Bojanje i sparivanje u grafovima

DISKRETNE STRUKTURE S TEORIJOM GRAFOVA

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Neka svojstva planarnih grafova

- Neka je G planarni graf s ω komponenenata povezanosti. Tada je $\nu - \varepsilon + \phi = 1 + \omega$.
- Neka je G jednostavni planarni graf s barem tri vrha. Tada je $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$.
- $K_{3,3}$ i K_5 nisu planarni grafovi.
- Ako je G jednostavni planarni graf, tada je $\delta(G) \leqslant 5$.
- Neka je G planarni graf čiji struk je jednak k, $k > 3$. Tada je $\varepsilon \leqslant \frac{k}{k-2}(\nu - 2)$.
- Graf G je planarni ako i samo ako ne sadrži podgraf homeomorfan s K_5 ili $K_{3,3}$.

Bojanje vrhova grafa

- Za svaki graf G vrijedi $\gamma(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.
- Brooks Neka je G jednostavni i povezani graf koji nije potpun, niti je neparni ciklus. Tada je $\gamma(G) \leqslant \Delta(G)$.
- Ako je K_r podgraf grafa G, tada je $\gamma(G) \geqslant r$.
- Teorem o četiri boje Za svaki planarni graf G je $\gamma(G) \leqslant 4$.
- Neka je G jednostavni graf. Ako K_r nije podgraf grafa G za neki $4 \leqslant r \leqslant \Delta(G) + 1$, tada vrijedi $\gamma(G) \leqslant \frac{r-1}{r}(\Delta(G) + 2)$.
- Neka je V_i skup svih vrhova stupnja i u jednostavnom grafu G. Neka je $s = \max\limits_{i \geqslant \frac{\Delta(G)+2}{2}} k(V_i)$. Tada je $\gamma(G) \leqslant \left\lceil \frac{s}{s+1}(\Delta(G) + 2) \right\rceil$.

Bojanje vrhova grafa

- Neka je G neprazni graf bez petlji. Graf G je bipartitni graf ako i samo ako je $\gamma(G) = 2$.

$$\gamma(K_n) = n \qquad \gamma(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ 3, & \text{ako je } n \text{ neparan} \end{cases}$$

- Neka su G_1 i G_2 disjunktni grafovi. Tada je

$$\gamma(G_1 \vee G_2) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2).$$

Nadalje, $G_1 \vee G_2$ je kritični graf akko su G_1 i G_2 kritični grafovi.

Bojanje bridova grafa

- König Ako je G bipartitni graf, tada je $\gamma'(G) = \Delta(G)$.
- Vizing, Gupta Ako je G jednostavni graf, tada je $\gamma'(G) = \Delta(G)$ ili $\gamma'(G) = \Delta(G) + 1$.
- Neka je G jednostavni graf s ν vrhova i ε bridova. Ako vrijedi

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor,$$

tada je $\gamma'(G) = \Delta(G) + 1$.

Bojanje bridova grafa

$$\gamma'(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ 3, & \text{ako je } n \text{ neparan} \end{cases}$$

$$\gamma'(K_n) = \begin{cases} n-1, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ n, & \text{ako je } n \text{ neparan} \end{cases}$$

$$\gamma'(K_{m,n}) = \max\{m, n\}$$

Bojanje bridova grafa

- Vizing Neka je G graf bez petlji. Tada vrijedi

$$\Delta(G) \leqslant \gamma'(G) \leqslant \Delta(G) + \mu(G)$$

gdje je $\mu(G)$ multiplicitet grafa G, tj. maksimalni broj bridova između dva vrha u grafu G.

- Shannon Neka je G graf bez petlji. Tada je $\gamma'(G) \leqslant \left\lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \right\rfloor$.
- Neka je G jednostavni planarni graf za koji vrijedi $\Delta(G) \geqslant 8$. Tada je $\gamma'(G) = \Delta(G)$.

Zadatak 1

Neka je G jednostavni planarni graf koji ima 100 bridova. Koliko minimalno vrhova ima graf G?

