 boje je prikazano na gornjoj slici. Stoga je $\gamma(G) = 4$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Dakle, kako bi svaka studentica mogla slušati sve kolegije koje je upisala, u rasporedu predavanja potrebna su minimalno 4 različita termina. Svaka od boja kojima su obojani vrhovi grafa G predstavlja jedan termin. Na nama je da sami odlučimo koja će boja predstavljati pojedini termin. Isto tako, riječ "termin" može imati u konkretnim situacijama različita značenja. Termin može predstavljati dane u tjednu, datume, mjesece, godine i slično. Nadalje, termin može biti, npr. uređeni par kojemu je prva komponenta dan u tjednu, a druga komponenta vremenski interval tog dana. Takav slučaj imamo kod rasporeda predavanja na fakultetu ili školi. Vidimo da riječ "termin" može biti vrlo apstraktni pojam kojemu možemo dati neko značenje u konkretnoj situaciji.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Na temelju našeg bojanja vrhova dobivamo sljedeći raspored predavanja za pojedine kolegije.

termin	**kolegiji**
1. termin (zelena boja)	Poslovanje, Fizika
2. termin (plava boja)	Engleski, Geografija, Plivanje
3. termin (crvena boja)	Ekonomija, Matematika
4. termin (žuta boja)	Statistika

Na nama je da sami odlučimo koja će boja predstavljati pojedini termin. Nadalje, raspored nije jedinstven i ovisi o načinu bojanja vrhova. Na primjer, kod našeg bojanja mogli smo vrh Matematika obojati žutom bojom umjesto crvenom, pa bi se onda Matematika zajedno sa Statistikom predavala u istom terminu, dok bi se Ekonomija predavala sama u svojem terminu.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Ono što je jedino sigurno u ovom primjeru jest to da se kolegiji Ekonomija, Fizika, Plivanje i Statistika moraju predavati u 4 međusobno različita termina jer oni u grafu G čine jednu 4-kliku. Kakvo god da bojanje vrhova grafa G napravimo s 4 ili više boja, uvijek će se spomenuti kolegiji predavati u međusobno različitim terminima. Ostatak rasporeda ovisi o načinu bojanja preostalih vrhova.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.68.

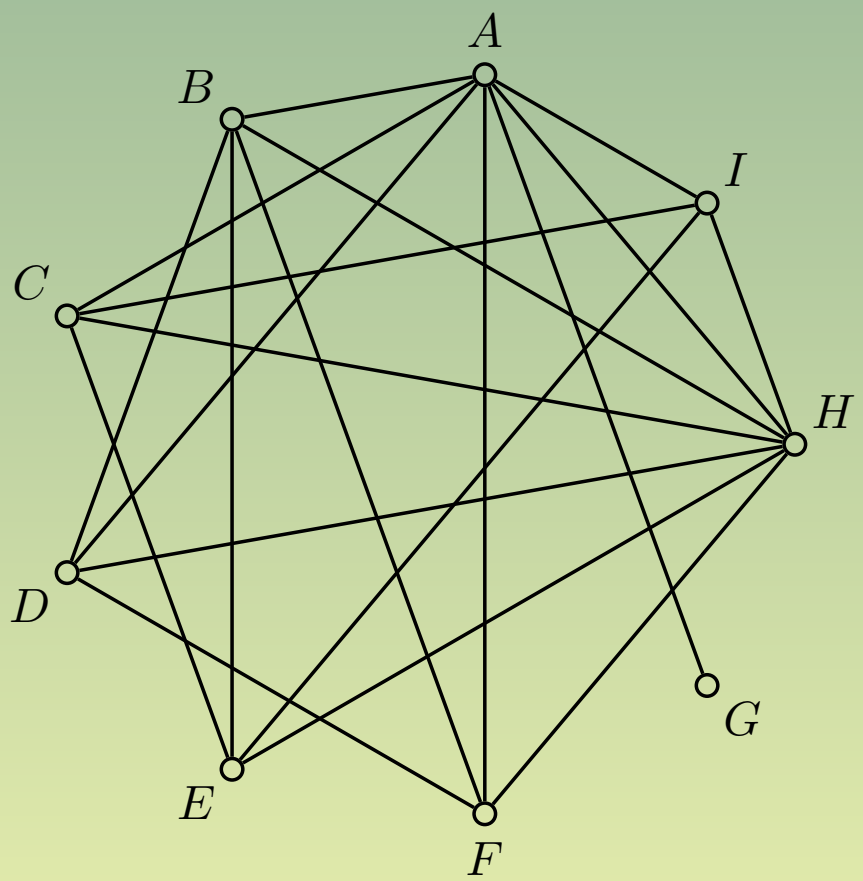
Devet televizijskih postaja smješteno je u devet gradova A, B, C, D, E, F, G, H, I čije su međusobne udaljenosti u kilometrima dane u tablici. Svakoj televizijskoj postaji se treba dodijeliti kanal preko kojeg

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
B	85								
C	137	165							
D	123	39	205						
E	164	132	117	171					
F	105	75	235	92	201				
G	134	191	252	223	298	177			
H	114	77	113	117	54	147	247		
I	132	174	22	213	138	237	245	120	

će emitirati svoj program. Zbog nesmetanog emitiranja programa, televizijskim postajama koje su na udaljenosti manjoj od 150 km treba dodijeliti različite kanale. Televizijske postaje koje su na udaljenosti većoj od 150 km mogu nesmetano emitirati svoje programe preko istog kanala. Koliko je najmanje kanala potrebno kako bi sve televizijske postaje mogle nesmetano emitirati svoje programe?

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

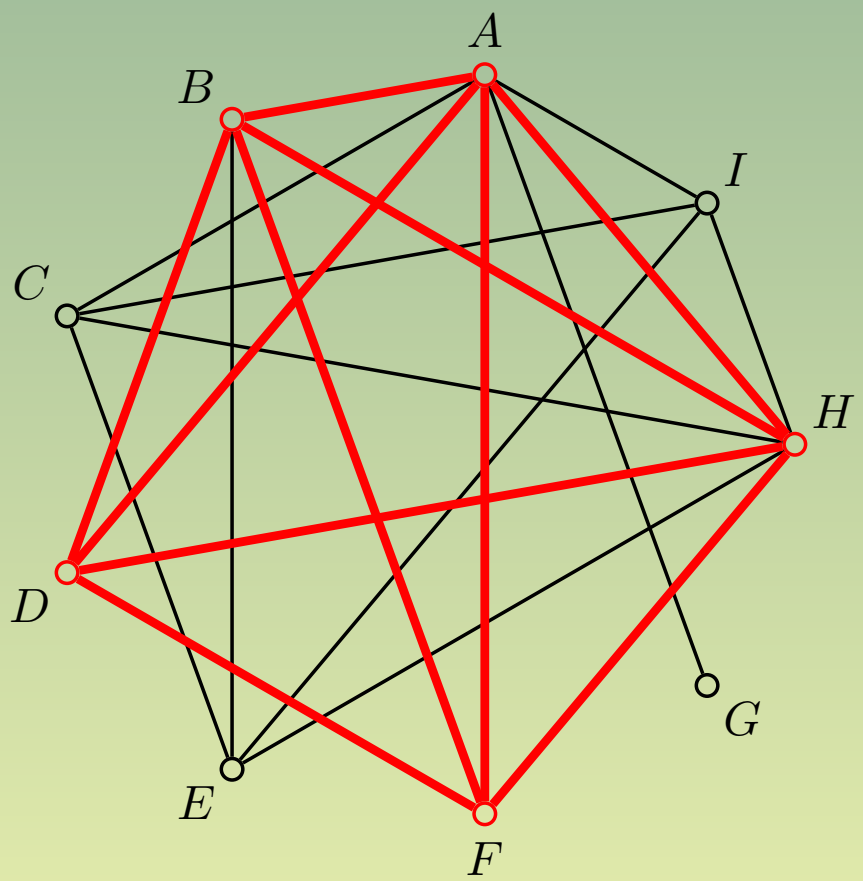
Rješenje.



Formiramo graf G kojemu su vrhovi televizijske postaje, a dva vrha su susjedni ako i samo ako su pripadne televizijske postaje na udaljenosti manjoj od $150\,\text{km}$. Tada je minimalni broj potrebnih kanala jednak kromatskom broju grafa G.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

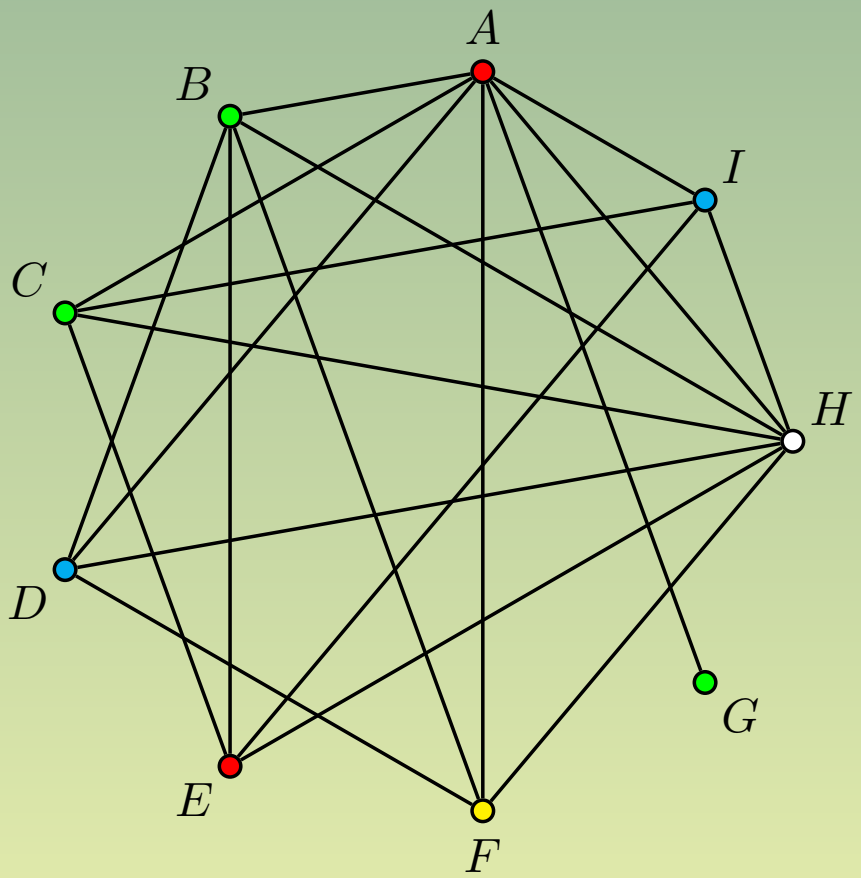
Rješenje.



Graf G ima 5-kliku $\{A, B, D, F, H\}$, tj. podgraf induciran s navedenim skupom vrhova koji je izomorfan s K_5. Stoga za bojanje vrhova grafa G treba barem 5 boja, tj. $\gamma(G) \geqslant 5$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Rješenje.



Jedno bojanje vrhova grafa G s 5 boja je prikazano na gornjoj slici. Stoga je $\gamma(G) = 5$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Dakle, kako bi sve televizijske postaje mogle nesmetano emitirati svoje programe potrebno je minimalno 5 različitih kanala. Svaka od boja kojima su obojani vrhovi grafa G predstavlja jedan kanal. Na nama je da sami odlučimo koja će boja predstavljati pojedini kanal. Na temelju našeg bojanja vrhova dobivamo sljedeće dodjeljivanje kanala televizijskim postajama.

kanal	**televizijske postaje**
1. kanal (bijela boja)	H
2. kanal (zelena boja)	B, C, G
3. kanal (crvena boja)	A, E
4. kanal (žuta boja)	F
5. kanal (plava boja)	D, I

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Dodjeljivanje kanala televizijskim postajama nije jedinstveno i ovisi o načinu bojanja vrhova grafa G. Ono što je jedino sigurno u ovom primjeru jest to da televizijske postaje A, B, D, F i H moraju emitirati svoje programe preko 5 međusobno različitih kanala jer one u grafu G čine jednu 5-kliku. Kakvo god da bojanje vrhova grafa G napravimo s 5 ili više boja, uvijek će spomenute televizijske postaje morati emitirati svoje programe preko 5 međusobno različitih kanala. Dodjeljivanje kanala preostalim televizijskim postajama ovisi o načinu bojanja preostalih vrhova grafa G.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.69.

Četiri pacijenta u, v, z, x trebaju obaviti preglede kod nekih od specijalista a, b, c, d, e, f, g kako je prikazano u tablici susjednosti.

♦	a	b	c	d	e	f	g
u	1	1	0	0	0	0	1
v	0	1	1	0	1	0	0
z	1	0	0	1	0	1	0
x	0	0	0	0	1	1	1

Odredite minimalni broj termina potreban da se obave svi pregledi. Napravite raspored za pacijente tako da znaju u kojem terminu moraju doći pojedinom specijalisti. Napravite raspored za specijaliste tako da znaju u kojem terminu im dolazi pojedini pacijent. Svaki pregled traje pola sata i počinje se s radom u 8:00 h.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Rješenje.

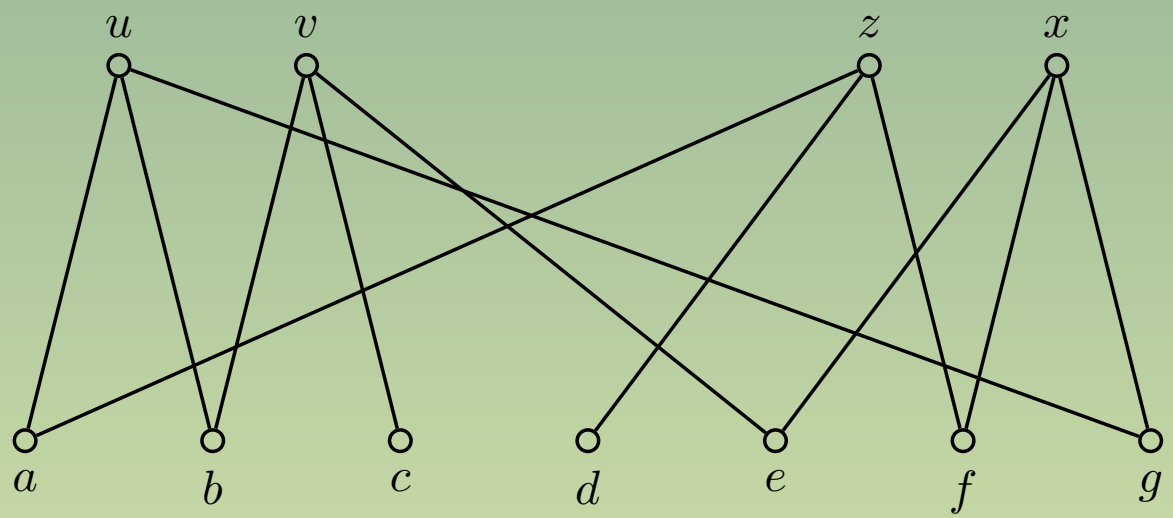
U rješavanju koristimo jednu razumnu prirodnu pretpostavku koja nije posebno naglašena u primjeru. Moguće je obaviti više pregleda u istom terminu uz sljedeća ograničenja:

- Svaki specijalist može u jednom terminu primiti najviše jednog pacijenta.
- Svaki pacijent može u jednom terminu otići na pregled najviše jednom specijalisti.

To su sasvim prirodne pretpostavke pa zbog toga nisu bile posebno naglašene.

