Matematička pozadina kružnih ovojnica

1 Diskretni slučaj

Na kružnici polumjera $R > 0$ s centrom u ishodištu koordinatnog sustava zadane su točke

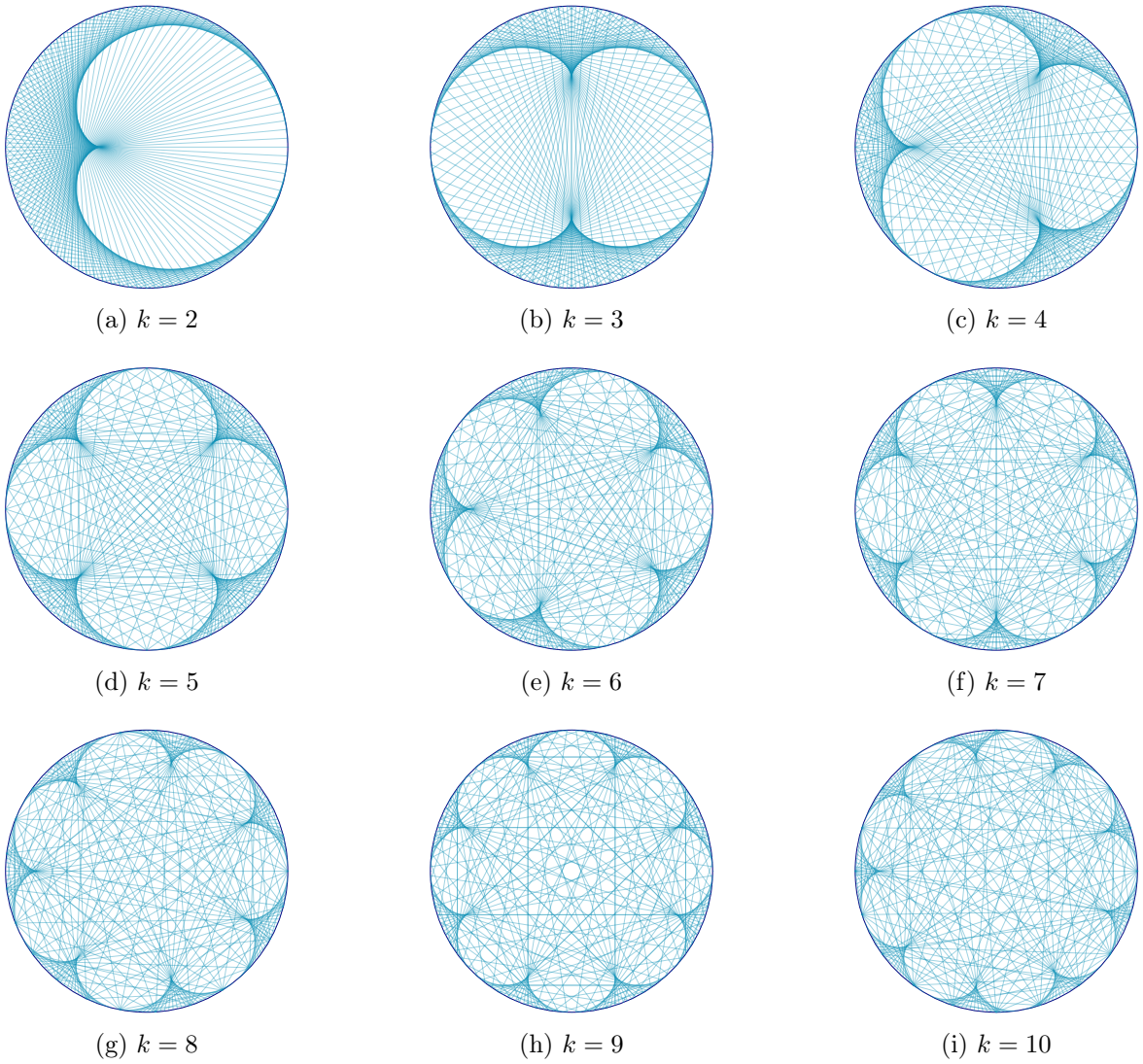
$$T_i\left(R\cos\frac{2\pi i}{N},\, R\sin\frac{2\pi i}{N}\right), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1$$

pri čemu je $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ odabrani fiksni broj. Zadanim točkama je kružnica podijeljena na N dijelova (lukova) jednakih duljina.

Za fiksni $k \in \{2, 3, \ldots, N-1\}$ definiramo preslikavanje $T_i \mapsto T_j$ tako da vrijedi

$$j = ki \mod N. \tag{1}$$

Ovo preslikavanje geometrijski možemo vizualizirati crtanjem tetive $\overline{T_iT_j}$. Drugim riječima, svaku točku T_i spajamo s onom točkom T_j tako da vrijedi (1).

