Usmjereni grafovi

Diskretne strukture s teorijom grafova

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Karakterizacija Eulerovih digrafa

Digraf D je Eulerov akko D je povezan i $d^+(v) = d^-(v)$ za svaki $v \in V(D)$.

Korolar

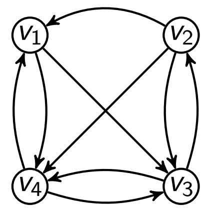
Digraf D ima usmjerenu Eulerovu stazu akko je povezan i svi vrhovi, osim njih dva, imaju jednaki broj ulaznih i izlaznih lukova. Nadalje, kod ta dva vrha se broj ulaznih i izlaznih lukova razlikuje za jedan.

Propozicija

Neka je $M = [m_{ij}]$ matrica susjedstva digrafa D. Neka je $m_{ij}^{(k)}$ element na poziciji (i, j) u matrici M^k. Tada je $m_{ij}^{(k)}$ jednak ukupnom broju svih (v_i, v_j) usmjerenih šetnji duljine k. Stoga je broj svih usmjerenih šetnji duljine k u digrafu D jednak sumi svih elemenata matrice M^k.

Zadatak 1

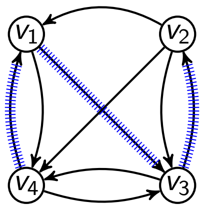
Zadan je digraf D.



a) *Odredite matricu susjedstva A digrafa D.*
b) *Bez direktnog računanja potencija matrice A, odredite element na poziciji $(4, 2)$ u matrici A^3. Obrazložite svoj odgovor.*
c) *Ima li digraf D usmjerenu Eulerovu stazu? Ima li digraf D neusmjerenu Eulerovu stazu? Obrazložite svoje odgovore.*
d) *Je li D dipovezani digraf? Obrazložite svoj odgovor.*

Rješenje

a)



$d(v_1) = 4, \quad d(v_2) = 4, \quad d(v_3) = 5, \quad d(v_4) = 5$

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$d^+(v_1) = 2 \quad d^-(v_1) = 2$

$d^+(v_2) = 3 \quad d^-(v_2) = 1$

$d^+(v_3) = 2 \quad d^-(v_3) = 3$

$d^+(v_4) = 2 \quad d^-(v_4) = 3$

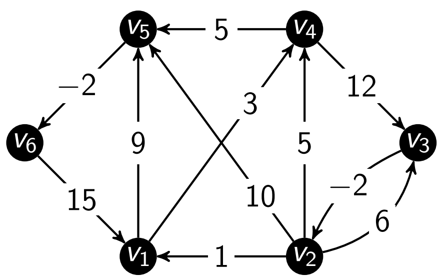
b) Neka je $A^3 = \left[a_{ij}^{(3)}\right]$. Kako je $v_4v_1v_3v_2$ jedina usmjerena (v_4, v_2)-šetnja duljine 3 u digrafu D, slijedi da je $a_{42}^{(3)} = 1$.

c) Digraf D nema usmjerenu Eulerovu stazu jer se izlazni i ulazni stupnjevi kod vrha v_2 razlikuju za više od 1.
Digraf D ima neusmjerenu Eulerovu stazu jer pripadni povezani graf ima točno dva vrha neparnog stupnja.

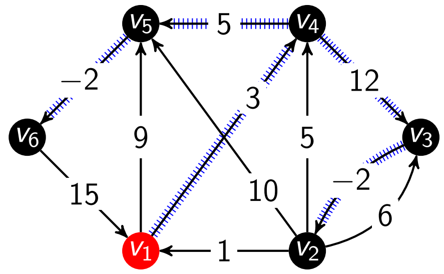
d) Između svaka dva vrha postoji usmjereni put pa je D dipovezani digraf.

Zadatak 2

Pomoću Bellman-Fordovog algoritma pronađite najkraće putove od vrha v_1 do svih preostalih vrhova u zadanom težinskom digrafu.