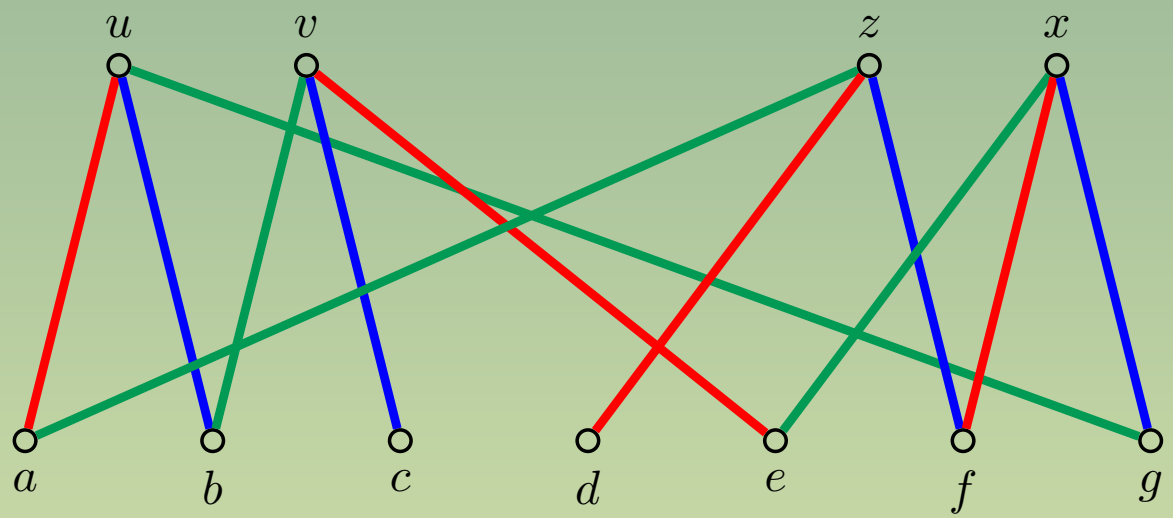
Konstruiramo bipartitni graf G. U jednoj particiji vrhova su pacijenti, a u drugoj specijalisti. Pojedini pacijent u grafu G je susjedan sa svim specijalistima koje treba posjetiti. Minimalni broj termina je tada jednak bridno kromatskom broju grafa G. Svaka boja predstavlja pojedini termin od pola sata.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



U grafu G je $\Delta(G) = 3$. Za svaki bipartitni graf G vrijedi $\gamma'(G) = \Delta(G)$ pa je u našem slučaju $\gamma'(G) = 3$. Dakle, potrebna su minimalno tri termina u kojima je moguće obaviti sve preglede pacijenata.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



U grafu G je $\Delta(G) = 3$. Za svaki bipartitni graf G vrijedi $\gamma'(G) = \Delta(G)$ pa je u našem slučaju $\gamma'(G) = 3$. Dakle, potrebna su minimalno tri termina u kojima je moguće obaviti sve preglede pacijenata.

Na slici je dano jedno bojanje bridova grafa G s minimalnim brojem boja. Svaka boja predstavlja jedan termin.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Kako svaka boja predstavlja jedan termin, moramo svakoj boji pridružiti jedan termin. Pregledi pacijenata počinju od 8:00 h, a svaki pregled traje pola sata. Jedan način pridruživanja termina bojama može biti sljedeći:

- 1. termin: 8:00 h – crvena boja
- 2. termin: 8:30 h – zelena boja
- 3. termin: 9:00 h – plava boja

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Sada možemo napraviti tražene rasporede. Napravimo prvo raspored za pacijente. U tom rasporedu svaki pacijent mora jasno vidjeti u kojem terminu mora ići pojedinom specijalistu. Taj raspored prikazat ćemo u obliku tablice čiji retci odgovaraju terminima, a stupci odgovaraju pacijentima. Pogledamo na grafu pojedinog pacijenta i u njegovom stupcu u tablici na odgovarajuće mjesto napišemo specijalistu kojeg mora posjetiti, na temelju boje brida koji ih spaja na grafu poštujući pritom odabrano pridruživanje termina bojama.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Na temelju odabranog pridruživanja termina bojama i obojanih bridova grafa G dobivamo sljedeći raspored za pacijente.

	u	v	z	x
8:00 h	a	e	d	f
8:30 h	g	b	a	e
9:00 h	b	c	f	g

Na primjer, pacijent u mora otići na pregled specijalistu g u 8:30 h jer je brid koji spaja vrhove u i g u grafu G obojan zelenom bojom, a zelenu boju smo pridružili terminu 8:30 h.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Napravimo još raspored za specijaliste. U tom rasporedu svaki specijalist mora jasno vidjeti u kojem terminu mu dolazi na pregled pojedini pacijent. Taj raspored prikazat ćemo u obliku tablice čiji retci odgovaraju terminima, a stupci odgovaraju specijalistima. Pogledamo na grafu pojedinog specijalista i u njegovom stupcu u tablici na odgovarajuće mjesto napišemo pacijenta koji mu dolazi na pregled, na temelju boje brida koji ih spaja na grafu poštujući pritom odabrano pridruživanje termina bojama.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Na temelju odabranog pridruživanja termina bojama i obojanih bridova grafa G dobivamo sljedeći raspored za specijaliste.

	a	b	c	d	e	f	g
8:00 h	u			z	v	x	
8:30 h	z	v			x		u
9:00 h		u	v			z	x

Na primjer, specijalist f prima pacijenta z u 9:00 h jer je brid koji spaja vrhove f i z u grafu G obojan plavom bojom, a plavu boju smo pridružili terminu 9:00 h. Isto tako uočavamo da specijalist f ima slobodan termin 8:30 h jer u grafu G vrh f nije susjedan s niti jednim zelenim bridom.

Naravno, jasno je da oba rasporeda nisu jedinstvena jer ovise o načinu bojanja bridova grafa G i pridruživanju termina bojama.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.70.

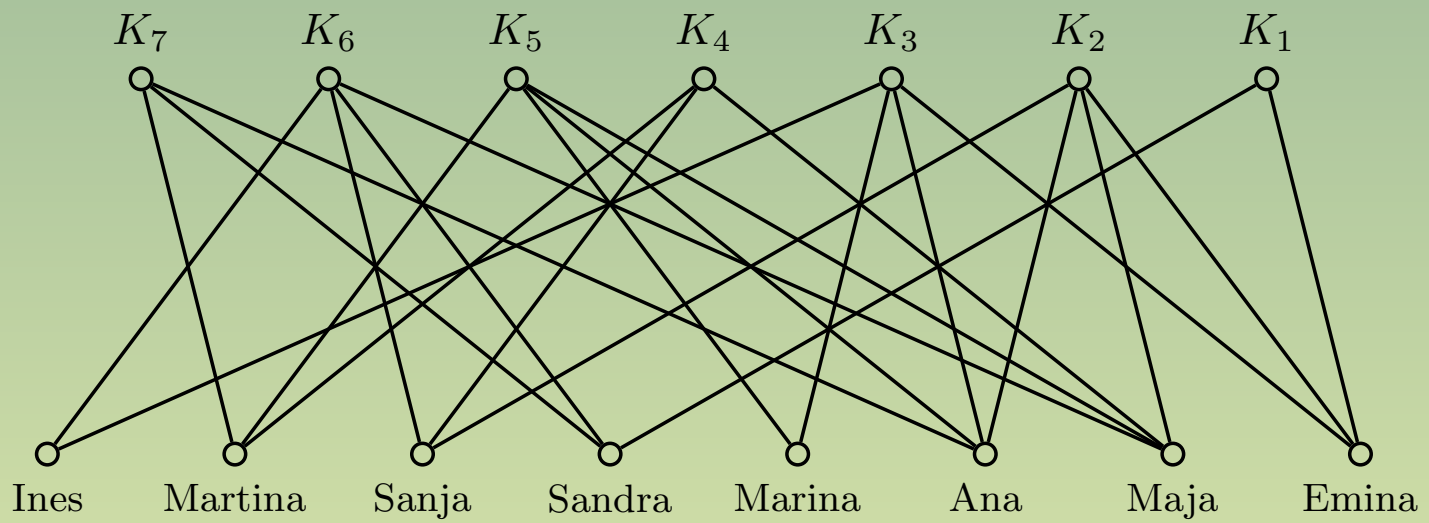
Osam studentica trebaju posuditi određene knjige u knjižnici i svaku knjigu posuđuju na tjedan dana. Pritom mogu posuditi samo jednu knjigu jer gradivo je zahtjevno i teško je dvije knjige proučiti u tjedan dana. U tablici je dani popis studentica kao i knjige koje su potrebne pojedinim studenticama.

studentica	*knjige*
Emina	K_1, K_2, K_3
Maja	K_2, K_4, K_5, K_6
Ana	K_2, K_3, K_5, K_7
Marina	K_3, K_5
Sandra	K_1, K_6, K_7
Sanja	K_2, K_4, K_6
Martina	K_4, K_5, K_7
Ines	K_3, K_6

Nakon koliko će minimalno tjedana sve studentice posuditi sve knjige koje trebaju? Napravite za svaku studenticu jedan takav raspored posuđivanja knjiga po tjednima koji traje minimalni broj tjedana. Pritom pretpostavljamo da knjižnica ima samo po jedan primjerak pojedine knjige. Napravite i raspored posuđivanja po pojedinoj knjizi tako da knjižnica za svaku knjigu može brzo vidjeti kod koga se ona nalazi u pojedinom tjednu.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

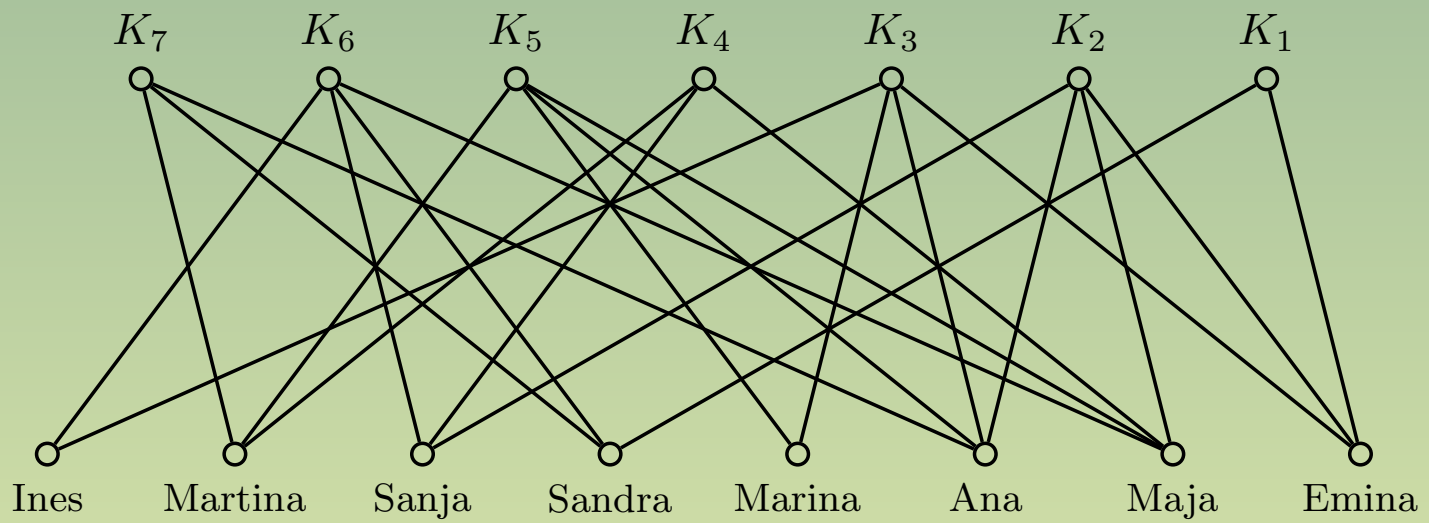
Rješenje.



Konstruiramo bipartitni graf G. U jednoj particiji vrhova su studentice, a u drugoj knjige. Pojedina studentica u grafu G je susjedna sa svim knjigama koje treba posuditi. Minimalni broj tjedana je tada jednak bridno kromatskom broju grafa G. Svaka boja predstavlja pojedini tjedan.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

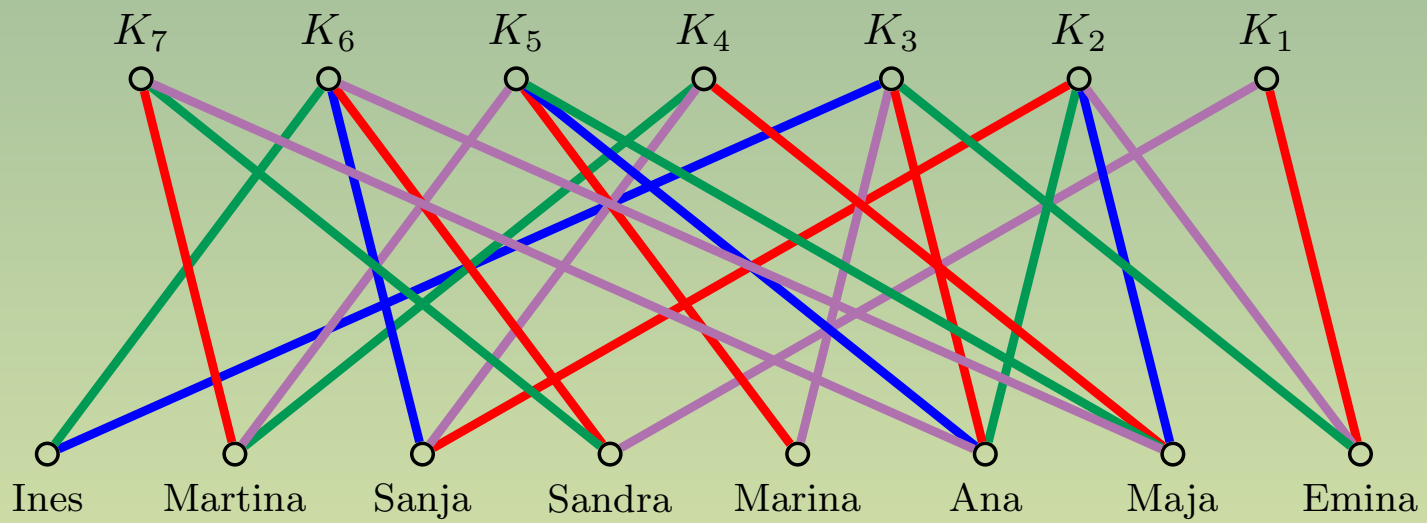
Rješenje.



U grafu G je $\Delta(G) = 4$. Za svaki bipartitni graf G vrijedi $\gamma'(G) = \Delta(G)$ pa je u našem slučaju $\gamma'(G) = 4$. Dakle, nakon minimalno četiri tjedna sve studentice će posuditi sve knjige koje trebaju.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Rješenje.



U grafu G je $\Delta(G) = 4$. Za svaki bipartitni graf G vrijedi $\gamma'(G) = \Delta(G)$ pa je u našem slučaju $\gamma'(G) = 4$. Dakle, nakon minimalno četiri tjedna sve studentice će posuditi sve knjige koje trebaju.

Na slici je dano jedno bojanje bridova grafa G s minimalnim brojem boja. Svaka boja predstavlja pojedini tjedan.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Pridružimo boje tjednima na sljedeći način:

- 1. tjedan – crvena boja
- 2. tjedan – zelena boja
- 3. tjedan – plava boja
- 4. tjedan – ljubičasta boja

Sada možemo napraviti tražene rasporede. Napravimo prvo raspored za studentice. U tom rasporedu svaka studentica mora jasno vidjeti u kojem tjednu posuđuje pojedinu knjigu. Taj raspored prikazat ćemo u obliku tablice čiji retci odgovaraju tjednima, a stupci odgovaraju studenticama. Pogledamo na grafu pojedinu studenticu i u njezinom stupcu u tablici na odgovarajuće mjesto napišemo knjigu koju treba posuditi, na temelju boje brida koji ih spaja na grafu poštujući pritom odabrano pridruživanje tjedna bojama.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Na temelju odabranog pridruživanja tjedna bojama i obojanih bridova grafa G dobivamo sljedeći raspored za studentice.

