Osnovni pojmovi iz teorije grafova

Diskretne strukture s teorijom grafova

Damir Horvat

FOI, Varaždin

Teorem

U svakom grafu $G = (V, E)$ zbroj stupnjeva svih vrhova jednak je dvostrukom broju bridova, tj.

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon$$

Lema o rukovanju

U svakom grafu je broj vrhova neparnog stupnja paran broj.

Zadatak 1

a) *Nacrtajte primjer grafa sa 6 vrhova u kojemu su barem 3 vrha neparnog stupnja i barem 2 vrha parnog stupnja.*

b) *Nacrtajte primjer grafa sa 6 vrhova u kojemu su najviše 3 vrha neparnog stupnja i barem 2 vrha parnog stupnja.*

c) *Postoji li graf koji istovremeno zadovoljava sve uvjete iz a) i b) dijela zadatka? Obrazložite svoj odgovor. Ukoliko postoji takav graf, navedite jedan primjer.*

Rješenje

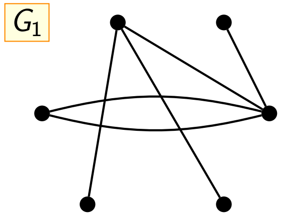
a) Neka je G graf sa 6 vrhova, tj. $\nu(G) = 6$.

G ima barem 3 vrha neparnog stupnja $\xrightarrow{\text{Lema o rukovanju}}$ G ima barem 4 vrha neparnog stupnja

G ima barem 2 vrha parnog stupnja

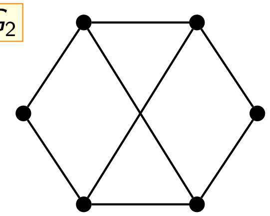
Zaključak: G ima 4 vrha neparnog stupnja i 2 vrha parnog stupnja

G_1



pseudograf

G_2



jednostavni graf

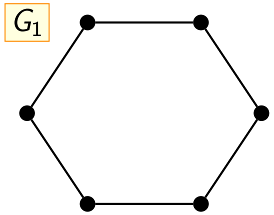
b) Neka je G graf sa 6 vrhova, tj. $\nu(G) = 6$.

G ima najviše 3 vrha neparnog stupnja $\xrightarrow{\text{Lema o rukovanju}}$ G ima najviše 2 vrha neparnog stupnja

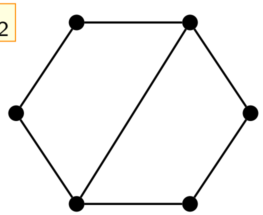
G ima barem 2 vrha parnog stupnja

Zaključak: G ima 0 ili 2 vrha neparnog stupnja i barem 2 vrha parnog stupnja

G_1



G_2



c) Neka je G graf sa 6 vrhova, tj. $\nu(G) = 6$.

a) dio zadatka

G ima 4 vrha neparnog stupnja.

G ima 2 vrha parnog stupnja.

b) dio zadatka

G ima najviše 2 vrha neparnog stupnja.

G ima barem 2 vrha parnog stupnja.

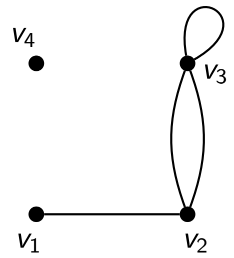
moraju vrijediti oba uvjeta

Kontradikcija

Zadatak 2

Nađite primjer grafa koji ima četiri vrha međusobno različitih stupnjeva.

Rješenje



$d(v_1) = 1$
$d(v_2) = 3$
$d(v_3) = 4$
$d(v_4) = 0$

Postoji li takav jednostavni graf?

Zadatak 3

Dokažite da u svakoj grupi ljudi postoji dvoje ljudi s istim brojem prijatelja iz te grupe.

Rješenje

Definiramo graf G u kojemu vrhovi predstavljaju ljude, a bridovi prijateljstva.

vrhovi $\leftrightsquigarrow$ ljudi bridovi $\leftrightsquigarrow$ prijateljstva

- G je jednostavni graf.
- Nema višestrukih bridova: ne treba prijateljstvo više puta isticati.
- Nema petlji: pod prijateljstvom podrazumijevamo prijateljstvo s drugim osobama, a ne sa samim sobom.

