Matematička indukcija

Diskretne strukture s teorijom grafova

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Zadatak 1

Ako je šalica razbijena na n dijelova, dokažite da je za sastavljanje šalice potrebno $n-1$ lijepljenja. Pri svakom lijepljenju spajamo samo dva dijela, bilo krhotine ili već zalijepljene dijelove šalice.

Rješenje

- Baza indukcije

  Bazu ćemo provjeriti na dva slučaja $n=1$ i $n=2$, iako je dovoljno provjeriti samo za $n=1$.

  Ako je $n=1$, tada šalica zapravo nije razbijena pa je za sastavljanje šalice potrebno 0 lijepljenja $(1-1=0)$.

  Ako je $n=2$, tada je šalica razbijena na dva dijela. Jasno je da u tom slučaju za sastavljanje šalice potrebno jedno lijepljenje $(2-1=1)$.

- Korak indukcije

  Pretpostavimo da je za sastavljanje šalice razbijene na n dijelova potrebno $n-1$ lijepljenja.

  Ako je šalica razbijena na $n+1$ dijelova, nakon prvog lijepljenja ostat će još n dijelova koje treba spojiti u cjelinu.
  Prema pretpostavci indukcije njih možemo spojiti u cjelinu s $n-1$ lijepljenja.
  Sve zajedno smo koristili $1+(n-1)=n$ lijepljenja.

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 2

Na feštu je došlo n ljudi i svaka dva (različita) čovjeka su međusobno nazdravili. Matematičkom indukcijom dokažite da je ukupni broj zdravica jednak $\frac{n(n-1)}{2}$.

Rješenje

- Baza indukcije: $n=1$

  Ako je na feštu došao samo jedan čovjek, tada on nije imao s kime nazdraviti. Nadalje, za $n=1$ je $\frac{n(n-1)}{2}=0$ pa tvrdnja vrijedi.

- Korak indukcije

  Pretpostavimo da je ukupni broj zdravica na fešti od n ljudi jednak $\frac{n(n-1)}{2}$ pri čemu su svaka dva čovjeka međusobno nazdravili.

  Neka je na fešti ukupno $n+1$ ljudi $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ pri čemu su svaka dva čovjeka međusobno nazdravili.

  Po pretpostavci indukcije ukupni broj zdravica između ljudi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jednak je $\frac{n(n-1)}{2}$.

  Nadalje, osoba a_{n+1} je po pretpostavci nazdravila sa svim preostalim osobama i taj broj zdravica je jednak n.

  Stoga je ukupni broj zdravica jednak

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1)+2n}{2} = \frac{(n-1+2)n}{2} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Napomena

- Zadatak se lagano može riješiti pomoću elementarne kombinatorike.
- Ako ljude poistovjetimo s elementima nekog konačnog skupa, tada su zdravice zapravo dvočlani podskupovi tog skupa. Svaku zdravicu određuju dvije osobe pri čemu poredak tih osoba nije bitan.
- Ukupni broj zdravica jednak je ukupnom broju svi dvočlanih podskupova n-članog skupa, što je jednako $\binom{n}{2}$.

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Zadatak 3

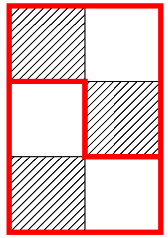
Dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ šahovsku ploču dimenzija $3 \times 2n$ moguće prekriti pločicama oblika . Pritom se podrazumijeva da je svako polje samo jedanput prekriveno i da pločice ne vire izvan ploče.

Rješenje

- Baza indukcije: $n = 1$

  Radi se o ploči dimenzija 3×2.

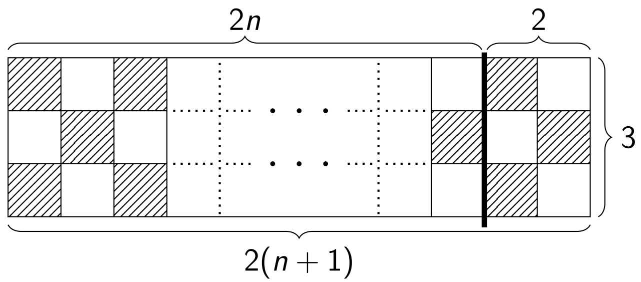
  Takvu ploču je moguće prekriti pločicama oblika kako je prikazano na slici.