	Emina	Maja	Ana	Marina	Sandra	Sanja	Martina	Ines
1. tjedan	K_1	K_4	K_3	K_5	K_6	K_2	K_7	
2. tjedan	K_3	K_5	K_2		K_7		K_4	K_6
3. tjedan		K_2	K_5			K_6		K_3
4. tjedan	K_2	K_6	K_7	K_3	K_1	K_4	K_5	

Na primjer, Sandra posuđuje knjigu K_7 u drugom tjednu jer je brid koji spaja vrhove Sandra i K_7 u grafu G obojan zelenom bojom, a zelenu boju smo pridružili drugom tjednu. Isto tako, Sandra u trećem tjednu neće posuditi niti jednu knjigu jer smo trećem tjednu pridružili plavu boju, a u grafu G nema niti jednog plavog brida susjednog s vrhom Sandra.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Napravimo još raspored za knjižnicu. U tom rasporedu mora za svaku knjigu biti jasno vidljivo kod koga se nalazi u pojedinom tjednu. Taj raspored prikazat ćemo u obliku tablice čiji retci odgovaraju tjednima, a stupci odgovaraju knjigama. Pogledamo na grafu pojedinu knjigu i u njezinom stupcu u tablici na odgovarajuće mjesto napišemo studenticu koja posuđuje tu knjigu, na temelju boje brida koji ih spaja na grafu poštujući pritom odabrano pridruživanje termina bojama.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Na temelju odabranog pridruživanja tjedna bojama i obojanih bridova grafa G dobivamo sljedeći raspored za knjižnicu.

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
1. tjedan	Emina	Sanja	Ana	Maja	Marina	Sandra	Martina
2. tjedan		Ana	Emina	Martina	Maja	Ines	Sandra
3. tjedan		Maja	Ines		Ana	Sanja	
4. tjedan	Sandra	Emina	Marina	Sanja	Martina	Maja	Ana

Na primjer, knjiga K_4 je u četvrtom tjednu kod Sanje jer je brid koji spaja vrhove K_4 i Sanja u grafu G obojan ljubičastom bojom, a ljubičastu boju smo pridružili četvrtom tjednu. Isto tako, knjiga K_4 u trećem tjednu nije posuđena niti kod jedne studentice.

Naravno, jasno je da oba rasporeda nisu jedinstvena jer ovise o načinu bojanja bridova grafa G i pridruživanju tjedana bojama.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.71.

Na nekom rukometnom turniru nastupa $2n$ timova. Svatko igra sa svakim po jednu utakmicu. Utakmice se igraju svakog dana. Organizator turnira treba napraviti raspored igranja utakmica tako da turnir traje minimalni broj dana poštujući pritom zahtjev da svaki tim u jednom danu ne smije imati više od jedne utakmice. Koliko najmanje dana mora turnir trajati i kako da organizator turnira napravi jedan raspored igranja utakmica poštujući sve navedene zahtjeve?

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.71.

Na nekom rukometnom turniru nastupa $2n$ timova. Svatko igra sa svakim po jednu utakmicu. Utakmice se igraju svakog dana. Organizator turnira treba napraviti raspored igranja utakmica tako da turnir traje minimalni broj dana poštujući pritom zahtjev da svaki tim u jednom danu ne smije imati više od jedne utakmice. Koliko najmanje dana mora turnir trajati i kako da organizator turnira napravi jedan raspored igranja utakmica poštujući sve navedene zahtjeve?

Rješenje.

Napravimo potpuni graf K_{2n} kojemu vrhovi predstavljaju timove. Tada je minimalni broj dana trajanja turnira jednak bridno kromatskom broju grafa K_{2n}. Prema ◂ propoziciji 10.6 vrijedi $\gamma'(K_{2n}) = 2n - 1$ pa turnir mora trajati minimalno $2n - 1$ dana. Jedan raspored igranja utakmica može se dobiti preko bojanja bridova grafa K_{2n}. Svaka boja predstavlja jedan dan.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Algoritmi za bojanje bridova

Unatoč Vizingovom teoremu koji daje odličnu ogradu za bridno kromatski broj grafa, samo određivanje bridno kromatskog broja ostaje i dalje težak problem. Općenito ne postoji polinomijalni algoritam za rješavanje tog problema. S druge strane, u primjenama nije dovoljno samo poznavanje bridno kromatskog broja grafa, već je potrebno pronaći i neko konkretno bojanje bridova tog grafa s minimalnim brojem boja. Kako je to težak problem, u primjenama se koriste razne heuristike koje daju neko bojanje bridova grafa sa što je moguće manjim brojem boja kojeg onda koristimo kao aproksimacijsko rješenje za bojanje bridova s minimalnim brojem boja. Dobiveno aproksimacijsko rješenje preko heuristike je dovoljno zadovoljavajuće za mnoge probleme iz prakse.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Općenito gledajući, dva su pristupa za određivanje približnog optimalnog bojanja bridova grafa G.

Prvi pristup koristi razne heuristike za bojanje vrhova grafa $L(G)$, tj. linijskog grafa grafa G. Naime, problem bojanja bridova grafa G je identičan problemu bojanja vrhova njegovog linijskog grafa $L(G)$. Dakle, prvi pristup svodi problem bojanja bridova grafa G na problem bojanja vrhova linijskog grafa $L(G)$. Ranije smo obradili razne heuristike za bojanje vrhova grafa G tako da se one kao takve mogu primijeniti na grafu $L(G)$.

Drugi pristup koristi direktne metode koje su specijalizirane za bojanje bridova grafa G i koje se više koriste u praksi. Ovdje ćemo obraditi dvije takve klasične metode:

- naivno pohlepno bojanje bridova grafa G,
- Vizingova metoda bojanja bridova grafa G.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Naivno pohlepno bojanje bridova

ULAZ: graf G bez petlji

IZLAZ: neko bojanje bridova grafa G koje nije nužno i optimalno

1: Uzmi po volji neki raspored bridova $e_1, e_2, \ldots, e_\varepsilon$ grafa G. Nadalje, pretpostavljamo da je skup boja skup $\mathbb{N}$.

2: Bridu e_1 pridruži boju 1. Stavi $i = 2$.

3: Dok je $i \leqslant \varepsilon$ radi sljedeće:
Bridu e_i pridruži najmanju dostupnu boju s kojom nije obojan niti jedan od njegovih eventualnih susjeda $e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}$ i varijablu i povećaj za 1.
Ako se za bojanje brida e_i ne može upotrijebiti niti jedna od već korištenih boja, uzmi sljedeću najmanju boju koja se još nije koristila.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Propozicija 10.8.

Neka je G graf bez petlji. Tada naivna pohlepna metoda koristi najviše $2\Delta(G)-1$ boja za bojanje bridova grafa G.

Dokaz.

Svaki brid e u grafu G ima dva kraja. Kod svakog kraja brid e može biti susjedan s najviše $\Delta(G)-1$ drugih bridova. Dakle, svaki brid e u grafu G je susjedan s najviše $2\big(\Delta(G)-1\big)$ bridova. U najgorem slučaju naivna pohlepna metoda mogla je sve susjedne bridove brida e obojati s međusobno različitim bojama, tj. potrošiti najviše $2\big(\Delta(G)-1\big)$ boja za bojanje susjednih bridova brida e. Stoga bi prilikom bojanja brida e trebalo koristiti novu boju pa bi ukupni broj potrošenih boja u najgorem slučaju bio $2\big(\Delta(G)-1\big)+1$, tj. $2\Delta(G)-1$. ♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Napomena.

Iako je naivna pohlepna metoda za bojanje bridova grafa relativno jednostavna, iz prethodne propozicije slijedi da ona ipak nije u općenitom slučaju toliko loša. Kako je uvijek $\gamma'(G) \geqslant \Delta(G)$, naivna metoda će i kod najgoreg mogućeg bojanja bridova grafa G uvijek koristiti manje od dvostrukog broja potrebnih boja. Objasnite zašto ista takva pohlepna metoda nije općenito tako dobro učinkovita kad se primijeni na bojanje vrhova grafa G?

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

S druge strane, pohlepna metoda bojanja bridova grafa može se implementirati sa složenošću $O(\nu\varepsilon)$. Na taj način pohlepna metoda bojanja bridova postaje jedna efikasna metoda koja u kratkom vremenu uvijek može dati dosta dobro približno bojanje bridova bilo kojeg grafa bez petlji. Stoga se može koristiti u takozvanim *online algoritmima* kod kojih graf na ulazu nije odmah dan u cijelosti, nego se s vremenom daju komadići grafa. Ukratko, online algoritam je algoritam koji je u stanju obrađivati dijelove svojih ulaznih podataka korak po korak onim redoslijedom kako ih i dobiva, bez da na početku ima na raspolaganju te podatke dostupne u cijelosti, niti pak zna kakvi će podaci doći kasnije.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Vizingova metoda bojanja bridova temelji se upravo na dokazu ◂ Vizingovog teorema. Ta metoda će u najgorem slučaju kod bojanja bridova jednostavnog grafa koristiti samo jednu boju više od minimalnog broja potrebnih boja. Općenito, kod bilo kojeg grafa G bez petlji u najgorem slučaju koristit će samo $\mu(G)$ boja više od minimalnog broja potrebnih boja, gdje je $\mu(G)$ multiplicitet grafa G.

Algoritam se doslovno temelji na dokazu Vizingovog teorema u kojemu je opisan postupak rebojanja bridova. Iako smo mi pokazali dokaz samo za jednostavne grafove, potpuno isti dokaz funkcionira za bilo koji graf G bez petlji, samo što umjesto s $\Delta(G)+1$ boja moramo raditi s $\Delta(G)+\mu(G)$ boja. Postupak rebojanja bridova ostaje isti kao i za jednostavne grafove.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Prisjetimo se postupka rebojanja bridova kojeg će obavljati procedura `rebojanje(u,v)`. Neka je općenito $M(w)$ skup svih boja koje nisu upotrijebljene kod vrha w, a $m(w)$ je neka odabrana boja iz $M(w)$. Procedura `rebojanje(u,v)` obavlja bojanje brida uv u slučaju kad je $M(u) \cap M(v) = \emptyset$, tj. ako kod vrhova u i v ne postoji zajednička neiskorištena boja. U tom slučaju konstruiramo konačni niz vrhova

$$v_0 = v,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{i-1},\ v_i,\ \ldots,\ v_l$$

takve da je brid uv_{i-1} obojan bojom b_{i-1} i $m(v_{i-1}) = b_i$. Ako je $b_i \in M(u)$, tada za svaki $1 \leqslant j \leqslant i$ brid uv_{j-1} obojimo bojom $b_j = m(v_{j-1})$ i na taj način završava bojanje brida uv. Ako $b_i \notin M(u)$, tada postoji vrh v_i i brid uv_i obojan bojom b_i. Neka je $m(v_i) = b_{i+1}$ i nastavljamo dalje opisani postupak. To je standardno rebojanje bridova.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Ukoliko se kod nekog vrha v_l dogodi ponavljanje neke ranije boje b_k, tada procedura `rebojanje(u,v)` mora primijeniti modificirano rebojanje bridova. Neka je v_l prvi takav vrh kod kojeg je $M(v_l) \subseteq \{b_1, b_2, \ldots, b_l\}$. Neka je $m(v_l) = b_k$ za neki $1 \leqslant k \leqslant l$. Nadalje, neka je P maksimalni put koji počinje u vrhu v_l s bridom koji je obojan bojom $b_0 = m(u)$, a boje ostalih bridova na putu P se naizmjenično mijenjaju između boja b_0 i b_k.

Ako je put P došao u nekom trenutku do vrha v_k, tada brid uv_k obojamo bojom b_0, a bridovima na putu P napravimo međusobnu zamjenu boja b_0 i b_k. Nakon toga od vrha v_k napravimo standardno rebojanje bridova i na taj način obojamo brid uv.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Ako je put P došao u nekom trenutku do vrha v_{k-1}, tada brid uv_{k-1} obojamo bojom b_0, a bridovima na putu P napravimo međusobnu zamjenu boja b_0 i b_k. Nakon toga od vrha v_{k-1} napravimo standardno rebojanje bridova i na taj način obojamo brid uv.

Ako put P nije uspio doći niti do jednog od vrhova v_{k-1} ili v_k, tada brid uv_l obojamo bojom b_0, a bridovima na putu P napravimo međusobnu zamjenu boja b_0 i b_k. Nakon toga od vrha v_l napravimo standardno rebojanje bridova i na taj način obojamo brid uv.

Nakon što smo opisali postupak rebojanja bridova, možemo u potpunosti opisati algoritam za bojanje bridova grafa baziran na Vizingovoj metodi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Vizingov algoritam za bojanje bridova

ULAZ: graf $G = (V, E)$ bez petlji s multiplicitetom $\mu(G)$
IZLAZ: neko bojanje bridova grafa G s najviše $\Delta(G) + \mu(G)$ boja

1: Ako je $\Delta(G) \leqslant 2$, oboji bridove grafa G naivnom pohlepnom metodom.

2: U protivnom, ako je $\Delta(G) > 2$, stavi $q := \Delta(G) + \mu(G)$.

3: Za svaki brid $e \in E$ radi sljedeće:

Ako za brid $e = uv$ vrijedi $M(u) \cap M(v) \neq \emptyset$, tada brid e oboji nekom od boja iz $M(u) \cap M(v)$.

U protivnom, ako je $M(u) \cap M(v) = \emptyset$, primijeni na vrhove u i v proceduru `rebojanje(u,v)` koja će brid e obojati nekom od q dostupnih boja.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Sparivanje u grafu

Sparivanje u grafu $G = (V, E)$ je svaki podskup $M \subseteq E$ takav da ne sadrži petlje i nikoja dva brida iz M nisu susjedni u G.

Ako brid $e = \{u, v\}$ pripada sparivanju M, tada kažemo da su vrhovi u i v **spareni** u M.

Sparivanje M **zasićuje** vrh v, a vrh v je M-**zasićen** ako postoji brid iz M koji je susjedan s vrhom v. Ukoliko ne postoji brid iz M susjedan s vrhom v, tada kažemo da je vrh v M-**nezasićen**.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Za sparivanje M' u grafu G kažemo da je **maksimalno** ako nije sadržano u niti jednom drugom sparivanju grafa G, tj. $M' \not\subset M$ za svako sparivanje M u G. Drugim riječima, M' je maksimalno sparivanje u G ako mu više ne možemo dodati niti jedan od neiskorištenih bridova grafa G kako bismo dobili novo sparivanje s većim brojem bridova.

Za sparivanje M' u grafu G kažemo da je **najveće** ako vrijedi $k(M') \geqslant k(M)$ za svako sparivanje M u G. Drugim riječima, najveće sparivanje u grafu G je svako ono sparivanje M' koje ima najveći mogući broj bridova, tj. sva ostala sparivanja u grafu G imaju manje ili jednako bridova od sparivanja M'.

Kažemo da je M' **savršeno sparivanje** u grafu G ako je svaki njegov vrh M'-zasićen.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Iz uvedenih definicija lagano slijede sljedeće dvije tvrdnje.

Propozicija 10.9.

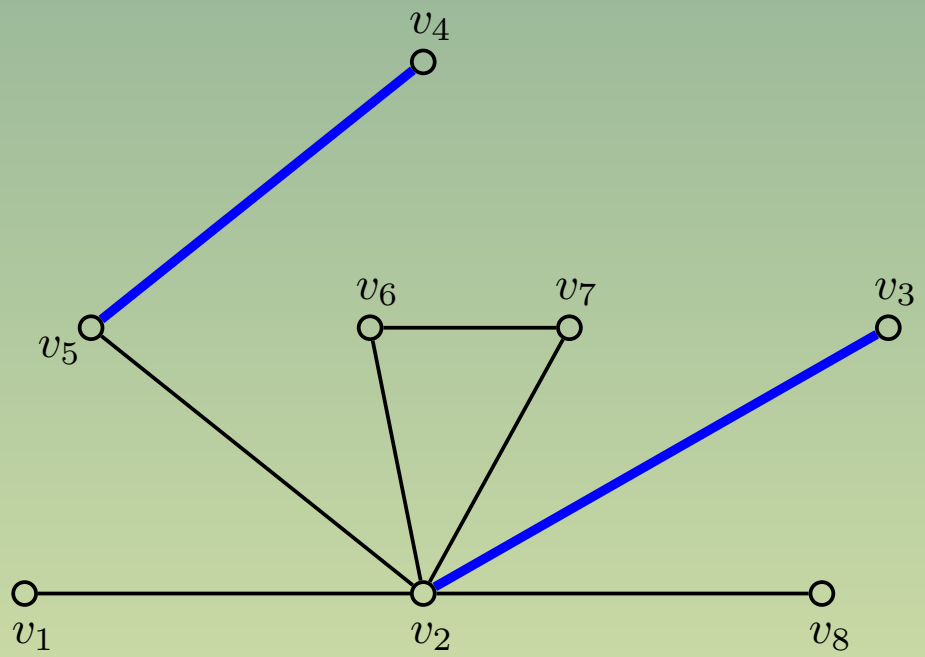
Ako je M najveće sparivanje u grafu G, tada je M maksimalno sparivanje u grafu G.