Tvrdimo U svakom jednostavnom grafu postoje barem dva vrha istog stupnja.

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji jednostavni graf G s n vrhova u kojemu svi vrhovi imaju međusobno različite stupnjeve.

Kako je G jednostavni graf, mogući stupnjevi vrhova su

$$0, 1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1.$$

Tu je ukupno n brojeva pa prema pretpostavci svaki od tih brojeva je stupanj točno jednog vrha u grafu G.

Stoga u grafu G postoji vrh stupnja $n-1$ koji je susjedan sa svim preostalim vrhovima. Međutim, tada u grafu G ne može postojati vrh stupnja 0, što je kontradikcija s ranijom činjenicom da mora postojati vrh stupnja 0.

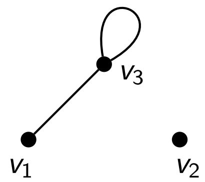
Dakle, u svakom jednostavnom grafu postoje barem dva vrha istog stupnja.

Vrijedi li tvrdnja ako pod prijateljstvom podrazumijevamo i prijateljstvo sa samim sobom?

- *Tvrdnja vrijedi uz pretpostavku da je svatko sam sebi prijatelj.*

  Naime, u tom slučaju u jednostavnom grafu u svaki vrh stavimo petlju, a petlje će dvama vrhovima istog stupnja samo povećati njihove stupnjeve za 2 pa će u novom grafu oni opet biti istog stupnja.

- *Tvrdnja ne mora vrijediti ukoliko postoje osobe koje nisu same sebi prijatelji.*



Zadatak 4

Graf G ima 35 bridova i svaki vrh ima stupanj barem 3, tj. $\delta(G) = 3$. Koliko najviše vrhova može imati graf G?

$$\delta(G) = \min_{v \in V(G)} d(v)$$

$$\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d(v)$$

Rješenje

$\varepsilon(G) = 35, \ \delta(G) = 3$

$$2\varepsilon = \sum_{v \in V(G)} \overset{\geqslant 3}{d(v)} \geqslant 3\nu$$

$$\Rightarrow \ 3\nu \leqslant 2\varepsilon \ \Rightarrow \ \nu \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon \ \Rightarrow \ \nu \leqslant \frac{2}{3} \cdot 35 \ \Rightarrow \ \nu \leqslant \frac{70}{3} \ \Rightarrow \ \nu \leqslant 23$$

Graf G ima najviše 23 vrha.

Zadatak 5

Postoji li grupa od 11 ljudi u kojoj svaka osoba poznaje točno troje ljudi iz te grupe? Obrazložite svoj odgovor jezikom teorije grafova.

Rješenje

Pitanje je postoji li 3-regularni graf s 11 vrhova.

Pretpostavimo da takav graf postoji. Tada vrijedi

$$2\varepsilon = \sum_{v \in V(G)} \overset{= 3}{d(v)} = 3\nu = 3 \cdot 11 = 33$$

pa je $2\varepsilon = 33$. Međutim, to je kontradikcija pa takav graf ne postoji.

Zadatak 6

Dokažite da u svakoj grupi od 6 osoba postoji troje ljudi koji se međusobno poznaju ili postoji troje ljudi koji se međusobno ne poznaju.

Rješenje

Neka je $\{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6\}$ skup od 6 osoba.

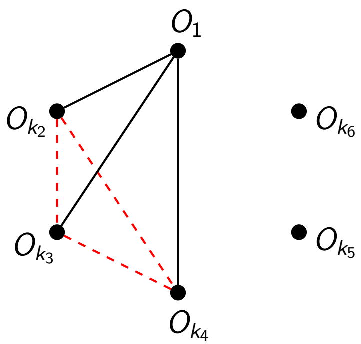
Neka je G graf u kojemu su vrhovi navedene osobe, a dva vrha O_i i O_j su susjedni ako se pripadne osobe O_i i O_j poznaju.

Promotrimo vrh O_1 u grafu G. Tada je sigurno istinit jedan od sljedeća dva slučaja: $d(O_1) \geqslant 3$ ili $d(O_1) < 3$.

$$(O_{k_2}, O_{k_3}, O_{k_4}, O_{k_5}, O_{k_6}) \leftsquigarrow \text{neka permutacija od } (O_2, O_3, O_4, O_5, O_6)$$

$d(O_1) \geqslant 3$

U ovom slučaju osoba O_1 poznaje barem troje ljudi $O_{k_2}, O_{k_3}, O_{k_4}$.