Rješenje

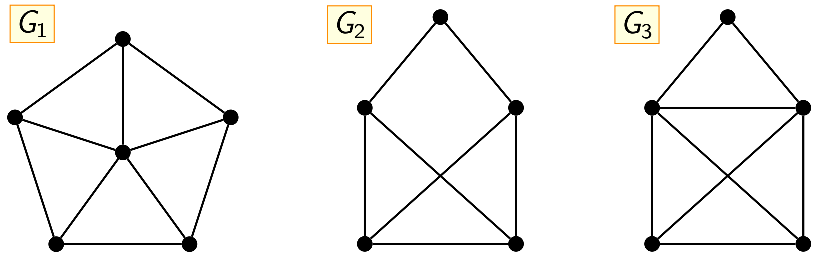
Neka je G jednostavni planarni graf s barem tri vrha. Tada je $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$.

$$\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$$
$$3\nu \geqslant \varepsilon + 6$$
$$\nu \geqslant \frac{\varepsilon + 6}{3}$$
$$\nu \geqslant \frac{100 + 6}{3}$$
$$\nu \geqslant \frac{106}{3} \approx 35.33$$
$$\nu \geqslant 36$$

Graf G ima barem 36 vrhova.

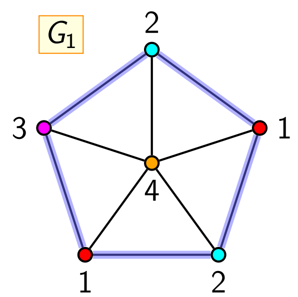
Zadatak 2

Odredite kromatske i bridno kromatske brojeve grafova G_1, G_2 i G_3. Jesu li neki od zadanih grafova kritični grafovi?

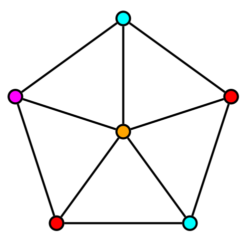


Rješenje

- Za bojanje vrhova koji pripadaju neparnom ciklusu C_5 potrebne su 3 boje.
- Kako je unutarnji vrh susjedan sa svim vrhovima ciklusa C_5, za njegovo bojanje potrebna je četvrta boja.
- Stoga je $\gamma(G_1) = 4$. ← G_1 nema 4-kliku.

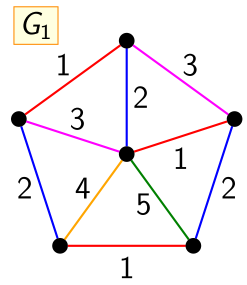


- G_1 je kritični graf jer brisanjem bilo kojeg brida dobivamo podgraf koji ima manji kromatski broj od početnog grafa.
- Graf G_1 je 4-kritični graf.



- $\Delta(G_1) = 5 \implies \gamma'(G_1) = 5$ ili $\gamma'(G_1) = 6$

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$



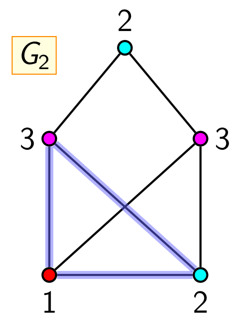
- $\nu = 6$, $\varepsilon = 10$
- $\varepsilon > \Delta(G_1) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 5 \cdot \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 15$

$\boxed{\gamma'(G_1) = 5}$

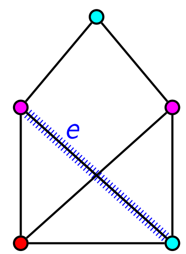
nejednakost ne vrijedi pa ne možemo donijeti konkretnu odluku za $\gamma'(G_1)$

kod Petersenovog grafa P nejednakost također ne vrijedi, ali je ipak $\gamma'(P) = \Delta(P) + 1$

- U grafu G_2 postoji 3-klika pa su potrebne barem 3 boje za bojanje vrhova grafa G_2.
- $\boxed{\gamma(G_2) = 3}$



- G_2 nije kritični graf jer brisanjem brida e dobivamo podgraf čiji je kromatski broj i dalje jednak 3.
- Dakle, postoji barem jedan pravi podgraf grafa G_2 čiji je kromatski broj jednak kromatskom broju grafa G_2. Stoga G_2 nije kritični graf.