Propozicija 10.10.

Ako je M savršeno sparivanje u grafu G, tada je M najveće sparivanje u grafu G.

Pazite, obrati gornjih tvrdnji ne vrijede. Pogledajmo nekoliko primjera.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Zadano je sparivanje $M = \{\{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}\}$.

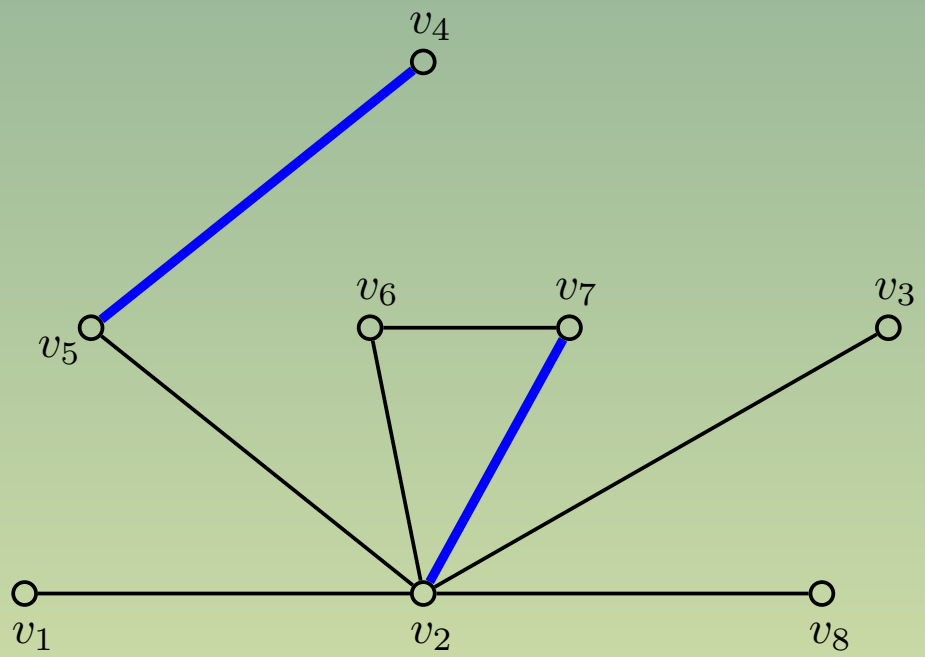
Vrhovi v_2, v_3, v_4, v_5 su M-zasićeni, a vrhovi v_1, v_6, v_7, v_8 su M-nezasićeni.

M nije savršeno sparivanje jer nisu svi vrhovi M-zasićeni.

M nije maksimalno sparivanje zato jer postoji sparivanje $M' = M \cup \{\{v_6, v_7\}\}$ za koje je $M \subset M'$.

M nije najveće sparivanje zato jer postoji sparivanje $M' = M \cup \{\{v_6, v_7\}\}$ za koje je $k(M') > k(M)$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Zadano je sparivanje $M = \{\{v_2, v_7\}, \{v_4, v_5\}\}$.

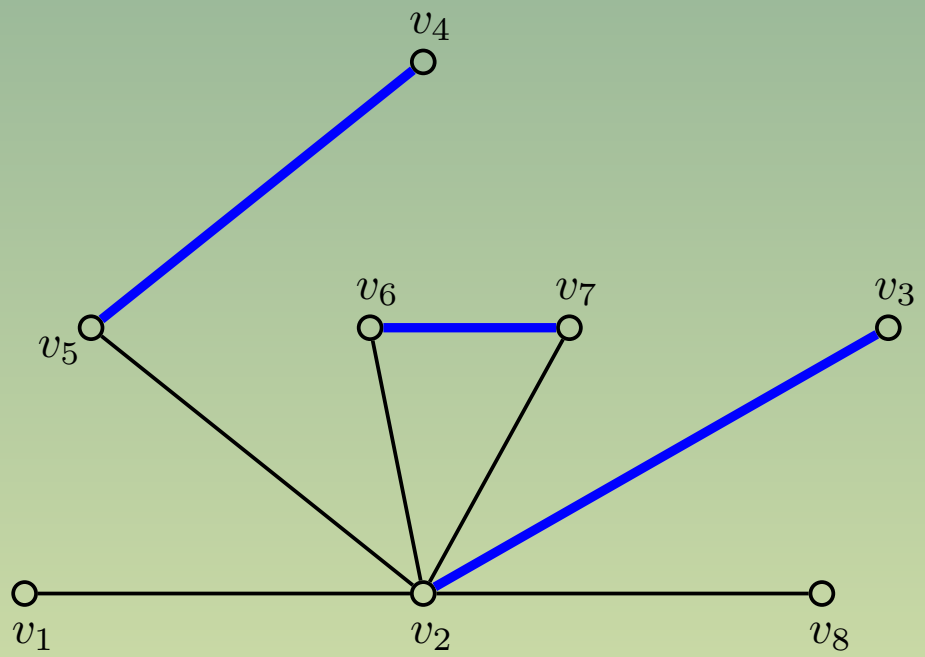
Vrhovi v_2, v_7, v_4, v_5 su M-zasićeni, a vrhovi v_1, v_3, v_6, v_8 su M-nezasićeni.

M nije savršeno sparivanje jer nisu svi vrhovi M-zasićeni.

M je maksimalno sparivanje zato jer ne postoji sparivanje M' za koje bi bilo $M \subset M'$.

M nije najveće sparivanje zato jer postoji sparivanje $M' = \{\{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \{v_6, v_7\}\}$ za koje je $k(M') > k(M)$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Zadano je sparivanje $M = \{\{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \{v_6, v_7\}\}$.

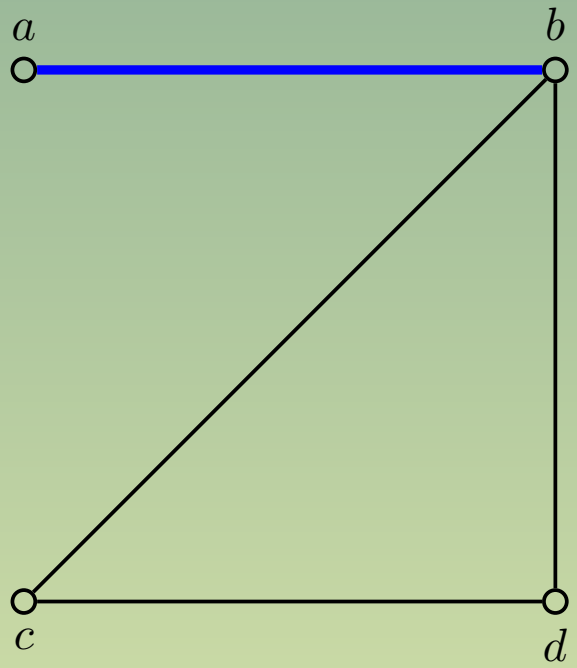
Vrhovi $v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ su M-zasićeni, a vrhovi v_1, v_8 su M-nezasićeni.

M nije savršeno sparivanje jer nisu svi vrhovi M-zasićeni.

M je maksimalno sparivanje zato jer ne postoji sparivanje M' za koje bi bilo $M \subset M'$.

M je najveće sparivanje zato jer ne postoji sparivanje M' za koje bi bilo $k(M') > k(M)$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Zadano je sparivanje $M = \{\{a, b\}\}$.

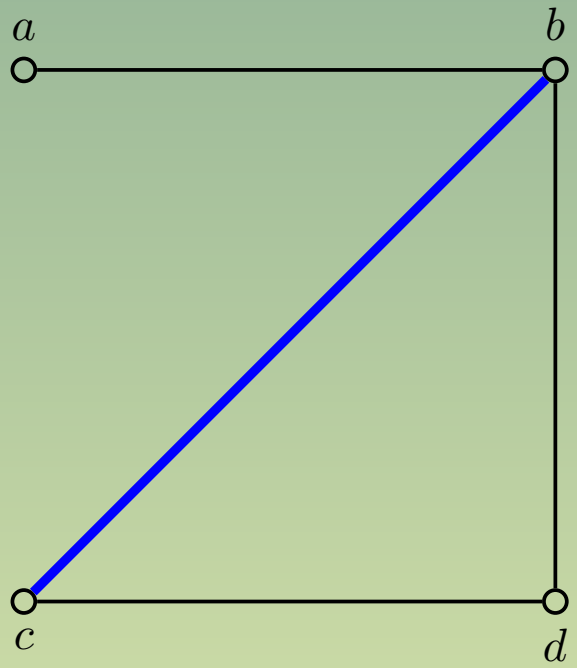
Vrhovi a, b su M-zasićeni, a vrhovi c, d su M-nezasićeni.

M nije savršeno sparivanje jer nisu svi vrhovi M-zasićeni.

M nije maksimalno sparivanje zato jer postoji sparivanje $M' = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ za koje je $M \subset M'$.

M nije najveće sparivanje zato jer postoji sparivanje $M' = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ za koje je $k(M') > k(M)$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Zadano je sparivanje $M = \{\{b, c\}\}$.

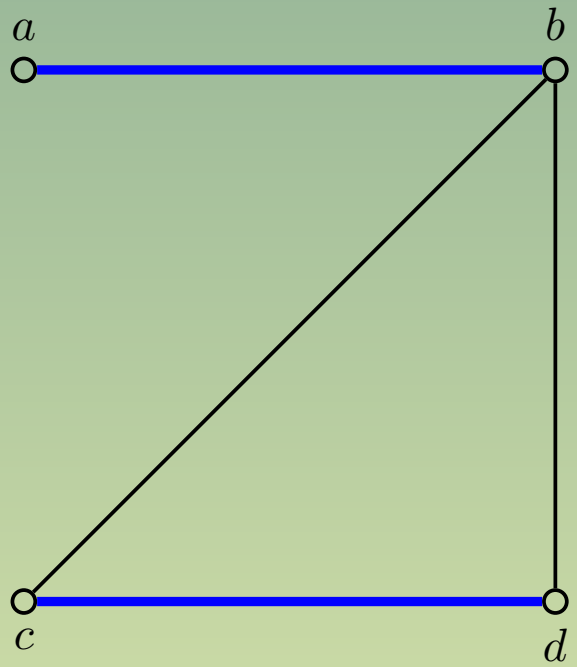
Vrhovi b, c su M-zasićeni, a vrhovi a, d su M-nezasićeni.

M nije savršeno sparivanje jer nisu svi vrhovi M-zasićeni.

M je maksimalno sparivanje zato jer ne postoji sparivanje M' za koje bi bilo $M \subset M'$.

M nije najveće sparivanje zato jer postoji sparivanje $M' = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ za koje je $k(M') > k(M)$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Zadano je sparivanje $M = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$.

Svi vrhovi su M-zasićeni.

M je savršeno sparivanje jer su svi vrhovi M-zasićeni.

Kako je M savršeno sparivanje, tada je ono ujedno i maksimalno i najveće sparivanje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Pohlepnom metodom lagano se pronađe neko maksimalno sparivanje M u zadanom grafu $G = (V, E)$.

Algoritam za maksimalno sparivanje

ULAZ: Graf $G = (V, E)$
IZLAZ: Neko maksimalno sparivanje M u grafu G

1: Stavi $M := \emptyset$.

2: Sve bridove grafa G koji nisu petlje spremi u skup E_1.

3: Dok je $E_1 \neq \emptyset$ radi sljedeće:

Odaberi neki brid $e \in E_1$.

$M := M \cup \{e\}$

Iz skupa E_1 ukloni brid e i sve ostale bridove koji su s njim susjedni.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Ostaje još problem kako u zadanom grafu pronaći neko najveće sparivanje. Da bismo došli do algoritma koji rješava taj problem, treba znati nešto više teorije koju u nastavku obrađujemo.

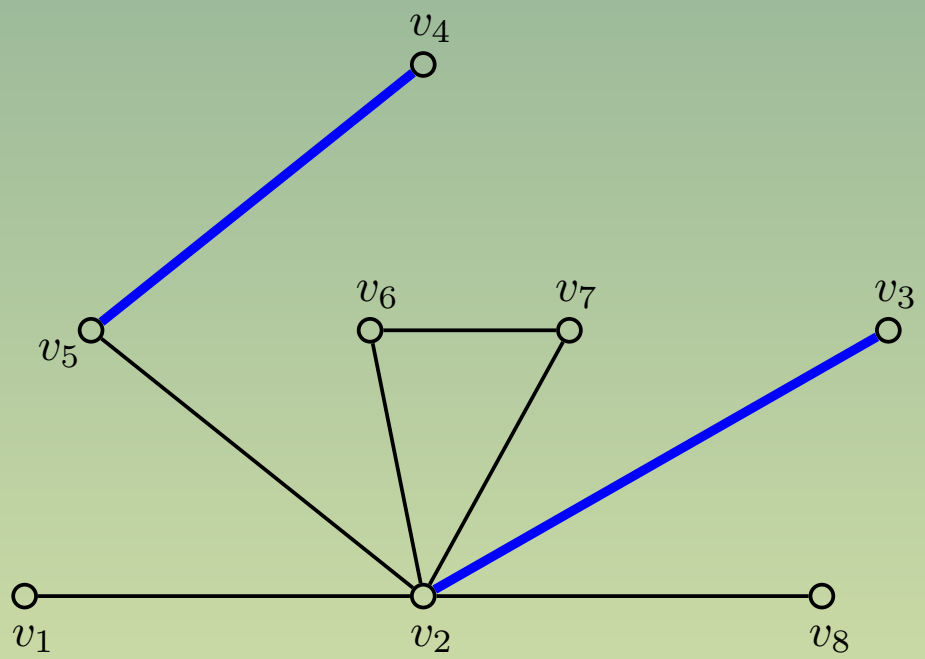
Neka je M sparivanje u grafu $G = (V, E)$. M-**alternirajući put** u G je put čiji bridovi alterniraju u $E \setminus M$ i M. M-**uvećani put** je M-alternirajući put čiji su početak i kraj M-nezasićeni.

Ako bridove iz M nazovemo tamnim bridovima, a bridove iz $E \setminus M$ svijetlim bridovima, tada M-uvećani put mora biti oblika

svijetli, tamni, svijetli, tamni, . . . , svijetli

ali ne mora svaki takav put biti M-uvećani put jer je moguće da su njegovi krajevi M-zasićeni preko nekih drugih bridova koji nisu na tom putu.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Zadano je sparivanje $M = \{\{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}\}$.

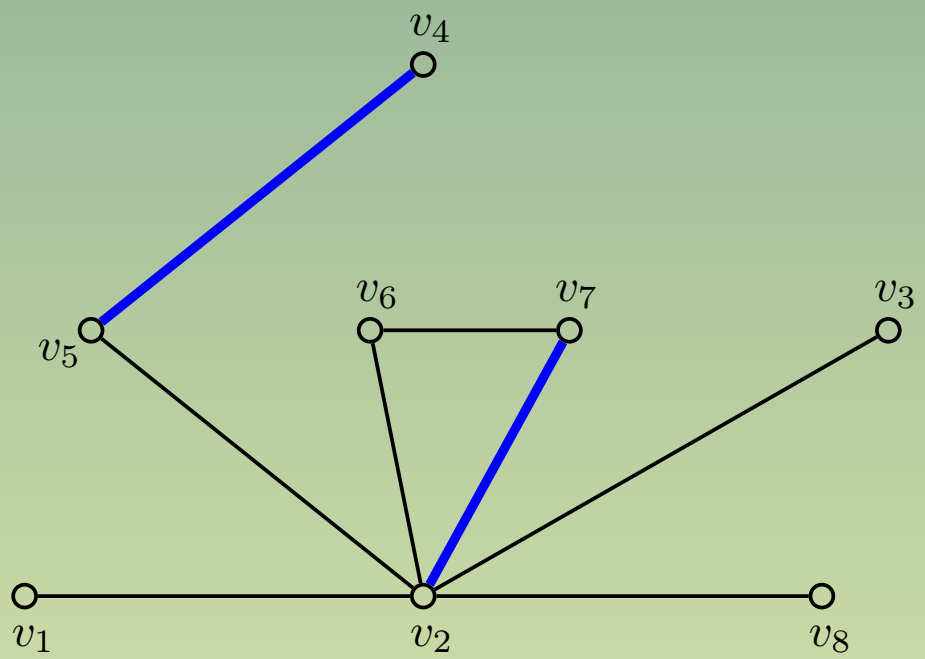
Nekoliko primjera M-alternirajućih putova koji nisu M-uvećani:

$$v_1v_2v_3, \quad v_7v_2v_3, \quad v_1v_2, \quad v_5v_4, \quad v_4v_5v_2v_3$$

Jedini M-uvećani putovi su v_6v_7 i v_7v_6.

