Bojanje i sparivanje u grafovima

Diskretne strukture s teorijom grafova

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Sadržaj

Planarni grafovi. Bojanje vrhova i bojanje bridova

Neka svojstva planarnih grafova

- Neka je G planarni graf s ω komponenata povezanosti. Tada je $\nu - \varepsilon + \phi = 1 + \omega$.
- Neka je G jednostavni planarni graf s barem tri vrha. Tada je $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$.
- $K_{3,3}$ i K_5 nisu planarni grafovi.
- Ako je G jednostavni planarni graf, tada je $\delta(G) \leqslant 5$.
- Neka je G planarni graf čiji struk je jednak k, $k > 3$. Tada je $\varepsilon \leqslant \frac{k}{k-2}(\nu - 2)$.
- Graf G je planarni ako i samo ako ne sadrži podgraf homeomorfan s K_5 ili $K_{3,3}$.

Bojanje vrhova grafa

- Za svaki graf G vrijedi $\gamma(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.
- Brooks Neka je G jednostavni i povezani graf koji nije potpun, niti je neparni ciklus. Tada je $\gamma(G) \leqslant \Delta(G)$.
- Ako je K_r podgraf grafa G, tada je $\gamma(G) \geqslant r$.
- Teorem o četiri boje Za svaki planarni graf G je $\gamma(G) \leqslant 4$.
- Neka je G jednostavni graf. Ako K_r nije podgraf grafa G za neki $4 \leqslant r \leqslant \Delta(G) + 1$, tada vrijedi $\gamma(G) \leqslant \frac{r-1}{r}(\Delta(G) + 2)$.
- Neka je V_i skup svih vrhova stupnja i u jednostavnom grafu G. Neka je $s = \max\limits_{i \geqslant \frac{\Delta(G)+2}{2}} k(V_i)$. Tada je $\gamma(G) \leqslant \left\lceil \frac{s}{s+1}(\Delta(G) + 2) \right\rceil$.

Bojanje vrhova grafa

- Neka je G neprazni graf bez petlji. Graf G je bipartitni graf ako i samo ako je $\gamma(G) = 2$.

$$\gamma(K_n) = n \qquad \gamma(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ 3, & \text{ako je } n \text{ neparan} \end{cases}$$

- Neka su G_1 i G_2 disjunktni grafovi. Tada je

$$\gamma(G_1 \vee G_2) = \gamma(G_1) + \gamma(G_2).$$

Nadalje, $G_1 \vee G_2$ je kritični graf akko su G_1 i G_2 kritični grafovi.

Bojanje bridova grafa

- $\boxed{\text{Kőnig}}$ Ako je G bipartitni graf, tada je $\gamma'(G) = \Delta(G)$.
- $\boxed{\text{Vizing, Gupta}}$ Ako je G jednostavni graf, tada je $\gamma'(G) = \Delta(G)$ ili $\gamma'(G) = \Delta(G) + 1$.
- Neka je G jednostavni graf s ν vrhova i ε bridova. Ako vrijedi
$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor,$$
tada je $\gamma'(G) = \Delta(G) + 1$.

Bojanje bridova grafa

- Vizing Neka je G graf bez petlji. Tada vrijedi

$$\Delta(G) \leqslant \gamma'(G) \leqslant \Delta(G) + \mu(G)$$

  gdje je $\mu(G)$ multiplicitet grafa G, tj. maksimalni broj bridova između dva vrha u grafu G.

- Shannon Neka je G graf bez petlji. Tada je $\gamma'(G) \leqslant \left\lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \right\rfloor$.

- Neka je G jednostavni planarni graf za koji vrijedi $\Delta(G) \geqslant 8$. Tada je $\gamma'(G) = \Delta(G)$.

Bojanje bridova grafa

$$\gamma'(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ 3, & \text{ako je } n \text{ neparan} \end{cases}$$

$$\gamma'(K_n) = \begin{cases} n-1, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ n, & \text{ako je } n \text{ neparan} \end{cases}$$

$$\gamma'(K_{m,n}) = \max\{m, n\}$$

prvi zadatak

Zadatak 1

Neka je G jednostavni planarni graf koji ima 100 bridova. Koliko minimalno vrhova ima graf G?

Zadatak 1

Neka je G jednostavni planarni graf koji ima 100 *bridova. Koliko minimalno vrhova ima graf G?*

Rješenje

Neka je G jednostavni planarni graf s barem tri vrha. Tada je $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$.

Zadatak 1

Neka je G jednostavni planarni graf koji ima 100 bridova. Koliko minimalno vrhova ima graf G?

Rješenje

$$\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$$

Neka je G jednostavni planarni graf s barem tri vrha. Tada je $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$.

Zadatak 1

Neka je G jednostavni planarni graf koji ima 100 bridova. Koliko minimalno vrhova ima graf G?

Rješenje

Neka je G jednostavni planarni graf s barem tri vrha. Tada je $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$.

$$\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$$

$$3\nu \geqslant \varepsilon + 6$$

Zadatak 1

Neka je G jednostavni planarni graf koji ima 100 bridova. Koliko minimalno vrhova ima graf G?

Rješenje

Neka je G jednostavni planarni graf s barem tri vrha. Tada je $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$.

$$\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$$

$$3\nu \geqslant \varepsilon + 6$$

$$\nu \geqslant \frac{\varepsilon + 6}{3}$$

Zadatak 1

Neka je G jednostavni planarni graf koji ima 100 bridova. Koliko minimalno vrhova ima graf G?

Rješenje

Neka je G jednostavni planarni graf s barem tri vrha. Tada je $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$.

$$\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$$

$$3\nu \geqslant \varepsilon + 6$$

$$\nu \geqslant \frac{\varepsilon + 6}{3}$$

$$\nu \geqslant \frac{100 + 6}{3}$$

Zadatak 1

Neka je G jednostavni planarni graf koji ima 100 bridova. Koliko minimalno vrhova ima graf G?

Rješenje

Neka je G jednostavni planarni graf s barem tri vrha. Tada je $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$.

$$\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$$

$$3\nu \geqslant \varepsilon + 6$$

$$\nu \geqslant \frac{\varepsilon + 6}{3}$$

$$\nu \geqslant \frac{100 + 6}{3}$$

$$\nu \geqslant \frac{106}{3}$$

Zadatak 1

Neka je G jednostavni planarni graf koji ima 100 bridova. Koliko minimalno vrhova ima graf G?

Rješenje

Neka je G jednostavni planarni graf s barem tri vrha. Tada je $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$.

$$\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$$

$$3\nu \geqslant \varepsilon + 6$$

$$\nu \geqslant \frac{\varepsilon + 6}{3}$$

$$\nu \geqslant \frac{100 + 6}{3}$$

$$\nu \geqslant \frac{106}{3} \approx 35.33$$

Zadatak 1

Neka je G jednostavni planarni graf koji ima 100 bridova. Koliko minimalno vrhova ima graf G?

Rješenje

Neka je G jednostavni planarni graf s barem tri vrha. Tada je $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$.

$$\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$$

$$3\nu \geqslant \varepsilon + 6$$

$$\nu \geqslant \frac{\varepsilon + 6}{3}$$

$$\nu \geqslant \frac{100 + 6}{3}$$

$$\nu \geqslant \frac{106}{3} \approx 35.33$$

$$\nu \geqslant 36$$

Zadatak 1

Neka je G jednostavni planarni graf koji ima 100 bridova. Koliko minimalno vrhova ima graf G?

Rješenje

Neka je G jednostavni planarni graf s barem tri vrha. Tada je $\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$.

$$\varepsilon \leqslant 3\nu - 6$$

$$3\nu \geqslant \varepsilon + 6$$

$$\nu \geqslant \frac{\varepsilon + 6}{3}$$

$$\nu \geqslant \frac{100 + 6}{3}$$

$$\nu \geqslant \frac{106}{3} \approx 35.33$$

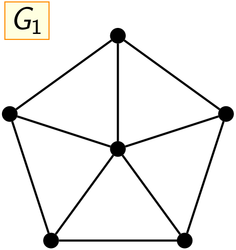
$$\nu \geqslant 36$$

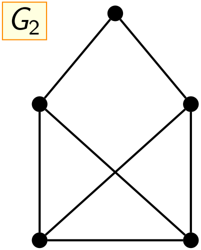
Graf G ima barem 36 vrhova.

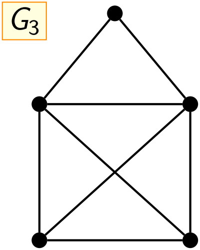
drugi zadatak

Zadatak 2

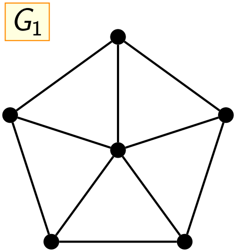
Odredite kromatske i bridno kromatske brojeve grafova G_1, G_2 i G_3. Jesu li neki od zadanih grafova kritični grafovi?





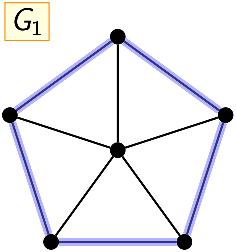


Rješenje



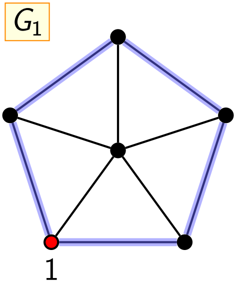
Rješenje

- Za bojanje vrhova koji pripadaju neparnom ciklusu C_5 potrebne su 3 boje.



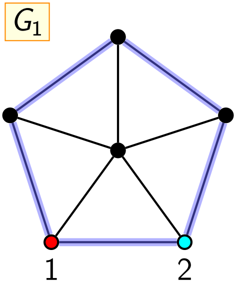
Rješenje

- Za bojanje vrhova koji pripadaju neparnom ciklusu C_5 potrebne su 3 boje.



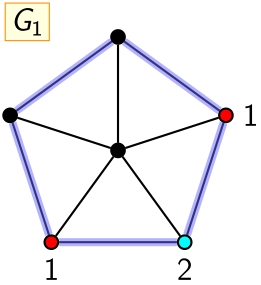
Rješenje

- Za bojanje vrhova koji pripadaju neparnom ciklusu C_5 potrebne su 3 boje.



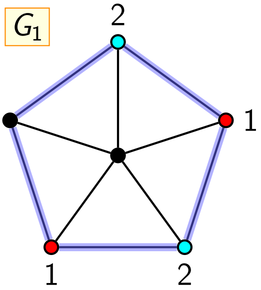
Rješenje

- Za bojanje vrhova koji pripadaju neparnom ciklusu C_5 potrebne su 3 boje.



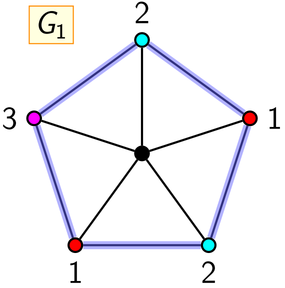
Rješenje

- Za bojanje vrhova koji pripadaju neparnom ciklusu C_5 potrebne su 3 boje.



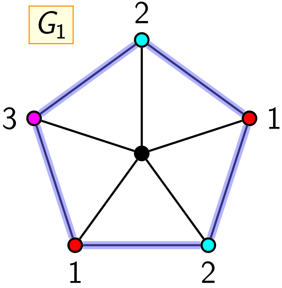
Rješenje

- Za bojanje vrhova koji pripadaju neparnom ciklusu C_5 potrebne su 3 boje.



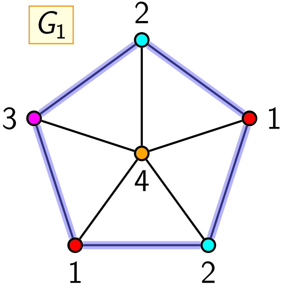
Rješenje

- Za bojanje vrhova koji pripadaju neparnom ciklusu C_5 potrebne su 3 boje.
- Kako je unutarnji vrh susjedan sa svim vrhovima ciklusa C_5, za njegovo bojanje potrebna je četvrta boja.



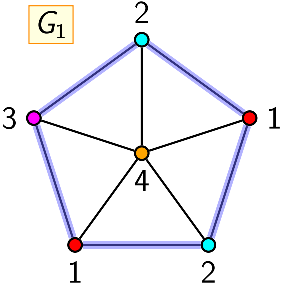
Rješenje

- Za bojanje vrhova koji pripadaju neparnom ciklusu C_5 potrebne su 3 boje.
- Kako je unutarnji vrh susjedan sa svim vrhovima ciklusa C_5, za njegovo bojanje potrebna je četvrta boja.

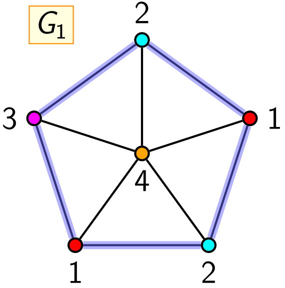


Rješenje

- Za bojanje vrhova koji pripadaju neparnom ciklusu C_5 potrebne su 3 boje.
- Kako je unutarnji vrh susjedan sa svim vrhovima ciklusa C_5, za njegovo bojanje potrebna je četvrta boja.
- Stoga je $\gamma(G_1) = 4$.



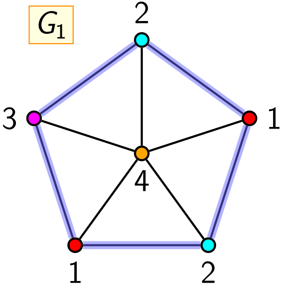
Rješenje



- Za bojanje vrhova koji pripadaju neparnom ciklusu C_5 potrebne su 3 boje.
- Kako je unutarnji vrh susjedan sa svim vrhovima ciklusa C_5, za njegovo bojanje potrebna je četvrta boja.
- Stoga je $\gamma(G_1) = 4$.

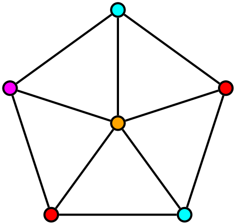
G_1 nema 4-kliku.

Rješenje

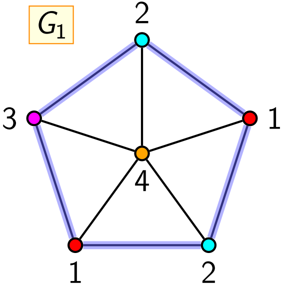


- Za bojanje vrhova koji pripadaju neparnom ciklusu C_5 potrebne su 3 boje.
- Kako je unutarnji vrh susjedan sa svim vrhovima ciklusa C_5, za njegovo bojanje potrebna je četvrta boja.
- Stoga je $\gamma(G_1) = 4$.

G_1 nema 4-kliku.



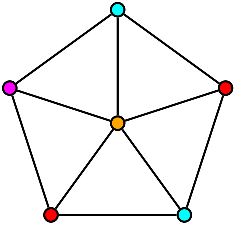
Rješenje



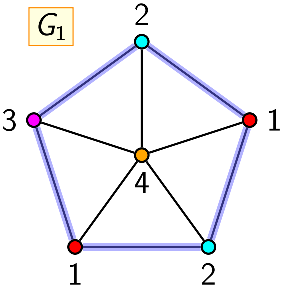
- Za bojanje vrhova koji pripadaju neparnom ciklusu C_5 potrebne su 3 boje.
- Kako je unutarnji vrh susjedan sa svim vrhovima ciklusa C_5, za njegovo bojanje potrebna je četvrta boja.
- Stoga je $\gamma(G_1) = 4$.

G_1 nema 4-kliku.

- G_1 je kritični graf jer brisanjem bilo kojeg brida dobivamo podgraf koji ima manji kromatski broj od početnog grafa.



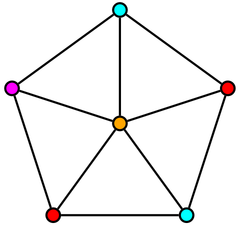
Rješenje

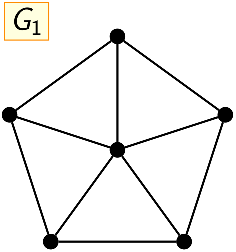


- Za bojanje vrhova koji pripadaju neparnom ciklusu C_5 potrebne su 3 boje.
- Kako je unutarnji vrh susjedan sa svim vrhovima ciklusa C_5, za njegovo bojanje potrebna je četvrta boja.
- Stoga je $\gamma(G_1) = 4$.

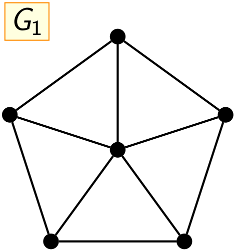
G_1 nema 4-kliku.

- G_1 je kritični graf jer brisanjem bilo kojeg brida dobivamo podgraf koji ima manji kromatski broj od početnog grafa.
- Graf G_1 je 4-kritični graf.

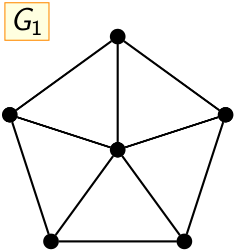



G_1

- $\Delta(G_1) = 5$

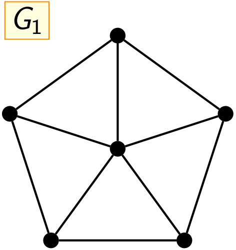


- $\Delta(G_1) = 5 \implies \gamma'(G_1) = 5$ ili $\gamma'(G_1) = 6$



- $\Delta(G_1) = 5 \implies \gamma'(G_1) = 5$ ili $\gamma'(G_1) = 6$

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

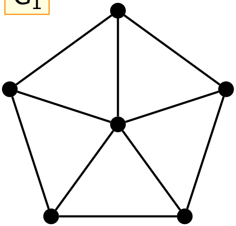


- $\Delta(G_1) = 5 \implies \gamma'(G_1) = 5$ ili $\gamma'(G_1) = 6$

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

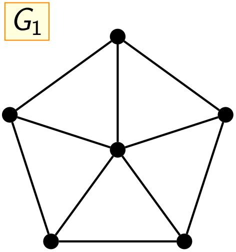
- $\nu = 6$, $\varepsilon = 10$

G_1



- $\Delta(G_1) = 5 \implies \gamma'(G_1) = 5$ ili $\gamma'(G_1) = 6$

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

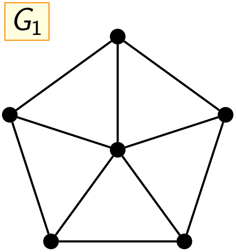


- $\nu = 6$, $\varepsilon = 10$
- $\varepsilon > \Delta(G_1) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor$

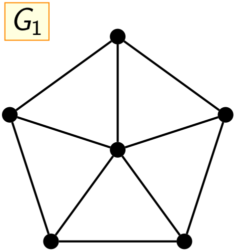
- $\Delta(G_1) = 5 \implies \gamma'(G_1) = 5$ ili $\gamma'(G_1) = 6$

$$\boxed{\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1}$$

- $\nu = 6,\ \varepsilon = 10$
- $\varepsilon > \Delta(G_1) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 5 \cdot \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor$



- $\Delta(G_1) = 5 \implies \gamma'(G_1) = 5$ ili $\gamma'(G_1) = 6$

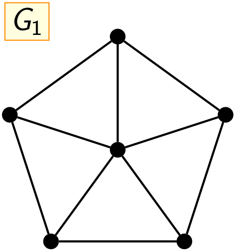


$$\boxed{\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1}$$

- $\nu = 6$, $\varepsilon = 10$
- $\varepsilon > \Delta(G_1) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 5 \cdot \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 15$

- $\Delta(G_1) = 5 \implies \gamma'(G_1) = 5$ ili $\gamma'(G_1) = 6$

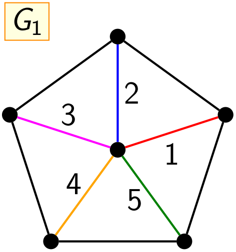
$$\boxed{\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \;\Rightarrow\; \gamma'(G) = \Delta(G) + 1}$$



- $\nu = 6$, $\varepsilon = 10$
- $\varepsilon > \Delta(G_1) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 5 \cdot \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 15$

nejednakost ne vrijedi pa ne možemo donijeti konkretnu odluku za $\gamma'(G_1)$

- $\Delta(G_1) = 5 \implies \gamma'(G_1) = 5$ ili $\gamma'(G_1) = 6$

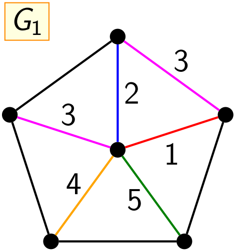


$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

- $\nu = 6$, $\varepsilon = 10$
- $\varepsilon > \Delta(G_1) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 5 \cdot \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 15$

nejednakost ne vrijedi pa ne možemo donijeti konkretnu odluku za $\gamma'(G_1)$

- $\Delta(G_1) = 5 \implies \gamma'(G_1) = 5$ ili $\gamma'(G_1) = 6$

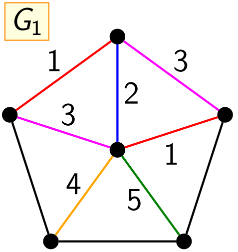


$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

- $\nu = 6$, $\varepsilon = 10$
- $\varepsilon > \Delta(G_1) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 5 \cdot \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 15$

nejednakost ne vrijedi pa ne možemo
donijeti konkretnu odluku za $\gamma'(G_1)$

- $\Delta(G_1) = 5 \implies \gamma'(G_1) = 5$ ili $\gamma'(G_1) = 6$



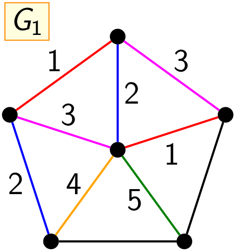
$$\boxed{\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1}$$

- $\nu = 6,\ \varepsilon = 10$
- $\varepsilon > \Delta(G_1) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 5 \cdot \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 15$

nejednakost ne vrijedi pa ne možemo donijeti konkretnu odluku za $\gamma'(G_1)$

- $\Delta(G_1) = 5 \implies \gamma'(G_1) = 5$ ili $\gamma'(G_1) = 6$

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

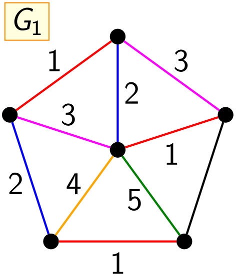


- $\nu = 6$, $\varepsilon = 10$
- $\varepsilon > \Delta(G_1) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 5 \cdot \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 15$

nejednakost ne vrijedi pa ne možemo donijeti konkretnu odluku za $\gamma'(G_1)$

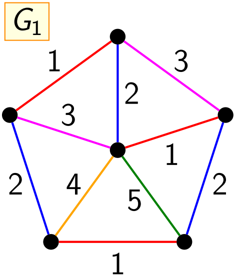
- $\Delta(G_1) = 5 \implies \gamma'(G_1) = 5$ ili $\gamma'(G_1) = 6$

$$\boxed{\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1}$$



- $\nu = 6$, $\varepsilon = 10$
- $\varepsilon > \Delta(G_1) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 5 \cdot \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 15$

nejednakost ne vrijedi pa ne možemo
donijeti konkretnu odluku za $\gamma'(G_1)$



- $\Delta(G_1) = 5 \implies \gamma'(G_1) = 5$ ili $\gamma'(G_1) = 6$

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

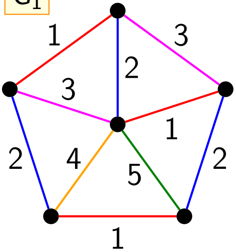
- $\nu = 6$, $\varepsilon = 10$
- $\varepsilon > \Delta(G_1) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 5 \cdot \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 15$

nejednakost ne vrijedi pa ne možemo
donijeti konkretnu odluku za $\gamma'(G_1)$

- $\Delta(G_1) = 5 \implies \gamma'(G_1) = 5$ ili $\gamma'(G_1) = 6$

$$\boxed{\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1}$$

$\boxed{G_1}$



- $\nu = 6$, $\varepsilon = 10$

- $\varepsilon > \Delta(G_1) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 5 \cdot \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 15$

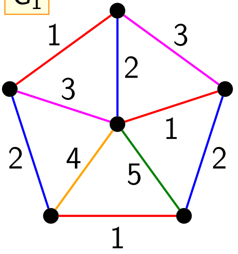
nejednakost ne vrijedi pa ne možemo donijeti konkretnu odluku za $\gamma'(G_1)$

$\boxed{\gamma'(G_1) = 5}$

- $\Delta(G_1) = 5 \implies \gamma'(G_1) = 5$ ili $\gamma'(G_1) = 6$

$$\boxed{\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \;\Rightarrow\; \gamma'(G) = \Delta(G) + 1}$$

G_1

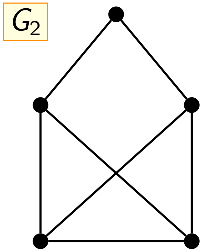


- $\nu = 6$, $\varepsilon = 10$
- $\varepsilon > \Delta(G_1) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 5 \cdot \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 10 > 15$

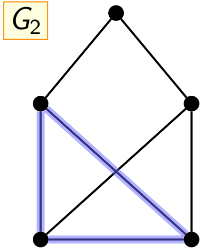
$\boxed{\gamma'(G_1) = 5}$

nejednakost ne vrijedi pa ne možemo donijeti konkretnu odluku za $\gamma'(G_1)$

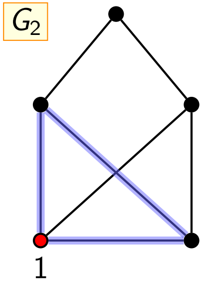
kod Petersenovog grafa P nejednakost također ne vrijedi, ali je ipak $\gamma'(P) = \Delta(P) + 1$


G_2

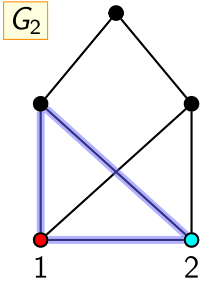
- U grafu G_2 postoji 3-klika pa su potrebne barem 3 boje za bojanje vrhova grafa G_2.