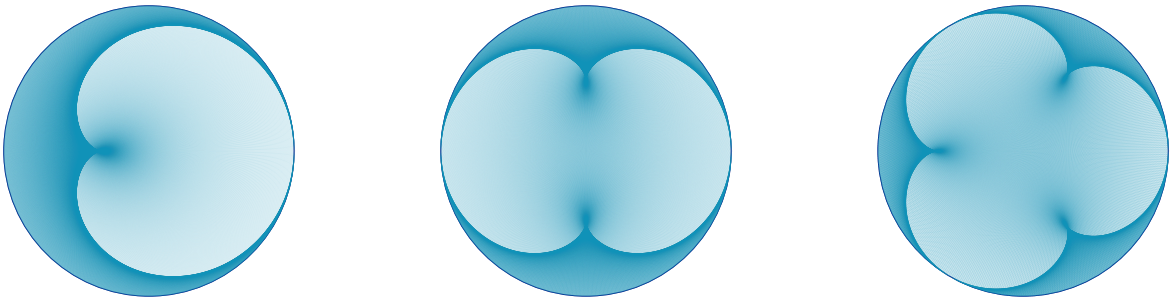


(a) $k = 2$ (b) $k = 3$ (c) $k = 4$

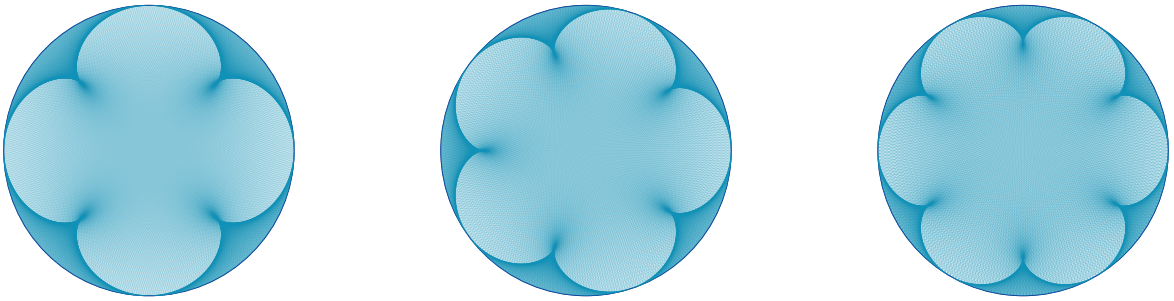
(d) $k = 5$ (e) $k = 6$ (f) $k = 7$

(g) $k = 8$ (h) $k = 9$ (i) $k = 10$

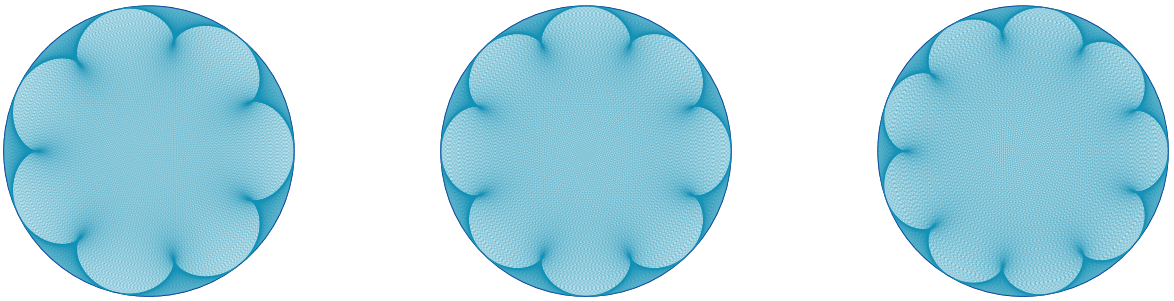
Slika 1: $N = 200$ točaka



(a) $k = 2$ (b) $k = 3$ (c) $k = 4$



(d) $k = 5$ (e) $k = 6$ (f) $k = 7$



(g) $k = 8$ (h) $k = 9$ (i) $k = 10$

Slika 2: $N = 2000$ točaka

2 Kontinuirani slučaj

Slike 1 i 2 nam sugeriraju da promatrane tetive omataju određenu krivulju. Kada $N \to \infty$, diskretni kut $\theta_i = \frac{2\pi i}{N}$ postaje kontinuirani parametar $t \in [0, 2\pi]$.

Svaka tetiva tada spaja dvije točke na kružnici čije su koordinate dane parametarskim jednadžbama

$$A(t) = (R\cos t, R\sin t)$$
$$B(t) = (R\cos(kt), R\sin(kt))$$

pri čemu je $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ zadani fiksni broj.

3 Jednadžba familije tetiva

Da bismo pronašli analitički oblik ovojnice, prvo moramo izvesti opću jednadžbu pravca koji prolazi kroz točke $A(t)$ i $B(t)$. Koeficijent smjera m tog pravca iznosi

$$m = \frac{\sin(kt) - \sin t}{\cos(kt) - \cos t}.$$

Korištenjem poznatih trigonometrijskih identiteta za pretvorbu razlike u umnožak

$$\sin kt - \sin t = 2\sin\left(\frac{k-1}{2}t\right)\cos\left(\frac{k+1}{2}t\right)$$

$$\cos kt - \cos t = -2\sin\left(\frac{k-1}{2}t\right)\sin\left(\frac{k+1}{2}t\right)$$

koeficijent smjera prelazi u znatno jednostavniji oblik

$$m = -\operatorname{ctg}\left(\frac{k+1}{2}t\right) = -\frac{\cos\left(\frac{k+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{k+1}{2}t\right)}. \tag{2}$$

Koristeći jednadžbu pravca kroz zadanu točku $A(t)$ i zadani koeficijent smjera m dobivamo

$$y - R\sin t = m(x - R\cos t)$$

$$y\sin\left(\frac{k+1}{2}t\right) - R\sin t\sin\left(\frac{k+1}{2}t\right) = -x\cos\left(\frac{k+1}{2}t\right) + R\cos t\cos\left(\frac{k+1}{2}t\right)$$

$$x\cos\left(\frac{k+1}{2}t\right) + y\sin\left(\frac{k+1}{2}t\right) = R\left[\cos\left(\frac{k+1}{2}t\right)\cos t + \sin\left(\frac{k+1}{2}t\right)\sin t\right]$$

Primijenom poznatog identiteta $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ na izraz na desnoj strani dobivamo jednoparametarsku jednadžbu

$$x\cos\left(\frac{k+1}{2}t\right) + y\sin\left(\frac{k+1}{2}t\right) - R\cos\left(\frac{k-1}{2}t\right) = 0 \tag{3}$$

familije tetiva pri čemu je t parametar, a $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ zadani fiksni broj.