M-alternirajući put v_1v_2 nije M-uvećani zato jer je njegov kraj v_2 M-zasićen.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Zadano je sparivanje $M = \{\{v_2, v_7\}, \{v_4, v_5\}\}$.

Nekoliko primjera M-alternirajućih putova koji nisu M-uvećani:

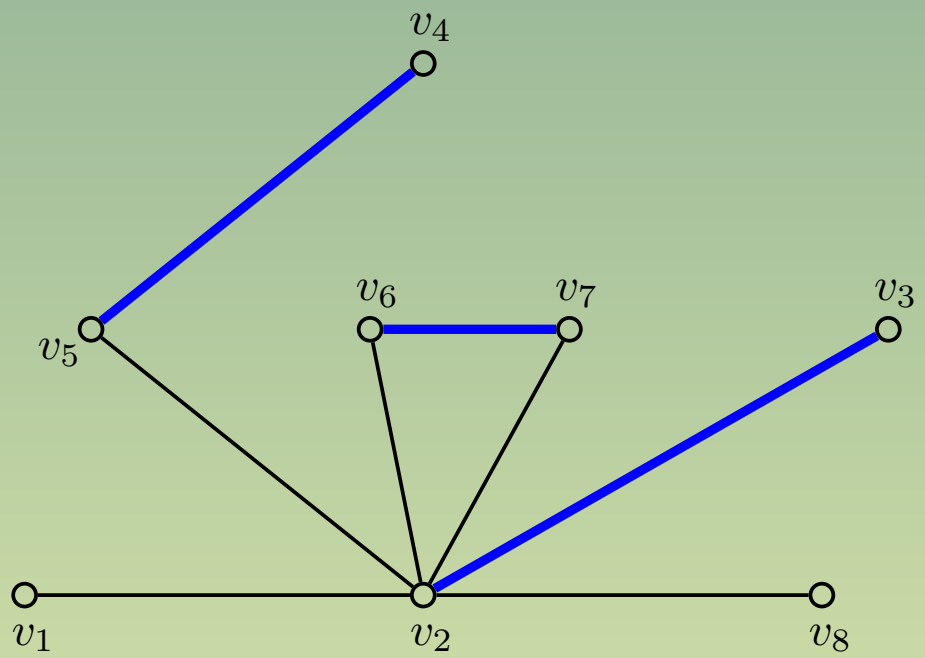
$$v_1v_2, \quad v_1v_2v_7, \quad v_4v_5v_2v_7v_6, \quad v_5v_2v_7v_6$$

Nekoliko primjera M-uvećanih putova:

$$v_1v_2v_7v_6, \quad v_6v_7v_2v_8, \quad v_3v_2v_7v_6$$

M-alternirajući put $v_5v_2v_7v_6$ nije M-uvećani zato jer je njegov početak v_5 M-zasićen.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Zadano je sparivanje $M = \{\{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \{v_6, v_7\}\}$.

Nekoliko primjera M-alternirajućih putova koji nisu M-uvećani:

$$v_1v_2, \quad v_1v_2v_3, \quad v_4v_5v_2v_3, \quad v_7v_6, \quad v_6v_7v_2$$

Uvjerite se da nema M-uvećanih putova i zbog toga je M jedno najveće sparivanje u zadanom grafu. Naime, v_1 i v_8 su jedini M-nezasićeni vrhovi, ali između njih očito ne postoji niti jedan M-alternirajući put.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Teorem 10.21 (Berge, 1957.).

Sparivanje M u grafu G je najveće ako i samo ako G ne sadrži M-uvećani put.

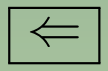
Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Neka je M najveće sparivanje u G i pretpostavimo da G sadrži M-uvećani put P. Tada zamjenom $svijetli \leftrightarrow tamni$ na putu P dobivamo sparivanje M' u G za koje je $k(M') = k(M) + 1$. Preciznije, zapravo je $M' = M \triangle E(P)$. Iz toga slijedi da M nije najveće sparivanje, što je kontradikcija s pretpostavkom. Dakle, graf G zaista ne sadrži M-uvećani put.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Neka graf G ne sadrži M-uvećani put i pretpostavimo da M ipak nije najveće sparivanje u G. Neka je M' najveće sparivanje u G. Tada je $k(M') > k(M)$. Promotrimo inducirani podgraf $H = G\big[M \triangle M'\big]$. Za stupanj svakog vrha $v \in V(H)$ vrijedi $1 \leqslant d_H(v) \leqslant 2$ jer je v susjedan najviše s jednim bridom iz M i jednim bridom iz M'. Stoga je svaka komponenta povezanosti od H ili parni ciklus s bridovima koji alterniraju u M i M' ili put s bridovima koji alterniraju u M i M'. Kako je po pretpostavci $k(M') > k(M)$, slijedi da H sadrži više bridova iz M', nego iz M. Stoga neka komponenta povezanosti od H mora biti put P koji mora početi i završiti s bridovima iz M'. Kraj i početak puta P koji su M'-zasićeni u H su M-nezasićeni u G. Stoga je P jedan M-uvećani put u G, što je kontradikcija s pretpostavkom da u G nema M-uvećanih putova. Dakle, M je zaista najveće sparivanje.



Dokaz Bergeovog teorema je konstruktivne prirode i odmah nam daje jedan općeniti algoritam za traženje najvećeg sparivanja u grafu. Najveće sparivanje u grafu ne mora biti jedinstveno.

Općeniti algoritam za najveće sparivanje

ULAZ: Graf $G = (V, E)$
IZLAZ: Neko najveće sparivanje M u grafu G

1: Stavi $M := \emptyset$.

2: Sve dok postoji M-uvećani put P:
$M := M \triangle E(P)$

Za gornji algoritam trebamo neki algoritam za pronalaženje M-uvećanog puta. Taj algoritam se zapravo temelji na maloj modifikaciji DFS ili BFS algoritma i dobro funkcionira za bipartitne grafove, dok ga za općenite grafove treba još dodatno modificirati. Sama praktična implementacija se provodi preko alternirajućih stabala.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Sparivanje u bipartitnom grafu

Neka je G bipartitni graf s biparticijom (X, Y) i neka je $T \subseteq X$. Skup susjeda od T u grafu G je skup $S(T)$ svih vrhova iz Y koji su susjedni s barem jednim vrhom iz T.

Teorem 10.22 (Hall, 1935.).

Neka je G bipartitni graf s biparticijom (X, Y). Tada G sadrži sparivanje koje zasićuje svaki vrh u X ako i samo ako je $k(S(T)) \geqslant k(T)$ za svaki $T \subseteq X$.

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$

Neka je M sparivanje u G koje zasićuje svaki vrh u X i neka je $T \subseteq X$ proizvoljan. Kako su vrhovi iz T spareni bridovima iz M s različitim vrhovima iz $S(T)$, očito je tada $k(S(T)) \geqslant k(T)$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

$\Leftarrow$

Neka je G bipartitni graf s biparticijom (X, Y) za koji vrijedi $k(S(T)) \geqslant k(T)$ za svaki $T \subseteq X$. Pretpostavimo da u G ipak ne postoji sparivanje koje zasićuje sve vrhove iz X. Neka je M' najveće sparivanje u G. Prema pretpostavci, M' ne zasićuje sve vrhove iz X pa postoji M'-nezasićeni vrh $v \in X$. Neka je R skup svih vrhova koji su povezani s vrhom v M'-alternirajućim putovima. Kako je M' najveće sparivanje, tada prema Bergeovom teoremu slijedi da je vrh v jedini M'-nezasićeni vrh u R. Neka je $A = R \cap X$ i $B = R \cap Y$. Vrhovi iz $A \setminus \{v\}$ su preko M' spareni s vrhovima u B. Stoga je $k(B) = k(A) - 1$. Nadalje, $S(A) = B$ jer je svaki vrh iz $S(A)$ spojen sa v nekim M'-alternirajućim putom. No, tada je $k(S(A)) < k(A)$, što je kontradikcija s početnom pretpostavkom. Dakle, u G postoji sparivanje koje zasićuje sve vrhove iz X. $\heartsuit$

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Korolar 10.10.

Ako je G neprazni s-regularni bipartitni graf, tada G ima savršeno sparivanje M.

Dokaz.

Neka je G s-regularni bipartitni graf s biparticijom (X, Y). Kako je G s-regularni, tada je $s \cdot k(X) = s \cdot k(Y)$ pa zbog $k > 0$ slijedi da je $k(X) = k(Y)$. Neka je $T \subseteq X$ proizvoljni podskup. Neka je E_1 skup svih bridova susjednih s vrhovima iz T, a E_2 skup svih bridova susjednih s vrhovima iz $S(T)$. Iz definicije od $S(T)$ slijedi da je $E_1 \subseteq E_2$. Zbog toga je

$$s \cdot k(S(T)) = k(E_2) \geqslant k(E_1) = s \cdot k(T)$$

iz čega slijedi $k(S(T)) \geqslant k(T)$. Prema Hallovom teoremu G ima sparivanje M koje zasićuje sve vrhove iz X. Zbog $k(X) = k(Y)$ slijedi da je M savršeno sparivanje. ♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Životna interpretacija prethodnog korolara glasi

Teorem 10.23 (Teorem o ženidbi – najvažniji teorem ☻).

Svaka djevojka u selu pozna točno k mladića, a svaki mladić pozna točno k djevojaka. Tada se svaka djevojka može udati za mladića kojeg pozna i svaki mladić može oženiti djevojku koju pozna. Drugim riječima, djevojke i mladići se mogu savršeno spariti. ☺



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Propozicija 10.11.

Neka je G neprazni bipartitni graf s biparticijom (X, Y) sa svojstvom da je G s-regularni na X i l-regularni na Y. Tada G ima sparivanje koje zasićuje X ili Y.

Dokaz.

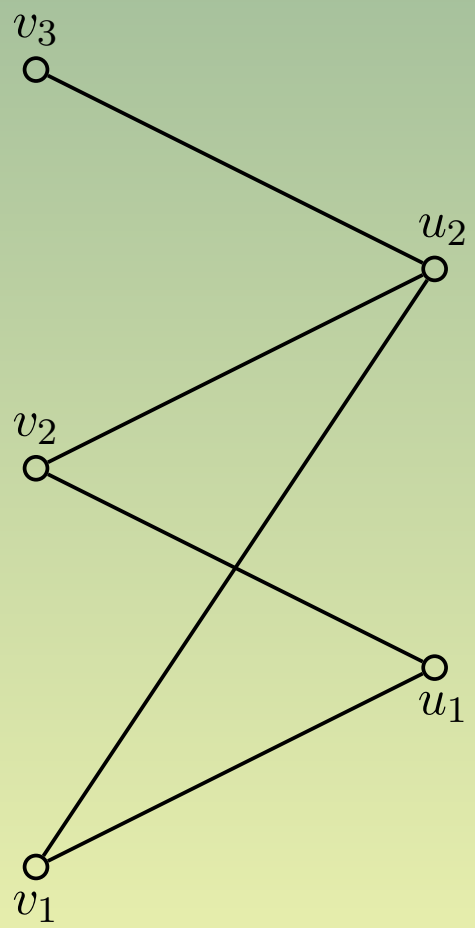
Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $l \leqslant s$. Neka je $T \subseteq X$ proizvoljni podskup. Neka je E_1 skup svih bridova susjednih s vrhovima iz T, a E_2 skup svih bridova susjednih s vrhovima iz $S(T)$. Iz definicije od $S(T)$ slijedi da je $E_1 \subseteq E_2$. Zbog toga je

$$l \cdot k(S(T)) = k(E_2) \geqslant k(E_1) = s \cdot k(T) \geqslant l \cdot k(T)$$

iz čega slijedi $k(S(T)) \geqslant k(T)$. Prema Hallovom teoremu G ima sparivanje M koje zasićuje sve vrhove iz X. ♡

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

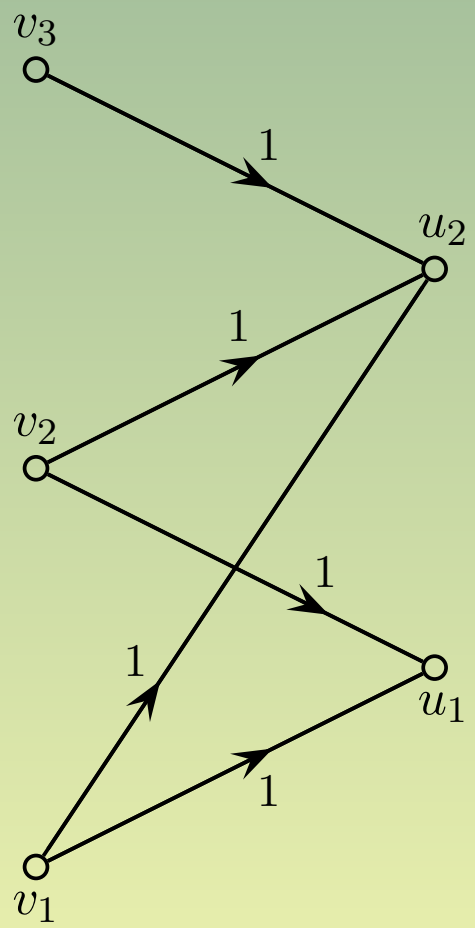
Ford-Fulkersonov algoritam i sparivanje



Ford-Fulkersonov algoritam možemo primijeniti na traženje najvećeg sparivanja u bipartitnom grafu na sljedeći način.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

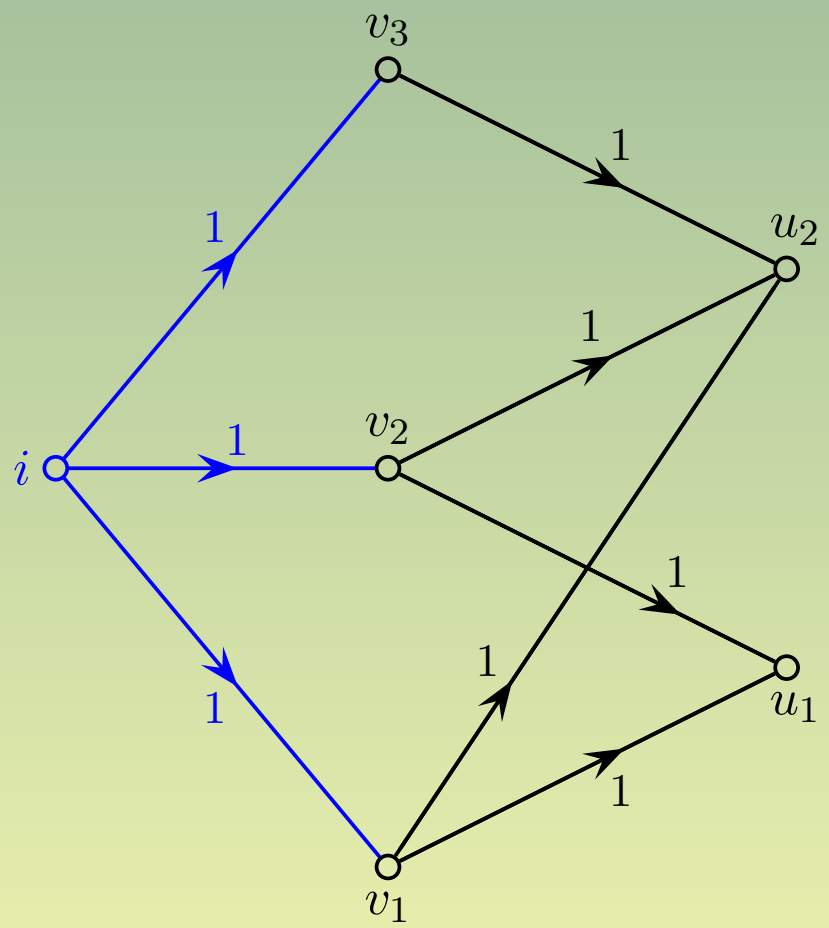
Ford-Fulkersonov algoritam i sparivanje



Bridove bipartitnog grafa orijentiramo tako da svi imaju početak u jednoj biparticiji, a kraj u drugoj biparticiji vrhova. Svakom dobivenom luku pridružimo kapacitet 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

