Relacije

Diskretne strukture s teorijom grafova

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Zadatak 1

Neka je $\mathcal{A} = \{U, W, X, Y, Z\}$ skup od pet knjiga koje se prodaju na fakultetu. Pretpostavimo da knjige imaju sljedeća svojstva:

knjiga	*cijena*	*debljina*
U	70 *kn*	100 *stranica*
W	175 *kn*	125 *stranica*
X	140 *kn*	150 *stranica*
Y	70 *kn*	200 *stranica*
Z	35 *kn*	100 *stranica*

Na skupu $\mathcal{A}$ definiramo relaciju $\mathcal{R}$ na sljedeći način:

$$(a, b) \in \mathcal{R} \overset{\text{def}}{\iff} \big(c(a) \geqslant c(b)\big) \wedge \big(d(a) \geqslant d(b)\big)$$

pri čemu je $c(K)$ cijena knjige K, a $d(K)$ debljina knjige K.

a) *Ispišite elemente relacije $\mathcal{R}$.*

b) *Odredite matricu incidencije relacije $\mathcal{R}$ i nacrtajte graf relacije $\mathcal{R}$.*

c) *Ispitajte je li relacija $\mathcal{R}$ refleksivna, simetrična, antisimetrična i tranzitivna.*

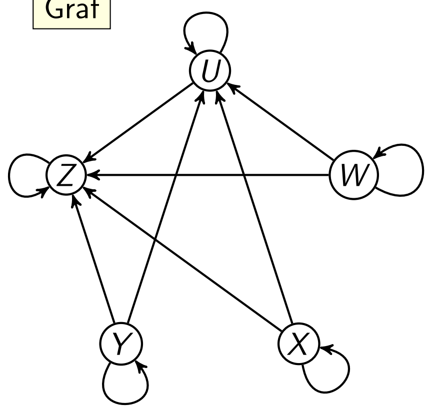
Rješenje

$$(a, b) \in \mathcal{R} \rightsquigarrow a \,\mathcal{R}\, b$$

Matrica incidencije

$a \backslash b$	U	W	X	Y	Z
U	1	0	0	0	1
W	1	1	0	0	1
X	1	0	1	0	1
Y	1	0	0	1	1
Z	0	0	0	0	1

Graf



Elementi relacije

$$\mathcal{R} = \{(U,U),(U,Z),(W,U),(W,W),(W,Z),(X,U),(X,X),(X,Z),(Y,U),(Y,Y),(Y,Z),(Z,Z)\}$$

$$\boxed{(a, b) \in \mathcal{R} \overset{\text{def}}{\iff} \big(c(a) \geqslant c(b)\big) \wedge \big(d(a) \geqslant d(b)\big)}$$

Refleksivnost $(\forall x \in \mathcal{A})\,(x\;\mathcal{R}\;x)$

- **Pomoću matrice incidencije**
  Na glavnoj dijagonali se nalaze jedinice.
- **Pomoću grafa relacije**
  Kod svakog vrha u grafu se nalazi petlja.
- **Pomoću definicije**
  Za svaki $x \in \mathcal{A}$ je $c(x) \geqslant c(x)$ i $d(x) \geqslant d(x)$ pa vrijedi $x\;\mathcal{R}\;x$.

Relacija $\mathcal{R}$ je refleksivna relacija na skupu $\mathcal{A}$.

Općenito je $\mathcal{R}$ refleksivna relacija na bilo kojem skupu knjiga.

$$(a,b) \in \mathcal{R} \overset{\text{def}}{\iff} \big(c(a) \geqslant c(b)\big) \wedge \big(d(a) \geqslant d(b)\big)$$

Simetričnost $(\forall x, y \in \mathcal{A})\,(x\;\mathcal{R}\;y \;\Rightarrow\; y\;\mathcal{R}\;x)$

- **Pomoću matrice incidencije**
  Matrica incidencije nije simetrična matrica. Na primjer,

$$W\;\mathcal{R}\;U,\quad U\;\not{\mathcal{R}}\;W$$

- **Pomoću grafa relacije**
  Na primjer, postoji luk (W, U), ali ne postoji luk (U, W).

Relacija $\mathcal{R}$ nije simetrična relacija na skupu $\mathcal{A}$.

$$(a,b) \in \mathcal{R} \overset{\text{def}}{\iff} \big(c(a) \geqslant c(b)\big) \wedge \big(d(a) \geqslant d(b)\big)$$

Antisimetričnost $(\forall x, y \in \mathcal{A})\,\big((x\;\mathcal{R}\;y) \wedge (y\;\mathcal{R}\;x) \;\Rightarrow\; x = y\big)$

Pretpostavimo da je $x\;\mathcal{R}\;y$ i $y\;\mathcal{R}\;x$.