Rješenje



lukovi na najkraćim putovima

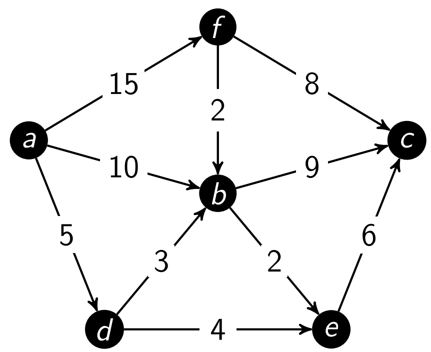
$v_3v_2, \ v_4v_3, \ v_1v_4, \ v_4v_5, \ v_5v_6$

$=$

	0	1	2	3	4
v_1	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$	$-, 0$
v_2	∞	∞	∞	$v_3, 13$	$v_3, 13$
v_3	∞	∞	$v_4, 15$	$v_4, 15$	$v_4, 15$
v_4	∞	$v_1, 3$	$v_1, 3$	$v_1, 3$	$v_1, 3$
v_5	∞	$v_1, 9$	$v_4, 8$	$v_4, 8$	$v_4, 8$
v_6	∞	∞	$v_5, 7$	$v_5, 6$	$v_5, 6$

Zadatak 3

Pomoću Ford-Fulkersonovog algoritma pronađite maksimalni protok i minimalni (a, c)-rez u zadanoj transportnoj mreži.



Ford-Fulkersonov algoritam

Direktno označavanje

Ako je $a = (u, v)$, tada je direktno označavanje vrha v preko vrha u duž luka a moguće jedino ako je $c(a) > f(a)$. U tom slučaju vrh v dobiva oznaku (u^+, L_v), gdje je

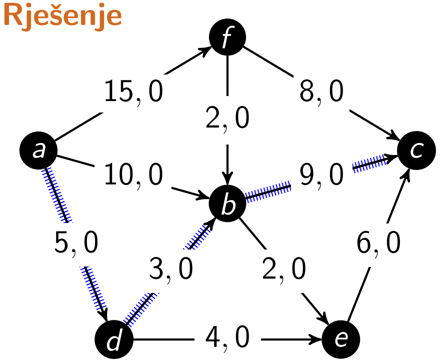
$$L_v = \min\{L_u, c(a) - f(a)\}.$$

Obrnuto označavanje

Ako je $a = (v, u)$, tada je obrnuto označavanje vrha v preko vrha u duž luka a moguće jedino ako je $f(a) > 0$. U tom slučaju v dobiva oznaku (u^-, L_v), gdje je

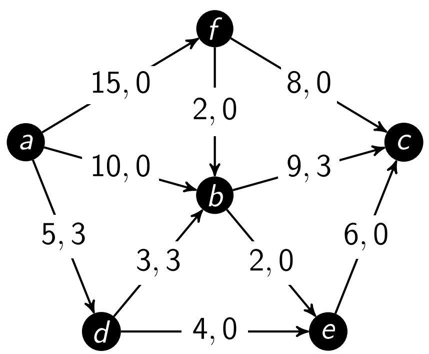
$$L_v = \min\{L_u, f(a)\}.$$

Rješenje



0. korak

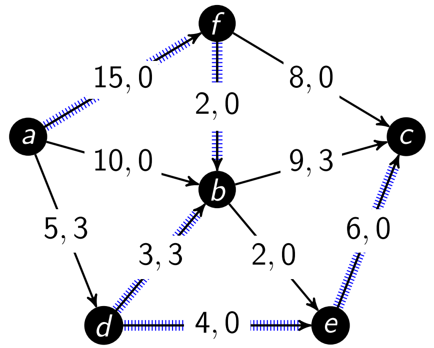
Krećemo s protokom $\mathcal{F}_0$ za koji je val $\mathcal{F}_0 = 0$.