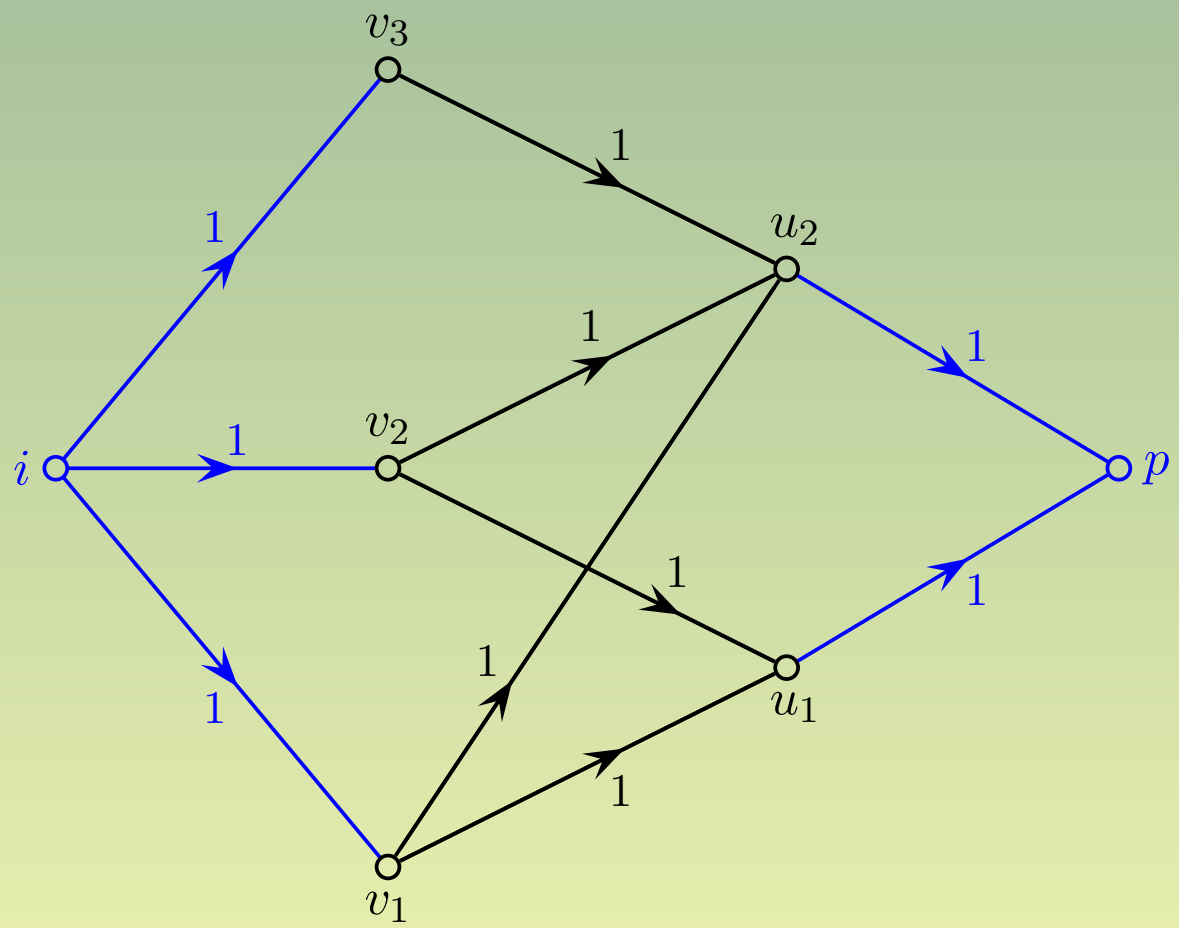
Ford-Fulkersonov algoritam i sparivanje



Dodamo novi vrh i koji će biti izvor i spojimo ga lukovima sa svim vrhovima iz prve biparticije. Svakom takvom luku također pridružimo kapacitet 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

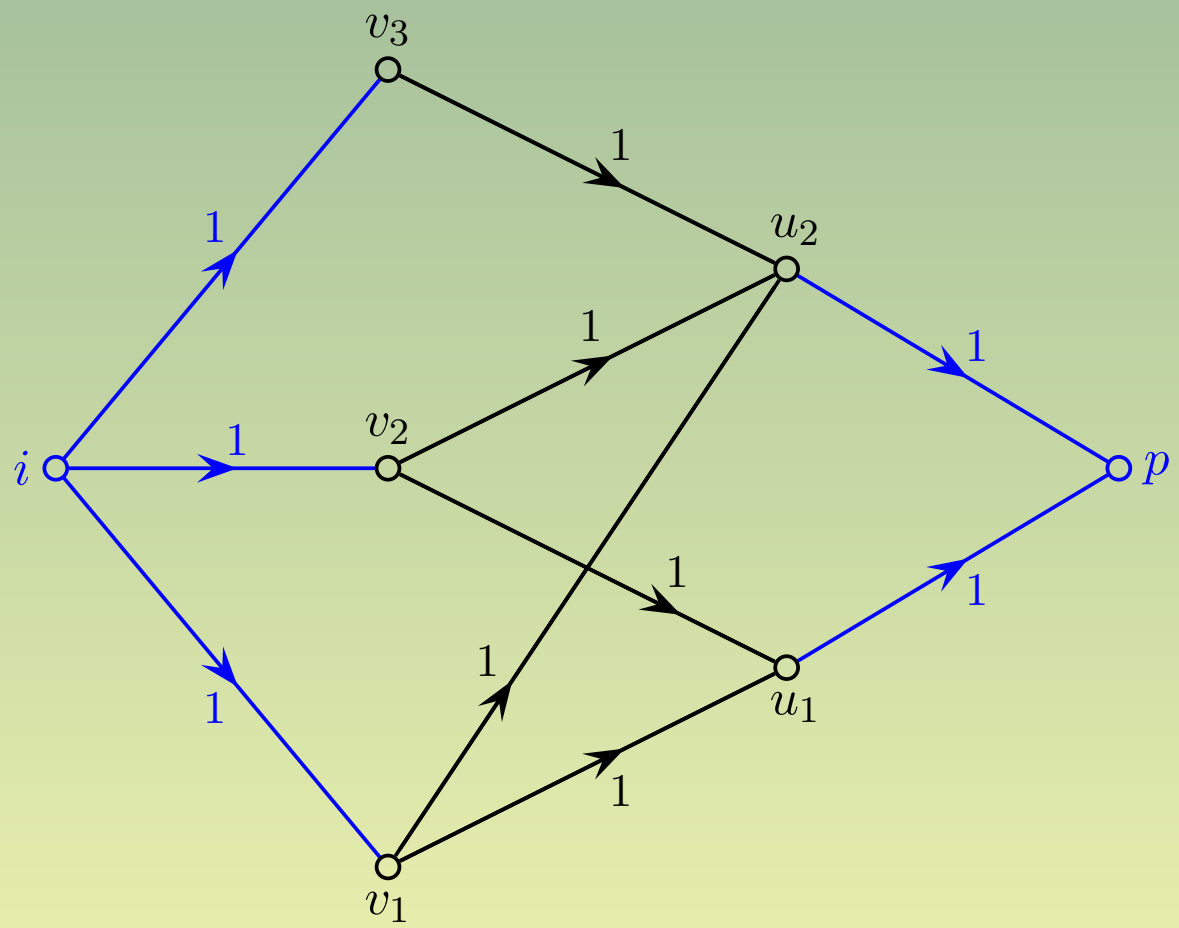
Ford-Fulkersonov algoritam i sparivanje



Dodamo novi vrh p koji će biti ponor i spojimo lukovima sve vrhove iz druge biparticije s vrhom p. Svakom takvom luku također pridružimo kapacitet 1.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Ford-Fulkersonov algoritam i sparivanje



Na dobivenu transportnu mrežu primijenimo Ford-Fulkersonov algoritam kako bismo pronašli maksimalni protok. Crni lukovi koji su iskorišteni do punog kapaciteta u početnom bipartitnom grafu zapravo predstavljaju jedno najveće sparivanje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Primjer 10.72.

Tvornica želi zaposliti nove radnike za obavljanje poslova P_1, P_2, P_3, P_4 i P_5. Među kandidatima K_1, K_2, K_3, K_4 i K_5 koji su se javili za te poslove, K_1 je kvalificiran za poslove P_3 i P_4, K_2 je kvalificiran za posao P_3, K_3 za poslove P_1, P_2 i P_5, K_4 za poslove P_3 i P_4, a K_5 za poslove P_2 i P_5. Mogu li se ti radnici rasporediti na poslove tako da svatko obavlja jedan posao za koji je kvalificiran i da se svi poslovi obavljaju?

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

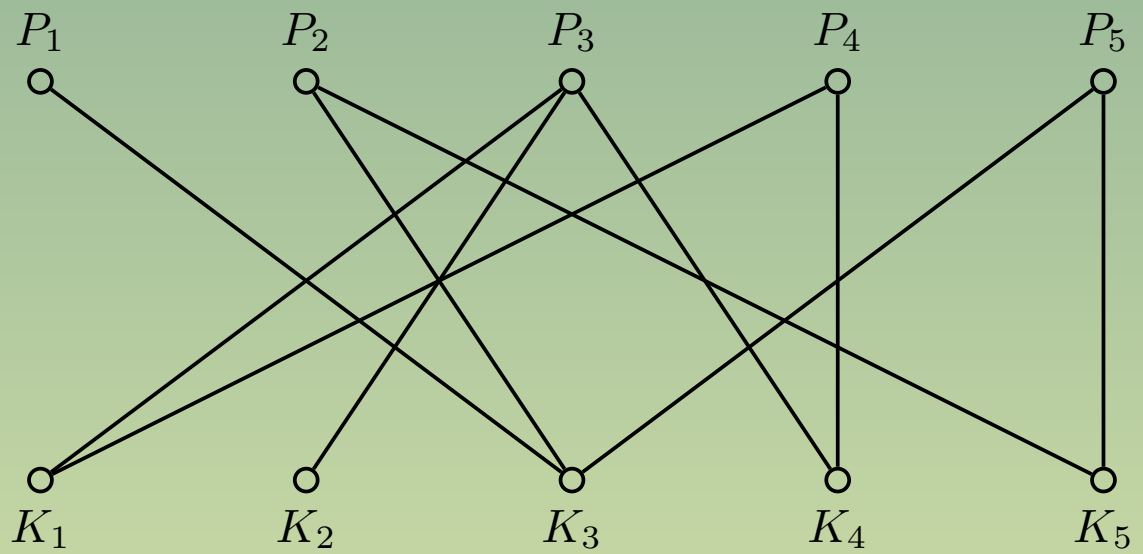
Primjer 10.72.

Tvornica želi zaposliti nove radnike za obavljanje poslova P_1, P_2, P_3, P_4 i P_5. Među kandidatima K_1, K_2, K_3, K_4 i K_5 koji su se javili za te poslove, K_1 je kvalificiran za poslove P_3 i P_4, K_2 je kvalificiran za posao P_3, K_3 za poslove P_1, P_2 i P_5, K_4 za poslove P_3 i P_4, a K_5 za poslove P_2 i P_5. Mogu li se ti radnici rasporediti na poslove tako da svatko obavlja jedan posao za koji je kvalificiran i da se svi poslovi obavljaju?

Rješenje.

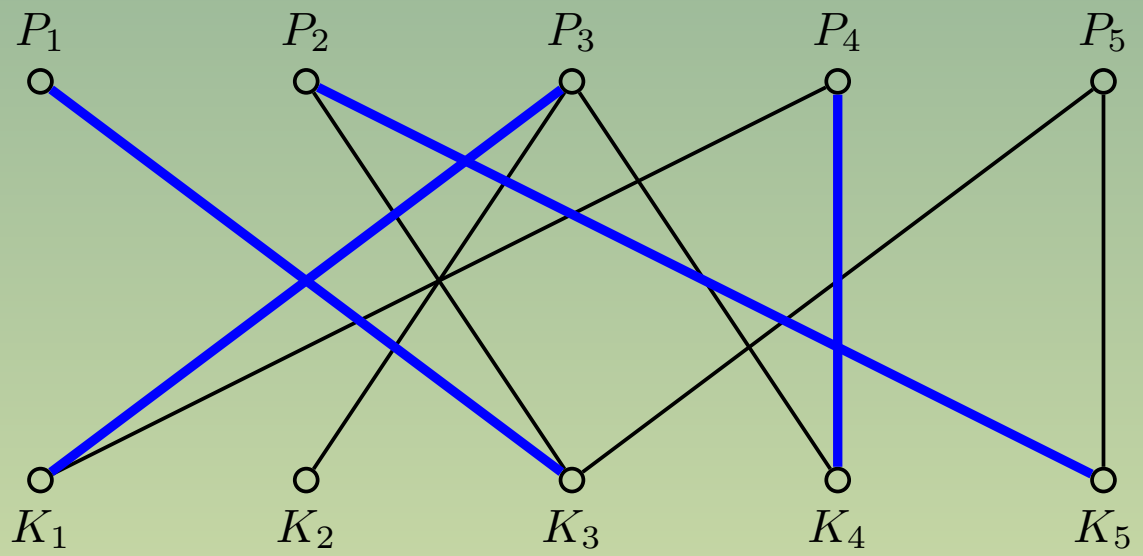
Konstruiramo bipartitni graf G tako da su u jednoj biparticiji kandidati, a u drugoj poslovi. Vrh K_i je susjedan s vrhom P_j jedino ako je kandidat K_i kvalificiran za posao P_j.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



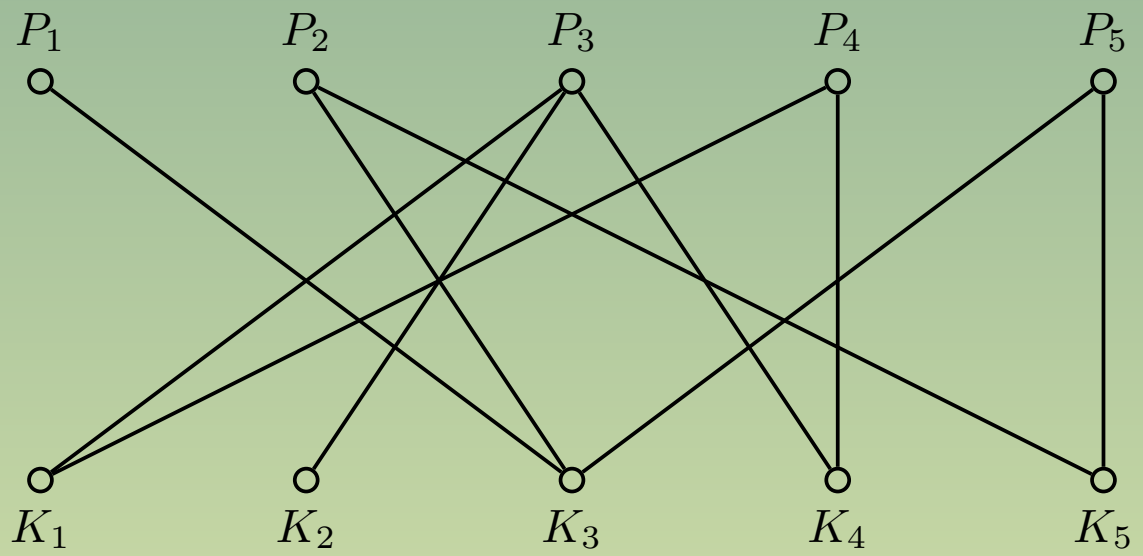
Odgovor na postavljeno pitanje bit će pozitivan jedino ako G ima savršeno sparivanje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Na slici je dano jedno sparivanje u grafu G. Jedini nezasićeni vrhovi su K_2 i P_5. Međutim, između njih ne postoji niti jedan uvećani put pa je dano sparivanje zapravo jedno najveće sparivanje u grafu G. Stoga graf G nema savršeno sparivanje pa je odgovor na postavljeno pitanje u zadatku negativan. Pronađite još neka najveća sparivanja u grafu G.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Preko Hallovog teorema također možemo dokazati da G nema savršeno sparivanje. Neka su

$$X = \{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5\} \quad \text{i} \quad Y = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}.$$