$$\begin{array}{rcll} x\;\mathcal{R}\;y & \Longrightarrow & c(x) \geqslant c(y), & d(x) \geqslant d(y) \\ y\;\mathcal{R}\;x & \Longrightarrow & c(y) \geqslant c(x), & d(y) \geqslant d(x) \\ & & \downarrow & \downarrow \\ & & c(x) = c(y) & d(x) = d(y) \end{array}$$

- Dakle, knjige x i y imaju jednaku cijenu i jednaki broj stranica.
- U našem slučaju slijedi da je $x = y$ pa je $\mathcal{R}$ antisimetrična relacija.
- Općenito to ne mora biti antisimetrična relacija jer dvije različite knjige mogu imati jednaku cijenu i jednaki broj stranica.

$$(a,b) \in \mathcal{R} \overset{\text{def}}{\iff} \big(c(a) \geqslant c(b)\big) \wedge \big(d(a) \geqslant d(b)\big)$$

Tranzitivnost $(\forall x, y, z \in \mathcal{A})\,\big((x\;\mathcal{R}\;y) \wedge (y\;\mathcal{R}\;z) \;\Rightarrow\; x\;\mathcal{R}\;z\big)$

Pretpostavimo da je $x\;\mathcal{R}\;y$ i $y\;\mathcal{R}\;z$.

$$\begin{array}{rcll} x\;\mathcal{R}\;y & \Longrightarrow & c(x) \geqslant c(y), & d(x) \geqslant d(y) \\ y\;\mathcal{R}\;z & \Longrightarrow & c(y) \geqslant c(z), & d(y) \geqslant d(z) \\ & & \downarrow & \downarrow \\ & & c(x) \geqslant c(z) & d(x) \geqslant d(z) \end{array}$$

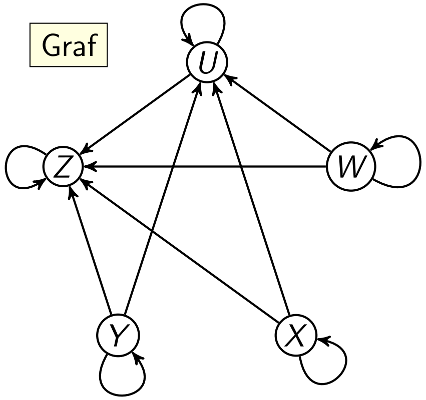
- Iz $c(x) \geqslant c(z)$ i $d(x) \geqslant d(z)$ slijedi $x\;\mathcal{R}\;z$. Stoga je $\mathcal{R}$ tranzitivna relacija.
- Općenito, relacija $\mathcal{R}$ je tranzitivna relacija na proizvoljnom skupu knjiga.

$$(a,b) \in \mathcal{R} \overset{\text{def}}{\iff} \big(c(a) \geqslant c(b)\big) \wedge \big(d(a) \geqslant d(b)\big)$$

Matrica incidencije

$a \backslash b$	U	W	X	Y	Z
U	1	0	0	0	1
W	1	1	0	0	1
X	1	0	1	0	1
Y	1	0	0	1	1
Z	0	0	0	0	1

Graf



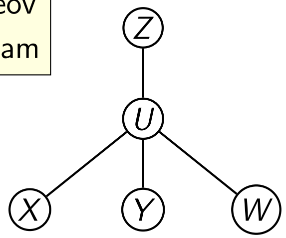
Najmanji element ne postoji

Minimalni elementi X, Y, W

Najveći element Z

Maksimalni elementi Z

Hasseov dijagram



Zadatak 2

Zadana je particija

$$\mathcal{P} = \big\{\{1,4,5\},\{2,3,8\},\{6,7\}\big\}$$

skupa $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. *Napišite matricu incidencije i nacrtajte graf relacije ekvivalencije* ρ *na skupu* A *koju prirodno definira zadana particija* $\mathcal{P}$.

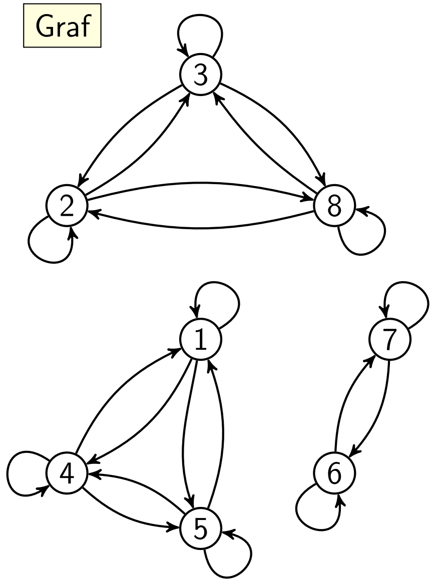
Rješenje

$$x \,\rho\, y \stackrel{\text{def}}{\iff} x \text{ i } y \text{ pripadaju istom elementu particije } \mathcal{P}$$