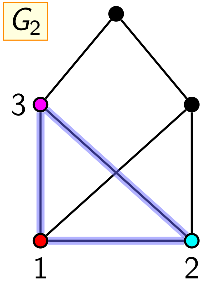
- U grafu G_2 postoji 3-klika pa su potrebne barem 3 boje za bojanje vrhova grafa G_2.



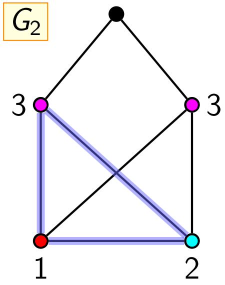
- U grafu G_2 postoji 3-klika pa su potrebne barem 3 boje za bojanje vrhova grafa G_2.



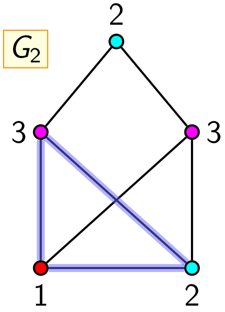
- U grafu G_2 postoji 3-klika pa su potrebne barem 3 boje za bojanje vrhova grafa G_2.



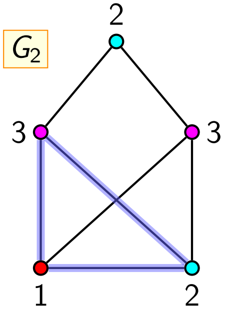
- U grafu G_2 postoji 3-klika pa su potrebne barem 3 boje za bojanje vrhova grafa G_2.



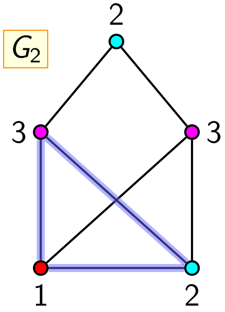
- U grafu G_2 postoji 3-klika pa su potrebne barem 3 boje za bojanje vrhova grafa G_2.

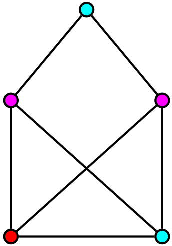


- U grafu G_2 postoji 3-klika pa su potrebne barem 3 boje za bojanje vrhova grafa G_2.
- $\boxed{\gamma(G_2) = 3}$

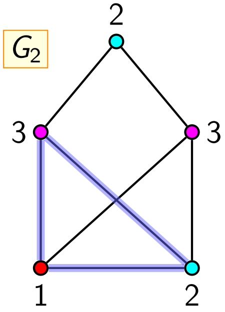


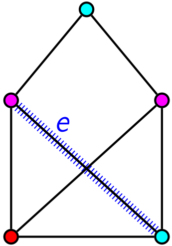
- U grafu G_2 postoji 3-klika pa su potrebne barem 3 boje za bojanje vrhova grafa G_2.
- $\boxed{\gamma(G_2) = 3}$



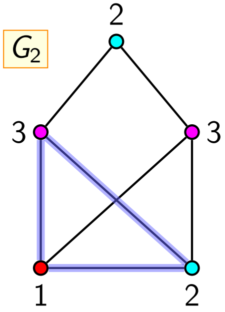


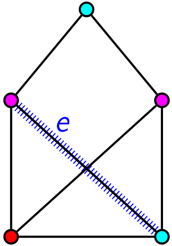
- U grafu G_2 postoji 3-klika pa su potrebne barem 3 boje za bojanje vrhova grafa G_2.
- $\boxed{\gamma(G_2) = 3}$
- G_2 nije kritični graf jer brisanjem brida e dobivamo podgraf čiji je kromatski broj i dalje jednak 3.



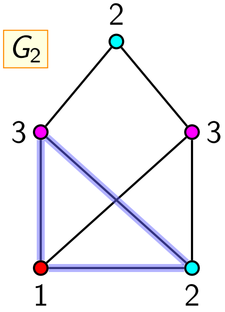


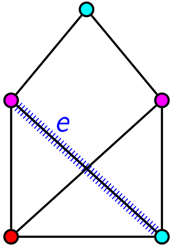
- U grafu G_2 postoji 3-klika pa su potrebne barem 3 boje za bojanje vrhova grafa G_2.
- $\boxed{\gamma(G_2) = 3}$
- G_2 nije kritični graf jer brisanjem brida e dobivamo podgraf čiji je kromatski broj i dalje jednak 3.
- Dakle, postoji barem jedan pravi podgraf grafa G_2 čiji je kromatski broj jednak kromatskom broju grafa G_2.

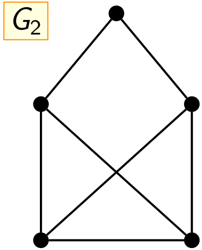




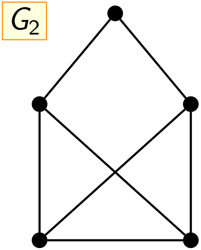
- U grafu G_2 postoji 3-klika pa su potrebne barem 3 boje za bojanje vrhova grafa G_2.
- $\boxed{\gamma(G_2) = 3}$
- G_2 nije kritični graf jer brisanjem brida e dobivamo podgraf čiji je kromatski broj i dalje jednak 3.
- Dakle, postoji barem jedan pravi podgraf grafa G_2 čiji je kromatski broj jednak kromatskom broju grafa G_2. Stoga G_2 nije kritični graf.





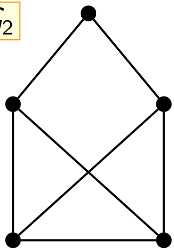

G_2

- $\Delta(G_2) = 3$



- $\Delta(G_2) = 3 \implies \gamma'(G_2) = 3$ ili $\gamma'(G_2) = 4$

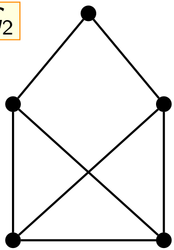
$\boxed{G_2}$



- $\Delta(G_2) = 3 \implies \gamma'(G_2) = 3$ ili $\gamma'(G_2) = 4$

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

G_2

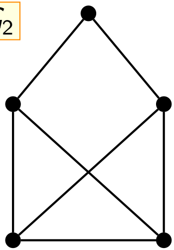


- $\Delta(G_2) = 3 \implies \gamma'(G_2) = 3$ ili $\gamma'(G_2) = 4$

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

- $\nu = 5$, $\varepsilon = 7$

$\boxed{G_2}$

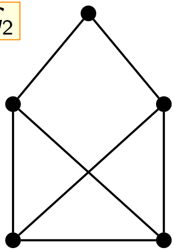


- $\Delta(G_2) = 3 \implies \gamma'(G_2) = 3$ ili $\gamma'(G_2) = 4$

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

- $\nu = 5$, $\varepsilon = 7$
- $\varepsilon > \Delta(G_2) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor$

G_2

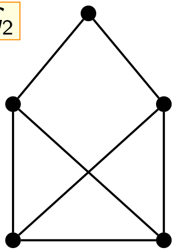


- $\Delta(G_2) = 3 \implies \gamma'(G_2) = 3$ ili $\gamma'(G_2) = 4$

$$\boxed{\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1}$$

- $\nu = 5,\ \varepsilon = 7$
- $\varepsilon > \Delta(G_2) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 7 > 3 \cdot \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor$

G_2

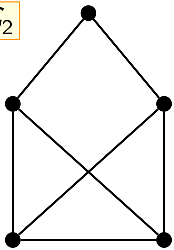


- $\Delta(G_2) = 3 \implies \gamma'(G_2) = 3$ ili $\gamma'(G_2) = 4$

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

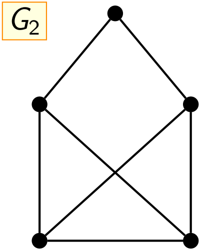
- $\nu = 5$, $\varepsilon = 7$
- $\varepsilon > \Delta(G_2) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 7 > 3 \cdot \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 7 > 6$

G_2



- $\Delta(G_2) = 3 \implies \gamma'(G_2) = 3$ ili $\gamma'(G_2) = 4$

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$



- $\nu = 5$, $\varepsilon = 7$
- $\varepsilon > \Delta(G_2) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 7 > 3 \cdot \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 7 > 6$

nejednakost vrijedi pa možemo

zaključiti da je $\boxed{\gamma'(G_2) = 4}$

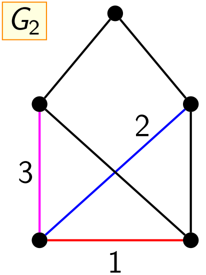
- $\Delta(G_2) = 3 \implies \gamma'(G_2) = 3$ ili $\gamma'(G_2) = 4$

$$\boxed{\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1}$$

- $\nu = 5,\ \varepsilon = 7$
- $\varepsilon > \Delta(G_2) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 7 > 3 \cdot \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 7 > 6$

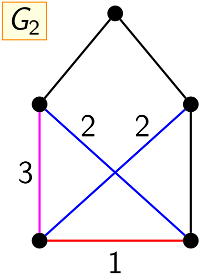
  nejednakost vrijedi pa možemo

  zaključiti da je $\boxed{\gamma'(G_2) = 4}$



- $\Delta(G_2) = 3 \implies \gamma'(G_2) = 3$ ili $\gamma'(G_2) = 4$

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \;\Rightarrow\; \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

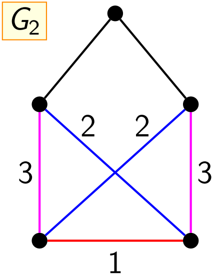


- $\nu = 5,\ \varepsilon = 7$
- $\varepsilon > \Delta(G_2) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 7 > 3 \cdot \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 7 > 6$

nejednakost vrijedi pa možemo

zaključiti da je $\boxed{\gamma'(G_2) = 4}$

- $\Delta(G_2) = 3 \implies \gamma'(G_2) = 3$ ili $\gamma'(G_2) = 4$

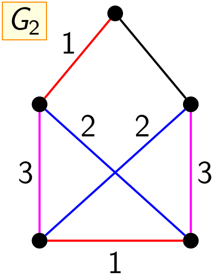


$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

- $\nu = 5$, $\varepsilon = 7$
- $\varepsilon > \Delta(G_2) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 7 > 3 \cdot \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 7 > 6$

nejednakost vrijedi pa možemo zaključiti da je $\boxed{\gamma'(G_2) = 4}$

- $\Delta(G_2) = 3 \implies \gamma'(G_2) = 3$ ili $\gamma'(G_2) = 4$



$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

- $\nu = 5$, $\varepsilon = 7$
- $\varepsilon > \Delta(G_2) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 7 > 3 \cdot \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 7 > 6$

nejednakost vrijedi pa možemo

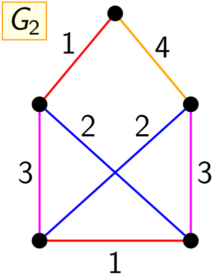
zaključiti da je $\boxed{\gamma'(G_2) = 4}$

- $\Delta(G_2) = 3 \implies \gamma'(G_2) = 3$ ili $\gamma'(G_2) = 4$

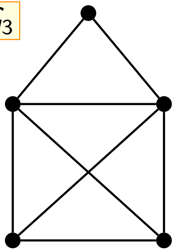
$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

- $\nu = 5$, $\varepsilon = 7$
- $\varepsilon > \Delta(G_2) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 7 > 3 \cdot \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 7 > 6$

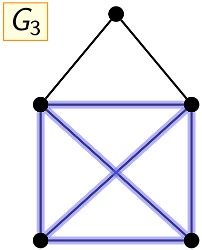
nejednakost vrijedi pa možemo zaključiti da je $\boxed{\gamma'(G_2) = 4}$



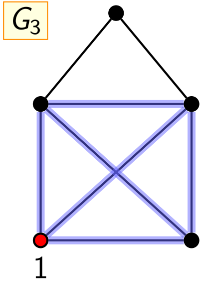
G_3



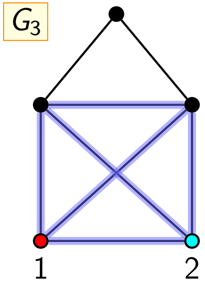
- U grafu G_3 postoji 4-klika pa su potrebne barem 4 boje za bojanje vrhova grafa G_3.



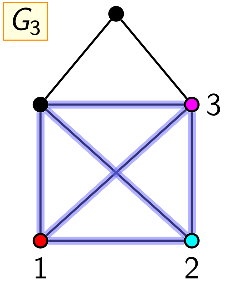
- U grafu G_3 postoji 4-klika pa su potrebne barem 4 boje za bojanje vrhova grafa G_3.



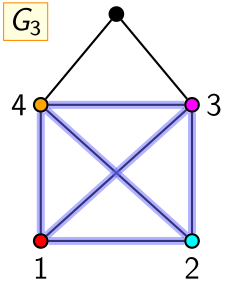
- U grafu G_3 postoji 4-klika pa su potrebne barem 4 boje za bojanje vrhova grafa G_3.



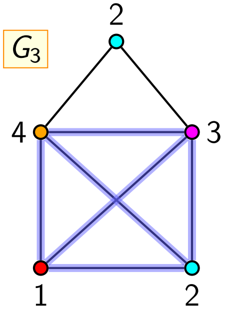
- U grafu G_3 postoji 4-klika pa su potrebne barem 4 boje za bojanje vrhova grafa G_3.



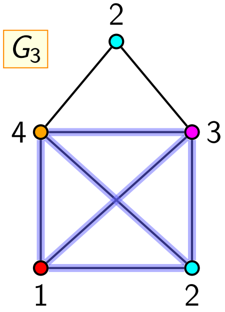
- U grafu G_3 postoji 4-klika pa su potrebne barem 4 boje za bojanje vrhova grafa G_3.



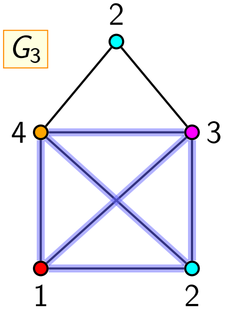
- U grafu G_3 postoji 4-klika pa su potrebne barem 4 boje za bojanje vrhova grafa G_3.

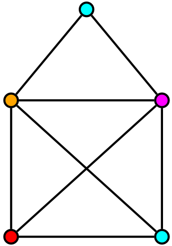


- U grafu G_3 postoji 4-klika pa su potrebne barem 4 boje za bojanje vrhova grafa G_3.
- $\boxed{\gamma(G_3) = 4}$

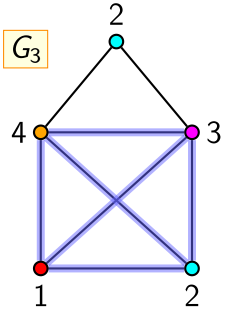


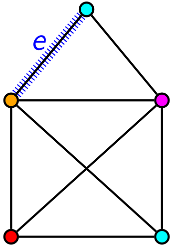
- U grafu G_3 postoji 4-klika pa su potrebne barem 4 boje za bojanje vrhova grafa G_3.
- $\boxed{\gamma(G_3) = 4}$



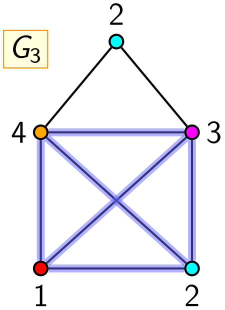


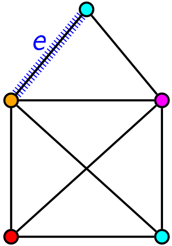
- U grafu G_3 postoji 4-klika pa su potrebne barem 4 boje za bojanje vrhova grafa G_3.
- $\boxed{\gamma(G_3) = 4}$
- G_3 nije kritični graf jer brisanjem brida e dobivamo podgraf čiji je kromatski broj i dalje jednak 4.



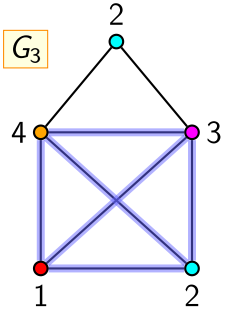


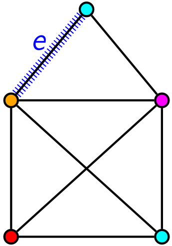
- U grafu G_3 postoji 4-klika pa su potrebne barem 4 boje za bojanje vrhova grafa G_3.
- $\boxed{\gamma(G_3) = 4}$
- G_3 nije kritični graf jer brisanjem brida e dobivamo podgraf čiji je kromatski broj i dalje jednak 4.
- Dakle, postoji barem jedan pravi podgraf grafa G_3 čiji je kromatski broj jednak kromatskom broju grafa G_3.

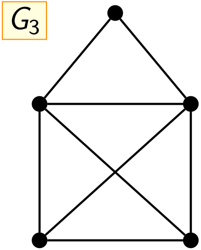




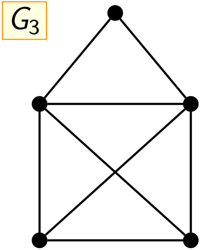
- U grafu G_3 postoji 4-klika pa su potrebne barem 4 boje za bojanje vrhova grafa G_3.
- $\boxed{\gamma(G_3) = 4}$
- G_3 nije kritični graf jer brisanjem brida e dobivamo podgraf čiji je kromatski broj i dalje jednak 4.
- Dakle, postoji barem jedan pravi podgraf grafa G_3 čiji je kromatski broj jednak kromatskom broju grafa G_3. Stoga G_3 nije kritični graf.





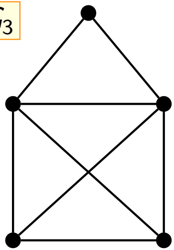

G_3

- $\Delta(G_3) = 4$



- $\Delta(G_3) = 4 \implies \gamma'(G_3) = 4$ ili $\gamma'(G_3) = 5$

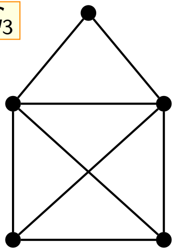
$\boxed{G_3}$



- $\Delta(G_3) = 4 \implies \gamma'(G_3) = 4$ ili $\gamma'(G_3) = 5$

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

G_3

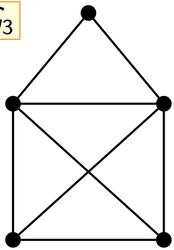


- $\Delta(G_3) = 4 \implies \gamma'(G_3) = 4$ ili $\gamma'(G_3) = 5$

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

- $\nu = 5$, $\varepsilon = 8$

G_3

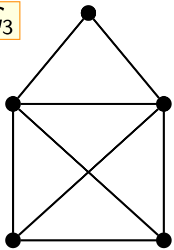


- $\Delta(G_3) = 4 \implies \gamma'(G_3) = 4$ ili $\gamma'(G_3) = 5$

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

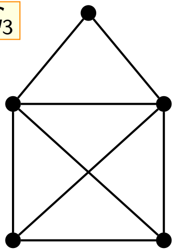
- $\nu = 5$, $\varepsilon = 8$
- $\varepsilon > \Delta(G_3) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor$

G_3



- $\Delta(G_3) = 4 \implies \gamma'(G_3) = 4$ ili $\gamma'(G_3) = 5$

G_3



$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

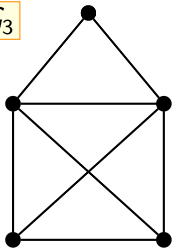
- $\nu = 5,\ \varepsilon = 8$
- $\varepsilon > \Delta(G_3) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 8 > 4 \cdot \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor$

- $\Delta(G_3) = 4 \implies \gamma'(G_3) = 4$ ili $\gamma'(G_3) = 5$

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

- $\nu = 5$, $\varepsilon = 8$
- $\varepsilon > \Delta(G_3) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 8 > 4 \cdot \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 8 > 8$

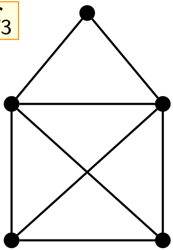
G_3



- $\Delta(G_3) = 4 \implies \gamma'(G_3) = 4$ ili $\gamma'(G_3) = 5$

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

G_3

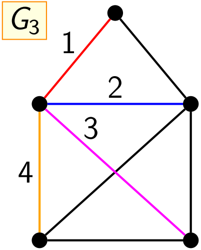


- $\nu = 5,\ \varepsilon = 8$
- $\varepsilon > \Delta(G_3) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 8 > 4 \cdot \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 8 > 8$

nejednakost ne vrijedi pa ne možemo donijeti konkretnu odluku za $\gamma'(G_3)$

- $\Delta(G_3) = 4 \implies \gamma'(G_3) = 4$ ili $\gamma'(G_3) = 5$

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \ \Rightarrow\ \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$



- $\nu = 5,\ \varepsilon = 8$
- $\varepsilon > \Delta(G_3) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 8 > 4 \cdot \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 8 > 8$

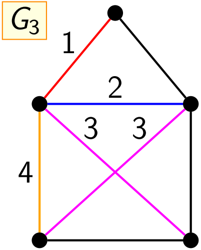
nejednakost ne vrijedi pa ne možemo donijeti konkretnu odluku za $\gamma'(G_3)$

- $\Delta(G_3) = 4 \implies \gamma'(G_3) = 4$ ili $\gamma'(G_3) = 5$

$$\boxed{\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1}$$

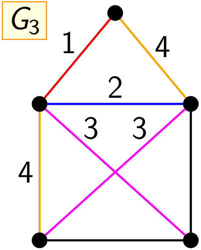
- $\nu = 5,\ \varepsilon = 8$
- $\varepsilon > \Delta(G_3) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 8 > 4 \cdot \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 8 > 8$

nejednakost ne vrijedi pa ne možemo donijeti konkretnu odluku za $\gamma'(G_3)$



- $\Delta(G_3) = 4 \implies \gamma'(G_3) = 4$ ili $\gamma'(G_3) = 5$

$$\boxed{\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1}$$



- $\nu = 5$, $\varepsilon = 8$
- $\varepsilon > \Delta(G_3) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 8 > 4 \cdot \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 8 > 8$

nejednakost ne vrijedi pa ne možemo
donijeti konkretnu odluku za $\gamma'(G_3)$

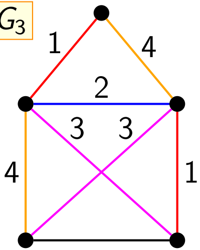
- $\Delta(G_3) = 4 \implies \gamma'(G_3) = 4$ ili $\gamma'(G_3) = 5$

$$\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1$$

- $\nu = 5$, $\varepsilon = 8$
- $\varepsilon > \Delta(G_3) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 8 > 4 \cdot \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 8 > 8$

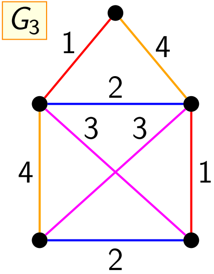
nejednakost ne vrijedi pa ne možemo donijeti konkretnu odluku za $\gamma'(G_3)$

G_3



- $\Delta(G_3) = 4 \implies \gamma'(G_3) = 4$ ili $\gamma'(G_3) = 5$

$$\boxed{\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1}$$



- $\nu = 5$, $\varepsilon = 8$
- $\varepsilon > \Delta(G_3) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 8 > 4 \cdot \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 8 > 8$

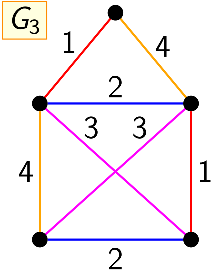
nejednakost ne vrijedi pa ne možemo donijeti konkretnu odluku za $\gamma'(G_3)$

- $\Delta(G_3) = 4 \implies \gamma'(G_3) = 4$ ili $\gamma'(G_3) = 5$

$$\boxed{\varepsilon > \Delta(G) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \Rightarrow \gamma'(G) = \Delta(G) + 1}$$

- $\nu = 5,\ \varepsilon = 8$
- $\varepsilon > \Delta(G_3) \cdot \left\lfloor \frac{\nu}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 8 > 4 \cdot \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \rightsquigarrow 8 > 8$

nejednakost ne vrijedi pa ne možemo donijeti konkretnu odluku za $\gamma'(G_3)$



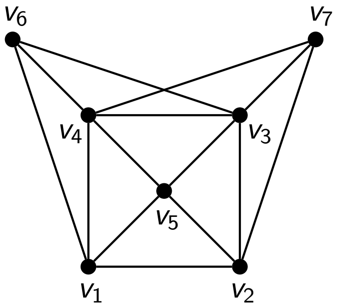
$$\boxed{\gamma'(G_3) = 4}$$

treći zadatak

Zadatak 3

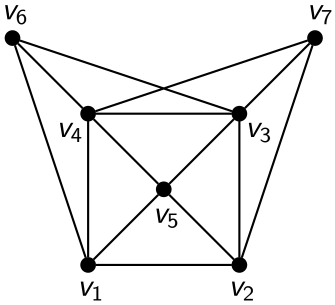
Pohlepnim algoritmom pronađite jedno bojanje vrhova grafa G tako da koristite:

a) *Welsh-Powellov algoritam,*
b) *slučajni raspored vrhova,*
c) *Brèlazov algoritam.*



Rješenje

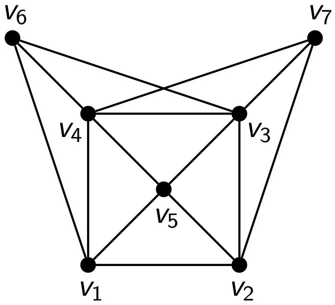
Welsh-Powellov algoritam



Rješenje

Welsh-Powellov algoritam

- Odredimo stupnjeve svih vrhova.

