Dokazi u matematici

DISKRETNE STRUKTURE S TEORIJOM GRAFOVA

Damir Horvat

FOI, Varaždin

$$\underbrace{A}_{\text{pretpostavka}} \Rightarrow \underbrace{B}_{\text{zaključak}}$$

- A je dovoljan uvjet za B
- B je nužan uvjet za A

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- Ukoliko postoji slučaj kod kojeg istinita pretpostavka vodi do lažnog zaključka, tvrdnja ne vrijedi.
- Tvrdnja je trivijalno istinita ako je istinit zaključak.

Direktni dokaz

- Provodi se tako da se uzima da je pretpostavka istinita i tada se pomoću konačnog niza implikacija pokaže da je i zaključak istinit.

$$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$$

Zadatak 1

Neka su $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ za koje vrijedi $n^2 + 1 = 2m$. Dokažite da je m suma kvadrata dva uzastopna prirodna broja.

Rješenje

Pretpostavka $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ n^2 + 1 = 2m$

Zaključak m je suma kvadrata dva uzastopna prirodna broja

$$n^2 + 1 = 2m \implies n^2 + 1 \text{ je paran} \implies n^2 \text{ je neparan} \implies$$

$$\implies n \text{ je neparan} \implies \exists k \in \mathbb{N}, \boxed{n = 2k + 1} \implies$$

$$\implies (2k+1)^2 + 1 = 2m \implies 4k^2 + 4k + 2 = 2m \,/ : 2 \implies$$

$$\implies m = 2k^2 + 2k + 1 \implies m = k^2 + \left(k^2 + 2k + 1\right) \implies$$

$$\implies m = k^2 + (k+1)^2$$

Napomena

- Neki dokazi u matematici daju odmah određeni algoritam za rješavanje problema. Takve dokaze zovemo **konstruktivnim dokazima**.
- U teoriji grafova imat ćemo dosta primjera konstruktivnih dokaza.
- Isto tako, u teoriji brojeva pojavit će se primjeri konstruktivnih dokaza.
- Dokaz kojeg smo dali u prethodnom zadatku također je primjer konstruktivnog dokaza.
- U prošlom zadatku smo zapravo dokazali da se brojevi oblika

$$\boxed{n^2 + 1 = 2m} \qquad \frac{n^2 + 1}{2}$$

mogu napisati kao suma kvadrata dva uzastopna prirodna broja za svaki neparni prirodni broj $n > 1$.

Primjer

$$4373^2 + 1 = 2 \cdot 9\,561\,565$$

Napišite broj 9 561 565 kao sumu kvadrata dva uzastopna prirodna broja.

- $n^2 + 1 = 2m, \quad n = 4373, \ m = 9\,561\,565$
- Iz dokaza znamo da je $m = k^2 + (k+1)^2$ i vrijedi $n = 2k + 1$.
- Sada iz $n = 2k + 1$ lagano dobivamo

$$k = \frac{n-1}{2} = \frac{4373 - 1}{2} = \frac{4372}{2} = 2186$$

- Stoga je

$$9\,561\,565 = 2186^2 + 2187^2$$

Relacija *dijeli* na skupu cijelih brojeva

$$a \mid b \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \ b = ak$$

- $2 \mid 6 \quad$ jer je $\quad 6 = 2 \cdot 3 \quad (k = 3)$
- $6 \nmid 2, \quad 3 \nmid 10$
- $a \mid 0 \quad$ jer je $\quad 0 = a \cdot 0 \quad (k = 0) \quad \leftarrow$ ovo vrijedi za svaki $a \in \mathbb{Z}$
- $0 \mid 0 \quad$ jer je $\quad 0 = 0 \cdot k \quad$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$
- $0 \mid a \iff a = 0 \quad (a = 0 \cdot k)$

Zadatak 2

Ako 2 dijeli 5n, tada je n parni prirodni broj. Dokažite.