Matrica incidencije

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	1	1	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	1
3	0	1	1	0	0	0	0	1
4	1	0	0	1	1	0	0	0
5	1	0	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	1	0
7	0	0	0	0	0	1	1	0
8	0	1	1	0	0	0	0	1

Graf



$$\mathcal{P} = \big\{\{1,4,5\},\{2,3,8\},\{6,7\}\big\}$$

Definicija kongruencije modulo n

Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

$$a \equiv b \pmod{n} \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists k \in \mathbb{Z},\ a - b = nk$$

$$a \equiv b \pmod{n} \iff a \text{ i } b \text{ daju isti ostatak pri dijeljenju s } n$$

- $10 \equiv 1 \pmod{3}$ jer $3 \mid 10 - 1$
- $-15 \equiv 13 \pmod{7}$ jer $7 \mid -15 - 13$
- $2 \not\equiv 7 \pmod{11}$ jer $11 \nmid 2 - 7$
- $-15 \not\equiv -13 \pmod{7}$ jer $7 \nmid -15 - (-13)$

Zadatak 3

Na skupu $B = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ zadana je relacija $\sim$ s

$$m \sim n \stackrel{\text{def}}{\iff} m^2 \equiv n^2 \pmod 5.$$

a) *Dokažite da je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu B.*

b) *Odredite sve elemente kvocijentnog skupa $B/\!\sim$.*

$m \sim n \stackrel{\text{def}}{\iff} m^2 \equiv n^2 \pmod 5$

Rješenje

a) 1. način

Refleksivnost $\quad (\forall a \in B)(a \sim a)$

$$a \sim a \iff a^2 \equiv a^2 \pmod 5$$

Simetričnost $\quad (\forall a, b \in B)(a \sim b \Rightarrow b \sim a)$

$$a \sim b \Rightarrow a^2 \equiv b^2 \pmod 5 \Rightarrow b^2 \equiv a^2 \pmod 5 \Rightarrow b \sim a$$

$m \sim n \stackrel{\text{def}}{\iff} m^2 \equiv n^2 \pmod 5$

Tranzitivnost $\quad (\forall a, b, c \in B)\big((a \sim b) \wedge (b \sim c) \Rightarrow a \sim c\big)$

$$(a \sim b) \wedge (b \sim c) \Rightarrow a^2 \equiv b^2 \pmod 5 \ \wedge \ b^2 \equiv c^2 \pmod 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z},\ \underbrace{a^2 - b^2 = 5u,\ b^2 - c^2 = 5v}_{+} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a^2 - b^2) + (b^2 - c^2) = 5u + 5v \Rightarrow a^2 - c^2 = 5(\underbrace{u+v}_{\in \mathbb{Z}}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 \equiv c^2 \pmod 5 \Rightarrow a \sim c$$

$B = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ $\quad$ $m \sim n \stackrel{\text{def}}{\iff} m^2 \equiv n^2 \pmod 5$

2. način $\quad [a]_\sim = \{x \in B : x \sim a\}$

Odredimo klase svih elemenata.

$[0]_\sim = \{0\}$

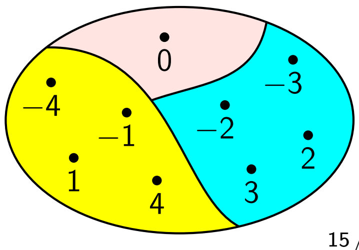
$[-4]_\sim = \{-4,-1,1,4\}$ $\quad [1]_\sim = \{-4,-1,1,4\}$

$[-3]_\sim = \{-3,-2,2,3\}$ $\quad [2]_\sim = \{-3,-2,2,3\}$

$[-2]_\sim = \{-3,-2,2,3\}$ $\quad [3]_\sim = \{-3,-2,2,3\}$

$[-1]_\sim = \{-4,-1,1,4\}$ $\quad [4]_\sim = \{-4,-1,1,4\}$

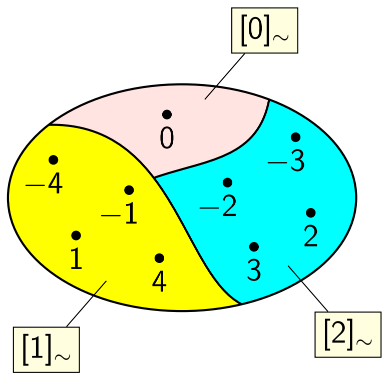
Dobili smo particiju skupa B koja prirodno definira relaciju $\sim$. Stoga je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu B.



