

Od kružnice do epicikličkih krivulja

1 Parametarske jednadžbe kružnice i brzina gibanja

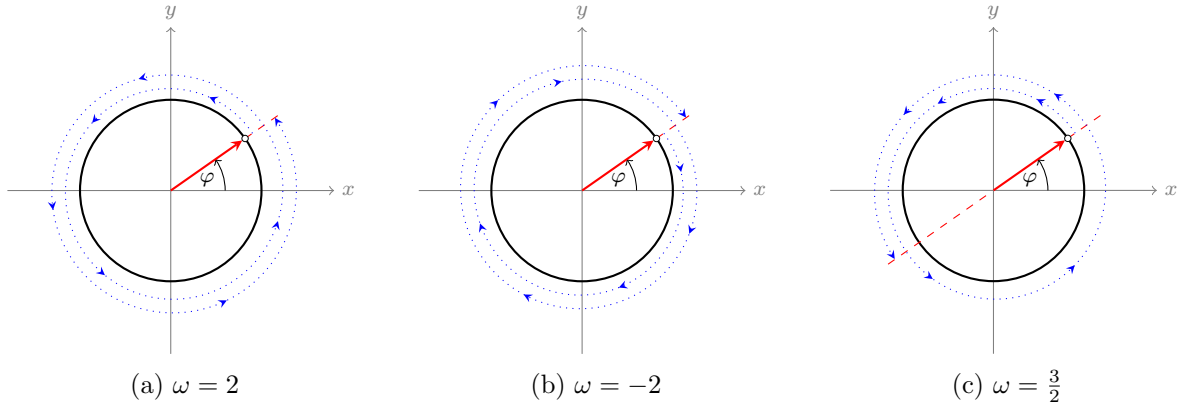
Promotrimo najprije gibanje jedne točke u ravnini $\mathbb{R}^2$ čije su koordinate zadane vremenskim funkcijama:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad y(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (1)$$

Geometrijski gledano, za svaki fiksni trenutak $t \geq 0$, vektor položaja $\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ ima stalnu duljinu (normu) koja predstavlja polumjer kružnice:

$$\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{A^2(\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi))} = A. \quad (2)$$

Parametar $A > 0$ definira amplitudu (radijus kružnice), dok parametar $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ predstavlja kutnu brzinu. Kako vrijeme t teče, kut ωt linearно raste, a točka se giba po kružnici oko ishodišta polumjera A . Ako je $\omega > 0$, točka se giba u pozitivnom smjeru (u smjeru suprotnom od gibanja kazaljke na satu). Ako je $\omega < 0$, točka se giba u negativnom smjeru (u smjeru gibanja kazaljke na satu). Ovisno o duljini konačnog vremenskog intervala i odabrane kutne brzine ω , točka može proći kružnicu više puta ili samo djelomično proći dio kružnice (vidi sliku 1).



Slika 1: Prikaz gibanja radijvektora $\vec{r}(t)$ za $t \in [0, 2\pi]$ i različite vrijednosti parametra ω

Općenito, neka je $t \in [0, T]$ za neki $T > 0$. Ako želimo da se u tom vremenskom intervalu kružnica obilazi točno jednom u pozitivnom smjeru, tada mora vrijediti $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Nadalje, ako želimo da se putanja gibanja zatvori, tj. da je $\vec{r}(0) = \vec{r}(T)$, tada mora vrijediti $\omega = k \cdot \frac{2\pi}{T}$ za neki $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Parametar $\varphi \in [0, 2\pi)$ predstavlja fazni pomak, tj. određuje početnu točku na kružnici od koje kreće gibanje. Ako je $\varphi = 0$, tada gibanje počinje u točki kružnice koja se nalazi na pozitivnom dijelu x -osi, tj. $\vec{r}(0) = (A, 0)$.