- Korak indukcije

  Pretpostavimo da je za neki $n \in \mathbb{N}$ šahovsku ploču dimenzija $3 \times 2n$ moguće prekriti pločicama oblika .

Promatramo šahovsku ploču dimenzija $3 \times 2(n+1)$.



Tu šahovsku ploču možemo podijeliti na dvije manje ploče dimenzija $3 \times 2n$ i 3×2.

Prema bazi indukcije ploču dimenzija 3×2 možemo prekriti pločicama oblika .

Po pretpostavci indukcije ploču dimenzija $3 \times 2n$ možemo prekriti pločicama oblika .

Iz svega navedenog slijedi da ploču dimenzija $3 \times 2(n+1)$ također možemo prekriti pločicama oblika pa je tvrdnja dokazana.

Primjer 1

- $P(1)$ je istinita tvrdnja.
- Ako je $P(k)$ istinita tvrdnja, tada je $P(k+2)$ istinita tvrdnja.

$$P(1) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(5) \Rightarrow P(7) \Rightarrow P(9) \Rightarrow P(11) \Rightarrow \cdots$$

Zaključak

$P(n)$ je tvrdnja koja vrijedi za sve neparne prirodne brojeve.

Primjer 2

- $P(2)$ je istinita tvrdnja.
- Ako je $P(k)$ istinita tvrdnja, tada je $P(k+2)$ istinita tvrdnja.

$$P(2) \Rightarrow P(4) \Rightarrow P(6) \Rightarrow P(8) \Rightarrow P(10) \Rightarrow P(12) \Rightarrow \cdots$$

Zaključak

$P(n)$ je tvrdnja koja vrijedi za sve parne prirodne brojeve.

Primjer 3

- $P(1)$ i $P(2)$ su istinite tvrdnje.
- Ako je $P(k)$ istinita tvrdnja, tada je $P(k+2)$ istinita tvrdnja.

$$P(1) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(5) \Rightarrow P(7) \Rightarrow P(9) \Rightarrow P(11) \Rightarrow \cdots$$

$$P(2) \Rightarrow P(4) \Rightarrow P(6) \Rightarrow P(8) \Rightarrow P(10) \Rightarrow P(12) \Rightarrow \cdots$$

Zaključak

$P(n)$ je tvrdnja koja vrijedi za sve prirodne brojeve.

Primjer 4

- $P(1)$, $P(2)$ i $P(3)$ su istinite tvrdnje.
- Ako je $P(k)$ istinita tvrdnja, tada je $P(k+3)$ istinita tvrdnja.

$$P(1) \Rightarrow P(4) \Rightarrow P(7) \Rightarrow P(10) \Rightarrow P(13) \Rightarrow P(16) \Rightarrow \cdots$$

$$P(2) \Rightarrow P(5) \Rightarrow P(8) \Rightarrow P(11) \Rightarrow P(14) \Rightarrow P(17) \Rightarrow \cdots$$

$$P(3) \Rightarrow P(6) \Rightarrow P(9) \Rightarrow P(12) \Rightarrow P(15) \Rightarrow P(18) \Rightarrow \cdots$$

Zaključak

$P(n)$ je tvrdnja koja vrijedi za sve prirodne brojeve.

Princip matematičke indukcije (slaba forma, općeniti oblik)

Neka je $P(n)$ tvrdnja koja ovisi o $n \in \mathbb{N}$. Ako vrijedi:

a) $P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n_0+m-1)$ su istinite tvrdnje.

b) Ako je $P(k)$ istinito za neki $k \geqslant n_0$, tada je istinito i $P(k+m)$.

Tada je $P(n)$ istinita tvrdnja za svaki prirodni broj $n \geqslant n_0$.