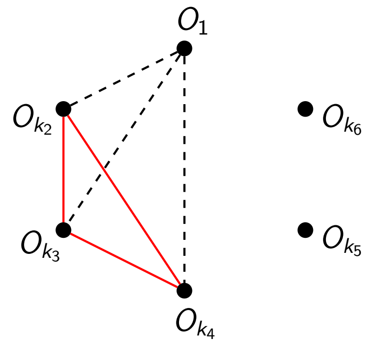


Ukoliko u skupu poznanika od O_1 postoje dvije osobe koje se poznaju, npr. osobe O_{k_2} i O_{k_3}, tada je $\{O_1, O_{k_2}, O_{k_3}\}$ skup od troje ljudi koji se međusobno poznaju.

Ako se među poznanicima od O_1 nikoje od tih osoba međusobno ne poznaju, tada je $\{O_{k_2}, O_{k_3}, O_{k_4}\}$ skup od troje ljudi koji se međusobno ne poznaju.

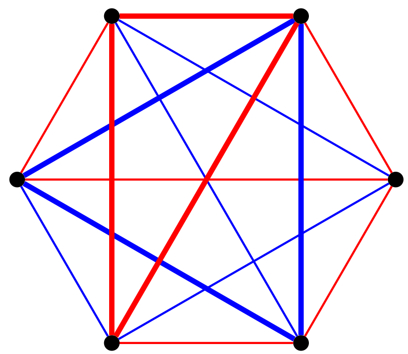
$d(O_1) < 3$

U ovom slučaju osoba O_1 ne poznaje barem troje ljudi $O_{k_2}, O_{k_3}, O_{k_4}$.



Ukoliko u skupu osoba koje O_1 ne poznaje postoje dvije osobe koje se ne poznaju, npr. osobe O_{k_2} i O_{k_3}, tada je $\{O_1, O_{k_2}, O_{k_3}\}$ skup od troje ljudi koji se međusobno ne poznaju.

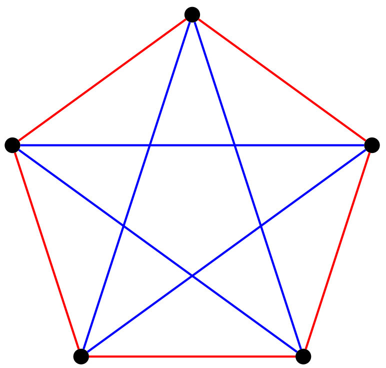
Ukoliko se svake dvije osobe međusobno poznaju u skupu osoba koje O_1 ne poznaje, tada je $\{O_{k_2}, O_{k_3}, O_{k_4}\}$ skup od troje ljudi koji se međusobno poznaju.



Ako bojamo bridove grafa K_6 s dvije boje, tada postoji jednobojni trokut.

Daje li nam prethodni dokaz algoritam za brzo pronalaženje jednobojnog trokuta?

Zapravo postoje barem dva jednobojna trokuta.



Ako bojamo bridove grafa K_5 s dvije boje, tada ne mora postojati jednobojni trokut.

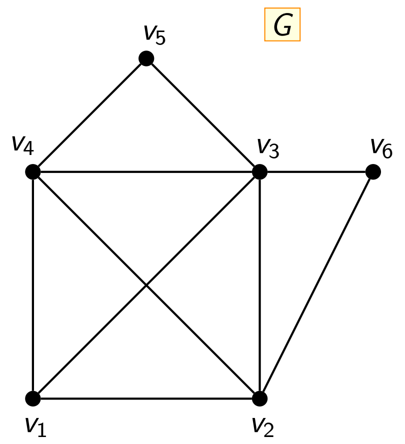
U grupi od 5 osoba ne mora postojati troje ljudi koji se međusobno poznaju niti troje ljudi koji se međusobno ne poznaju.

Klika

Klika reda m u jednostavnom grafu $G = (V, E)$ je m-člani podskup $S \subseteq V$ takav da je inducirani podgraf $G[S]$ potpuni graf K_m.