1. korak val $\mathcal{F}_1 = 3$

$\mathcal{F}_0$-rastući put: $P = adbc$

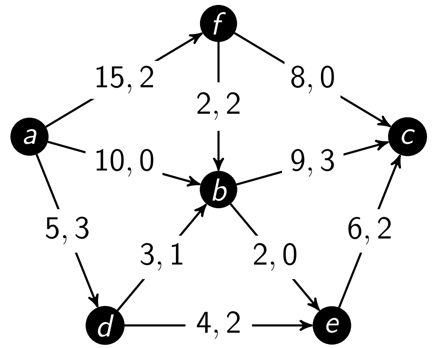
$a(-,\infty)$, $d(a^+, 5)$, $b(d^+, 3)$, $c(b^+, \boxed{3})$



1. korak val $\mathcal{F}_1 = 3$

$\mathcal{F}_0$-rastući put: $P = adbc$

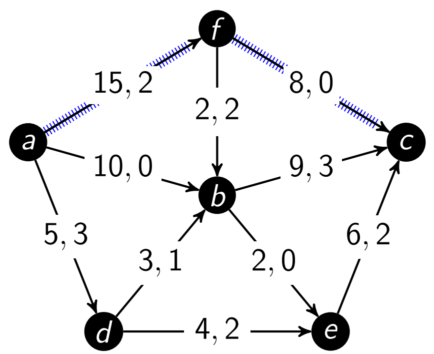
$a(-,\infty)$, $d(a^+, 5)$, $b(d^+, 3)$, $c(b^+, \boxed{3})$



2. korak val $\mathcal{F}_2 = 5$

$\mathcal{F}_1$-rastući put: $P = afbdec$

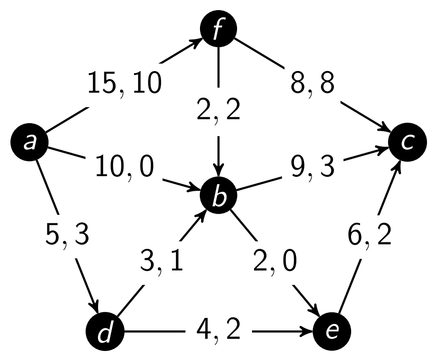
$a(-,\infty)$, $f(a^+, 15)$, $b(f^+, 2)$, $d(b^-, 2)$, $e(d^+, 2)$, $c(e^+, \boxed{2})$



2. korak val $\mathcal{F}_2 = 5$

$\mathcal{F}_1$-rastući put: $P = afbdec$

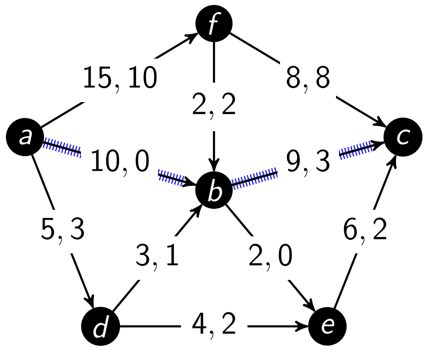
$a(-,\infty)$, $f(a^+, 15)$, $b(f^+, 2)$, $d(b^-, 2)$, $e(d^+, 2)$, $c(e^+, \boxed{2})$



3. korak val $\mathcal{F}_3 = 13$

$\mathcal{F}_2$-rastući put: $P = afc$

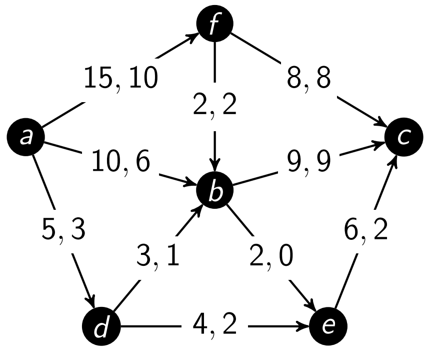
$a(-,\infty)$, $f(a^+, 13)$, $c(f^+, \boxed{8})$



3. korak val $\mathcal{F}_3 = 13$

$\mathcal{F}_2$-rastući put: $P = afc$

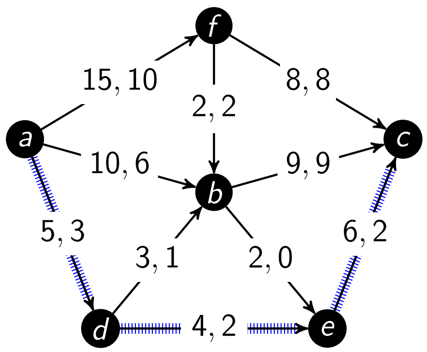
$a(-,\infty)$, $f(a^+,13)$, $c(f^+,\boxed{8})$