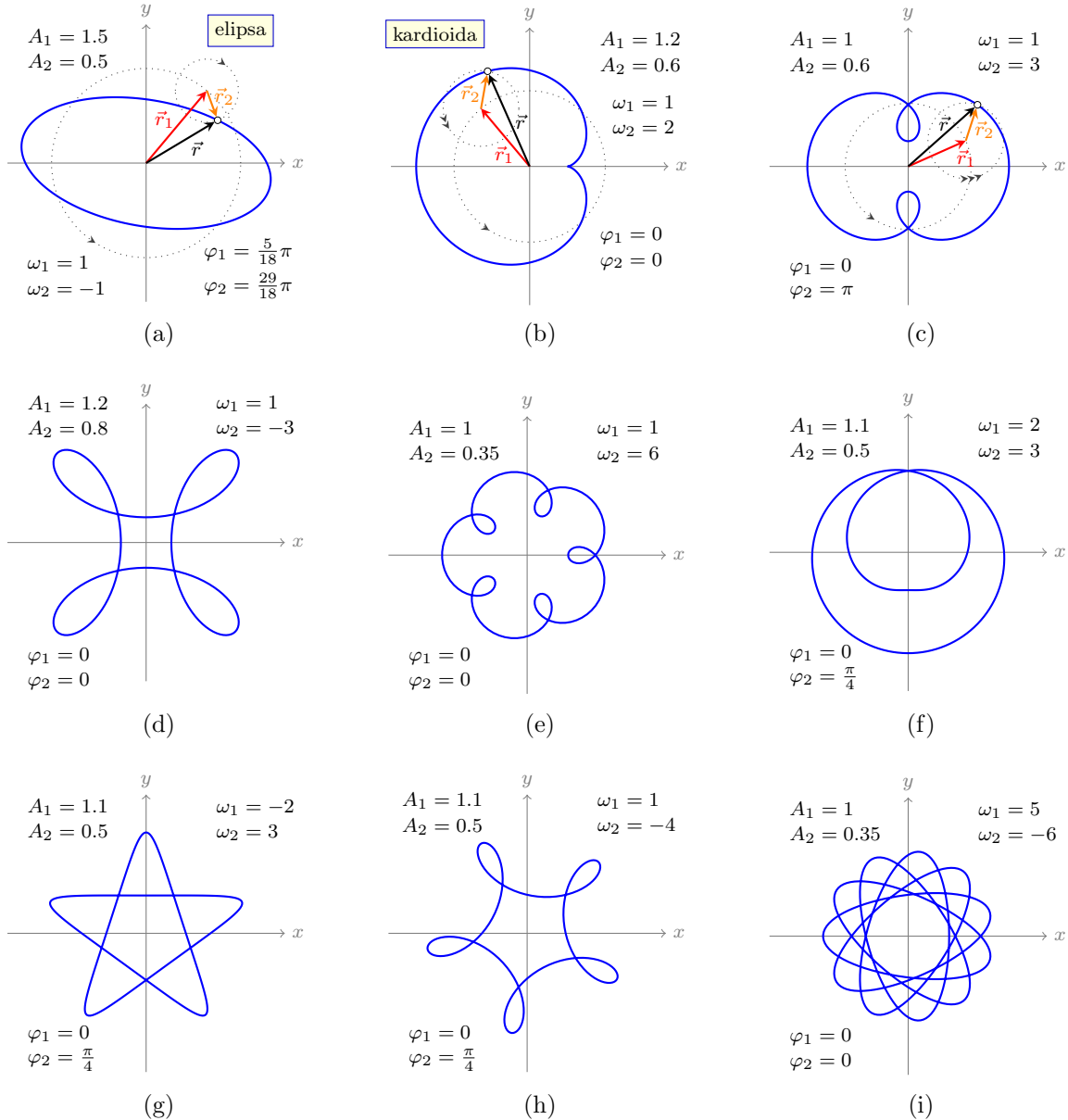
Parametarske jednadžbe (1) mogu se prikazati kao kompozicija dviju rotacija oko ishodišta. Svaka rotacija u ravnini oko ishodišta za kut θ je linearni operator koji u kanonskoj bazi ima matrični zapis

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

Na (1) možemo gledati na sljedeći način. Najprije vektor $(A, 0)$ zarotiramo za kut φ oko ishodišta, a nakon toga dobiveni vektor zarotiramo za kut ωt oko ishodišta. Kompoziciji

$R(\omega t) \circ R(\varphi)$ linearnih operatora odgovara produkt njihovih matričnih zapisa u kanonskoj bazi. Stoga je

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t + \varphi) & -\sin(\omega t + \varphi) \\ \sin(\omega t + \varphi) & \cos(\omega t + \varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}.$$



Slika 2: Neki primjeri krivulja kod gibanja dva rotirajućih vektora i $t \in [0, 2\pi]$

2 Prelazak na dva vektora: Zbrajanje gibanja

Uključimo sada u igru dva vektora $\vec{r}_1(t)$ i $\vec{r}_2(t)$. Neka prvi vektor rotira brzinom ω_1 s duljinom A_1 , a drugi se nadovezuje na njega s duljinom A_2 i brzinom ω_2 . Pozicija $\vec{r}(t)$ u ravnini u svakom je trenutku jednaka zbroju vektora $\vec{r}_1(t)$ i $\vec{r}_2(t)$, tj.