4 Parametarske jednadžbe ovojnice

Neka je $U = V \times I \subseteq \mathbb{R}^3$ pri čemu je $V \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoreni skup i $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Neka je $F : U \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^2. Neka je $F(x, y, t) = 0$ jednadžba familije krivulja po parametru $t \in I$, a (x, y) su koordinate točke na pripadnoj krivulji. Drugima riječima, za svaki $t \in I$ krivulja C_t iz te familije je

$$C_t = \{(x, y) \in V : F(x, y, t) = 0\}.$$

Promotrimo implicitno zadanu plohu

$$S = \{(x, y, t) \in U : F(x, y, t) = 0\}.$$

Pretpostavimo da je S regularna ploha. U tom slučaju je $\nabla F(x, y, t) \neq (0, 0, 0)$ u svakoj točki plohe S.

Neka je $\mathbf{P} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ortogonalna projekcija na xy-ravninu, tj.

$$\mathbf{P}(x, y, t) = (x, y).$$

Diferencijal funkcije $\mathbf{P}$ u točki (x, y, t) je linearni operator $\mathrm{d}\mathbf{P}(x, y, t) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ koji u paru kanonskih baza ima matrični prikaz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x}(x, y, t) & \frac{\partial P_1}{\partial y}(x, y, t) & \frac{\partial P_1}{\partial t}(x, y, t) \\ \frac{\partial P_2}{\partial x}(x, y, t) & \frac{\partial P_2}{\partial y}(x, y, t) & \frac{\partial P_2}{\partial t}(x, y, t) \end{bmatrix}$$

pri čemu je $P_1(x, y, t) = x$ i $P_2(x, y, t) = y$. Stoga je

$$\mathrm{d}\mathbf{P}(x, y, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

pa je

$$\mathrm{d}\mathbf{P}(x,y,t)(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}t) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\\ \mathrm{d}t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{bmatrix}.$$

Stoga se $\mathrm{d}\mathbf{P}$ u svakoj točki (x,y,t) ponaša na isti način kao i samo preslikavanje $\mathbf{P}$ (zaboravlja zadnju komponentu). Međutim, to je poznata činjenica koja lagano slijedi iz definicije diferencijala: diferencijal linearnog operatora u svakoj točki jednak je tom linearnom operatoru.

Neka je $\mathbf{p} : S \to \mathbb{R}^2$ restrikcija preslikavanja $\mathbf{P}$ na plohu S. Tada $\mathrm{d}\mathbf{p}(x,y,t)$ linearni operator koji je restrikcija linearnog operatora $\mathrm{d}P(x,y,t)$ na tangencijalni prostor $T_{(x,y,t)}S$ plohe S u točki (x,y,t). Stoga $\mathrm{d}\mathbf{p}(x,y,t)$ također zaboravlja zadnju komponentu, tj. vrijedi

$$\mathrm{d}\mathbf{p}(x,y,t)(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}t) = (\mathrm{d}x,\mathrm{d}y). \tag{4}$$

Slika preslikavanja $\mathbf{p}$ je unija svih krivulja C_t, tj.

$$\operatorname{Im}\mathbf{p} = \bigcup_{t\in I} C_t.$$

Točka $(x,y,t) \in S$ je kritična točka preslikavanja $\mathbf{p}$ ako diferencijal $\mathrm{d}\mathbf{p}(x,y,t) : T_{(x,y,k)}S \to \mathbb{R}^2$ ima netrivijalnu jezgru, tj. ima rang 1. Tangencijalni prostor $T_{(x,y,t)}S$ je dvodimenzionalni realni vektorski prostor koji je izomorfan s $\mathbb{R}^2$. Vektori iz tog prostora moraju biti okomiti na $\nabla F(x,y,t)$. Drugim riječima, tangencijalni prostor plohe S u točki (x,y,t) je

$$T_{(x,y,t)}S = \big\{(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}t) \in \mathbb{R}^3 : F_x(x,y,t)\cdot\mathrm{d}x + F_y(x,y,t)\cdot\mathrm{d}y + F_t(x,y,t)\cdot\mathrm{d}t = 0\big\}. \tag{5}$$

Neka je $(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}t) \in T_{(x,y,z)}S$ takav da je $\mathrm{d}\mathbf{p}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}t) = (0,0)$. Zbog (4) mora biti

$$\mathrm{d}x = 0, \quad \mathrm{d}y = 0. \tag{6}$$

Uvrstimo li (6) u uvjet iz (5) dobivamo

$$F_t(x,y,t)\cdot\mathrm{d}t = 0. \tag{7}$$

Kako bi linearni operator $\mathrm{d}\mathbf{p}$ imao netrivijalnu jezgru, mora biti $\mathrm{d}t \neq 0$. Iz (7) tada slijedi $F_t(x,y,t) = 0$.

Stoga se skup svih kritičnih točaka plohe S dobiva rješavanjem sustava

$$\begin{cases} F(x,y,t) = 0\\ F_t(x,y,t) = 0 \end{cases}. \tag{8}$$

Ovojnicu familije krivulja $F(x,y,t) = 0$ dobivamo ortogonalnom projekcijom tog skupa kritičnih točaka na xy-ravninu. Intuitivno, ovojnica familije krivulja je krivulja koja u svakoj svojoj točki dodiruje neku krivulju iz zadane familije. Rješavanjem sustava (8) dobivamo parametarske jednadžbe $x = x(t)$ i $y = y(t)$ tražene ovojnice.