Nezavisni skup

Nezavisni skup reda m u jednostavnom grafu $G = (V, E)$ je m-člani podskup $S \subseteq V$ takav da je inducirani podgraf $G[S]$ prazan graf.



klika reda 4 u grafu G

$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

nezavisni skup reda 3 u grafu G

$\{v_1, v_5, v_6\}$

Navedite još neke klike i nezavisne skupove u grafu G.

Ramseyev broj – prva definicija

Ramseyev broj $R(s, t)$ je najmanji $n \in \mathbb{N}$ takav da svaki jednostavni graf s n vrhova sadrži kliku reda s ili nezavisni skup reda t.

Ramseyev broj – druga definicija

Ramseyev broj $R(s, t)$ je najmanji $n \in \mathbb{N}$ takav da svako bojanje bridova potpunog grafa K_n s dvije boje sadrži kliku reda s u prvoj boji ili kliku reda t u drugoj boji.

$$R(s,t) \leqslant \binom{s+t-2}{s-1}$$

- Mi smo dokazali da je $R(3,3) = 6$.
- Jasno je da vrijedi $R(t,2) = t$.

Ramseyev broj – poopćenje na više boja

Ramseyev broj $R(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ je najmanji $n \in \mathbb{N}$ takav da svako bojanje bridova potpunog grafa K_n s k boja sadrži kliku reda s_i u boji i za neki $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

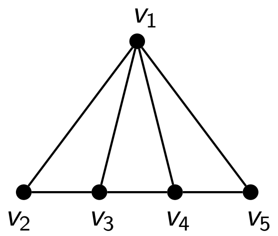
Ramseyev broj – poopćenje na bojanje *m*-članih podskupova

Ramseyev broj $R(s_1, s_2, \ldots, s_k; m)$ je najmanji $n \in \mathbb{N}$ takav da svako bojanje m-članih podskupova n-članog skupa s k boja sadrži s_i-člani podskup čiji su svi m-člani podskupovi obojani bojom i za neki $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

- U potpunom grafu K_n bojamo klike reda m s k boja.
- Zaključak je da postoji klika reda s_i čije su sve klike reda m obojane istom bojom.
- Za $m = 2$ dobivamo bojanje bridova, a to su zapravo klike reda 2.
- $R(s_1, s_2, \ldots, s_k; 2) = R(s_1, s_2, \ldots, s_k)$

Zadatak 7

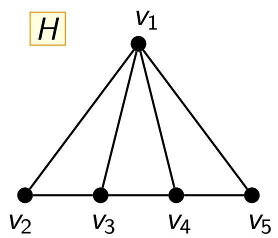
a) *Nacrtajte komplementarni graf grafa H prikazanog na slici.*

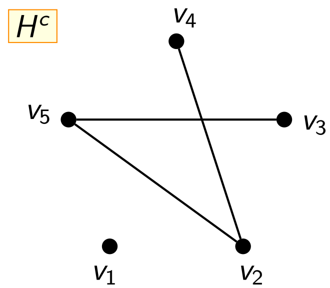


b) *Neka je G jednostavni graf s* 15 *bridova. Ako graf* G^c *ima* 13 *bridova, koliko vrhova ima graf G?*

Rješenje

a)





b) $\varepsilon(G) = 15, \quad \varepsilon(G^c) = 13, \quad \nu(G) = ?$

$$\varepsilon(G) + \varepsilon(G^c) = \varepsilon(K_\nu)$$

$$15 + 13 = \binom{\nu}{2}$$

$$\frac{\nu(\nu-1)}{2} = 28$$

$$\nu^2 - \nu - 56 = 0$$

$$\nu_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 56}}{2}$$

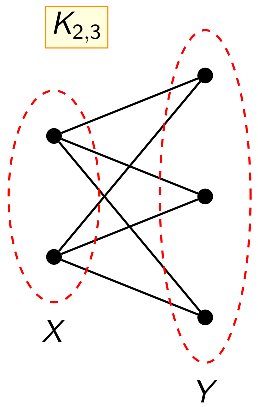
$$\boxed{\nu_1 = 8} \qquad \nu_2 = -7$$

$$\boxed{\nu(G) = 8}$$

Zadatak 8

Potpuni bipartitni graf ima ukupno 456 bridova i 12 vrhova u jednom elementu particije. Koliko ima vrhova u drugom elementu particije?