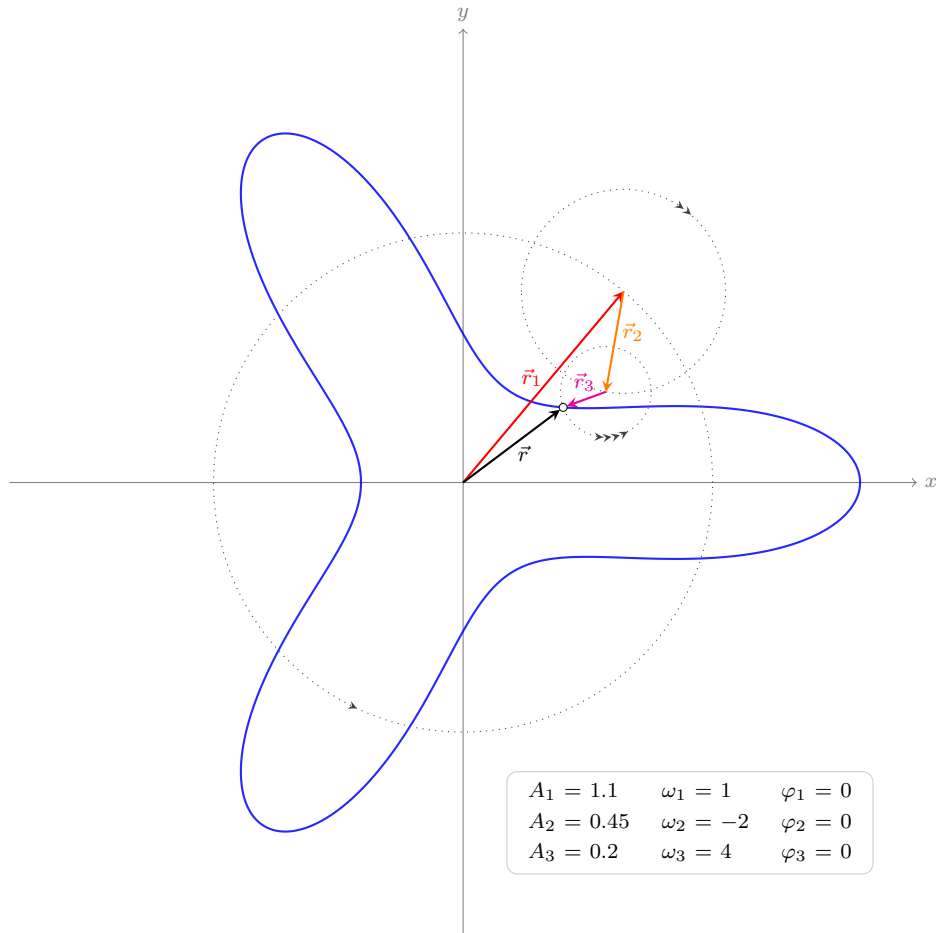
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t) = \begin{bmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{bmatrix} \quad (4)$$

pri čemu su φ_1 i φ_2 početni fazni pomaci pojedinog vektora. Krajnja točka ovog dvostrukog sustava više ne opisuje čistu kružnicu, već složeniju putanju. Neki primjeri takvih krivulja prikazani su na slici 2.

Ako želimo da se krivulja zatvori unutar vremenskog intervala $[0, T]$, tj. da je $\vec{r}(0) = \vec{r}(T)$, tada mora vrijediti

$$\omega_1 = k_1 \cdot \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_2 = k_2 \cdot \frac{2\pi}{T}$$

za neke $k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ koji predstavljaju broj rotacija (pozitivnih ili negativnih) koje pojedini vektori naprave unutar intervala $[0, T]$. Ako su k_1 i k_2 relativno prosti brojevi, tj. $M(k_1, k_2) = 1$, tada će se pripadna krivulja obići točno jednom unutar vremenskog intervala $[0, T]$.