Sustav (8) je općenito teško riješiti po varijablama x i y. Međutim, prema teoremu o implicitno zadanoj funkciji (vektorski slučaj), sustav (8) možemo teoretski lokalno riješiti u okoline neke točke ako je Jacobijeva matrica tog tog sustava s obzirom na varijable x i y regularna, tj. ako je

$$J = \begin{vmatrix} F_x & F_y\\ F_{tx} & F_{ty}\end{vmatrix} \neq 0.$$

U tom slučaju znamo da barem lokalno postoji rješenje u obliku $x = x(t)$ i $y = y(t)$, iako možda ne znamo eksplicitne formule. Usprkos tome što možda ne znamo eksplicitnu parametrizaciju ovojnice,

možemo dobiti eksplicitne formule za vektor smjera tangente u svakoj njezinoj točki. Ako u (8) uvrstimo $x = x(t)$ i $y = y(t)$ i deriviramo svaku jednadžbu po parametru t, lančano pravilo daje

$$\begin{aligned} F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} + F_t &= 0 \\ F_{tx} \cdot \dot{x} + F_{ty} \cdot \dot{y} + F_{tt} &= 0 \end{aligned}$$

pri čemu točkica označava derivaciju po parametru t. Kako je $F_t = 0$ konačno dobivamo

$$\begin{aligned} F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} &= 0 \\ F_{tx} \cdot \dot{x} + F_{ty} \cdot \dot{y} &= -F_{tt} \end{aligned} \tag{9}$$

Rješavanjem linearnog sustava (9) po $\dot{x}$ i $\dot{y}$ dobivamo

$$\dot{x}(t) = \frac{F_{tt}F_y}{J}, \quad \dot{y}(t) = -\frac{F_{tt}F_x}{J}. \tag{10}$$

Kako je po pretpostavci S regularna ploha i kako za točke ovojnice vrijedi $F_t = 0$, zaključujemo da je barem jedna od parcijalnih derivacija F_x i F_y u svakoj kritičnoj točki različita od nule. Iz (10) slijedi da je ovojnica regularna u svim točkama u kojima je $F_{tt} \neq 0$. U točkama u kojima je $F_{tt} = 0$ tangenta nije određena (vektor smjera tangente je nulvektor) i u tim točkama krivulja ima šiljke kao što možemo vidjeti na slikama 1 i 2. Za detaljnu klasifikaciju tipa šiljka potrebno je analizirati ponašanje parcijalnih derivacija višeg reda po parametru t, ali ovdje dalje nećemo ulaziti u te detalje.

Vratimo se na našu familiju krivulja određenu s (3). U našem slučaju je

$$F(x, y, t) = x\cos\left(\frac{k+1}{2}t\right) + y\sin\left(\frac{k+1}{2}t\right) - R\cos\left(\frac{k-1}{2}t\right).$$

Parcijalna derivacija funkcije F po parametru t jednaka je

$$F_t(x, y, t) = -\frac{k+1}{2}x\sin\left(\frac{k+1}{2}t\right) + \frac{k+1}{2}y\cos\left(\frac{k+1}{2}t\right) + \frac{(k-1)R}{2}\sin\left(\frac{k-1}{2}t\right).$$

Sustav (8) prelazi u sustav dvije linearne jednadžbe po nepoznanicama x i y.

$$\begin{aligned} x\cos\left(\frac{k+1}{2}t\right) + y\sin\left(\frac{k+1}{2}t\right) &= R\cos\left(\frac{k-1}{2}t\right) \\ x\sin\left(\frac{k+1}{2}t\right) - y\cos\left(\frac{k+1}{2}t\right) &= \frac{(k-1)R}{k+1}\sin\left(\frac{k-1}{2}t\right) \end{aligned} \tag{11}$$

Uz korištenjem poznatih trigonometrijskih identiteta

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

rješenje sustava (11) možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{R}{k+1}\Big(k\cos t + \cos(kt)\Big) \\ y(t) &= \frac{R}{k+1}\Big(k\sin t + \sin(kt)\Big) \end{aligned} \tag{12}$$

čime dobivamo parametarske jednadžbe ovojnice zadane familije tetiva.

Za određivanje singularnih točaka dobivene ovojnice potrebna nam je parcijalna derivacija drugog reda F_{tt}.

$$F_{tt}(x,y,t) = -\frac{(k+1)^2}{4}x\cos\left(\frac{k+1}{2}t\right) - \frac{(k+1)^2}{4}y\sin\left(\frac{k+1}{2}t\right) + \frac{(k-1)^2R}{4}\cos\left(\frac{k-1}{2}t\right) =$$

$$= -\frac{(k+1)^2}{4}\left[x\cos\left(\frac{k+1}{2}t\right) + y\sin\left(\frac{k+1}{2}t\right)\right] + \frac{(k-1)^2R}{4}\cos\left(\frac{k-1}{2}t\right) =$$

$$= -\frac{(k+1)^2}{4}\left[F(x,y,t) + R\cos\left(\frac{k-1}{2}t\right)\right] + \frac{(k-1)^2R}{4}\cos\left(\frac{k-1}{2}t\right)$$