4. korak val $\mathcal{F}_4 = 19$

$\mathcal{F}_3$-rastući put: $P = abc$

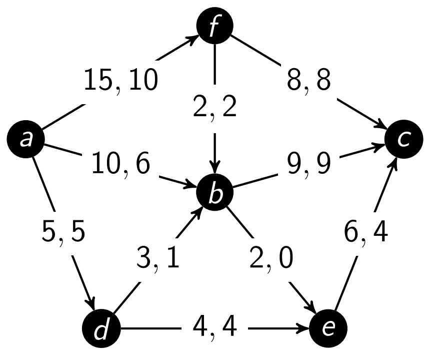
$a(-,\infty)$, $b(a^+,10)$, $c(b^+,\boxed{6})$



4. korak val $\mathcal{F}_4 = 19$

$\mathcal{F}_3$-rastući put: $P = abc$

$a(-,\infty)$, $b(a^+,10)$, $c(b^+,\boxed{6})$

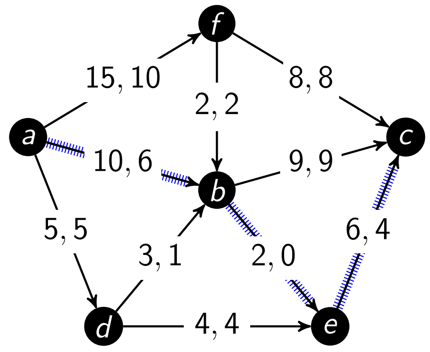


5. korak val $\mathcal{F}_5 = 21$

$\mathcal{F}_4$-rastući put: $P = adec$

$a(-,\infty)$, $d(a^+,2)$, $e(d^+,2)$,

$c(e^+,\boxed{2})$

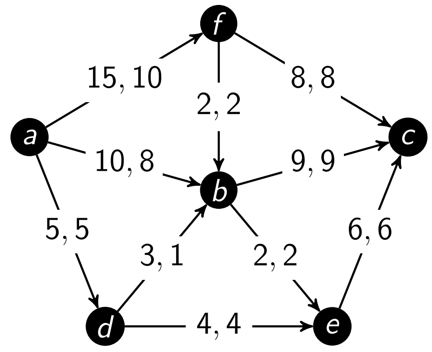


5. korak val $\mathcal{F}_5 = 21$

$\mathcal{F}_4$-rastući put: $P = adec$

$a(-,\infty)$, $d(a^+,2)$, $e(d^+,2)$,

$c(e^+,\boxed{2})$

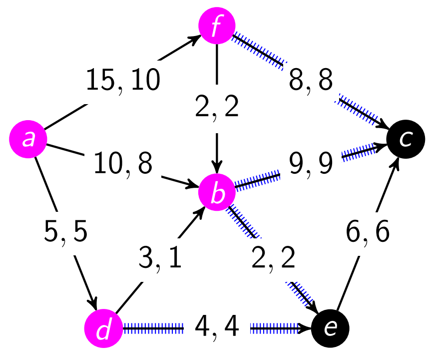


6. korak val $\mathcal{F}_6 = 23$

$\mathcal{F}_5$-rastući put: $P = abec$

$a(-,\infty)$, $b(a^+,4)$, $e(b^+,2)$,

$c(e^+,\boxed{2})$



6. korak val $\mathcal{F}_6 = 23$

$\mathcal{F}_5$-rastući put: $P = abec$

$a(-,\infty)$, $b(a^+,4)$, $e(b^+,2)$,

$c(e^+,\boxed{2})$

7. korak

$a(-,\infty)$, $f(a^+,5)$, $b(a^+,2)$,

$d(b^-,1)$

- neoznačeni vrhovi: e, c
- Vrh c (ponor) nije dobio oznaku pa je $\mathcal{F}_6$ maksimalni protok.

minimalni (a,c)-rez

$S = \{a,b,d,f\}$ $\quad T = \{e,c\}$

$\text{cap}\,(S,T) = c_{be} + c_{bc} + c_{de} + c_{fc}$

$\text{cap}\,(S,T) = 2 + 9 + 4 + 8 = 23$

Karakterizacija tranzitivnih turnira

Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(i) Turnir T ima jedinstveni usmjereni Hamiltonov put.