Rješenje

$\boxed{\text{Pretpostavka}}$ $\ n \in \mathbb{N}, \ 2 \mid 5n$

$\boxed{\text{Zaključak}}$ $\ n$ je parni prirodni broj

$$2 \mid 5n \implies \exists k \in \mathbb{N}, \ 5n = 2k \implies$$

- U jednakosti $5n = 2k$ lijeva strana je djeljiva s 5 pa mora biti i desna strana djeljiva s 5.
- Kako su 2 i 5 relativno prosti brojevi (nemaju zajedničkih prostih faktora), slijedi da broj k mora biti djeljiv s brojem 5.

$$\implies n = 2 \cdot \underbrace{\frac{k}{5}}_{\in \mathbb{N}} \implies n \text{ je parni prirodni broj}$$

$\boxed{A \Rightarrow B}$

- Ponekad je tvrdnju lakše dokazati tako da se pretpostavka A (ili neka druga tvrdnja koja se dobije iz pretpostavke A) podijeli na više disjunktnih pojedinačnih slučajeva $A_1, A_2, \ldots, A_k$ od kojih svaki mora dati tvrdnju B.

Dokaz po slučajevima

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k \Rightarrow B$$

$$\Big\downarrow \ \text{eliminacija disjunkcije}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} A_1 \Rightarrow B \\ A_2 \Rightarrow B \\ \vdots \\ A_k \Rightarrow B \end{array}}$$

Zadatak 3

Neka je n neparni prirodni broj. Dokažite da postoji $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takav da je $n = 4m + 1$ ili $n = 4m + 3$.

Rješenje

Pretpostavka n je neparni prirodni broj

Zaključak postoji $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takav da je $n = 4m+1$ ili $n = 4m+3$

Neka je n neparni prirodni broj. Tada postoji $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takav da je $n = 2k + 1$.

Sada razlikujemo dva slučaja.

$\boxed{n = 2k + 1}$

- k je parni broj

U tom slučaju postoji $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takav da je $k = 2m$.

$$n = 2k + 1 = 2 \cdot 2m + 1 = 4m + 1$$

- k je neparni broj

U tom slučaju postoji $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takav da je $k = 2m + 1$.

$$n = 2k + 1 = 2 \cdot (2m + 1) + 1 = 4m + 3$$

Binomni teorem

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Binomni koeficijent

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

Zadatak 4

Ako prirodni broj n nije djeljiv s 5, tada je $n^4 - 1$ djeljiv s 5. Dokažite.

Rješenje

Pretpostavka $n \in \mathbb{N},\ 5 \nmid n$

Zaključak $5 \mid n^4 - 1$

Neka je n prirodni broj koji nije djeljiv s 5. Razlikujemo četiri slučaja.

- $n = 5k + 1$ za neki $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$n^4 - 1 = (5k+1)^4 - 1 =$$

$$= (5k)^4 + \binom{4}{1} \cdot (5k)^3 \cdot 1 + \binom{4}{2} \cdot (5k)^2 \cdot 1^2 + \binom{4}{3} \cdot 5k \cdot 1^3 + 1^4 - 1 =$$

$$= 625k^4 + 500k^3 + 150k^2 + 20k + 1 - 1 =$$

$$= 625k^4 + 500k^3 + 150k^2 + 20k =$$

$$= 5 \cdot \underbrace{\left(125k^4 + 100k^3 + 30k^2 + 4k\right)}_{\in \mathbb{Z}}$$

Dakle, $n^4 - 1$ je djeljiv s 5.

- $n = 5k + 2$ za neki $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$n^4 - 1 = (5k+2)^4 - 1 =$$

$$= (5k)^4 + \binom{4}{1} \cdot (5k)^3 \cdot 2 + \binom{4}{2} \cdot (5k)^2 \cdot 2^2 + \binom{4}{3} \cdot 5k \cdot 2^3 + 2^4 - 1 =$$

$$= 625k^4 + 1000k^3 + 600k^2 + 160k + 16 - 1 =$$

$$= 625k^4 + 1000k^3 + 600k^2 + 160k + 15 =$$

$$= 5 \cdot \underbrace{\left(125k^4 + 200k^3 + 120k^2 + 32k + 3\right)}_{\in \mathbb{N}}$$

Dakle, $n^4 - 1$ je djeljiv s 5.

- $n = 5k + 3$ za neki $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$n^4 - 1 = (5k+3)^4 - 1 =$$

$$= (5k)^4 + \binom{4}{1} \cdot (5k)^3 \cdot 3 + \binom{4}{2} \cdot (5k)^2 \cdot 3^2 + \binom{4}{3} \cdot 5k \cdot 3^3 + 3^4 - 1 =$$

$$= 625k^4 + 1500k^3 + 1350k^2 + 540k + 81 - 1 =$$

$$= 625k^4 + 1500k^3 + 1350k^2 + 540k + 80 =$$

$$= 5 \cdot \underbrace{\left(125k^4 + 300k^3 + 270k^2 + 108k + 16\right)}_{\in \mathbb{N}}$$

Dakle, $n^4 - 1$ je djeljiv s 5.