Kako za točke ovojnice vrijedi $F(x,y,t)=0$, iz $F_{tt}=0$ slijedi

$$-Rk\cos\left(\frac{k-1}{2}t\right) = 0. \tag{13}$$

Iz (13) slijedi $\frac{k-1}{2}t = \frac{\pi}{2} + m\pi$ pri čemu je $m \in \mathbb{Z}$, odnosno

$$t = \frac{2m+1}{k-1}\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

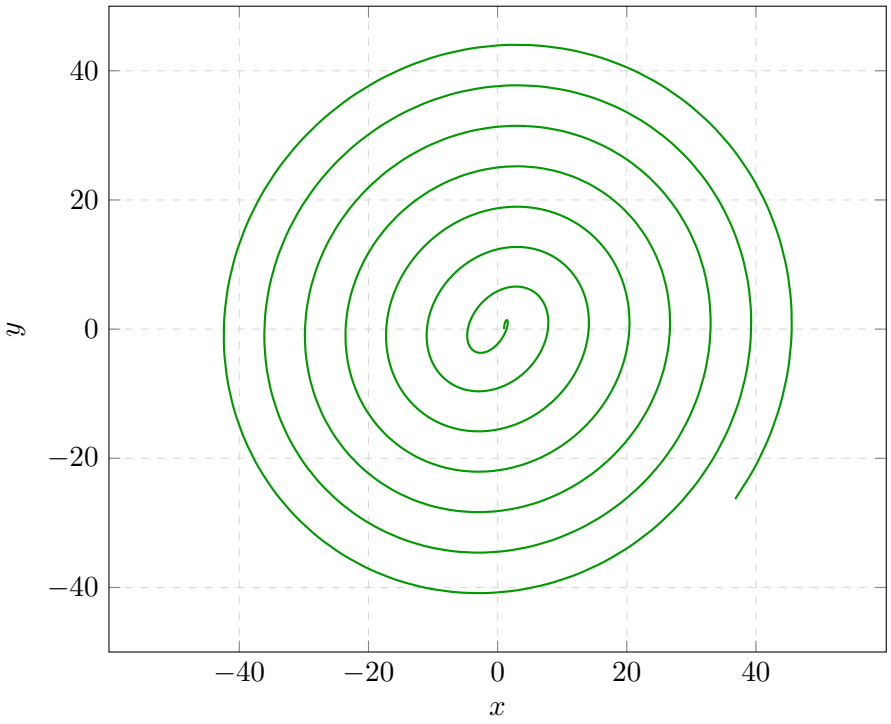
Zanima nas koliko takvih točaka (šiljaka) imamo unutar jedne pune rotacije po početnoj kružnici. Iz

$$0 \leqslant \frac{2m+1}{k-1}\pi < 2\pi$$

slijedi

$$-\frac{1}{2} \leqslant m < k - \frac{3}{2}.$$

Kako je $m \in \mathbb{Z}$ i $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, zaključujemo da je $m \in \{0,1,\ldots,k-2\}$ pa dobivena ovojnica ima ukupno $k-1$ šiljaka koje vidimo na slikama 1 i 2.