(ii) Turnir T je tranzitivan.

(iii) Svaki vrh u T ima drukčiji uspjeh od preostalih vrhova.

Karakterizacija dipovezanog turnira

Turnir je dipovezan akko sadrži usmjereni Hamiltonov ciklus.

Teorem (Rédei, 1934.)

Svaki turnir sadrži neparni broj usmjerenih Hamiltonovih putova.

Zadatak 4

Na šahovskom turniru sudjelovalo je pet igrača. Konačni rezultati su predstavljeni tablicom u kojoj prvi element svakog stupca predstavlja pojedinog igrača, a ispod njega su navedeni igrači koje je on pobijedio.

A	B	C	D	E
B	D	B	E	A
C	E	D		C
D				

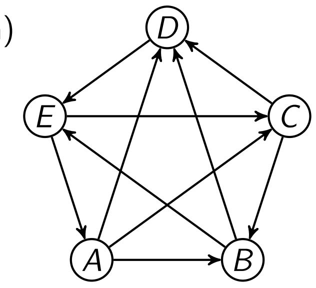
a) *Prikažite navedeni turnir pomoću digrafa (svatko je igrao sa svakim jednu partiju).*

b) *Pronađite matricu susjedstva T tog turnira i napravite rang listu pomoću matrice $T + T^2$.*

c) *Pronađite usmjereni Hamiltonov put u zadanom turniru. Je li on jedinstven? Je li turnir tranzitivan? Je li turnir dipovezan?*

Rješenje

a)



b)

$$T = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

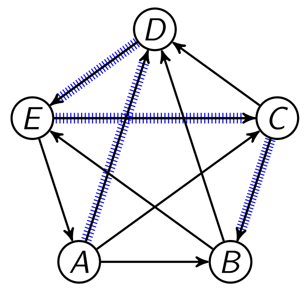
uspjesi vrhova

$s(A) = 3$
$s(B) = 2$
$s(C) = 2$
$s(D) = 1$
$s(E) = 2$

$$T^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad T + T^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

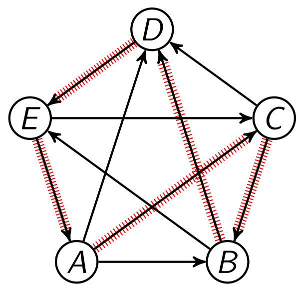
snaga $(A) = 8$
snaga $(B) = 5$
snaga $(C) = 5$
snaga $(D) = 3$
snaga $(E) = 7$

Rang lista $\quad A, E, \underbrace{C, B}_{\text{dijele treće mjesto}}, D$



uspjesi vrhova

$s(A) = 3$
$s(B) = 2$
$s(C) = 2$
$s(D) = 1$
$s(E) = 2$

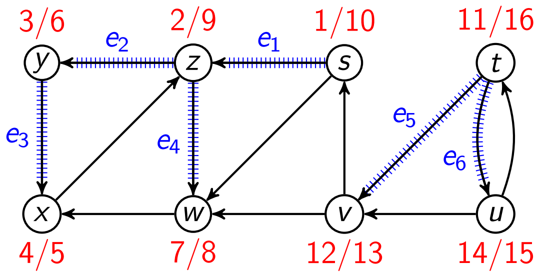


c) Jedan usmjereni Hamiltonov put: $ADECB$

Usmjereni Hamiltonov put u zadanom turniru nije jedinstven jer nemaju svi vrhovi međusobno različite uspjehe. Iz istog razloga turnir nije niti tranzitivan.

Turnir je dipovezan jer sadrži usmjereni Hamiltonov ciklus $BDEACB$.

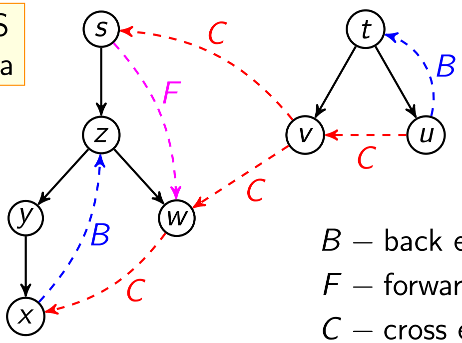
Napomena Ako turnir nije dipovezan, promjenom orijentacije samo jednog brida postaje dipovezan.