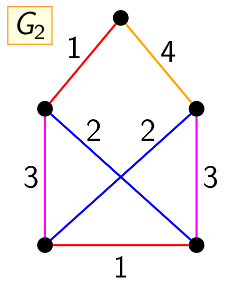


- $\Delta(G_2) = 3 \implies \gamma'(G_2) = 3$ ili $\gamma'(G_2) = 4$

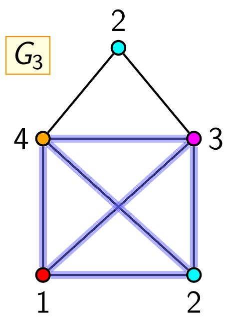
$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \;\Rightarrow\; \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

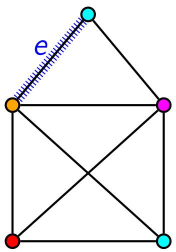
- $\nu = 5,\ \varepsilon = 7$
- $\varepsilon > \Delta(G_2) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 7 > 3 \cdot \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 7 > 6$

nejednakost vrijedi pa možemo zaključiti da je $\boxed{\gamma'(G_2) = 4}$



- U grafu G_3 postoji 4-klika pa su potrebne barem 4 boje za bojanje vrhova grafa G_3.
- $\boxed{\gamma(G_3) = 4}$
- G_3 nije kritični graf jer brisanjem brida e dobivamo podgraf čiji je kromatski broj i dalje jednak 4.
- Dakle, postoji barem jedan pravi podgraf grafa G_3 čiji je kromatski broj jednak kromatskom broju grafa G_3. Stoga G_3 nije kritični graf.



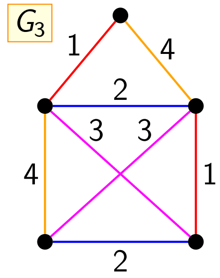


- $\Delta(G_3) = 4 \implies \gamma'(G_3) = 4$ ili $\gamma'(G_3) = 5$

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \;\Rightarrow\; \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

- $\nu = 5,\ \varepsilon = 8$
- $\varepsilon > \Delta(G_3) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 8 > 4 \cdot \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 8 > 8$

nejednakost ne vrijedi pa ne možemo donijeti konkretnu odluku za $\gamma'(G_3)$



$\boxed{\gamma'(G_3) = 4}$

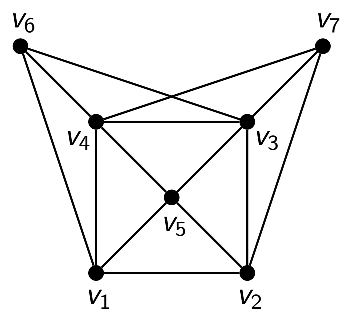
Zadatak 3

Pohlepnim algoritmom pronađite jedno bojanje vrhova grafa G tako da koristite:

a) *Welsh-Powellov algoritam,*

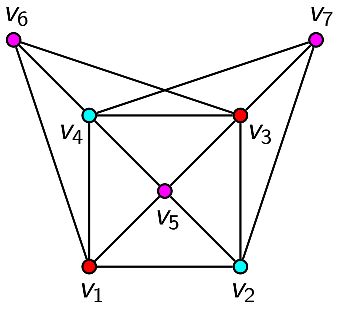
b) *slučajni raspored vrhova,*

c) *Brèlazov algoritam.*



Rješenje

Welsh-Powellov algoritam



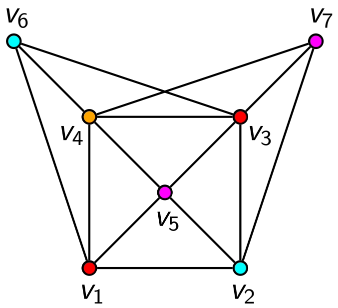
- Odredimo stupnjeve svih vrhova.