Zadatak 4

Pomoću matematičke indukcije dokažite da je svaku cjelobrojnu poštarinu veću ili jednaku od 20 *kuna moguće platiti samo pomoću maraka od* 3 *kn i* 7 *kn.*

Rješenje

- Baza indukcije

$\boxed{n=20}$ Poštarinu od 20 kuna moguće je platiti pomoću dvije marke od 7 kn i dvije marke od 3 kn.

$\boxed{n=21}$ Poštarinu od 21 kune moguće je platiti pomoću tri marke od 7 kn ili pomoću sedam marki od 3 kn.

$\boxed{n=22}$ Poštarinu od 22 kune moguće je platiti pomoću jedne marke od 7 kn i pet marki od 3 kn.

- Korak indukcije

Pretpostavimo da je za neki prirodni broj $n \geqslant 20$ poštarinu od n kuna moguće platiti samo pomoći marki od 3 kn i 7 kn.

Želimo dokazati da je tada poštarinu od $n+3$ kune također moguće platiti samo pomoću marki od 3 kn i 7 kn.

Po pretpostavci indukcije poštarinu od n kuna je moguće platiti samo pomoću marki od 3 kn i 7 kn. Ukoliko toj poštarini dodamo još jednu marku od 3 kn, platit ćemo poštarinu od $n+3$ kune samo pomoću marki od 3 kn i 7 kn.

Princip matematičke indukcije (jaka forma)

Neka je $P(n)$ tvrdnja koja ovisi o $n \in \mathbb{N}$. Ako vrijedi:

a) $P(n_0)$ je istinita za neki $n_0 \in \mathbb{N}$.

b) Neka je $k > n_0$ proizvoljni prirodni broj. Ako je $P(m)$ istinito za svaki prirodni broj m, $n_0 \leqslant m < k$, tada je istinito i $P(k)$.

Tada je $P(n)$ istinita tvrdnja za svaki prirodni broj $n \geqslant n_0$.

Zadatak 5

Niz brojeva $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ *koji počinje s* $0, 1, 5, 19, \ldots$ *definiran je rekurzijom*

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad a_0 = 0, a_1 = 1.$$

Dokažite matematičkom indukcijom da se n-ti član ovog niza može izračunati pomoću formule

$$a_n = 3^n - 2^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

$\boxed{a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad a_0 = 0, a_1 = 1}$ $\boxed{a_n = 3^n - 2^n}$

Rješenje

- Baza indukcije

  Tvrdnja vrijedi za $n = 0$ i $n = 1$.

  $$a_0 = 3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0, \qquad a_1 = 3^1 - 2^1 = 3 - 2 = 1$$

- Korak indukcije

  Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Pretpostavimo da vrijedi $a_k = 3^k - 2^k$ za sve prirodne brojeve $0 \leqslant k < n$.

  Želimo dokazati da tvrdnja vrijedi za prirodni broj n, tj. da je $a_n = 3^n - 2^n$.

$\boxed{\text{pretpostavka: } a_k = 3^k - 2^k \text{ za sve } 0 \leqslant k < n}$

$\boxed{\text{želimo dokazati: } a_n = 3^n - 2^n}$

$\boxed{a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n}$

pretpostavka indukcije za $k = n-1$

pretpostavka indukcije za $k = n-2$

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} = 5 \cdot \left(3^{n-1} - 2^{n-1}\right) - 6 \cdot \left(3^{n-2} - 2^{n-2}\right) =$$

$$= 5 \cdot \frac{3^n}{3} - 5 \cdot \frac{2^n}{2} - 6 \cdot \frac{3^n}{3^2} + 6 \cdot \frac{2^n}{2^2} =$$

$$= \frac{5}{3} \cdot 3^n - \frac{5}{2} \cdot 2^n - \frac{2}{3} \cdot 3^n + \frac{3}{2} \cdot 2^n =$$

$$= \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\right) \cdot 3^n + \left(-\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right) \cdot 2^n =$$

$$= 3^n - 2^n$$