DFS algoritam na digrafu

	π	d	f
s	–	1	10
t	–	11	16
x	y	4	5
y	z	3	6
u	t	14	15
v	t	12	13
w	z	7	8
z	s	2	9

DFS šuma



B – back edge (uzlazni luk)

F – forward edge (silazni luk)

C – cross edge (prijelazni luk)

Klasifikacija lukova

Neka je $G = (V, E)$ usmjereni graf i $G_\pi = (V, E_\pi)$ šuma dobivena primjenom DFS algoritma na digraf G.

$$E_\pi = \left\{ (\pi(v), v) : v \in V, \pi(v) \neq \text{NIL} \right\}$$

Ako u šumi G_π postoji usmjereni (u, v)-put, tada kažemo da je vrh v **potomak** vrha u, odnosno vrh u je **predak** vrha v. Kažemo da su vrhovi u i v u **rodbinskoj vezi** ako u šumi G_π postoji usmjereni (u, v)-put ili usmjereni (v, u)-put.

S obzirom na šumu G_π klasificiramo lukove (usmjerene bridove) digrafa G na sljedeći način:

- **Luk stabla** (engl. *tree edge*) je svaki luk $(u, v) \in E$ za koji vrijedi $(u, v) \in E_\pi$.
- **Uzlazni luk** (engl. *back edge*) je svaki luk $(u, v) \in E \setminus E_\pi$ pri čemu je vrh u potomak vrha v u šumi G_π. Petlje su po dogovoru uzlazni lukovi.
- **Silazni luk** (engl. *forward edge*) je svaki luk $(u, v) \in E \setminus E_\pi$ pri čemu je vrh u predak vrha v u šumi G_π.
- Svi ostali lukovi digrafa G zovu se **prijelazni lukovi** (engl. *cross edges*). Takvi lukovi imaju oba krajnja vrha u različitim komponentama povezanosti od G_π ili u istoj komponenti povezanosti ukoliko vrhovi nisu u rodbinskoj vezi.

U neusmjerenom grafu G brid $\{u, v\}$ klasificiramo kao luk (u, v) ili kao luk (v, u) ovisno o tome na koji je poredak tijekom izvođenja DFS algoritam prvo naišao.

Propozicija

Ako DFS algoritam primijenimo na neusmjereni graf G, tada svaki brid grafa G ili pripada DFS šumi ili je uzlazni brid. Drugim riječima, u neusmjerenom grafu nema silaznih niti prijelaznih bridova.

DFS algoritam se može modificirati tako da klasificira lukove čim naiđe na njih. Naime, svaki luk (u, v) može se klasificirati na temelju boje vrha v koju on ima u trenutku kada je luk (u, v) prvi put istraživan.

- Ako je vrh v bijele boje, luk (u, v) je luk stabla.
- Ako je vrh v sive boje, luk (u, v) je uzlazni luk.
- Ako je vrh v crne boje, luk (u, v) je silazni luk ili prijelazni luk.
  - Ako je $d(u) < d(v)$, tada je (u, v) silazni luk.
  - Ako je $d(u) > d(v)$, tada je (u, v) prijelazni luk.

Nadalje, vrijedi:

- Luk (u, v) je luk stabla ili silazni luk ako i samo ako je
$$d(u) < d(v) < f(v) < f(u).$$
- Luk (u, v) je uzlazni luk ako i samo ako je
$$d(v) < d(u) < f(u) < f(v).$$
- Luk (u, v) je prijelazni luk ako i samo ako je
$$d(v) < f(v) < d(u) < f(u).$$

Propozicija

Digraf G je aciklički ako i samo ako DFS algoritam na digrafu G ne daje uzlazne lukove.

Dakle, ako je G aciklički digraf, tada za svaki njegov luk (u, v) vrijedi $f(v) < f(u)$. To nam daje sljedeći algoritam za topološko sortiranje koji je baziran na DFS algoritmu.