$B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ $\quad$ $m \sim n \overset{\text{def}}{\iff} m^2 \equiv n^2 \pmod 5$

$[a]_\sim = \{x \in B : x \sim a\}$

b)



$[0]_\sim = \{0\}$

$[1]_\sim = \{-4, -1, 1, 4\}$

$[2]_\sim = \{-3, -2, 2, 3\}$

$B/\!\sim\; = \{[0]_\sim, [1]_\sim, [2]_\sim\}$

$k(B/\!\sim) = 3$

Napomena

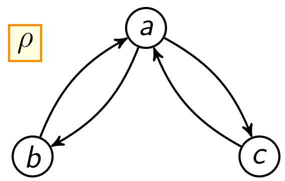
- U slučaju da relacija ρ nije relacija ekvivalencije na skupu A, također možemo govoriti o "klasi" pojedinog elementa.
- "Klase" u tom slučaju ne moraju dati particiju skupa A. Štoviše, moguće je da "klasa" nekog elementa bude prazan skup.
- Ako ρ nije simetrična relacija, tada su skupovi

$$[a]_\rho^{(left)} = \{x \in A : x \;\rho\; a\}, \qquad [a]_\rho^{(right)} = \{x \in A : a \;\rho\; x\}$$

općenito različiti. U tom slučaju govorimo o lijevoj i desnoj klasi pojedinog elementa $a \in A$.

Relacija ρ na skupu $A = \{a, b, c\}$

(Lijeve) klase elemenata



$[a]_\rho = \{b, c\}$

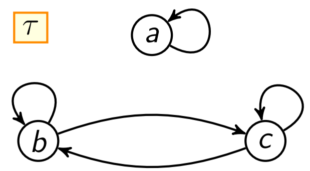
$[b]_\rho = \{a\}$

$[c]_\rho = \{a\}$

- Klase čine particiju $\mathcal{P} = \{\{b, c\}, \{a\}\}$ skupa $A = \{a, b, c\}$.
- Particija $\mathcal{P}$ ne definira relaciju ρ, nego relaciju ekvivalencije τ.

Relacija τ na skupu $A = \{a, b, c\}$

Klase elemenata



$[a]_\tau = \{a\}$

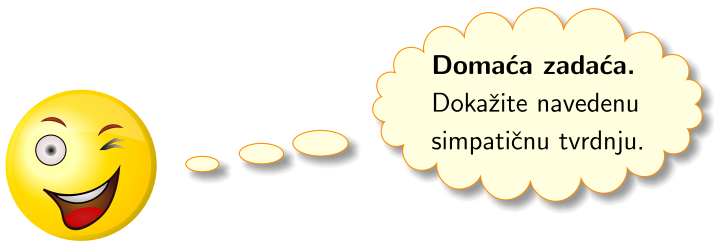
$[b]_\tau = \{b, c\}$

$[c]_\tau = \{b, c\}$

Neka je ρ refleksivna relacija na skupu A koja zadovoljava sljedeći uvjet:

(♣) Lijeve klase svaka dva elementa iz skupa A su međusobno jednake ili disjunktne.

Tada je ρ relacija ekvivalencije na skupu A.



Zadatak 4

Na skupu $\mathbb{Z}$ definirana je relacija $\sim$ s

$$a \sim b \overset{\text{def}}{\iff} a^2 - b^2 \text{ je djeljiv s } 3.$$

a) *Dokažite da je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu $\mathbb{Z}$.*

b) *Odredite klasu elementa 0 i klasu elementa 1.*

c) *Odredite kvocijentni skup $\mathbb{Z}/\sim$.*

$a \sim b \overset{\text{def}}{\iff} 3 \mid a^2 - b^2$

Rješenje

a) Treba provjeriti da je $\sim$ refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija.

Refleksivnost $\quad (\forall a \in \mathbb{Z})(a \sim a)$

$$a \sim a \iff 3 \mid a^2 - a^2 \iff 3 \mid 0$$

Simetričnost $\quad (\forall a, b \in \mathbb{Z})(a \sim b \Rightarrow b \sim a)$

$$a \sim b \Rightarrow 3 \mid a^2 - b^2 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ a^2 - b^2 = 3k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 - a^2 = 3 \cdot \underbrace{(-k)}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow 3 \mid b^2 - a^2 \Rightarrow b \sim a$$

$a \sim b \overset{\text{def}}{\iff} 3 \mid a^2 - b^2$

Tranzitivnost $\quad (\forall a, b, c \in \mathbb{Z})\big((a \sim b) \wedge (b \sim c) \Rightarrow a \sim c\big)$

$$(a \sim b) \wedge (b \sim c) \Rightarrow 3 \mid a^2 - b^2 \ \wedge\ 3 \mid b^2 - c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z},\ \underbrace{a^2 - b^2 = 3k_1,\ b^2 - c^2 = 3k_2}_{+} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a^2 - b^2) + (b^2 - c^2) = 3k_1 + 3k_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - c^2 = 3\underbrace{(k_1 + k_2)}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow 3 \mid a^2 - c^2 \Rightarrow a \sim c$$

$[a]_\sim = \{x \in \mathbb{Z} : x \sim a\}$ $\quad$ $a \sim b \overset{\text{def}}{\iff} 3 \mid a^2 - b^2$

b)

$$[0]_\sim = \{x \in \mathbb{Z} : x \sim 0\} = \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid x^2 - 0^2\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid x^2\} = \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid x\} = 3\mathbb{Z}$$

Cijeli broj x je djeljiv s 3 ako i samo ako je x^2 djeljiv s 3.