Rješenje



$$\boxed{\varepsilon(K_{m,n}) = mn}$$

$$\varepsilon = 456, \quad m = 12$$

$$n = \frac{456}{12} = 38$$

U drugom elementu particije ima 38 vrhova.

Zadatak 9

Ispitajte postoje li jednostavni grafovi sa sljedećim nizovima stupnjeva vrhova.

a) $3, 3, 3, 3, 2$

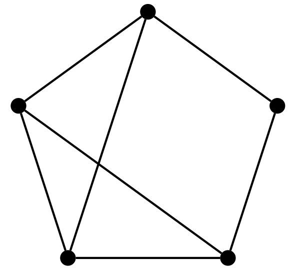
b) $0, 1, 2, 2, 3$

c) $1, 1, 1, 1, 1$

d) $1, 2, 3, 4, 4$

U slučaju da takav graf postoji navedite jedan primjer, a u protivnom obrazložite zbog čega ne postoji.

Rješenje

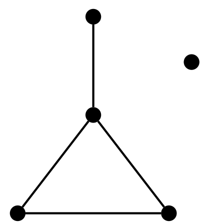


a) $3, 3, 3, 3, 2$

broj bridova $\quad \varepsilon = 7$

$$2\varepsilon = \sum_{v \in V(G)} d(v) = 3 + 3 + 3 + 3 + 2 = 14$$

Takav jednostavni graf G postoji.



b) $0, 1, 2, 2, 3$

broj bridova $\quad \varepsilon = 4$

$$2\varepsilon = \sum_{v \in V(G)} d(v) = 0 + 1 + 2 + 2 + 3 = 8$$

Takav jednostavni graf G postoji.

c) $1, 1, 1, 1, 1$

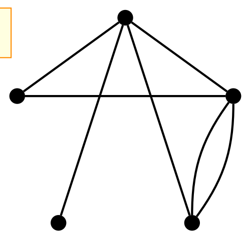
broj bridova

$$2\varepsilon = \sum_{v \in V(G)} d(v) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

Ne postoji takav graf G, niti jednostavni niti pseudograf.

U svakom grafu broj vrhova neparnog stupnja mora biti paran broj.

pseudograf G



d) $1, 2, 3, 4, 4$

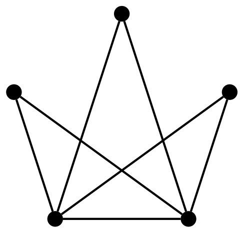
broj bridova $\quad \varepsilon = 7$

$$2\varepsilon = \sum_{v \in V(G)} d(v) = 1 + 2 + 3 + 4 + 4 = 14$$

Ako je G jednostavni graf s 5 vrhova pri čemu dva vrha imaju stupanj 4, tada preostala tri vrha imaju stupanj barem 2.

Stoga ne postoji jednostavni graf G sa zadanim nizom stupnjeva vrhova.

Međutim, postoji takav pseudograf G.



Zadatak 10

Dokažite da je niz nenegativnih cijelih brojeva $d_1, d_2, \dots, d_n$ niz stupnjeva vrhova nekog grafa ako i samo ako je $\sum_{i=1}^{n} d_i$ parni broj.

Rješenje

$\boxed{\Rightarrow}$

Pretpostavimo da je $d_1, d_2, \dots, d_n$ niz stupnjeva vrhova nekog grafa G. Tada je $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2\varepsilon(G)$ iz čega slijedi da je $\sum_{i=1}^{n} d_i$ parni broj.

$\boxed{\Leftarrow}$

Neka je $d_1, d_2, \dots, d_n$ niz nenegativnih cijelih brojeva i $\sum_{i=1}^{n} d_i$ parni broj.

Kako je suma svih članova niza parni broj, zaključujemo da u tom nizu postoji parni broj članova koji su neparni.