Slika 3: Primjer krivulje kod gibanja tri rotirajuća vektora i $t \in [0, 2\pi]$

3 Opći slučaj: zbrajanje n rotirajućih vektora

Pretpostavimo da imamo n rotirajućih vektora $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_n(t)$ pri čemu je $n \in \mathbb{N}$. Svaki vektor $\vec{r}_k(t)$ ima

- Amplitudu (duljinu): $A_k > 0$,
- Kutnu brzinu: $\omega_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- Početnu fazu: $\varphi_k \in [0, 2\pi)$.

U svakom trenutku $t \in [0, T]$ vrijedi

$$\vec{r}_k(t) = \begin{bmatrix} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \\ A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) \end{bmatrix}.$$

Vektorska funkcija položaja $\vec{r}(t)$ definirana je kao suma svih rotirajućih komponenti $\vec{r}_k(t)$, tj.

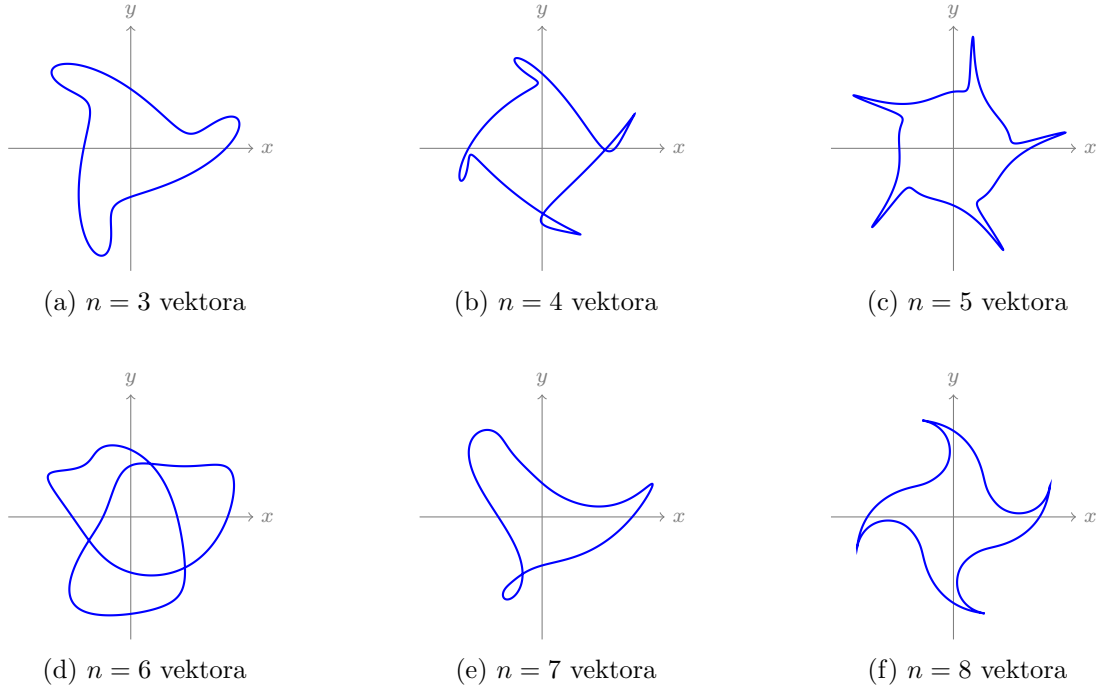
$$\vec{r}(t) = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k(t) = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \\ A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Skup svih točaka $\Gamma = \{\vec{r}(t) \mid t \in [0, T]\}$ koje opisuje krajnja točka ove sume tijekom zadanog vremenskog intervala naziva se **epiciklička krivulja**.

Ako želimo da se krivulja zatvori unutar vremenskog intervala $[0, T]$, tj. da je $\vec{r}(0) = \vec{r}(T)$, tada mora vrijediti

$$\omega_1 = k_1 \cdot \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_2 = k_2 \cdot \frac{2\pi}{T}, \quad \dots, \quad \omega_n = k_n \cdot \frac{2\pi}{T}$$

za neke $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ koji predstavljaju broj rotacija (pozitivnih ili negativnih) koje pojedini vektori naprave unutar intervala $[0, T]$. Ako je $M(k_1, k_2, \dots, k_n) = 1$, tada će se pripadna krivulja obići točno jednom unutar vremenskog intervala $[0, T]$.



Slika 4: Neki primjeri epicikličkih krivulja za $n = 3$ do $n = 8$ rotirajućih vektora