  $d(v_1) = 4,\ d(v_2) = 4,\ d(v_3) = 5,$
  $d(v_4) = 5,\ d(v_5) = 4,\ d(v_6) = 3,$
  $d(v_7) = 3$
- Sortiramo vrhove silazno prema njihovim stupnjevima.

$$v_3, v_4, v_1, v_2, v_5, v_7, v_6$$

- Dobivenim redoslijedom bojamo vrhove grafa G.

vrh	v_3	v_4	v_1	v_2	v_5	v_7	v_6
boja	1	2	1	2	3	3	3



Slučajni raspored vrhova

- Odaberemo proizvoljni poredak vrhova.

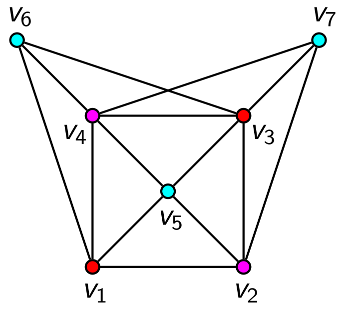
$$v_1, v_2, v_5, v_6, v_4, v_3, v_7$$

- Odabranim redoslijedom bojamo vrhove grafa G.

vrh	v_1	v_2	v_5	v_6	v_4	v_3	v_7
boja	1	2	3	2	4	1	3

- Dobiveno bojanje vrhova nije bojanje s minimalnim brojem boja jer je $\gamma(G) = 3$.

Brèlazov algoritam



- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.	2	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_4	3
5.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_1	1
6.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2	$*$	v_7	2
7.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	v_6	2

Pohlepno bojanje bridova grafa

Indirektna metoda

Problem bojanja bridova grafa G je identičan problemu bojanja vrhova njegovog linijskog grafa $L(G)$. Dakle, umjesto da bojamo bridove grafa G, primijenimo neki pohlepni algoritam na bojanje vrhova grafa $L(G)$.

Direktne metode

To su specijalizirane metode za bojanje bridova grafa G. Dvije najpoznatije takve metode su:

- Naivno pohlepno bojanje bridova
- Vizingova metoda

Naivno pohlepno bojanje bridova

- Funkcionira na analogni način kao i pohlepno bojanje vrhova grafa sa slučajnim poretkom vrhova.
- Ova metoda koristi najviše $2\Delta(G) - 1$ boja.
- Dakle, u najgorem mogućem slučaju koristi manje od dvostrukog broja potrebnih boja jer je uvijek $\gamma'(G) \geqslant \Delta(G)$.

Zbog čega ista takva pohlepna metoda nije toliko dobro učinkovita kod bojanja vrhova grafa?

Vizingova metoda

- Temelji se na konstruktivnom dokazu Vizingovog teorema u kojemu je opisan postupak rebojanja bridova.
- Kod bojanja bridova jednostavnog grafa u najgorem slučaju koristiti samo jednu boju više od minimalnog broja potrebnih boja.
- U općenitom slučaju, kod grafa G bez petlji koristit će samo $\mu(G)$ boja više od minimalnog broja potrebnih boja, pri čemu je $\mu(G)$ multiplicitet grafa G.
- Procedura za rebojanje bridova po potrebi mijenja boje nekim već obojanim bridovima kako bi se mogao obojati novi brid, a da se pritom ne koristi više od $\Delta(G) + \mu(G)$ boja.

Bergeov teorem

Sparivanje M u grafu G je najveće ako i samo ako G ne sadrži M-uvećani put.

Hallov teorem

Neka je G bipartitni graf s biparticijom (X, Y). Tada G sadrži sparivanje koje zasićuje svaki vrh u X ako i samo ako je $k(S(T)) \geqslant k(T)$ za svaki $T \subseteq X$.

Korolar Hallovog teorema

Ako je G neprazni s-regularni bipartitni graf, tada G ima savršeno sparivanje M.

Teorem o ženidbi (životna interpretacija korolara)

Svaka djevojka u selu pozna točno k mladića, a svaki mladić pozna točno k djevojaka. Tada se svaka djevojka može udati za mladića kojeg pozna i svaki mladić može oženiti djevojku koju pozna. Drugim riječima, djevojke i mladići se mogu savršeno spariti.