Tražimo graf G sa skupom vrhova $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ za koji vrijedi

$$d(v_i) = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ako je d_i parni broj, tada u vrh v_i stavimo $\frac{d_i}{2}$ petlji. Stoga je

$$d(v_i) = 2 \cdot \frac{d_i}{2} = d_i.$$

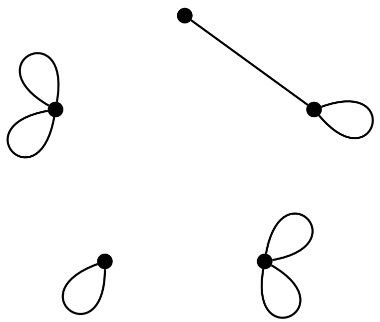
Ako je d_i neparni broj, tada u vrh v_i stavimo $\frac{d_i - 1}{2}$ petlji. U tom slučaju je trenutno

$$d(v_i) = 2 \cdot \frac{d_i - 1}{2} = d_i - 1.$$

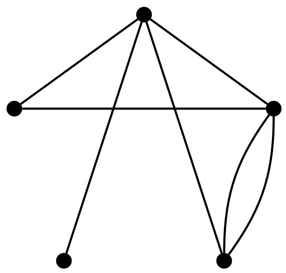
Međutim, kako u nizu $d_1, d_2, \dots, d_n$ imamo parni broj neparnih članova, tada pripadne vrhove v_i i v_j s trenutno parnim stupnjevima $d_i - 1$ i $d_j - 1$ spojimo bridom. Na taj način vrhovi v_i i v_j postaju neparnih stupnjeva d_i i d_j. Ovaj postupak ponovimo za bilo koji par neparnih brojeva u zadanom nizu i na kraju dobivamo traženi graf G.

Primjer

- $1, 2, 3, 4, 4$



primjer iz prethodnog zadatka



Teorem (Erdős, Gallai, 1960.)

Niz $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$ nenegativnih cijelih brojeva je niz stupnjeva vrhova nekog jednostavnog grafa ako i samo ako vrijedi

- $\sum_{i=1}^{n} d_i$ je parni broj.
- $\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$

Postoji više različitih kratkih i jednostavnih dokaza ovog teorema.

- Dokaz matematičkom indukcijom po sumi stupnjeva svih vrhova
- Konstruktivni dokaz

- $1, 2, 3, 4, 4$

Silazno sortirani niz

$d_1 \; d_2 \; d_3 \; d_4 \; d_5$

$4, 4, 3, 2, 1$

- Suma svih članova niza je parni broj: $4 + 4 + 3 + 2 + 1 = 14$

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

- $k = 1$

$$4 \leqslant 1 \cdot 0 + \min\{1,4\} + \min\{1,3\} + \min\{1,2\} + \min\{1,1\}$$
$$4 \leqslant 0 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$4 \leqslant 4$$

Ne postoji jednostavni graf s nizom stupnjeva vrhova $1, 2, 3, 4, 4$.

- $k = 2$

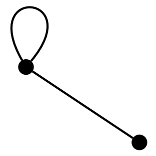
$$4 + 4 \leqslant 2 \cdot 1 + \min\{2,3\} + \min\{2,2\} + \min\{2,1\}$$
$$8 \leqslant 2 + 2 + 2 + 1$$
$$8 \leqslant 7 \longleftarrow \text{ne vrijedi}$$

Propozicija

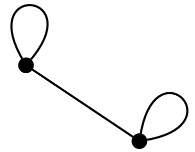
Niz $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$ nenegativnih cijelih brojeva je niz stupnjeva vrhova nekog grafa bez petlji ako i samo ako vrijedi

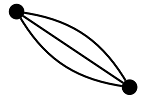
- $\sum_{i=1}^{n} d_i$ je parni broj.
- $d_1 \leqslant \sum_{i=2}^{n} d_i$.

- $3, 1$ ⟵ Ne postoji graf bez petlji



- $3, 3$ ⟵ Postoji graf bez petlji





graf bez petlji

Teorem (Havel-Hakimi)

Neka je D niz nenegativnih cijelih brojeva

$$d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}, d_n$$

pri čemu je $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_{n-1} \geqslant d_n$, $d_1 < n$ i $n \geqslant 2$.
Neka je D' niz od $n-1$ brojeva

$$d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_k - 1, d_{k+1} - 1, d_{k+2}, \ldots, d_{n-1}, d_n$$

pri čemu je $k = d_1$. Tada je D niz stupnjeva vrhova nekog jednostavnog grafa ako i samo ako je D' niz stupnjeva vrhova nekog jednostavnog grafa.