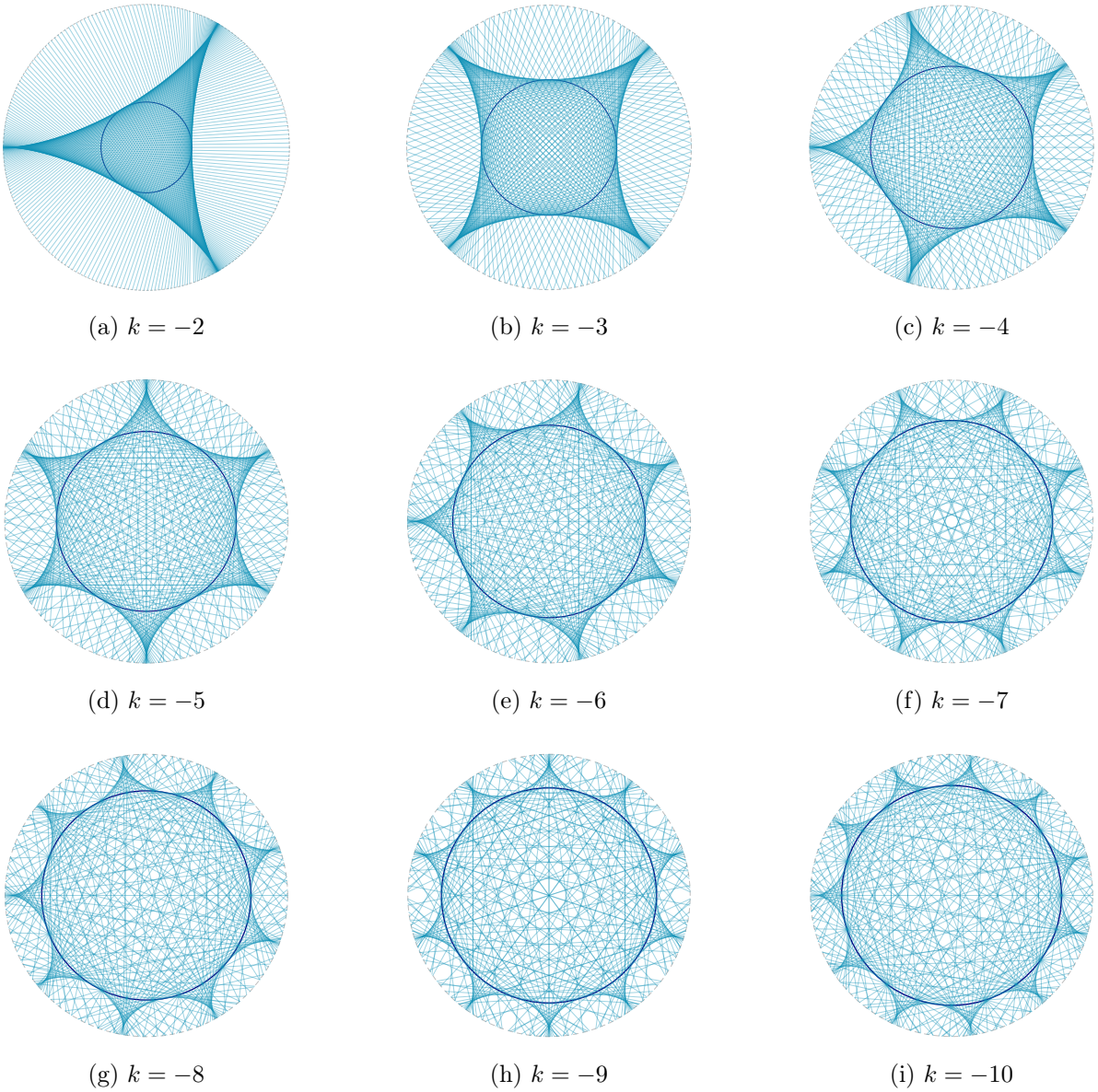
Slika 3: granični slučaj $k=-1$

5 Slučaj $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

Parametarskim jednadžbama (12) dobro je definirana krivulja za svaki $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Za $k = 0$ krivulja degenerira u jednu točku $(R, 0)$, a za $k = 1$ dobivamo kružnicu polumjera R s centrom u ishodištu.

Ako je faktor k racionalni broj oblika $k = \frac{p}{q}$ pri čemu je $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ i $M(p, q) = 1$, parametar t poprima vrijednosti u intervalu $[0, 2q\pi]$ kako bi zatvorio puni ciklus. U tom slučaju ukupni broj šiljaka jednak je $|p - q|$. U slučaju $k < 0$ zadana familija tetiva (pravaca) omata krivulju koja se nalazi izvan zadane kružnice.

Ako je k iracionalni broj, krivulja se nikada neće zatvoriti i ima beskonačno mnogo šiljaka ukoliko pustimo parametar t u beskonačno. Vizualno bi u tom slučaju dobili obojano područje.



(a) $k = -2$ (b) $k = -3$ (c) $k = -4$

(d) $k = -5$ (e) $k = -6$ (f) $k = -7$

(g) $k = -8$ (h) $k = -9$ (i) $k = -10$

Slika 4: $N = 200$ točaka

Iako parametarske jednadžbe (12) nemaju smisla za $k = -1$, možemo pogledati što dobijemo u graničnom slučaju kada $k \to -1$. Korištenjem L'Hospitalovog pravila dobivamo

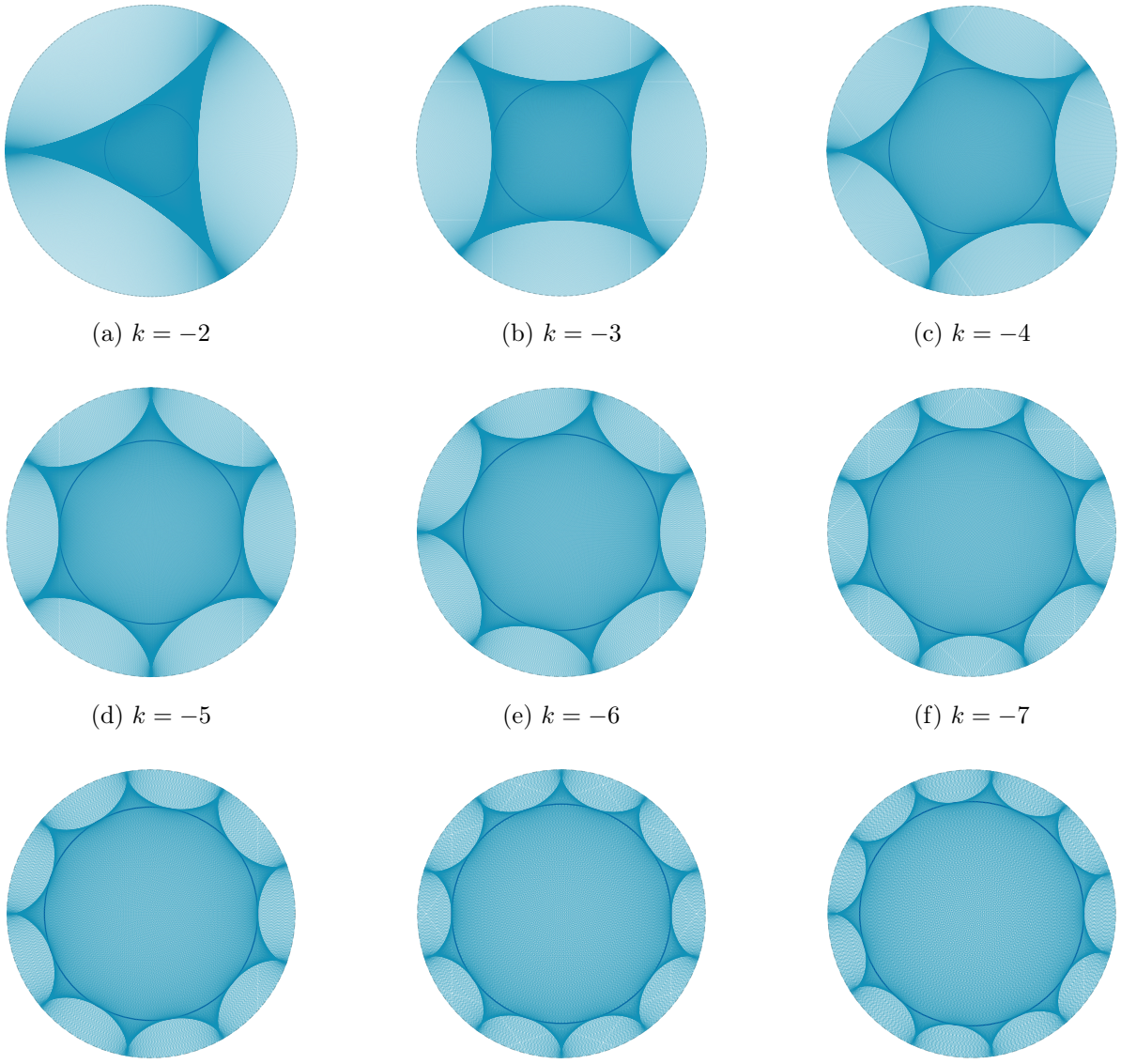
$$\lim_{k\to -1} x(t) = \lim_{k\to -1} \frac{R}{k+1}\Big(k\cos t + \cos(kt)\Big) = R\cdot \lim_{k\to -1} \frac{k\cos t + \cos(kt)}{k+1} =$$