Algoritam za topološko sortiranje

ULAZ: Aciklički digraf G

IZLAZ: Lista L topološki sortiranih vrhova digrafa G

1: Neka je L prazna lista.

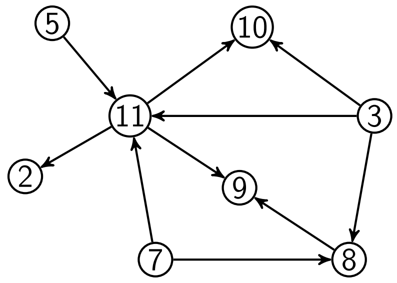
2: Pozovi DFS algoritam na digrafu G.

3: Svaki put kada se tijekom izvođenja DFS algoritma odredi $f(v)$ za neki vrh v, stavi vrh v na početak liste L.

4: Nakon što DFS algoritam završi, vrati listu L.

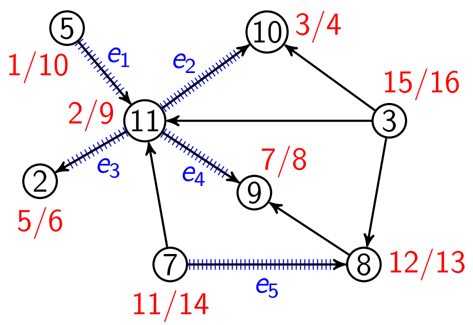
Zadatak 5

Pomoću DFS algoritma provjerite je li zadani digraf aciklički i pronađite jedan kanonski poredak njegovih vrhova.

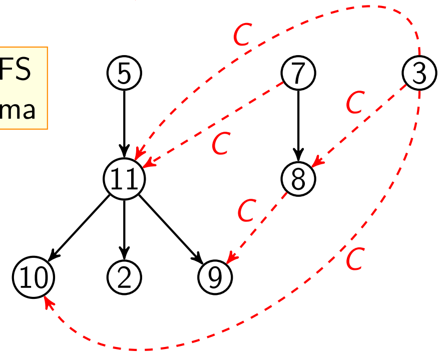


Rješenje

Digraf je aciklički ako s obzirom na dobivenu DFS šumu nema uzlaznih lukova.



DFS šuma



	π	d	f
2	11	5	6
3	–	15	16
5	–	1	10
7	–	11	14
8	7	12	13
9	11	7	8
10	11	3	4
11	5	2	9

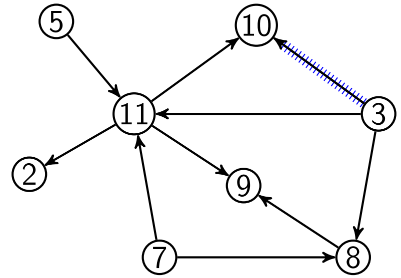
Zadani digraf je aciklički jer u njemu nema uzlaznih lukova.

lista L $\quad 3, 7, 8, 5, 11, 9, 2, 10$

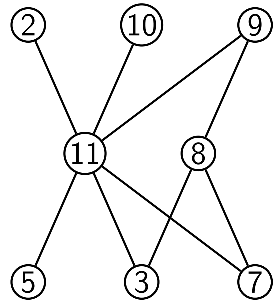
$\uparrow$

kanonski poredak vrhova

Aciklički digraf



Hasseov dijagram

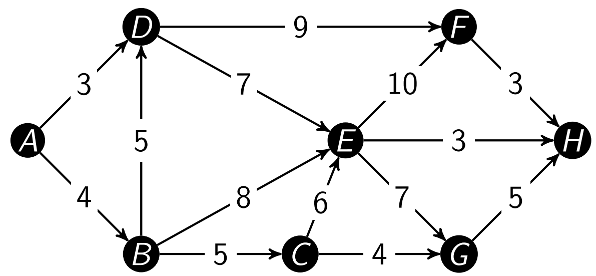


- U acikličkom digrafu mogu postojati *suvišni* lukovi, nego što je to potrebno u Hasseovom dijagramu s obzirom na tranzitivnost.
- $3, 7, 8, 5, 11, 9, 2, 10$ $\rightarrow$ jedno proširenje zadanog parcijalnog uređaja na linearni uređaj

U kojem slučaju je kanonski poredak vrhova jedinstven?