- Tvrdnju smo dokazali ranije za prirodne brojeve.
- Svi ponuđeni dokazi od ranije potpuno analogno prolaze i u slučaju cijelih brojeva.

$\boxed{[a]_\sim = \{x \in \mathbb{Z} : x \sim a\}}$ $\boxed{a \sim b \overset{\text{def}}{\iff} 3 \mid a^2 - b^2}$

$$[1]_\sim = \{x \in \mathbb{Z} : x \sim 1\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid x^2 - 1^2\} = \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid x^2 - 1\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z},\ x^2 = 3k + 1\} = \{x \in \mathbb{Z} : 3 \nmid x\} =$$
$$= (3\mathbb{Z} + 1) \cup (3\mathbb{Z} + 2) = \mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}$$

Cijeli broj x nije djeljiv s 3 ako i samo ako x^2 pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1.

- Dokažimo još navedenu tvrdnju koju smo ovdje koristili.

$\boxed{x \in \mathbb{Z},\ 3 \nmid x \iff x^2 \text{ pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1}}$

$\boxed{\Rightarrow}$ ($3 \nmid x \Rightarrow x^2$ pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1)

Pretpostavimo da $x \in \mathbb{Z}$ nije djeljiv s 3. Razlikujemo dva slučaja.

- $x = 3k + 1$ za neki $k \in \mathbb{Z}$

$$x = 3k + 1 \Rightarrow x^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3 \cdot (\underbrace{3k^2 + 2k}_{\in \mathbb{Z}}) + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 \text{ pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1}$$

- $x = 3k + 2$ za neki $k \in \mathbb{Z}$

$$x = 3k + 2 \Rightarrow x^2 = 9k^2 + 12k + \overset{3+1}{4} = 3 \cdot (\underbrace{3k^2 + 4k + 1}_{\in \mathbb{Z}}) + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 \text{ pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1}$$

$\boxed{x \in \mathbb{Z},\ 3 \nmid x \iff x^2 \text{ pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1}}$

$\boxed{\Leftarrow}$ (x^2 pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1 $\Rightarrow 3 \nmid x$)

Dokazujemo kontrapoziciju:

$$3 \mid x \Rightarrow x^2 \text{ pri dijeljenju s 3 ne daje ostatak 1}$$

Pretpostavimo da je $x \in \mathbb{Z}$ djeljiv s 3. Tada je $x = 3k$ za neki $k \in \mathbb{Z}$.

$$x = 3k \Rightarrow x^2 = 9k^2 \Rightarrow x^2 = 3 \cdot (\underbrace{3k^2}_{\in \mathbb{Z}})$$

Dakle, x^2 je djeljiv s 3. Stoga x^2 pri dijeljenju s 3 ne daje ostatak 1.

c) Odredili smo ranije klase elemenata 0 i 1.

$$[0]_\sim = 3\mathbb{Z}$$
$$[1]_\sim = \mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}$$

Kako je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu $\mathbb{Z}$ i

$$[0]_\sim \cup [1]_\sim = \mathbb{Z},$$

zaključujemo da se kvocijentni skup sastoji od samo dvije klase, tj.

$$\mathbb{Z}/\sim\, = \{3\mathbb{Z},\ \mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}\}.$$

Algoritam za ručno crtanje Hasseovih dijagrama

1) Pronađi matricu incidencije zadanog parcijalnog uređaja.
2) Dvostruko zaokruži sve jedinice na glavnoj dijagonali.
3) Ponavljaj redom sljedeće korake tako dugo dok sve jedinice u matrici incidencije ne budu dvostruko zaokružene.
   - 3.1 Traži stupce u matrici incidencije čije su sve jedinice jednostruko ili dvostruko zaokružene i ubaci pripadne elemente na sljedeći nivo u Hasseovom dijagramu.
   - 3.2 Jednostruko zaokruži sve nezaokružene jedinice u svim retcima od elemenata koji su upravo ubačeni u Hasseov dijagram.
   - 3.3 Provjeri sve jednostruko zaokružene jedinice koje se nalaze u retcima i stupcima do sada ubačenih elemenata u Hasseov dijagram i po potrebi dodaj odgovarajuće bridove u Hasseov dijagram, a nakon provjere sve takve jedinice dvostruko zaokruži.