- $n = 5k + 4$ za neki $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$n^4 - 1 = (5k+4)^4 - 1 =$$

$$= (5k)^4 + \binom{4}{1} \cdot (5k)^3 \cdot 4 + \binom{4}{2} \cdot (5k)^2 \cdot 4^2 + \binom{4}{3} \cdot 5k \cdot 4^3 + 4^4 - 1 =$$

$$= 625k^4 + 2000k^3 + 2400k^2 + 1280k + 256 - 1 =$$

$$= 625k^4 + 2000k^3 + 2400k^2 + 1280k + 255 =$$

$$= 5 \cdot \underbrace{\left(125k^4 + 400k^3 + 480k^2 + 256k + 51\right)}_{\in \mathbb{N}}$$

Dakle, $n^4 - 1$ je djeljiv s 5.

$\boxed{A \Rightarrow B} \rightsquigarrow \boxed{\overline{B} \Rightarrow \overline{A}}$

- Ponekad je teško ili nemoguće direktno dokazati tvrdnju $A \Rightarrow B$ pa se umjesto toga dokazuje **kontrapozicija** $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Dokaz kontrapozicijom

- Pretpostavi se da je istinita tvrdnja $\overline{B}$ i pokaže se da ta pretpostavka vodi do istinitosti tvrdnje $\overline{A}$.

A	B	$A \rightarrow B$	$\overline{B}$	$\overline{A}$	$\overline{B} \rightarrow \overline{A}$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Zadatak 5

Prosječna starost četvero djece je 10 godina. Dokažite da je barem jedno dijete staro barem 10 godina.

Rješenje

- $a, b, c, d \leftarrow$ starost pojedinog djeteta

De Morganovi zakoni

$$\overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y}$$

$$\overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$$

$\boxed{A \Rightarrow B}$

$$\frac{a+b+c+d}{4} = 10 \implies (a \geqslant 10) \vee (b \geqslant 10) \vee (c \geqslant 10) \vee (d \geqslant 10)$$

$\boxed{\overline{B} \Rightarrow \overline{A}}$

$$(a < 10) \wedge (b < 10) \wedge (c < 10) \wedge (d < 10) \implies \frac{a+b+c+d}{4} \neq 10$$

Pretpostavimo da je $a < 10, b < 10, c < 10$ i $d < 10$. Tada je

$$a + b + c + d < 40 \,\Big/ : 4$$

odnosno

$$\frac{a + b + c + d}{4} < 10.$$

Iz posljednje nejednakosti slijedi

$$\frac{a + b + c + d}{4} \neq 10.$$

Vrijedi li obrat dokazane tvrdnje?

$\boxed{A \Rightarrow B}$ **Tvrdnja**

Ako je aritmetička sredina četiri broja jednaka 10, tada je barem jedan od brojeva veći ili jednak od 10.

$$\frac{a+b+c+d}{4} = 10 \implies (a \geqslant 10) \vee (b \geqslant 10) \vee (c \geqslant 10) \vee (d \geqslant 10)$$

$\boxed{B \rightarrow A}$ **Obrat tvrdnje**

Ako je barem jedan od četiri broja veći ili jednak od 10, tada je njihova aritmetička sredina jednaka 10.

$$(a \geqslant 10) \vee (b \geqslant 10) \vee (c \geqslant 10) \vee (d \geqslant 10) \longrightarrow \frac{a+b+c+d}{4} = 10$$

Obrat tvrdnje ne vrijedi. Jedan **protuprimjer**:

$$a = 12,\; b = 1,\; c = 1,\; d = 18, \quad \frac{a+b+c+d}{4} = 8$$

Zadatak 6

Dokažite sljedeću tvrdnju:

Ako je x iracionalni broj, tada je $2x$ također iracionalni broj.

Ispitajte vrijedi li obrat navedene tvrdnje.

Rješenje

$A \Rightarrow B$

$$x \text{ je iracionalni broj} \implies 2x \text{ je iracionalni broj}$$

$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$

$$2x \text{ je racionalni broj} \implies x \text{ je racionalni broj}$$

Pretpostavimo da je $2x \in \mathbb{Q}$. Tada postoje $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$2x = \frac{m}{n}.$$

Dijeljenjem zadnje jednakosti s brojem 2 dobivamo

$$x = \frac{m}{2n}.$$

Kako je $m \in \mathbb{Z}$ i $2n \in \mathbb{N}$, slijedi $x \in \mathbb{Q}$.