$$= R\cdot \lim_{k\to -1} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}(k\cos t + \cos(kt))}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}(k+1)} = R\cdot \lim_{k\to -1} \frac{\cos t - t\sin(kt)}{1} = R(\cos t + t\sin t)$$

$$\lim_{k\to -1} y(t) = \lim_{k\to -1} \frac{R}{k+1}\Big(k\sin t + \sin(kt)\Big) = R\cdot \lim_{k\to -1} \frac{k\sin t + \sin(kt)}{k+1} =$$

$$= R\cdot \lim_{k\to -1} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}(k\sin t + \sin(kt))}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}(k+1)} = R\cdot \lim_{k\to -1} \frac{\sin t + t\cos(kt)}{1} = R(\sin t + t\cos t)$$

Graf dobivene krivulje prikazan je na slici 3 za $R = 1$ i $t \in \left[0, \frac{147}{10}\pi\right]$.

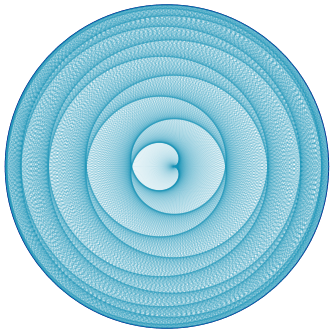


(a) $k = -2$ (b) $k = -3$ (c) $k = -4$

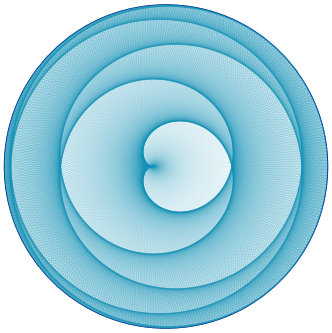
(d) $k = -5$ (e) $k = -6$ (f) $k = -7$

(g) $k = -8$ (h) $k = -9$ (i) $k = -10$

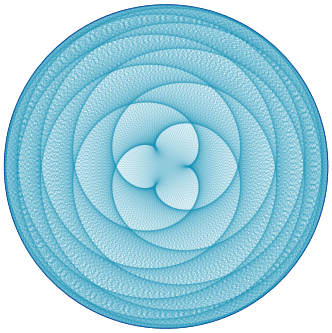
Slika 5: $N = 2000$ točaka



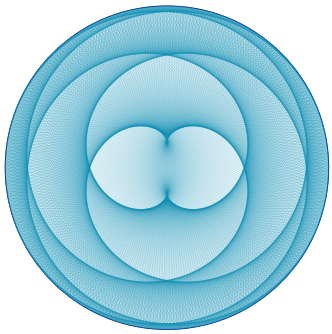
(a) $k = 1.1$



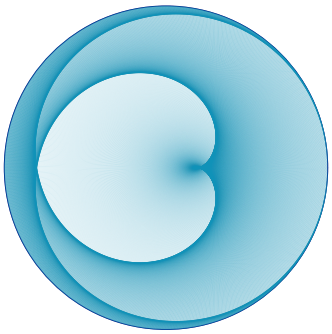
(b) $k = 1.2$



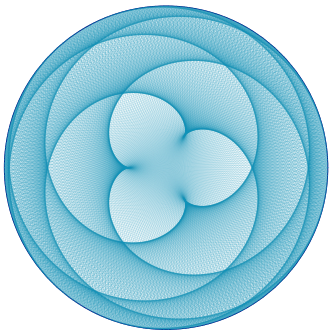