Zadatak 5

Na skupu $T = \{2, 3, 4, 8, 9, 16, 32, 64, 81\}$ definirana je relacija parcijalnog uređaja $\preccurlyeq$ na sljedeći način:

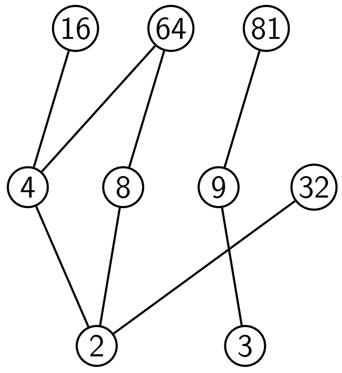
$$a \preccurlyeq b \overset{\text{def}}{\iff} b = a^r \text{ za neki } r \in \mathbb{N}.$$

a) *Odredite matricu incidencije zadanog parcijalnog uređaja.*
b) *Odredite najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente u parcijalno uređenom skupu T.*
c) *Nacrtajte Hasseov dijagram parcijalno uređenog skupa T.*
d) *Odredite supremum i infimum podskupova $\{4, 8\}$ i $\{4, 8, 32\}$.*
e) *Je li parcijalno uređen skup T mreža? Objasnite.*

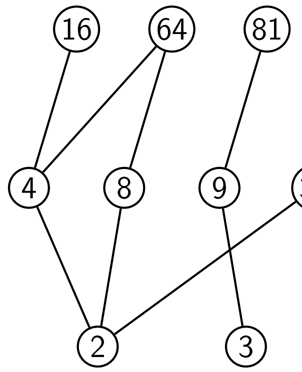
Rješenje

$a \backslash b$	2	3	4	8	9	16	32	64	81
2	1	0	1	1	0	1	1	1	0
3	0	1	0	0	1	0	0	0	1
4	0	0	1	0	0	1	0	1	0
8	0	0	0	1	0	0	0	1	0
9	0	0	0	0	1	0	0	0	1
16	0	0	0	0	0	1	0	0	0
32	0	0	0	0	0	0	1	0	0
64	0	0	0	0	0	0	0	1	0
81	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Hasseov dijagram



$a \preccurlyeq b \overset{\text{def}}{\iff} b = a^r$ za neki $r \in \mathbb{N}$



Najmanji element ne postoji

Minimalni elementi $2, 3$

Najveći element ne postoji

Maksimalni elementi $16, 64, 81, 32$

Parcijalno uređen skup T nije mreža jer npr. dvočlani podskup $\{2, 3\}$ nema infimum (niti supremum).

- Podskup $\{4, 8\}$

  Donje međe 2

  Gornje međe 64

  $\inf \{4, 8\} = 2$

  $\sup \{4, 8\} = 64$

- Podskup $\{4, 8, 32\}$

  Donje međe 2

  Gornje međe ne postoje

  $\inf \{4, 8, 32\} = 2$

  $\sup \{4, 8, 32\}$ ne postoji

Zadatak 6

Na skupu $B = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ *definirana je relacija parcijalnog uređaja* $\preccurlyeq$ *na sljedeći način:*

$$x \preccurlyeq y \stackrel{\text{def}}{\iff} (x \mid y) \lor (x \text{ je prost} \land (x < y))$$

a) *Odredite matricu incidencije zadanog parcijalnog uređaja.*

b) *Odredite najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente u parcijalno uređenom skupu* B.

c) *Nacrtajte Hasseov dijagram parcijalno uređenog skupa* B.

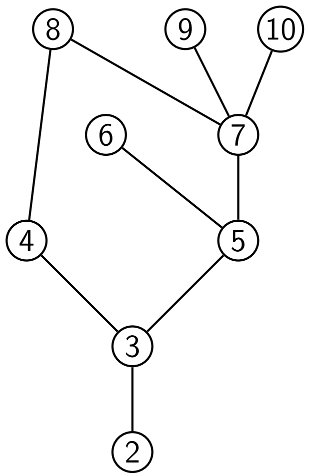
d) *Odredite supremum, infimum, maksimum i minimum podskupa* $\{4,5,6\}$.

e) *Napišite nekoliko lanaca u parcijalno uređenom skupu* B.

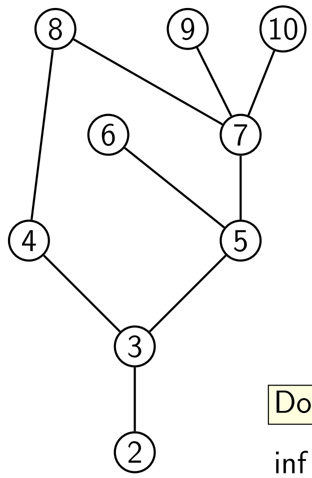
Rješenje

$x \backslash y$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	1	1	1	1	1	1	1	1
4	0	0	1	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	1	1	1	1	1	1
6	0	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	1	1	1	1
8	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Hasseov dijagram



$$\boxed{x \preccurlyeq y \stackrel{\text{def}}{\iff} (x \mid y) \lor (x \text{ je prost} \land (x < y))}$$