$A \Rightarrow B$ Tvrdnja

$$x \text{ je iracionalni broj} \implies 2x \text{ je iracionalni broj}$$

$B \Rightarrow A$ Obrat tvrdnje

$$2x \text{ je iracionalni broj} \implies x \text{ je iracionalni broj}$$

$\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ Kontrapozicija obrata $\rightsquigarrow$ Suprotna tvrdnja

$$x \text{ je racionalni broj} \implies 2x \text{ je racionalni broj}$$

Pretpostavimo da je $x \in \mathbb{Q}$. Tada postoje $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$x = \frac{m}{n}.$$

Množenjem zadnje jednakosti s brojem 2 dobivamo

$$2x = \frac{2m}{n}.$$

Kako je $2m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$, slijedi $2x \in \mathbb{Q}$.

Time smo dokazali da također vrijedi i obrat zadane tvrdnje.

Ekvivalentne tvrdnje

akko

$$x \text{ je iracionalni broj} \iff 2x \text{ je iracionalni broj}$$

ako i samo ako

Ekvivalentne tvrdnje

$\boxed{A \Leftrightarrow B}$ ⟷ $\boxed{A \Rightarrow B, \quad B \Rightarrow A}$

A je nužan i dovoljan uvjet za B

- A je dovoljan uvjet za B: $A \Rightarrow B, \quad \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$
- A je nužan uvjet za B: $B \Rightarrow A, \quad \overline{A} \Rightarrow \overline{B}$

B je nužan i dovoljan uvjet za A

- B je dovoljan uvjet za A: $B \Rightarrow A, \quad \overline{A} \Rightarrow \overline{B}$
- B je nužan uvjet za A: $A \Rightarrow B, \quad \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$

Zadatak 7

Dokažite: prirodni broj n je djeljiv s 3 ako i samo ako je n^2 djeljiv s 3.

Rješenje

$\boxed{A \Leftrightarrow B}$

$$n \in \mathbb{N}, \ 3 \mid n \iff 3 \mid n^2$$

$\boxed{\Rightarrow}$ $(3 \mid n \ \Rightarrow \ 3 \mid n^2)$

Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ djeljiv s 3. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$n = 3k.$$

Kvadriranjem zadnje jednakosti dobivamo

$$n^2 = 9k^2 = 3 \cdot \underbrace{3k^2}_{\in \mathbb{N}}$$

iz čega slijedi da je n^2 djeljiv s 3.

$\boxed{\Leftarrow}$ $(3 \mid n^2 \ \Rightarrow \ 3 \mid n)$ $\boxed{n \in \mathbb{N}, \ 3 \mid n \ \Leftrightarrow \ 3 \mid n^2}$

$\boxed{\text{Dokaz 1}}$ (direktni dokaz)

Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je n^2 djeljiv s 3. Tada se u rastavu broja n^2 na proste faktore broj 3 mora pojaviti kao prosti faktor jer u protivnom n^2 ne bi bio djeljiv s 3. Međutim, u rastavu broja n^2 na proste faktore svaki se prosti faktor javlja na parnu potenciju pa se i broj 3 mora javiti na parnu potenciju. Dakle,

$$n^2 = 3^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k}$$

gdje su $3, p_2, \ldots, p_k$ svi različiti prosti faktori broja n^2 i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$. Stoga je

$$n = 3^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

Kako je $\alpha_1 \in \mathbb{N}$, tj. $\alpha_1 \geqslant 1$, zaključujemo da je n djeljiv s 3.

$\boxed{\Leftarrow}$ $(3 \mid n^2 \ \Rightarrow \ 3 \mid n)$ $\boxed{n \in \mathbb{N}, \ 3 \mid n \ \Leftrightarrow \ 3 \mid n^2}$

$\boxed{\text{Dokaz 2}}$ (dokaz kontrapozicijom)

$\boxed{\text{kontrapozicija}}$ $3 \nmid n \implies 3 \nmid n^2$

Ako $n \in \mathbb{N}$ nije djeljiv s 3, tada n^2 pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1.

Pretpostavimo da $n \in \mathbb{N}$ nije djeljiv s 3. Tada razlikujemo dva slučaja.