Neka je $T \subseteq X,\ T = \{K_1, K_2, K_4\}$. Tada je $S(T) = \{P_3, P_4\}$. U tom slučaju je $k(S(T)) < k(T)$ pa prema Hallovom teoremu u G ne postoji sparivanje koje bi zasićivalo svaki vrh iz X pa G nema savršeno sparivanje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Modificirani DFS algoritam

- Neka je $G = (V, E)$ graf, a M neko sparivanje u grafu G. Ako M nije najveće sparivanje, tada sigurno postoji barem jedan M-nezasićeni vrh $v_0 \in V$.
- Pokrenimo DFS algoritam od vrha v_0 na sljedeći način. Stavimo da smo vrh v_0 posjetili u trenutku $t = 0$, tj. u parnom trenutku.
- Ako je neki vrh v posjećen u neparnom trenutku, tada od vrha v nastavljamo dalje DFS algoritam preko brida iz M.
- Ako je neki vrh v posjećen u parnom trenutku, tada od vrha v nastavljamo dalje DFS algoritam preko brida iz $M \setminus E$.
- Ako u neparnom trenutku posjetimo M-nezasićeni vrh, tada smo preko opisanog modificiranog DFS algoritma pronašli jedan M-uvećani put kao put od korijena do tog vrha.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Modificirani BFS algoritam

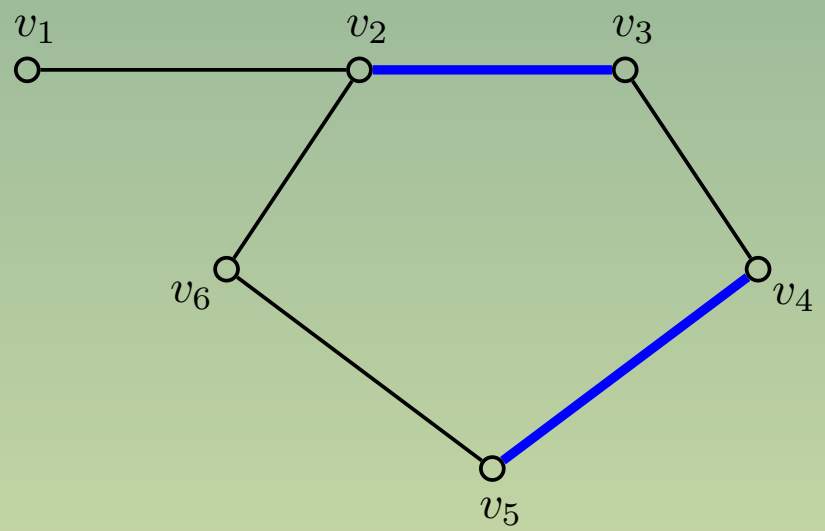
- Neka je $G = (V, E)$ graf, a M neko sparivanje u grafu G. Ako M nije najveće sparivanje, tada sigurno postoji barem jedan M-nezasićeni vrh $v_0 \in V$.
- Pokrenimo BFS algoritam od vrha v_0 na sljedeći način. Vrh v_0 se nalazi na parnom nivou u BFS stablu, tj. na nivou 0.
- Ako se neki vrh v nalazi na neparnom nivou u BFS stablu, tada od vrha v nastavljamo dalje BFS algoritam samo preko brida iz M.
- Ako se neki vrh v nalazi na parnom nivou u BFS stablu, tada od vrha v nastavljamo dalje BFS algoritam samo preko bridova iz $M \setminus E$.
- Ako na neparnom nivou posjetimo M-nezasićeni vrh, tada smo preko opisanog modificiranog BFS algoritma pronašli jedan M-uvećani put kao put od korijena do tog vrha.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

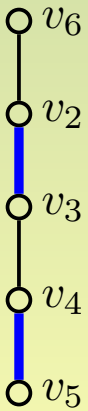
Opisane ideje za traženje M-uvećanog puta su intuitivno jasne. Krećemo od M-nezasićenog vrha i ostale vrhove posjećujemo redom preko bridova koji alterniraju između skupova $E \setminus M$ i M. Ako u neparnom trenutku odnosno na neparnom nivou posjetimo neki M-nezasićeni vrh, tada smo pronašli M-uvećani put. Ako u tome nismo uspjeli, pokrenemo algoritam iz nekog drugog M-nezasićenog vrha. Postupak ponavljamo tako dugo dok ne pronađemo M-uvećani put ili dok ne potrošimo sve M-nezasićene vrhove nakon čega u tom slučaju možemo zaključiti da nema M-uvećanog puta, tj. da je M najveće sparivanje.

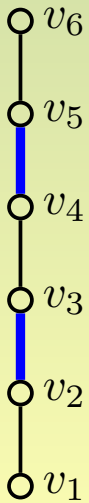
Međutim, opisani algoritmi neće uvijek uspjeti pronaći M-uvećani put, iako on u grafu možda postoji. Pogledajmo na jednom primjeru gdje može nastati problem.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

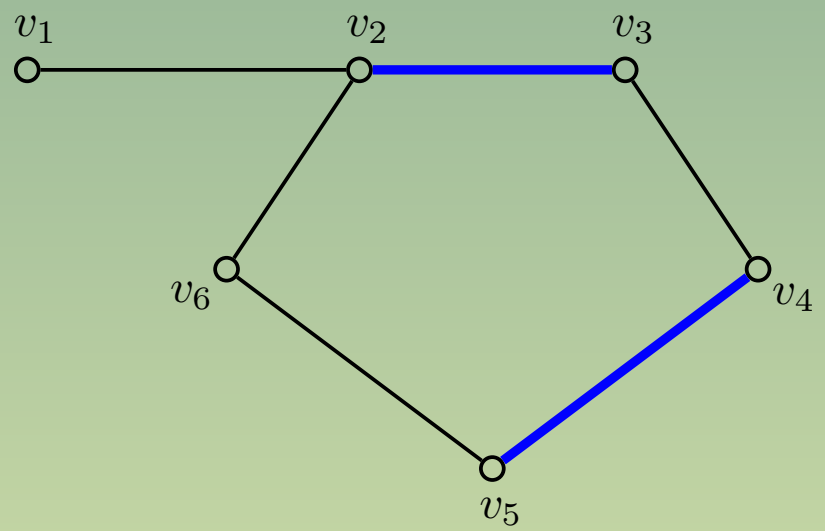


Ako primijenimo modificirani DFS algoritam od M-nezasićenog vrha v_6, algoritam može krenuti u dva smjera: u prvom slučaju neće pronaći M-uvećani put, a u drugom slučaju će pronaći M-uvećani put.

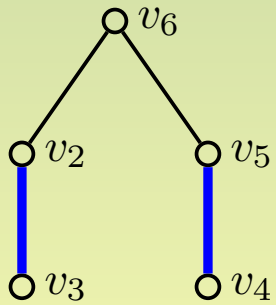


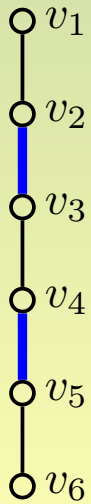


Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja



Ako primijenimo modificirani BFS algoritam od M-nezasićenog vrha v_6, algoritam neće uspjeti pronaći M-uvećani put, a iz M-nezasićenog vrha v_1 hoće.





Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Dakle, možemo uočiti da problem mogu stvoriti ciklusi neparne duljine ukoliko oni postoje u grafu G. Neparni ciklusi mogu modificirani BFS i DFS algoritam usmjeriti na "krivi" put i onemogućiti im da pronađu M-uvećani put.

Međutim, kod grafova koji ne sadrže cikluse neparnih duljina, takav problem se ne može pojaviti. Znamo da su jedini takvi grafovi zapravo bipartitni grafovi. Stoga je opisani modificirani BFS i DFS algoritam za traženje M-uvećanog puta dobar za bipartitne grafove. Za općenite grafove opisani algoritmi zahtijevaju daljnje modifikacije.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Alternirajuća stabla

Sada ćemo opisati praktični algoritam za traženje uvećanog puta u grafu G s obzirom na sparivanje M, ukoliko takav put postoji. Algoritam će ispravno raditi na bipartitnim grafovima, a uz malu modifikaciju moći će se primijeniti na proizvoljne grafove.

Neka je G bipartitni graf, a M neko sparivanje u grafu G. **Alternirajuće stablo** s obzirom na sparivanje M je korijensko stablo čiji korijen je M-nezasićeni vrh, a svaki put od korijena do nekog lista u tom stablu je M-alternirajući put. Ukoliko alternirajućem stablu uspijemo dodati M-nezasićeni vrh različit od njegovog korijena, pronaći ćemo M-uvećani put u grafu G.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Svaki vrh na parnom nivou alternirajućeg stabla dobiva oznaku PARAN, a svaki vrh na neparnom nivou alternirajućeg stabla dobiva oznaku NEPARAN. Vrhovi koji trenutno nisu u niti jednom alternirajućem stablu su neoznačeni vrhovi.

Algoritam zapravo konstruira šumu alternirajućih stabala na sljedeći način. Na početku su svi vrhovi neoznačeni, a svi bridovi su neistraženi. U svakom koraku, ili biramo neki neoznačeni M-nezasićeni vrh r koji postaje korijen novog stabla i dobiva oznaku PARAN, ili pak biramo neki neistraženi brid (u, v) kojemu vrh u ima oznaku PARAN. Dalje sve ovisi o oznaci i zasićenosti vrha v.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

- Ako je v M-nezasićeni vrh, tada smo pronašli M-uvećani put kao put između korijena dvaju alternirajućih stabala.
- Ako je vrh v M-zasićeni i neoznačen, neka je w vrh za koji je $(v, w) \in M$. Tada je w također neoznačeni vrh. U tom slučaju vrhove v i w zajedno s bridovima (u, v) i (v, w) dodamo u stablo. Vrh v dobiva oznaku NEPARAN, a vrh w oznaku PARAN.
- Ako je vrh v M-zasićeni i ima već oznaku NEPARAN, tada ne radimo ništa. U ovom slučaju samo smo pronašli još jedan M-alternirajući put neparne duljine od M-nezasićenog vrha do vrha v. Vrh v može pripadati i nekom već ranije konstruiranom stablu.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

- Ako je vrh v M-zasićeni s oznakom PARAN i ne pripada istom stablu kao vrh u, tada smo otkrili M-uvećani put koji se sastoji od puta od korijena stabla kojemu pripada vrh u do vrha u, brida (u, v) i puta od vrha v do korijena stabla kojemu pripada vrh v.
- Ako je vrh v M-zasićeni s oznakom PARAN i pripada istom stablu kao vrh u, tada smo otkrili ciklus neparne duljine u grafu G. Taj slučaj se ne može pojaviti u bipartitnom grafu jer u bipartitnom grafu ne postoje ciklusi neparnih duljina. Upravo ćemo ovaj slučaj kasnije detaljnije razraditi kako bismo opisani algoritam prilagodili za traženje M-uvećanog puta u proizvoljnom grafu.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Opisani postupak na bipartitnom grafu se prekida kada se pronađe M-uvećani put, ili kada više nema neoznačenih i M-nezasićenih vrhova ili neistraženih bridova s barem jednim parno označenim krajem.

Ukoliko postoji M-uvećani put u proizvoljnom grafu G, tada opisani algoritam pronalazi neki M-uvećani put ili ciklus neparne duljine. Složenost tog algoritma je $O(\varepsilon)$. Na taj način dobivamo sljedeći algoritam za traženje najvećeg sparivanja u bipartitnom grafu G koji ima složenost $O(\nu\varepsilon)$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Najveće sparivanje u bipartitnom grafu

ULAZ: Bipartitni graf $G = (V, E)$
IZLAZ: Neko najveće sparivanje M u grafu G

1: Stavi $M := \emptyset$, $\text{kraj} := \text{FALSE}$.
2: Sve dok $\text{NOT}(\text{kraj})$ radi sljedeće:
3: Svim M-nezasićenim vrhovima stavi oznaku PARAN.
4: Sve bridove iz $M \setminus E$ označi kao neistražene bridove.
5: Dok ima neistraženih bridova i nije pronađen M-uvećani put radi sljedeće:
6: Uzmi neistraženi brid (u, v) i označi ga da je istražen.
7: Ako u ima oznaku PARAN i v je bez oznake, tada pronađi vrh w takav da je $(v, w) \in M$. Vrhu v stavi oznaku NEPARAN, a vrhu w stavi oznaku PARAN. Dodaj u šumu alternirajućih stabala bridove (u, v) i (v, w).
8: Ako oba vrha u i v imaju oznaku PARAN, tada postoji M-uvećani put. Neka je u^* korijen stabla kojemu pripada vrh u, a v^* korijen stabla kojemu pripada vrh v. Moguće je da su oba vrha u i v ili samo neki od njih već korijeni. Neka je P_u (u^*, u)-put, a P_v (v, v^*)-put u pripadnim alternirajućim stablima. Tada je $P = P_u u v P_v$ M-uvećani put.
9: Ako je pronađen M-uvećani put P, stavi $M := M \triangle P$.
U protivnom, stavi $\text{kraj} := \text{TRUE}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Edmondsov algoritam

Pogledajmo na koji način se možemo nositi s ciklusima neparnih duljina u grafu kako bismo modificiranom BFS i DFS algoritmu pomogli da uspije pronaći M-uvećani put. Opisat ćemo ideju koju je predložio Edmonds. Prije toga trebamo jednu definiciju.

Neka je G graf, a M neko sparivanje u grafu G. **Cvijet** (blossom) B u grafu G s obzirom na sparivanje M je svaki ciklus neparne duljine $2k+1$ čijih k bridova pripada sparivanju M. Jedini njegov vrh b koji je susjedan s dva brida tog ciklusa koji ne pripadaju sparivanju M zove se **baza** cvijeta B.

Zapravo cvjetovi u grafu G stvaraju probleme modificiranom BFS i DFS algoritmu pri pronalaženju M-uvećanih putova.