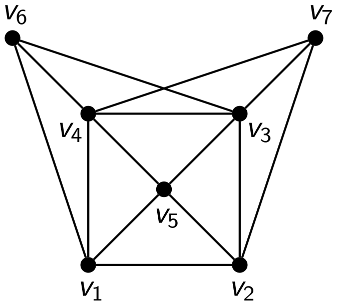


Rješenje

Welsh-Powellov algoritam

- Odredimo stupnjeve svih vrhova.

  $d(v_1) = 4$

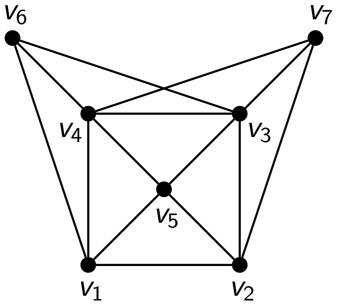


Rješenje

Welsh-Powellov algoritam

- Odredimo stupnjeve svih vrhova.

  $d(v_1) = 4,\ d(v_2) = 4$

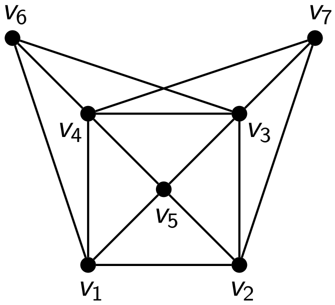


Rješenje

Welsh-Powellov algoritam

- Odredimo stupnjeve svih vrhova.

  $d(v_1) = 4,\ d(v_2) = 4,\ d(v_3) = 5$



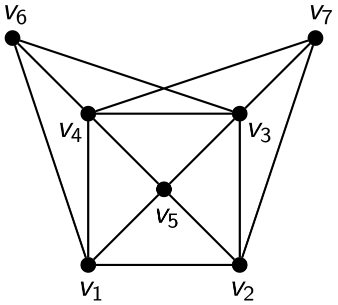
Rješenje

Welsh-Powellov algoritam

- Odredimo stupnjeve svih vrhova.

  $d(v_1) = 4, \ d(v_2) = 4, \ d(v_3) = 5,$

  $d(v_4) = 5$

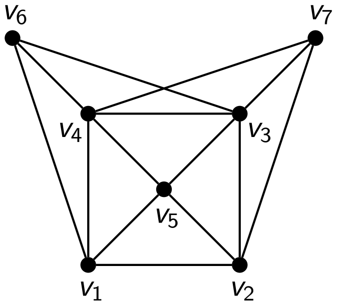


Rješenje

Welsh-Powellov algoritam

- Odredimo stupnjeve svih vrhova.

  $d(v_1) = 4,\ d(v_2) = 4,\ d(v_3) = 5,$
  $d(v_4) = 5,\ d(v_5) = 4$



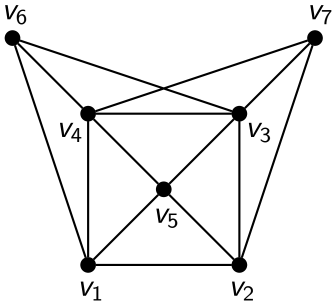
Rješenje

Welsh-Powellov algoritam

- Odredimo stupnjeve svih vrhova.

  $d(v_1) = 4,\ d(v_2) = 4,\ d(v_3) = 5,$

  $d(v_4) = 5,\ d(v_5) = 4,\ d(v_6) = 3$

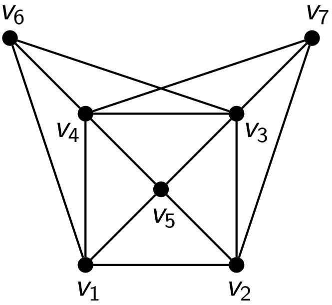


Rješenje

Welsh-Powellov algoritam

- Odredimo stupnjeve svih vrhova.

  $d(v_1) = 4,\ d(v_2) = 4,\ d(v_3) = 5,$
  $d(v_4) = 5,\ d(v_5) = 4,\ d(v_6) = 3,$
  $d(v_7) = 3$

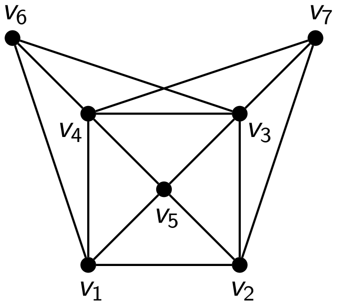


Rješenje

Welsh-Powellov algoritam

- Odredimo stupnjeve svih vrhova.

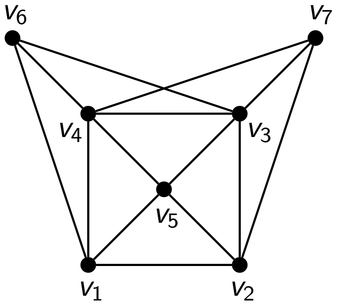
  $d(v_1) = 4,\ d(v_2) = 4,\ d(v_3) = 5,$
  $d(v_4) = 5,\ d(v_5) = 4,\ d(v_6) = 3,$
  $d(v_7) = 3$



- Sortiramo vrhove silazno prema njihovim stupnjevima.

Rješenje

Welsh-Powellov algoritam



- Odredimo stupnjeve svih vrhova.

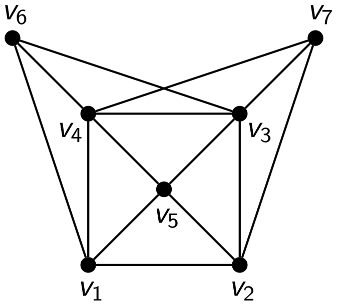
  $d(v_1) = 4,\ d(v_2) = 4,\ d(v_3) = 5,$
  $d(v_4) = 5,\ d(v_5) = 4,\ d(v_6) = 3,$
  $d(v_7) = 3$

- Sortiramo vrhove silazno prema njihovim stupnjevima.

$$v_3, v_4$$

Rješenje

Welsh-Powellov algoritam



- Odredimo stupnjeve svih vrhova.

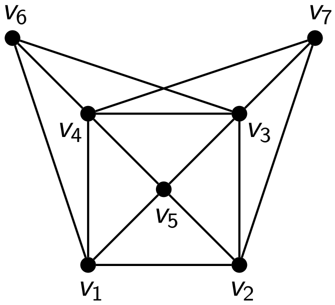
  $d(v_1) = 4,\ d(v_2) = 4,\ d(v_3) = 5,$
  $d(v_4) = 5,\ d(v_5) = 4,\ d(v_6) = 3,$
  $d(v_7) = 3$

- Sortiramo vrhove silazno prema njihovim stupnjevima.

$$v_3, v_4, v_1, v_2, v_5$$

Rješenje

Welsh-Powellov algoritam



- Odredimo stupnjeve svih vrhova.

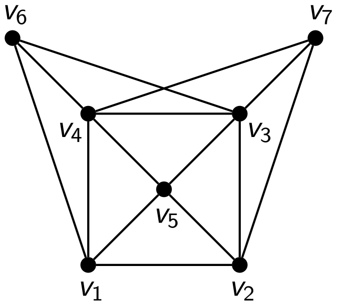
  $d(v_1) = 4,\ d(v_2) = 4,\ d(v_3) = 5,$
  $d(v_4) = 5,\ d(v_5) = 4,\ d(v_6) = 3,$
  $d(v_7) = 3$

- Sortiramo vrhove silazno prema njihovim stupnjevima.

$$v_3, v_4, v_1, v_2, v_5, v_7, v_6$$

Rješenje

Welsh-Powellov algoritam



- Odredimo stupnjeve svih vrhova.

  $d(v_1) = 4,\ d(v_2) = 4,\ d(v_3) = 5,$
  $d(v_4) = 5,\ d(v_5) = 4,\ d(v_6) = 3,$
  $d(v_7) = 3$

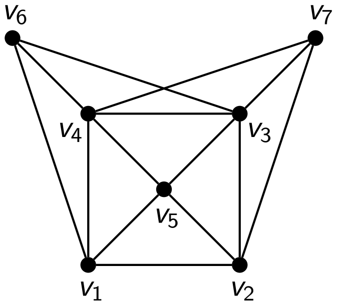
- Sortiramo vrhove silazno prema njihovim stupnjevima.

$$v_3, v_4, v_1, v_2, v_5, v_7, v_6$$

- Dobivenim redoslijedom bojamo vrhove grafa G.

Rješenje

Welsh-Powellov algoritam



- Odredimo stupnjeve svih vrhova.

  $d(v_1) = 4,\ d(v_2) = 4,\ d(v_3) = 5,$
  $d(v_4) = 5,\ d(v_5) = 4,\ d(v_6) = 3,$
  $d(v_7) = 3$

- Sortiramo vrhove silazno prema njihovim stupnjevima.

$$v_3, v_4, v_1, v_2, v_5, v_7, v_6$$

- Dobivenim redoslijedom bojamo vrhove grafa G.

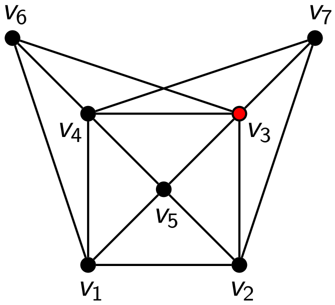
vrh	v_3	v_4	v_1	v_2	v_5	v_7	v_6
boja							

Rješenje

Welsh-Powellov algoritam

- Odredimo stupnjeve svih vrhova.

  $d(v_1) = 4,\ d(v_2) = 4,\ d(v_3) = 5,$
  $d(v_4) = 5,\ d(v_5) = 4,\ d(v_6) = 3,$
  $d(v_7) = 3$



- Sortiramo vrhove silazno prema njihovim stupnjevima.

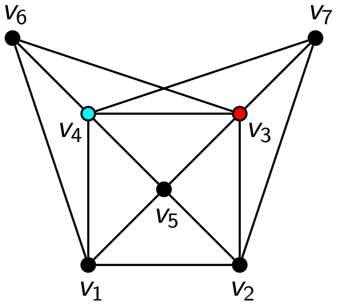
$$v_3, v_4, v_1, v_2, v_5, v_7, v_6$$

- Dobivenim redoslijedom bojamo vrhove grafa G.

vrh	v_3	v_4	v_1	v_2	v_5	v_7	v_6
boja	1						

Rješenje

Welsh-Powellov algoritam



- Odredimo stupnjeve svih vrhova.

  $d(v_1) = 4,\ d(v_2) = 4,\ d(v_3) = 5,$
  $d(v_4) = 5,\ d(v_5) = 4,\ d(v_6) = 3,$
  $d(v_7) = 3$

- Sortiramo vrhove silazno prema njihovim stupnjevima.

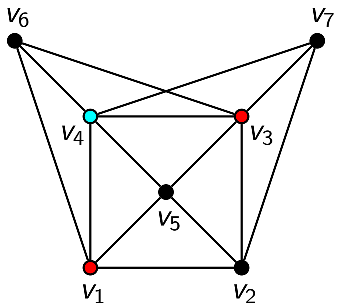
$$v_3, v_4, v_1, v_2, v_5, v_7, v_6$$

- Dobivenim redoslijedom bojamo vrhove grafa G.

vrh	v_3	v_4	v_1	v_2	v_5	v_7	v_6
boja	1	2					

Rješenje

Welsh-Powellov algoritam



- Odredimo stupnjeve svih vrhova.

  $d(v_1) = 4,\ d(v_2) = 4,\ d(v_3) = 5,$
  $d(v_4) = 5,\ d(v_5) = 4,\ d(v_6) = 3,$
  $d(v_7) = 3$

- Sortiramo vrhove silazno prema njihovim stupnjevima.

$$v_3, v_4, v_1, v_2, v_5, v_7, v_6$$

- Dobivenim redoslijedom bojamo vrhove grafa G.

vrh	v_3	v_4	v_1	v_2	v_5	v_7	v_6
boja	1	2	1				

Rješenje

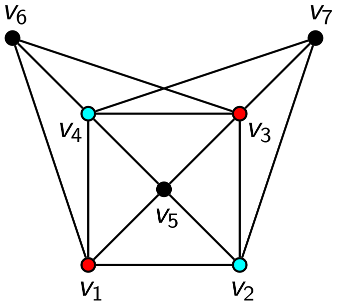
Welsh-Powellov algoritam

- Odredimo stupnjeve svih vrhova.

  $d(v_1) = 4,\ d(v_2) = 4,\ d(v_3) = 5,$

  $d(v_4) = 5,\ d(v_5) = 4,\ d(v_6) = 3,$

  $d(v_7) = 3$



- Sortiramo vrhove silazno prema njihovim stupnjevima.

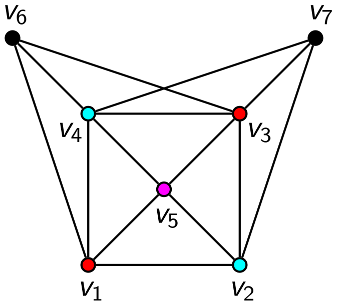
$$v_3, v_4, v_1, v_2, v_5, v_7, v_6$$

- Dobivenim redoslijedom bojamo vrhove grafa G.

vrh	v_3	v_4	v_1	v_2	v_5	v_7	v_6
boja	1	2	1	2			

Rješenje

Welsh-Powellov algoritam



- Odredimo stupnjeve svih vrhova.

  $d(v_1) = 4,\ d(v_2) = 4,\ d(v_3) = 5,$
  $d(v_4) = 5,\ d(v_5) = 4,\ d(v_6) = 3,$
  $d(v_7) = 3$

- Sortiramo vrhove silazno prema njihovim stupnjevima.

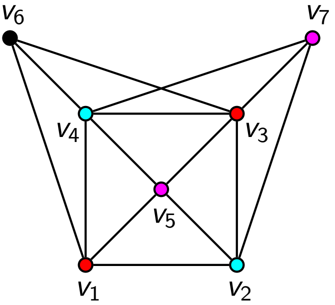
$$v_3, v_4, v_1, v_2, v_5, v_7, v_6$$

- Dobivenim redoslijedom bojamo vrhove grafa G.

vrh	v_3	v_4	v_1	v_2	v_5	v_7	v_6
boja	1	2	1	2	3		

Rješenje

Welsh-Powellov algoritam



- Odredimo stupnjeve svih vrhova.

  $d(v_1) = 4,\ d(v_2) = 4,\ d(v_3) = 5,$
  $d(v_4) = 5,\ d(v_5) = 4,\ d(v_6) = 3,$
  $d(v_7) = 3$

- Sortiramo vrhove silazno prema njihovim stupnjevima.

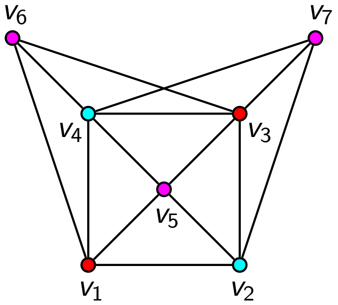
$$v_3, v_4, v_1, v_2, v_5, v_7, v_6$$

- Dobivenim redoslijedom bojamo vrhove grafa G.

vrh	v_3	v_4	v_1	v_2	v_5	v_7	v_6
boja	1	2	1	2	3	3	

Rješenje

Welsh-Powellov algoritam



- Odredimo stupnjeve svih vrhova.

  $d(v_1) = 4,\ d(v_2) = 4,\ d(v_3) = 5,$
  $d(v_4) = 5,\ d(v_5) = 4,\ d(v_6) = 3,$
  $d(v_7) = 3$

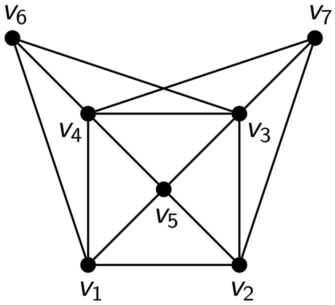
- Sortiramo vrhove silazno prema njihovim stupnjevima.

$$v_3, v_4, v_1, v_2, v_5, v_7, v_6$$

- Dobivenim redoslijedom bojamo vrhove grafa G.

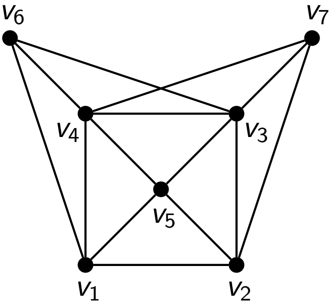
vrh	v_3	v_4	v_1	v_2	v_5	v_7	v_6
boja	1	2	1	2	3	3	3

Slučajni raspored vrhova



Slučajni raspored vrhova

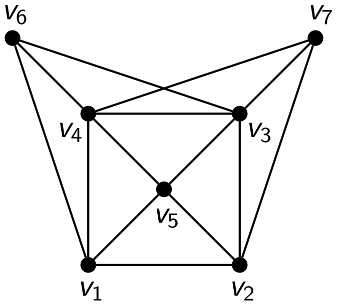
- Odaberemo proizvoljni poredak vrhova.



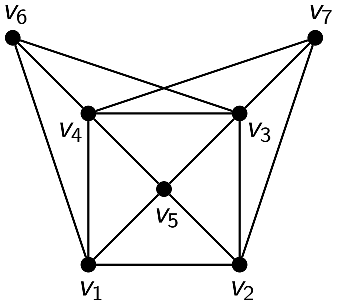
Slučajni raspored vrhova

- Odaberemo proizvoljni poredak vrhova.

$$v_1, v_2, v_5, v_6, v_4, v_3, v_7$$



Slučajni raspored vrhova

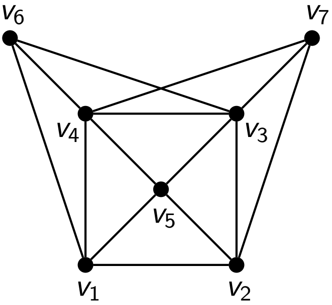


- Odaberemo proizvoljni poredak vrhova.

$$v_1, v_2, v_5, v_6, v_4, v_3, v_7$$

- Odabranim redoslijedom bojamo vrhove grafa G.

Slučajni raspored vrhova



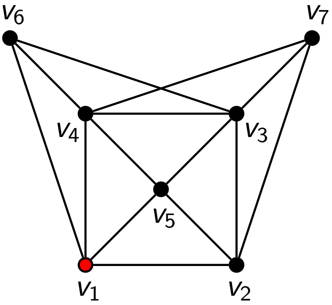
- Odaberemo proizvoljni poredak vrhova.

$$v_1, v_2, v_5, v_6, v_4, v_3, v_7$$

- Odabranim redoslijedom bojamo vrhove grafa G.

vrh	v_1	v_2	v_5	v_6	v_4	v_3	v_7
boja							

Slučajni raspored vrhova



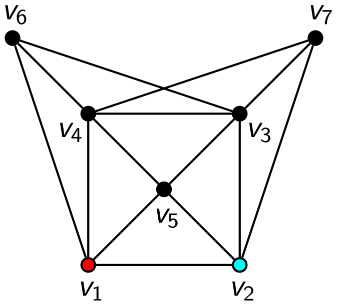
- Odaberemo proizvoljni poredak vrhova.

$$v_1, v_2, v_5, v_6, v_4, v_3, v_7$$

- Odabranim redoslijedom bojamo vrhove grafa G.

vrh	v_1	v_2	v_5	v_6	v_4	v_3	v_7
boja	1						

Slučajni raspored vrhova



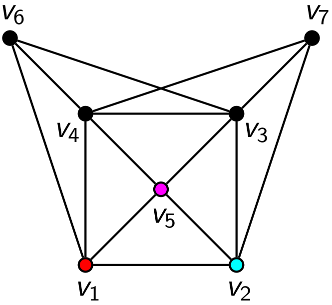
- Odaberemo proizvoljni poredak vrhova.

$$v_1, v_2, v_5, v_6, v_4, v_3, v_7$$

- Odabranim redoslijedom bojamo vrhove grafa G.

vrh	v_1	v_2	v_5	v_6	v_4	v_3	v_7
boja	1	2					

Slučajni raspored vrhova



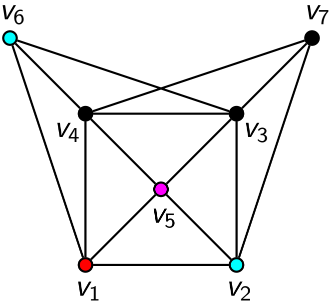
- Odaberemo proizvoljni poredak vrhova.

$$v_1, v_2, v_5, v_6, v_4, v_3, v_7$$

- Odabranim redoslijedom bojamo vrhove grafa G.

vrh	v_1	v_2	v_5	v_6	v_4	v_3	v_7
boja	1	2	3				

Slučajni raspored vrhova



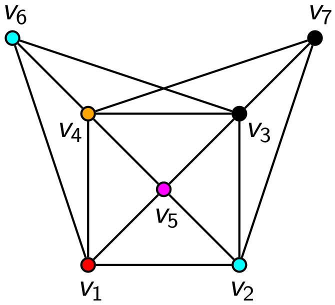
- Odaberemo proizvoljni poredak vrhova.

$$v_1, v_2, v_5, v_6, v_4, v_3, v_7$$

- Odabranim redoslijedom bojamo vrhove grafa G.

vrh	v_1	v_2	v_5	v_6	v_4	v_3	v_7
boja	1	2	3	2			

Slučajni raspored vrhova



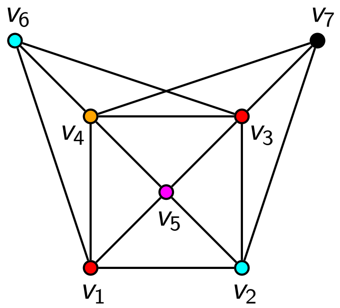
- Odaberemo proizvoljni poredak vrhova.

$$v_1, v_2, v_5, v_6, v_4, v_3, v_7$$

- Odabranim redoslijedom bojamo vrhove grafa G.

vrh	v_1	v_2	v_5	v_6	v_4	v_3	v_7
boja	1	2	3	2	4		

Slučajni raspored vrhova



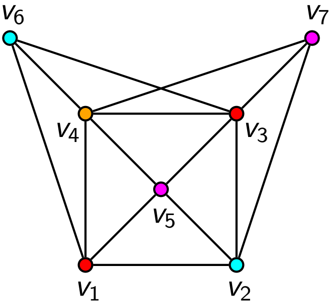
- Odaberemo proizvoljni poredak vrhova.

$$v_1, v_2, v_5, v_6, v_4, v_3, v_7$$

- Odabranim redoslijedom bojamo vrhove grafa G.

vrh	v_1	v_2	v_5	v_6	v_4	v_3	v_7
boja	1	2	3	2	4	1	

Slučajni raspored vrhova



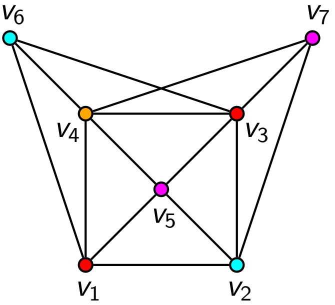
- Odaberemo proizvoljni poredak vrhova.

$$v_1, v_2, v_5, v_6, v_4, v_3, v_7$$

- Odabranim redoslijedom bojamo vrhove grafa G.

vrh	v_1	v_2	v_5	v_6	v_4	v_3	v_7
boja	1	2	3	2	4	1	3

Slučajni raspored vrhova



- Odaberemo proizvoljni poredak vrhova.