Zadatak 6

Projekt je prikazan pomoću usmjerene mreže pri čemu su vremena trajanja aktivnosti izražena u tjednima.



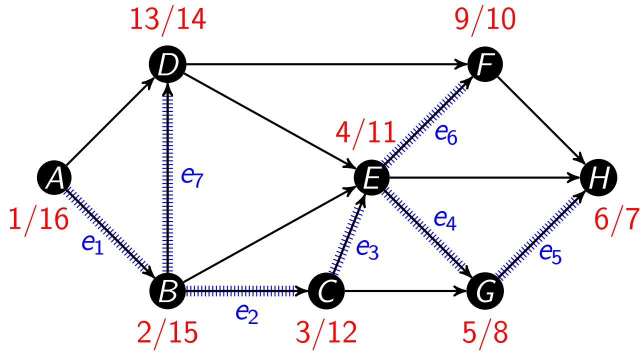
a) *Koliko minimalno tjedana traje projekt?*

b) *Odredite kritični put.*

c) *Koje se aktivnosti u projektu mogu odugovlačiti?*

Rješenje

a) Najprije pronađemo kanonski poredak vrhova (usmjerena mreža je aciklički digraf).

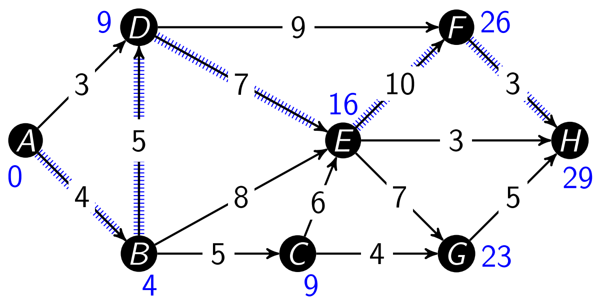


kanonski poredak vrhova → A, B, D, C, E, F, G, H

$\boxed{A, B, D, C, E, F, G, H}$

1) $\boxed{A(-, 0)}$
2) $\boxed{B(A, 4)}$
3) $D(A, 3)$, $\boxed{D(B, 9)}$
4) $\boxed{C(B, 9)}$
5) $E(B, 12)$, $E(C, 15)$, $\boxed{E(D, 16)}$
6) $F(D, 18)$, $\boxed{F(E, 26)}$
7) $G(C, 13)$, $\boxed{G(E, 23)}$
8) $H(E, 19)$, $\boxed{H(F, 29)}$, $H(G, 28)$

Projekt traje minimalno 29 tjedana.



b) kritični put $ABDEFH$

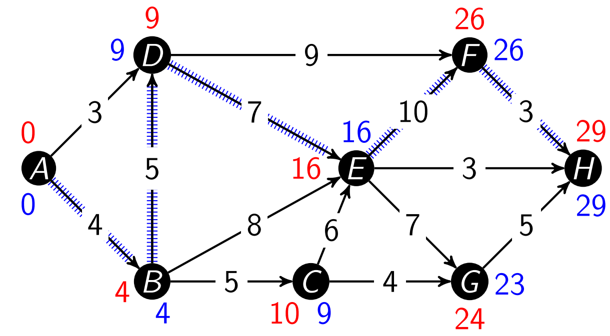
c) Aktivnosti na kritičnom putu se ne smiju odugovlačiti ako želimo da projekt završi na vrijeme.

aktivnost	$\mathcal{F}(u, v)$
AB	0
AD	6
BC	1
BD	0
BE	4
CE	1
CG	11
DE	0
DF	8
EF	0
EG	1
EH	10
FH	0
GH	1

$$\boxed{\mathcal{F}(u, v) = K(v) - V(u) - w(u, v)}$$

$$V(v) = \max_u \left\{ V(u) + w(u, v) : (u, v) \text{ je luk} \right\}$$

$$K(v) = \min_x \left\{ K(x) - w(v, x) : (v, x) \text{ je luk} \right\}$$



vrh	A	B	C	D	E	F	G	H
$V(v)$	0	4	9	9	16	26	23	29
$K(v)$	0	4	10	9	16	26	24	29