Algoritam za najveće sparivanje

- Algoritam za najveće sparivanje u grafu G temelji se na konstruktivnom dokazu Bergeovog teorema.
- Modificiranim BFS ili DFS algoritmom se konstruira šuma alternirajućih stabala s obzirom na trenutno sparivanje M. Pomoću te šume se pronađe neki M-uvećani put.
- Pomoću dobivenog M-uvećanog puta se konstruira novo sparivanje M' za koje je $k(M') = k(M) + 1$. Isti postupak se ponavlja dalje za sparivanje M'.
- Postupak se ponavlja tako dugo dok postoje uvećani putovi s obzirom na trenutno sparivanje. Ako u nekom koraku više ne postoje M-uvećani putovi, tada je trenutno sparivanje M najveće sparivanje u grafu G.

Edmondsov algoritam – grafovi koji nisu bipartitni

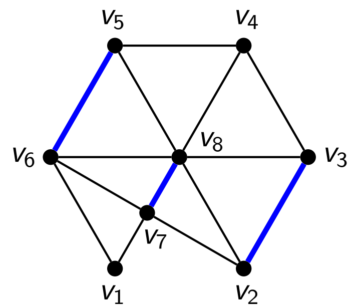
- Neparni ciklusi u grafu stvaraju probleme modificiranom BFS i DFS algoritmu. Stoga ova dva algoritma dobro funkcioniraju jedino na bipartitnim grafovima. Uz dodatnu modifikaciju mogu dobro funkcionirati na svim grafovima.
- Ako modificirani BFS ili DFS algoritam naiđe na **cvijet** u grafu (neparni ciklus duljine $2k+1$ čijih k bridova pripada sparivanju M), tada se taj cvijet stegne u njegov bazni vrh (vrh koji je susjedan s dva brida tog ciklusa koji ne pripadaju sparivanju M.)
- Na taj način pomažemo modificiranom BFS ili DFS algoritmu da pronađe M-uvećani put u grafu G' u kojemu su svi cvijetovi na koje je naišao u grafu G stegnuti u njihove bazne vrhove.
- Ponovnim rastezanjem svih stegnutih cvijetova pronalazi se M-uvećani put u početnom grafu G.

Još neke napomene

- Najveće sparivanje u bipartitnom grafu može se pronaći i pomoću maksimalnog protoka koristeći Bellman-Fordov algoritam.
- Razlikujte maksimalno sparivanje od najvećeg sparivanja.
- Maksimalno sparivanje u grafu se lagano pronađe pohlepnim algoritmom.
- Maksimalno sparivanje u grafu općenito nije jedinstveno.
- Najveće sparivanje u grafu također općenito nije jedinstveno.

Zadatak 4

Zadan je graf G i sparivanje $M = \{\{v_2, v_3\}, \{v_5, v_6\}, \{v_7, v_8\}\}$ u grafu G čiji bridovi su deblje označeni na slici.



a) *Je li M maksimalno sparivanje u grafu G? Obrazložite odgovor.*

b) *Napišite barem dva M-uvećana puta u grafu G ukoliko oni postoje.*

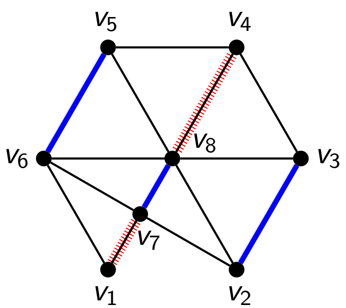
c) *Je li M najveće sparivanje u grafu G? Ukoliko nije, pronađite jedno najveće sparivanje pomoću nekog M-uvećanog puta.*

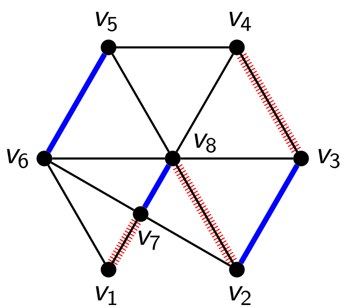
Rješenje

a) M je maksimalno sparivanje u grafu G jer ne postoji sparivanje M' u grafu G za koje bi vrijedilo $M \subset M'$.