- $n = 3k + 1$ za neki $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
  $$n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3 \cdot \overbrace{(3k^2 + 2k)}^{\in \mathbb{N} \cup \{0\}} + 1$$
  Dakle, n^2 nije djeljiv s 3 jer daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3.
- $n = 3k + 2$ za neki $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
  $$n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + \overset{3+1}{4} = 3 \cdot \overbrace{(3k^2 + 4k + 1)}^{\in \mathbb{N} \cup \{0\}} + 1$$
  Dakle, n^2 nije djeljiv s 3 jer daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3.

Dokaz kontradikcijom

- Ako negacija tvrdnje A implicira laž (kontradikciju), tada je tvrdnja A istinita.

A	$\overline{A}$	$\overline{A} \to \perp$
1	0	1
0	1	0

Zadatak 8

Dokažite da se barem jedna od znamenki $1, 2, \ldots, 9$ *pojavljuje beskonačno mnogo puta u decimalnom prikazu broja* π.

Rješenje

Tvrdnja

Barem jedna od znamenki $1, 2, \ldots, 9$ se pojavljuje beskonačno mnogo puta u decimalnom prikazu broja π.

Negacija tvrdnje

Svaka od znamenki $1, 2, \ldots, 9$ se pojavljuje samo konačno mnogo puta u decimalnom prikazu broja π.

Pretpostavimo suprotno, tj. da se svaka od znamenki $1, 2, \ldots, 9$ pojavljuje samo konačno mnogo puta u decimalnom prikazu broja π. Tada postoji mjesto u decimalnom prikazu broja π nakon kojeg se pojavljuju samo znamenke 0.

ovdje su sve znamenke $\neq 0$,
eventualno i neke znamenke 0

$$\pi = 3.\underbrace{\qquad\qquad\qquad}00\cdots0$$

Zaključujemo da broj π ima konačni decimalni prikaz pa je $\pi \in \mathbb{Q}$. Međutim, to je kontradikcija jer znamo da je π iracionalni broj.

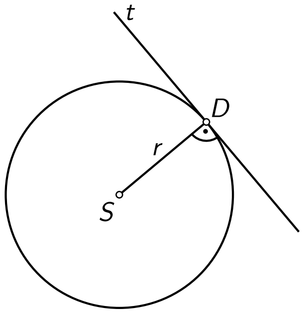
Dakle, u decimalnom prikazu broja π barem jedna od znamenki $1, 2, \ldots, 9$ pojavljuje se beskonačno mnogo puta.

Napomena

- Dokazali smo samo da se barem jedna od znamenki $1, 2, \ldots, 9$ pojavljuje beskonačno mnogo puta u decimalnom prikazu broja π.
- Iz samog dokaza nije vidljivo koja je to znamenka.
- Isto tako, moguće je da se više različitih znamenki pojavljuje beskonačno mnogo puta, ali to nismo ovdje dokazali.
- Dokaz je jednostavni i kratki, ali se unutar dokaza pozivamo na netrivijalnu činjenicu da $\pi \notin \mathbb{Q}$ čiji dokaz nije toliko jednostavan niti elementaran.

Definicija tangente kružnice

Neka je $k(S,r)$ kružnica polumjera r sa središtem u točki S. Neka je D bilo koja točka na toj kružnici. Pravac t koji prolazi točkom D i okomit je na pravac SD zove se **tangenta** te kružnice u točki D. Točku D u tom slučaju zovemo **diralište** tangente t.



Zadatak 9

Dokažite da tangenta kružnice ima s tom kružnicom samo jednu zajedničku točku koja je upravo diralište te tangente.

Rješenje

Naime, jasno je iz definicije da svaka tangenta kružnice ima s tom kružnicom barem jednu zajedničku točku i to baš diralište te tangente. Želimo dokazati da osim dirališta nema drugih zajedničkih točaka.

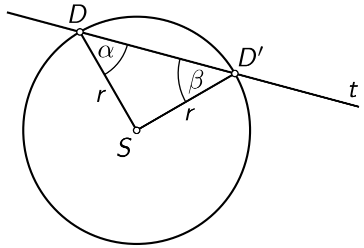
Tvrdnja

Diralište tangente kružnice je jedina zajednička točka tangente i te kružnice.

Negacija tvrdnje

Osim dirališta, tangenta kružnice ima s tom kružnicom i drugih zajedničkih točaka.