(c) $k = 1.3$



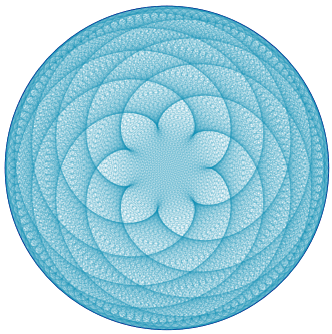
(d) $k = 1.4$



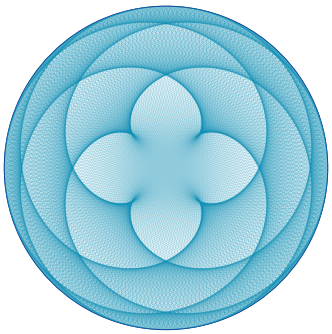
(e) $k = 1.5$



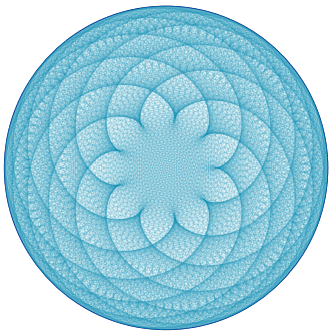
(f) $k = 1.6$



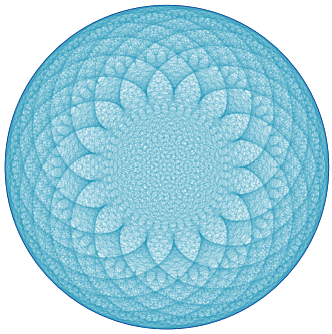
(g) $k = 1.7$



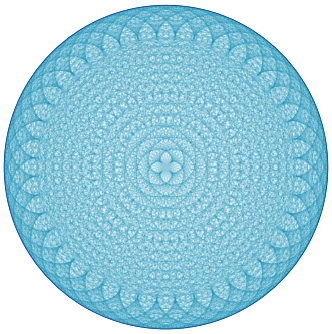
(h) $k = 1.8$



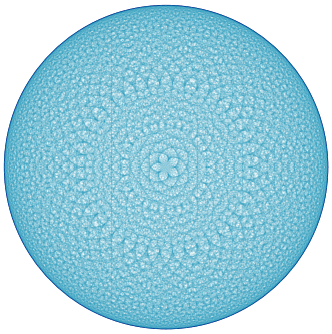
(i) $k = 1.9$



(j) $k = 2.7$

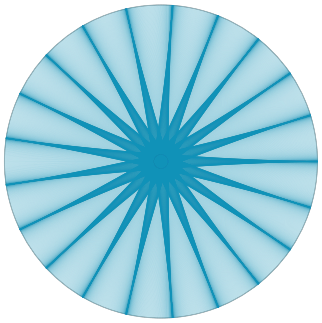


(k) $k = 9.8$

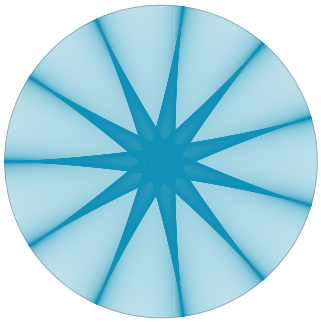


(l) $k = 13.1$

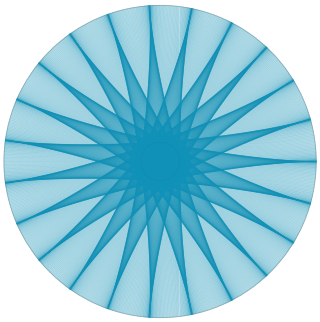
Slika 6: $N = 2000$ točaka



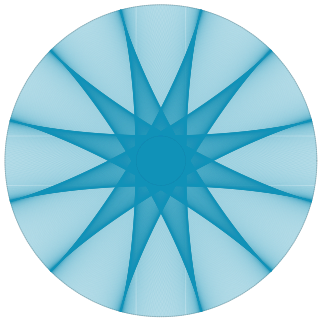
(a) $k = -1.1$



(b) $k = -1.2$



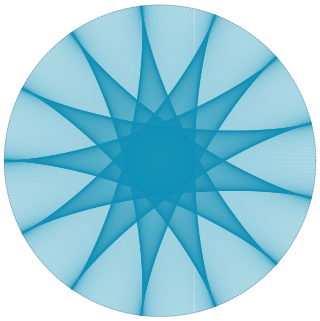
(c) $k = -1.3$



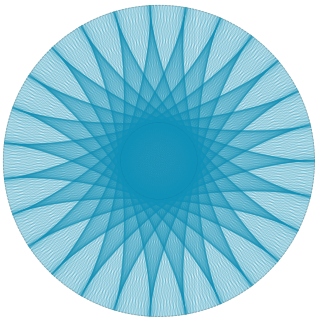
(d) $k = -1.4$



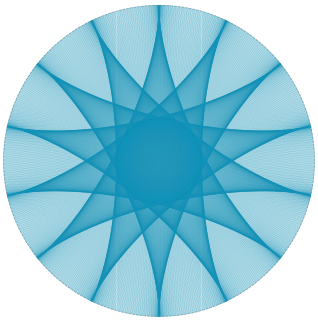
(e) $k = -1.5$



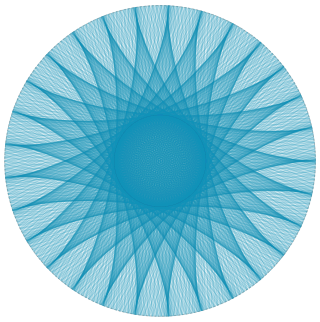
(f) $k = -1.6$



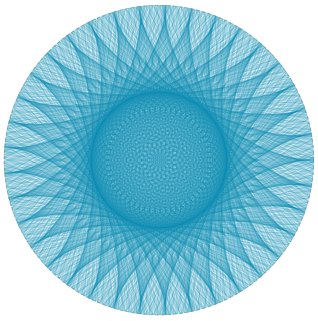
(g) $k = -1.7$



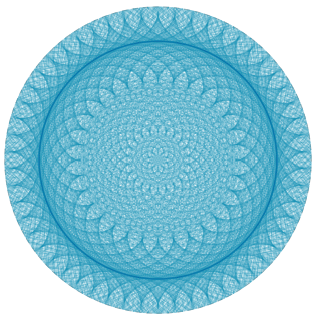
(h) $k = -1.8$



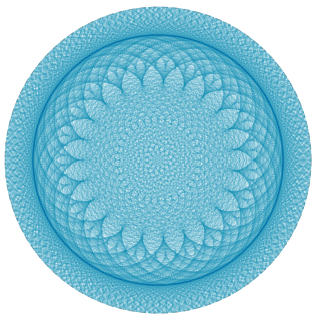
(i) $k = -1.9$



(j) $k = -2.7$



(k) $k = -9.8$



(l) $k = -13.1$

Slika 7: $N = 2000$ točaka