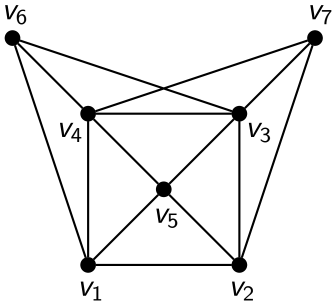
$$v_1, v_2, v_5, v_6, v_4, v_3, v_7$$

- Odabranim redoslijedom bojamo vrhove grafa G.

vrh	v_1	v_2	v_5	v_6	v_4	v_3	v_7
boja	1	2	3	2	4	1	3

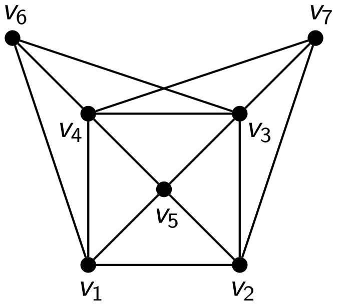
- Dobiveno bojanje vrhova nije bojanje s minimalnim brojem boja jer je $\gamma(G) = 3$.

Brèlazov algoritam



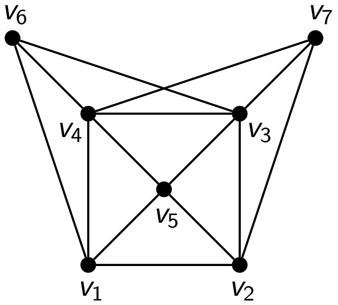
Brèlazov algoritam

- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



Brèlazov algoritam

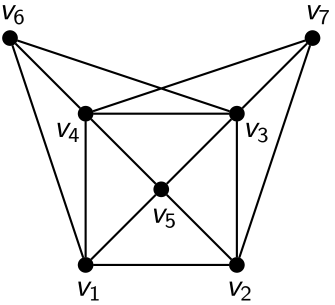
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja

Brèlazov algoritam

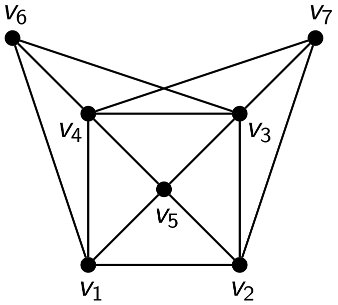
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.									

Brèlazov algoritam

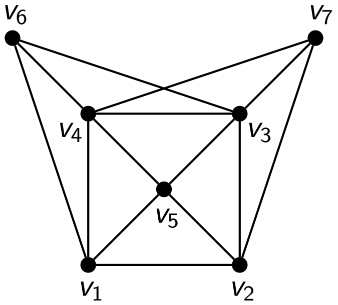
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.			$*$						

Brèlazov algoritam

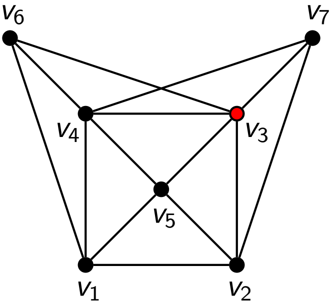
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.			$*$					v_3	

Brèlazov algoritam

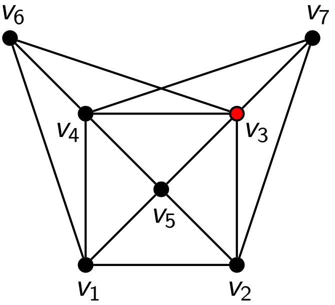
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.			$*$					v_3	1

Brèlazov algoritam

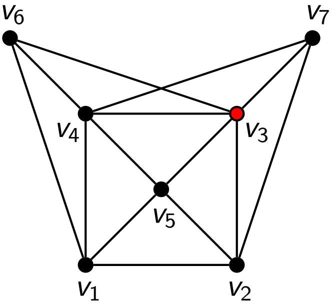
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0		$*$					v_3	1

Brèlazov algoritam

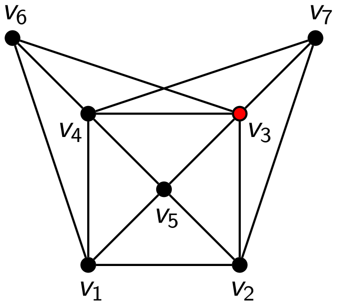
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$					v_3	1

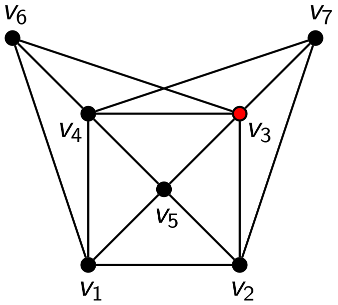
Brèlazov algoritam

- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1				v_3	1

Brèlazov algoritam

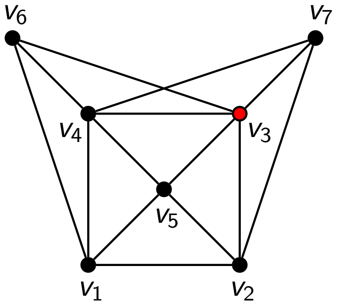


- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1			v_3	1

Brèlazov algoritam

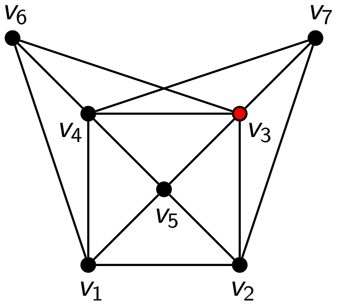
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1		v_3	1

Brèlazov algoritam

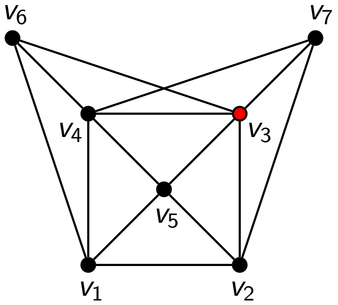
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1

Brèlazov algoritam

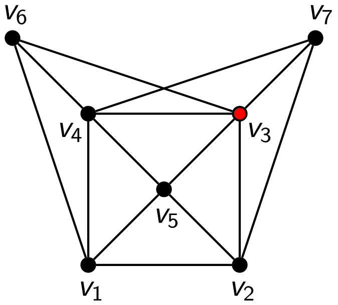
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.									

Brèlazov algoritam

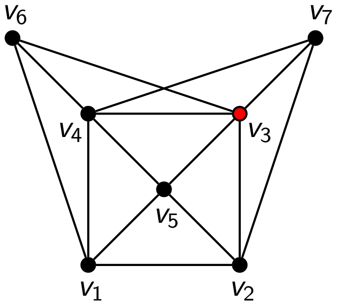
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.			$*$						

Brèlazov algoritam

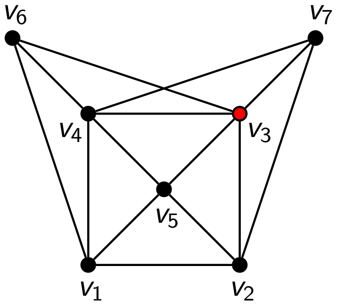
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.			$*$		$*$				

Brèlazov algoritam

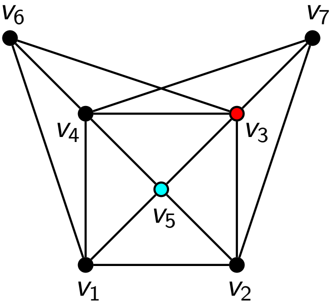
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.			$*$		$*$			v_5	

Brèlazov algoritam

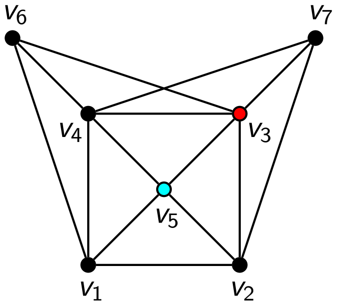
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.			$*$		$*$			v_5	2

Brèlazov algoritam

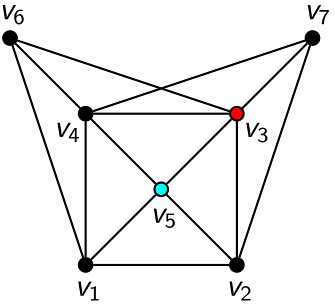
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se odreduje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1		$*$		$*$			v_5	2

Brèlazov algoritam

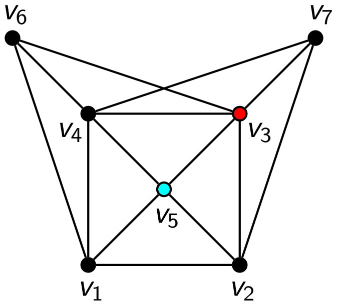
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$		$*$			v_5	2

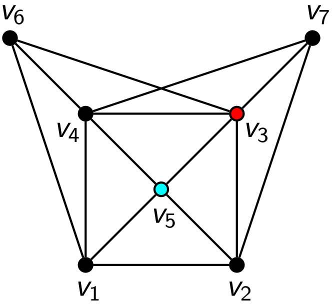
Brèlazov algoritam

- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$			v_5	2

Brèlazov algoritam

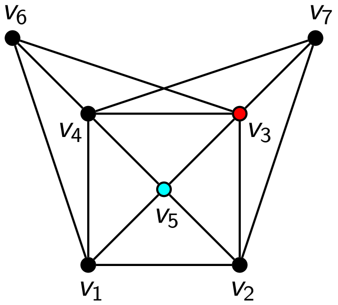


- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1		v_5	2

Brèlazov algoritam

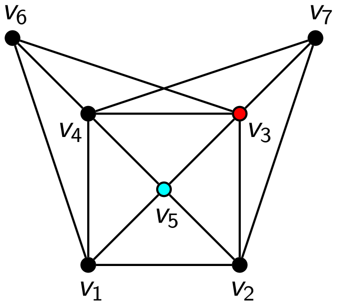
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2

Brèlazov algoritam

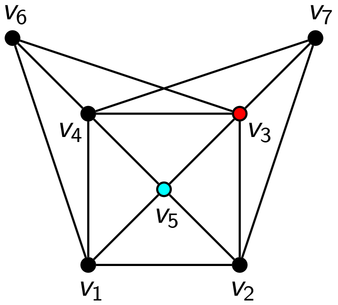
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se odreduje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.									

Brèlazov algoritam

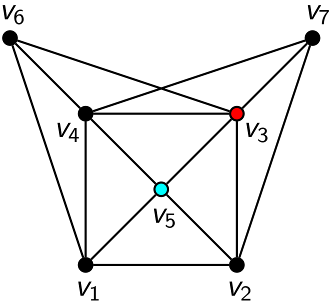
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.			$*$		$*$				

Brèlazov algoritam

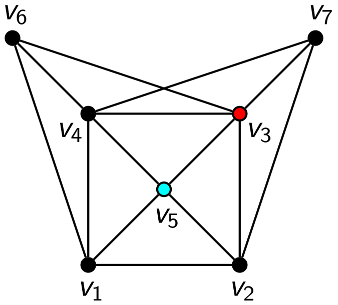
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.		$*$	$*$		$*$				

Brèlazov algoritam

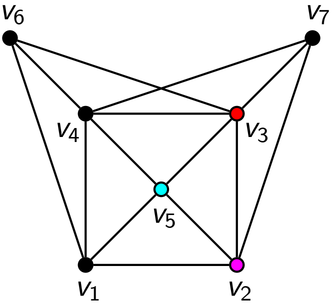
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.		$*$	$*$		$*$			v_2	

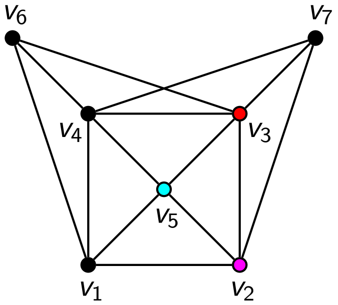
Brèlazov algoritam

- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.		$*$	$*$		$*$			v_2	3

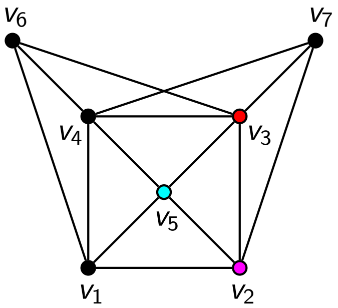
Brèlazov algoritam



- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$		$*$			v_2	3

Brèlazov algoritam

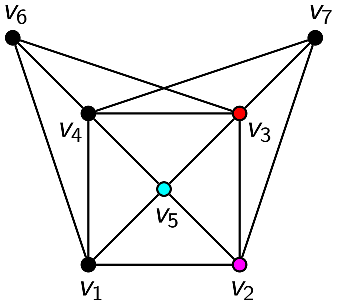


- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$			v_2	3

Brèlazov algoritam

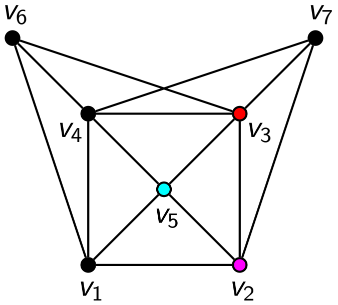
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1		v_2	3

Brèlazov algoritam

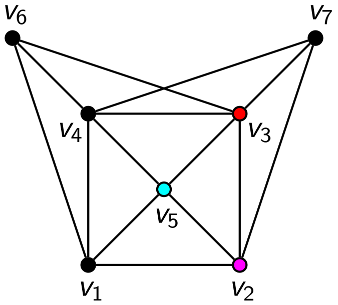
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3

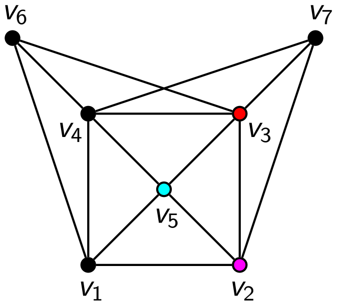
Brèlazov algoritam

- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.									

Brèlazov algoritam

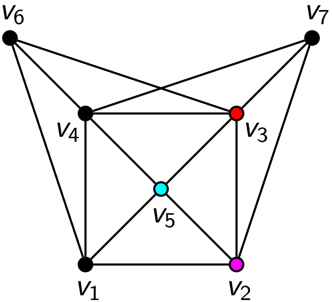


- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.		$*$	$*$		$*$				

Brèlazov algoritam

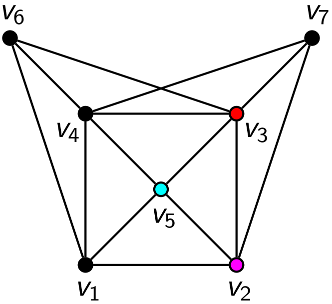
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.		$*$	$*$	$*$	$*$				

Brèlazov algoritam

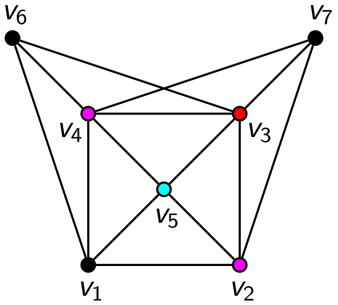
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.		$*$	$*$	$*$	$*$			v_4	

Brèlazov algoritam

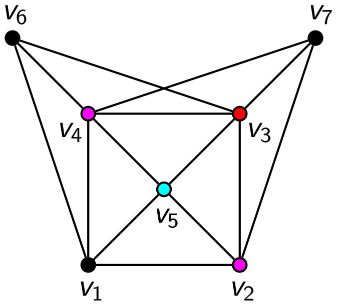
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.		$*$	$*$	$*$	$*$			v_4	3

Brèlazov algoritam

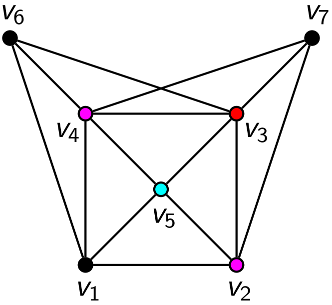
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.	2	$*$	$*$	$*$	$*$			v_4	3

Brèlazov algoritam

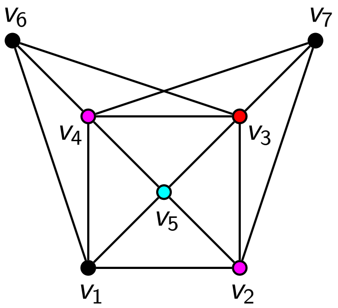
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.	2	$*$	$*$	$*$	$*$	2		v_4	3

Brèlazov algoritam

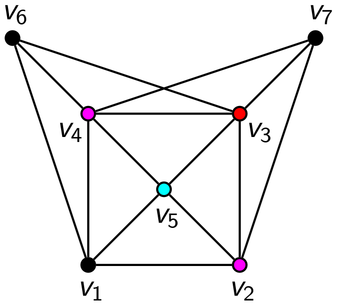
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.	2	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_4	3

Brèlazov algoritam

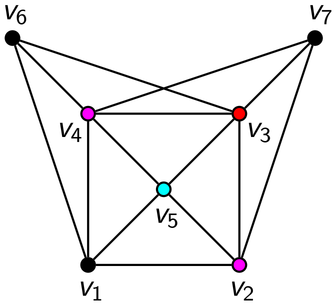
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	*	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	*	2	*	1	1	v_5	2
3.	2	*	*	2	*	1	2	v_2	3
4.	2	*	*	*	*	2	2	v_4	3
5.									

Brèlazov algoritam

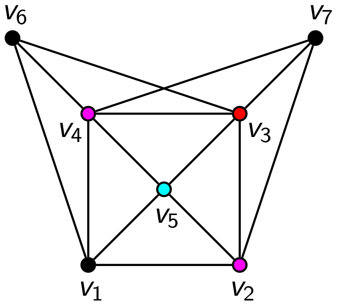
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se odreduje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.	2	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_4	3
5.		$*$	$*$	$*$	$*$				

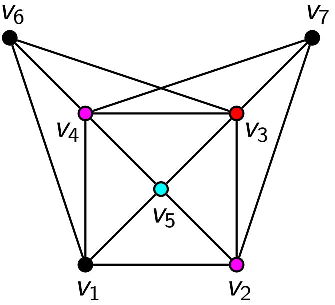
Brèlazov algoritam

- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.	2	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_4	3
5.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$				

Brèlazov algoritam

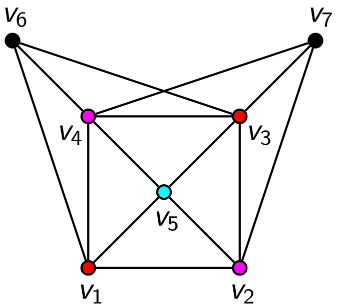


- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.	2	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_4	3
5.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$			v_1	

Brèlazov algoritam

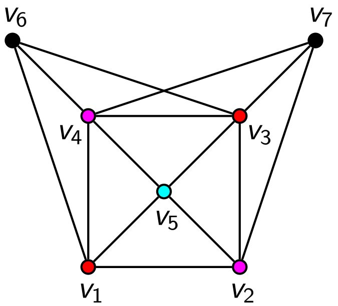
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.	2	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_4	3
5.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$			v_1	1

Brèlazov algoritam

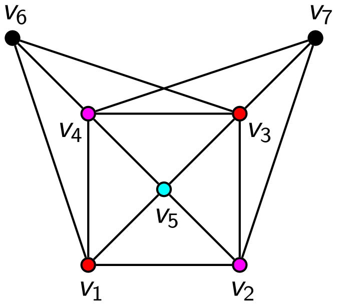
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.	2	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_4	3
5.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2		v_1	1

Brèlazov algoritam

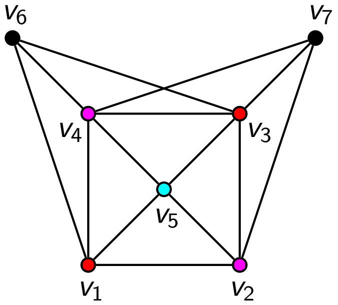
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.	2	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_4	3
5.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_1	1

Brèlazov algoritam

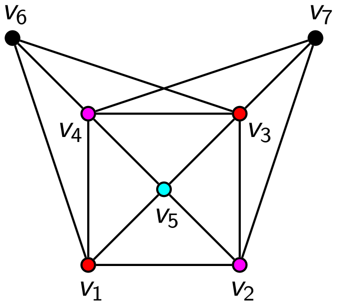
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.	2	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_4	3
5.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_1	1
6.									