Najmanji element 2

Minimalni elementi 2

Najveći element ne postoji

Maksimalni elementi $8, 9, 10, 6$

Podskup $\{4,5,6\}$

Donje međe $2, 3$

$\inf\{4,5,6\} = 3$

$\min\{4,5,6\}$ ne postoji

Gornje međe ne postoje

$\sup\{4,5,6\}$ ne postoji

$\max\{4,5,6\}$ ne postoji

Neki lanci u B

$$\mathcal{L}_1 = \{2,3,5,7,8\}, \quad \mathcal{L}_2 = \{3,4,8\}, \quad \mathcal{L}_3 = \{5,6\}$$

Zadatak 7

Neka je $A = \{1,2,3\}$. *Na skupu* $\mathcal{P}(A)$ *definirana je relacija parcijalnog uređaja* $\preccurlyeq$ *na sljedeći način:*

$$X \preccurlyeq Y \stackrel{\text{def}}{\iff} (X = Y) \lor (k(X) < k(Y))$$

pri čemu su $k(X)$ *i* $k(Y)$ *kardinalni brojevi skupova* X *i* Y.

a) *Odredite matricu incidencije zadanog parcijalnog uređaja.*

b) *Odredite najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente u parcijalno uređenom skupu* $\mathcal{P}(A)$.

c) *Nacrtajte Hasseov dijagram parcijalno uređenog skupa* $\mathcal{P}(A)$.

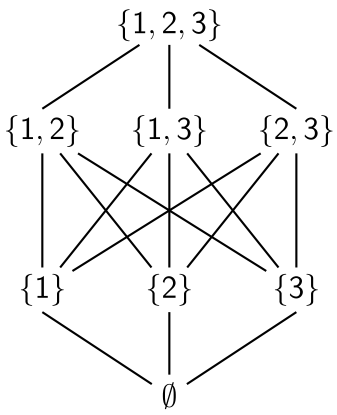
d) *Odredite supremum, infimum, maksimum i minimum podskupa* $C = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$.

e) *Je li* $\mathcal{P}(A)$ *linearno uređen skup? Je li* $\mathcal{P}(A)$ *mreža? Obrazložite svoje odgovore.*

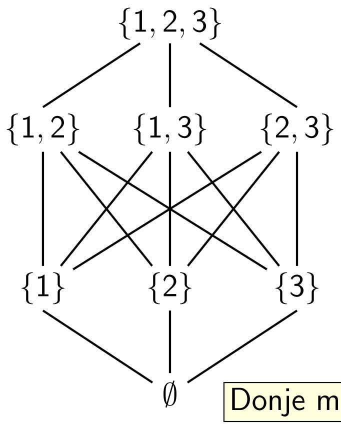
Rješenje

$X \backslash Y$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\emptyset$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\{1\}$	0	1	0	0	1	1	1	1
$\{2\}$	0	0	1	0	1	1	1	1
$\{3\}$	0	0	0	1	1	1	1	1
$\{1,2\}$	0	0	0	0	1	0	0	1
$\{1,3\}$	0	0	0	0	0	1	0	1
$\{2,3\}$	0	0	0	0	0	0	1	1
$\{1,2,3\}$	0	0	0	0	0	0	0	1

Hasseov dijagram



$$X \preccurlyeq Y \overset{\text{def}}{\iff} (X = Y) \vee (k(X) < k(Y))$$



Najmanji element $\emptyset$

Minimalni elementi $\emptyset$

Najveći element $\{1,2,3\}$

Maksimalni elementi $\{1,2,3\}$

$$C = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$$

Donje međe $\{1\},\{2\},\{3\},\emptyset$

inf C ne postoji

min C ne postoji

Gornje međe $\{1,2,3\}$

sup $C = \{1,2,3\}$

max C ne postoji

- $(\mathcal{P}(A), \preccurlyeq)$ nije linearno uređen skup jer npr. elementi $\{1\}$ i $\{2\}$ nisu usporedivi.
- $(\mathcal{P}(A), \preccurlyeq)$ nije mreža jer podskup C nema infimum.

Zadatak 8

Na skupu $\mathbb{N}$ definirana je relacija $\preccurlyeq$ s

$$a \preccurlyeq b \overset{\text{def}}{\iff} b = a^r \text{ za neki } r \in \mathbb{N}.$$

a) *Dokažite da je $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$ parcijalno uređen skup.*

b) *Odredite najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente u parcijalno uređenom skupu $\mathbb{N}$.*

c) *Odredite maksimalne elemente u $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, \preccurlyeq)$.*