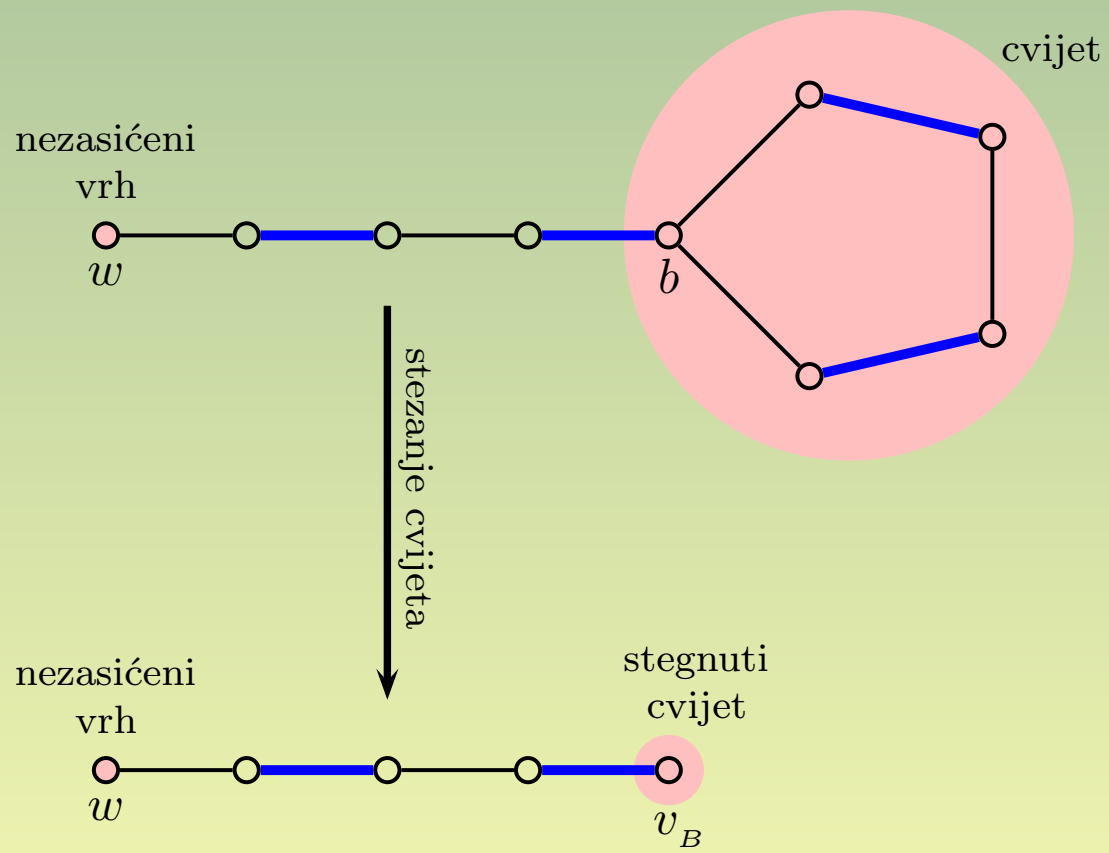
Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Edmondsova ideja je vrlo jednostavna. Svaki puta kada modificirani BFS ili DFS algoritam naiđe na cvijet B u grafu G, tada se taj cvijet stegne u točku prema njegovom baznom vrhu. Drugim riječima, cvijet B se zamijeni s jednim novim vrhom v_B. Na taj način dobivamo novi graf G_B, a modificirani BFS ili DFS algoritam nastavlja dalje potragu za M-uvećanim putom u novom grafu G_B. Ukoliko postoji M-uvećani put u grafu G, nakon konačno mnogo koraka na opisani način dobit ćemo M-uvećani put u nekom grafu G' u kojemu su svi cvjetovi na koje smo naišli stegnuti u jednu točku. Nakon toga rastezanjem svih stegnutih cvjetova možemo dobiti M-uvećani put u početnom grafu G.

Iako je Edmondsova ideja vrlo jednostavna, njezina efikasna implementacija nije jednostavni posao. Usprkos svemu, algoritam se može implementirati sa složenošću $O(\nu^2\varepsilon)$. Postoje čak implementacije sa složenošću $O(\nu\varepsilon)$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Stezanje cvijeta i rekonstrukcija uvećanog puta



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

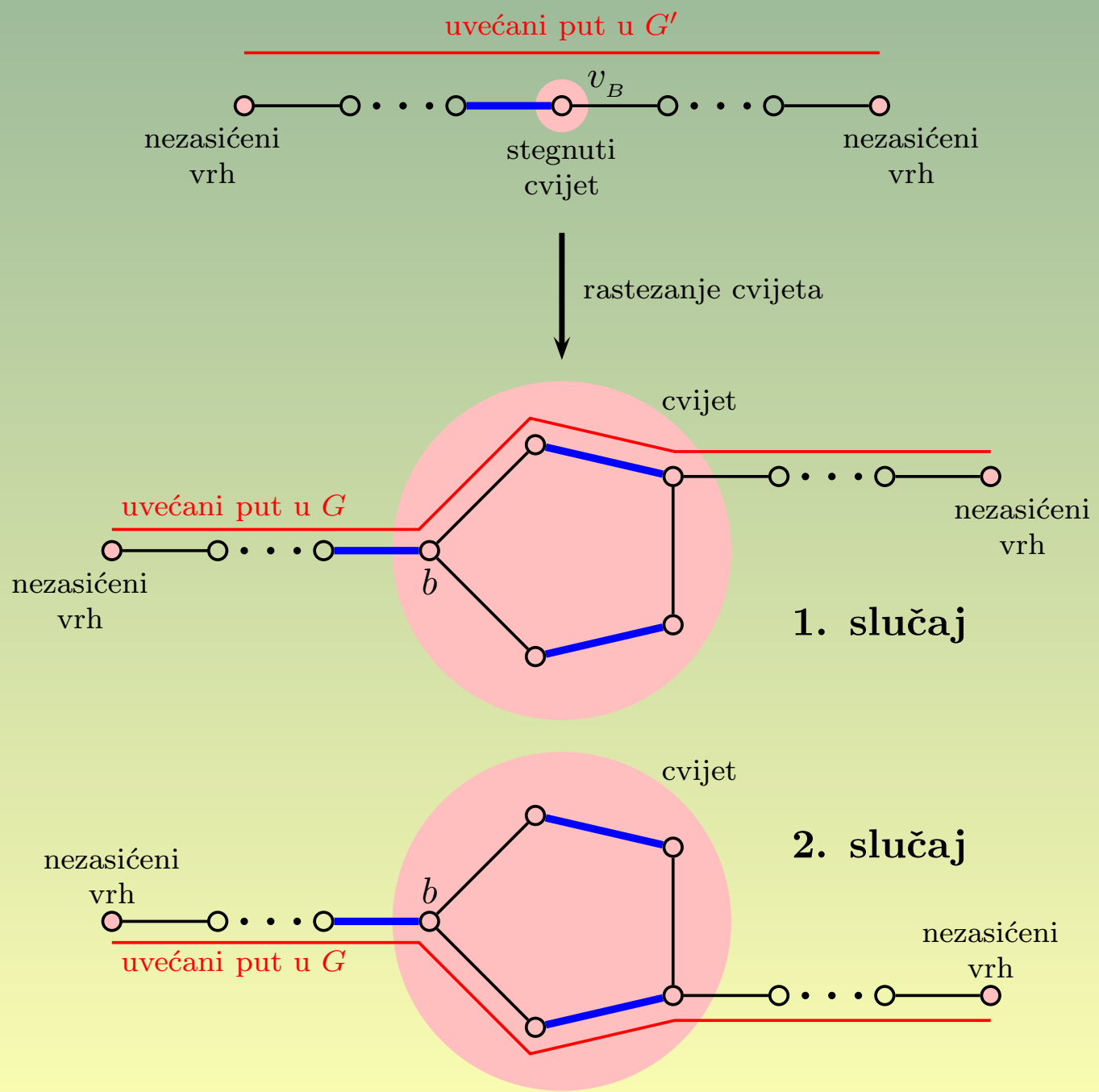
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

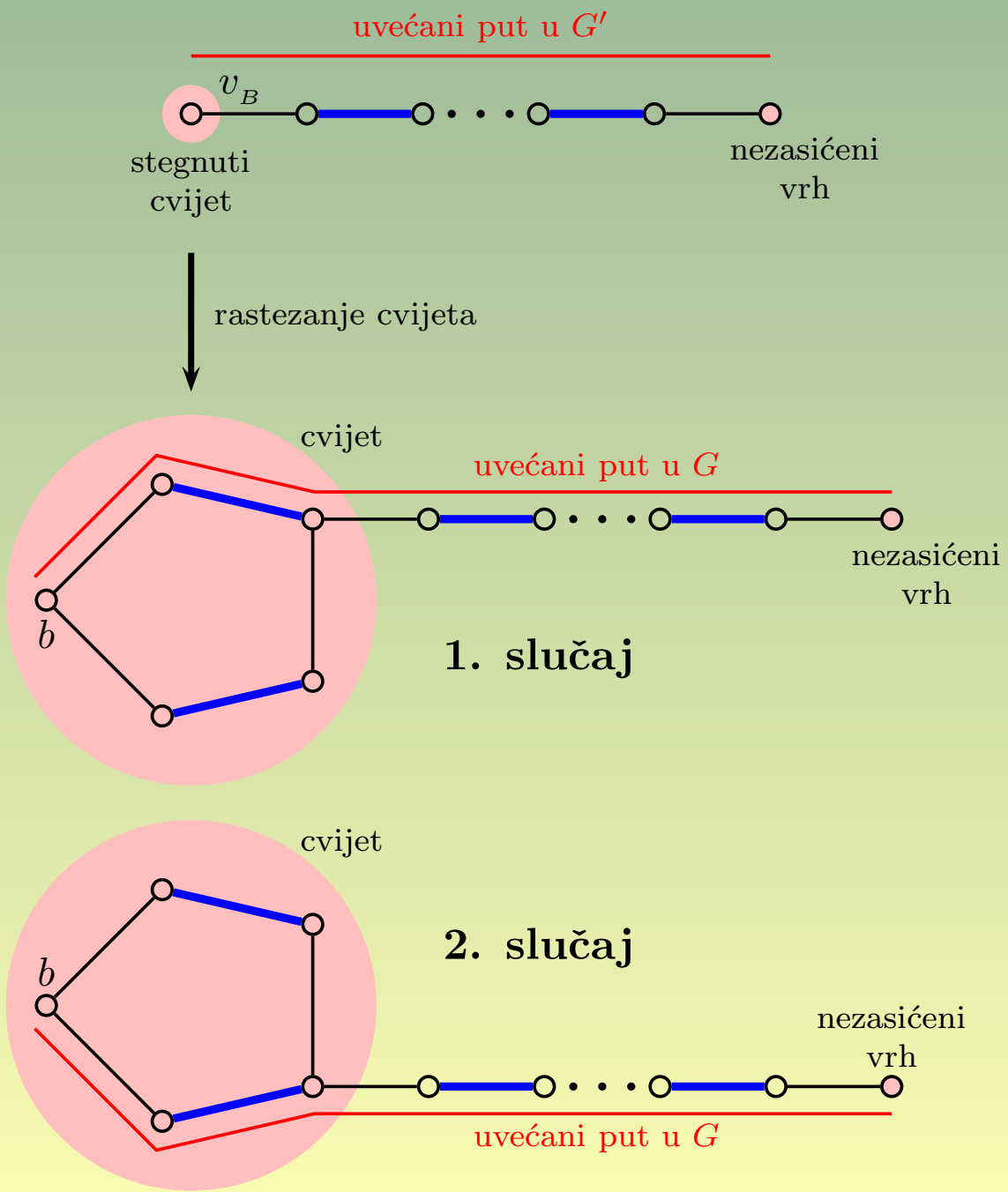
Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja



Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje

Planarni grafovi

Riješeni primjeri

Homeomorfizam grafova

Teorem Kuratowskog

Dem.-Malg.-Pert. algoritam

Bojanje vrhova grafa

Riješeni primjeri

Pohlepno bojanje vrhova

Slučajni raspored vrhova

Welsh-Powellov algoritam

Brèlazov algoritam

Bojanje bridova grafa

Tipični primjeri

Algoritmi za bojanje bridova

Sparivanje u grafu

Sparivanje u bipartitnom grafu

Modificirani DFS i BFS algoritam

Alternirajuća stabla

Edmondsov algoritam

Savršena sparivanja

Vratimo se ponovo na konstrukciju alternirajućih stabala, tj. na slučaj kada naiđemo na ciklus neparne duljine u alternirajućem stablu. Taj slučaj nismo ranije detaljnije razradili jer se kod bipartitnih grafova ne može pojaviti. No, ukoliko tražimo najveće sparivanje u općenitom grafu, tada se može pojaviti i ovaj slučaj.

Ukoliko u alternirajućem stablu naiđemo na ciklus neparne duljine, zapravo smo naišli na cvijet B (blossom). U tom slučaju cvijet stegnemo u vrh v_B. Vrh v_B dobiva oznaku PARAN i konstrukciju alternirajućih stabala nastavljamo dalje na grafu G_B. U nekom daljnjem koraku može biti otkriven novi cvijet B'. Pritom se može dogoditi da cvijet B, tj. vrh v_B pripada cvijetu B'. Postupak se zaustavlja kada je pronađen uvećani put, ili kada su svi nezasićeni vrhovi postali korijeni alternirajućih stabala i svi bridovi susjedni s parnim vrhovima su istraženi.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Edmondsov algoritam

ULAZ: Bipartitni graf $G = (V, E)$

IZLAZ: Neko najveće sparivanje M u grafu G

1: Stavi $M := \emptyset$, $\text{kraj} := \text{FALSE}$.

2: Sve dok $\text{NOT}(\text{kraj})$ radi sljedeće:

3: Svim M-nezasićenim vrhovima stavi oznaku PARAN.

4: Sve bridove iz $M \setminus E$ označi kao neistražene bridove.

5: Dok ima neistraženih bridova i nije pronađen M-uvećani put radi sljedeće:

6: Uzmi neistraženi brid (u, v) i označi ga da je istražen.

7: Ako u ima oznaku PARAN i v je bez oznake, tada pronađi vrh w takav da je $(v, w) \in M$. Vrhu v stavi oznaku NEPARAN, a vrhu w stavi oznaku PARAN. Dodaj u šumu alternirajućih stabala bridove (u, v) i (v, w).

8: Ako vrhovi u i v imaju oznaku PARAN i pripadaju različitim stablima, tada postoji M-uvećani put. Neka je u^* korijen stabla kojemu pripada vrh u, a v^* korijen stabla kojemu pripada vrh v. Moguće je da su oba vrha u i v ili samo neki od njih već korijeni. Neka je P_u (u^*, u)-put, P_v (v, v^*)-put u pripadnim stablima. Tada je $P = P_u u v P_v$ M-uvećani put.

9: Ako vrhovi u i v imaju oznaku PARAN i pripadaju istom stablu, tada je pronađen cvijet B. Stegnemo cvijet B u vrh v_B s oznakom PARAN.

10: Ako je pronađen M-uvećani put P, stavi $M := M \triangle P$.
U protivnom, stavi $\text{kraj} := \text{TRUE}$.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Savršena sparivanja

Jasno je da ako graf G ima savršeno sparivanje, tada mora imati paran broj vrhova. Obrat naravno ne vrijedi. Ne mora svaki graf s parnim brojem vrhova imati savršeno sparivanje. Međutim, vrijedi sljedeća interesantna tvrdnja.

Propozicija 10.12.

Neka je G graf koji ima Hamiltonov put. Tada G ima savršeno sparivanje akko ima paran broj vrhova.

Dokaz.

$\Rightarrow$

Ako graf G ima savršeno sparivanje, tada svakako mora imati paran broj vrhova bez obzira da li ima Hamiltonov put.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja

Ako G ima paran broj vrhova i Hamiltonov put P, tada je P neparne duljine. Svaki put neparne duljine ima savršeno sparivanje. Stoga Hamiltonov put P u grafu G ima savršeno sparivanje. Kako Hamiltonov put sadrži sve vrhove grafa G, savršeno sparivanje od P je ujedno i savršeno sparivanje od G. Dakle, G zaista ima savršeno sparivanje. ♡

Propozicija 10.13.

Neka je G jednostavni graf s parnim brojem vrhova u kojemu je $\delta(G) \geqslant \frac{\nu}{2}$. Tada G ima savršeno sparivanje.

Dokaz.

Ako je $\nu = 2$, tada je G put duljine 1 koji očito ima savršeno sparivanje. Ako je $\nu \geqslant 4$, tada je prema Diracovom teoremu G Hamiltonov graf. Specijalno, G ima Hamiltonov put. Prema prethodnoj propoziciji slijedi da G ima savršeno sparivanje. ♡

Komponenta povezanosti grafa G je **neparna** ili **parna** ako ima neparan ili paran broj vrhova. Za $T \subseteq V(G)$ neka je $p_0(T)$ broj neparnih komponenti grafa $G - T$.

Teorem 10.24 (Tutte, 1947.).

Graf G ima savršeno sparivanje akko vrijedi $p_0(T) \leqslant k(T)$ za svaki $T \subseteq V(G)$.

Korolar 10.11 (Petersen, 1891.).

Svaki 3-regularni graf bez reznih bridova ima savršeno sparivanje.

Planarni grafovi. Bojanje i sparivanje
Planarni grafovi
Riješeni primjeri
Homeomorfizam grafova
Teorem Kuratowskog
Dem.-Malg.-Pert. algoritam
Bojanje vrhova grafa
Riješeni primjeri
Pohlepno bojanje vrhova
Slučajni raspored vrhova
Welsh-Powellov algoritam
Brèlazov algoritam
Bojanje bridova grafa
Tipični primjeri
Algoritmi za bojanje bridova
Sparivanje u grafu
Sparivanje u bipartitnom grafu
Modificirani DFS i BFS algoritam
Alternirajuća stabla
Edmondsov algoritam
Savršena sparivanja