Brèlazov algoritam

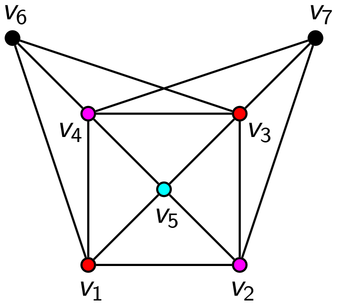
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.	2	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_4	3
5.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_1	1
6.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$				

Brèlazov algoritam

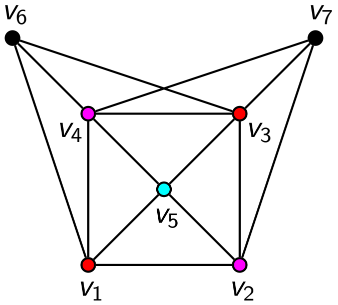
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.	2	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_4	3
5.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_1	1
6.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$		$*$		

Brèlazov algoritam

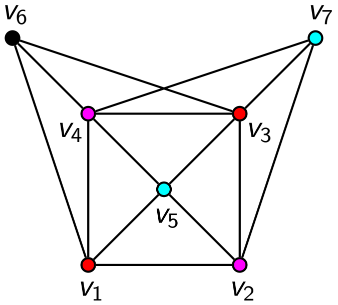
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.	2	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_4	3
5.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_1	1
6.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$		$*$	v_7	

Brèlazov algoritam

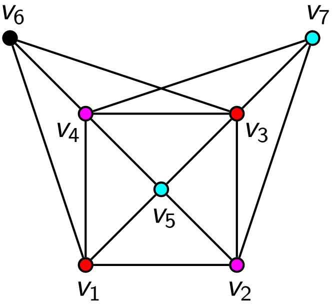
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.	2	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_4	3
5.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_1	1
6.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$		$*$	v_7	2

Brèlazov algoritam

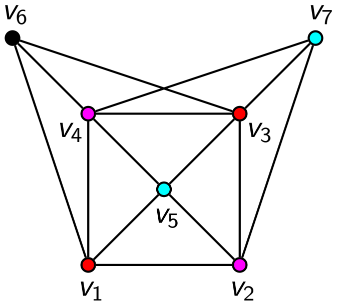
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se odreduje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.	2	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_4	3
5.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_1	1
6.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2	$*$	v_7	2

Brèlazov algoritam

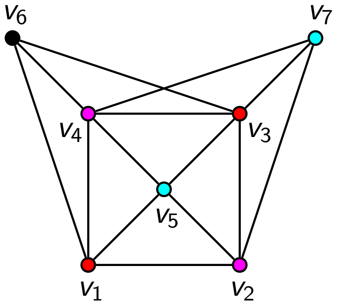
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se odreduje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.	2	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_4	3
5.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_1	1
6.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2	$*$	v_7	2
7.									

Brèlazov algoritam

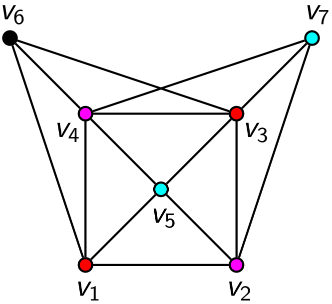
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se odreduje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.	2	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_4	3
5.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_1	1
6.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2	$*$	v_7	2
7.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$		$*$		

Brèlazov algoritam

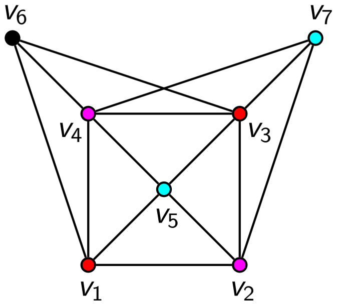
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.	2	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_4	3
5.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_1	1
6.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2	$*$	v_7	2
7.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$		

Brèlazov algoritam

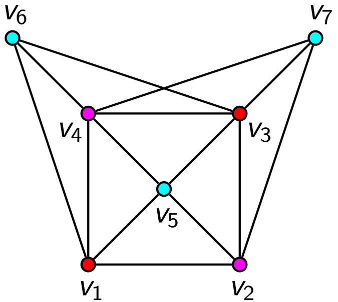
- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.	2	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_4	3
5.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_1	1
6.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2	$*$	v_7	2
7.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	v_6	

Brèlazov algoritam

- Redoslijed bojanja vrhova grafa se određuje dinamički tokom izvođenja programa na temelju **stupnjeva zasićenosti** neobojanih vrhova s obzirom na trenutno obojane vrhove.



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	obojani vrh	boja
1.	0	1	$*$	1	1	1	1	v_3	1
2.	1	2	$*$	2	$*$	1	1	v_5	2
3.	2	$*$	$*$	2	$*$	1	2	v_2	3
4.	2	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_4	3
5.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2	2	v_1	1
6.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	2	$*$	v_7	2
7.	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	v_6	2

Pohlepno bojanje bridova grafa

Indirektna metoda

Problem bojanja bridova grafa G je identičan problemu bojanja vrhova njegovog linijskog grafa $L(G)$. Dakle, umjesto da bojamo bridove grafa G, primijenimo neki pohlepni algoritam na bojanje vrhova grafa $L(G)$.

Direktne metode

To su specijalizirane metode za bojanje bridova grafa G. Dvije najpoznatije takve metode su:

- Naivno pohlepno bojanje bridova
- Vizingova metoda

Naivno pohlepno bojanje bridova

- Funkcionira na analogni način kao i pohlepno bojanje vrhova grafa sa slučajnim poretkom vrhova.
- Ova metoda koristi najviše $2\Delta(G) - 1$ boja.
- Dakle, u najgorem mogućem slučaju koristi manje od dvostrukog broja potrebnih boja jer je uvijek $\gamma'(G) \geqslant \Delta(G)$.

Zbog čega ista takva pohlepna metoda nije toliko dobro učinkovita kod bojanja vrhova grafa?

Vizingova metoda

- Temelji se na konstruktivnom dokazu Vizingovog teorema u kojemu je opisan postupak rebojanja bridova.
- Kod bojanja bridova jednostavnog grafa u najgorem slučaju koristiti samo jednu boju više od minimalnog broja potrebnih boja.
- U općenitom slučaju, kod grafa G bez petlji koristit će samo $\mu(G)$ boja više od minimalnog broja potrebnih boja, pri čemu je $\mu(G)$ multiplicitet grafa G.
- Procedura za rebojanje bridova po potrebi mijenja boje nekim već obojanim bridovima kako bi se mogao obojati novi brid, a da se pritom ne koristi više od $\Delta(G) + \mu(G)$ boja.

Sparivanje u grafovima

Bergeov teorem

Sparivanje M u grafu G je najveće ako i samo ako G ne sadrži M-uvećani put.

Hallov teorem

Neka je G bipartitni graf s biparticijom (X, Y). Tada G sadrži sparivanje koje zasićuje svaki vrh u X ako i samo ako je $k(S(T)) \geqslant k(T)$ za svaki $T \subseteq X$.

Korolar Hallovog teorema

Ako je G neprazni s-regularni bipartitni graf, tada G ima savršeno sparivanje M.

Teorem o ženidbi (životna interpretacija korolara)

Svaka djevojka u selu pozna točno k mladića, a svaki mladić pozna točno k djevojaka. Tada se svaka djevojka može udati za mladića kojeg pozna i svaki mladić može oženiti djevojku koju pozna. Drugim riječima, djevojke i mladići se mogu savršeno spariti.

Algoritam za najveće sparivanje

- Algoritam za najveće sparivanje u grafu G temelji se na konstruktivnom dokazu Bergeovog teorema.
- Modificiranim BFS ili DFS algoritmom se konstruira šuma alternirajućih stabala s obzirom na trenutno sparivanje M. Pomoću te šume se pronađe neki M-uvećani put.
- Pomoću dobivenog M-uvećanog puta se konstruira novo sparivanje M' za koje je $k(M') = k(M) + 1$. Isti postupak se ponavlja dalje za sparivanje M'.
- Postupak se ponavlja tako dugo dok postoje uvećani putovi s obzirom na trenutno sparivanje. Ako u nekom koraku više ne postoje M-uvećani putovi, tada je trenutno sparivanje M najveće sparivanje u grafu G.

Edmondsov algoritam – grafovi koji nisu bipartitni

- Neparni ciklusi u grafu stvaraju probleme modificiranom BFS i DFS algoritmu. Stoga ova dva algoritma dobro funkcioniraju jedino na bipartitnim grafovima. Uz dodatnu modifikaciju mogu dobro funkcionirati na svim grafovima.
- Ako modificirani BFS ili DFS algoritam naiđe na **cvijet** u grafu (neparni ciklus duljine $2k+1$ čijih k bridova pripada sparivanju M), tada se taj cvijet stegne u njegov bazni vrh (vrh koji je susjedan s dva brida tog ciklusa koji ne pripadaju sparivanju M.)
- Na taj način pomažemo modificiranom BFS ili DFS algoritmu da pronađe M-uvećani put u grafu G' u kojemu su svi cvijetovi na koje je naišao u grafu G stegnuti u njihove bazne vrhove.
- Ponovnim rastezanjem svih stegnutih cvijetova pronalazi se M-uvećani put u početnom grafu G.

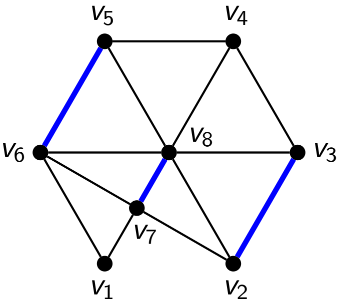
Još neke napomene

- Najveće sparivanje u bipartitnom grafu može se pronaći i pomoću maksimalnog protoka koristeći Bellman-Fordov algoritam.
- Razlikujte maksimalno sparivanje od najvećeg sparivanja.
- Maksimalno sparivanje u grafu se lagano pronađe pohlepnim algoritmom.
- Maksimalno sparivanje u grafu općenito nije jedinstveno.
- Najveće sparivanje u grafu također općenito nije jedinstveno.

četvrti zadatak

Zadatak 4

Zadan je graf G i sparivanje $M = \{\{v_2, v_3\}, \{v_5, v_6\}, \{v_7, v_8\}\}$ u grafu G čiji bridovi su deblje označeni na slici.



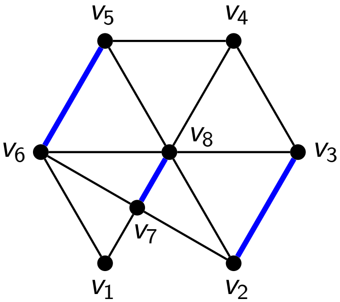
a) *Je li M maksimalno sparivanje u grafu G? Obrazložite odgovor.*

b) *Napišite barem dva M-uvećana puta u grafu G ukoliko oni postoje.*

c) *Je li M najveće sparivanje u grafu G? Ukoliko nije, pronađite jedno najveće sparivanje pomoću nekog M-uvećanog puta.*

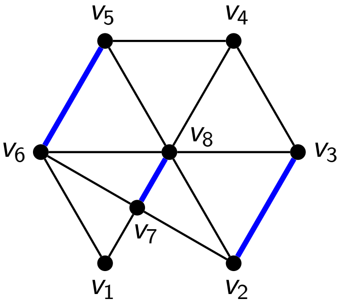
Rješenje

a)



Rješenje

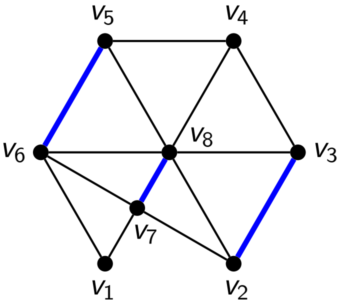
a) M je maksimalno sparivanje u grafu G jer ne postoji sparivanje M' u grafu G za koje bi vrijedilo $M \subset M'$.



Rješenje

a) M je maksimalno sparivanje u grafu G jer ne postoji sparivanje M' u grafu G za koje bi vrijedilo $M \subset M'$.

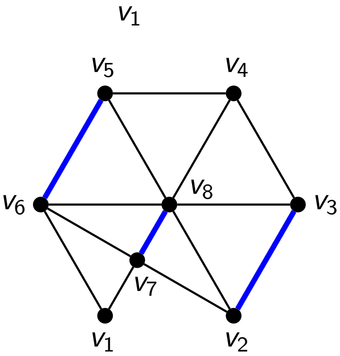
b) Dva M-uvećana puta u grafu G:



Rješenje

a) M je maksimalno sparivanje u grafu G jer ne postoji sparivanje M' u grafu G za koje bi vrijedilo $M \subset M'$.

b) Dva M-uvećana puta u grafu G:

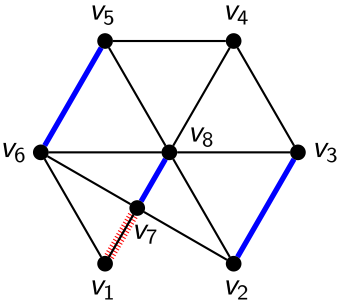


Rješenje

a) M je maksimalno sparivanje u grafu G jer ne postoji sparivanje M' u grafu G za koje bi vrijedilo $M \subset M'$.

b) Dva M-uvećana puta u grafu G:

$v_1 v_7$

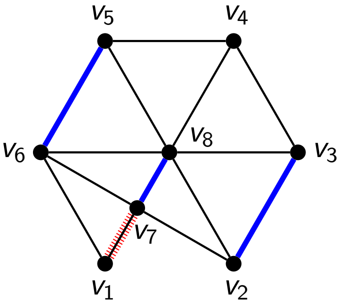


Rješenje

a) M je maksimalno sparivanje u grafu G jer ne postoji sparivanje M' u grafu G za koje bi vrijedilo $M \subset M'$.

b) Dva M-uvećana puta u grafu G:

$v_1 v_7 v_8$

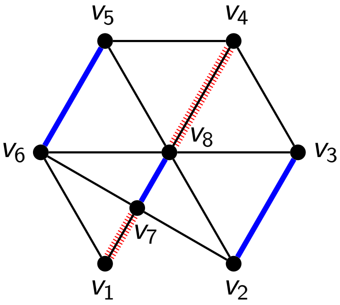


Rješenje

a) M je maksimalno sparivanje u grafu G jer ne postoji sparivanje M' u grafu G za koje bi vrijedilo $M \subset M'$.

b) Dva M-uvećana puta u grafu G:

$v_1 v_7 v_8 v_4$

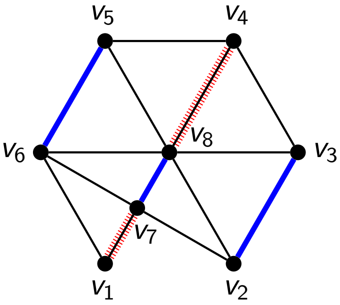


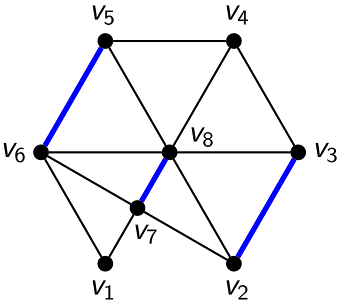
Rješenje

a) M je maksimalno sparivanje u grafu G jer ne postoji sparivanje M' u grafu G za koje bi vrijedilo $M \subset M'$.

b) Dva M-uvećana puta u grafu G:

$v_1 v_7 v_8 v_4$



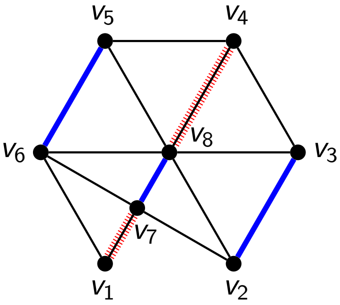


Rješenje

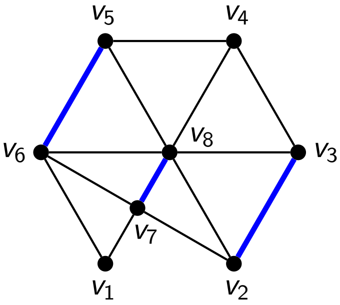
a) M je maksimalno sparivanje u grafu G jer ne postoji sparivanje M' u grafu G za koje bi vrijedilo $M \subset M'$.

b) Dva M-uvećana puta u grafu G:

$v_1 v_7 v_8 v_4$



v_4

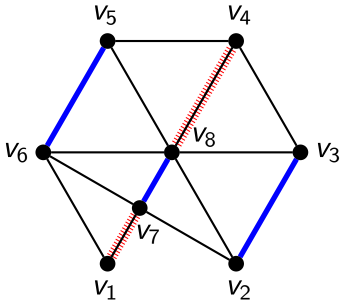


Rješenje

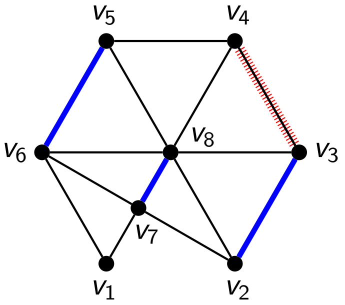
a) M je maksimalno sparivanje u grafu G jer ne postoji sparivanje M' u grafu G za koje bi vrijedilo $M \subset M'$.

b) Dva M-uvećana puta u grafu G:

$v_1 v_7 v_8 v_4$



$v_4 v_3$

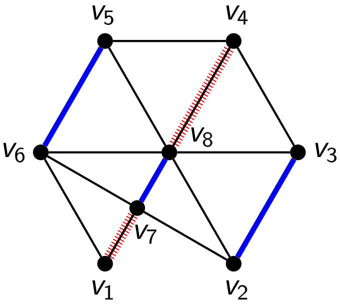


Rješenje

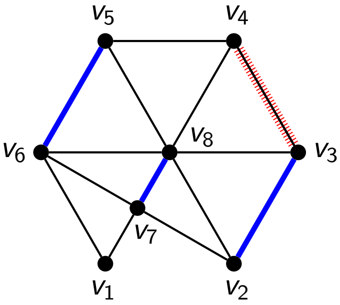
a) M je maksimalno sparivanje u grafu G jer ne postoji sparivanje M' u grafu G za koje bi vrijedilo $M \subset M'$.

b) Dva M-uvećana puta u grafu G:

$v_1 v_7 v_8 v_4$



$v_4 v_3 v_2$

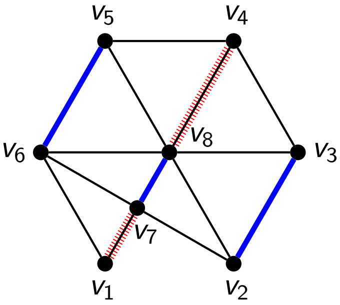


Rješenje

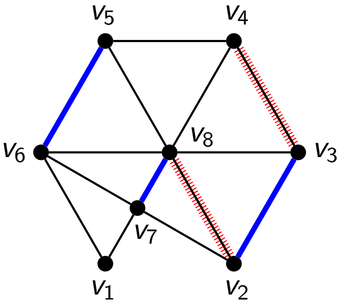
a) M je maksimalno sparivanje u grafu G jer ne postoji sparivanje M' u grafu G za koje bi vrijedilo $M \subset M'$.

b) Dva M-uvećana puta u grafu G:

$v_1 v_7 v_8 v_4$



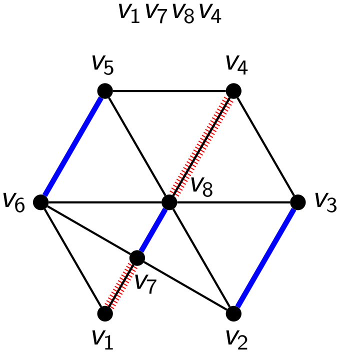
$v_4 v_3 v_2 v_8$

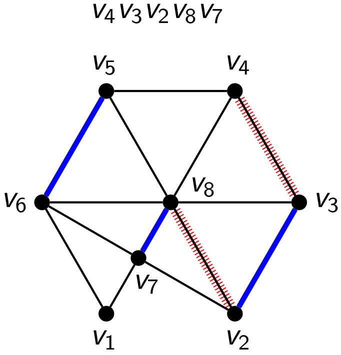


Rješenje

a) M je maksimalno sparivanje u grafu G jer ne postoji sparivanje M' u grafu G za koje bi vrijedilo $M \subset M'$.

b) Dva M-uvećana puta u grafu G:



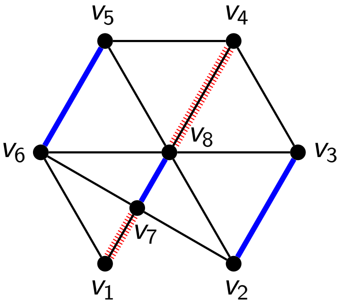


Rješenje

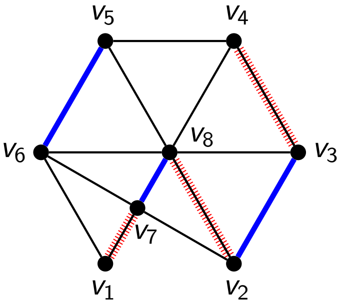
a) M je maksimalno sparivanje u grafu G jer ne postoji sparivanje M' u grafu G za koje bi vrijedilo $M \subset M'$.

b) Dva M-uvećana puta u grafu G:

$v_1 v_7 v_8 v_4$



$v_4 v_3 v_2 v_8 v_7 v_1$

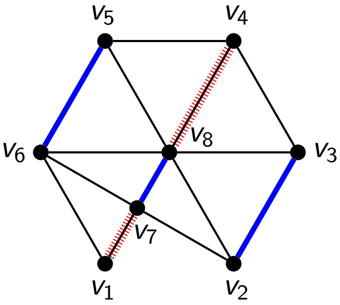


Rješenje

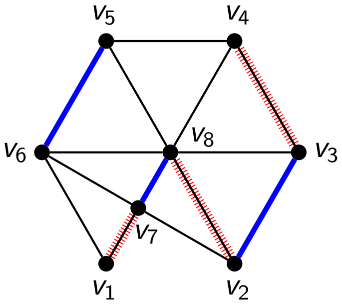
a) M je maksimalno sparivanje u grafu G jer ne postoji sparivanje M' u grafu G za koje bi vrijedilo $M \subset M'$.

b) Dva M-uvećana puta u grafu G:

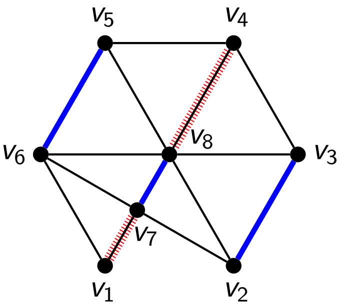
$v_1 v_7 v_8 v_4$

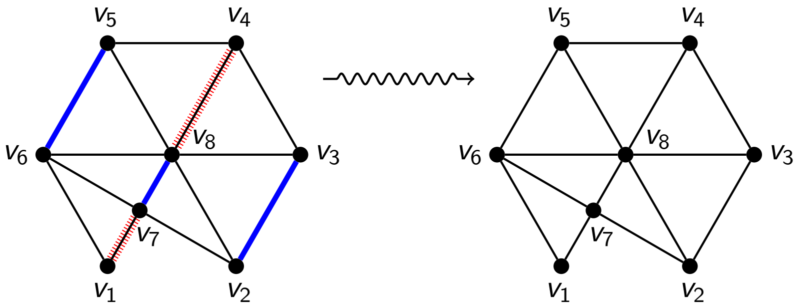


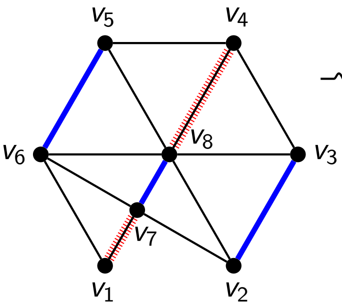
$v_4 v_3 v_2 v_8 v_7 v_1$



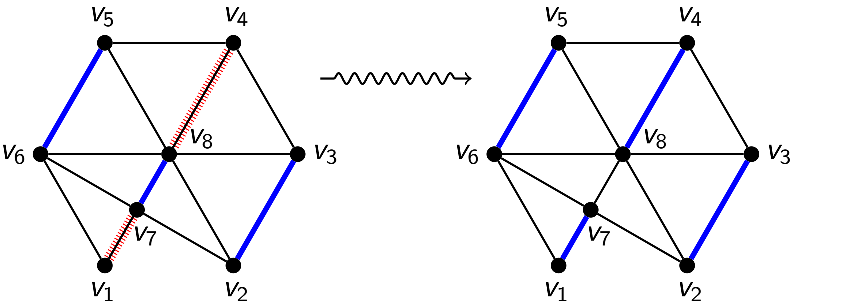
c) M nije najveće sparivanje u grafu G jer postoje M-uvećani putovi.