Rješenje

$$a \preccurlyeq b \overset{\text{def}}{\iff} b = a^r \text{ za neki } r \in \mathbb{N}$$

a) Refleksivnost $\quad (\forall a \in \mathbb{N})(a \preccurlyeq a)$

$$a = a^1 \Rightarrow a \preccurlyeq a$$

$r = 1$

Antisimetričnost $\quad (\forall a, b \in \mathbb{N})\big((a \preccurlyeq b) \wedge (b \preccurlyeq a) \Rightarrow a = b\big)$

$$(a \preccurlyeq b) \wedge (b \preccurlyeq a) \Rightarrow \exists r_1, r_2 \in \mathbb{N},\ b = \boxed{a}^{r_1},\ a = \boxed{b^{r_2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(b^{r_2}\right)^{r_1} = b \Rightarrow b^{r_1 r_2} = b \Rightarrow r_1 r_2 = 1 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = b$$

jer su $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$

Tranzitivnost $\quad (\forall a, b, c \in \mathbb{N})\big((a \preccurlyeq b) \wedge (b \preccurlyeq c) \;\Rightarrow\; a \preccurlyeq c\big)$

$$(a \preccurlyeq b) \wedge (b \preccurlyeq c) \;\Rightarrow\; \exists r_1, r_2 \in \mathbb{N},\; b = \boxed{a^{r_1}},\; c = \boxed{b}^{r_2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; c = \left(a^{r_1}\right)^{r_2} \;\Rightarrow\; c = a^{r_1 r_2} \;\Rightarrow\; a \preccurlyeq c$$

jer je $r_1 r_2 \in \mathbb{N}$

$a \preccurlyeq b \overset{\text{def}}{\iff} b = a^r$ za neki $r \in \mathbb{N}$

b) **Najmanji element**

Pretpostavimo da je m najmanji element u parcijalno uređenom skupu $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$.

$$(\exists m \in \mathbb{N})(\forall a \in \mathbb{N})(m \preccurlyeq a)$$

$$(\exists m \in \mathbb{N})(\forall a \in \mathbb{N})(\exists r \in \mathbb{N})(a = m^r)$$

Dakle, svaki prirodni broj se može napisati kao prirodna potencija broja m. To je kontradikcija pa najmanji element u $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$ ne postoji.

$a \preccurlyeq b \overset{\text{def}}{\iff} b = a^r$ za neki $r \in \mathbb{N}$

Najveći element

Pretpostavimo da je M najveći element u parcijalno uređenom skupu $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$.

$$(\exists M \in \mathbb{N})(\forall a \in \mathbb{N})(a \preccurlyeq M)$$

$$(\exists M \in \mathbb{N})(\forall a \in \mathbb{N})(\exists r \in \mathbb{N})(M = a^r)$$

Dakle, M se može napisati kao prirodna potencija svakog prirodnog broja. To je kontradikcija pa najveći element u $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$ ne postoji.

$a \preccurlyeq b \overset{\text{def}}{\iff} b = a^r$ za neki $r \in \mathbb{N}$

Maksimalni elementi

Pretpostavimo da je M maksimalni element u parcijalno uređenom skupu $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$.

$$(\exists M \in \mathbb{N})(\forall a \in \mathbb{N})\big(M \preccurlyeq a \;\Rightarrow\; a = M\big)$$

$$(\exists M \in \mathbb{N})(\forall a \in \mathbb{N})\big((\exists r \in \mathbb{N})(a = M^r) \;\Rightarrow\; a = M\big)$$

Ako je $M \neq 1$, tada je $M \neq M^2$ i $M \preccurlyeq M^2$. Stoga je broj 1 jedini maksimalni element u parcijalno uređenom skupu $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$.

Minimalni elementi

Pretpostavimo da je m minimalni element u parcijalno uređenom skupu $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$.

$$(\exists m \in \mathbb{N})(\forall a \in \mathbb{N})\big(a \preccurlyeq m \;\Rightarrow\; a = m\big)$$

$$(\exists m \in \mathbb{N})(\forall a \in \mathbb{N})\big((\exists r \in \mathbb{N})(m = a^r) \;\Rightarrow\; a = m\big)$$

Dakle, m se ne može napisati kao prirodna potencija prirodnog broja ($r \neq 1$). Minimalni elementi su prirodni brojevi koji nisu potencije prirodnog broja. Na primjer: $6, 15, 17, 34, \ldots$

Specijalno, prosti brojevi su minimalni elementi.

Broj 1 je jedini element koji je minimalni i maksimalni.

$a \preccurlyeq b \overset{\text{def}}{\iff} b = a^r$ za neki $r \in \mathbb{N}$

c) Broj 1 je jedini maksimalni element u parcijalno uređenom skupu $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$.

Stoga parcijalno uređeni skup $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, \preccurlyeq)$ nema niti jedan maksimalni element.

Zornova lema

Svaki neprazni parcijalno uređeni skup u kojemu svaki lanac ima gornju među, sadrži barem jedan maksimalni element.

- Obrat Zornove leme ne vrijedi. Jedan protuprimjer je upravo $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$.
- Na konačnim skupovima Zornova lema je trivijalna činjenica.