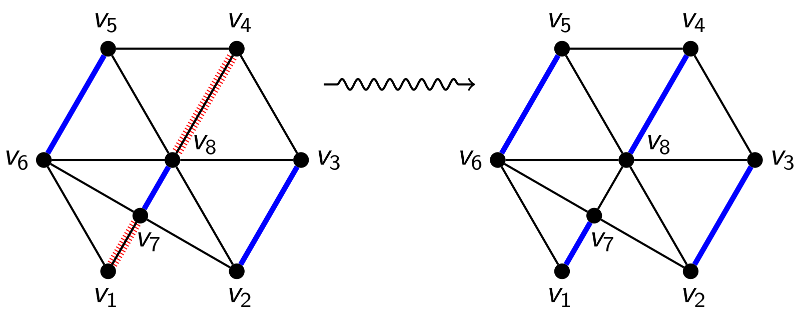
b) Dva M-uvećana puta u grafu G:

$v_1 v_7 v_8 v_4$ $\qquad$ $v_4 v_3 v_2 v_8 v_7 v_1$

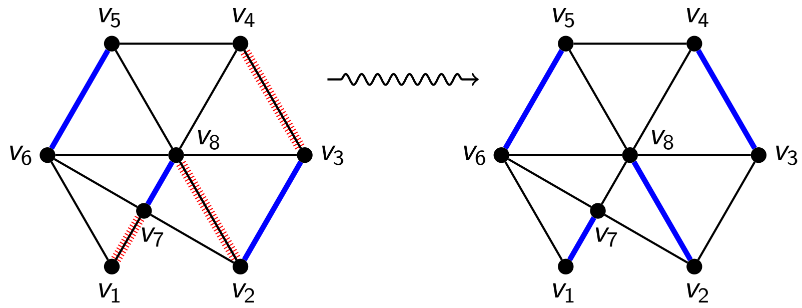




c) M nije najveće sparivanje u grafu G jer postoje M-uvećani putovi.



Sparivanje $M_1 = \{\{v_2, v_3\}, \{v_5, v_6\}, \{v_1, v_7\}, \{v_4, v_8\}\}$ je najveće sparivanje u grafu G koje je ujedno i savršeno sparivanje jer su svi vrhovi M_1-zasićeni.



Sparivanje $M_2 = \{\{v_1, v_7\}, \{v_5, v_6\}, \{v_2, v_8\}, \{v_3, v_4\}\}$ je najveće sparivanje u grafu G koje je ujedno i savršeno sparivanje jer su svi vrhovi M_2-zasićeni.

Zadatak 5

Tvornica ima pet velikih strojeva S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 koji zajedno s ostalim manjim strojevima sudjeluju u proizvodnji. Radom spomenutih strojeva upravlja računalo. U pojedinom koraku proizvodnje računalo treba svakom stroju pridružiti određeni posao kojeg stroj treba obaviti. Međutim, svaki od spomenutih velikih strojeva može obavljati samo određene vrste poslova i ne može u jednom koraku proizvodnje obavljati više različitih poslova. U jednom od koraka proizvodnje veliki strojevi trebaju obaviti što je moguće veći broj poslova $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$. U donjoj tablici je prikazano koje sve poslove može obavljati pojedini stroj tako da je na odgovarajuće mjesto stavljen znak ✓.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
S_1	✓	✓	✓			✓
S_2				✓	✓	
S_3				✓	✓	
S_4	✓	✓	✓	✓		✓
S_5				✓	✓	

Pitanje je kako da računalo rasporedi poslove strojevima tako da u promatranom koraku proizvodnje bude obavljeno što je moguće više poslova.

a) *Modelirajte problem pomoću grafova tako da kratko i jasno opišete na koji ćete način konstruirati graf i na koji problem iz teorije grafova svodite ovaj realni problem.*

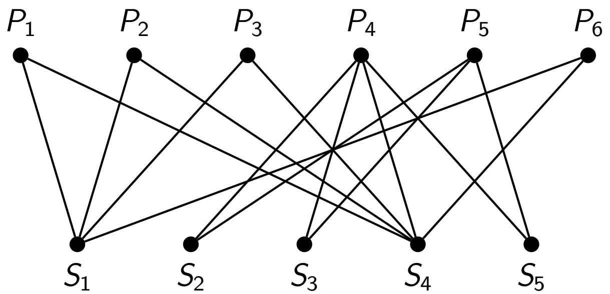
b) *Može li računalo rasporediti poslove strojevima tako da niti jedan stroj ne miruje u promatranom koraku proizvodnje? Dokažite svoju tvrdnju jezikom teorije grafova.*

c) *Napravite jedan optimalni raspored poslova strojevima za promatrani korak proizvodnje.*