v_5
v_4
v_8
v_6
v_3
v_7
v_1
v_2

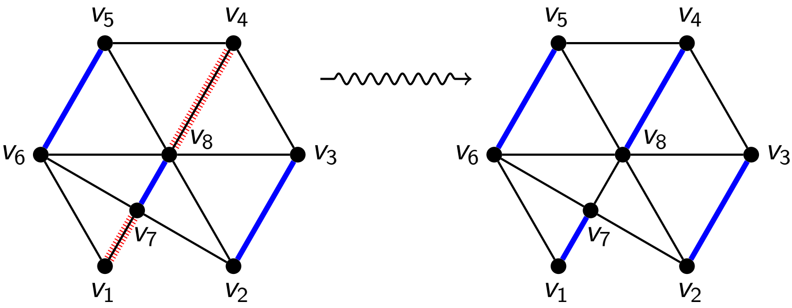

v_5
v_4
v_6
v_8
v_3
v_7
v_1
v_2
v_5
v_4
v_6
v_8
v_3
v_7
v_1
v_2



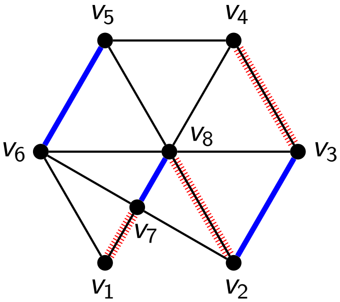
v_5
v_4
v_6
v_8
v_3
v_7
v_1
v_2
v_5
v_4
v_6
v_8
v_3
v_7
v_1
v_2

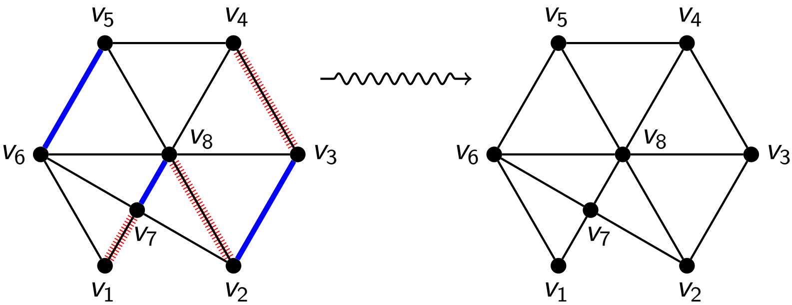


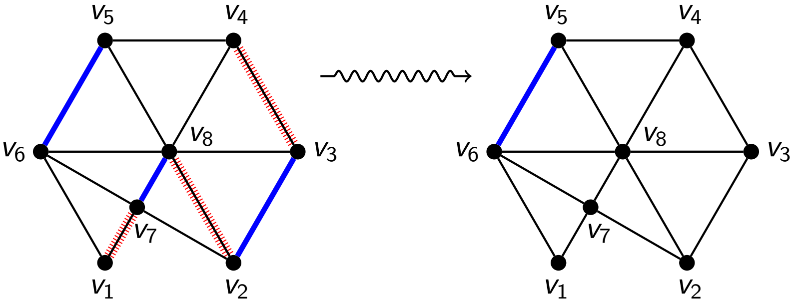
v_5
v_4
v_8
v_6
v_3
v_7
v_1
v_2
v_5
v_4
v_8
v_6
v_3
v_7
v_1
v_2

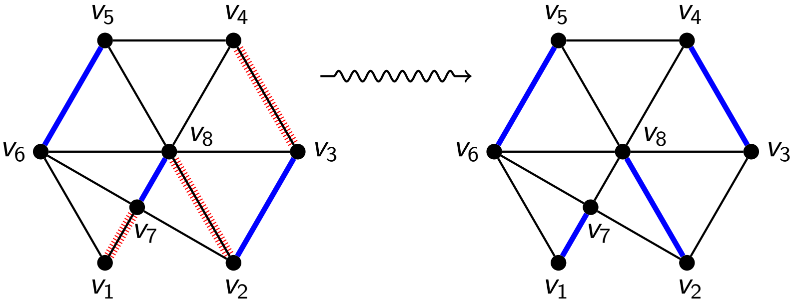


Sparivanje $M_1 = \big\{\{v_2, v_3\}, \{v_5, v_6\}, \{v_1, v_7\}, \{v_4, v_8\}\big\}$ je najveće sparivanje u grafu G koje je ujedno i savršeno sparivanje jer su svi vrhovi M_1-zasićeni.

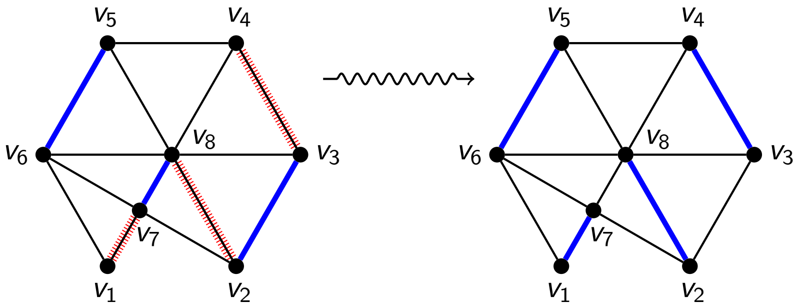

v_5
v_4
v_8
v_6
v_3
v_7
v_1
v_2


v_5
v_4
v_6
v_8
v_3
v_7
v_1
v_2
v_5
v_4
v_6
v_8
v_3
v_7
v_1
v_2


v_5
v_4
v_8
v_6
v_3
v_7
v_1
v_2
v_5
v_4
v_8
v_6
v_3
v_7
v_1
v_2



v_5
v_4
v_6
v_8
v_3
v_7
v_1
v_2
v_5
v_4
v_6
v_8
v_3
v_7
v_1
v_2



Sparivanje $M_2 = \big\{\{v_1, v_7\}, \{v_5, v_6\}, \{v_2, v_8\}, \{v_3, v_4\}\big\}$ je najveće sparivanje u grafu G koje je ujedno i savršeno sparivanje jer su svi vrhovi M_2-zasićeni.

peti zadatak

Zadatak 5

Tvornica ima pet velikih strojeva S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 *koji zajedno s ostalim manjim strojevima sudjeluju u proizvodnji. Radom spomenutih strojeva upravlja računalo. U pojedinom koraku proizvodnje računalo treba svakom stroju pridružiti određeni posao kojeg stroj treba obaviti. Međutim, svaki od spomenutih velikih strojeva može obavljati samo određene vrste poslova i ne može u jednom koraku proizvodnje obavljati više različitih poslova. U jednom od koraka proizvodnje veliki strojevi trebaju obaviti što je moguće veći broj poslova* $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$. *U donjoj tablici je prikazano koje sve poslove može obavljati pojedini stroj tako da je na odgovarajuće mjesto stavljen znak* ✓.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
S_1	✓	✓	✓			✓
S_2				✓	✓	
S_3				✓	✓	
S_4	✓	✓	✓	✓		✓
S_5				✓	✓	

Pitanje je kako da računalo rasporedi poslove strojevima tako da u promatranom koraku proizvodnje bude obavljeno što je moguće više poslova.

a) *Modelirajte problem pomoću grafova tako da kratko i jasno opišete na koji ćete način konstruirati graf i na koji problem iz teorije grafova svodite ovaj realni problem.*

b) *Može li računalo rasporediti poslove strojevima tako da niti jedan stroj ne miruje u promatranom koraku proizvodnje? Dokažite svoju tvrdnju jezikom teorije grafova.*

c) *Napravite jedan optimalni raspored poslova strojevima za promatrani korak proizvodnje.*

Rješenje

a) Neka je G bipartitni graf s biparticijom (X, Y) pri čemu je $X = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ i $Y = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$.

Rješenje

a) Neka je G bipartitni graf s biparticijom (X, Y) pri čemu je

$X = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ i $Y = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$.

Vrhovi S_i i P_j su susjedni jedino ako stroj S_i može obavljati posao P_j.

Rješenje

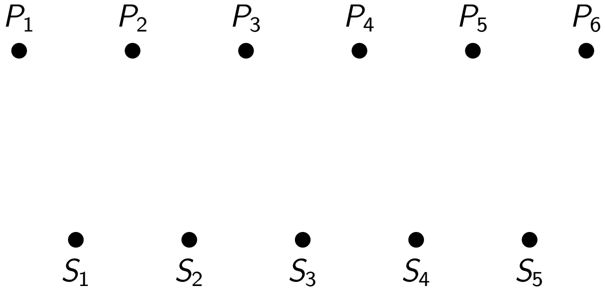
a) Neka je G bipartitni graf s biparticijom

$X = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ i $Y = \{P_1, P_2,$

Vrhovi S_i i P_j su susjedni jedino ako str

posao P_j.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
S_1	✓	✓	✓			✓
S_2				✓	✓	
S_3				✓	✓	
S_4	✓	✓	✓	✓		✓
S_5				✓	✓	



Rješenje

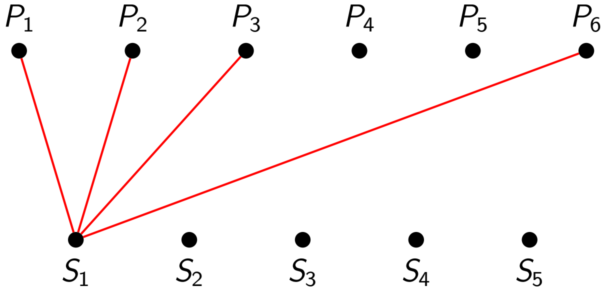
a) Neka je G bipartitni graf s biparticijom

$X = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ i $Y = \{P_1, P_2,$

Vrhovi S_i i P_j su susjedni jedino ako str

posao P_j.

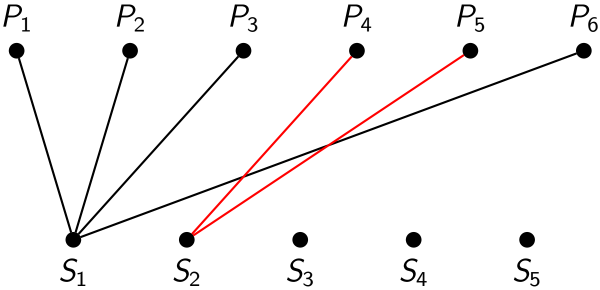
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
S_1	✓	✓	✓			✓
S_2				✓	✓	
S_3				✓	✓	
S_4	✓	✓	✓	✓		✓
S_5				✓	✓	



Rješenje

a) Neka je G bipartitni graf s biparticijom
$X = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ i $Y = \{P_1, P_2,$
Vrhovi S_i i P_j su susjedni jedino ako str
posao P_j.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
S_1	✓	✓	✓			✓
S_2				✓	✓	
S_3				✓	✓	
S_4	✓	✓	✓	✓		✓
S_5				✓	✓	



Rješenje

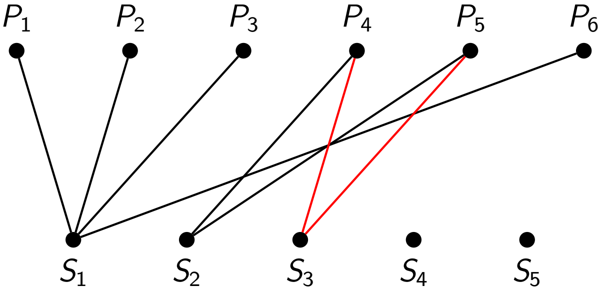
a) Neka je G bipartitni graf s biparticijom

$X = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ i $Y = \{P_1, P_2,$

Vrhovi S_i i P_j su susjedni jedino ako str

posao P_j.

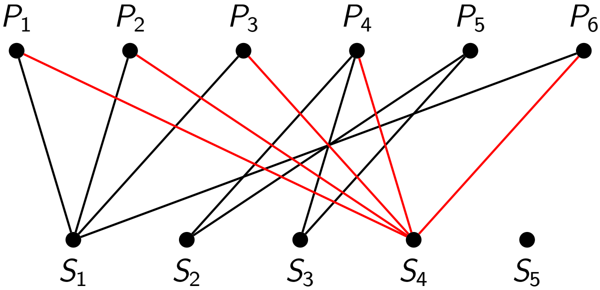
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
S_1	✓	✓	✓			✓
S_2				✓	✓	
S_3				✓	✓	
S_4	✓	✓	✓	✓		✓
S_5				✓	✓	



Rješenje

a) Neka je G bipartitni graf s biparticijom
$X = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ i $Y = \{P_1, P_2,$
Vrhovi S_i i P_j su susjedni jedino ako str
posao P_j.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
S_1	✓	✓	✓			✓
S_2				✓	✓	
S_3				✓	✓	
S_4	✓	✓	✓	✓		✓
S_5				✓	✓	



Rješenje

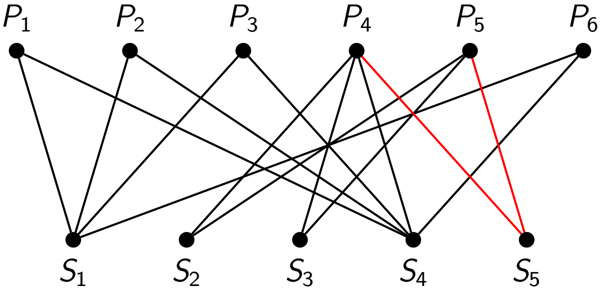
a) Neka je G bipartitni graf s biparticijom

$X = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ i $Y = \{P_1, P_2,$

Vrhovi S_i i P_j su susjedni jedino ako str

posao P_j.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
S_1	✓	✓	✓			✓
S_2				✓	✓	
S_3				✓	✓	
S_4	✓	✓	✓	✓		✓
S_5				✓	✓	



Rješenje

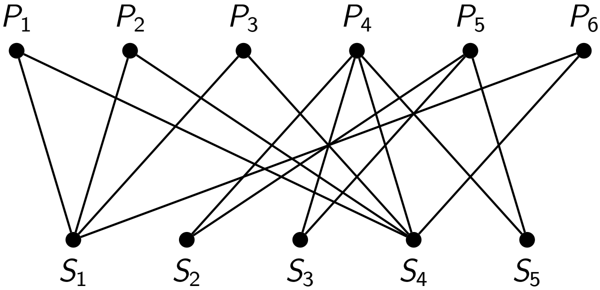
a) Neka je G bipartitni graf s biparticijom

$X = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ i $Y = \{P_1, P_2,$

Vrhovi S_i i P_j su susjedni jedino ako str

posao P_j.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
S_1	✓	✓	✓			✓
S_2				✓	✓	
S_3				✓	✓	
S_4	✓	✓	✓	✓		✓
S_5				✓	✓	

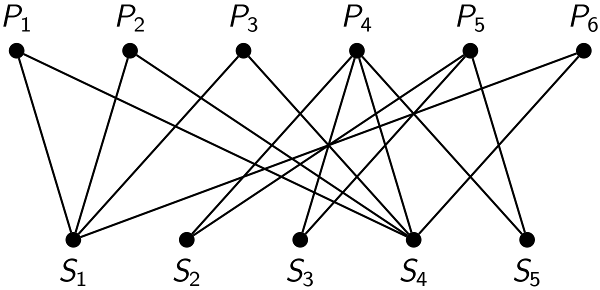


Rješenje

a) Neka je G bipartitni graf s biparticijom (X, Y) pri čemu je

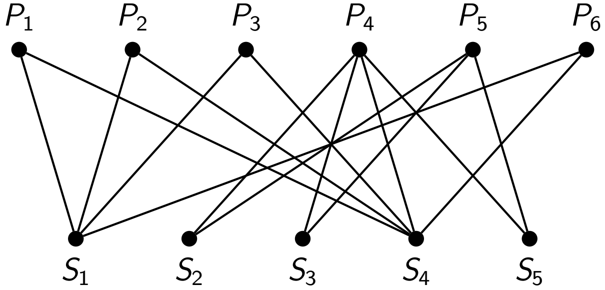
$X = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ i $Y = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$.

Vrhovi S_i i P_j su susjedni jedino ako stroj S_i može obavljati posao P_j.

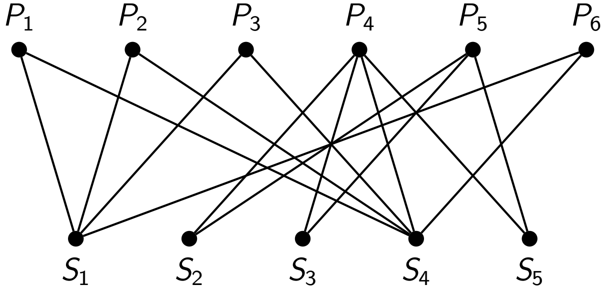


Promatrani realni problem se svodi na traženje najvećeg sparivanja u grafu G.

b) Koristimo Hallov teorem.

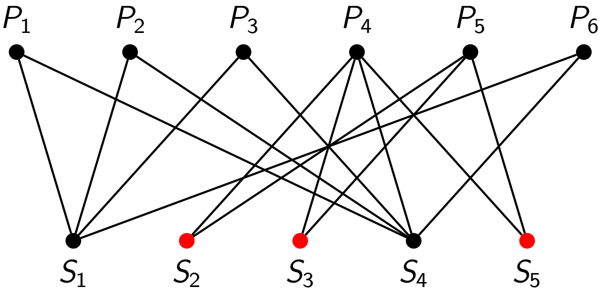


b) Koristimo Hallov teorem.



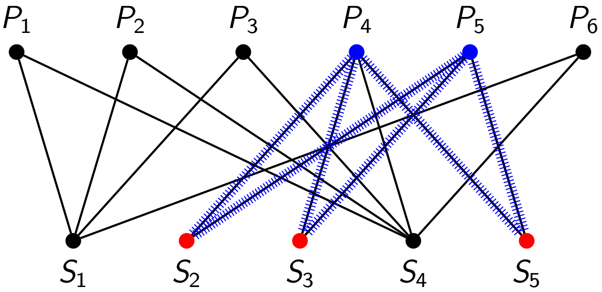
- $T \subseteq X$,

b) Koristimo Hallov teorem.



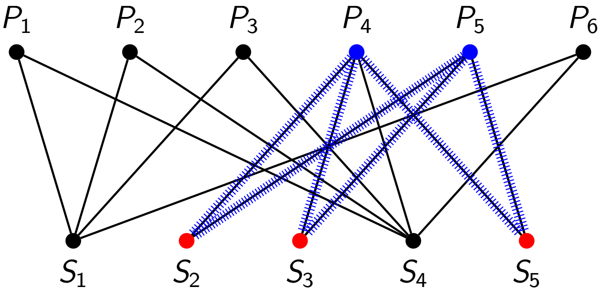
- $T \subseteq X, \quad T = \{S_2, S_3, S_5\}$

b) Koristimo Hallov teorem.



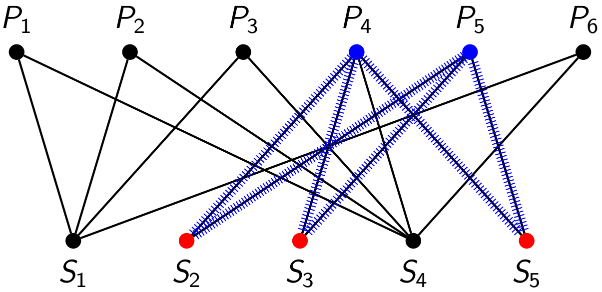
- $T \subseteq X, \quad T = \{S_2, S_3, S_5\}$
- $S(T) = \{P_4, P_5\}$

b) Koristimo Hallov teorem.



- $T \subseteq X, \quad T = \{S_2, S_3, S_5\}$
- $S(T) = \{P_4, P_5\}$
- $k(S(T)) < k(T)$

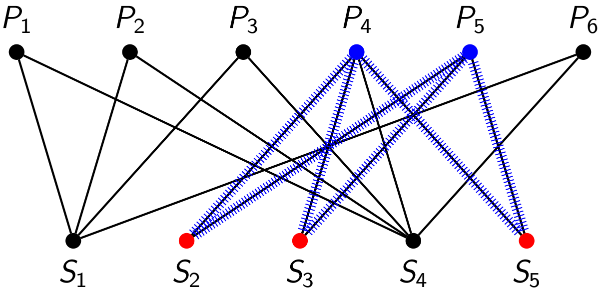
b) Koristimo Hallov teorem.



- $T \subseteq X, \quad T = \{S_2, S_3, S_5\}$
- $S(T) = \{P_4, P_5\}$
- $k(S(T)) < k(T)$

Ne postoji sparivanje u G koje zasićuje sve vrhove iz skupa X.

b) Koristimo Hallov teorem.

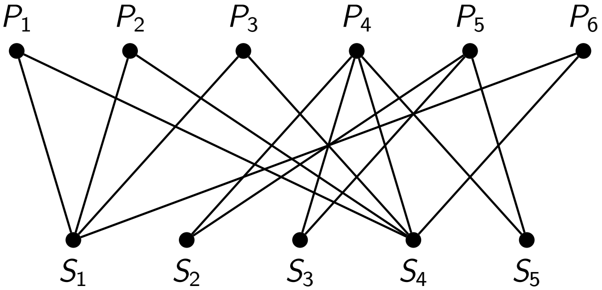


- $T \subseteq X, \quad T = \{S_2, S_3, S_5\}$
- $S(T) = \{P_4, P_5\}$
- $k(S(T)) < k(T)$

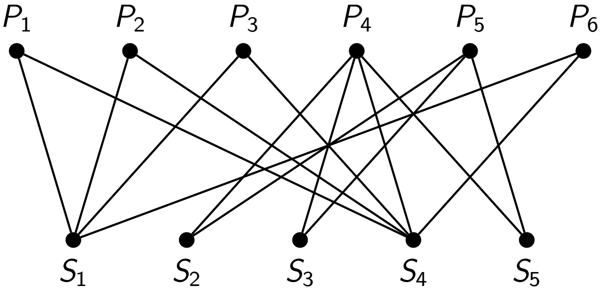
Ne postoji sparivanje u G koje zasićuje sve vrhove iz skupa X.