Neka je t tangenta kružnice $k(S,r)$ s diralištem D. Pretpostavimo da tangenta t i kružnica $k(S,r)$ osim dirališta D imaju još jednu zajedničku točku D'.



- Trokut SDD' je jednakokračni trokut jer je $|SD| = |SD'| = r$.
- $\alpha = 90^\circ$ jer je D diralište tangente t.
- $\beta = 90^\circ$ jer nasuprot jednakim stranicama u trokutu leže jednaki kutovi.

Dobili smo da trokut SDD' ima dva prava kuta što je nemoguće u euklidskoj geometriji pa slijedi tvrdnja zadatka.

Zadatak 10

$\boxed{a^{\log_a x} = x}$

Dokažite ili opovrgnite sljedeću tvrdnju:

$\boxed{\overline{A \to B} \equiv A \wedge \overline{B}}$

Ako je $a^b \in \mathbb{Q}$, tada je $a \in \mathbb{Q}$ ili $b \in \mathbb{Q}$.

Rješenje

barem jedan od brojeva a i b je racionalni

- Želimo opovrgnuti navedenu tvrdnju.

$$a^b \in \mathbb{Q} \;\to\; ((a \in \mathbb{Q}) \vee (b \in \mathbb{Q}))$$

- Treba pronaći jedan **protuprimjer** na kojemu tvrdnja ne vrijedi.

$$a^b \in \mathbb{Q} \;\wedge\; ((a \notin \mathbb{Q}) \wedge (b \notin \mathbb{Q}))$$

- Uzmimo, na primjer $a = \sqrt{3}$ i $b = \log_{\sqrt{3}} 2$. Tada je

$$a^b = \sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}} 2} = 2.$$

- $a^b \in \mathbb{Q}$, ali $a \notin \mathbb{Q}$ i $b \notin \mathbb{Q}$. Stoga navedena tvrdnja ne vrijedi.

$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Pretpostavimo suprotno, tj. $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Kako je $\sqrt{3} > 0$, postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n}.$$

Kvadriranjem dobivamo

$$\frac{m^2}{n^2} = 3$$

odnosno

$$m^2 = 3n^2. \qquad (\bigstar)$$

Kako je prirodni broj m^2 potpuni kvadrat, iz $(\bigstar)$ slijedi da je prirodni broj $3n^2$ također potpuni kvadrat. Međutim, to je moguće jedino ako je broj 3 potpuni kvadrat, što je kontradikcija. Dakle, $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

$\log_{\sqrt{3}} 2 \notin \mathbb{Q}$

$\log_a x = b \;\Leftrightarrow\; x = a^b$

Pretpostavimo suprotno, tj. $\log_{\sqrt{3}} 2 \in \mathbb{Q}$. Kako je $\log_{\sqrt{3}} 2 > 0$, postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je

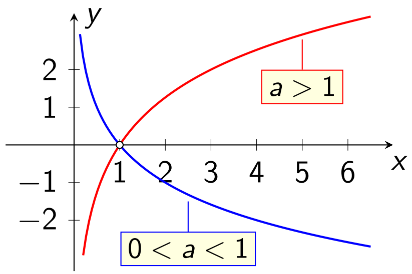
$$\log_{\sqrt{3}} 2 = \frac{m}{n}$$

$$2 = \sqrt{3}^{\frac{m}{n}}$$

$$2 = 3^{\frac{m}{2n}} \quad \Big/^{2n}$$

$$2^{2n} = 3^m$$

$f(x) = \log_a x$



Dobili smo kontradikciju jer je u zadnjoj jednakosti lijeva strana djeljiva s 2, a desna nije. Dakle, $\log_{\sqrt{3}} 2 \notin \mathbb{Q}$.

Napomena

Tvrdnja 1

barem jedan od brojeva a i b je racionalni

Ako je $a^b \in \mathbb{Q}$, tada je $a \in \mathbb{Q}$ ili $b \in \mathbb{Q}$.

Tvrdnja 2

oba broja a i b su racionalni

Ako je $a^b \in \mathbb{Q}$, tada je $a \in \mathbb{Q}$ i $b \in \mathbb{Q}$.

- Obje tvrdnje nisu istinite.
- $a = \sqrt{3}$, $b = \log_{\sqrt{3}} 2$ je jedan protuprimjer za obje tvrdnje.
- $a = \sqrt{3}$, $b = 2$ je jedan protuprimjer samo za drugu tvrdnju.