Primjer 1 – Havel-Hakimi

$$\begin{array}{lccccc} & & -1 & -1 & -1 & \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \text{obriši} \rightsquigarrow & \boxed{3} & 3 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccc} & & -1 & -1 & \\ & & \downarrow & \downarrow & \\ \text{obriši} \rightsquigarrow & \boxed{2} & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lccc} \text{sortiraj silazno} \rightsquigarrow & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lccc} & & -1 & \\ & & \downarrow & \\ \text{obriši} \rightsquigarrow & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array}$$

$0 \quad 0$ ⟵ jest niz stupnjeva vrhova nekog jednostavnog grafa

Niz $3, 3, 3, 2, 1$ jest niz stupnjeva vrhova nekog jednostavnog grafa.

Primjer 2 – Havel-Hakimi

$$\begin{array}{lccccc} & & -1 & -1 & -1 & -1 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{obriši} \rightsquigarrow & \boxed{4} & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

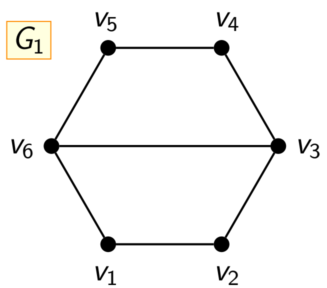
$$\begin{array}{lcccc} & & -1 & -1 & -1 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{obriši} \rightsquigarrow & \boxed{3} & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

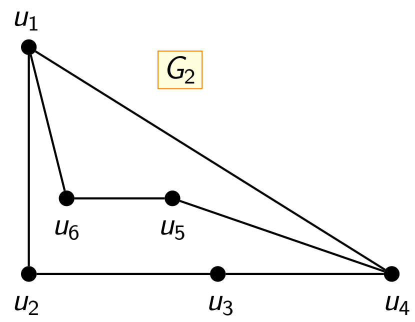
$1 \quad 0 \quad -1$ ⟵ nije niz stupnjeva vrhova nekog jednostavnog grafa

Niz $4, 4, 3, 2, 1$ nije niz stupnjeva vrhova nekog jednostavnog grafa.

Zadatak 11

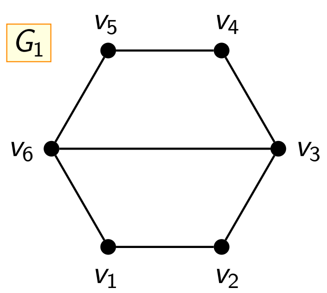
Ispitajte jesu li grafovi G_1 i G_2 izomorfni.

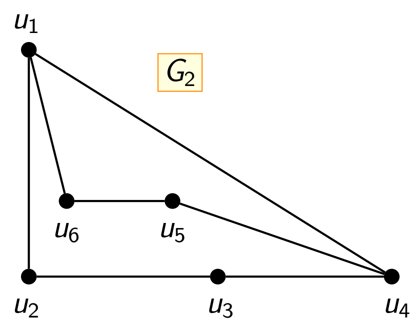




Ukoliko jesu, pronađite jedan izomorfizam između njih i pripadnu matricu permutacije koja povezuje njihove matrice susjedstva. U protivnom, objasnite zašto nisu izomorfni.

Rješenje

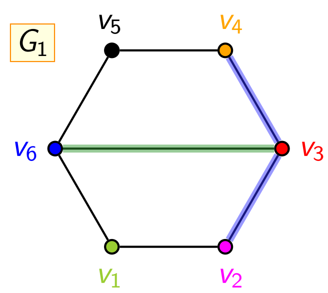


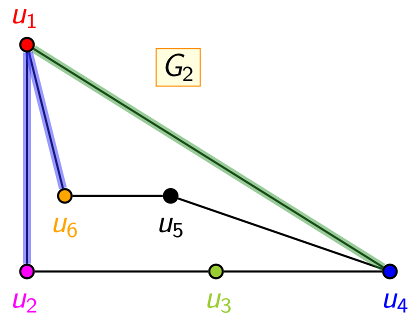


$$A_1 = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_2 = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Rješenje





G_1 i G_2 su izomorfni grafovi.

	u_2, u_6	u_1, u_4	u_2, u_6		u_1, u_4
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
u_3	u_2	u_1	u_6	u_5	u_4

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A_2 = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = PA_1P^T$$

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
u_3	u_2	u_1	u_6	u_5	u_4