Nije moguće rasporediti poslove strojevima tako da niti jedan stroj ne miruje u promatranom koraku proizvodnje.

c)

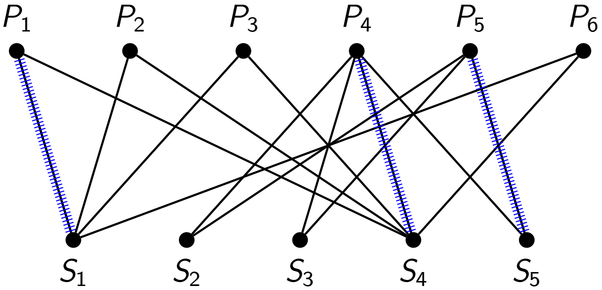


c)



maksimalno sparivanje

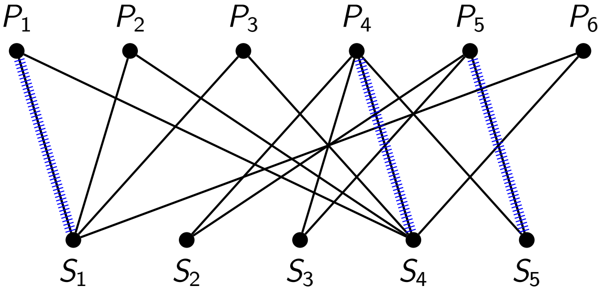
c)



maksimalno sparivanje

$$\{\{S_1, P_1\}, \{S_4, P_4\}, \{S_5, P_5\}\}$$

c)

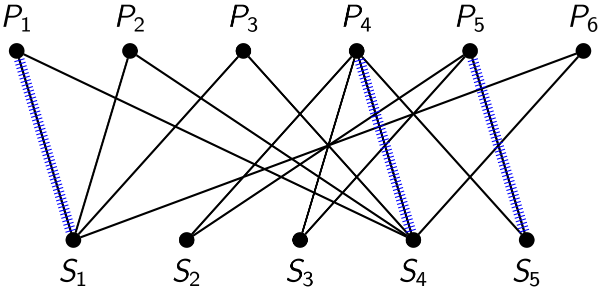


Modificirani BFS

maksimalno sparivanje

$$\{\{S_1, P_1\}, \{S_4, P_4\}, \{S_5, P_5\}\}$$

c)

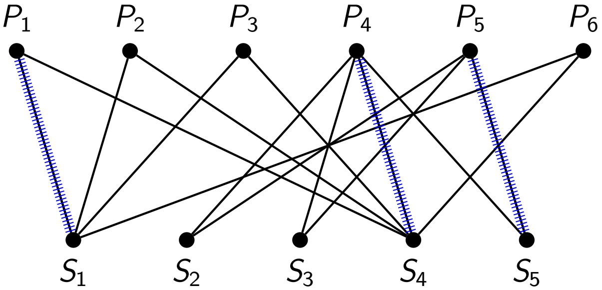


Modificirani BFS

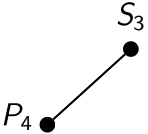
maksimalno sparivanje

$$\{\{S_1, P_1\}, \{S_4, P_4\}, \{S_5, P_5\}\}$$

c)



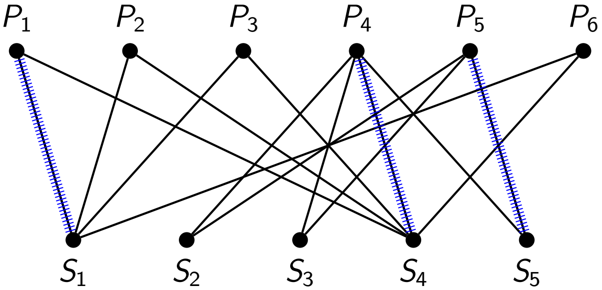
Modificirani BFS



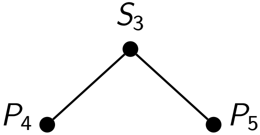
maksimalno sparivanje

$\{\{S_1, P_1\}, \{S_4, P_4\}, \{S_5, P_5\}\}$

c)



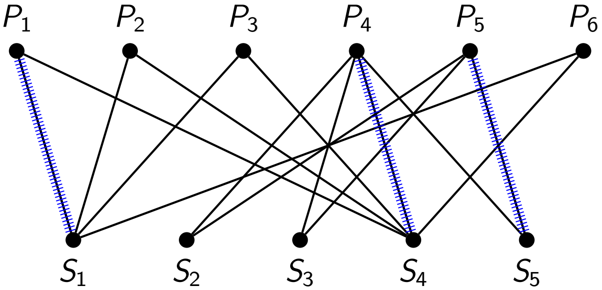
Modificirani BFS



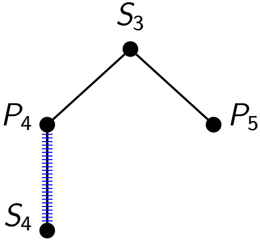
maksimalno sparivanje

$$\{\{S_1, P_1\}, \{S_4, P_4\}, \{S_5, P_5\}\}$$

c)



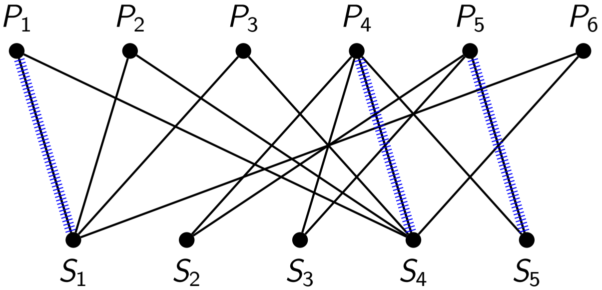
Modificirani BFS



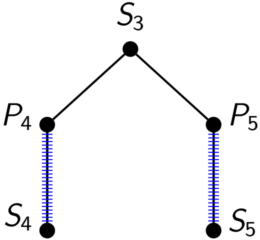
maksimalno sparivanje

$$\{\{S_1, P_1\}, \{S_4, P_4\}, \{S_5, P_5\}\}$$

c)



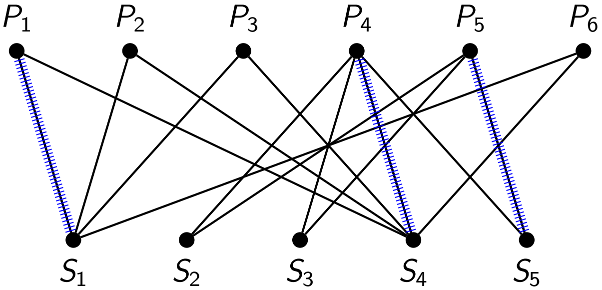
Modificirani BFS



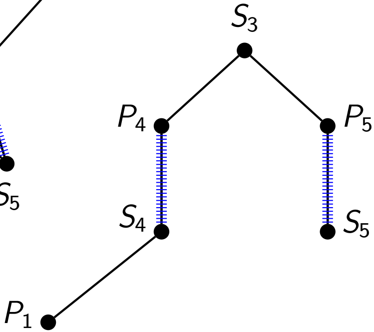
maksimalno sparivanje

$$\{\{S_1, P_1\}, \{S_4, P_4\}, \{S_5, P_5\}\}$$

c)



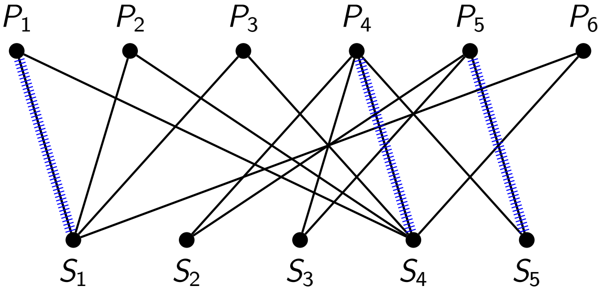
Modificirani BFS



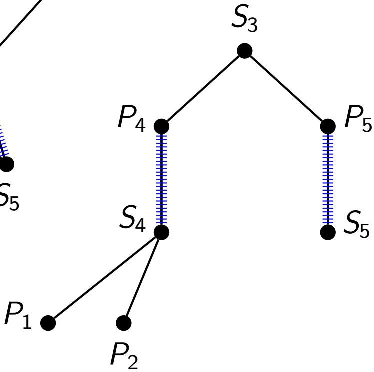
maksimalno sparivanje

$$\big\{\{S_1, P_1\}, \{S_4, P_4\}, \{S_5, P_5\}\big\}$$

c)



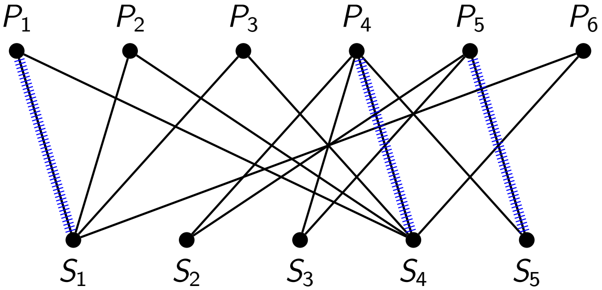
Modificirani BFS



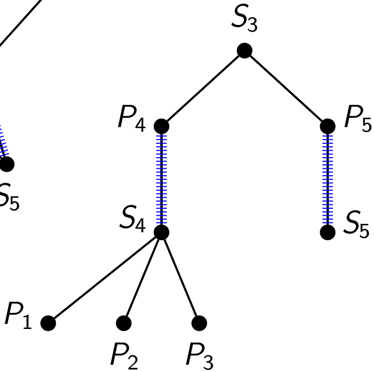
maksimalno sparivanje

$$\big\{\{S_1, P_1\}, \{S_4, P_4\}, \{S_5, P_5\}\big\}$$

c)



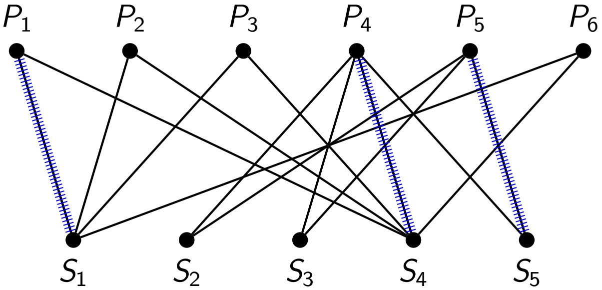
Modificirani BFS



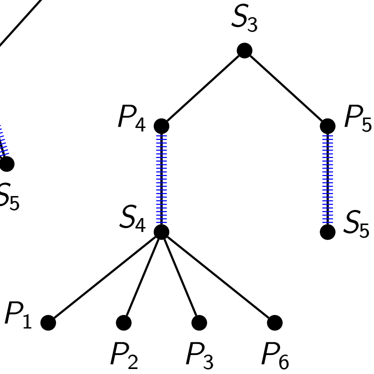
maksimalno sparivanje

$$\big\{\{S_1, P_1\}, \{S_4, P_4\}, \{S_5, P_5\}\big\}$$

c)



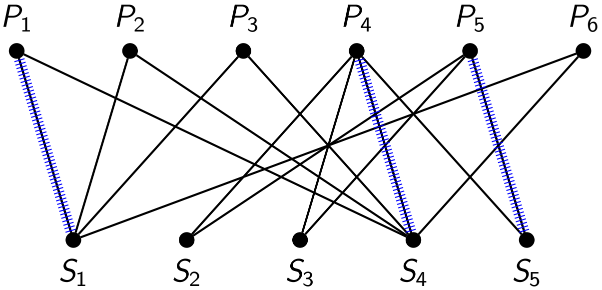
Modificirani BFS



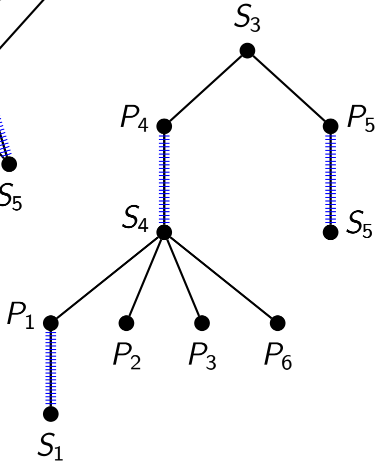
maksimalno sparivanje

$$\{\{S_1, P_1\}, \{S_4, P_4\}, \{S_5, P_5\}\}$$

c)



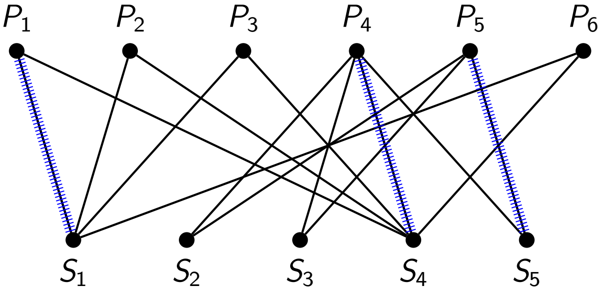
Modificirani BFS



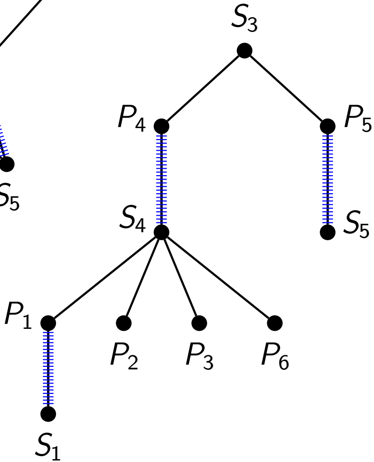
maksimalno sparivanje

$$\{\{S_1, P_1\}, \{S_4, P_4\}, \{S_5, P_5\}\}$$

c)



Modificirani BFS

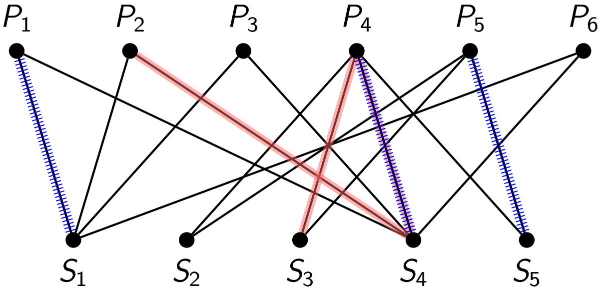


maksimalno sparivanje

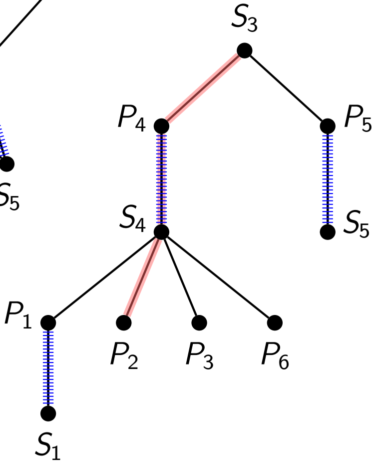
$$\big\{\{S_1, P_1\}, \{S_4, P_4\}, \{S_5, P_5\}\big\}$$

uvećani put

c)



Modificirani BFS

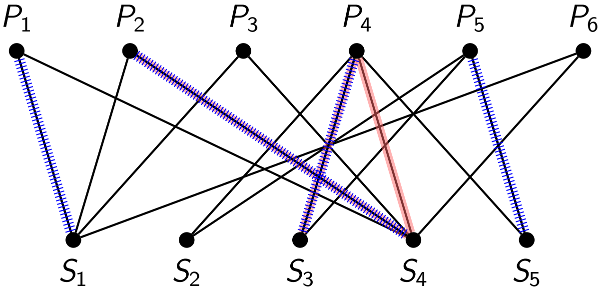


maksimalno sparivanje

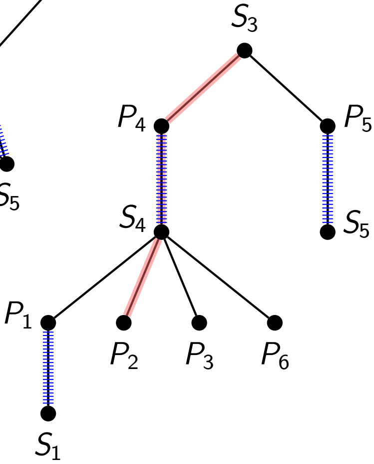
$$\big\{\{S_1, P_1\}, \{S_4, P_4\}, \{S_5, P_5\}\big\}$$

uvećani put $S_3 P_4 S_4 P_2$

c)



Modificirani BFS

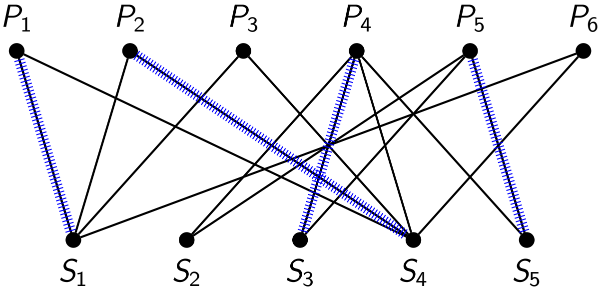


maksimalno sparivanje

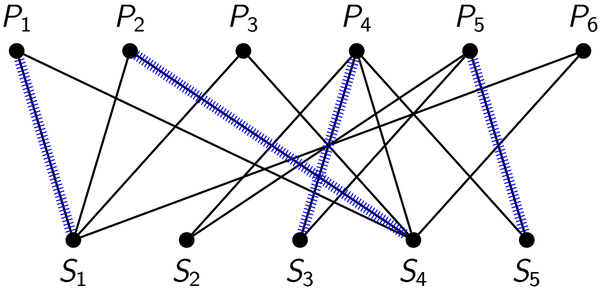
$$\{\{S_1, P_1\}, \{S_4, P_4\}, \{S_5, P_5\}\}$$

uvećani put $S_3P_4S_4P_2$

c)



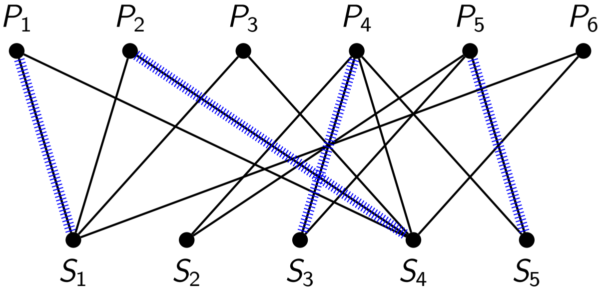
c)



novo sparivanje

$$\{\{S_1, P_1\}, \{S_3, P_4\}, \{S_4, P_2\}, \{S_5, P_5\}\}$$

c)

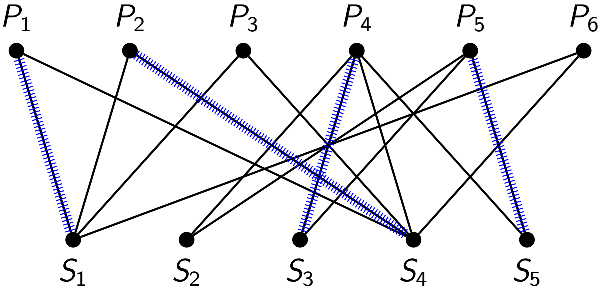


Modificirani BFS

novo sparivanje

$$\{\{S_1, P_1\}, \{S_3, P_4\}, \{S_4, P_2\}, \{S_5, P_5\}\}$$

c)

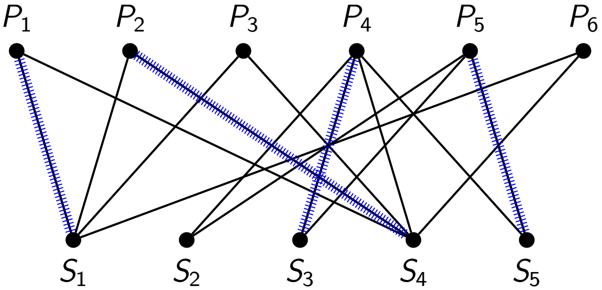


Modificirani BFS

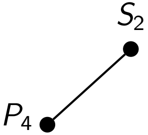
novo sparivanje

$$\{\{S_1, P_1\}, \{S_3, P_4\}, \{S_4, P_2\}, \{S_5, P_5\}\}$$

c)



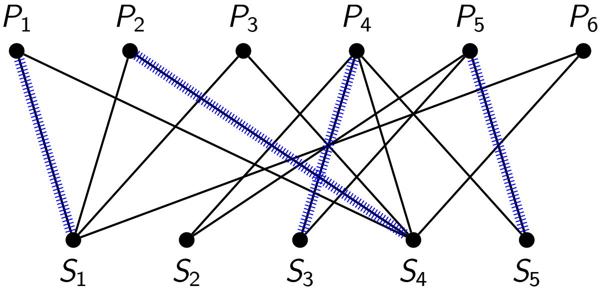
Modificirani BFS



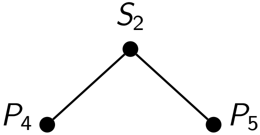
novo sparivanje

$$\{\{S_1, P_1\}, \{S_3, P_4\}, \{S_4, P_2\}, \{S_5, P_5\}\}$$

c)



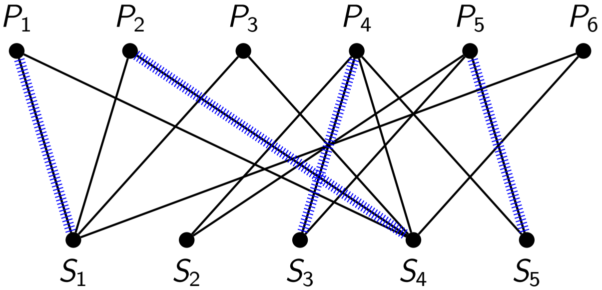
Modificirani BFS



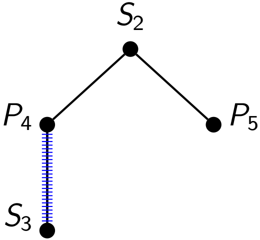
novo sparivanje

$$\{\{S_1, P_1\}, \{S_3, P_4\}, \{S_4, P_2\}, \{S_5, P_5\}\}$$

c)



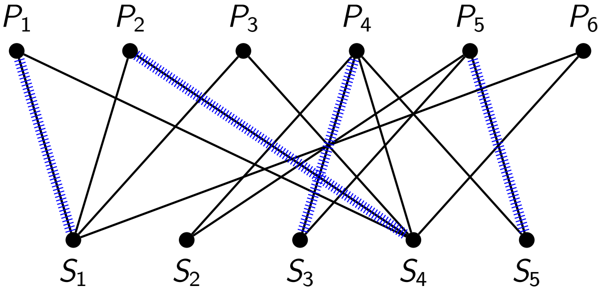
Modificirani BFS



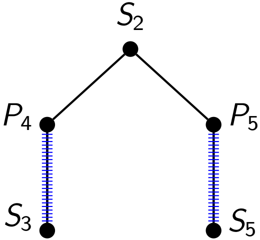
novo sparivanje

$$\{\{S_1, P_1\}, \{S_3, P_4\}, \{S_4, P_2\}, \{S_5, P_5\}\}$$

c)



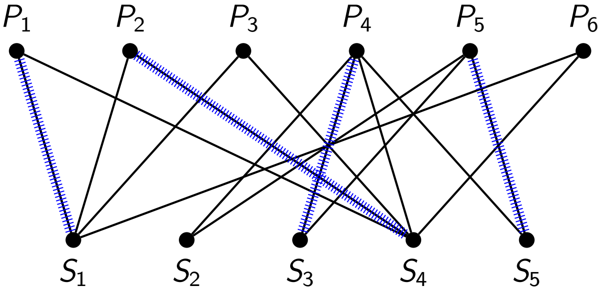
Modificirani BFS



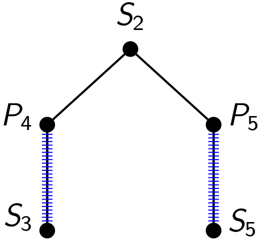
novo sparivanje

$$\{\{S_1, P_1\}, \{S_3, P_4\}, \{S_4, P_2\}, \{S_5, P_5\}\}$$

c)



Modificirani BFS

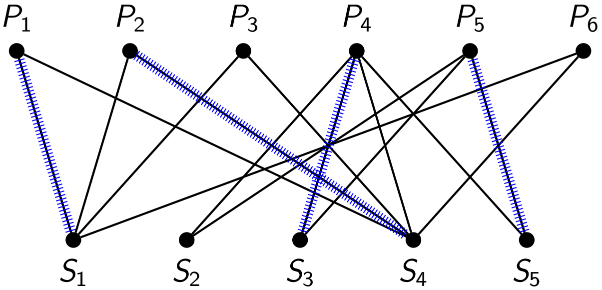


novo sparivanje

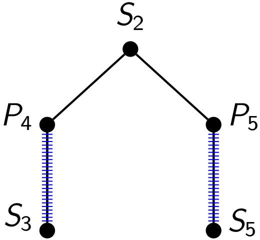
$$\{\{S_1, P_1\}, \{S_3, P_4\}, \{S_4, P_2\}, \{S_5, P_5\}\}$$

uvećani put

c)



Modificirani BFS

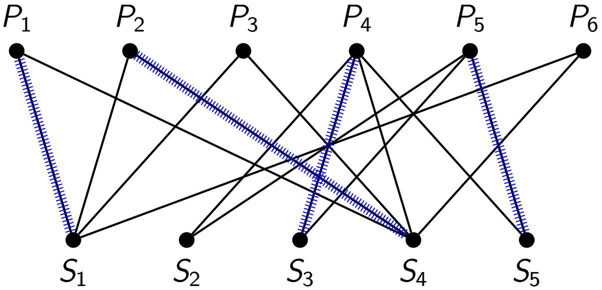


novo sparivanje

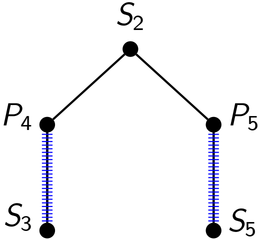
$$\big\{\{S_1, P_1\}, \{S_3, P_4\}, \{S_4, P_2\}, \{S_5, P_5\}\big\}$$

uvećani put ne postoji

c)



Modificirani BFS



novo sparivanje

$\{\{S_1, P_1\}, \{S_3, P_4\}, \{S_4, P_2\}, \{S_5, P_5\}\}$ ⟵ najveće sparivanje

uvećani put ne postoji

šesti zadatak

Zadatak 6

Na prvoj godini diplomskog studija studenti mogu odabrati neke od 7 izbornih predmeta P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7. Ako postoji barem jedan student koji je upisao različite predmete P_i i P_j, tada je u donjoj tablici na odgovarajuće mjesto stavljen znak $*$.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_1		$*$	$*$	$*$		$*$	$*$
P_2	$*$		$*$				$*$
P_3	$*$	$*$		$*$			
P_4	$*$		$*$		$*$	$*$	
P_5				$*$		$*$	
P_6	$*$			$*$	$*$		$*$
P_7	$*$	$*$				$*$	

Fakultet želi organizirati kolokvije iz tih predmeta tako da svaki student ima najviše jedan kolokvij iz nekog od tih predmeta u jednom danu.

a) *Modelirajte problem pomoću grafova tako da kratko i jasno opišete na koji način ćete konstruirati graf i na koji problem iz teorije grafova svodite ovaj realni problem.*
b) *Koliko je minimalno dana potrebno kako bi se održali svi kolokviji iz navedenih predmeta? Dokažite svoju tvrdnju jezikom teorije grafova.*
c) *Napravite jedan takav raspored održavanja kolokvija s minimalnim brojem dana.*

Rješenje

a) Neka je G graf sa skupom vrhova $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7\}$.