Rješenje

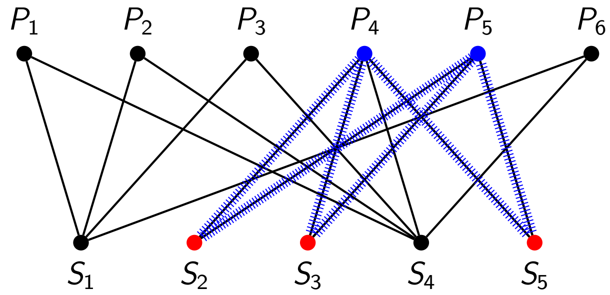
a) Neka je G bipartitni graf s biparticijom (X, Y) pri čemu je $X = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ i $Y = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$.

Vrhovi S_i i P_j su susjedni jedino ako stroj S_i može obavljati posao P_j.



Promatrani realni problem se svodi na traženje najvećeg sparivanja u grafu G.

b) Koristimo Hallov teorem.

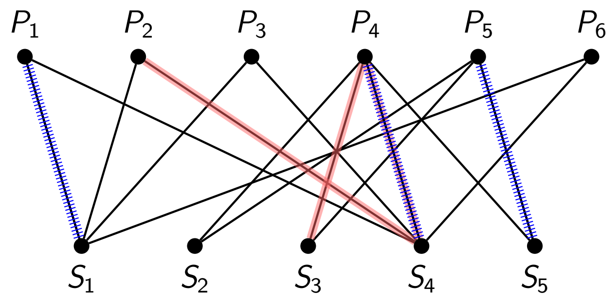


- $T \subseteq X, \quad T = \{S_2, S_3, S_5\}$
- $S(T) = \{P_4, P_5\}$
- $k(S(T)) < k(T)$

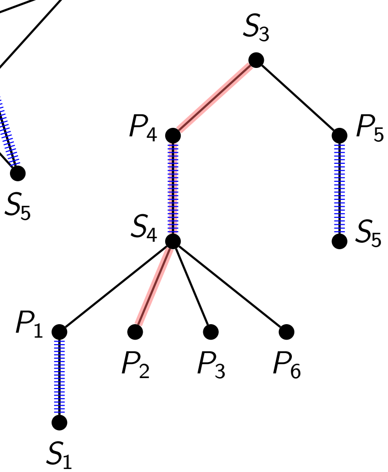
Ne postoji sparivanje u G koje zasićuje sve vrhove iz skupa X.

Nije moguće rasporediti poslove strojevima tako da niti jedan stroj ne miruje u promatranom koraku proizvodnje.

c)



Modificirani BFS

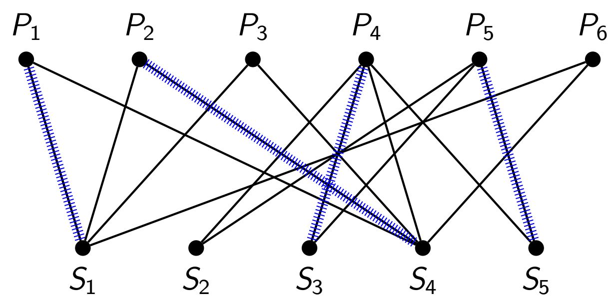


maksimalno sparivanje

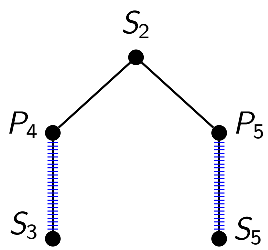
$\{\{S_1, P_1\}, \{S_4, P_4\}, \{S_5, P_5\}\}$

uvećani put $S_3P_4S_4P_2$

c)