Rješenje

a) Neka je G graf sa skupom vrhova $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7\}$.

Različiti vrhovi P_i i P_j su susjedni jedino ako postoji barem jedan student koji je upisao predmete P_i i P_j.

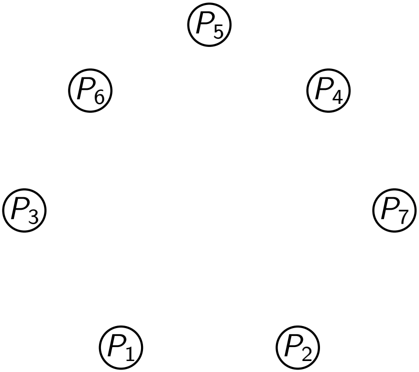
Rješenje

a) Neka je G graf sa skupom vrhova

Različiti vrhovi P_i i P_j su susjedni

student koji je upisao predmete P_i

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_1		$*$	$*$	$*$		$*$	$*$
P_2	$*$		$*$				$*$
P_3	$*$	$*$		$*$			
P_4	$*$		$*$		$*$	$*$	
P_5				$*$		$*$	
P_6	$*$			$*$	$*$		$*$
P_7	$*$	$*$				$*$	



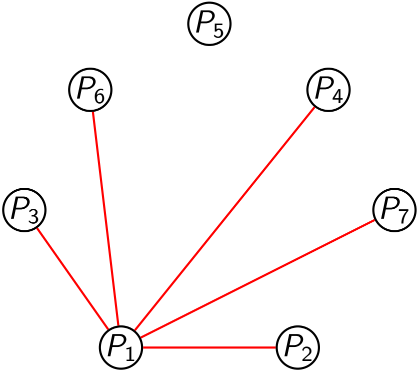
Rješenje

a) Neka je G graf sa skupom vrhova

Različiti vrhovi P_i i P_j su susjedni

student koji je upisao predmete P_i

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_1		*	*	*		*	*
P_2	*		*				*
P_3	*	*		*			
P_4	*		*		*	*	
P_5				*		*	
P_6	*			*	*		*
P_7	*	*				*	



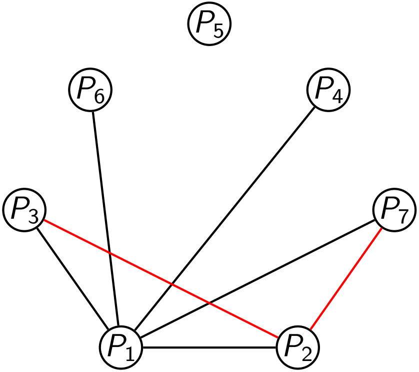
Rješenje

a) Neka je G graf sa skupom vrhova

Različiti vrhovi P_i i P_j su susjedni

student koji je upisao predmete P_i

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_1		$*$	$*$	$*$		$*$	$*$
P_2	$*$		$*$				$*$
P_3	$*$	$*$		$*$			
P_4	$*$		$*$		$*$	$*$	
P_5				$*$		$*$	
P_6	$*$			$*$	$*$		$*$
P_7	$*$	$*$				$*$	



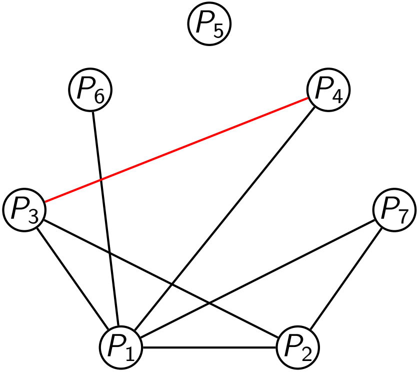
Rješenje

a) Neka je G graf sa skupom vrhova

Različiti vrhovi P_i i P_j su susjedni

student koji je upisao predmete P_i

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_1		*	*	*		*	*
P_2	*		*				*
P_3	*	*		*			
P_4	*		*		*	*	
P_5				*		*	
P_6	*			*	*		*
P_7	*	*				*	



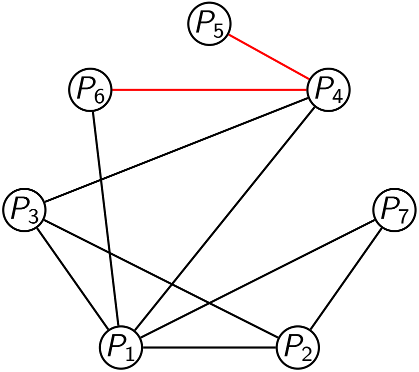
Rješenje

a) Neka je G graf sa skupom vrhova

Različiti vrhovi P_i i P_j su susjedni

student koji je upisao predmete P_i

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_1		$*$	$*$	$*$		$*$	$*$
P_2	$*$		$*$				$*$
P_3	$*$	$*$		$*$			
P_4	$*$		$*$		$*$	$*$	
P_5				$*$		$*$	
P_6	$*$			$*$	$*$		$*$
P_7	$*$	$*$				$*$	



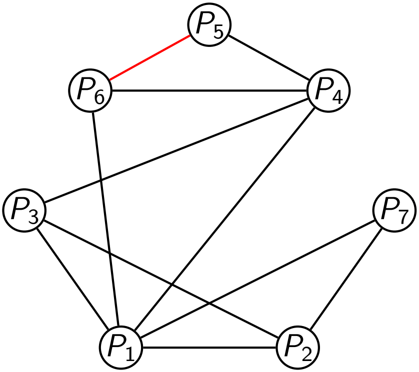
Rješenje

a) Neka je G graf sa skupom vrhova

Različiti vrhovi P_i i P_j su susjedni

student koji je upisao predmete P_i

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_1		$*$	$*$	$*$		$*$	$*$
P_2	$*$		$*$				$*$
P_3	$*$	$*$		$*$			
P_4	$*$		$*$		$*$	$*$	
P_5				$*$		$*$	
P_6	$*$			$*$	$*$		$*$
P_7	$*$	$*$				$*$	



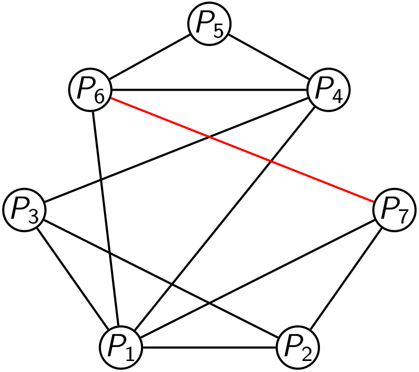
Rješenje

a) Neka je G graf sa skupom vrhova

Različiti vrhovi P_i i P_j su susjedni

student koji je upisao predmete P_i

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_1		$*$	$*$	$*$		$*$	$*$
P_2	$*$		$*$				$*$
P_3	$*$	$*$		$*$			
P_4	$*$		$*$		$*$	$*$	
P_5				$*$		$*$	
P_6	$*$			$*$	$*$		$*$
P_7	$*$	$*$				$*$	



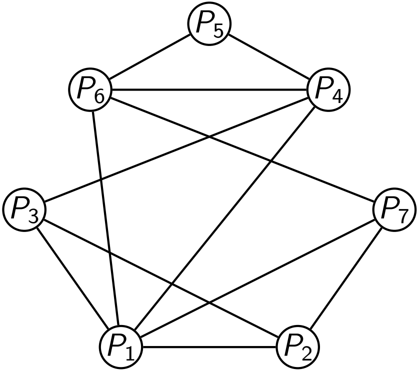
Rješenje

a) Neka je G graf sa skupom vrhova

Različiti vrhovi P_i i P_j su susjedni

student koji je upisao predmete P_i

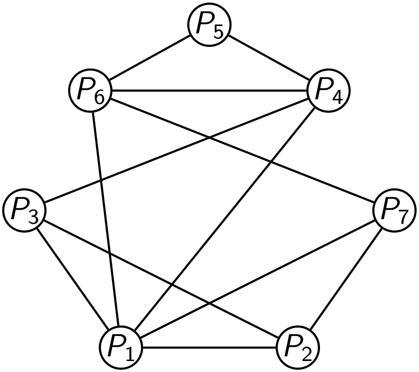
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_1		$*$	$*$	$*$		$*$	$*$
P_2	$*$		$*$				$*$
P_3	$*$	$*$		$*$			
P_4	$*$		$*$		$*$	$*$	
P_5				$*$		$*$	
P_6	$*$			$*$	$*$		$*$
P_7	$*$	$*$				$*$	



Rješenje

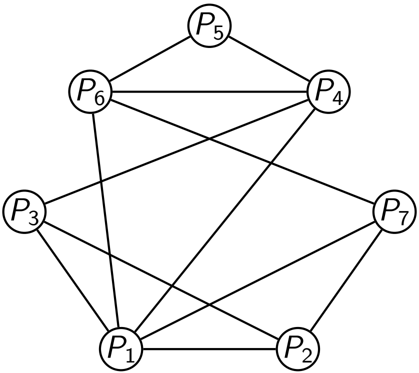
a) Neka je G graf sa skupom vrhova $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7\}$.

Različiti vrhovi P_i i P_j su susjedni jedino ako postoji barem jedan student koji je upisao predmete P_i i P_j.



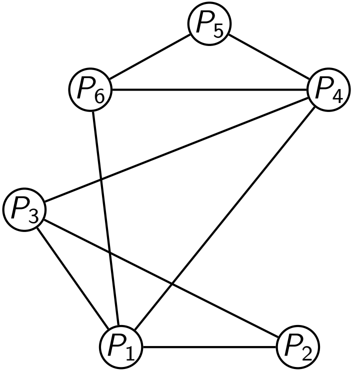
Promatrani realni problem se svodi na određivanje kromatskog broja grafa G i bojanje njegovih vrhova.

b)



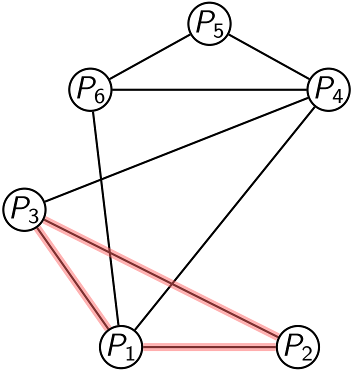
- Pogledajmo podgraf $G - P_7$.

b)



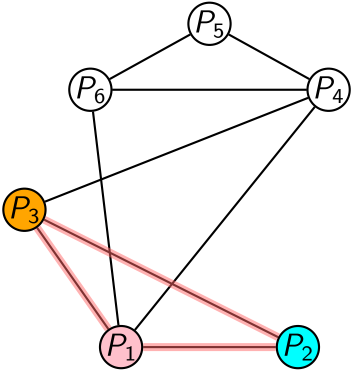
- Pogledajmo podgraf $G - P_7$.

b)



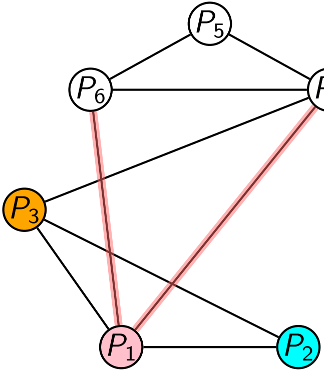
- Pogledajmo podgraf $G - P_7$.
- Za bojanje 3-klike $\{P_1, P_2, P_3\}$ potrebne su 3 boje.

b)



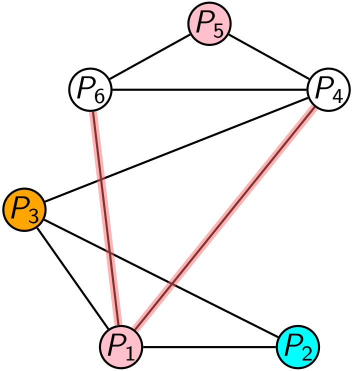
- Pogledajmo podgraf $G - P_7$.
- Za bojanje 3-klike $\{P_1, P_2, P_3\}$ potrebne su 3 boje.

b)



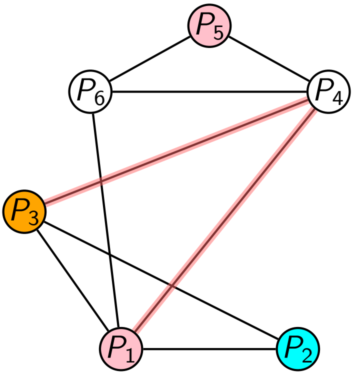
- Pogledajmo podgraf $G - P_7$.
- Za bojanje 3-klike $\{P_1, P_2, P_3\}$ potrebne su 3 boje.
- Vrh P_5 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_1.

b)



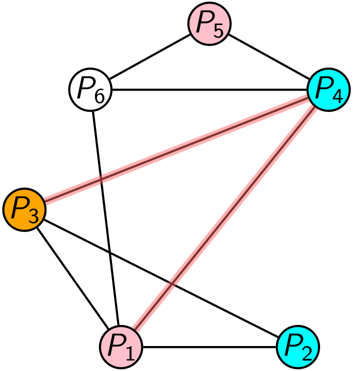
- Pogledajmo podgraf $G - P_7$.
- Za bojanje 3-klike $\{P_1, P_2, P_3\}$ potrebne su 3 boje.
- Vrh P_5 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_1.

b)



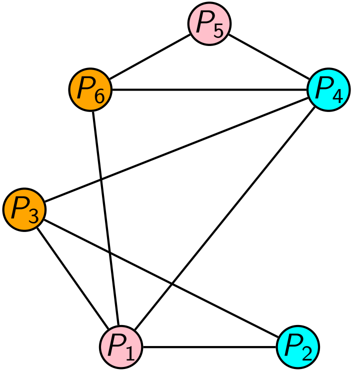
- Pogledajmo podgraf $G - P_7$.
- Za bojanje 3-klike $\{P_1, P_2, P_3\}$ potrebne su 3 boje.
- Vrh P_5 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_1.
- Vrh P_4 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_2.

b)



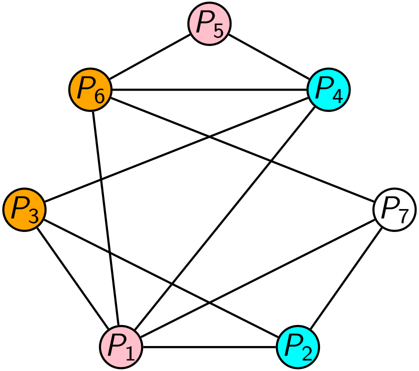
- Pogledajmo podgraf $G - P_7$.
- Za bojanje 3-klike $\{P_1, P_2, P_3\}$ potrebne su 3 boje.
- Vrh P_5 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_1.
- Vrh P_4 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_2.

b)



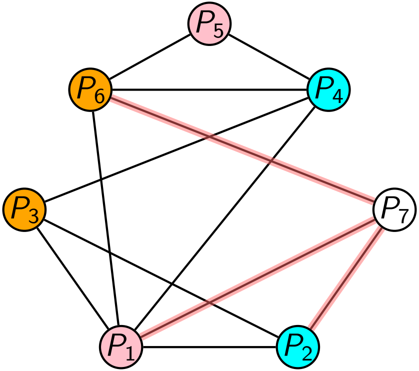
- Pogledajmo podgraf $G - P_7$.
- Za bojanje 3-klike $\{P_1, P_2, P_3\}$ potrebne su 3 boje.
- Vrh P_5 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_1.
- Vrh P_4 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_2.
- Vrh P_6 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_3.

b)



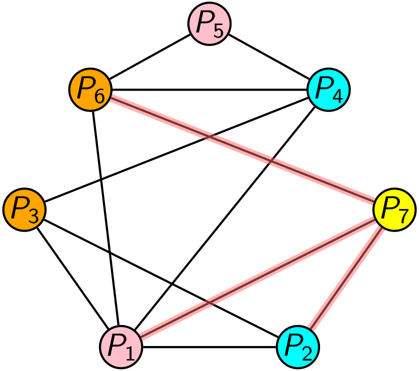
- Pogledajmo podgraf $G - P_7$.
- Za bojanje 3-klike $\{P_1, P_2, P_3\}$ potrebne su 3 boje.
- Vrh P_5 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_1.
- Vrh P_4 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_2.
- Vrh P_6 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_3.

b)



- Pogledajmo podgraf $G - P_7$.
- Za bojanje 3-klike $\{P_1, P_2, P_3\}$ potrebne su 3 boje.
- Vrh P_5 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_1.
- Vrh P_4 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_2.
- Vrh P_6 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_3.
- Za vrh P_7 je potrebna četvrta boja.

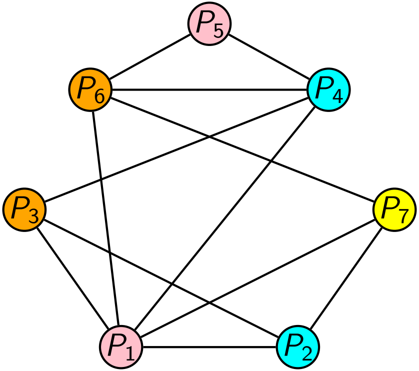
b)



- Pogledajmo podgraf $G - P_7$.
- Za bojanje 3-klike $\{P_1, P_2, P_3\}$ potrebne su 3 boje.
- Vrh P_5 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_1.
- Vrh P_4 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_2.
- Vrh P_6 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_3.
- Za vrh P_7 je potrebna četvrta boja.

b)

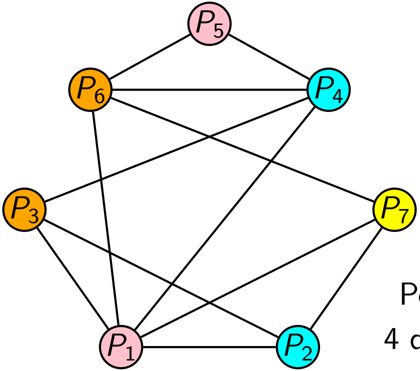
$\boxed{\gamma(G) = 4}$



- Pogledajmo podgraf $G - P_7$.
- Za bojanje 3-klike $\{P_1, P_2, P_3\}$ potrebne su 3 boje.
- Vrh P_5 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_1.
- Vrh P_4 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_2.
- Vrh P_6 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_3.
- Za vrh P_7 je potrebna četvrta boja.

b)

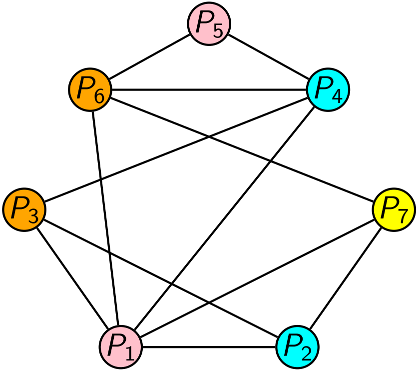
$\boxed{\gamma(G) = 4}$



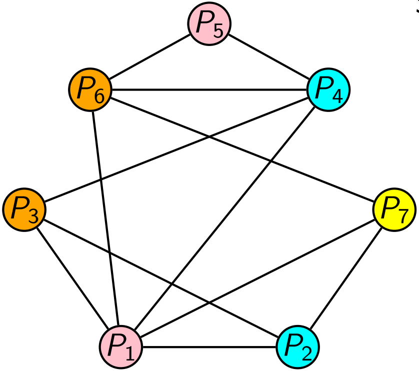
Potrebna su barem
4 dana za održavanje
svih kolokvija.

- Pogledajmo podgraf $G - P_7$.
- Za bojanje 3-klike $\{P_1, P_2, P_3\}$ potrebne su 3 boje.
- Vrh P_5 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_1.
- Vrh P_4 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_2.
- Vrh P_6 mora biti obojan bojom kojom je obojan vrh P_3.
- Za vrh P_7 je potrebna četvrta boja.

c)

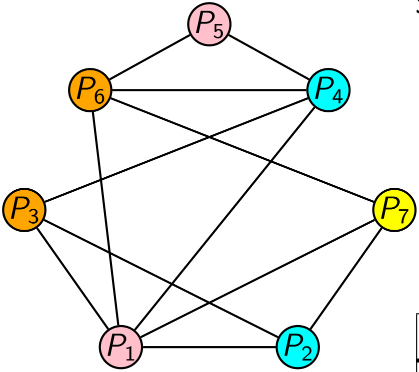


c)



Svaka boja predstavlja jedan termin.

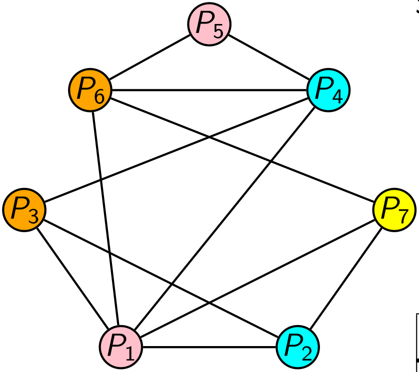
c)



Svaka boja predstavlja jedan termin.

termin	predmet

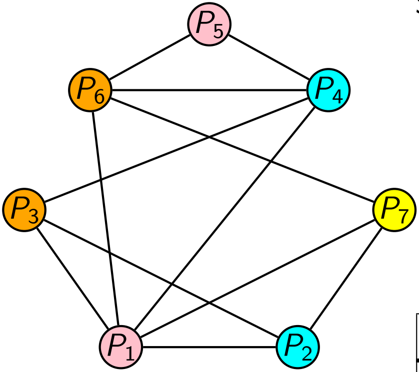
c)



Svaka boja predstavlja jedan termin.

termin	predmet
1. dan (roza)	P_1, P_5

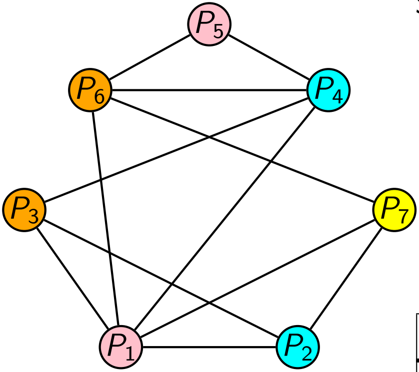
c)



Svaka boja predstavlja jedan termin.

termin	predmet
1. dan (roza)	P_1, P_5
2. dan (svijetlo plava)	P_2, P_4

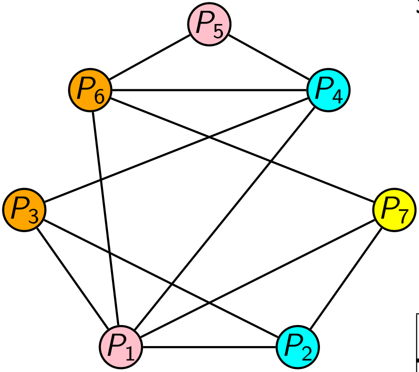
c)



Svaka boja predstavlja jedan termin.

termin	predmet
1. dan (roza)	P_1, P_5
2. dan (svijetlo plava)	P_2, P_4
3. dan (narančasta)	P_3, P_6

c)



Svaka boja predstavlja jedan termin.

termin	predmet
1. dan (roza)	P_1, P_5
2. dan (svijetlo plava)	P_2, P_4
3. dan (narančasta)	P_3, P_6
4. dan (žuta)	P_7