Modificirani BFS



novo sparivanje

$\{\{S_1, P_1\}, \{S_3, P_4\}, \{S_4, P_2\}, \{S_5, P_5\}\}$ ← najveće sparivanje

uvećani put ne postoji

Zadatak 6

Na prvoj godini diplomskog studija studenti mogu odabrati neke od 7 izbornih predmeta $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$. Ako postoji barem jedan student koji je upisao različite predmete P_i i P_j, tada je u donjoj tablici na odgovarajuće mjesto stavljen znak $*$.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_1		$*$	$*$	$*$		$*$	$*$
P_2	$*$		$*$				$*$
P_3	$*$	$*$		$*$			
P_4	$*$		$*$		$*$	$*$	
P_5				$*$		$*$	
P_6	$*$			$*$	$*$		$*$
P_7	$*$	$*$				$*$	

Fakultet želi organizirati kolokvije iz tih predmeta tako da svaki student ima najviše jedan kolokvij iz nekog od tih predmeta u jednom danu.

a) *Modelirajte problem pomoću grafova tako da kratko i jasno opišete na koji način ćete konstruirati graf i na koji problem iz teorije grafova svodite ovaj realni problem.*

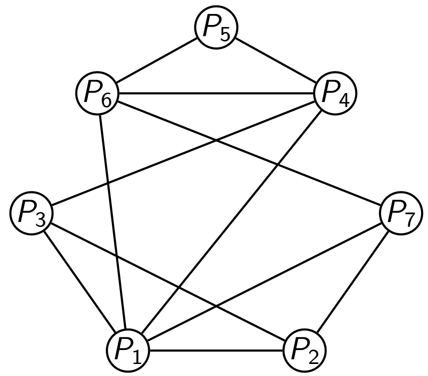
b) *Koliko je minimalno dana potrebno kako bi se održali svi kolokviji iz navedenih predmeta? Dokažite svoju tvrdnju jezikom teorije grafova.*

c) *Napravite jedan takav raspored održavanja kolokvija s minimalnim brojem dana.*

Rješenje

a) Neka je G graf sa skupom vrhova $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7\}$.

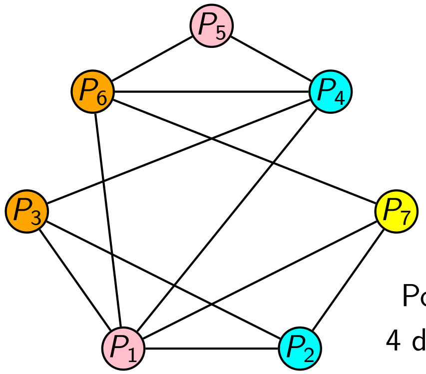
Različiti vrhovi P_i i P_j su susjedni jedino ako postoji barem jedan student koji je upisao predmete P_i i P_j.



Promatrani realni problem se svodi na određivanje kromatskog broja grafa G i bojanje njegovih vrhova.

b)

$\gamma(G) = 4$

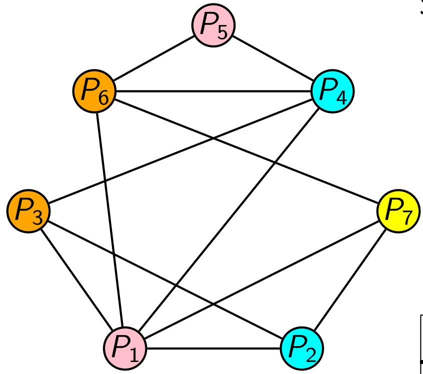


Potrebna su barem 4 dana za održavanje svih kolokvija.

- Pogledajmo podgraf $G - P_7$.
- Za bojanje 3-klike $\{P_1, P_2, P_3\}$ potrebne su 3 boje.
- Vrh P_5 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_1.
- Vrh P_4 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_2.
- Vrh P_6 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_3.
- Za vrh P_7 je potrebna četvrta boja.

c)

Svaka boja predstavlja jedan termin.



termin	predmet
1. dan (roza)	P_1, P_5
2. dan (svijetlo plava)	P_2, P_4
3. dan (narančasta)	P_3, P_6
4. dan (žuta)	P_7